BME Folyamatszabályozási Tanszék

A fuzzy halmazok elmélete és karyometriai alkalmazása

Kóczy T. László, Győrffy Zoltán és Hajnal Miklós

I. Bevezetés

A fuzzy halmaz fogalmának többé-kevésbé egzakt matematikai definiálása (Zadeh 1965, 1969), ugy tünik, számos tudományág és alkalmazási terület előtt nyitott meg uj távlatokat.

A fuzzy halmaz elnevezés tartalma lényegében az intuitiv halmazfogalommal egyezik, amely matematikai szempontból valamilyen "nem jól definiált", azaz "elmosódott határu" halmaznak felel meg. E-szerint a hagyományos halmazelmélet egyik leglényegibb alapfogalma, a "halmaz eleme", vagyis más szóval a "tartalmazás" relációja elveszíti kitüntetett szerepét, helyét az általánosabb "tartalmazás mértéke" veszi át.

A Zadeh-féle elmélet kiterjesztésének alapján (Goguen 1967) a fuzzy halmaz helyett fuzzy objektumot is mondhatunk, amely tulajdonképpen az "objektumok" fuzzy halmaza.

Az A fuzzy objektum megadásához tekintsük az objektumok X univerzumát. Az X elemein definiáljuk az alábbi $\mu_A(x)$ tagsági függvényt :

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1] . \qquad /1/$$

Ennek értelmezése : $\mu_A(x_0)$ az $x_0 \in A$ állítás szubjektiv igazságértékét (akceptanciáját) adja meg, ahol

$$\left[\mu_A(x_0) = 1\right] \triangleq x_0 \in A \qquad /2/$$

és

$$\left[\mu_A(x_0) = 0\right] \triangleq x_0 \notin A \, . \qquad /3/$$

/2/ és /3/ biztositja, hogy a hagyományos halmazelmélet a fuzzy elmélet része legyen. (Ez nem jelenti azonban azt, hogy a hagyományos halmazelmélet nélkül a fuzzy halmazelmélet felépithető!)

A fent röviden ismertetett szemlélet alapján logika is értelmezhető (Lee és Chang 1971, Lee 1971). Ez lehetővé teszi a nem egzakt kijelentések kalkulusának felépitését, majd ennek alapján a biológia, pszichológia, sőt egyes társadalomtudományok logikai formalizálását.

További lényeges alkalmazási területet jelent az ember-gép rendszerek, valamint a szubjektiv kritériumokat tartalmazó algoritmusok hatékony szimulálása, kontrollálása, illetve realizálása.

E tanulmány az utóbbi terület egy résztémájával foglalkozik, célja egy adaptiv osztályozó (cluster-analizáló) algoritmus bemutatása, amely egyszerü formájában is alkalmas a karyometria alapproblémájának, a sejtmag-alakfelismerésnek, illetve clusterolásnak megoldására.

II. A fuzzy c-algebra

A hagyományos halmazalgebra (Birkhoff 1948) analógiájára a fuzzy halmazfogalommal egyidejüleg megszületett a fuzzy algebra egy kezdetleges rendszere is (Zadeh 1965). Ennek bizonyos ellentmondásai néhány definició módositásával kiküszöbölhetők (Kóczy 1974, Kóczy és Győrffy 1974/1), vannak azonban olyan lényegi jellegzetességei is, amelyek mind elméleti, mind alkalmazási szempontból megalapozatlanná teszik e rendszer definicióit.

E jellegzetességek olyan, az intuitiv következtetési sémákkal való kontradikciók, amelyeknek feloldása csupán egy lényegében uj müveleti definiciórendszer magalkotásával történhet. A Zadeh-rendszer további hátránya néhány olyan tulajdonság, amely az adaptiv algoritmusokban történő alkalmazhatóságot megnehezíti. (Idempotencia, szük halmazfogalom, stb.)

Véleményünk szerint három alapvető feltételpár adható meg, amelyeknek egy - az intuitiv gondolkodást jól modellező - valódi fuzzy algebrában ki kell elégülni, a Zadeh-algebrában azonban nem teljesülnek :

1.) A hagyományos halmazok speciális esetét kivéve az unió müvelet eredménye szigoruan nagyobb, az interszekcióé szigoruan kisebb kell legyen mindkét operandusnál.

2.) Valódi fuzzy halmazok esetén mindkét irányu disztributiv törvénynek szigoru egyenlőtlenséggé kell módosulni.

3.) Mindkét alapmüveletnek (unió, interszekció) mindkét operandusra nézve szigoruan monotonnak kell lenni.

Utóbbi feltételből a müveletek invertálhatósága is következik - a 0-val való osztás analóg esetét kivéve.

A fentiek számos egyszerü intuitiv logikai döntést jól modelleznek.

Az itt ismertetett feltételeket azért tartjuk a cluster-analizis szempontjából lényegesnek, mert a tanulás és az osztályozás algoritmusa hasonló kell legyen az emberi agyban lejátszódó megfelelő folyamatokhoz - jó hatásfok elérése esetén, hiszen az ismert legtökéletesebb tanuló rendszer az emberi agy.

A fent ismertetett szempontok vezettek el a Zadeh-algebra (Zadeh 1965) helyett egy lényegében uj, un. fuzzy c-algebra definiálásához (Kóczy 1974), amelynek természetes voltát egy igen előnyös formális tulajdonság is igazolja : a c-algebra a folytonos differenciálhatóságot konzerválja.

A c-algebra axiómarendszerét itt nem ismertetjük (Kóczy és Győrffy 1974/1,2), csupán az általunk alkalmazott igen egyszerü és természetes reprezentánsának legalapvetőbb definicióit közöljük :

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \qquad /4/$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \qquad /5/$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad /6/$$

(Utóbbi az egyedüli közös definició a Zadeh-rendszerrel.)

A fentiek szerint :

$$\mu_{A\cup^{-1}B}(x) = \frac{\mu_A(x) - \mu_B(x)}{1 - \mu_B(x)} \qquad /7/$$

$$\mu_{A\cap^{-1}B}(x) = \frac{\mu_A(x)}{\mu_B(x)} \qquad /8/$$

E müveletek számos lényeges tulajdonsága (kommutativitás, asszociativitás, non-idempotencia, disztributiv egyenlőtlenségek, De Morgan törvények, stb.) az algebrai alapmüveletek tulajdonságaiból viszonylag egyszerüen levezethetők (Kóczy 1974, Kóczy és Győrffy 1974/2), ezeknek nagy a jelentősége az alkalmazás egyes lépéseinek elméleti megalapozásában.

A fentieken kivül lényeges uj definicióink a komplex fuzzy halmaz fogalma :

Az A komplex fuzzy halmazt a

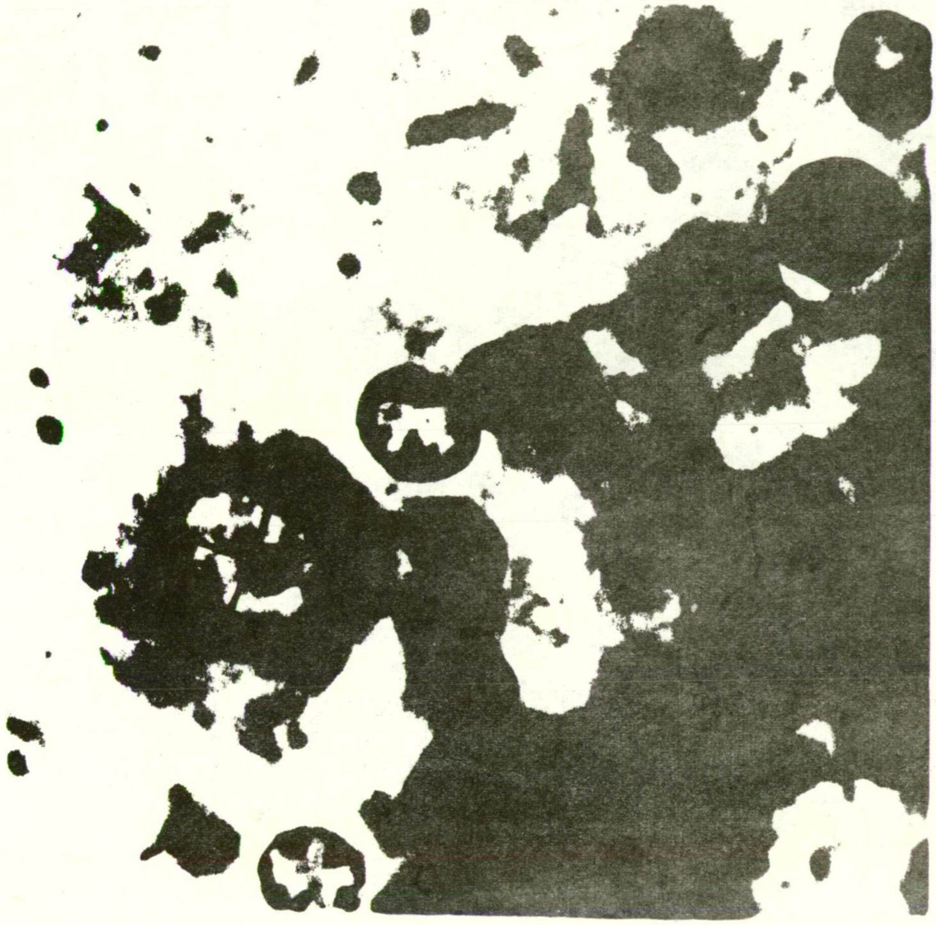
$$\mu_A(x) : X \longrightarrow R^1 \qquad /9/$$

tagsági függvény irja le.

A /4/ - /9/ definiciók által megadott rendszer zárt algebrát alkot; további definicióit, tulajdonságait itt nem ismertetjük (Kóczy 1974, Kóczy és Győrffy 1974/1).

III. Egy sejtmag-osztályozó algoritmus

A karyometria a sejtmagok méreteinek nagyobb mennyiségben történő megfigyelése alapján igyekszik az egy szervet alkotó sejtek tulajdonságaira következtetni (Palkovits és Fischer 1965). Az információkat metszetek mikroszkópi képén végzett mérésekből nyerik. Az 1. ábra ilyen metszet fényképét mutatja egy ideg-sejtmag jellemző geometriai méreteinek feltüntetésével (L a közelitő ellipszis nagy-, B a kistengelye). Az eddig kialakult módszer szerint egy sejtpopuláció osztályozását mintegy 3-400 adatpár (L-B, vagy ezeknek függvényei) alapján készitett sürüségfüggvény hisztogram, az un. pontdiagram szubjektiv - folthatás - vizsgálata utján végzik. Magától értetődik az igy nyert eredmények megbizhatatlan, reprodukálhatatlan és összehasonlithatatlan volta.



1. ábra

Metszet mikroszkópi képe a sejtmag lényeges méreteinek feltüntetésével

E probléma megnyugtató megoldását csakis a clusteranalizis szolgáltathatja. Mivel a metszetek véletlen jellege miatt a különböző méretü sejtek a metszeti kép alapján közvetlenül nem választhatók szét (minden tetszőleges tipusu sejtmag metszetének méretei megközelithetik a 0-t), az egyes osztályok határai nem élesek, ezért látszik alkalmasnak a probléma megoldására a fuzzy koncepció. Osztályozási kisérleteink eddigi eredményei igazolták ezt a feltételezést.

Az egyelőre csak egy dimenzióra kifejlesztett (a $D = \sqrt[3]{L.B^2}$ un. térfogatekvivalens gömbátmérő figyelembevételével alkalmazott) tanuló osztályozó algoritmus (Kóczy és Győrffy 1974/1) a következő fő lépésekből áll:

1.) Rendeljünk minden (i.-ik) beérkező mintaponthoz egy "tagsági függvény-kvantumot":

$$\mu_i(x) = c \cdot e^{-\sigma(x-x_i)} \qquad /10/$$

(c és σ alkalmasan választott konstansok).

2.) Képezzünk az összes mintapontból eredő tagsági függvényt:

$$\mu_e(x) = \bigcup_{i=1}^{n} c \cdot e^{-\sigma(x-x_i)} \qquad /11/$$

(Lásd /4/ definició.)

Az utóbbi lépés más jellegü, változó környezethez történő adaptáció igénye esetén módositásra szorul (Kóczy és Győrffy 1974/1).

A fenti két lépésből álló egység alapgondolatában rokon a Parzen-féle valószinüségi sürüségfüggvény becslési módszerrel (Parzen 1962), bár tartalmában attól eltér.

3.) Bontsuk fel az eredő tagsági függvényt szimmetrikus (komplex) összetevőkre a /7/ és /9/ definiciók alapján).
Több dimenzióban ez a lépés módositásra szorul.

4.) Egyesitsük a 3.) lépés során nyert részhalmazokat minimális számu unimodális clusterrá(/4/ alapján).
Az igy keletkezett osztályok karyometriai adatok esetében valósok /1/ definició, más jellegü adatok esetén szükség lehet egy befejező lépésre (Kóczy és Győrffy 1974/1).

A fenti algoritmus egy konkrét adathalmaz tagsági függvényén szemléltetve látható a 2. - 4. ábrasorozatokon.

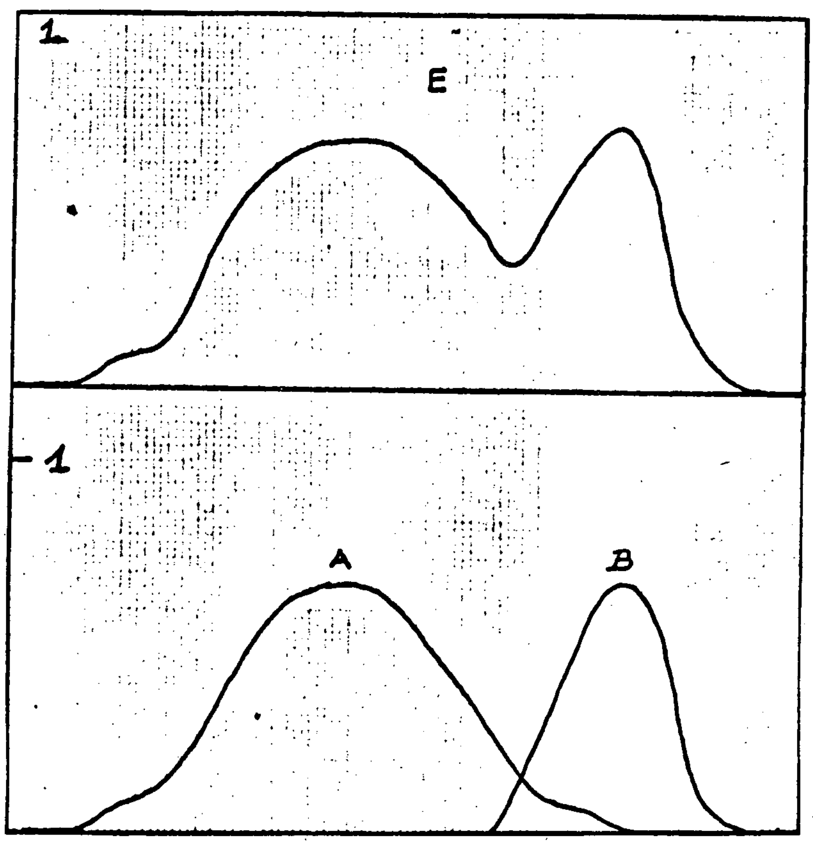
Algoritmusunkkal ezideig a macska cerebellum négy nucleusának sejtjeit igyekeztünk osztályozni (Nucleus medialis, dentatus, interpositus, illetve interpositus anterior).

Az osztályozás során nyert eredmények a sejtpopulációkra vonatkozó sejtésekkel messzemenően egyeznek. Az 5. - 8. ábrasorozatok a fenti négy nucleus sejtpopulációjának pontdiagramjait (az egyes karakterek sötétségi foka a sürüséggel arányos), az eredő tagsági függvényeket és az egyes osztályok tagsági függvényeit mutatják.

További célunk az algoritmus n dimenzióra történő általánositása, és ennek segitségével a sejtpopulációk az eddiginél jóval hatékonyabb - uj tipusu jellemzők alapján történő - osztályozása, amely a korábban alkalmazott szubjektiv módszerekkel még bizonytalan, közelitő szinten sem lehetséges.

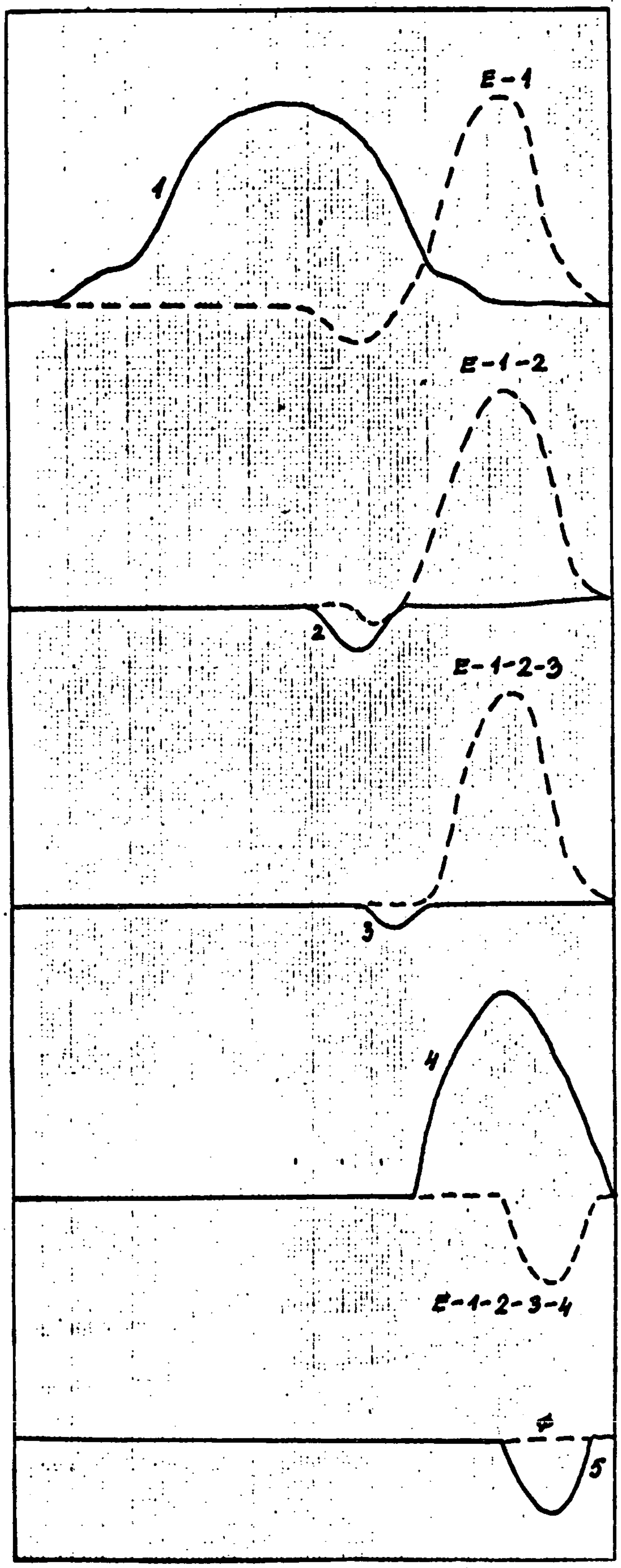
a.

b.

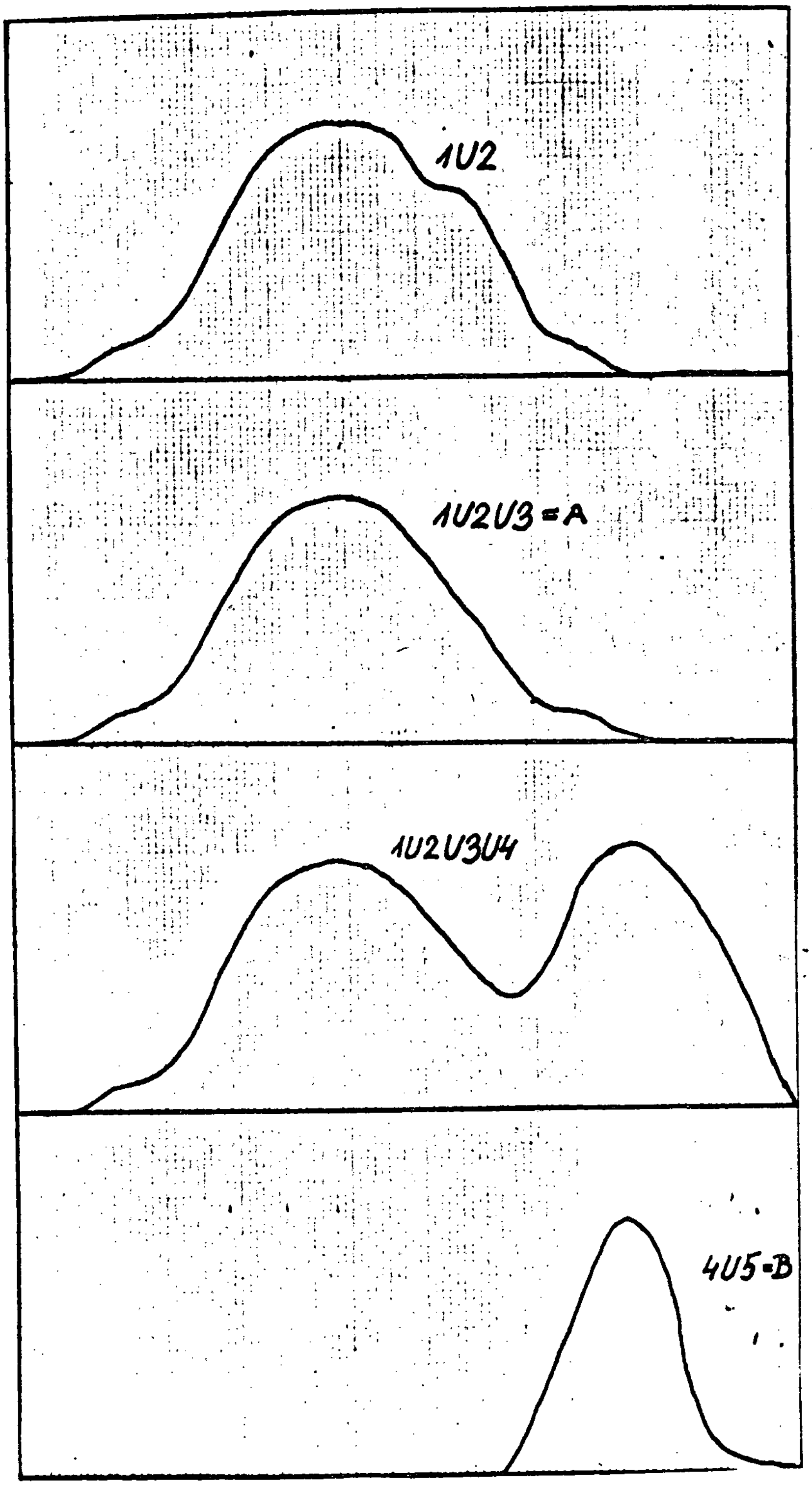


2. ábra.

Eredő tagsági függvény és az osztályozott minta

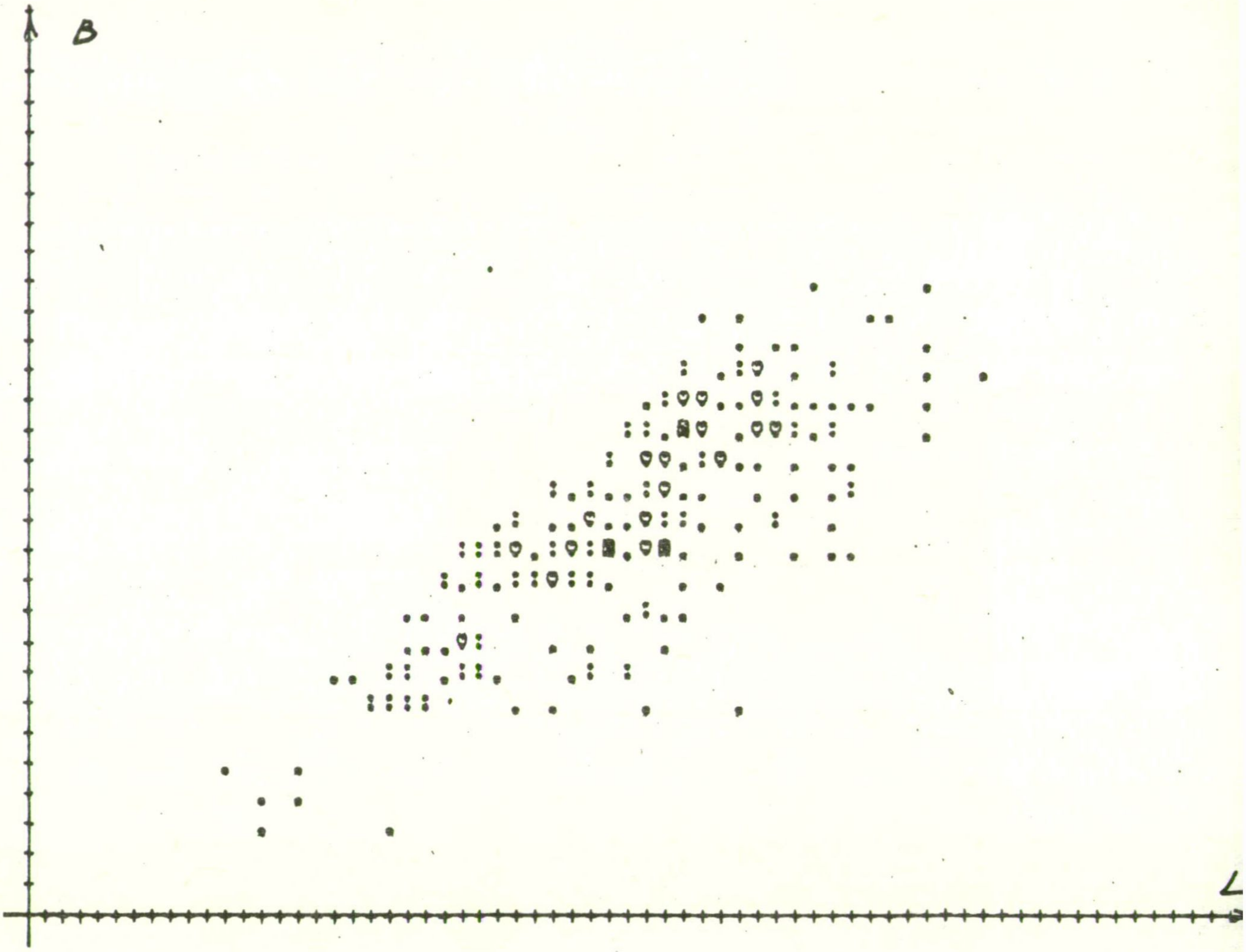


3. ábra
A 2. ábra tagsági függvényének felbontási folyamata



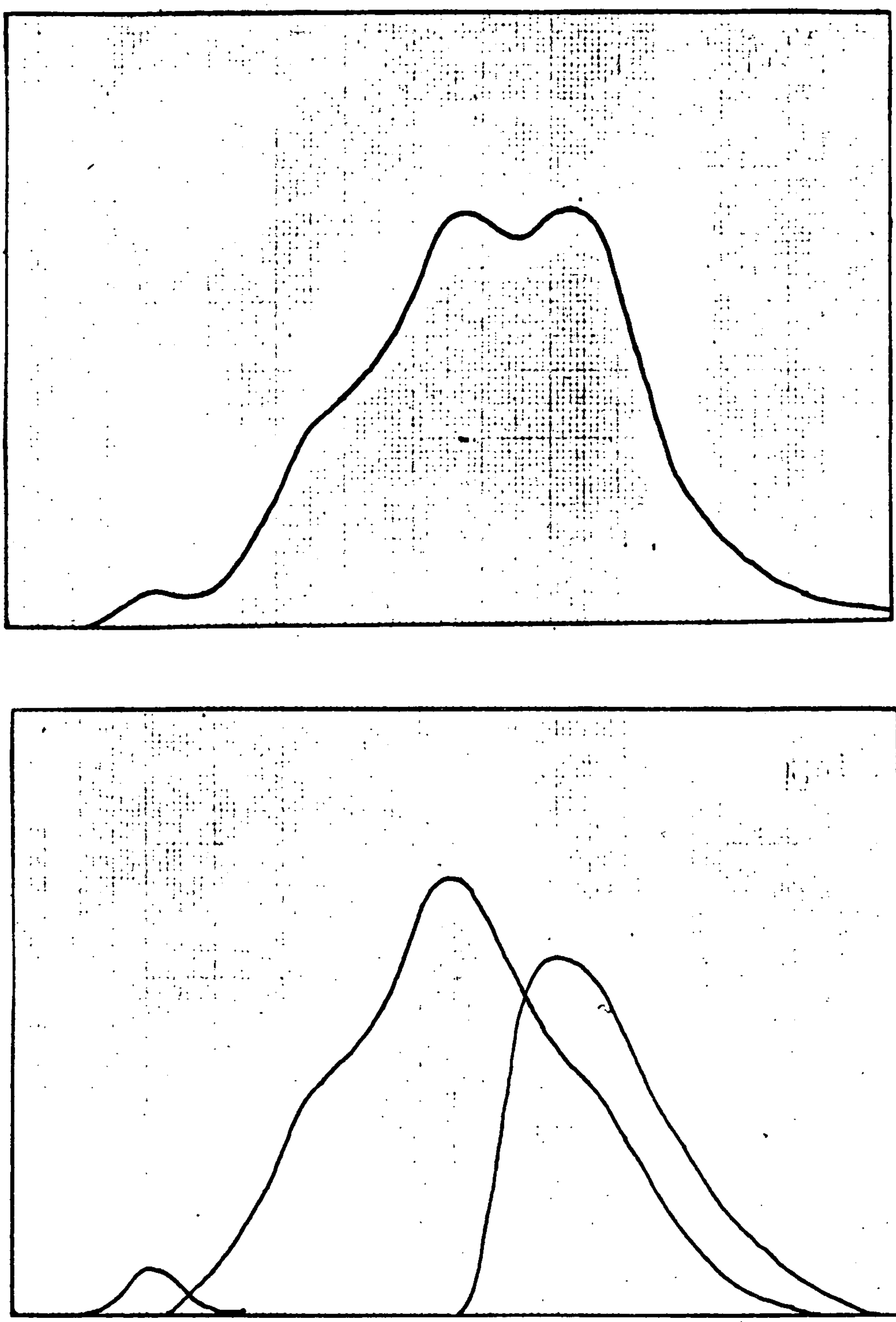
4. ábra

A 3. ábra részhalmazainak egyesitési folyamata



5a. ábra

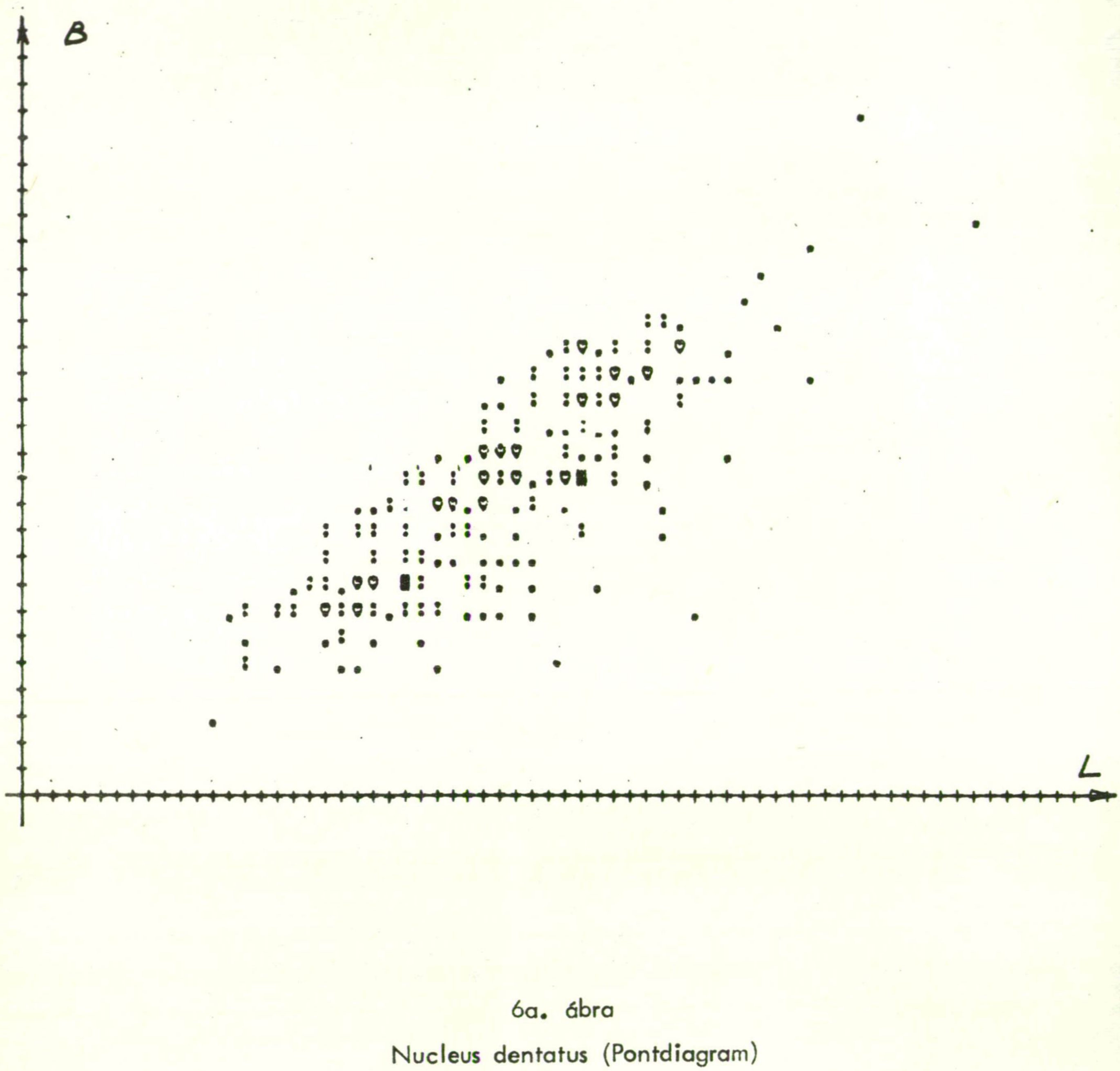
Nucleus medialis (Pontdiagram)



5b. ábra

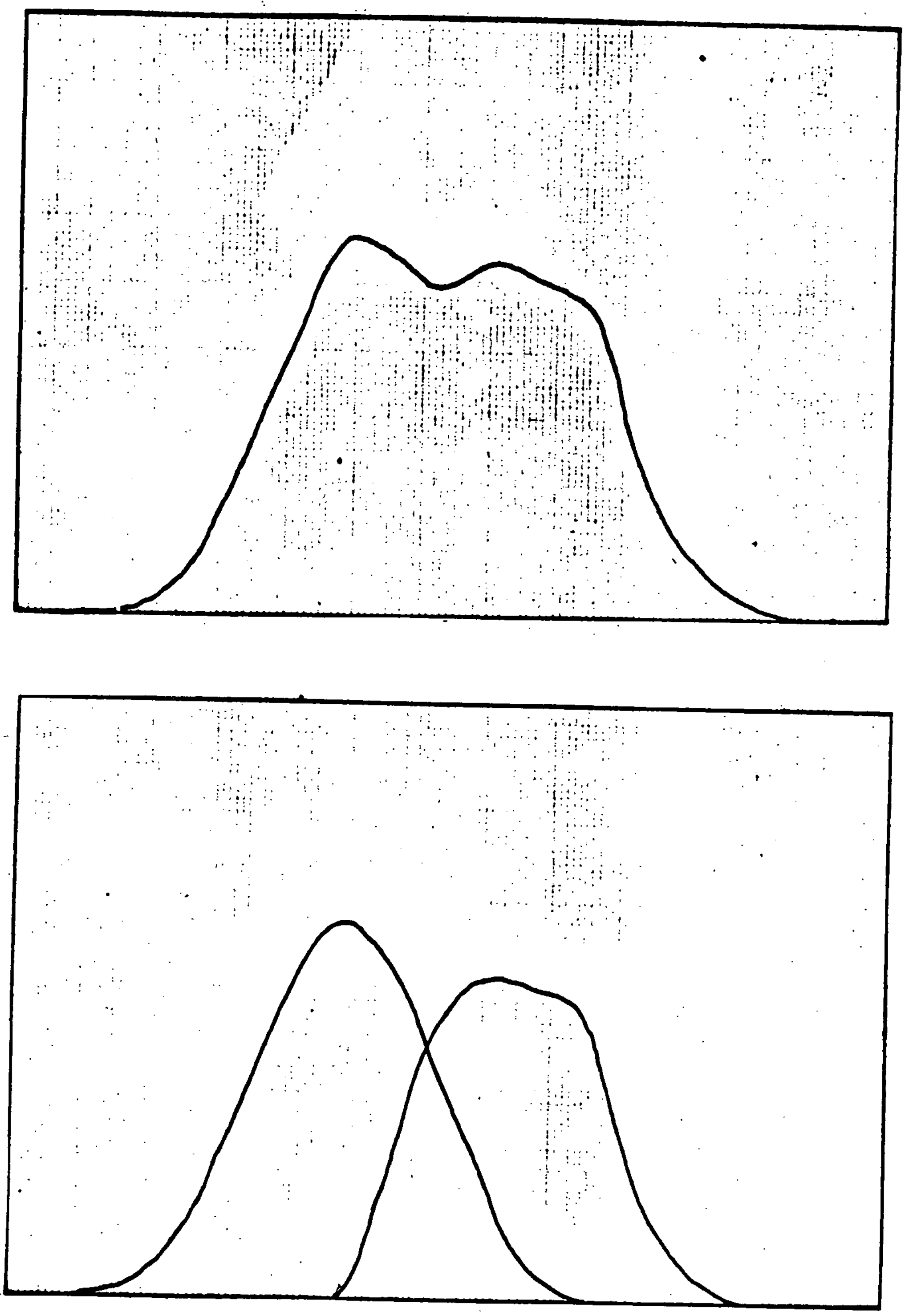
Nucleus medialis

(Eredő tagsági függvény és clusterok)



6a. ábra

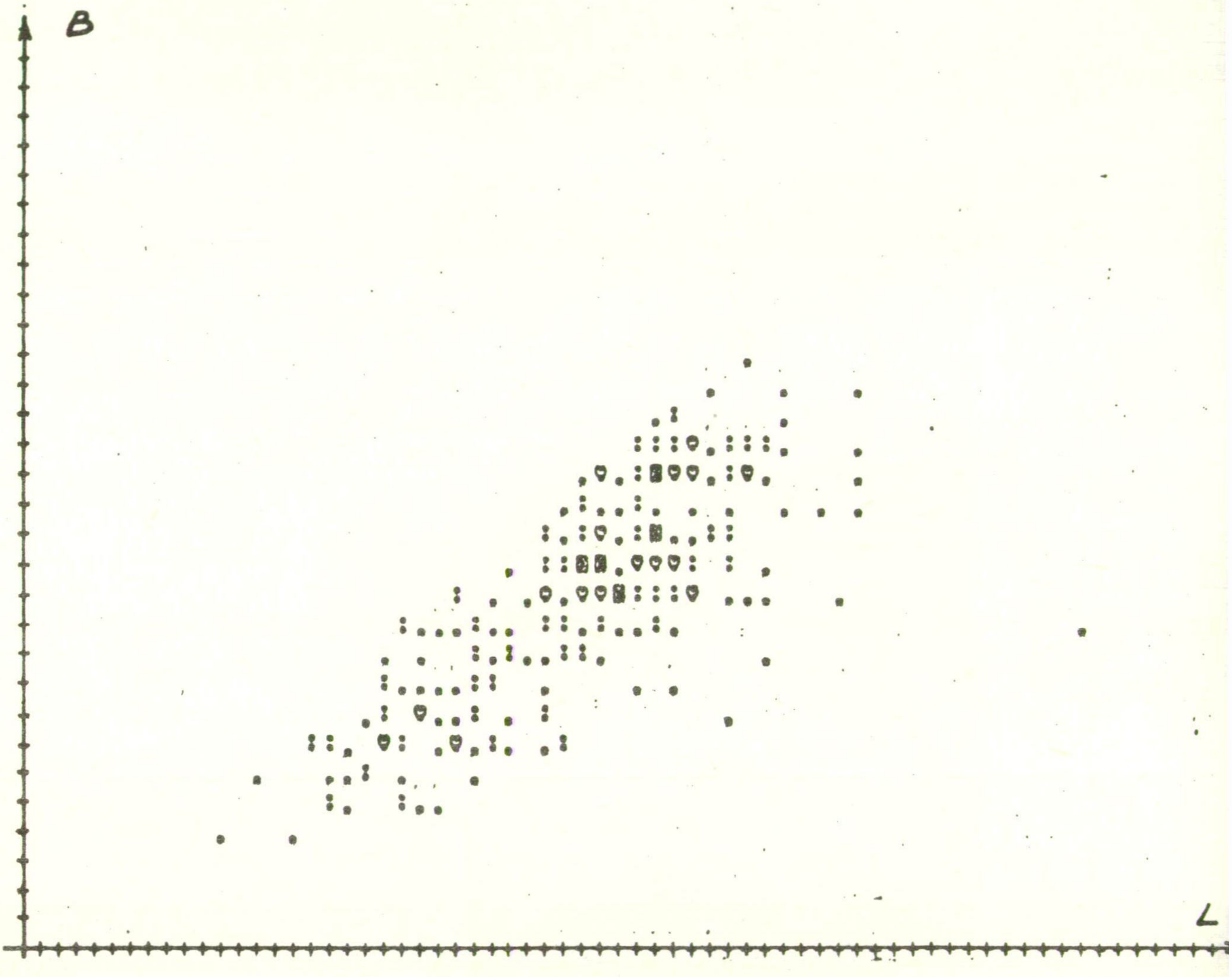
Nucleus dentatus (Pontdiagram)



6b. ábra

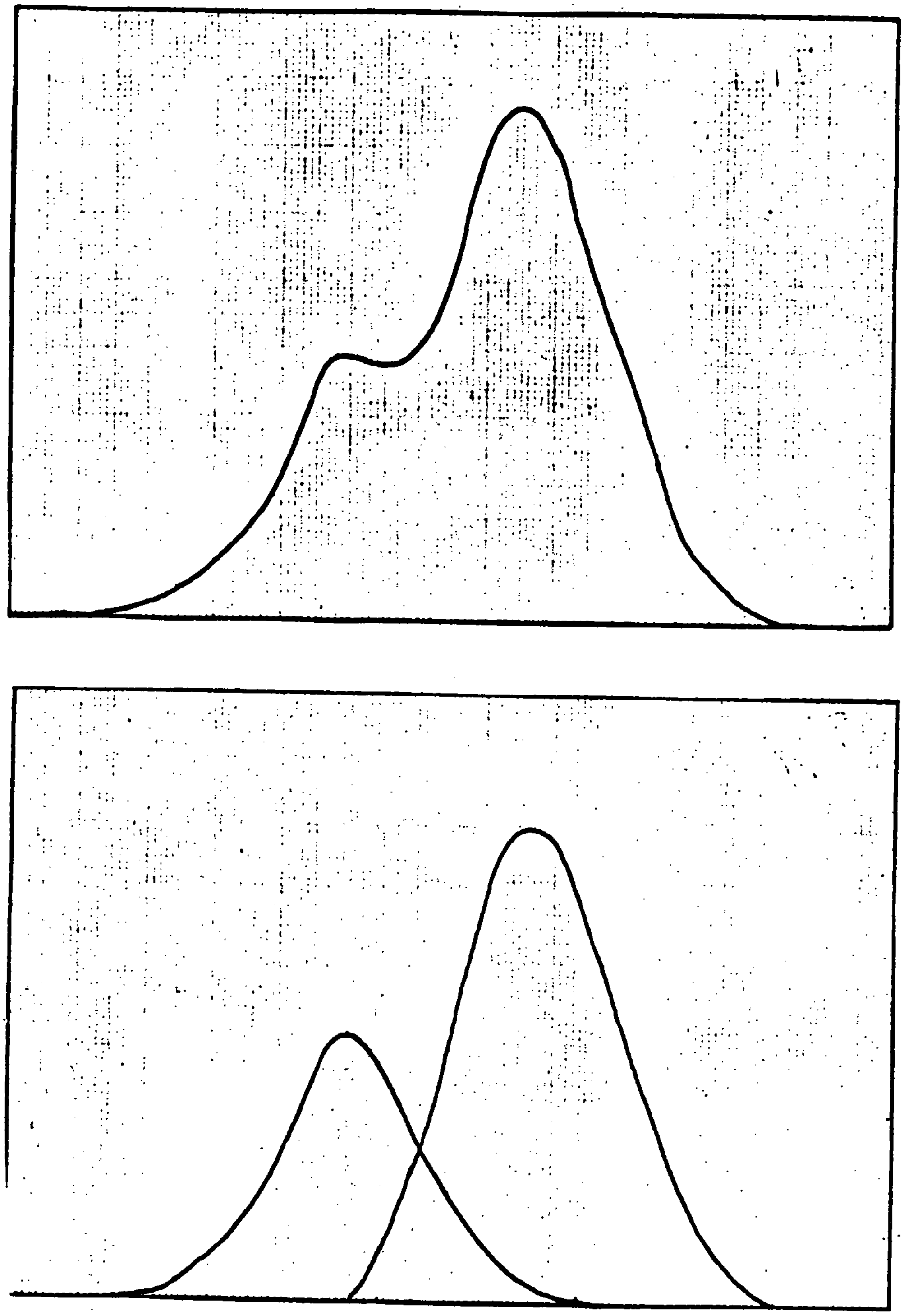
Nucleus dentatus

(Eredő tagsági függvény és clusterok)

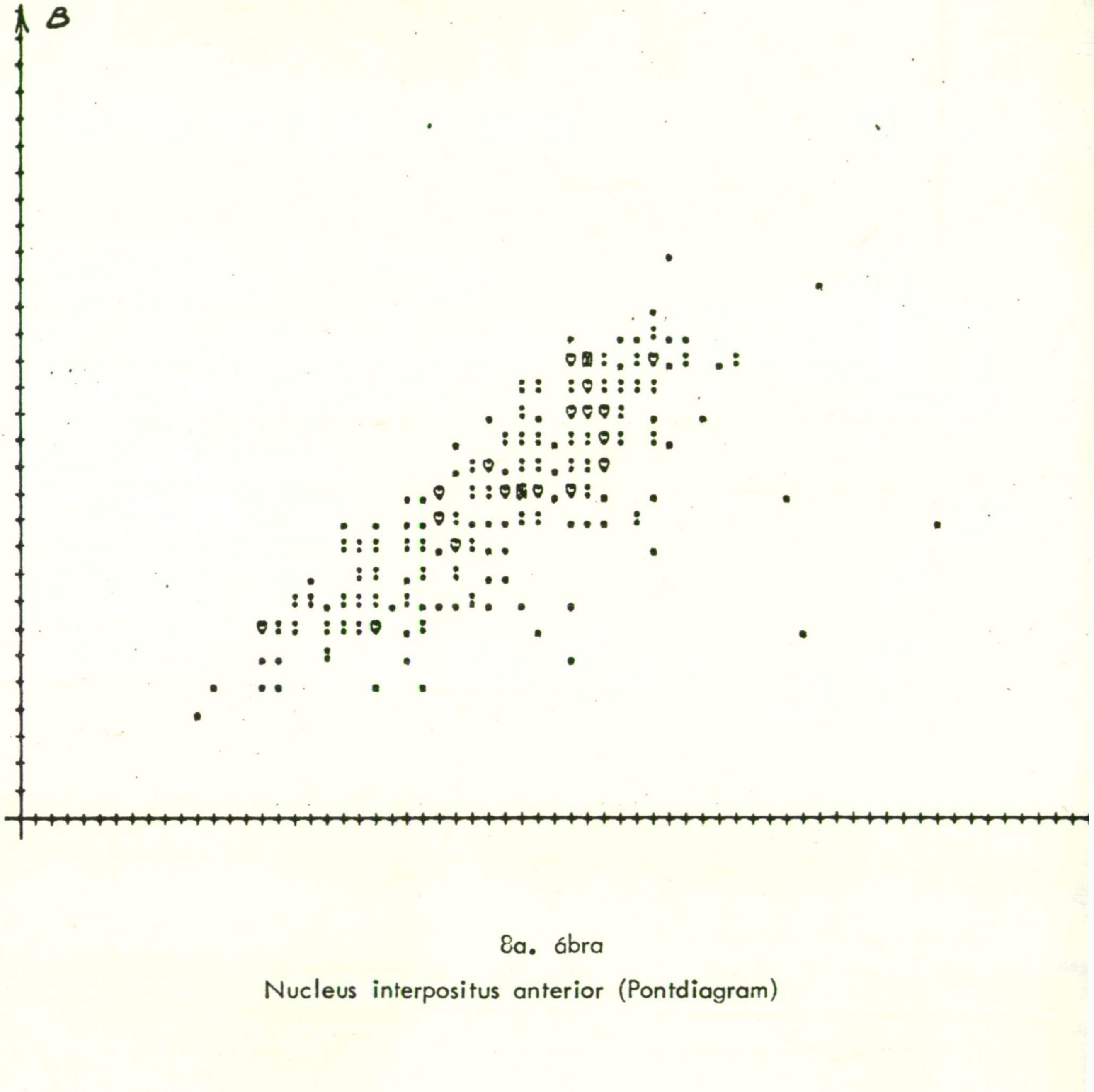


7a. ábra

Nucleus interpositus (Pontdiagram)

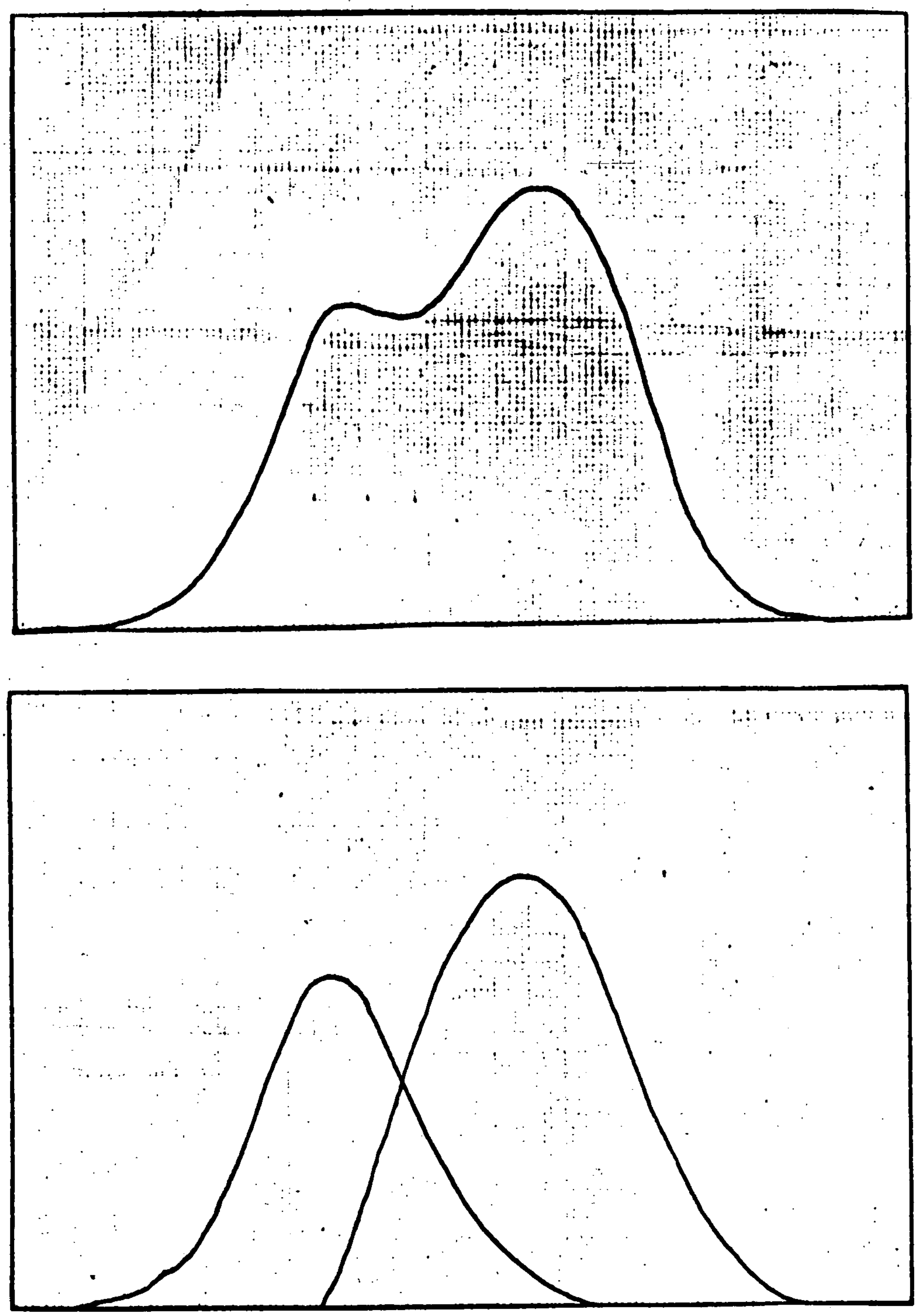


7b. ábra
Nucleus interpositus
(Eredő tagsági függvény és clusterok)



8a. ábra

Nucleus interpositus anterior (Pontdiagram)



8b. ábra

Nucleus interpositus anterior

(Eredő tagsági függvény és clusterok)

Irodalom

Birkhoff, G.D.: "Lattice Theory". AMS Colloquium Publications. Vol.XXV. 2nd ed.Providence. (1948)

Goguen, J.A. : L-fuzzy Sets. Journal of Mathematical Analysis and Application 18. pp. 145-147. (1967)

Kóczy T.L.: A fuzzy halmazok elméletének néhány kérdése, preprint (1974)

Kóczy T.L. - Győrffy Z.: A fuzzy halmazok néhány elméleti és alkalmazási kérdése, TDK pályadolgozat, BME Villamosmérnöki Kar (1974)

Kóczy T.L. - Győrffy Z.: Fuzzy halmazok és alkalmazásuk, Jubileumi TDK Konferencia Kiadvány, BME Villamosmérnöki Kar (1974)

Palkovits, M. - Fischer, J.: Caryometric Investigations. Akadémiai Kiadó, Budapest, (1965)

Parzen, E.: On Estimation of a Probability Density Function and Mode. Annals of Mathematical Statistics. Vol. 33. pp. 1065-1076. (1962)

Zadeh, L.A.: Fuzzy Sets. Information and Control 8, pp. 338-353. (1965)

Zadeh, L.A.: Toward a Theory of Fuzzy Systems. Report No.69-2. Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, Calif. (1969)