50282

249

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

50282

1-4

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

1965 FEB 23

TOMUS XXV

FASC. 1—2

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED Folyóiratok

EGYETEMI KÖNYVTÁR SZEGED. FOLYÓIRATOK 1965-728

SZEGED, 1964

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY

KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

25. KÖTET

1—2. FÜZET

SZEGED, 1964 JÚLIUS

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

50282

249

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

1965 FEB 23

TOMUS XXV

1964

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára Szeged folyóiratok

EGYETEMI KÖNYVTÁR SZEGED. FOLYÓIRATOK 1965 / 728

SZEGED, 1964

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY

KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

25. KÖTET

1964

SZEGED, 1964 DECEMBER

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

INDEX — TARTALOM

TOMUS XXV — 1964 — 25. KÖTET

Pag.

Cohen, E., Remark on a set of integers .... 179—180
Corradi, K. A., A note on finite graphs .... 169—171
Чакань, Б., Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр .... 202—208
Dlab, V., A note on powers of a group .... 177—178
Durszt, E., On the numerical range of normal operators .... 262—265
Foiaş, C., et **Sz.-Nagy, B.**, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VII. Triangulations canoniques. Fonction minimum .... 12—37
——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VIII. Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels .... 38—71
——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IX. Factorisations de la fonction caractéristique. Sous-espaces invariants .... 283—316
Fuchs, L., On group homomorphic images of partially ordered semigroups .... 139—142
Гечег, Ф., О произведениях упорядоченных автоматов. II .... 124—128
Гохберг, И. Ц., и **Крейн, М. Г.**, О факторизации операторов в гильбертовом пространстве .... 90—123
Grätzer, G., On the class of subdirect powers of a finite algebra .... 160—168
Halmos, P. R., Numerical ranges and normal dilations .... 1—5
Hancock, V. R., Commutative Schreier semigroup extension of a group .... 129—134
Keller, O.-H., Darstellungen von Restklassen (mod n) als Summen von zwei Quadraten 191—192
Koehler, J., Some torsion free rank two groups .... 186—190
Крейн, М. Г., и **Гохберг, И. Ц.**, О факторизации операторов в гильбертовом пространстве .... 90—123
Lajos, S., A criterion for Neumann regularity of normal semigroups .... 172—173
Leindler, L., Über verschiedene Konvergenzarten trigonometrischer Reihen .... 233—249
Losonczi, L., Bestimmung aller nichtkonstanten Lösungen von linearen Funktionalgleichungen .... 250—254
Lumer, G., Remarks on n-th roots of operators .... 72—74
——— Spectral operators, hermitian operators, and bounded groups .... 75—85
Máté, A., Additive Ideale und unabhängige Mengen .... 149—159
McCarthy, C. A., and **Stampfli, J. G.**, On one-parameter groups and semi-groups of operators in Hilbert space .... 6—11
Moór, A., Gleichung der autoparallelen Abweichung in n-dimensionalen Linienelementräumen .... 266—282
Пеак, И., Автоматы и полугруппы. I .... 193—201
Peetre, J., On an interpolation theorem of Foiaş and Lions .... 255—261

Pag.

Pollák, G., Bemerkungen zur Holomorphentheorie der Ringe .... 181—185
Rajagopalan, M., Fourier transform in locally compact groups .... 86—89
Rudeanu, S., Logical dependence of certain chain conditions in lattice theory ..... 209—217
Schaar, G., Über ein spezielles dreifaches schiefes Produkt .... 143—148
Stampfli, J. G., and McCarthy, C. A., On one-parameter groups and semi-groups of operators in Hilbert space .... 6—11
Szász, F., Die Halbgruppen, deren endlich erzeugte echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale sind .... 135—138
Sz.-Nagy, B., et Foiaş, C., Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VII. Triangulations canoniques. Fonction minimum .... 12—37
——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VIII. Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels .... 38—71
——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IX. Factorisations de la fonction caractéristique. Sous-espaces invariants .... 283—316
Tandori, K., Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. II. .... 219—232

BIBLIOGRAPHIE

R. R. Goldberg, Fourier transforms. — A. Dinghas, Vorlesungen über Funktionentheorie. — E. R. Lorch, Spectral theory. — L. Rédei, Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen .... 174—176
M. Hervé, Several complex variables. Local theory. — M. M. Day, Normed linear spaces. — A. Rényi, Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anhang über Informationstheorie. — G. Marinescu, Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions. — H. G. Garnir, Fonctions de variables réelles. — E. Hewitt and K. A. Ross, Abstract harmonic analysis, Vol. I ... 317—320

Numerical ranges and normal dilations *)

By P. R. HALMOS in Ann Arbor (Michigan, U. S. A.)

Each operator A on a Hilbert space $\mathfrak{H}$ induces a quadratic form Q_A; by definition

$$Q_A(x)=(Ax, x)$$

for every x in $\mathfrak{H}$. (In what follows all Hilbert spaces are complex and all operators are bounded.) The *numerical range* of A, in symbols $W(A)$, is the range of Q_A on the unit sphere; explicitly

$$W(A)=\{(Ax, x): \|x\|=1\}.$$

The Toeplitz—Hausdorff theorem says that the numerical range of every operator is a convex subset of the complex plane ([1], [3], [4]). It is disappointing that all the known proofs of this elegant statement are ugly. The methods are elementary, but the arguments are computational. The purpose of this paper is to give a new insight into the geometric structure of numerical ranges, which seems to be interesting in its own right, and which may some day lead to a clean conceptual proof of the Toeplitz—Hausdorff theorem.

Suppose that $\mathfrak{H}$ is a subspace (closed linear manifold) of a Hilbert space $\mathfrak{K}$, and suppose that A and B are operators on $\mathfrak{H}$ and on $\mathfrak{K}$ respectively. If $Q_A(x)=Q_B(x)$ for every vector x in $\mathfrak{H}$, then the operator A is called the *compression* of B to $\mathfrak{H}$, and B is called a *dilation* of A to $\mathfrak{K}$ (see [2]). Compression and dilation for operators are the same as restriction and extension for the corresponding quadratic forms. Usually the most convenient way to study a dilation of A to $\mathfrak{K}$ is to regard it as an operator matrix $\begin{pmatrix} A & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$; where X maps $\mathfrak{H}^{\perp}$ into $\mathfrak{H}$, Y goes in the other direction, and Z operates on $\mathfrak{H}^{\perp}$. The easiest dilations are from $\mathfrak{H}$ to $2\mathfrak{H}$ (the direct sum of $\mathfrak{H}$ with itself); for such dilations all entries in the corresponding operator matrices may be regarded as operating on $\mathfrak{H}$.

There is a well known and easy argument that leads from the Toeplitz—Hausdorff theorem for two-by-two matrices to the most general version. In abbreviated form the argument is this: given any two unit vectors, restrict Q_A to their span, and apply the two-dimensional theorem to that restriction. The reason the argument works is that convexity is a condition on only two vectors at a time.

For normal matrices (two-by-two, or, for that matter, any size) the Toeplitz—Hausdorff theorem is an immediate consequence of diagonability (the spectral

---

*) Research supported in part by a grant from the National Science Foundation.

theorem). Indeed, since each normal matrix is unitarily equivalent to a diagonal one, it is sufficient to prove the theorem in case $A=\operatorname{diag}\langle\lambda_1,\ldots,\lambda_n\rangle$. If $x=\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle$ is a unit vector, then $(Ax,x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|\xi_i|^2$; since the ξ's vary over all n-tuples satisfying $\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2=1$, it follows that the numerical range $W(A)$ is exactly the set of all convex linear combinations of the λ's. This proves more than just the convexity of $W(A)$; it proves that if A is a normal matrix, then $W(A)$ is the convex hull of the spectrum of A. The proof extends, with only trivial symbolic changes, to normal operators on infinite-dimensional spaces. Since, however, an integral is not a finite sum but a limit of finite sums, the conclusion is that $\overline{W(A)}$ (the closure of $W(A)$) is the convex hull of the spectrum of A.

The simplicity of the Toeplitz—Hausdorff theorem for normal matrices makes it natural to try to reduce the general case to the normal one. In principle such a reduction is possible; this is the statement of Theorem 1 below. Existing proofs do not, however, become simpler thereby; the exasperating fact is that the proof of Theorem 1 uses the Toeplitz—Hausdorff theorem.

Theorem 1. *The numerical range of every operator on a finite-dimensional Hilbert space $\mathfrak{H}$ is the intersection of the numerical ranges of its normal dilations to* $2\,\mathfrak{H}$.

Proof. If A is an operator on $\mathfrak{H}$ and if B is a dilation of A (normal or not), then Q_B is an extension of Q_A, and therefore $W(A)\subset W(B)$. It follows that

$$W(A)\subset \bigcap_{N\in\mathfrak{N}(A)} W(N),$$

where $\mathfrak{N}(A)$ is the set of all normal dilations of A to $2\,\mathfrak{H}$. It remains to prove the reverse inclusion. Since $W(A)$ is convex, it is sufficient to prove that to each closed half plane that includes $W(A)$ there corresponds an N in $\mathfrak{N}(A)$ such that $W(N)$ is included in the same half plane. (Observe that $W(A)$ is closed: it is a continuous image of the unit sphere.) By a translation and a rotation (i. e., by a substitution $A\to\alpha A+\beta$ with $|\alpha|=1$) the desired assertion becomes this: if $W(A)$ is included in the closed right half plane, then so is $W(N)$ for some N in $\mathfrak{N}(A)$. To say of an operator that its numerical range is included in the closed right half plane is the same as to say that its real part (i. e., the arithmetic mean of it and its adjoint) is positive. In these terms the desired assertion is this: if $\operatorname{Re} A\geqq 0$, then $\operatorname{Re} N\geqq 0$ for some N in $\mathfrak{N}(A)$.

The proof of the last assertion is explicit: put $N=\begin{pmatrix}A & A^*\\ A^* & A\end{pmatrix}$. Since $N^*=\begin{pmatrix}A^* & A\\ A & A^*\end{pmatrix}$, it follows that

$$N^*N=\begin{pmatrix}A^*A+AA^* & A^{*2}+A^2\\ A^2+A^{*2} & AA^*+A^*A\end{pmatrix};$$

since this is symmetric in A and A^*, it follows that N is normal. It remains to prove that if $A+A^*\geqq 0$, then $N+N^*\geqq 0$. Since

$$N+N^*=\begin{pmatrix}A+A^* & A+A^*\\ A+A^* & A+A^*\end{pmatrix},$$

the problem reduces to proving that if T is positive, then so is $\begin{pmatrix} T & T \\ T & T \end{pmatrix}$, and this follows from the simple identity

$$\left(\begin{pmatrix} T & T \\ T & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} Tx+Ty \\ Tx+Ty \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (T(x+y), (x+y)).$$

The proof of the theorem is complete.

The normality of N and the positiveness of $N+N^*$ can be proved also by an amusing matrical computation. If $U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, then

$$U^*\begin{pmatrix} A & A^* \\ A^* & A \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} A+A^* & O \\ O & A-A^* \end{pmatrix},$$

and, for every operator X on $\mathfrak{H}$,

$$U^*\begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 2X & O \\ O & O \end{pmatrix};$$

in other words, N is unitarily equivalent to something obviously normal, and $N+N^*$ is unitarily equivalent to something obviously positive. These observations have the advantage that they clearly exhibit the spectra and the norms of N and $N+N^*$.

The proof of Theorem 1 used finite-dimensionality in one place only; that is what was needed to guarantee that the set under consideration (the numerical range of A) was closed. It is therefore a corollary of the proof that *the closure of the numerical range of every operator, on every Hilbert space, is the intersection of the closures of the numerical ranges of its normal dilations.* Whether or not the conclusion of Theorem 1, as is, is valid for infinite-dimensional spaces is an open question.

If A is a contraction (i. e., if $\|A\| \leq 1$), then A has not only normal but even unitary dilations; it is natural to ask whether Theorem 1 remains true if "normal" is replaced by "unitary". If $A=0$ (on, say, a one-dimansional space), the answer is yes. Indeed, if $|\lambda|=1$, then

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

is a unitary dilation of A, and the intersection of all the $W(U_\lambda)$'s (in fact, the intersection of any two of them) is $\{0\}$, which is just what $W(A)$ is. Here is a more interesting example: write $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ and

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

The spectrum of U_λ consists of the three cube roots of λ, and, consequently, $W(U_\lambda)$ is an equilateral triangle (interior and boundary). The intersection of all the $W(U_\lambda)$'s is the disc with center 0 and radius $\frac{1}{2}$, which is just what $W(A)$ is. (The determination of this $W(A)$ is an amusing exercise; it was explicitly carried out by TOEPLITZ himself [5].) The experimental evidence is favorable, but the general result it indicates is not known; the following result about normal operators is a step in that direction.

Theorem 2. *The closure of the numerical range of every normal contraction on a finite-dimensional Hilbert space $\mathfrak{H}$ is the intersection of the closures of the numerical ranges of its unitary dilations to* $2\mathfrak{H}$.

Proof. Given A on $\mathfrak{H}$, with $\|A\| \leqq 1$, let $\mathfrak{U}(A)$ be the set of all unitary dilations of A to $2\mathfrak{H}$. As before, it is trivial that

$$\overline{W(A)} \subset \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(A)} \overline{W(U)};$$

it remains to prove the reverse inclusion. Translations may push the norm of A beyond 1, but rotations are still permissible; it is therefore sufficient to prove that if $W(A)$ is included in a vertical half plane (i. e., one whose boundary is parallel to the imaginary axis), then there exists a U in $\mathfrak{U}(A)$ such that $W(U)$ is included in the same half plane. Equivalently, the desired assertion is this: if $\operatorname{Re} A \geqq \alpha$, then $\operatorname{Re} U \geqq \alpha$ for some U in $\mathfrak{U}(A)$.

The first step of the construction makes sense for any contraction, normal or not. Write S for the unique positive square root of $1-AA^*$ and T for the unique positive square root of $1-A^*A$. It is known (and easy to recompute) that if

$$U = \begin{pmatrix} A & -S \\ T & A^* \end{pmatrix},$$

then U is unitary. Since

$$U^* = \begin{pmatrix} A^* & T \\ -S & A \end{pmatrix},$$

the real part of U is given by

$$\operatorname{Re} U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A+A^* & T-S \\ T-S & A+A^* \end{pmatrix}.$$

If A is normal, then $T=S$; it follows that

$$\left((\operatorname{Re} U)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = ((\operatorname{Re} A)x, x) + ((\operatorname{Re} A)y, y).$$

If $\operatorname{Re} A \geqq \alpha$, and if $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = 1$, then

$$\left((\operatorname{Re} U)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \geqq \alpha(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \alpha.$$

The proof of the theorem is complete.

It is perhaps worth while to remark that more is true about U than was needed in the proof. It can be shown that the spectrum of U (for normal A) consists exactly of those complex numbers of modulus 1 whose real parts are in the spectrum of A. If A is not normal, then both this assertion and the weaker one about $\operatorname{Re} U$ may be false. Nevertheless, the conclusion of Theorem 2 is valid for many non-normal contractions and may be valid for all. $\left(\text{Recall the example } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\right)$ One more remark along these lines is called for. A dilation of a dilation is a dilation; this may be thought to indicate that Theorems 1 and 2 could be combined to derive the conclusion of Theorem 2 for all contractions. The argument has a serious flaw, however: the normal dilations that Theorem 1 uses may not have norms less than or equal to 1, even if the operator to which Theorem 1 is being applied does, and this means that when Theorem 2 becomes needed it is not applicable. This does not mean that the proposed argument is worthless, but only that its use must be restricted to operators of small norm. An examination of the proof of Theorem 1 shows that the norms of the normal dilations of A that are introduced there need never exceed $3\|A\|$. Conclusion: *the numerical range of every operator A, with $\|A\| \leqq 1/3$, on a finite-dimensional Hilbert space $\mathfrak{H}$, is the intersection of the numerical ranges of its unitary dilations to* $4\mathfrak{H}$. If "numerical range" is changed to "closure of numerical range", the conclusion is valid for infinite-dimensional spaces also.

In conclusion it seems appropriate to mention a possible generalization of the preceding considerations that is interesting and non-trivial. Suppose that k is a positive integer and that A is an operator on a Hilbert space of dimension at least k. If P is a projection with $\mathrm{r}(P)=k$ ("r" stands for rank), then $\mathrm{r}(PAP) \leqq k$, and, consequently, it is possible to form $\mathrm{tr}(PAP)$ ("tr" stands for trace). Write

$$W_k(A) = \left\{ \frac{1}{k} \mathrm{tr}\,(PAP) \colon \mathrm{r}\,(P) = k \right\}.$$

(The normalizing factor $1/k$ is not essential, but it serves to make some of the formulas more elegant and more familiar.) It is easy to verify that $W_1(A)$ is the same as the numerical range of A. Question 1: is $W_k(A)$ always convex? Question 2: is $W_k(A)$ the intersection of all $W_k(N)$'s for N in $\mathfrak{N}(A)$? Question 3: if $\|A\| \leqq 1$, is $W_k(A)$ the intersection of all $W_k(U)$'s for U in $\mathfrak{U}(A)$? None of the answers is known. Conjecturally they are all affirmative, but the proofs may be difficult.*)

References

[1] W. F. Donoghue, On the numerical range of a bounded operator, *Michigan Math. J.*, **4** (1957), 261–263.

[2] P. R. Halmos, Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasil. Math.*, **2** (1950), 125–134.

[3] F. Hausdorff, Der Wertvorrat einer Bilinearform, *Math. Zeitschr.*, **3** (1919), 314–316.

[4] M. H. Stone, Hausdorff's theorem concerning Hermitian forms, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **36** (1930), 259–261.

[5] O. Toeplitz, Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér, *Math. Zeitschr.*, **2** (1918), 187–197.

UNIVERSITY OF MICHIGAN

(Received November 7, 1962)

*) *Note added March 30, 1964.* All three questions have recently been answered by C. A. Berger (Ph. D. thesis, Cornell University, 1963). The answers are yes, yes, and (for $k \geqq 2$) no. For $k=1$, on an infinite-dimensional space, E. Durszt has shown that the answer to Question 3 is no; the finite-dimensional case is of interest, and remains open.

On one-parameter groups and semi-groups of operators in Hilbert space*)

By C. A. McCARTHY in Minneapolis and J. G. STAMPFLI in New York (U. S. A.)

We wish to study one-parameter groups of bounded operators $\{T_s\}_{-\infty<s<\infty}$ on a complex Hilbert space H, under the assumption that one of the operators in the group (other than T_0 which is the identity operator) is spectral in the sense of DUNFORD.

Our prinicipal result is that merely uniform boundedness of $\|T_s\|$ for s in finite intervals implies each operator T_s is spectral; further, there exists a bicontinuous operator A such that AT_sA^{-1} all have normal scalar parts, or equivalently, the resolutions of the identity of all the T_s belong to a single bounded Boolean algebra of (not necessarily self-adjoint) projections. We also obtain similar, but weaker, results for semi-groups of operators. These results complement certain results of FOIAŞ [6]; our present work is inspired by this work of FOIAŞ and by the work of one of us [8]. For material on spectral operators, we refer to [2, 3] and the references given there.

An important tool will be a theorem which has been proved in many forms [1].

Theorem. *Let $G=\{g\}$ be a commutative group, and suppose $g\to T_g$ is a uniformly bounded representation of G as operators on H. Then there exists a bicontinuous operator A on H such that AT_gA^{-1} is unitary for every g.*

Our use of this theorem will be the same as FOIAŞ': we will have a bounded Boolean algebra of projections $\{E(\sigma)\colon \sigma$ a Borel set in the plane$\}$, and a uniformly bounded one-parameter group of operators $\{U_s\}$ each of which commutes with every E. Let G be the group of all pairs (s,σ) with the composition $(s,\sigma)\cdot(t,\tau)=$ $=(s+t,\sigma\cup\tau-\sigma\cap\tau)$, and the representation $(s,\sigma)\to U_s(I-2E(\sigma))$. If A is an operator given by the theorem, then each operator AU_sA^{-1} is unitary (take σ to be empty so $E(\sigma)=0$), and each $A(I-2E(\sigma))A^{-1}=I-2AE(\sigma)A^{-1}$ is unitary so each $AE(\sigma)A^{-1}$ is self-adjoint (take $s=0$ so $U_s=I$).

To the above theorem we will need the

Scholium. *Let $\mathfrak{L}$ be the class of operators which commute with every T_g. Then the operator A may be chosen so that $\|ALA^{-1}\|\leqq\|L\|$ for every L in $\mathfrak{L}$.*

Proof. In each of the proofs of the above theorem, either a new norm $|||x|||$ is defined as some sort of generalised limit of $\|T_gx\|$ for suitable $g\in G$ and A is chosen

*) Supported in part by NSF G-24295.

so that $\|Ax\| = |||x|||$, or else A^2 is found as an operator in the weak operator closed convex hull of the operators $T_g^* T_g$. In either case we choose A to be self-adjoint and positive, and we have in the first instance

$$|||Lx||| = \lim_g \|T_g Lx\| = \lim_g \|LT_g x\| \leqq \|L\| \lim_g \|T_g x\| = \|L\| \, |||x|||$$

so that if we set $y = Ax$, we have

$$\|ALA^{-1}y\| = |||Lx||| \leqq \|L\| \, |||x||| = \|L\| \, \|Ax\| = \|L\| \, \|y\|.$$

In the second instance the computations are essentially the same: for any $x \in H$ and $g \in G$,

$$(T_g^* T_g LA^{-1}x, LA^{-1}x) = (LT_g A^{-1}x, LT_g A^{-1}x) \leqq \|L\|^2 (T_g^* T_g A^{-1}x, A^{-1}x)$$

so that convex combinations of this inequality yield

$$(A^2 LA^{-1}x, LA^{-1}x) \leqq \|L\|^2 (A^2 A^{-1}x, A^{-1}x)$$

or since A is self-adjoint,

$$\|ALA^{-1}x\|^2 \leqq \|L\|^2 \|x\|^2.$$

Theorem 1. *Let $\{T_s\}$ be a one-parameter group of bounded operators on H such that T_1 is a scalar type spectral operator and $\|T_s\|$ is uniformly bounded on finite s-intervals. Then T_s is scalar for every s and there exists a bicontinuous operator A such that AT_sA^{-1} is normal for every s.*

Proof. Let $\mathscr{E} = \{E(\cdot)\}$ be the resolution of the identity for T_1 and define the operators R_s by

$$R_s = \int_{\sigma(T_1)} |\lambda|^s e^{is \arg \lambda} E(d\lambda), \qquad 0 \leqq \arg \lambda < 2\pi.$$

It is clear that $R_n = T_1^n = T_n$ for every integer n; also $\{R_s\}$ is a one-parameter group of operators:

$$R_s R_t = \int_{\sigma(T_1)} |\lambda|^s e^{is \arg \lambda} E(d\lambda) \int_{\sigma(T_1)} |\lambda|^t e^{it \arg \lambda} E(d\lambda)$$

$$= \int_{\sigma(T_1)} |\lambda|^{s+t} e^{i(s+t) \arg \lambda} E(d\lambda) = R_{s+t}.$$

Since T_1 commutes with every T_s, each E in the resolution of the identity of T_1 commutes with every T_s, and so each R_t commutes with every T_s. Thus $\{U_s\}$, defined by $U_s = R_{-s} T_s$, is a one-parameter group of operators. Notice that

$$U_s = R_{-\{s\}} R_{-[s]} T_{[s]} T_{\{s\}} = R_{-\{s\}} T_{\{s\}} = U_{\{s\}}, \qquad s = [s] + \{s\},$$

and so

$$\|U_s\| \leqq \|R_{-\{s\}}\| \, \|T_{\{s\}}\| \leqq 4 \sup_{\lambda \in \sigma(T_1)} |\lambda|^{-1} \cdot \sup_{E \in \mathscr{E}} \|E\| \cdot \sup_{0 \leqq s \leqq 1} \|T_s\|.$$

Thus $\{U_s\}$ is a uniformly bounded one-parameter group of operators, and each U_s commutes with every $E \in \mathscr{E}$, so there exists a bicontinuous operator A on H such that each AU_sA^{-1} is unitary and each AR_sA^{-1} is normal (because each AEA^{-1} is self-adjoint). Therefore for any s, the operator $AT_sA^{-1} = (AR_sA^{-1})(AU_sA^{-1})$ is the product of a normal operator with a commuting unitary and so is normal.

We remark that by writing s/s_0 in place of s, we could prove this theorem with the assumption that T_{s_0} is spectral for some $s_0 \neq 0$ in place of T_1 spectral. Also it is not difficult to see that uniform boundedness of $\|T_s\|$ on a non-trivial interval implies uniform boundedness on any given finite interval.

By using the same technique, we can prove an analogous theorem for a one-parameter group of operators with T_1 spectral.

Theorem 2. *Let $\{T_s\}$ be a one-parameter group of operators on H such that T_1 is spectral and $\|T_s\|$ is uniformly bounded on finite s-intervals. Then T_s is spectral for every s and there exists a bicontinuous operator A such that AT_sA^{-1} has normal scalar part for every s.*

Proof. Let $\mathscr{E}=\{E\}$ be the resolutions of the identity of T_1 and let N be the quasi-nilpotent part of T_1. We would like to form operators R_s to play the part of T_1^s as in theorem 1, through the use of SCHWARTZ's formula [7]

$$f(T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} \int\limits_{\sigma(T_1)} f^{(n)}(\lambda)\, E(d\lambda)$$

valid for functions f analytic on $\sigma(T_1)$. We wish to apply this formula when $f(\lambda)=\lambda^s$, but unfortunately λ^s may not have a single-valued analytic branch on $\sigma(T)$, for non-integral s. However, we proceed boldly and define

$$R_s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} s(s-1)\dots(s-n+1) \int\limits_{\sigma(T_1)} |\lambda|^{s-n} e^{i(s-n)\arg\lambda} E(d\lambda), \qquad 0 \leq \arg\lambda < 2\pi.$$

This series converges in the uniform operator topology, uniformly in any finite s-interval; in fact, if we consider the norm of the n^{th} summand of the series and take n^{th} root, we have at most

$$\|N^n\|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{|s|\,|s-1|\dots|s-n+1|}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} (4 \sup_{\lambda\in\sigma(T_1)} |\lambda|^{s-n} \sup_{E\in\mathscr{E}} \|E\|)^{\frac{1}{n}}.$$

The first term of this product tends to 0 as n becomes infinite because of the quasi-nilpotency of N. The remaining two terms are bounded in n, uniformly in any finite s-interval. The operators R_s coincide with T_s when s is an integer, and form a one-parameter group:

$$R_sR_t = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{N^k}{k!} s(s-1)\dots(s-k+1) \int\limits_{\sigma(T_1)} |\lambda|^{s-k} e^{i(s-k)\arg\lambda} E(d\lambda)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{N^{n-k}}{(n-k)!} t(t-1)\dots(t-n+k+1) \int\limits_{\sigma(T_1)} |\lambda|^{t-n+k} e^{i(t-n+k)\arg\lambda} E(d\lambda)\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{N^n}{n!} \int\limits_{\sigma(T_1)} |\lambda|^{s+t-n} e^{i(s+t-n)\arg\lambda} E(d\lambda)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s(s-1)\dots(s-k+1)t(t-1)\dots(t-n+k+1)\right] = R_{s+t}.$$

Since every T_s commutes with T_1 and hence with N and the E's, every T_s commutes with each R_t, and so $U_s = R_{-s}T_s$ constitute a one-parameter group of operators with $U_s = U_{\{s\}}$ uniformly bounded in norm for all s, as in the proof of theorem 1. The remainder of the theorem follows exactly as before.

There are extensions of these results to the semi-group case; these results show the importance of the existence of inverses to theorems 1 and 2.

Theorem 3. *Let $\{T_s\}$ be a one-parameter semi-group of bounded operators on H such that T_1 is a spectral operator with 0 an isolated point of its spectrum and $\|T_s\|$ is uniformly bounded for $a \leqq s \leqq b$, for some $0 \leqq a < b$. Then T_s is spectral for every s and there exists a bicontinuous operator A such that AT_sA^{-1} has normal scalar part for every s.*

Proof. Let E be the idempotent in the resolution of the identity associated with the non-zero points of $\sigma(T_1)$. Then E commutes with every T_s, so EH is an invariant subspace for every T_s. The operators ET_s constitute a one-parameter semi-group of operators on EH with the property that ET_1 has an inverse, since the spectrum of ET_1 as an operator on EH consists of the non-zero points of the spectrum which are bounded away from zero by hypothesis. The relation $ET_sET_{1-s} = ET_1$ shows that all the operators ET_s, $0 < s < 1$, must have inverses, on EH, and therefore every ET_s must have an inverse. The ET_s, together with their inverses, form a group of operators on EH which has its norms uniformly bounded on finite s-intervals, since its norms are uniformly bounded on one non-degenerate s-interval. It follows from theorem 2 that all the operators ET_s are spectral and that their resolutions of the identity all belong to a uniformly bounded Boolean algebra, since under an equivalent norm on EH, the resolutions of the identity all consist of self-adjoint projections. Clearly, for $s > 0$, the operators ET_s, extended to all of H by being O in $(I-E)H$, are also spectral and their resolutions all belong to a uniformly bounded Boolean algebra.

Now for $s > 0$, $T_s = ET_s + (I-E)T_s(I-E)T_s$ is quasi-nilpotent, for if n be an integer exceeding $1/s$, $[ns] \geqq 1$,

$$[(I-E)T_s]^n = (I-E)T_{[ns]}T_{\{ns\}} = [(I-E)T_1]^{[ns]}T_{\{ns\}}.$$

This is the product of two commuting operators, one of which is quasi-nilpotent, and so is itself quasi-nilpotent; the quasi-nilpotence of $[(I-E)T_s]^n$ implies that of $(I-E)T_s$. Thus T_s is the sum of a spectral operator and a commuting quasi-nilpotent, and so is spectral. The resolution of the identity of T_s consists of the projections F, $F+(I-E)$ where F belongs to the resolution of ET_s. Let A be a bicontinuous operator such that AEA^{-1} and AFA^{-1} are all self-adjoint. Then AT_sA^{-1} all have normal scalar part.

It is possible to prove a weaker theorem, valid for more arbitrary semi-groups of operators. We use the concept of semi-similarity introduced by Feldzamen [4]. Two semi-groups $\{T_s\}, \{R_s\}$ on H will be called *semi-similar* if there exist two bounded Boolean algebras of projections $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ both generated by their atoms $\{E_\alpha\}, \{F_\alpha\}$, the elements of $\mathscr{E}$ commuting with every T_s and the elements of $\mathscr{F}$ with every R_s, and there exist bicontinuous operators A_α from $E_\alpha H$ onto $F_\alpha H$ such that $A_\alpha T_s = R_s A_\alpha$ for every α and s.

Theorem 4. *Let $\{T_s\}$ be a semi-group of bounded operators on H such that T_1 is spectral and $\|T_s\|$ is uniformly bounded for $a \leqq s \leqq b$, for some $0 \leqq a < b$. Then $\{T_s\}$ is semi-similar to a semi-group of spectral operators with normal scalar parts.*

Proof. For integers $n \geqq 1$, let E_n be the projection in the resolution of the identity of T_1 associated with the set of complex numbers $\{\lambda\colon n^{-1} \leqq |\lambda| < (n-1)^{-1}\}$, and let $E_0 = I - \sum_{n=1}^{\infty} E_n$. Since these E's belong to the resolution of T_1, they generate a uniformly bounded Boolean algebra; let A be a bicontinuous operator such that $F_n = AE_nA^{-1}$ is self-adjoint for each n. The operators $AE_nT_sA^{-1}$ on the space F_nH satisfy the hypotheses of theorem 3, so there exist operators B_n bicontinuous from F_nH onto itself such that $B_nAE_nT_sA^{-1}B_n^{-1}$ has normal scalar part for each s. It is important to note that B_n may be so chosen that the norm of $B_nAE_nT_sA^{-1}B_n^{-1}$ is no greater than that of $AE_nT_sA^{-1}$; that is, uniformly bounded in n for each fixed s.

Set now $R_s = \sum_{n=0}^{\infty} B_nAE_nT_sA^{-1}B_n^{-1}$. This is a direct sum of operators on the mutually orthogonal subspaces F_nH with norms uniformly bounded in n; this sum therefore exists in the strong operator topology. Since the summands are spectral operators with normal scalar parts, the same must be true of R_s. $\{R_s\}$ is a one-parameter semi-group, and it is not difficult to see that the operators $A_n = B_nA$ implement the semi-similarity between $\{T_s\}$ and $\{R_s\}$.

We close with some examples to demonstrate the sharpness of our theorems.

Example 1. The underlying space cannot be L_p. In $L_p[0, 1]$, $p \neq 2$, the group of transformations $[T_sx](t) = x(\{t+s\})$ is a strongly continuous group of isometries, and T_1 is the identity. However, Fixman [5] has shown that T_s is spectral only for rational s and that the resolutions of the identity of T_s are not bounded uniformly in s for rational s.

Example 2. Let H be square integrable functions on $[0, 1]$ but with the norm of a function x given by $\int_0^1 |x(t)|^2(t+1)\,dt$. The group of transformations $[T_sx](t) = x(\{t+s\})$ is uniformly bounded but not a group of isometries. T_1 is the identity. Thus we have an example to show that T_1 normal does not imply T_s normal, but only scalar.

Example 3. In $L_2[0, 1]$ define the semi-group T_s by

$$[T_sx](t) = \begin{cases} x(t+s), & t+s \leqq 1 \\ 0, & t+s > 1. \end{cases}$$

T_1 is O, and so is normal, but T_s is scalar for no $s < 1$. Thus the semi-group analogue of theorem 1 is not true.

Example 4. In theorem 4, semi-similarity cannot be replaced by ordinary similarity. For $s > 0$, and n a positive integer, consider the 2×2 matrix

$$T_s^{(n)} = e^{-ns}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-ns+2\pi is}\begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ns} & ne^{-ns}(1-e^{2\pi is}) \\ 0 & e^{-ns+2\pi is} \end{pmatrix}.$$

The entries of $T_s^{(n)}$ are uniformly bounded in n, s, for $|ne^{-ns}(1-e^{2\pi is})| \leqq ne^{-ns}2\pi s \leqq \leqq 2\pi \sup_{t>0} te^{-t} = 2\pi/e$. We define H as the direct sum of two-dimensional Hilbert spaces $H^{(n)}, n > 0$, and define T_s to be the direct sum of the operators $T_s^{(n}$. T_s is a semi-group and $T_1^{(n)}$ is the 2×2 identity multiplied by e^{-n} so that T_1 is even self-adjoint. However $T_{\frac{1}{2}}$ is not spectral, for $T_{\frac{1}{2}}^{(n)}$ has distinct eigenvalues $e^{-n/2}$ and $-e^{-n/2}$, and the projections corresponding to these eigenvalues have norm greater than n. Therefore $T_{\frac{1}{2}}$ does not have a uniformly bounded resolution of the identity and so cannot be spectral.

Example 5. The condition that $\|T_s\|$ be uniformly bounded in finite s-intervals cannot be dropped. Let $\{\varrho_\alpha\}$ be a Hamel basis for the reals over the rationals. Every real number s can be written uniquely as $s = r_0 + \sum r_\alpha \varrho_\alpha$, r_α rational, where only finitely many r's are non-zero. Distinguish a countable number of the ϱ's, denoted by $\varrho_1, \ldots, \varrho_n, \ldots$. Let $r_n(s)$ denote the coefficient of the distinguished basis element ϱ_n.

Now let H be a countable direct sum of two-dimensional Hilbert spaces $H^{(n)}$, $n > 0$. Define T_s to be the direct sum of the operators $T_s^{(n)}$ defined on $H^{(n)}$ by the matrix

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i r_n(s)} & n(e^{2\pi i r_n(s)} - e^{-2\pi i r_n(s)}) \\ 0 & e^{-2\pi i r_n(s)} \end{pmatrix}.$$

Each T_s is bounded in norm because only a finite number of the r's are non-zero; however, the norm of T_s is uniformly bounded in no interval of positive length. Also, T_1 is the identity, but the norms of the resolutions of T_s are not uniformly bounded in s.

Bibliography

[1] J. Dixmier, Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leur applications, *Acta Sci. Math.*, **12** (1950), 213–227.

[2] N. Dunford, A survey of the theory of spectral operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **64** (1958), 217–274.

[3] ——— Spectral operators, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 321–354.

[4] A. N. Feldzamen, Semi-similarity invariants for spectral operators on Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **100** (1961), 277–324.

[5] U. Fixman, Problems in spectral operators, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 1029–1059.

[6] C. Foiaş, On strongly continuous semi-groups of spectral operators in Hilbert space, *Acta. Sci. Math.*, **19** (1958), 188–191.

[7] J. Schwartz, Two perturbation formulae, *Somm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 371–376.

[8] J. Stampfli, Roots of scalar operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1955), 796–798.

UNIVERSITY OF MINNESOTA,
NEW YORK UNIVERSITY

(Received January 17, 1963)

Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VII Triangulations canoniques. Fonction minimum

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Dans la Partie I de cette Note on étudiera d'abord certaines relations géométriques entre la dilatation unitaire minimum d'une contraction complètement non-unitaire T d'un espace de Hilbert et le comportement asymptotique des itérées T^n, T^{*n}. On arrivera ainsi à une classification naturelle de ces contractions et à des triangulations matricielles attachées à cette classification.

Ensuite, dans la Partie II, on introduira la classe C_0, constituée des T pour lesquelles il existe une fonction $d(z)$, holomorphe et bornée pour $|z|<1$, ne s'annulant pas identiquement et telle que $d(T)=O$. On établira, pour $T\in C_0$, l'existence d'une fonction minimum s'annulant pour T. Cette fonction joue un rôle analogue à celui du polynome minimum d'une matrice finie, elle caractérise notamment le spectre de T et permet la construction des sous-espaces invariants pour T. Ainsi, la classe C_0 généralise, dans un certain sens, la classe des contractions complètement non-unitaires des espaces de dimension finie. Dans cette partie on fera essentiellement usage du calcul fonctionnel avec des contractions, développé dans la Note VI ([4]) et de la théorie des fonctions appartenant à des classes de Hardy, notamment de l'arithmétique des fonctions intérieures, inaugurée par BEURLING [6].

Mentionnons que quelques des résultats de cette Note ont été annoncés dans [1].

PARTIE I

1. Relations géométriques entre la limite de $T^{*n}T^n$ et la dilatation unitaire minimum de T

1. Soit T une contraction complètement non-unitaire (*cf.* [2]) de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et soit U la dilatation unitaire minimum de T, opérant dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{K}\supseteqq\mathfrak{H}$). Dans [3] on a démontré que les sous-espaces

$$(1.1)\qquad \mathfrak{L}=\overline{(U-T)\mathfrak{H}},\quad \mathfrak{L}'=\overline{(U^*-T^*)\mathfrak{H}}$$

de $\mathfrak{K}$ sont ambulants pour U. [1]) Désignons par Q et Q' les projections orthogonales

[1]) Rappelons qu'un sous-espace $\mathfrak{A}\subseteqq\mathfrak{K}$ est ambulant par rapport à U si $U^n\mathfrak{A}\perp\mathfrak{A}$ pour $n=1,2,\ldots$ (*cf.* [3], p. 107).

de $\mathfrak{K}$ sur

(1. 2) $$\mathfrak{M}=\mathfrak{K}\ominus\big(\bigoplus_{-\infty}^{\infty}U^n\mathfrak{L}\big),\quad \mathfrak{M}'=\mathfrak{K}\ominus\big(\bigoplus_{-\infty}^{\infty}U^n\mathfrak{L}'\big),$$

selon les cas. Désignons par P la projection orthogonale de $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{H}$.

Nous allons utiliser ces notations constamment dans la suite.

2. Soit $\mathfrak{H}_1$ un sous-espace de $\mathfrak{H}$, invariant pour T, c'est-à-dire tel que $T\mathfrak{H}_1\subseteqq\mathfrak{H}_1$. $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_1$ est alors invariant pour T^*. Désignons par P_2 la projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}_2$. On a

$$P_2T^*P_2=T^*P_2,\quad P_2TP_2=P_2T$$

et par suite

(1. 3) $$P_2T^nP_2=P_2T^n=(P_2T)^n\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Comme P_2T est une contraction, la suite

$$\|(P_2T)^nh\|\qquad(n=1,2,\ldots)$$

est non-croissante pour tout h fixé, $h\in\mathfrak{H}$. Par conséquent la suite

$$\|P_2T^nh\|\qquad(n=1,2,\ldots)$$

est convergente. Pour $0<m<n$ on a

(1. 4) $$\|U^{-m}P_2T^mh-U^{-n}P_2T^nh\|^2=\|P_2T^mh\|^2-\|P_2T^nh\|^2$$

parce que U est unitaire et

$$(U^{-m}P_2T^mh,U^{-n}P_2T^nh)=(U^{n-m}P_2T^mh,P_2T^nh)=(T^{n-m}P_2T^mh,P_2T^nh)=$$
$$=(P_2T^{n-m}P_2T^mh,P_2T^nh)=(P_2T^{n-m}T^mh,P_2T^nh)=\|P_2T^nh\|^2.$$

De (1.4) il s'ensuit que la limite

(1. 5) $$L_{P_2}h=\lim_{n\to\infty}U^{-n}P_2T^nh\qquad(h\in\mathfrak{H})$$

existe.

Pour tout entier fixé ν et pour tout $g\in\mathfrak{H}$ on a

$$\big(U^{-n}P_2T^nh,U^\nu(U-T)g\big)=\big(P_2T^nh,U^{n+\nu}(U-T)g\big)=$$
$$=(P_2T^nh,T^{n+\nu+1}g-T^{n+\nu}Tg)=0$$

dès que $n+\nu\geqq0$. Par conséquent $L_{P_2}h$ est orthogonal à $U^\nu\mathfrak{L}$ $(\nu=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, donc

(1. 6) $$L_{P_2}h\in\mathfrak{M}\qquad(h\in\mathfrak{H}).$$

Dans le cas particulier où P_2 est l'opérateur identique I de $\mathfrak{H}$ (correspondant à l'espace invariant $\mathfrak{H}_1=\{0\}$), on a

$$h-L_Ih=\sum_{n=0}^{\infty}(U^{-n}T^n-U^{-n-1}T^{n+1})h=\sum_{n=0}^{\infty}U^{-n-1}(U-T)T^nh,$$

donc $$h-L_Ih\in\bigoplus_{-\infty}^{\infty}U^n\mathfrak{L}.$$

Comme d'autre part $L_I h \in \mathfrak{M}$ en vertu de (1. 6), on conclut que

(1. 7) $$L_I h = Qh \qquad (h \in \mathfrak{H}).$$

3. Soit maintenant
$$\mathfrak{H}_1 = \{h: h \in \mathfrak{H},\ T^n h \to 0\};$$
il est manifeste que $\mathfrak{H}_1$ est invariant pour T, donc nous pouvons appliquer les résultats du numéro précédent. Mais pour ce choix de $\mathfrak{H}_1$ (et de P_2) on peut dire même plus. Notamment, pour tout entier $m \geqq 0$ et pour tout $h \in \mathfrak{H}$ nous avons
$$L_I h = \lim_{n\to\infty} U^{-n-m} T^{n+m} h = \lim_{n\to\infty} [U^{-m} U^{-n} T^n P_2 T^m h + U^{-m-n} T^n (I-P_2) T^m h] =$$
$$= U^{-m} L_I P_2 T^m h,$$
parce que, par la définition de P_2, $T^n(I-P_2) \to O$. En tenant compte de (1. 7) nous obtenons
$$Qh = U^{-m} Q P_2 T^m h.$$
Or, comme $\mathfrak{M}$ réduit U, Q et U permutent, donc

(1. 8) $$Qh = U^{-m} Q P_2 T^m h = Q U^{-m} P_2 T^m h \qquad (h \in \mathfrak{H}).$$

Lorsque $m \to \infty$, il s'ensuit par (1.5)
$$Qh = Q L_{P_2} h;$$
comme d'autre part on a $Q L_{P_2} h = L_{P_2} h$ en vertu de (1. 6), il résulte

(1. 9) $$L_{P_2} = Q | \mathfrak{H} = L_I .$$ [2])

Dans le cas particulier $m = 1$, (1. 8) nous donne

(1. 10) $$UQh = Q P_2 T h \qquad (h \in \mathfrak{H}),$$

d'où, en posant
$$T_2 = P_2 T | \mathfrak{H}_2 (= (T^* | \mathfrak{H}_2)^*), \qquad Q_2 = Q | \mathfrak{H}_2,$$
il résulte

(1. 10') $$U Q_2 = Q_2 T_2 .$$

De (1. 7) il s'ensuit
$$\|Qh\| = \lim_{n\to\infty} \|U^{-n} T^n h\| = \lim_{n\to\infty} \|T^n h\|,$$
ce qui montre que, pour un élément $h \in \mathfrak{H}$,

(1. 11) $Qh = 0$ si $h \in \mathfrak{H}_1$ et dans ce cas seulement.

Ainsi, on a
$$Q\mathfrak{H} = Q(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2) = Q\mathfrak{H}_2,$$
c'est-à-dire

(1. 12) $$Q\mathfrak{H} = Q_2 \mathfrak{H}_2 .$$

---

[2]) Si $\mathfrak{E}$ est dans le domaine de l'opérateur S, on désigne par $S|\mathfrak{E}$ la restriction de S à $\mathfrak{E}$.

En d'autres termes, (1. 11) et (1. 12) expriment que Q_2 est une application linéaire biunivoque de $\mathfrak{H}_2$ sur la variété $Q\mathfrak{H} \subseteqq \mathfrak{M}$.

Remarquons aussi qu'en vertu de (1. 10) l'espace $\overline{Q\mathfrak{H}} = \overline{Q_2\mathfrak{H}_2}$ est invariant pour U.

4. De (1. 9) on obtient pour $h \in \mathfrak{H}$

$$PQh = \begin{cases} PL_{P_2}h = \lim_{n\to\infty} PU^{*n}P_2T^nh = \lim_{n\to\infty} T^{*n}P_2T^nh, \\ PL_Ih = \lim_{n\to\infty} PU^{*n}T^nh = \lim_{n\to\infty} T^{*n}T^nh; \end{cases}$$

puisque $T^{*n}P_2 = T_2^{*n}P_2$, $P_2T^n = P_2T^nP_2 = T_2^nP_2$ il en résulte

$$A_T^2h = PQh = A_{T_2}^2P_2h \qquad (h \in \mathfrak{H}) \tag{1. 13}$$

où

$$A_T = (\lim_{n\to\infty} T^{*n}T^n)^{\frac{1}{2}}, \quad A_{T_2} = (\lim_{n\to\infty} T_2^{*n}T_2^n)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $h \in \mathfrak{H}_2$ posons

$$WQ_2h = A_{T_2}h. \tag{1. 14}$$

Puisque

$$\|WQ_2h\|^2 = \|A_{T_2}h\|^2 = (A_{T_2}^2h, h) = (A_{T_2}^2P_2h, h) = \tag{1. 15}$$
$$= (PQh, h) = (Qh, h) = \|Qh\|^2 = \|Q_2h\|^2,$$

W peut être prolongé en une application isométrique de $\overline{Q_2\mathfrak{H}_2} = \overline{Q\mathfrak{H}}$ dans $\mathfrak{H}_2$, notamment sur $\overline{A_{T_2}\mathfrak{H}_2}$. Or, $A_{T_2}h = 0$ entraîne, en vertu de (1. 15), $Qh = 0$, ce qui, à son tour, entraîne $h \in \mathfrak{H}_1$ d'après (1. 11), donc $h \in \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$, $h = 0$. Ainsi, la transformation autoadjointe A_{T_2} de $\mathfrak{H}_2$ admet une inverse (au sens large, sans être nécessairement bornée), dont le domaine est alors dense dans $\mathfrak{H}_2$, c'est-à-dire $\overline{A_{T_2}\mathfrak{H}_2} = \mathfrak{H}_2$. Par conséquent W est une application unitaire de $\overline{Q\mathfrak{H}}$ *sur* $\mathfrak{H}_2$.

En vertu de (1. 10') nous avons

$$UW^{-1}WQ_2 = Q_2T_2, \quad (U|\overline{Q\mathfrak{H}})W^{-1}WQ_2 = Q_2T_2,$$

d'où il s'ensuit par (1. 14)

$$W(U|\overline{Q\mathfrak{H}})W^{-1}A_{T_2} = A_{T_2}T_2. \tag{1. 16}$$

Cela étant, nous pouvons énoncer le suivant:

Théorème 1. *Soit, pour la contraction complètement non-unitaire T de $\mathfrak{H}$,*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \quad \textit{où} \quad \mathfrak{H}_1 = \{h\colon h \in \mathfrak{H}, T^nh \to 0\};$$

soit P_2 la projection de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}_2$ et soit $T_2 = P_2T|\mathfrak{H}_2$ $(=(T^*|\mathfrak{H}_2)^*)$. On a alors

$$PQh = A_T^2h = A_{T_2}^2P_2h \qquad (h \in \mathfrak{H}) \tag{1. 17}$$

et

$$V_2 A_{T_2} = A_{T_2} T_2 \tag{1.18}$$

où

$$A_T = (\lim_{n\to\infty} T^{*n} T^n)^{\frac{1}{2}}, \quad A_{T_2} = (\lim_{n\to\infty} T_2^{*n} T_2^n)^{\frac{1}{2}}\ ^{3)}$$

et V_2 est une transformation isométrique de $\mathfrak{H}_2$ en soi-même, dont la dilatation unitaire minimum est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}$. De plus A_{T_2} admet une inverse, à domaine dense dans $\mathfrak{H}_2$.

Outre la liaison entre V_2 et U tous les autres énoncés ont déjà été prouvés. En ce qui concerne V_2, observons que par (1. 16)

$$V_2 = W(U|\overline{Q\mathfrak{H}})W^{-1},$$

ce qui montre que V_2 et $U|\overline{Q\mathfrak{H}}$ sont unitairement équivalentes, donc leurs dilatations unitaires minimum sont aussi unitairement équivalentes. Or il est manifeste que si $\mathfrak{M}_1$ est le sous-espace de $\mathfrak{K}$ engendré par $U^{-n}Q\mathfrak{H}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, $U|\mathfrak{M}_1$ est la dilatation unitaire minimum de $U|\overline{Q\mathfrak{H}}$. Comme $\mathfrak{M}_1 \subseteqq \mathfrak{M}$, il reste seulement à prouver que $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}_1 = \{0\}$. Or, $\mathfrak{M}_2$ réduit U et on a $\mathfrak{M}_2 \perp \mathfrak{H}$ puisque, pour $h \in \mathfrak{H}$ et $f \in \mathfrak{M}_2$,

$$(f, h) = (Qf, h) = (f, Qh) = 0.$$

Ainsi $\mathfrak{K} \ominus \mathfrak{M}_2$ comprend $\mathfrak{H}$ et réduit U, ce qui entraîne (en vertu du fait que $\mathfrak{K}$ est l'espace de la dilatation unitaire minimum de T) que $\mathfrak{K} \ominus \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}_2 = \{0\}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$. Cela achève la démonstration du théorème.

En remplaçant T par T^*, Q par Q', etc., on obtient de manière analogue le

Théorème 1'. *Soit, pour la contraction complètement non-unitaire T de $\mathfrak{H}$,*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \quad \textit{où} \quad \mathfrak{H}_2 = \{h \colon h \in \mathfrak{H},\ T^{*n}h \to 0\};$$

soit P_1 la projection de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}_1$ et soit $T_1 = T|\mathfrak{H}_1$. On a alors

$$PQ'h = A_{T^*}^2 h = A_{T_1^*}^2 P_1 h \qquad (h \in \mathfrak{H}) \tag{1.17'}$$

et

$$T_1 A_{T_1^*} = A_{T_1^*} V_1 \tag{1.18'}$$

où

$$A_{T^*} = (\lim_{n\to\infty} T^n T^{*n})^{\frac{1}{2}}, \quad A_{T_1^*} = (\lim_{n\to\infty} T_1^n T_1^{*n})^{\frac{1}{2}},$$

*et V_1 est une transformation *-isométrique*[4]) *de $\mathfrak{H}_1$ en soi-même, dont la dilatation unitaire minimum est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}'$. De plus, $A_{T_1^*}$ admet une inverse, à domaine dense dans $\mathfrak{H}_1$.*

---

3) Limites fortes.

4) C'est-à-dire que V_1^* est isométrique.

2. Une classification des contractions et des triangulations matricielles correspondantes

1. Les décompositions de l'espace $\mathfrak{H}$ considérées dans les théorèmes 1 et 1′ conduisent à des triangulations matricielles et à une classification des contractions[5]).

Définition. Une contraction complètement non-unitaire T sera dite de classe

$$C_{0\cdot} \text{ si } T^n \to O; \quad C_{\cdot 0} \text{ si } T^{*n} \to O;$$

$$C_{1\cdot}\text{: si } T^n h \not\to 0 \text{ pour } h \neq 0; \quad C_{\cdot 1}\text{: si } T^{*n} h \not\to 0 \text{ pour } h \neq 0;$$

de plus soit $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\cdot} \cap C_{\cdot\beta}$ $(\alpha = 0, 1;\ \beta = 0, 1)$.

Il est manifeste qu'on peut caractériser ces classes aussi moyennant les opérateurs A_T et A_{T^*}. Par exemple, $T \in C_{0\cdot}$ si $A_T = O$, $T \in C_{1\cdot}$ si A_T admet une inverse (au sens large), etc.

2. Voici les triangulations qui résultent si l'on applique les théorèmes 1 et 1′, exprimées en termes de la classification ci-dessus.

Théorème 2. *Toute contraction complètement non-unitaire T admet des triangulations de type*

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} C_{0\cdot} & * \\ O & C_{1\cdot} \end{pmatrix}, \qquad \text{(a')} \quad \begin{pmatrix} C_{\cdot 1} & * \\ O & C_{\cdot 0} \end{pmatrix}$$

et

$$\text{(b)} \quad \begin{pmatrix} C_{01} & * & * & * & * \\ O & C_{00} & * & * & * \\ O & O & C_{11} & * & * \\ O & O & O & C_{00} & * \\ O & O & O & O & C_{10} \end{pmatrix},\ ^{6)}$$

les triangulations de type (a) *et* (a′) *étant univoquement déterminées.*[7]) *La triangulation de type* (b) *peut être choisie de sorte que le terme C_{11} soit quasi similaire*[8]) *à une transformation unitaire W qui est unitairement équivalente à une partie de $U|\mathfrak{M}$ ainsi qu'à une partie de $U|\mathfrak{M}'$.* [9])

---

5) Par des raisons de commodité nous restreignons cette classification aux contractions complètement non-unitaires, bien qu'elle serait possible même sans telle restriction. D'ailleurs on sait que toute contraction se décompose de manière univoque en somme orthogonale d'une contraction complètement non-unitaire et d'une transformation unitaire; *cf.* [2].

6) Pour les opérateurs dans les diagonales on a indiqué seulement leurs classes; les $*$ marquent des opérateurs qu'on ne précisera pas. On fait la convention d'admettre aussi l'espace banal $\{0\}$ dont le seul opérateur $0 \to 0$ appartient à toutes nos classes. En d'autres termes, quelques éléments dans les diagonales (ensemble avec leur ligne et colonne) peuvent manquer dans (a), (a′), ou (b).

7) Dans [1] on a indiqué par erreur encore une triangulation; celle-ci ne s'obtient pas par nos méthodes.

8) Deux opérateurs bornés A et B seront dits *quasi similaires* s'il existe des opérateurs bornés X et Y admettant des inverses (non-nécessairement bornés, mais à domaines denses) tels que

$$AX = XB \quad \text{et} \quad BY = YA.$$

Dans [1] on a dit „quasi linéairement équivalent" au lieu de „quasi similaire".

9) Nous disons que la transformation A de l'espace $\mathfrak{A}$ fait *partie* de la transformation B de l'espace $\mathfrak{B}$, où $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, si $\mathfrak{A}$ réduit B et $A = B|\mathfrak{A}$.

Démonstration. Partons de la triangulation

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & * \\ O & T_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2, \quad T_1 = T|\mathfrak{H}_1, \quad T_2 = (T^*|\mathfrak{H}_2)^*,$$

étudiée dans le théorème 1. Par définition on a alors $T_1 \in C_{0\cdot}$. En ce qui concerne T_2, remarquons que si $T_2^{*n}h \to 0$ pour un $h \in \mathfrak{H}_2$, par (1. 13) on a aussi $T^{*n}T^n h \to 0$, donc

$$\|T^n h\|^2 = (T^{*n}T^n h, h) \to 0, \quad T^n h \to 0,$$

ce qui veut dire $h \in \mathfrak{H}_1$, d'où $h=0$. Par conséquent $T_2 \in C_{1\cdot}$. De cette manière la triangulation envisagée est de type (a).

Montrons que si

$$T = \begin{pmatrix} T_1' & * \\ O & T_2' \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2', \quad T_1' = T|\mathfrak{H}_1', \quad T_2' = (T^*|\mathfrak{H}_2')^*$$

est une triangulation de T de type (a), elle nécessairement coïncide avec celle que nous venons de construire. Pour cela il suffit de prouver

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1'. \tag{2. 1}$$

Or, pour $h \in \mathfrak{H}_1'$ on a $T^n h = T_1'^n h \to 0$ parce que $T_1' \in C_{0\cdot}$. En vertu de la définition de $\mathfrak{H}_1$ cela entraîne $h \in \mathfrak{H}_1$, donc

$$\mathfrak{H}_1' \subseteq \mathfrak{H}_1.$$

Soit maintenant $h \in \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{H}_1'$. On a alors, d'une part, $T^n h \to 0$ parce que $h \in \mathfrak{H}_1$, d'autre part, $P_2' T^n h = T_2'^n h$ parce que $h \in \mathfrak{H}_2'$ (P_2' désigne la projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}_2'$); comme $T_2' \in C_{1\cdot}$, $T_2'^n h \to 0$ entraîne $h=0$. Donc $\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{H}_1' = \{0\}$, ce qui prouve (2. 1).

Nous avons ainsi démontré que toute contraction complètement non-unitaire admet une triangulation de type (a) et une seule. En ce qui concerne la triangulation de type (a′) il n'y a qu'à reproduire les considérations ci-dessus en s'appuyant cette fois-ci sur le théorème 1′ au lieu du théorème 1.

Passons au problème des triangulations de type (b). On peut partir de chacune des triangulations déjà obtenues: nous choisissons la triangulation de type (a)

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & * \\ O & T_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2, \quad T_1 \in C_{0\cdot}, \quad T_2 \in C_{1\cdot}. \tag{2. 2}$$

Pour T_1 et T_2 prenons alors leurs triangulations de type (a′):

$$T_i = \begin{pmatrix} T_{i1} & * \\ O & T_{i2} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_{i1} \oplus \mathfrak{H}_{i2}, \quad T_{i1} \in C_{\cdot 1}, \quad T_{i2} \in C_{\cdot 0} \qquad (i=1, 2). \tag{2. 3}$$

Comme $T_1 \in C_{0\cdot}$, on a aussi $T_{11} \in C_{0\cdot}$, $T_{12} \in C_{0\cdot}$. En effet, $T_1^n \to O$ entraîne $T_{11}^n \to O$ et $T_{12}^n \to O$ parce que $T_{11}^n = T_1^n|\mathfrak{H}_{11}$ et $T_{12}^n = P_{12}T_1^n|\mathfrak{H}_{12}$ où P_{12} est la projection orthogonale de $\mathfrak{H}_1$ sur $\mathfrak{H}_{12}$. Par conséquent, on a

$$T_{11} \in C_{01}, \quad T_{12} \in C_{00}.$$

D'autre part, comme $T_2 \in C_{1.}$ et $T_{21} = T_2|\mathfrak{H}_{21}$, on a aussi $T_{21} \in C_{1.}$ et par conséquent

$$T_{21} \in C_{11}.$$

Prenons finalement pour T_{22} sa triangulation de type (a):

$$(2.4)\quad T_{22} = \begin{pmatrix} T_{221} & * \\ O & T_{222} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H}_{22} = \mathfrak{H}_{221} \oplus \mathfrak{H}_{222}, \quad T_{221} \in C_{0.}, \quad T_{222} \in C_{1.};$$

vu que $T_{22}^{*n} \to O$, on aura aussi $T_{222}^{*n} = T_{22}^{*n}|\mathfrak{H}_{222} \to O$ et $T_{221}^{*n} = P_{221} T_{22}^{*n}|\mathfrak{H}_{221} \to O$, donc

$$(2.5)\qquad T_{221} \in C_{00}, \quad T_{222} \in C_{10}.$$

En réunissant (2. 2), (2. 3) et (2. 4) nous obtenons la triangulation

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & * & * & * & * \\ O & T_{12} & * & * & * \\ O & O & T_{21} & * & * \\ O & O & O & T_{221} & * \\ O & O & O & O & T_{222} \end{pmatrix},$$

qui est de type (b).

Étudions T_{21} de plus près. Dans ce but, désignons par $\mathfrak{K}_2$ le sous-espace de $\mathfrak{K}$ engendré par $U^n\mathfrak{H}_2$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Évidemment, $U|\mathfrak{K}_2$ est la dilatation unitaire minimum de T_2. Soient

$$\mathfrak{L}_2' = \overline{(U^* - T_2^*)\mathfrak{H}_2}, \quad \mathfrak{M}_2' = \mathfrak{K}_2 \ominus \left(\bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{L}_2'\right).$$

Nous allons montrer que

$$(2.6)\qquad \mathfrak{M}_2' \subseteq \mathfrak{M}'.$$

A cet effet, observons d'abord que $\mathfrak{L}_2' \subseteq \mathfrak{L}'$. Soit alors $l' \in \mathfrak{L}' \ominus \mathfrak{L}_2'$. Pour tout $h_2 \in \mathfrak{H}_2$ et tout entier ν on a

$$(2.7)\quad (h_2, U^\nu l') = \left((U^* - T^*)h_2, U^{\nu-1} l'\right) + (T^* h_2, U^{\nu-1} l') = (T_2^* h_2, U^{\nu-1} l')$$

puisque $T_2^* = T^*|\mathfrak{H}_2$ et

$$\left((U^* - T_2^*)h_2, U^{\nu-1} l'\right) = 0$$

(le cas $\nu \neq 1$ s'ensuit de ce que $\mathfrak{L}'$ est ambulant, et le cas $\nu = 1$ de ce que $l' \perp \mathfrak{L}_2'$). De (2. 7) nous obtenons par récurrence

$$(2.8)\qquad (h_2, U^\nu l') = (T_2^{*k} h_2, U^{\nu-k} l') \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Or, d'après le théorème 1 (ii) de [3], nous avons $\mathfrak{H} \perp U^\mu \mathfrak{L}'$ pour $\mu \leqq 0$. En prenant $k \geqq \nu$ dans (2. 8) nous obtenons donc $(h_2, U^\nu l') = 0$. Cela veut dire que $\mathfrak{H}_2 \perp U^\nu(\mathfrak{L}' \ominus \mathfrak{L}_2')$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), d'où il résulte de manière évidente

$$\mathfrak{K}_2 \perp \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n(\mathfrak{L}' \ominus \mathfrak{L}_2').$$

Comme
$$\mathfrak{R} = (\bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n(\mathfrak{L}' \ominus \mathfrak{L}_2')) \oplus (\bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{L}_2') \oplus \mathfrak{M}',$$
on obtient
$$(\bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{L}_2') \oplus \mathfrak{M}_2' = \mathfrak{R}_2 \subseteq (\bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{L}_2') \oplus \mathfrak{M}',$$
ce qui entraîne (2. 6).

Appliquons maintenant à T_2 et T_{21} le théorème 1'. Nous obtenons

(2. 9) $$T_{21}X = XW$$

où $X = A_{T_{21}^*}$ et W est $*$-isométrique, ayant la dilatation unitaire minimum unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}_2'$. Montrons que W est même une transformation unitaire de $\mathfrak{H}_{21}$. En effet, en cas contraire il existe un $h \in \mathfrak{H}_{21}$, $h \neq 0$, tel que $Wh = 0$ et en vertu de (2. 9) $T_{21}^n Xh = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$). Comme $T_{21} \in C_{11}$, cela entraîne $Xh = 0$, et comme $X = A_{T_{21}^*}$ admet une inverse, il résulte $h = 0$, en contradiction avec l'hypothèse faite. Ainsi W est unitaire. Par conséquent W coïncide avec sa dilatation unitaire minimum dont on sait déjà qu'elle est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}_2'$. Or, $U|\mathfrak{M}_2'$ est évidemment une partie de $U|\mathfrak{M}'$. On conclut que W est unitairement équivalente à une partie de $U|\mathfrak{M}'$.

Pour continuer l'étude de T_{21}, rappelons qu'en vertu du théorème 1 nous avons

(2. 10) $$V_2 A_{T_2} = A_{T_2} T_2$$

où V_2 est une transformation isométrique dont la dilatation unitaire minimum est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}$; de plus A_{T_2} admet une inverse à domaine dense dans $\mathfrak{H}_2$. Posons
$$A = A_{T_2}|\mathfrak{H}_{21}, \quad \mathfrak{H}' = \overline{A\mathfrak{H}_{21}} = \overline{A_{T_2}\mathfrak{H}_{21}}, \quad V = V_2|\mathfrak{H}';$$
en vertu de (2. 10), $\mathfrak{H}'$ est invariant pour V_2, donc V est un opérateur isométrique de $\mathfrak{H}'$. En prenant les restrictions à $\mathfrak{H}_{21}$, on obtient de (2. 10)

(2. 11) $$VA = AT_{21}.$$

Cette relation entraîne que V est même unitaire. En effet, en cas contraire on a un $h \in \mathfrak{H}'$, $h \neq 0$, tel que $V^*h = 0$; en vertu de (2. 11) on a alors
$$T_{21}^* A^* h = (AT_{21})^* h = (VA)^* h = A^* V^* h = 0, \quad T_{21}^{*n} A^* h = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$
d'où, comme $T_{21} \in C_{11}$, il résulte $A^*h = 0$, donc $h \perp \overline{A\mathfrak{H}_{21}} = \mathfrak{H}'$. Cela contredit nos hypothèses sur h. De cette manière, V est unitaire, et par conséquent V est une partie de V_2, ainsi que de la dilatation unitaire minimum de V_2, qui, à son tour, est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}$. Ainsi, V est unitairement équivalente à une partie de $U|\mathfrak{M}$.

De (2. 9) et (2. 11) il résulte

(2. 12) $$VAX = AT_{21}X = AXW, \quad VB = BW$$

où $B = AX$ est une transformation linéaire bornée de $\mathfrak{H}_{21}$ dans $\mathfrak{H}'$. Comme X et A_{T_2} admettent des inverses, B admet aussi une inverse, et comme $\overline{X\mathfrak{H}_{21}} = \mathfrak{H}_{21}$,

$\overline{A\mathfrak{H}_{21}}=\mathfrak{H}'$, on a $\overline{B\mathfrak{H}_{21}}=\mathfrak{H}'$, donc B^{-1} a domaine dense dans $\mathfrak{H}'$. Envisageons la transformation $|B|=(B^*B)^{\frac{1}{2}}$; elle est autoadjointe dans $\mathfrak{H}_{21}$ et comme $\|\,|B|h\|=$ $=\|Bh\|$ pour tout $h\in\mathfrak{H}_{21}$, $|B|\,h=0$ entraîne $Bh=0$, donc $h=0$; par conséquent $|B|$ admet une inverse et $\overline{|B|\mathfrak{H}_{21}}=\mathfrak{H}_{21}$. De plus, on définit par

$$Bh=C|B|h \qquad (h\in\mathfrak{H}_{21})$$

une application isométrique C de $|B|\mathfrak{H}_{21}$ sur $B\mathfrak{H}_{21}$, qui se complète par continuité à une application unitaire de $\mathfrak{H}_{21}$ sur $\mathfrak{H}'$. De (2. 12) il s'ensuit successivement, vu que W est unitaire dans $\mathfrak{H}_{21}$ et V est unitaire dans $\mathfrak{H}'$,

$$BW^*=V^*B,\quad WB^*=B^*V,\quad WB^*B=B^*VB=B^*BW,\quad W|B|=|B|W,$$

$$VC|B|=VB=BW=C|B|W=CW|B|,\quad (VC-CW)|B|=O,$$

d'où on conclut $VC-CW=O$, $VC=CW$. Cela veut dire que V et W sont unitairement équivalentes. Comme V est unitairement équivalente à une partie de $U|\mathfrak{M}$, il en est de même pour W.

En multipliant les membres de (2. 11) par C^{-1} et en posant $Y=C^{-1}A$ nous obtenons

$$WY=YT_{21};$$

Y transforme $\mathfrak{H}_{21}$ dans $\mathfrak{H}_{21}$, admet une inverse (non nécessairement bornée), dont le domaine est dense dans $\mathfrak{H}_{21}$, parce que

$$\overline{Y\mathfrak{H}_{21}}=\overline{C^{-1}A\mathfrak{H}_{21}}=C^{-1}\overline{A\mathfrak{H}_{21}}=C^{-1}\mathfrak{H}'=\mathfrak{H}_{21}.$$

Cette relation et (2. 9) montrent que T_{21} et W sont quasi similaires, ce qui achève la démonstration du théorème.

3. La dernière partie du théorème 2 peut être précisée dans le cas où T elle même est de classe C_{11}. Notamment on a le

Théorème 3. *Soit $T\in C_{11}$. Dans ce cas $U|\mathfrak{M}$ et $U|\mathfrak{M}'$ sont unitairement équivalentes et T est quasi similaire à chacune de ces transformations.*

Démonstration. Appliquons à T les théorèmes 1 et 1′ en tenant compte de ce que

$$\{h\colon h\in\mathfrak{H},\ T^nh\to 0\}=\{0\}=\{h\colon h\in\mathfrak{H},\ T^{*n}h\to 0\}.$$

Nous obtenons

$$A_TT=VA_T,\quad TA_{T^*}=A_{T^*}V' \tag{2. 13}$$

où V est isométrique, V' est $*$-isométrique, A_T et A_{T^*} admettent des inverses à domaines denses. En reproduisant pour T la partie de la démonstration du théorème 2 concernant T_{21} on obtient que V et V' sont unitaires et unitairement équivalentes. De plus en vertu des théorèmes 1 et 1′ V est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}$, tandis que V' est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}'$. Ces équivalences unitaires et les relations (2. 13) entraînent le théorème 3.

PARTIE II

3. La classe C_0

Soit H^∞ la classe des fonctions complexes, holomorphes et bornées dans le disque unité $D=\{z: |z|<1\}$. Dans [4], § 1 on a défini l'opérateur $u(T)$, quelle que soit la fonction $u \in H^\infty$ et la contraction complètement non-unitaire T. Rappelons cette définition. Pour

$$u(z) = \sum_0^\infty c_k z^k \quad \text{avec} \quad \sum |c_k| < \infty \tag{3. 1}$$

(qui évidemment appartient à H^∞) on pose

$$u(T) = \sum_0^\infty c_k T^k \qquad (\text{où } T^0 = I).$$

Pour $u(z) \in H^\infty$ quelconque, $u_r(z) = u(rz)$ $(0<r<1)$ est de type que nous venons d'envisager, donc $u_r(T)$ se trouve déjà défini. On montre que

$$\lim_{r\to 1} u_r(T)$$

existe au sens de la convergence forte des opérateurs et c'est par cette limite qu'on définit $u(T)$.

Théorème 4. *Soit T une contraction complètement non-unitaire telle que $d(T)=O$ pour une certaine fonction $d \in H^\infty$, $d(z) \not\equiv 0$. On a alors $T^n \to O$ et $T^{*n} \to O$, c'est-à-dire que $T \in C_{00}$.*

Démonstration. En utilisant les notations du § 1, écrivons la première relation (1. 8) pour $h = P_2 g$ $(g \in \mathfrak{H})$:

$$QP_2 g = U^{-m} QP_2 T^m P_2 g \qquad (m = 0, 1, \ldots),$$

d'où

$$U^m QP_2 = QP_2 T^m P_2 \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Cela entraîne

$$u(U) QP_2 = QP_2 u(T) P_2 \tag{3. 2}$$

pour toute fonction de type (3. 1), où

$$u(U) = \sum_0^\infty c_k U^k = \int_0^{2\pi} u(e^{it})\, dE_t,$$

$\{E_t\}_{0 \leqq t \leqq 2\pi}$ étant la famille spectrale de U. D'après le théorème 2 de [2] cette famille est absolument continue, c'est-à-dire que $(E_t k, k)$ est une fonction absolument continue de t, quel que soit $k \in \mathfrak{K}$. Par conséquent l'opérateur

$$d(U) = \int_0^{2\pi} d(e^{it})\, dE_t$$

(où $d(e^{it}) = \lim_{r\to 1} d(re^{it})$ existe presque partout en vertu du théorème de Fatou) est bien défini. De plus, on a en vertu du théorème de convergence de Lebesgue et grâce à la continuité absolue de $(E_t k, k)$,

$$\|d(U)k-d_r(U)k\|^2=\int_0^{2\pi}|d(e^{it})-d_r(e^{it})|^2\,d(E_t k, k)\to 0 \qquad (k\in\mathfrak{K}),$$

donc $d_r(U)\to d(U)$ fortement pour $r\to 1-0$. Ainsi, en posant $u=d_r$ dans (3. 2) et en faisant $r\to 1-0$ nous obtenons

$$d(U)QP_2=QP_2 d(T)P_2=O. \tag{3. 3}$$

Mais comme $d(e^{it})\neq 0$ presque partout (puisque $d\in H^\infty$, $d(z)\not\equiv 0$) et comme $(E_t k, k)$ est une fonction absolument continue de t pour tout $k\in\mathfrak{K}$,

$$\int_0^{2\pi}|d(e^{it})|^2\,d(E_t k, k)=0 \quad \text{entraîne} \quad \|k\|^2=\int_0^{2\pi}d(E_t k, k)=0.$$

Or, la première intégrale, étant égale à $\|d(U)k\|^2$, s'annule, en vertu de (3. 3), pour tout $k\in QP_2\mathfrak{H}$, ce qui entraîne $QP_2=O$. En vertu de (1. 7) on a donc

$$L_I h=Qh=QP_2 h=0$$

pour tout $h\in\mathfrak{H}_2$, d'où

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n h\|=\lim_{n\to\infty}\|U^{-n}T^n h\|=\|L_I h\|=0,$$

donc $h\in\mathfrak{H}_1$. Ainsi, $h\in\mathfrak{H}_1\cap\mathfrak{H}_2$, $h=0$. Cela veut dire que $\mathfrak{H}_2=\{0\}$, $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}$, donc $T^n\to O$. En échangeant les rôles de T et T^* et en remarquant que

$$d^\sim(T^*)=(d(T))^*=O$$

où $d^\sim(z)=\overline{d(\bar z)}\in H^\infty$, on obtient que $T^{*n}\to O$, ce qui achève la démonstration du théorème 4.

Corollaire. *Soit T une contraction complètement non-unitaire et soit $d\in H^\infty$, $d(z)\not\equiv 0$. On a alors*

$$\{h\colon d(T)h=0\}\subseteqq\mathfrak{H}_1=\{h\colon T^n h\to 0\}.$$

Démonstration. Désignons par $\mathfrak{H}_1'$ le sous-espace formé des éléments h tels que $d(T)h=0$; $\mathfrak{H}_1'$ est évidemment invariant pour T. Soit $T_1'=T|\mathfrak{H}_1'$; pour toute fonction $u\in H^\infty$ on a alors $u(T_1')=u(T)|\mathfrak{H}_1'$. Par conséquent $d(T_1')=O$, donc $T_1'^n\to O$, c'est-à-dire $T^n h\to 0$ pour tout $h\in\mathfrak{H}_1'$, ce qui achève la démonstration.

La classe des contractions envisagées dans le théorème 4 mérite une étude approfondie, ce qui fera l'objet des paragraphes suivantes de cette Note. Pour commodité de langage faisons la

Définition. On appellera C_0 la classe des contractions complètement non unitaires T pour lesquelles il existe une fonction $d\in H^\infty$, $d(z)\not\equiv 0$, telle que $d(T)=O$.

Le théorème 4 s'exprime alors par la formule

$$C_0\subseteqq C_{00}.$$

Il convient d'observer que la classe C_0 comprend une vaste variété d'opérateurs. En effet, *pour toute fonction* $u(z)\in H^\infty$, $u(z)\not\equiv 0$, *qui n'est pas extérieure*[10]) *(et pour ces fonctions seulement) on peut trouver une contraction complètement non-unitaire* T *d'un espace de Hilbert* $\mathfrak{H}\neq\{0\}$, *telle que* $u(T)=O$.

C'est une conséquence du théorème 2 de [4], *voir* aussi [5]. Un résultat plus précis sera obtenu dans le paragraphe 5 (théorème 6).

4. L'existence de la fonction minimum

Le but de ce paragraphe est de montrer que parmi les fonctions qui s'annulent pour T, où $T\in C_0$, il y a une qu'on peut désigner *fonction minimum*, tout comme parmi les polynomes qui s'annulent pour un opérateur d'un espace de dimension finie il existe un polynome minimum.

1. Nous commençons par établir deux lemmes sur les fonctions de la classe H^∞.

Lemme 1. *Soient* u, v *deux fonctions intérieures et soit* w *leur plus grand diviseur commun intérieur*[10]). *Soit* $f(t)$ *une fonction intégrable* $(0\leqq t\leqq 2\pi)$, *pour laquelle*

$$\int_0^{2\pi} u(e^{it})f(t)e^{int}\,dt=0 \quad \textit{et} \quad \int_0^{2\pi} v(e^{it})f(t)e^{int}\,dt=0 \qquad (n=0,1,\ldots).$$

On a alors aussi

$$\int_0^{2\pi} w(e^{it})f(t)e^{int}\,dt=0 \qquad (n=0,1,\ldots).$$

Démonstration. En vertu des hypothèses faites, les fonctions $f_1(t)= =u(e^{it})f(t)e^{-it}$, $f_2(t)=v(e^{it})f(t)e^{-it}$ sont intégrables et leurs séries de Fourier sont de la forme

$$f_k(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_{kn}e^{int} \qquad (k=1,2).$$

Les fonctions

$$F_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{kn}z^n \qquad (k=1,2)$$

appartiennent alors à la classe H^1 de Hardy dans le cercle unité et on a

$$F_k(e^{it})=\lim_{r\to 1-0}F_k(re^{it})=f_k(t) \quad \text{p. p.} \qquad (k=1,2).$$

La fonction $D(z)=F_1(z)v(z)-F_2(z)u(z)$ appartient aussi à H^1 et sa valeur limite $D(e^{it})$ est évidemment égale à 0 p. p. Cela entraîne $D(z)\equiv 0$, $F_1v=F_2u$, ou encore, en posant $u/w=u_0$ et $v/w=v_0$,

$$F_1v_0=F_2u_0. \tag{4.1}$$

[10]) Pour les notions: fonction intérieure, fonction extérieure, diviseurs communs de fonctions intérieures, etc., nous renvoyons le lecteur au Mémoire [6] ou à la monographie [7].

Mettant à part le cas banal où $f(t)$ s'annule p. p., $f_1(t)$ et $f_2(t)$ ne s'annulent pas p. p. et par conséquent $F_1(z)$ et $F_2(z)$ ne s'annulent pas identiquement. Soient $F_1^i(z)$ et $F_2^i(z)$ leurs facteurs intérieurs; de (4. 1) on obtient $F_1^i v_0 = F_2^i u_0$. Comme u_0 et v_0 n'ont pas de diviseur commun intérieur non constant, il s'ensuit que u_0 divise F_1^i et par conséquent u_0 divise F_1. On a donc $G = F_1/u_0 \in H^1$. Or

$$G(e^{it}) = F_1(e^{it})/u_0(e^{it}) = u(e^{it})f(t)e^{-it}/u_0(e^{it}) = w(e^{it})f(t)e^{-it},$$

d'où
$$\int_0^{2\pi} w(e^{it})f(t)e^{int}\,dt = \int_0^{2\pi} G(e^{it})e^{i(n+1)t}\,dt = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

ce qui achève la démonstration.

Lemme 2. *Soit $\{u_n(z)\}$ une suite uniformément bornée de fonctions $\in H^\infty$, tendant vers 0 dans D. On a alors*

$$\int_0^{2\pi} u_n(e^{it})f(t)\,dt \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{4. 2}$$

pour toute fonction intégrable $f(t)$.

Démonstration. Les fonctions $u_n(z)z^{\nu-1}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ \nu$ entier quelconque) étant régulières pour $0 < |z| < 1$, on a

$$\int_0^{2\pi} u_n(e^{it})e^{i\nu t}\,dt = \lim_{r \to 1-0} \int_0^{2\pi} u_n(re^{it})r^\nu e^{i\nu t}\,dt = \lim_{r \to 1-0} \frac{1}{i} \int_{|z|=r} u_n(z)z^{\nu-1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{i} \int_{|z|=\frac{1}{2}} u_n(z)z^{\nu-1}\,dz;$$

or la dernière intégrale tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ parce que $u_n(z)$ tend vers 0 tout en restant bornée par une constante indépendante de n et z. Ainsi, (4. 2) est vérifié par $f(t) = e^{i\nu t}$ pour ν entier quelconque et par conséquent (4. 2) est vérifié par tout polynome trigonométrique. Comme toute fonction intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ peut être approchée, dans la métrique de l'espace $L^1(0, 2\pi)$, par un polynome trigonométrique, aussi près que l'on veut, (4. 2) sera vrai pour $f(t)$ intégrable quelconque.

2. Voici des conséquences de ces lemmes, dont on fera usage tout à l'heure.

Lemme 1'. *Soient $u(z), v(z)$ deux fonctions intérieures telles que $u(T) = O$, $v(T) = O$ pour une contraction complètement non-unitaire T. Si $w(z)$ est le plus grand diviseur commun intérieur de $u(z)$ et $v(z)$, on a aussi $w(T) = O$.*

Démonstration. Soit U la dilatation unitaire minimum de T et soit $\{E_t\}$ la famille spectrale de U; en vertu de [2] E_t est fonction absolument continue de t. Fixons deux éléments quelconques h et g de l'espace $\mathfrak{H}$ où T opère; on aura

$$f(t) = d(E_t h, g)/dt \in L^1(0, 2\pi).$$

Comme $u(T)=O$, on a pour $n=0, 1, 2, \ldots$:

$$0=(T^n u(T)h, g)=(U^n u(U)h, g)=\int_0^{2\pi} e^{int}u(e^{it})\,d(E_t h, g)=\int_0^{2\pi} e^{int}u(e^{it})f(t)\,dt$$

et analoguement

$$0=(T^n v(T)h, g)=\int_0^{2\pi} e^{int}v(e^{it})f(t)\,dt.$$

En vertu du lemme 1 on a alors aussi

$$(w(T)h, g)=\int_0^{2\pi} w(e^{it})\,d(E_t h, g)=\int_0^{2\pi} w(e^{it})f(t)\,dt=0.$$

Comme h, g étaient arbitraires, cela donne $w(T)=O$.

Lemme 2'. *Soit $\{u_n(z)\}$ une suite uniformément bornée de fonctions $\in H^\infty$, convergeant vers 0 dans D. On a alors*

$$u_n(T)\rightharpoonup O \quad \text{(convergence faible)}$$

pour toute contraction complètement non-unitaire T.

Démonstration. En désignant toujours par U la dilatation unitaire minimum de T et par $\{E_t\}$ sa famille spectrale, on a, pour tout couple h, g d'éléments de l'espace de T,

$$(u_n(T)h, g)=(u_n(U)h, g)=\int_0^{2\pi} u_n(e^{it})\,d(E_t h, g)=\int_0^{2\pi} u_n(e^{it})f(t)\,dt$$

où $f(t)=d(E_t h, g)/dt$. En vertu du lemme 2 la dernière intégrale tend vers 0, ce qui prouve que $u_n(T)\rightharpoonup O$.

3. Cela étant, nous sommes à même de prouver le théorème sur l'existence de la fonction minimum:

Théorème 5. *Soit $T\in C_0$. Il existe alors une fonction $m_T(z)$, univoquement déterminée à un facteur constant de module 1 près, telle que*

(i) *$m_T(z)$ est une fonction intérieure,*
(ii) *$m_T(T)=O$,*
(iii) *$m_T(z)$ divise (dans H^∞) toute autre fonction $u(z)$ telle que $u(T)=O$.*

Démonstration. Comme $T\in C_0$, il existe une fonction $d(z)\in H^\infty$, $d(z)\not\equiv 0$, telle que $d(T)=O$. Soit $d(z)=d^e(z)d^i(z)$ la décomposition de $d(z)$ en produit de ses facteurs extérieur et intérieur. On a $d^e(T)d^i(T)=d(T)=O$ et comme, en vertu du théorème 2 de [4], $d^e(T)$ admet une inverse on a aussi $d^i(T)=O$. Désignons par $\mathfrak{J}$ la classe des fonctions intérieures $u(z)$ telles que $u(T)=O$; on a $d^i\in\mathfrak{J}$, donc $\mathfrak{J}$ n'est pas vide.

Fixons un point $a\in D$ où $d^i(a)\neq 0$ et posons

$$s=\sup\{|u(a)|: u\in\mathfrak{J}\};$$

on a $s \geqq |d^i(a)| > 0$. Choisissons une suite $\{u_n(z)\}$ dans $\mathfrak{J}$ telle que $|u_n(a)| \to s$; en vertu du théorème de VITALI—MONTEL on peut même supposer que cette suite converge dans tout point $z \in D$ vers une limite $v(z)$ et cela uniformément dans tout domaine $|z| \leqq \varrho < 1$. $v(z)$ appartient évidemment à H^∞, on a même $|v(z)| \leqq 1$; de plus $|v(a)| = s$. En appliquant le lemme 2' à la suite $\{u_n - v\}$ on obtient

$$(u_n - v)(T) \to O, \quad \text{donc} \quad u_n(T) \to v(T).$$

Comme $u_n(T) = O$ pour tout n, on a aussi $v(T) = O$. Soit $v = v^e v^i$ la factorisation de v en ses facteurs extérieur et intérieur. Alors $v^i(T) = O$, donc $v^i \in \mathfrak{J}$ et par conséquent $|v^i(a)| \leqq s$. Comme $|v(z)| \leqq 1$, on a aussi $|v^e(z)| \leqq 1$ et par suite

$$s = |v(a)| = |v^e(a)|\, |v^i(a)| \leqq |v^e(a)|\, s \leqq s,$$

d'où il résulte que $|v^e(a)| = 1$; par conséquent $v^e(z)$ est une constante, de module 1. Ainsi $v(z)$ est elle même une fonction intérieure, $v \in \mathfrak{J}$, $|v(a)| = s$.

Soit $u \in H^\infty$ quelconque, $u(z) \not\equiv 0$, $u(T) = O$, et soit u^i le facteur intérieur de u; on a alors aussi $u^i \in \mathfrak{J}$. Soit w le plus grand diviseur commun intérieur de v et u^i. D'après le lemme 1' on a aussi $w \in \mathfrak{J}$. Comme v/w est intérieure et par conséquent $|(v/w)(a)| \leqq 1$, on a

$$s = |v(a)| = \left|\frac{v}{w}(a)\right| |w(a)| \leqq \left|\frac{v}{w}(a)\right| s \leqq s,$$

ce qui n'est possible que si $|(v/w)(a)| = 1$ qui, à son tour, entraîne que v/w est une constante égale en module à 1. Cela veut dire que v est un diviseur de u^i et par conséquent aussi de u.

Ainsi, v jouit des propriétés (i)—(iii) de la *fonction minimum* m_T. L'unicité à un facteur constant près, de module 1, s'ensuit du fait évident que deux fonctions intérieures dont chacune divise l'autre, ne diffèrent qu'en un facteur constant près, égal en module à 1.

4. Un fait connu dans l'algèbre linéaire est que deux matrices finies similaires ont les mêmes polynomes minimum. Nous allons démontrer un fait analogue pour les fonctions minimum des contractions. Commençons par introduire une notion utile:

Définition. S_1 étant une transformation linéaire bornée dans l'espace $\mathfrak{H}_1$ et S_2 une autre dans l'espace $\mathfrak{H}_2$, on dit que S_2 est la *transformée quasi affine* de S_1 lorsqu'il existe une transformation linéaire bornée X de l'espace $\mathfrak{H}_2$ dans l'espace $\mathfrak{H}_1$, admettant une inverse (au sens large), à domaine dense dans $\mathfrak{H}_1$, et pour laquelle $XS_2 = S_1 X$, c'est-à-dire que $S_2 = X^{-1} S_1 X$.

Cela étant, démontrons la proposition suivante:

Soient T_1 et T_2 deux contractions complètement non-unitaires dont T_2 est une transformée quasi affine de T_1. Si l'une de ces contractions est de la classe C_0 il en est de même de l'autre et leurs fonctions minimum coïncident.

Démonstration. La relation $XT_2 = T_1 X$ entraîne $XT_2^n = T_1^n X$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ et par conséquent $Xu(T_2) = u(T_1)X$ pour toute fonction $u(z) \in H^\infty$. Lorsque $T_1 \in C_0$, on a donc $Xm_{T_1}(T_2) = m_{T_1}(T_1)X = O$; vu que X admet une inverse cela entraîne $m_{T_1}(T_2) = O$, donc $T_2 \in C_0$ et $m_{T_2}(z)$ est un diviseur de $m_{T_1}(z)$. Inversement, $T_2 \in C_0$ entraîne $m_{T_2}(T_1)X = X m_{T_2}(T_2) = O$ et, vu que $\overline{X\mathfrak{H}_2} = \mathfrak{H}_1$, $m_{T_2}(T_1) = O$;

donc $T_1 \in C_0$ et $m_{T_1}(z)$ est un diviseur de $m_{T_2}(z)$. On voit donc que si l'une des contractions appartient à C_0, y appartiennent toutes les deux et leurs fonctions minimum se divisent mutuellement, et par conséquent ces fonctions minimum coïncident.

Ce résultat montre en particulier que *la fonction minimum est invariante par rapport à une quasi similitude.*

5. Contraction ayant une fonction minimum donnée

Nous avons déjà remarqué que pour toute fonction $u(z) \in H^\infty$, $u(z) \not\equiv 0$, qui n'est pas extérieure, il existe une contraction complètement non-unitaire T telle que $u(T) = O$. Or, on peut affirmer même plus:

Théorème 6. *Pour toute fonction intérieure donnée $w(z)$ il existe une contraction complètement non-unitaire $T \in C_0$ d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H} \neq \{0\}$, telle que la fonction minimum de T est égale à $w(z)$.*

Démonstration. Envisageons l'espace de Hilbert H^2 des fonctions numériques $h(e^{it}) \in L^2(0, 2\pi)$ telles que

$$h(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{ikt}.$$

Soit wH^2 la variété linéaire dans H^2 formée par les fonctions de la forme $w(e^{it})h(e^{it})$ $(h \in H^2)$; comme $|w(e^{it})| = 1$ p. p., wH^2 est fermée, donc un sous-espace de H^2. D'après un théorème de Beurling [6], wH^2 ne coïncide pas avec H^2; pour qu' une fonction $h \in H^2$ appartienne à wH^2 il faut et il suffit notamment que le facteur intérieur de h soit divisible par la fonction intérieure w. Posons

$$\mathfrak{H} = H^2 \ominus wH^2.$$

Désignons par U la multiplication dans H^2 par e^{it} et par T la transformation de $\mathfrak{H}$ définie par $T = PU|\mathfrak{H}$ où P est la projection orthogonale de H^2 sur $\mathfrak{H}$. U est isométrique dans H^2, donc T est une contraction de $\mathfrak{H}$: Comme wH^2 est invariant pour U, on voit facilement que

$$T^n = PU^n|\mathfrak{H} \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{5.1}$$

Pour U^* on a

$$U^* \sum_{0}^{\infty} h_k e^{ikt} = \sum_{0}^{\infty} h_{k+1} e^{ikt},$$

d'où il s'ensuit que $U^{*n} \to O$ et, en vertu de la définition de T, $T^{*n} = U^{*n}|\mathfrak{H} \to O$ $(n \to \infty)$. Ainsi, U et T sont complètement non-unitaires; de plus (5. 1) entraîne

$$u(T) = Pu(U)|\mathfrak{H}$$

pour toute fonction $u \in H^\infty$ où, évidemment, $u(U)$ est l'opérateur de la multiplication par $u(e^{it})$ dans H^2.

En particulier on a donc $w(T)h = P\, w(e^{it})h(e^{it})$ $(h \in \mathfrak{H})$. Or, comme $wh \in wH^2$, il résulte $w(T)h = 0$, donc $w(T) = O$.

Soit $u \in H^\infty, u(z) \not\equiv 0$, telle que $u(T) = O$, c'est-à-dire que $P\,u(e^{it})h(e^{it}) = u(T)h = 0$, $uh \in wH^2$, pour toute fonction $h \in \mathfrak{H}$. Choisissons en particulier

$$h = 1 - \overline{w}_0 w;$$

h appartient à $\mathfrak{H}$ puisqu'on a d'une part $h \in H^2$, d'autre part $h \perp wH^2$; en effet,

$$(wg, h) = (wg, 1 - \overline{w}_0 w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [w(e^{it})g(e^{it}) - w_0 g(e^{it})]\,dt =$$

$$= (wg)_0 - w_0 g_0 = w_0 g_0 - w_0 g_0 = 0$$

pour toute fonction $g \in H^2$. (Ici on a fait usage de ce que $|w(e^{it})| = 1$ p. p.) $u(T) = O$ entraîne donc en particulier que

$$u(1 - \overline{w}_0 w) \in wH^2,$$

d'où
$$u \in wH^2;$$

en vertu du théorème cité de BEURLING le facteur intérieur de u est donc divisible par la fonction intérieure w et par conséquent u est divisible (dans H^∞) par w.

De cette façon, nous avons démontré que la fonction minimum de T est égale à la fonction intérieure w donnée.

6. Relations entre la fonction minimum et le spectre

1. Un fait connu dans l'algèbre linéaire est que le polynome minimum d'une matrice a pour ses zéros exactement les racines caractéristiques de la matrice. On va établir un fait analogue pour la classe C_0.

Théorème 7. *Soient $m_T(z)$ la fonction minimum et $\sigma(T)$ le spectre de la contraction T de classe C_0. Soit S l'ensemble formé par les zéros de $m_T(z)$ dans $D = \{z : |z| < 1\}$ et par le complémentaire dans $C = \{z : |z| = 1\}$ de la réunion des arcs ouverts de C sur lesquels $m_T(z)$ est analytique (c'est-à-dire à travers desquels elle peut être prolongée analytiquement). On a alors $\sigma(T) = S$.*

Démonstration. Soit λ un point de $D \cup C$ n'appartenant pas à S. On a $m_T(\lambda) \neq 0$; en effet, si $\lambda \in D$ cela est assuré par la définition de S et si $\lambda \in C$ cela vient de ce que, $m_T(z)$ étant une fonction intérieure, on a $|m_T(e^{it})| = 1$ p. p., donc en particulier en tout point $e^{it} \in C$ où $m_T(z)$ est analytique. Soit

$$u(z) = \frac{1}{z - \lambda}[m_T(z) - m_T(\lambda)].$$

Évidemment, $u(z) \in H^\infty$ et par suite on a en vertu du calcul fonctionnel pour les contractions

$$(\lambda I - T)\,u(T) = u(T)(\lambda I - T) = -m_T(T) + m_T(\lambda)I = m_T(\lambda)I.$$

Cela montre que $\lambda I-T$ admet une inverse bornée, notamment

$$(\lambda I-T)^{-1}=\frac{u(T)}{m_T(\lambda)},$$

donc λ n'appartient pas à $\sigma(T)$. Ainsi, nous avons démontré

$$\sigma(T)\subseteqq S. \tag{6.1}$$

Soit maintenant $\lambda\in D$ tel que $m_T(\lambda)=0$. On a alors

$$m_T(z)=\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}n(z)$$

avec $n(z)$ intérieure. En vertu du calcul fonctionnel on a donc

$$(T-\lambda I)n(T)=(I-\bar{\lambda}T)m_T(T)=O;$$

si λ n'appartenait pas à $\sigma(T)$ cela entraînerait $n(T)=O$ et par conséquent $m_T(z)$ devrait être un diviseur de $n(z)$ ce qui, évidemment, n'est pas le cas. Donc $\lambda\in\sigma(T)$. Ainsi nous avons

$$S\cap D\subseteqq\sigma(T). \tag{6.2}$$

Reste à prouver $S\cap C\subseteqq\sigma(T)$ ou, ce qui revient au même,

$$C-S\supseteqq\varrho(T)\cap C \tag{6.3}$$

où $\varrho(T)$ désigne l'ensemble résolvant de T.

Partons de la factorisation canonique de $m_T(z)$ comme fonction intérieure,

$$m_T(z)=B(z)\cdot\exp\left(-\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\right) \tag{6.4}$$

où $B(z)$ est un produit de Blaschke et μ est une mesure non-négative singulière (*voir* [7]). Pour établir (6. 3) il faut démontrer que si un arc ouvert α de C est contenu dans $\varrho(T)$, $m_T(z)$ est analytique sur α. Tout point de α étant à distance positive de $\sigma(T)$, il s'ensuit de (6. 2) que les zéros de $m_T(z)$ ne peuvent s'accumuler à aucun point de α. Cela assure que $B(z)$ est analytique sur α. Donc il suffit d'envisager le second facteur. Celui-ci sera analytique sur α si la mesure μ portée par α ou plutôt par l'intervalle i_α qui correspond à α par l'application $e^{it}\to t$, est égale à 0.

Supposons le contraire, c'est-à-dire que $\mu(i_\alpha)>0$. Il existe alors un sous-arc fermé β de α tel que $\mu(i_\beta)>0$. Envisageons la factorisation suivante de $m_T(z)$:

$$m_T(z)=m_1(z)m_2(z)\quad\text{où}\quad m_1(z)=\exp\left(-\int_{i_\beta}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\right); \tag{6.5}$$

les facteurs sont évidemment des fonctions intérieures. Puisque $|m_1(0)|=$ $=\exp(-\mu(i_\beta))<1$, $m_1(z)$ n'est pas constante. D'autre part, $m_T(z)$ ne peut être un multiple numérique de $m_1(z)$ parce que, en cas contraire, S serait compris dans β, donc en vertu de (6. 1) on aurait $\sigma(T)\subseteqq\beta\subseteqq\alpha$, en contradiction avec le choix de α. Ainsi, dans la factorisation (6. 5) aucun des facteurs n'est une fonction constante.

(6. 5) entraîne

$$m_1(T)m_2(T)=m_2(T)m_1(T)=m_T(T)=O,$$

d'où il s'ensuit qu'aucun des opérateurs $m_1(T)$, $m_2(T)$ ne peut avoir d'inverse (même pas au sens large), puisqu'en cas contraire l'autre devrait être égal à O, en contradiction avec le fait que $m_T(z)$ est la fonction minimum. Cela assure en particulier que le sous-espace

$$\mathfrak{H}_1=\{h\colon\ h\in\mathfrak{H},\ m_1(T)h=0\}$$

ne se réduit pas à $\{0\}$; $\mathfrak{H}_1$ est évidemment invariant pour T. Soit $T_1=T|\mathfrak{H}_1$. Comme on a $m_1(T_1)=m_1(T)|\mathfrak{H}_1=O$, la fonction minimum $m_{T_1}(z)$ (qui n'est pas constante puisque $\mathfrak{H}_1\neq\{0\}$) est un diviseur de $m_1(z)$, d'où il s'ensuit que $m_{T_1}(z)$ doit avoir la forme

$$m_{T_1}(z) = k\exp\left(-\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu_1(t)\right)\qquad(|k|=1)$$

où μ_1 est une mesure singulière non négative, majorée par la mesure μ dans i_β et s'annulant ailleurs. Cela montre que l'ensemble S attaché à la fonction $m_{T_1}(z)$, que nous désignons par S_1, est inclus dans l'arc β. La relation (6. 1), appliquée à T_1, donne alors $\sigma(T_1)\subseteq\beta$.

Soit $|\lambda|>1$. En vertu des relations réciproques

$$g = (\lambda I - T)h,\quad h = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n g$$

le sous-espace invariant $\mathfrak{H}_1$ est transformé par $\lambda I - T$ sur soi-même, donc on a $(\lambda I_1 - T_1)^{-1} = (\lambda I - T)^{-1}|\mathfrak{H}_1$. Lorsque λ tend vers un point λ_0 de C situé dans $\varrho(T)$, la norme de $(\lambda I_1 - T_1)^{-1}$ reste donc bornée, ce qui entraîne que $\lambda_0\in\varrho(T_1)$. En particulier les points de α appartiennent donc à $\varrho(T_1)$. Comparé au résultat précédent $\sigma(T_1)\subseteq\beta$, cela veut dire que $\sigma(T_1)$ est vide, ce qui est impossible.

La contradiction provient de notre hypothèse que $\mu(i_\alpha)>0$. Par conséquent $\mu(i_\alpha)=0$, ce qui achève la démonstration du théorème.

2. Mentionnons quelques conséquences du théorème 7.

Corollaire 1. *Soit $T\in C_0$ et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les valeurs propres de T dans D. On a alors $\sum(1-|\lambda_n|)<\infty$.*

En effet, les λ_n étant les zéros de $m_T(z)$ dans D, la convergence de la série résulte d'un théorème connu de Blaschke sur les zéros d'une fonction dans H^∞ (*cf.* [7], p. 64).

Corollaire 2. *Il existe $T\in C_0$ telle que $\sigma(T)=C$.*

En effet, soit μ une mesure singulière sur $(0, 2\pi)$ dont le support est l'intervalle entier (p. ex. la mesure qui assigne aux points rationnels des quantités positives, dont la somme est finie). La fonction

$$m(z) = \exp\left(-\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)\right)$$

étant intérieure, il lui correspond une contraction $T \in C_0$ telle que $m_T(z) = m(z)$ (*voir* théorème 6). D'après théorème 7, $\sigma(T) = S$; or S coïncide dans notre cas avec C.

7. Sous-espaces invariants

1. Soit T une contraction de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, appartenant à la classe C_0; soit $m_T(z)$ sa fonction minimum.

Soit $m_T(z) = m_1(z) m_2(z)$ une factorisation de $m_T(z)$ en produit de deux fonctions intérieures non-constantes, et soient $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ les sous-espaces de $\mathfrak{H}$ définies par les formules

(7. 1) $\quad \mathfrak{H}_1 = \{h: h \in \mathfrak{H}, \ m_1(T)h = 0\}$ et $\mathfrak{H}_2 = \{h: h \in \mathfrak{H}, \ m_2(T)h = 0\}$.

Ces sous-espaces sont évidemment invariants pour T, et même pour tout opérateur X qui commute à T. Montrons qu'ils sont des sous-espaces non banaux, c'est-à-dire différents de $\{0\}$ et de $\mathfrak{H}$. Il suffit d'envisager, à ce but, le sous-espace $\mathfrak{H}_1$. On a $\mathfrak{H}_1 \neq \{0\}$, puisque, en cas contraire, $m_1(T)$ admettrait une inverse (au sens large) et la relation $m_1(T) m_2(T) = m_T(T) = O$ entraînerait $m_2(T) = O$, par conséquent $m_T(z)$ devrait être un diviseur de $m_2(z)$, donc $m_2(z)/m_T(z)$ devrait être une fonction intérieure; or cela contredirait ce que $m_T(z)/m_2(z) = m_1(z)$ est une fonction intérieure non-constante. On a aussi $\mathfrak{H}_1 \neq \mathfrak{H}$, puisque, en cas contraire, on aurait $m_1(T) = O$ et par conséquent $m_T(z)$ devrait être un diviseur de $m_1(z)$, donc $m_1(z)/m_T(z)$ devrait être une fonction intérieure; or cela contredirait ce que $m_T(z)/m_1(z) = m_2(z)$ est une fonction intérieure non-constante.

Donc, s'il existe une factorisation de $m_T(z)$ de type envisagé, il existe un sous-espace non-banal de $\mathfrak{H}$ invariant pour T et pour tout opérateur qui commute à T. Or il s'ensuit de la représentation canonique des fonctions intérieures (*voir* (6. 4)) que telle factorisation existe toujours sauf le cas où

$$m_T(z) = k \frac{z - \lambda}{1 - \bar{\lambda} z} \qquad (|k| = 1, \ |\lambda| < 1).$$

Dans ce cas exceptionnel on a $T = \lambda I$ et par conséquent tout sous-espace de $\mathfrak{H}$ est invariant pour T. Donc, *si* $\dim \mathfrak{H} > 1$, *il existe un sous-espace non-banal de* $\mathfrak{H}$, *invariant pour* T.

2. Envisageons maintenant un sous-espace $\mathfrak{H}'$ quelconque de $\mathfrak{H}$, invariant pour T. Soit $\begin{pmatrix} T' & * \\ 0 & T'' \end{pmatrix}$ la forme matricielle de T correspondant à la décomposition $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \oplus \mathfrak{H}''$. On a $T' = T|\mathfrak{H}'$ et par conséquent $T'^n = T^n|\mathfrak{H}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, d'où $u(T') = u(T)|\mathfrak{H}$ pour toute fonction $u \in H^\infty$, en particulier $m_T(T') = m_T(T)|\mathfrak{H}' = O$. D'autre part, en désignant par P'' la projection de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}''$, on a $T'' = P''T|\mathfrak{H}''$ et même $T''^n = P''T^n|\mathfrak{H}''$ $(n = 0, 1, \ldots)$, d'où $u(T'') = P''u(T)|\mathfrak{H}''$ pour toute fonction $u \in H^\infty$, en particulier $m_T(T'') = P''m_T(T)|\mathfrak{H}'' = O$. Ainsi, T' et T'' appartiennent à C_0 et leurs fonctions minimum $m_{T'}(z), m_{T''}(z)$ sont des diviseurs de $m_T(z)$.

Envisageons maintenant deux sous-espaces de $\mathfrak{H}$ invariants pour T: $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}''$, tels que $\mathfrak{H}' \supseteq \mathfrak{H}''$, et soient $T' = T|\mathfrak{H}'$, $T'' = T|\mathfrak{H}''$; on a $T' \in C_0$. Soit $\begin{pmatrix} T'' & * \\ O & T_0 \end{pmatrix}$

la matrice de T' correspondant à la décomposition $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'' \oplus \mathfrak{H}_0$ (où $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}' \ominus \mathfrak{H}''$); on a aussi $T_0 \in C_0$. Supposons que $\dim \mathfrak{H}_0 > 1$. Il existe alors un sous-espace non banal de $\mathfrak{H}_0$, soit $\mathfrak{H}_1$, invariant pour T_0. $\mathfrak{H}'' \oplus \mathfrak{H}_1$ est alors un sous-espace propre de $\mathfrak{H}'$, invariant pour T, et comprenant $\mathfrak{H}''$ comme un sous-espace propre.

Cela veut dire que *si $\mathfrak{H}', \mathfrak{H}''$ sont deux sous-espaces invariants pour T, tels que $\mathfrak{H}' \supseteq \mathfrak{H}''$ et $\dim(\mathfrak{H}' \ominus \mathfrak{H}'') > 1$, il existe un sous-espace invariant pour T, intercalé à $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}''$, et différent de $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}''$.*

3. Soient maintenant $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}''$ deux sous-espaces invariants pour T, sans aucune restriction additionnelle. Posons

$$\mathfrak{H}^+ = \overline{\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}''};$$

$\mathfrak{H}^+$ est évidemment invariant pour T. Désignons par T', T'', T^+ les restrictions de T aux sous-espaces invariants correspondants. Puisque $T' = T^+|\mathfrak{H}'$, $T'' = T^+|\mathfrak{H}''$, $m_{T^+}(z)$ est divisible (dans H^∞) par $m_{T'}(z)$ et $m_{T''}(z)$, et par conséquent aussi par le plus petit multiple commun de $m_{T'}(z)$ et $m_{T''}(z)$, que nous désignons par $m(z)$. D'autre part, pour $h = h' + h''$ ($h' \in \mathfrak{H}'$, $h'' \in \mathfrak{H}''$) on a

$$m(T^+)h = m(T)h = m(T)h' + m(T)h'' = m(T')h' + m(T'')h'' = 0,$$

d'où il s'ensuit par continuité $m(T^+) = O$; par conséquent $m_{T^+}(z)$ est un diviseur (dans H^∞) de $m(z)$. Chacune des deux fonctions intérieures $m_{T^+}(z)$ et $m(z)$ étant donc un diviseur de l'autre, elles coïncident (à un facteur constant près). Ainsi, *$m_{T^+}(z)$ est le plus petit multiple commun de $m_{T'}(z)$ et $m_{T''}(z)$.*

4. Revenons aux sous-espaces invariants $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ associés à une factorisation de $m_T(z)$ en produit de deux fonctions intérieures non-constantes, $m_1(z)$ et $m_2(z)$; *voir* (7. 1). Supposons, cette fois-ci, que $m_1(z)$ et $m_2(z)$ n'ont pas de diviseur commun intérieur non-constant. Montrons qu'on a alors

$$\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 = \{0\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2} = \mathfrak{H}. \tag{7. 2}$$

En effet, $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ est invariant pour T; supposons que $\mathfrak{H}_0$ est différent de $\{0\}$ et posons $T_0 = T|\mathfrak{H}_0$. On a alors $m_1(T_0) = m_1(T)|\mathfrak{H}_0 \subseteq m_1(T)|\mathfrak{H}_1 = 0$, $m_2(T_0) = m_2(T)|\mathfrak{H}_0 \subseteq m_2(T)|\mathfrak{H}_2 = O$, donc $m_1(T_0) = O, m_2(T_0) = O$, ce qui entraîne que $m_{T_0}(z)$ est un diviseur intérieur commun de $m_1(z)$ et $m_2(z)$, or cela contredit notre hypothèse. Donc la première des assertions (7. 2) est prouvée.

Pour démontrer la seconde, supposons que $\mathfrak{H}^0 = \mathfrak{H} \ominus (\overline{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2}) \neq \{0\}$ et envisageons la forme matricielle $\begin{pmatrix} T' & * \\ O & T^0 \end{pmatrix}$ de T par rapport à la décomposition $\mathfrak{H} = (\overline{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2}) \oplus \mathfrak{H}^0$. Si P^0 désigne la projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}^0$, on a $u(T^0) = P^0 u(T)|\mathfrak{H}^0$ pour toute fonction $u \in H^\infty$ (*voir* n° 2). Or, de la relation $m_1(T)m_2(T) = m_2(T)m_1(T) = m_T(T) = O$ on déduit que

$$m_1(T)\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}_2, \quad m_2(T)\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}_1,$$

d'où $$m_1(T^0) = P^0 m_1(T)|\mathfrak{H}^0 = O, \quad m_2(T^0) = P^0 m_2(T)|\mathfrak{H}^0 = O.$$

Cela entraîne que $m_{T^0}(z)$ est un diviseur commun intérieur de $m_1(z)$ et $m_2(z)$, ce qui contredit notre hypothèse. Donc $\mathfrak{H}^0$ ne peut être différent de $\{0\}$ et cela prouve la seconde assertion (7. 2).

Posons $T_1 = T|\mathfrak{H}_1$, $T_2 = T|\mathfrak{H}_2$. Par la définition de $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ on a évidemment $m_1(T_1) = m_1(T)|\mathfrak{H}_1 = O$, $m_2(T_2) = m_2(T)|\mathfrak{H}_2 = O$. Il s'ensuit que $m_{T_1}(z)$ est un diviseur de $m_1(z)$ et $m_{T_2}(z)$ est un diviseur de $m_2(z)$. D'autre part, en vertu de la seconde relation (7. 2) et de ce qu'on a démontré au n° 3, $m_T(z) = m_1(z)m_2(z)$ est le plus petit multiple commun intérieur de $m_{T_1}(z)$ et $m_{T_2}(z)$. On conclut que $m_{T_1}(z)$ doit coïncider avec $m_1(z)$ et $m_{T_2}(z)$ avec $m_2(z)$ (à des facteurs constants près, de module 1).

5. En résumant, nous avons le

Théorème 8. *Soit T une contraction de l'espace $\mathfrak{H}$, de classe C_0 et ayant la fonction minimum $m_T(z)$.*

(i) *Si* $\dim \mathfrak{H} > 1$, *il existe dans $\mathfrak{H}$ un sous-espace non-banal, invariant pour T. De plus, si $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}''$ sont deux sous-espaces invariants pour T tels que $\mathfrak{H}' \supsetneqq \mathfrak{H}''$ et* $\dim(\mathfrak{H}' \ominus \mathfrak{H}'') > 1$, *il existe un sous-espace invariant pour T, proprement intercalé à $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}''$.*

(ii) *La restriction T' de T à un sous-espace invariant $\mathfrak{H}' \neq \{0\}$ appartient aussi à C_0 et $m_{T'}(z)$ est un diviseur (dans H^∞) de $m_T(z)$.*

(iii) *Pour une factorisation quelconque de $m_T(z)$ en produit $m_1(z)m_2(z)$ de deux fonctions intérieures non-constantes,*

$$\mathfrak{H}_1 = \{h\colon h \in \mathfrak{H},\ m_1(T)h = 0\}, \quad \mathfrak{H}_2 = \{h\colon h \in \mathfrak{H},\ m_2(T)h = 0\}$$

sont des sous-espaces non banaux de $\mathfrak{H}$, invariants pour T. Lorsque $m_1(z)$ et $m_2(z)$ n'ont pas de diviseur commun intérieur non-constant, on a de plus

$$\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 = \{0\}; \quad \overline{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2} = \mathfrak{H},$$

et les restrictions de T aux sous-espaces invariants $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ ont leurs fonctions minimum égales à $m_1(z)$ et $m_2(z)$, selon les cas.

L'énoncé (iii) peut être précisé dans le cas où la factorisation envisagée $m_T(z) = m_1(z)m_2(z)$ en produit de deux fonctions intérieures est telle qu'il existe des fonctions $u_1(z), u_2(z) \in H^\infty$ de sorte que

$$m_1(z)u_1(z) + m_2(z)u_2(z) = 1. \tag{7. 3}$$ [11])

Notamment on a alors même

$$\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}. \tag{7. 4}$$

En effet, (7. 3) entraîne $m_1(T)u_1(T) + m_2(T)u_2(T) = I$, d'où

$$h = m_1(T)u_1(T)h + m_2(T)u_2(T)h \quad \text{pour tout } h \in \mathfrak{H};$$

or $h_1 = m_2(T)u_2(T)h \in \mathfrak{H}_1$ puisque $m_1(T)h_1 = m_1(T)m_2(T)u_2(T)h = m_T(T)u_2(T)h = 0$ et analoguement $h_2 = m_1(T)u_1(T)h \in \mathfrak{H}_2$.

6. Soit λ un zéro de $m_T(z)$ dans $D = \{z\colon |z| < 1\}$, de multiplicité k. On a alors la factorisation

$$m_T(z) = \left(\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}\right)^k m(z) \qquad (m(\lambda) \neq 0) \tag{7. 5}$$

[11]) Cette relation entraîne évidemment que $m_1(z)$ et $m_2(z)$ n'ont pas de diviseur commun intérieur non-constant.

en produit de deux fonctions intérieures (dont la seconde est peut-être constante), pour laquelle la condition (7. 3) est vérifiée.

En effet, faisant usage d'une homographie de D on peut réduire cette assertion au cas $\lambda=0$. On a alors $m(0)\neq 0$, donc $1/m(z)$ admet un développement en série entière autour du point 0; soit $p(z)$ la somme d'ordre $k-1$ de cette série entière. On a alors

$$1 = m(z)\frac{1}{m(z)} = m(z)p(z)+z^k q(z)$$

où $q(z)$ est une fonction régulière dans un entourage de $z=0$, dont la définition s'étend, moyennant la relation $z^k q(z) = 1-m(z)p(z)$, à tout D. De cette façon, $q(z)$ est holomorphe dans D et telle que $z^k q(z)\in H^\infty$. Cela entraîne évidemment que $q(z)\in H^\infty$. Par conséquent on a

$$m(z)p(z)+z^k q(z) = 1 \quad (|z|<1)$$

avec $p(z)$, $q(z)\in H^\infty$.

Soient $\mathfrak{H}_\lambda, \mathfrak{H}'_\lambda$ les sous-espaces invariants correspondant à la factorisation (7. 5), donc

$$\mathfrak{H}_\lambda=\{h\colon\ h\in\mathfrak{H},\ b_\lambda^k(T)h=0\},\quad \mathfrak{H}'_\lambda = \{h\colon\ h\in\mathfrak{H},\ m(T)h=0\}$$

où l'on a posé

$$b_\lambda(z) = \frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}.$$

On a

$$\mathfrak{H}_\lambda\cap\mathfrak{H}'_\lambda = \{0\},\quad \mathfrak{H}_\lambda+\mathfrak{H}'_\lambda = \mathfrak{H}.$$

Posons $T_\lambda=T|\mathfrak{H}_\lambda$, $T'_\lambda=T|\mathfrak{H}'_\lambda$. On a $m_{T_\lambda}(z)=b_\lambda^k(z)$ ce qui entraîne que $(T-\lambda I)^k h=0$ pour tout $h\in\mathfrak{H}_\lambda$, tandis qu'il existe du moins un $h\in\mathfrak{H}_\lambda$ tel que $(T-\lambda I)^{k-1}h\neq 0$. Si $m(z)$ n'est pas constante, $\mathfrak{H}'_\lambda$ est différent de $\{0\}$ et on a $m_{T'_\lambda}(z)=m(z)$, donc $m_{T'_\lambda}(\lambda)\neq 0$ et par conséquent λ n'appartient pas au spectre de T'_λ.

Appelons *vecteur caractéristique* de T associé à la valeur λ tout vecteur h tel que $(T-\lambda I)^n h=0$ pour n assez élevés. Montrons que le sous-espace $\mathfrak{H}_\lambda$ est constitué précisément des vecteurs caractéristiques associés à la valeur λ, c'est-à-dire que $(T-\lambda I)^n h=0$ (pour un $n\geqq 1$) entraîne $h\in\mathfrak{H}_\lambda$. Cela est manifeste si $\mathfrak{H}'_\lambda=\{0\}$. Dans le cas $\mathfrak{H}'_\lambda\neq\{0\}$ soit $h = h_\lambda+h'_\lambda$ la décomposition de h suivant les sous-espaces $\mathfrak{H}_\lambda$ et $\mathfrak{H}'_\lambda$. Comme $(T-\lambda I)^n h=0$ et $(T-\lambda I)^k h_\lambda=0$, on a $(T-\lambda I)^{n+k}(h-h_\lambda)=0$, donc $(T-\lambda I)^{n+k}h'_\lambda = 0$. Comme λ n'appartient pas au spectre de T'_λ cela entraîne $h'_\lambda=0$, donc $h=h_\lambda\in\mathfrak{H}_\lambda$.

Ainsi, *la multiplicité k d'un zéro λ de $m_T(z)$ dans D est égale à l'indice de λ comme valeur caractéristique de T*, c'est-à-dire que pour tous les vecteurs caractéristiques h associés à la valeur λ on a $(T-\lambda I)^k h=0$, mais il existe un vecteur caractéristique h tel que $(T-\lambda I)^{k-1}h\neq 0$. [12]

7. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 9. *Soit $T\in C_0$. Pour que les vecteurs caractéristiques de T associés aux points du spectre dans D sous-tendent l'espace entier $\mathfrak{H}$ il faut et il suffit que $m_T(z)$ soit un produit de Blaschke.*

[12]) Ainsi, la fonction minimum permet d'éviter le calcul des résidus appliqué à la résolvante, introduit par F. Riesz.

Démonstration. Supposons que $\mathfrak{H} = \bigvee_{\lambda} \mathfrak{H}_\lambda$ où λ parcourt les points du spectre de T dans D, $\mathfrak{H}_\lambda$ étant le sous-espace formé par les vecteurs caractéristiques associés à λ. Soit $B(z)$ le produit de Blaschke dans la factorisation canonique de la fonction intérieure $m_T(z)$. Si λ, comme valeur caractéristique, a l'indice $k = k(\lambda)$, $B(z)$ est divisible par $b_\lambda^k(z)$, donc on a pour $h \in \mathfrak{H}_\lambda$

$$B(T)h = \left(\frac{B}{b_\lambda^k}\right)(T) \cdot b_\lambda^k(T)h = 0;$$

comme $\mathfrak{H} = \bigvee_{\lambda} \mathfrak{H}_\lambda$ il s'ensuit que $B(T) = O$. Vu que $m_T(z)$ est la fonction minimum, cela entraîne $m_T(z) = B(z)$.

Passons à la démonstration de l'implication inverse. Supposons donc que $m_T(z)$ est un produit de Blaschke et posons

$$\mathfrak{H}^1 = \bigvee_{\lambda} \mathfrak{H}_\lambda$$

où λ parcourt les points du spectre de T dans D, $\mathfrak{H}_\lambda$ étant le sous-espace formé par les vecteurs caractéristiques de T associés à λ.

Supposons que $\mathfrak{H}^1 \neq \mathfrak{H}$ et soit $\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}^1$. T prend par rapport à la décomposition $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^1 \oplus \mathfrak{H}^2$ la forme matricielle $\begin{pmatrix} T^1 & * \\ O & T^2 \end{pmatrix}$; on sait que $m_{T^2}(z)$ est un diviseur de $m_T(z)$, nécessairement non-constant. Par conséquent, $m_T(z)$ étant un produit de Blaschke, il existe du moins un zéro λ de $m_T(z)$ dans D qui est un zéro aussi pour $m_{T^2}(z)$. Ce zéro est une valeur propre de T^2, donc il existe un $h^2 \neq 0$ dans $\mathfrak{H}^2$ tel que $(T^2 - \lambda I^2)h^2 = 0$. Il s'ensuit que $(T - \lambda I)h^2$ appartient à $\mathfrak{H}^1$. Soit $\mathfrak{H}^1 = \mathfrak{H}_\lambda^1 + \mathfrak{H}_\lambda^{1'}$ la décomposition (non nécessairement orthogonale) de $\mathfrak{H}^1$ où $\mathfrak{H}_\lambda^1$ est constitué des vecteurs caractéristiques de T^1 associés à la valeur λ et compris dans $\mathfrak{H}^1$, et $\mathfrak{H}_\lambda^{1'}$ est un sous-espace invariant pour T^1 tel que, si $T^{1'}$ est la restriction de T^1 à ce sous-espace, λ n'appartient pas à $\sigma(T^{1'})$; comme $\mathfrak{H}_\lambda \subseteq \mathfrak{H}^1$ on a nécessairement $\mathfrak{H}_\lambda^1 = \mathfrak{H}_\lambda$. Soit $(T - \lambda I)h^2 = h_\lambda^1 + h_\lambda^{1'}$ la décomposition du vecteur $(T - \lambda I)h^2 \in \mathfrak{H}^1$ suivant ces sous-espaces. On a alors, en posant

$$l_\lambda^{1'} = (T^{1'} - \lambda I^{1'})^{-1} h_\lambda^{1'} \qquad (\in H_\lambda^{1'}),$$

$$(T - \lambda I)^{k+1} h^2 = (T - \lambda I)^k h_\lambda^1 + (T - \lambda I)^{k+1} l_\lambda^{1'};$$

si k est l'indice de la valeur caractéristique λ cela donne $(T - \lambda I)^{k+1}(h^2 - l_\lambda^{1'}) = 0$, d'où $h^2 - l_\lambda^{1'} \in \mathfrak{H}_\lambda \subseteq \mathfrak{H}^1$ et par conséquent $h^2 \in \mathfrak{H}^1$. Vu que $h^2 \in \mathfrak{H}^2$ et $h^2 \neq 0$, l'hypothèse $\mathfrak{H}^1 \neq \mathfrak{H}$ nous a conduit à une contradiction. Donc $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^1$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Ouvrages cités

B. Sz.-Nagy et C. Foiaş

[1] Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification des contractions de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3413–3415.

[2] Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 251–259.

[3] Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V. Translations bilatérales, *ibidem*, **23** (1962), 106–129.

[4] Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI. Calcul fonctionnel, *ibidem*, **23** (1962), 130–167.

B. Sz.-Nagy

[5] The "outer functions" and their role in functional calculus, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1962, Stockholm*, pp. 421–425.

A. Beurling

[6] On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, **81** (1949), 239–255.

K. Hoffman

[7] *Banach spaces of analytic functions* (Englewood Cliffs, N. J., 1962).

(Reçu le 10 avril 1963)

Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VIII
Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

En hommage de M. Miron Nicolesco à son 60. anniversaire

Dans la présente Note on introduira la notion de *fonction caractéristique* pour les contractions T de l'espace de Hilbert, de type le plus général. Par l'intermédiaire de ces fonctions on construira des modèles fonctionnels pour les contractions et on résoudra complètement un problème de structure pour les dilatations unitaires des contractions, abordé dans la Note V [1]. Les relations entre les factorisations de la fonction caractéristique et les sous-espaces invariants pour la contraction donnée, annoncées dans [5] et [6], feront l'objet des Notes ultérieures.

On supposera dans toute cette Note que l'espace de Hilbert en question est *séparable*. D'ailleurs, cela ne présente pas de restriction essentielle puisque, évidemment, toute transformation linéaire continue d'un espace de Hilbert non-séparable est la somme orthogonale de transformations linéaires continues d'espaces séparables.

Soit donc T une contraction de $\mathfrak{H}$. On y attache les opérateurs

$$D_T = (I-T^*T)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad D_{T^*} = (I-TT^*)^{\frac{1}{2}},$$

les sous-espaces

$$\mathfrak{D}_T = \overline{D_T\mathfrak{H}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}_{T^*} = \overline{D_{T^*}\mathfrak{H}},$$

et les nombres cardinaux ($\geqq 0$)

$$\mathfrak{d}_T = \dim \mathfrak{D}_T, \quad \mathfrak{d}_{T^*} = \dim \mathfrak{D}_{T^*},$$

qu'on appellera, selon les cas, les „opérateurs de défaut", „sous-espaces de défaut" et „indices de défaut" de T: ils indiquent, en effet, les déviations de T d'être unitaire. Notons la relation

$$TD_T = D_{T^*}T \ ^{1)} \tag{1}$$

dont il s'ensuit, entre autres, que T applique $\mathfrak{D}_T$ dans $\mathfrak{D}_{T^*}$.

Cela étant, la fonction caractéristique de T sera définie, pour λ complexe, $|\lambda| < 1$, par

$$\Theta_T(\lambda) = \left[-T+\lambda D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}D_T\right]|\mathfrak{D}_T. \tag{2}$$

[1]) Conséquence de la relation évidente $TD_T^2 = D_{T^*}^2T$.

$\Theta_T(\lambda)$ est donc une fonction dont les valeurs sont des transformations linéaires bornées de $\mathfrak{D}_T$ dans $\mathfrak{D}_{T^*}$; on montrera de plus que

$$\|\Theta_T(\lambda)\| \leqq 1. \tag{3}$$

Pour les contractions T „quasi-unitaires" (c'est-à-dire telles que $\mathfrak{d}_T = \mathfrak{d}_{T^*} < \infty$), cette definition se réduit à celle donnée par LIVŠITZ, POTAPOV, ŠMULYAN et POLATZKY [6—11]; ces auteurs envisagent aussi le cas où T n'est pas une contraction (auquel cas on définit D_T et D_{T^*} par les racines carrées des transformations $|I-T^*T|$ et $|I-TT^*|$); ils obtiennent dans certains cas particuliers aussi des formules de factorisation. Des définitions voisines portent sur les opérateurs A dont la partie imaginaire $(A-A^*)/2i$ est de rang fini, *voir* l'article [12] de BRODSKY et LIVŠITZ. Mais la voie par laquelle nous arrivons à la définition (2) est entièrement nouvelle: elle nous est ouverte par la théorie des dilatations unitaires des contractions. C'est aussi par cette théorie que nous obtenons les modèles fonctionnels pour T.

Les résultats de cette Note ont été annoncés dans [4] et [5].

1. Préliminaires

1. Soit $\mathfrak{A}$ un espace de Hilbert (séparable); nous désignons par $L^2(\mathfrak{A})$ la classe des fonctions $v(t)$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$, à valeurs dans $\mathfrak{A}$, mesurables (fortement ou faiblement, ce qui revient au même puisque $\mathfrak{A}$ est séparable) et telles que

$$\|v\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|v(t)\|_{\mathfrak{A}}^2 \, dt < \infty.$$

Par cette définition de la norme $\|v\|$, $L^2(\mathfrak{A})$ devient un espace de Hilbert (séparable); bien entendu, on ne distingue pas deux fonctions dans $L^2(\mathfrak{A})$ si elles sont égales presque partout. Toute fonction $v(t) \in L^2(\mathfrak{A})$ admet un développement en série de Fourier $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{int} a_n$ où

$$a_n \in \mathfrak{A}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \|a_n\|_{\mathfrak{A}}^2 = \|v\|^2;$$

cette série converge vers $v(t)$ en moyenne, c'est-à-dire que

$$\int_0^{2\pi} \left\| v(t) - \sum_{-m}^{n} e^{ikt} a_k \right\|_{\mathfrak{A}}^2 dt \to 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

Tout cela se démontre comme dans le cas des fonctions numériques.

Un sous-espace important de $L^2(\mathfrak{A})$ est celui qui est constitué des fonctions dont les coefficients de Fourier a_n s'annulent pour $n<0$; désignons ce sous-espace par $L_+^2(\mathfrak{A})$. A une fonction

$$v(t) = \sum_0^{\infty} e^{int} a_n \in L_+^2(\mathfrak{A})$$

on peut faire correspondre la fonction de la variable complexe λ:

$$u(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n a_n,$$

analytique dans le cercle unité; en effet, cette série converge pour tout λ $(|\lambda|<1)$, car

$$\left\| \sum_m^n \lambda^k a_k \right\| \leqq \sum_m^n |\lambda|^k \|a_k\| \leqq \left(\sum_0^\infty \|a_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_m^\infty |\lambda|^{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ lorsque } n>m\to\infty;$$

de plus cette convergence est uniforme dans tout domaine $|\lambda|\leqq|\lambda|_0<1$. On peut regagner $v(t)$ de $u(\lambda)$ comme *limite radiale en moyenne;* en effet, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|v(t)-u(re^{it})\|_{\mathfrak{A}}^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\| \sum_0^\infty (1-r^n)e^{int}a_n \right\|_{\mathfrak{A}}^2 dt = \sum_0^\infty (1-r^n)^2\|a_n\|_{\mathfrak{A}}^2 \to 0$$

lorsque $r\to 1-0$.

De plus, la limite

$$u(e^{it}) = \lim_{r\to 1-0} u(re^{it}) \tag{1. 1}$$

existe même au sens *fort* (dans $\mathfrak{A}$), presque partout, et est égale presque partout à $v(t)$ (*théorème de Fatou généralisé*). En effet, en continuant $v(t)$ à une fonction périodique de période 2π, les fonctions $u_0(\lambda)=u(\lambda)-a_0$, $v_0(t)=v(t)-a_0$, seront reliées par la formule de Poisson

$$u_0(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-s)v_0(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{d}{ds}P_r(s)\left(\int_{t-s}^{t+s} v_0(\sigma)\,d\sigma\right)ds,$$

d'où il s'ensuit, tout comme dans le cas des fonctions numériques[2]), que $u_0(re^{it})$ tend vers $v_0(t)$ fortement $(r\to 1-0)$ en tout point t où

$$\frac{1}{2s}\int_{t-s}^{t+s} v_0(\sigma)\,d\sigma \to v_0(t) \qquad \text{fortement } (s\to 0),$$

donc presque partout[2 bis]).

Pour la fonction $u(\lambda)$ qui dérive de la fonction $v(t)\in L_+^2(\mathfrak{A})$ on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|u(re^{it})\|_{\mathfrak{A}}^2\,dt = \sum_0^\infty r^{2n}\|a_n\|_{\mathfrak{A}}^2 \leqq \sum_0^\infty \|a_n\|_{\mathfrak{A}}^2 \qquad (0<r<1).$$

---

[2]) *Cf.* [15], p. 35.
[2 bis]) *Cf.* [14], 88.

Appelons $H^2(\mathfrak{A})$ la classe de toutes les fonctions

$$u(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^k a_k,$$

à valeurs dans $\mathfrak{A}$, analytiques pour $|\lambda|<1$ et pour lesquelles l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|u(re^{it})\|^2_{\mathfrak{A}}\, dt \qquad (0<r<1)$$

reste bornée par une quantité indépendante de r. Cette intégrale étant égale à $\sum_0^\infty r^{2n}\|a_n\|^2_{\mathfrak{A}}$, la condition posée est équivalente à la condition

$$\sum_0^\infty \|a_n\|^2_{\mathfrak{A}} < \infty.$$

Ainsi, toute fonction $u(\lambda)\in H^2(\mathfrak{A})$ provient d'une fonction $v(t)\in L^2_+(\mathfrak{A})$, notamment de la fonction $v(t)=\sum_0^\infty e^{int}a_n$.

En vertu de ces considérations, la limite radiale (1. 1) existe au sens fort (dans $\mathfrak{A}$) presque partout et aussi en moyenne, pour toute fonction $u(\lambda)\in H^2(\mathfrak{A})$; la limite radiale $u(e^{it})$ appartient à $L^2_+(\mathfrak{A})$; de plus toute fonction $v(t)\in L^2_+(\mathfrak{A})$ provient de cette façon, presque partout. Comme $u(\lambda)$ et $u(e^{it})$ se déterminent mutuellement, il convient d'identifier les classes $L^2_+(\mathfrak{A})$ et $H^2(\mathfrak{A})$, en munissant de cette façon $H^2(\mathfrak{A})$ de la structure d'espace de Hilbert de $L^2_+(\mathfrak{A})$ et de la considérant comme un sous-espace de $L^2(\mathfrak{A})$.

2. Envisageons une fonction $\Theta(\lambda)$, à valeurs transformations linéaires bornées d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_*$ et définie par une série entière

$$\Theta(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n A_n \tag{1.2}$$

dont les coefficients sont des transformations linéaires bornées de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{H}_*$, la série étant supposée convergente pour $|\lambda|<1$ au sens de de la convergence forte des opérateurs. Supposons de plus

$$\|\Theta(\lambda)\| \leqq C \text{ (borne indépendante de } \lambda,\ |\lambda|<1). \tag{1.3}$$

Pareille fonction $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*, \Theta(\lambda)\}$ sera appelée une *fonction analytique bornée* ($|\lambda|<1$).

La condition (1. 3) entraîne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\Theta(re^{it})h\|^2_{\mathfrak{H}_*}\, dt \leqq C^2\|h\|^2_{\mathfrak{H}} \qquad (0<r<1)$$

et par conséquent

$$\sum_0^\infty \|A_n h\|^2_{\mathfrak{H}_*} \leqq C^2\|h\|^2_{\mathfrak{H}} \tag{1.4}$$

pour tout $h \in \mathfrak{H}$. Il s'ensuit, en vertu du n° 1, que la limite

$$\lim_{r\to 1-0} \Theta(re^{it})h \tag{1.5}$$

existe au sens fort (dans $\mathfrak{H}_*$) partout, sauf peut-être les points d'un ensemble E_h de mesure 0. Faisant h parcourir un ensemble dénombrable, dense dans $\mathfrak{H}$, et en réunissant les ensembles E_h correspondants, il résulte un ensemble E de mesure 0. Grâce à (1. 3), la limite (1. 5) existe pour tout t n'appartenant pas à E, quel que soit $h \in \mathfrak{H}$.

Donc la limite radiale

$$\Theta(e^{it}) = \lim_{r\to 1-0} \Theta(re^{it}) \tag{1.6}$$

existe presque partout, au sens de la convergence forte des opérateurs. De plus, toujours en vertu du n° précédent, $\Theta(re^{it})h$ converge en moyenne $L^2(\mathfrak{H}_*)$ vers $\Theta(e^{it})h$ lorsque $r \to 1-0$, cette limite ayant, comme élément de $L^2(\mathfrak{H}_*)$, le développement de Fourier

$$\Theta(e^{it})h = \sum_0^\infty e^{int} A_n h, \tag{1.7}$$

convergent en moyenne.

Dans ce qui suit, nous aurons à faire surtout avec des fonctions analytiques bornées pour lesquelles $\|\Theta(\lambda)\| \leqq 1$ $(|\lambda| < 1)$. Nous les appellerons *fonctions analytiques contractives.*

2. Fonctions caractéristiques

1. Pour une contraction T de l'espace $\mathfrak{H}$, nous avons déjà défini la fonction caractéristique $\Theta_T(\lambda)$ par (2), donc par

$$\Theta_T(\lambda) = [-T + \lambda D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1} D_T] \,\Big|\, \mathfrak{D}_T = \Big[-T + \sum_1^\infty \lambda^n D_{T^*} T^{*n-1} D_T\Big] \,\Big|\, \mathfrak{D}_T; \tag{2.1}$$

on regardera $\Theta_T(\lambda)$ toujours comme une transformation de $\mathfrak{D}_T$ dans $\mathfrak{D}_{T^*}$, même si ses valeurs $\Theta_T(\lambda)f$ $(f \in \mathfrak{D}_T)$ ne sont pas denses dans $\mathfrak{D}_{T^*}$. En remplaçant T par T^*, les espaces $\mathfrak{D}_T$ et $\mathfrak{D}_{T^*}$ changent de rôle et on aura évidemment

$$\Theta_{T^*}(\lambda) = \Theta_T(\bar\lambda)^*. \tag{2.2}$$

Faisant usage de la relation (1) nous obtenons

$$\Theta_T(\lambda) D_T = D_{T^*}[-T + \lambda(I-\lambda T^*)^{-1}(I - T^*T)] =$$
$$= D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}[-(I-\lambda T^*)T + \lambda(I - T^*T)],$$

donc

$$\Theta_T(\lambda) D_T = D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}(\lambda I - T). \tag{2.3}$$

Comme D_T est une transformation autoadjointe, on aura

$$A(\lambda) \overset{\text{def}}{=} I - T^*T - D_T\Theta_T(\lambda)^*\Theta_T(\lambda)D_T =$$
$$= I - T^*T - (\bar\lambda I - T^*)(I - \bar\lambda T)^{-1}(I - TT^*)(I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda I - T).$$

Or, en vertu des développements

$$(I-\lambda T^*)^{-1}(\lambda I-T) = -T+\sum_1^\infty \lambda^n T^{*n-1}(I-T^*T),$$

$$(\lambda I-T)(I-\lambda T^*)^{-1} = -T+\sum_1^\infty \lambda^n (I-TT^*)T^{*n-1}$$

la relation suivante subsiste:

$$(I-TT^*)(I-\lambda T^*)^{-1}(\lambda I-T) = -T+TT^*T+\sum_1^\infty \lambda^n(I-TT^*)T^{*n-1}(I-T^*T) =$$

$$= (\lambda I-T)(I-\lambda T^*)^{-1}(I-T^*T),$$

d'où

$$A(\lambda) = [I-(\bar\lambda I-T^*)(I-\bar\lambda T)^{-1}(\lambda I-T)(I-\lambda T^*)^{-1}](I-T^*T) =$$

$$= [(I-\lambda T^*)(I-\bar\lambda T)-(\bar\lambda I-T^*)(\lambda I-T)](I-\bar\lambda T)^{-1}(I-\lambda T^*)^{-1}(I-T^*T) =$$

$$= (1-|\lambda|^2)(I-T^*T)(I-\bar\lambda T)^{-1}(I-\lambda T^*)^{-1}(I-T^*T).$$

On a donc pour $h\in\mathfrak{H}$ quelconque:

$$\|D_T h\|^2-\|\Theta_T(\lambda)D_T h\|^2 = \big(A(\lambda)h, h\big) = (1-|\lambda|^2)\|(I-\lambda T^*)^{-1}(I-T^*T)h\|^2$$

et par conséquent, pour tout élément de la forme $f=D_T h$,

$$\|f\|^2-\|\Theta_T(\lambda)f\|^2 = (1-|\lambda|^2)\|(I-\lambda T^*)^{-1}D_T f\|^2; \tag{2.4}$$

par raison de continuité, (2.4) reste valable pour tout élément f de $\mathfrak{D}_T=\overline{D_T\mathfrak{H}}$.

Une conséquence immédiate de (2.4) est l'inégalité

$$\|f\|^2-\|\Theta_T(\lambda)f\|^2\geqq 0 \qquad (f\in\mathfrak{D}_T),$$

ce qui prouve (3), c'est-à-dire que $\Theta_T(\lambda)$ *est, pour toute valeur de* λ, *une contraction de* $\mathfrak{D}_T$ *dans* $\mathfrak{D}_{T^*}$.

Pour $\lambda=0$ (2.4) prend la forme

$$\|f\|^2-\|\Theta_T(0)f\|^2 = \|D_T f\|^2 \qquad (f\in\mathfrak{D}_T).$$

Notons que $D_T f=0$ entraîne que f est orthogonal à tout élément de la forme $D_T h$ $(h\in\mathfrak{H})$, donc orthogonal à $\mathfrak{D}_T$; comme $f\in\mathfrak{D}_T$ cela n'est possible que si $f=0$. Donc on a

$$\|\Theta_T(0)f\|<\|f\| \text{ pour tout } f\in\mathfrak{D}_T,\ f\neq 0.$$

Il est utile de faire la suivante

Définition. Une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ sera appelée *pure*, lorsqu'on a $\|\Theta(0)e\|<\|e\|$ pour tout $e\in\mathfrak{E}$, $e\neq 0$.

D'après ce que nous venons de démontrer, *la fonction caractéristique*

$$\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$$

est une fonction analytique contractive pure.

En vertu des Préliminaires, la limite radiale

$$\Theta_T(e^{it}) = \lim_{r\to 1-0} \Theta_T(re^{it})$$

existe presque partout au sens de la convergence forte des opérateurs. Pour f fixé quelconque dans $\mathfrak{D}_T$, $\Theta_T(re^{it})f$ converge, comme élément de $L^2(\mathfrak{D}_{T^*})$, en moyenne vers $\Theta_T(e^{it})f$; $\Theta_T(e^{it})f$ a le développement de Fourier

$$(2.5) \qquad \Theta_T(e^{it})f = -Tf + \sum_1^\infty e^{int} D_{T^*} T^{*n-1} D_T f,$$

convergent en moyenne.

2. Envisageons deux contractions, T_1 dans $\mathfrak{H}_1$ et T_2 dans $\mathfrak{H}_2$, qui sont unitairement-équivalentes: $T_2 = \sigma T_1 \sigma^{-1}$ où σ est une transformation unitaire de $\mathfrak{H}_1$ sur $\mathfrak{H}_2$.[3]) De nos définitions il s'ensuit immédiatement que

$$\mathfrak{D}_{T_2} = \tau \mathfrak{D}_{T_1}, \quad \mathfrak{D}_{T_2^*} = \tau_* \mathfrak{D}_{T^*}, \quad \Theta_{T_2}(\lambda) = \tau_* \Theta_{T_1}(\lambda) \tau^{-1},$$

où τ et τ_* sont les restrictions de σ à $\mathfrak{D}_{T_1}$ et à $\mathfrak{D}_{T_1^*}$.

Il convient de faire la suivante

Définition. On dira que les fonctions analytiques contractives $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{E}', \mathfrak{E}'_*, \Theta'(\lambda)\}$ *coïncident*, lorsqu'il existe une transformation unitaire τ de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{E}'$ et une transformation unitaire τ_* de $\mathfrak{E}_*$ sur $\mathfrak{E}'_*$, telles qu'on ait $\Theta'(\lambda) = \tau_* \Theta(\lambda) \tau^{-1}$.

Nous venons de voir que pour deux contractions *unitairement équivalentes*, les fonctions caractéristiques *coïncident*. La proposition réciproque n'est pas vraie, du moins dans cette généralité. En effet, si $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(u)} \oplus \mathfrak{H}^{(0)}$ est la décomposition de $\mathfrak{H}$, correspondant aux parties unitaire $T^{(u)}$ et complètement non-unitaire $T^{(0)}$ de la contraction T, on a

$$D_T = O \oplus D_{T^{(0)}}, \quad D_{T^*} = O \oplus D_{T^{(0)*}}, \quad \mathfrak{D}_T = \mathfrak{D}_{T^{(0)}}, \quad \mathfrak{D}_{T^*} = \mathfrak{D}_{T^{(0)*}}$$

et par conséquent $\Theta_T(\lambda) = \Theta_{T^{(0)}}(\lambda)$, donc *$T$ et $T^{(0)}$ ont les mêmes fonctions caractéristiques.*

Il suffira donc d'envisager les contractions complètement non-unitaires. On démontrera plus loin (§ 4) que pour celles-ci la proposition ci-dessus a une réciproque complète.

3. C'est un fait immédiat que si T est une contraction, il en est de même de

$$T_a = (T - aI)(I - \bar{a}T)^{-1} \qquad (|a| < 1).$$

Les fonctions caractéristiques de T et T_a sont reliées de la manière suivante:

$$(2.6) \qquad \{\mathfrak{D}_{T_a}, \mathfrak{D}_{T_a^*}, \Theta_{T_a}(\lambda)\} \quad \textit{coïncide avec} \quad \left\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T\left(\frac{\lambda + a}{1 + \bar{a}\lambda}\right)\right\}.$$

---

[3]) On appellera *unitaire* une transformation isométrique σ d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_1$ *sur* un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_2$, ces deux espaces pouvant être différents. On a alors $\sigma^* = \sigma^{-1}$.

En effet, on obtient d'abord par des calculs élémentaires

(2. 7) $$I-T_a^*T_a = R^*(I-T^*T)R \quad \text{et} \quad I-T_aT_a^* = R_*^*(I-TT^*)R_*$$

où $$R=(1-|a|^2)^{\frac{1}{2}}(I-\bar{a}T)^{-1} \quad \text{et} \quad R_*=(1-|a|^2)^{\frac{1}{2}}(I-aT^*)^{-1}.$$

Il en résulte

(2. 8) $$\|D_{T_a}u\|^2=\|D_TRu\|^2, \quad \|D_{T_a^*}u\|^2=\|D_{T^*}R_*u\|^2$$

pour tout $u\in\mathfrak{H}$. Comme R et R_* appliquent $\mathfrak{H}$ sur soi-même, les relations (2. 8) montrent qu'il existe une transformation unitaire Z de $\mathfrak{D}_{T_a}$ sur $\mathfrak{D}_T$ et une transformation unitaire Z_* de $\mathfrak{D}_{T_a^*}$ sur $\mathfrak{D}_{T^*}$ telles que

(2. 9) $$ZD_{T_a}=D_TR \quad \text{et} \quad Z_*D_{T_a^*}=D_{T^*}R_*.$$

Faisant usage des formules (2. 3) et (2. 9) on obtient

$$Z_*\Theta_{T_a}(\lambda)Z^*D_T = Z_*\Theta_{T_a}(\lambda)D_{T_a}R^{-1} = Z_*D_{T_a^*}(I-\lambda T_a^*)^{-1}(\lambda I-T_a)R^{-1} =$$
$$= D_{T^*}R_*(I-\lambda T_a^*)(\lambda I-T_a)R^{-1} = D_{T^*}(I-aT^*)^{-1}(I-\lambda T_a^*)^{-1}(\lambda I-T_a)(I-\bar{a}T) =$$
$$= D_{T^*}(I-\mu T^*)^{-1}(\mu I-T), \quad \text{où} \quad \mu=\frac{\lambda+a}{1+\bar{a}\lambda}.$$

On a donc
$$Z_*\Theta_{T_a}(\lambda)Z^*D_T=\Theta_T(\mu)D_T,$$
d'où, comme Z^* et $\Theta_T(\mu)$ sont définies justement dans $\mathfrak{D}_T$, il résulte (2. 6).

3. Modèles fonctionnels d'une contraction donnée

1. Considérons une contraction complètement non-unitaire T d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Soit U la dilatation unitaire minimum de T, opérant dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{K}\supseteq\mathfrak{H}$.

On sait (*cf.* [1], th. 1) que les sous-espaces

(3. 1) $$\mathfrak{L}=\overline{(U-T)\mathfrak{H}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{L}^*=\overline{(U^*-T^*)\mathfrak{H}}$$

de $\mathfrak{K}$ sont ambulants par rapport à U et que

(3. 2) $$\mathfrak{K}=(\bigoplus_0^\infty U^n\mathfrak{L})\oplus\mathfrak{H}\oplus(\bigoplus_0^\infty U^{*n}\mathfrak{L}^*).$$

On sait aussi (*cf.* [1], démonstration du th. 3) que

(3. 3) $$\mathfrak{K}=\overline{\mathfrak{M}(\mathfrak{L})+\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*)}.$$

Désignons par Q la projection dans $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*)$. En posant

(3. 4) $$\mathfrak{K}_0=\mathfrak{K}\ominus\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*),^{4})$$

---

[4]) D'après [1], théorème 2, on a $\mathfrak{K}_0=\{0\}$ si $T^{*n}\to 0$ $(n\to\infty)$, et dans ce cas seulement.

on a en vertu de (3. 3)

$$\mathfrak{R}_0 = (I-Q)\mathfrak{R} = \overline{(I-Q)\mathfrak{M}(\mathfrak{L})+(I-Q)\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*)} = \overline{(I-Q)\mathfrak{M}(\mathfrak{L})}. \tag{3. 5}$$

Notons que $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*)$ réduit U et par conséquent

$$UQ = QU. \tag{3. 6}$$

En vertu de (3. 2), $\mathfrak{L} \perp U^n\mathfrak{L}^*$ pour $n=0,-1,-2,\ldots$, donc, pour $f\in\mathfrak{L}$, Qf est égale à la somme des projections de f sur les sous-espaces $U^n\mathfrak{L}^*$ $(n=1,2,\ldots)$, orthogonaux deux-à-deux. En désignant par Q_n la projection dans $\mathfrak{R}$ sur $U^n\mathfrak{L}_*$ où

$$\mathfrak{L}_* = U\mathfrak{L}^* = U\overline{(U^*-T^*)\mathfrak{H}} = \overline{(I-UT^*)\mathfrak{H}}, \tag{3. 7}$$

on aura donc

$$Qf = \sum_0^\infty Q_n f \qquad (f\in\mathfrak{L}). \tag{3. 8}$$

On montrera par un calcul simple que pour un élément $f\in\mathfrak{L}$ de la forme

$$f = (U-T)h \qquad (h\in\mathfrak{H}) \tag{3. 9}$$

on a

$$Q_0 f = -(I-UT^*)Th, \quad Q_n f = U^n(I-UT^*)T^{*n-1}(I-T^*T)h \quad (n=1,2,\ldots). \tag{3. 10}$$

En effet, les éléments figurant aux seconds membres appartiennent évidemment aux sous-espaces respectifs $U^n\mathfrak{L}_*$ $(n=0,1,\ldots)$ et on a

$$f+(I-UT^*)Th = U(I-T^*T)h \perp \mathfrak{L}_*$$

et

$$f-U^n(I-UT^*)T^{*n-1}(I-T^*T)h \perp U^n\mathfrak{L}_* \qquad (n\geqq 1),$$

puisque, pour tout $h'\in\mathfrak{H}$,

$$\begin{aligned}\big(U(I-T^*T)h,(I-UT^*)h'\big) &= \big(U(I-T^*T)h,h'\big)-\big(U(I-T^*T)h,UT^*h'\big) = \\ &= \big(T(I-T^*T)h,h'\big)-\big((I-T^*T)h,T^*h'\big) = 0\end{aligned}$$

et, en posant pour abbrévier $g_n = T^{*n-1}(I-T^*T)h$ $(n\geqq 1)$,

$$\begin{aligned}&\big((U-T)h-U^n(I-UT^*)g_n,\ U^n(I-UT^*)h'\big) = \\ &= \big(h,\ U^{n-1}(I-UT^*)h'\big)-\big(Th,\ U^n(I-UT^*)h'\big)-(g_n,h')+(UT^*g_n,h')+ \\ &\qquad\qquad +(g_n,\ UT^*h')-(T^*g_n,\ T^*h') = \\ &= \big(h,\ T^{n-1}(I-TT^*)h'\big)-\big(Th,\ T^n(I-TT^*)h'\big)-(g_n,h')+(TT^*g_n,h')+ \\ &\qquad\qquad +(g_n,\ TT^*h')+(T^*g_n,\ T^*h') = \\ &= \big((I-TT^*)T^{*n-1}h-(I-TT^*)T^{*n}Th-g_n+TT^*g_n,\ h'\big) = \\ &= \big((I-TT^*)T^{*n-1}(I-T^*T)h-(I-TT^*)g_n,\ h'\big) = 0.\end{aligned}$$

Les espaces $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}_*$ ont les mêmes dimensions $\mathfrak{d}_T$ et $\mathfrak{d}_{T^*}$ que $\mathfrak{D}_T$ et $\mathfrak{D}_{T^*}$; en effet, on obtient des applications unitaires

$$\varphi\colon \text{de } \mathfrak{L} \text{ sur } \mathfrak{D}_T, \quad \psi\colon \text{de } \mathfrak{L}_* \text{ sur } \mathfrak{D}_{T^*},$$

en complétant par continuité les applications

$$\varphi(U-T)h = D_T h, \quad \psi(I-UT^*)h = D_{T^*}h \qquad (h \in \mathfrak{H}) \tag{3.11}$$

(*cf.* [1], th. 1). φ et ψ engendrent des applications unitaires

$$\Phi: \text{ de } \mathfrak{M}(\mathfrak{L}) \text{ sur } L^2(\mathfrak{D}_T), \quad \Psi: \text{ de } \mathfrak{M}(\mathfrak{L}_*) \text{ sur } L^2(\mathfrak{D}_{T^*}),$$

notamment par

$$\begin{aligned} \Phi \sum_{-\infty}^{\infty} U^n l_n &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{int}\varphi l_n \qquad (l_n \in \mathfrak{L}, \ \sum \|l_n\|^2 < \infty), \\ \Psi \sum_{-\infty}^{\infty} U^n l_n &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{int}\psi l_n \qquad (l_n \in \mathfrak{L}_*, \ \sum \|l_n\|^2 < \infty). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Observons que, par cette définition,

$$\Phi Ug = e^{it}\Phi g \text{ pour tout } g \in \mathfrak{M}(\mathfrak{L}), \quad \Psi Ug = e^{it}\Psi g \text{ pour tout } g \in \mathfrak{M}(\mathfrak{L}_*). \tag{3.13}$$

En vertu de (3. 10), (3. 11) et (1) on a pour $f = (U-T)h$

$$\begin{aligned} Q_0 f &= -\psi^{-1} D_{T^*} Th = -\psi^{-1} TD_T h = -\psi^{-1} T\varphi f, \\ Q_n f &= U^n \psi^{-1} D_{T^*} T^{*n-1} D_T^2 h = U^n \psi^{-1} D_{T^*} T^{*n-1} D_T \varphi f \qquad (n \geqq 1); \end{aligned}$$

les résultats

$$Q_0 f = -\psi^{-1} T\varphi f, \quad Q_n f = U^n \psi^{-1} D_{T^*} T^{*n-1} D_T \varphi f \qquad (n \geqq 1) \tag{3.14}$$

s'étendent ensuite par continuité à tous les $f \in \mathfrak{L}$. Par (3. 8), (3. 12) et (3. 14) on aura donc

$$\Psi Qf = -T\varphi f + \sum_{1}^{\infty} e^{int} D_{T^*} T^{*n-1} D_T \varphi f,$$

ce qui, comparé à (2. 5), nous donne:

$$\Psi Qf = \Theta_T(e^{it})\varphi f \qquad (f \in \mathfrak{L}) \tag{3.15}$$

où $\Theta_T(\lambda)$ est la fonction caractéristique de T. (Il convient de remarquer que c'était en réalité cette relation qui a conduit les auteurs à la définition de la fonction caractéristique.)

De (3. 6), (3. 13) et (3. 15) on conclut pour tout $g = \sum_n U^n f_n \in \mathfrak{M}(\mathfrak{L})$:

$$\begin{aligned} \Psi Qg &= \Psi \sum_n U^n Qf_n = \sum_n e^{int} \Psi Qf_n = \\ &= \sum_n e^{int} \Theta_T(e^{it})\varphi f_n = \Theta_T(e^{it}) \sum_n e^{int}\varphi f_n = \Theta_T \Phi g; \end{aligned} \tag{3.16}$$

ici on a fait usage aussi de ce que Θ_T, regardée comme une transformation linéaire de $L^2(\mathfrak{D}_T)$ dans $L^2(\mathfrak{D}_{T^*})$, est continue, notamment une contraction, conséquence de ce que $\Theta_T(e^{it})$ est presque partout une contraction de $\mathfrak{D}_T$ dans $\mathfrak{D}_{T^*}$.

Tenant compte de ce que Φ et Ψ sont unitaires, on obtient de (3. 16) pour tout $g \in \mathfrak{M}(\mathfrak{L})$:

$$\|(I-Q)g\|^2 = \|g\|^2 - \|Qg\|^2 = \|\Phi g\|^2_{L^2(\mathfrak{D}_T)} - \|\Psi Q g\|^2_{L^2(\mathfrak{D}_{T^*})} = \tag{3. 17}$$

$$= \|\Phi g\|^2_{L^2(\mathfrak{D}_T)} - \|\Theta_T \Phi g\|^2_{L^2(\mathfrak{D}_{T^*})} = \|\Delta_T \Phi g\|^2_{L^2(\mathfrak{D}_T)}$$

où

$$\Delta_T(t) = [I_{\mathfrak{D}_T} - \Theta_T(e^{it})^* \Theta_T(e^{it})]^{\frac{1}{2}}; \tag{3. 18}$$

pour tout t où elle est définie (donc presque partout) $\Delta_T(t)$ est une transformation autoadjointe dans $\mathfrak{D}_T$, bornée par 0 et 1; comme fonction de t elle engendre une transformation autoadjointe Δ_T dans $L^2(\mathfrak{D}_T)$, bornée également par 0 et 1.

En posant

$$\Xi(I-Q)g = \Delta_T \Phi g \quad \text{pour} \quad g \in \mathfrak{M}(\mathfrak{L}), \tag{3. 19}$$

on aura défini, en vertu de (3. 17), une application isométrique de $(I-Q)\,\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ sur le sous-ensemble linéaire

$$\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T) = \{\Delta_T v\colon\ v \in L^2(\mathfrak{D}_T)\}$$

de $L^2(\mathfrak{D}_T)$; elle se complète à une transformation *unitaire*

$$\Xi\colon \text{ de } \mathfrak{R}_0 = \overline{(I-Q)\mathfrak{M}(\mathfrak{L})} \quad \text{sur} \quad \overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T)} \qquad (cf.\ (3.\ 5)).$$

Grâce à (3. 6), (3. 19) et (3. 13) on aura

$$\Xi U(I-Q)g = \Xi(I-Q)Ug = \Delta_T \Phi U g = \Delta_T e^{it}\Phi g =$$

$$= e^{it}\Delta_T \Phi g = e^{it}\Xi(I-Q)g \quad \text{pour} \quad g \in \mathfrak{M}(\mathfrak{L}),$$

d'où, par continuité, il résulte

$$\Xi U f = e^{it}\Xi f \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathfrak{R}_0. \tag{3. 20}$$

2. Cela étant, désignons par $\mathfrak{R}_+$ le sous-espace de $\mathfrak{R}$ engendré par $\mathfrak{H}$, $U\mathfrak{H}$, $U^2\mathfrak{H}$, ... De (3. 1) et (3. 2) il s'ensuit

$$\mathfrak{R}_+ = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}), \tag{3. 21}$$

et, par (3. 4) et (3. 7), [5])

$$\mathfrak{R}_+ = \mathfrak{R} \ominus \Big(\bigoplus_0^\infty U^{*n}\mathfrak{L}^*\Big) = (\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_0) \ominus \Big(\bigoplus_1^\infty U^{-n}\mathfrak{L}_*\Big),$$

donc on a aussi

$$\mathfrak{R}_+ = \mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}_0.\ ^{6)} \tag{3. 22}$$

Par sa définition, $\mathfrak{R}_+$ est invariant à U; posons

$$U_+ = U|\mathfrak{R}_+. \tag{3. 23}$$

---

[5]) Observons aussi que $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*) = \mathfrak{M}(\mathfrak{L}_*)$.

[6]) Voir [4]).

En vertu de (3. 22), U_+ est la somme orthogonale de sa partie dans $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$, qui est une *translation unilatérale*, et de sa partie dans $\mathfrak{R}_0$, qui coïncide avec la partie de U dans $\mathfrak{R}_0$, donc est *unitaire*.

Désignons par Q_+ la projection dans $\mathfrak{R}_+$ sur $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$. Comme $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$ réduit U_+, on a

(3. 24) $$U_+Q_+=Q_+U_+.$$

Soient Φ_+ et Ψ_+ les restrictions de Φ et Ψ à $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ et $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$; *cf.* (3. 12). Φ_+ applique $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ sur $H^2(\mathfrak{D}_T)$, et Ψ_+ applique $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$ sur $H^2(\mathfrak{D}_{T^*})$. On aura évidemment

(3. 25) $$\Phi_+U_+g = e^{it}\Phi_+g \quad (g\in\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})), \qquad \Psi_+U_+g = e^{it}\Psi_+g \quad (g\in\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)).$$

En vertu des formules (3. 8)–(3. 10) la projection d'un élément f de la forme (3. 9) sur $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_*)$ est contenue dans $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$, ce qui entraîne par continuité que $Q_+f=Qf$ pour tout $f\in\mathfrak{L}$. Grâce à (3. 6) et (3. 24) on a, plus généralement,

$$Q_+U_+^nf = U_+^nQ_+f = U^nQf = QU^nf \quad \text{pour} \quad f\in\mathfrak{L}, \quad n\geqq 0$$

et par conséquent

(3. 26) $$Q_+g=Qg \quad \text{pour tout} \quad g\in\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}).$$

Ainsi, par (3. 16) on aura

(3. 27) $$\Psi_+Q_+g=\Theta_T\Phi_+g \quad \text{pour tout} \quad g\in\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}).$$

Les applications unitaires

$$\Psi_+\colon \text{de } \mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*) \text{ sur } H^2(\mathfrak{D}_{T^*}), \qquad \Xi\colon \text{de } \mathfrak{R}_0 \text{ sur } \overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T)},$$

engendrent l'application unitaire

$$\Omega = \Psi_+\oplus\Xi\colon \text{de } \mathfrak{R}_+ = \mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)\oplus\mathfrak{R}_0 \text{ sur } \mathbf{K}_+ = H^2(\mathfrak{D}_{T^*})\oplus\overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T)}.$$

(3. 25) et (3. 20) entraînent qu'à l'opérateur U_+ de $\mathfrak{R}_+$ il correspondra, par l'application Ω, la multiplication par e^{it} dans l'espace fonctionnel $\mathbf{K}_+$.

Pour un élément $g\in\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ on a la décomposition $g = Q_+g+(g-Q_+g)$ en somme de ses composantes dans $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L}_*)$ et dans $\mathfrak{R}_0$, donc on aura, en vertu de (3. 19), (3. 26) et (3. 27),

$$\Omega g = \Psi_+Q_+g\oplus\Xi(I-Q)g = \Theta_T\Phi_+g\oplus\Delta_T\Phi_+g.$$

Donc $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ sera appliqué par Ω sur le sous-espace

$$\mathbf{F} = \{\Theta_T u\oplus\Delta_T u\colon\ u\in H^2(\mathfrak{D}_T)\}$$

de $\mathbf{K}_+$. Comme $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_+\ominus\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ en vertu de (3. 21), $\mathfrak{H}$ sera appliqué, à son tour, sur le sous-espace

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}_+\ominus\mathbf{F}.$$

Qu'est-ce qui correspond dans $\mathbf{H}$ à la transformation T? Commençons par montrer que

(3. 28) $$T^* = U_+^*|\mathfrak{H}.$$

En effet, $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ étant invariant à U_+, son complémentaire $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}_+ \ominus \mathfrak{M}_+(\mathfrak{L})$ sera invariant à U_+^*, et (3. 28) s'ensuit alors en vertu des relations, valables pour $h, h' \in \mathfrak{H}$ quelconques,

$$(T^* h, h')_{\mathfrak{H}} = (h, Th')_{\mathfrak{H}} = (h, U_+ h')_{\mathfrak{K}_+} = (U_+^* h, h')_{\mathfrak{K}_+} = (U_+^* h, h')_{\mathfrak{H}}.$$

Or, à U_+ il correspond dans $\mathbf{K}_+$ l'adjoint de l'opérateur de multiplication par e^{it}, donc la transformation

$$(u \oplus v) \to e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it} v(t) \qquad (u \oplus v \in \mathbf{K}_+).\ ^{7})$$

Par conséquent, en désignant par $\mathbf{T}$ la transformation de $\mathbf{H}$ qui correspond à la transformation T de $\mathfrak{H}$ par l'application unitaire $\Omega|\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{H}$ sur $\mathbf{H}$, on aura

$$\text{(3. 29)} \qquad \mathbf{T}^*(u \oplus v) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it} v(t) \qquad (u \oplus v \in \mathbf{H}).$$

Rappelons $(cf.\ ^{4}))$ que les conditions $\mathfrak{K}_0 = \{0\}$ et $\lim_{n\to\infty} T^{*n} = O$ sont équivalentes. D'autre part, vu que $\overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T)}$ est l'image de $\mathfrak{K}_0$ par l'application unitaire Ξ, on a $\mathfrak{K}_0 = \{0\}$ si $\Delta_T(t) = O$ p. p. et dans ce cas seulement. Or $\Delta_T(t) = O$ veut dire que $\Theta_T(e^{it})$ est isométrique. Ainsi, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

(3. 30) (a) $\lim_{n\to\infty} T^{*n} = O$; (b) $\Theta_T(e^{it})$ est isométrique presque partout.

Dans les conditions équivalentes (3. 30) on aura

$$\mathbf{K}_+ = H^2(\mathfrak{D}_{T^*}), \quad \mathbf{F} = \Theta_T H^2(\mathfrak{D}_T), \quad \mathbf{H} = H^2(\mathfrak{D}_{T^*}) \ominus \Theta_T H^2(\mathfrak{D}_T)$$

et

$$\text{(3. 31)} \qquad \mathbf{T}^* u = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \qquad (u \in \mathbf{H}).$$

Réciproquement, de la représentation (3. 31) il s'ensuit, pour $u(e^{it}) = \sum_0^\infty e^{ikt} u_k \in \mathbf{H}$,

$\mathbf{T}^{*n} u = \sum_n^\infty e^{ikt} u_k \to 0$, en moyenne, lorsque $n \to \infty$.

Résumons:

Théorème 1. *Toute contraction complètement non-unitaire T de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ est unitairement équivalente à la transformation* $\mathbf{T}$ *de l'espace fonctionnel*

$$\mathbf{H} = \left(H^2(\mathfrak{D}_{T^*}) \oplus \overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D}_T)}\right) \ominus \{\Theta_T u \oplus \Delta_T u \colon u \in H^2(\mathfrak{D}_T)\},$$

définie par

$$\mathbf{T}^*(u \oplus v) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it} v(t) \qquad (u \oplus v \in \mathbf{H}).$$

Dans le cas particulier où $T^{*n} \to O$ $(n \to \infty)$, et seulement dans ce cas, cette représentation de T se simplifie à

$$\mathbf{H} = H^2(\mathfrak{D}_{T^*}) \ominus \Theta_T H^2(\mathfrak{D}_T), \quad \mathbf{T}^* u = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \qquad (u \in \mathbf{H}),$$

avec $\Theta_T(e^{it})$ isométrique p. p.

---

[7]) Rappelons que toute fonction $u(e^{it}) \in H^2(\mathfrak{A})$ provient comme limite radiale d'une fonction $u(\lambda)$ analytique dans le cercle unité (*voir* les Préliminaires).

En échangeant les rôles de T et T^* on obtient le théorème dual suivant:

Théorème 1*. *Sous les mêmes hypothèses sur T que dans le théorème 1, T est unitairement équivalente à la transformation $\mathbf{T}'$ de l'espace fonctionnel*

$$\mathbf{H}' = \left(H^2(\mathfrak{D}_T) \oplus \overline{\Delta_{T^*} L^2(\mathfrak{D}_{T^*})}\right) \ominus \{\Theta_{T^*} u \oplus \Delta_{T^*} u \colon u \in H^2(\mathfrak{D}_{T^*})\},$$

définie par

$$\mathbf{T}'(u \oplus v) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it} v(t) \qquad (u \oplus v \in \mathbf{H}').$$

Dans le cas particulier où $T^n \to O$ $(n \to \infty)$, et seulement dans ce cas, cette représentation de T se simplifie à

$$\mathbf{H}' = H^2(\mathfrak{D}_T) \ominus \Theta_{T^*} H^2(\mathfrak{D}_{T^*}), \quad \mathbf{T}' u = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \quad (u \in \mathbf{H}'),$$

avec $\Theta_{T^*}(e^{i})$ isométrique p. p. [8]

4. Modèles fonctionnels: fonction analytique contractive donnée

1. Les théorèmes ci-dessus imposent le problème réciproque si toute fonction analytique contractive donnée $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ donne naissance, par des constructions analogues, à des contractions complètement non-unitaires $\mathbf{T}, \mathbf{T}'$. Comme $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ changent de rôle si l'on passe à la fonction analytique contractive adjointe $\{\mathfrak{E}_*, \mathfrak{E}, \Theta(\bar{\lambda})^*\}$, il suffira d'envisager le problème pour $\mathbf{T}$.

Soit donc donnée une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ où

$$\Theta(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n \Theta_n,$$

et posons
$$\mathbf{K} = L^2(\mathfrak{E}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}, \quad \mathbf{K}_+ = H^2(\mathfrak{E}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})} \quad (\subset \mathbf{K}),$$
$$\mathbf{G} = \{\Theta w \oplus \Delta w \colon \; w \in H^2(\mathfrak{E})\} \quad (\subset \mathbf{K}_+)$$

où
$$\Delta(t) = [I_{\mathfrak{E}} - \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it})]^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathbf{G}$ est évidemment un sous-ensemble linéaire de $\mathbf{K}_+$. De plus, $\mathbf{G}$ est fermé, donc un sous-espace de $\mathbf{K}_+$. En effet, en vertu de la relation

$$\|\Theta w \oplus \Delta w\|^2_{\mathbf{K}_+} = \|\Theta w\|^2_{H^2(\mathfrak{E}_*)} + \|\Delta w\|^2_{L^2(\mathfrak{E})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\|\Theta w\|^2_{\mathfrak{E}_*} + \|\Delta w\|^2_{\mathfrak{E}}]\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(\Theta^* \Theta w, w)_{\mathfrak{E}} + (\Delta^2 w, w)_{\mathfrak{E}}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (w, w)_{\mathfrak{E}}\, dt = \|w\|^2_{H^2(\mathfrak{E})},$$

$\mathbf{G}$ est l'image, par l'application isométrique $w \to \Theta w \oplus \Delta w$, de l'espace (fermé) $H^2(\mathfrak{E})$ dans $\mathbf{K}_+$. Soit finalement

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}_+ \ominus \mathbf{G}.$$

---

[8]) D'après (2.2) on a $\Theta_{T^*}(e^{it}) = \Theta_T(e^{-it})^*$, $\Delta_{T^*}(t) = [I_{\mathfrak{D}_{T^*}} - \Theta_T(e^{-it})\Theta_T(e^{-it})^*]^{\frac{1}{2}}$.

Désignons par $\mathbf{U}$ la multiplication par e^{it} dans $\mathbf{K}$; $\mathbf{U}$ est évidemment une transformation unitaire de $\mathbf{K}$. $\mathbf{K}_+$ est invariant pour $\mathbf{U}$; posons

$$\mathbf{U}_+ = \mathbf{U}|\mathbf{K}_+.$$

$\mathbf{G}$ est aussi invariant pour $\mathbf{U}_+$ et par conséquent $\mathbf{H}$ est invariant pour $\mathbf{U}_+^*$. On montre aisément que

$$\mathbf{U}_+^*(u \oplus v) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it} v(t) \qquad (u \oplus v \in \mathbf{K}_+).$$

$\mathbf{U}_+$ étant isométrique, $\mathbf{U}_+^*$ sera une contraction de $\mathbf{K}_+$; par conséquent la transformation $\mathbf{T}$ de $\mathbf{H}$, définie par

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{U}_+^*|\mathbf{H} \tag{4. 1}$$

sera une *contraction* de $\mathbf{H}$.

Désignons par $\mathbf{P}$ la projection dans $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{H}$, et par $\mathbf{P}_+$ la projection dans $\mathbf{K}_+$ sur $\mathbf{H}$; donc $\mathbf{P}_+ = \mathbf{P}|\mathbf{K}_+$. De (4. 1) il s'ensuit

$$\mathbf{T}^{*n} = \mathbf{U}_+^{*n}|\mathbf{H} \tag{4. 2}$$

et, pour $h, h' \in \mathbf{H}$,

$$(\mathbf{T}^n h, h')_{\mathbf{H}} = (h, \mathbf{T}^{*n} h')_{\mathbf{H}} = (h, \mathbf{U}_+^{*n} h')_{\mathbf{K}_+} = (\mathbf{U}_+^n h, h')_{\mathbf{K}_+} = (\mathbf{P}_+ \mathbf{U}_+^n h, h')_{\mathbf{H}},$$

d'où

$$\mathbf{T}^n = \mathbf{P}_+ \mathbf{U}_+^n|\mathbf{H} = \mathbf{P}\mathbf{U}^n|\mathbf{H} \qquad (n \geqq 0), \tag{4. 3}$$

donc $\mathbf{U}$ *est une dilatation unitaire de* $\mathbf{T}$.

2. Montrons que la contraction $\mathbf{T}$ de $\mathbf{H}$ est *complètement non-unitaire*. A cet effet, supposons qu'il existe un élément $u \oplus v \in \mathbf{H}$ tel que

(a) $\|\mathbf{T}^n(u \oplus v)\| = \|u \oplus v\| \quad (n \geqq 1)$, (b) $\|\mathbf{T}^{*n}(u \oplus v)\| = \|u \oplus v\| \quad (n \geqq 1)$;

comme élément de $H^2(\mathfrak{E}_*)$, u admet un développement

$$u(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^k a_k \qquad \left(a_k \in \mathfrak{E}_*,\ \sum_0^\infty \|a_k\|^2 < \infty\right).$$

En vertu de la relation

$$\|\mathbf{T}^{*n}(u \oplus v)\|^2 = \left\|\sum_n^\infty e^{ikt} a_k\right\|^2_{L^2(\mathfrak{E}_*)} + \|e^{-int} v(t)\|^2_{L^2(\mathfrak{E})} =$$

$$= \sum_n^\infty \|a_k\|^2_{\mathfrak{E}_*} + \|v\|^2_{L^2(\mathfrak{E})} \to \|v\|^2_{L^2(\mathfrak{E})} \qquad (n \to \infty),$$

les hypothèses (b) entraînent $u=0$. D'autre part, grâce aux relations (4. 3), les hypothèses (a) veulent dire que $\mathbf{U}_+^n(u \oplus v)$ appartient à $\mathbf{H}$ $(n \geqq 1)$. Dans notre cas où $u=0$, $0 \oplus e^{int} v(t)$ est donc orthogonal à $\mathbf{G}$, c'est-à-dire que

$$0 = (0 \oplus e^{int} v, \Theta w \oplus \Delta w) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} (v(t), \Delta(t) w(e^{it}))_{\mathfrak{E}}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} (\Delta(t) v(t), w(e^{it}))_{\mathfrak{E}}\, dt$$

pour tout $w \in H^2(\mathfrak{E})$, en particulier pour $w = e^{imt}f$ $(f \in \mathfrak{E}; m \geqq 0)$, donc

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}(\Delta(t)v(t), f)_{\mathfrak{E}}\, dt = 0 \qquad (n, m \geqq 0).$$

Cela entraîne $(\Delta(t)v(t), f)_{\mathfrak{E}} = 0$ p. p., et comme $\mathfrak{E}$ est séparable, $\Delta(t)v(t) = 0$ p. p. D'autre part, $v(t)$ appartenant à $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$ est la limite en moyenne d'une suite de la forme $v_n = \Delta f_n$ $(f_n \in L^2(\mathfrak{E}))$, d'où

$$\|v\|^2_{L^2(\mathfrak{E})} = \lim_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (v(t), v_n(t))_{\mathfrak{E}}\, dt = \lim_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\Delta(t)v(t), f_n(t))_{\mathfrak{E}}\, dt = 0,$$

donc $v = 0$.

Ainsi, (a) et (b) entraînent $u \oplus v = 0$, ce qui prouve notre assertion que $\mathbf{T}$ est complètement non-unitaire.

3. Nous supposerons dès maintenant que la fonction analytique contractive envisagée $\Theta(\lambda)$ est *pure*, c'est-à-dire que

(4. 4) $$\|\Theta(0)f\| < \|f\| \text{ pour tout } f \in \mathfrak{E},\ f \neq 0,$$

et nous montrons que, sous cette condition, la fonction caractéristique de la contraction $\mathbf{T}$ coïncide avec $\Theta(\lambda)$.

A cet effet, nous démontrons d'abord que $\mathbf{U}$ est la dilatation unitaire *minimum* de $\mathbf{T}$, c'est-à-dire que

(4. 5) $$\mathbf{K} = \bigvee_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}^n \mathbf{H}$$

De la définition de $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}_+$ il ressort immédiatement que $\mathbf{K} = \bigvee_{-\infty}^{0} \mathbf{U}^n \mathbf{K}_+$; donc, pour établir (4. 5), il suffit de démontrer que

(4. 6) $$\mathbf{K}_+ = \bigvee_0^{\infty} \mathbf{U}_+^n \mathbf{H} = \bigvee_0^{\infty} \mathbf{U}^n \mathbf{H}.$$

Or, supposons que $u \oplus v$ est un élément de $\mathbf{K}_+$, orthogonal à $\mathbf{U}^n\mathbf{H}$ pour $n = 0, 1, \ldots$, c'est-à-dire que $\mathbf{U}_+^{*n}(u \oplus v)$ appartient à $\mathbf{G}$ pour $n = 0, 1, \ldots$, donc

$$\mathbf{U}_+^{*n}(u \oplus v) = \Theta w^{(n)} \oplus \Delta w^{(n)} \qquad (w^{(n)} \in H^2(\mathfrak{E});\ n = 0, 1, \ldots).$$

La relation récurrente

$$\mathbf{U}_+^*(\Theta w^{(n)} \oplus \Delta w^{(n)}) = \Theta w^{(n+1)} \oplus \Delta w^{(n+1)} \qquad (n \geqq 0)$$

nous donne:

$$e^{-it}[\Theta w^{(n)} - (\Theta w^{(n)})(0)] \oplus e^{-it}\Delta w^{(n)} = \Theta w^{(n+1)} \oplus \Delta w^{(n+1)} \qquad (n \geqq 0),$$

donc $$\Theta(e^{it})\omega^{(n)}(e^{it}) = \Theta(0)w^{(n)}(0), \quad \Delta(t)\omega^{(n)}(e^{it}) = 0 \qquad (n \geqq 0)$$

où

(4. 7) $$\omega^{(n)}(\lambda) = w^{(n)}(\lambda) - \lambda w^{(n+1)}(\lambda) \in H^2(\mathfrak{E}).$$

Or, $\Delta(t)\omega^{(n)}(e^{it})=0$ entraîne $[\Delta(t)]^2\omega^{(n)}(e^{it})=0$, $\omega^{(n)}(e^{it})=\Theta(e^{it})^*\Theta(e^{it})\omega^{(n)}(e^{it})$; par conséquent on a

$$\omega^{(n)}(e^{it}) = \Theta(e^{it})^*\Theta(0)w^{(n)}(0) = \sum_0^\infty e^{-ikt}\Theta_k^*\Theta_0 w^{(n)}(0).$$

Vu que $\omega^{(n)}\in H^2(\mathfrak{E})$, cela n'est possible que si

$$\omega^{(n)}(\lambda)=\Theta_0^*\Theta_0 w^{(n)}(0) \tag{4.8}$$

pour tout λ, en particulier pour $\lambda=0$. Puisque $\omega^{(n)}(0)=w^{(n)}(0)$ par (4.7), on obtient que

$$w^{(n)}(0)=\Theta_0^*\Theta_0 w^{(n)}(0), \quad \|w^{(n)}(0)\|=\|\Theta_0 w^{(n)}(0)\|.$$

Puisque la fonction analytique contractive $\Theta(\lambda)$ est *pure*, cela entraîne $w^{(n)}(0)=0$ et, par (4.8), $\omega^{(n)}(\lambda)\equiv 0$. Par (4.7), on a donc $w^{(n)}(\lambda)=\lambda w^{(n+1)}(\lambda)$. Comme cela est vrai pour tout $n\geqq 0$, il en résulte

$$w^{(0)}(\lambda)=\lambda^n w^n(\lambda) \qquad (n\geqq 0),$$

donc $w^{(0)}(\lambda)/\lambda^n$ appartient à $H^2(\mathfrak{E})$ pour tout $n\geqq 0$, ce qui n'est possible que si $w^{(0)}(\lambda)\equiv 0$, d'où

$$u\oplus v = \Theta w^{(0)}\oplus\Delta w^{(0)} = 0.$$

Cela prouve (4.6), donc aussi (4.5), c'est-à-dire notre assertion que la dilatation unitaire $\mathbf{U}$ de $\mathbf{T}$ est *minimum*.

4. L'étape suivante sera de déterminer $\mathbf{L}_* = \overline{(\mathbf{I_K}-\mathbf{UT}^*)\mathbf{H}}$ et $\mathfrak{M}(\mathbf{L}_*)$.

Il est immédiat que pour $u\oplus v\in\mathbf{H}$

$$(\mathbf{I_K}-\mathbf{UT}^*)(u\oplus v) = [u-(u-u(0))]\oplus[v-v] = u(0)\oplus 0 \tag{4.9}$$

où l'on envisage $u(0)$ comme une fonction constante $\in L^2(\mathfrak{E}_*)$.

Choisissons en particulier

$$\bar u(\lambda)=(I-\Theta(\lambda)\Theta_0^*)g, \quad \bar v(t) = -\Delta(t)\Theta_0^* g$$

où $g\in\mathfrak{E}_*$. Il est manifeste que $\bar u\oplus\bar v\in\mathbf{K}_+$; montrons qu'on a même $\bar u\oplus\bar v\in\mathbf{H}$. En effet, on a pour $w\in H^2(\mathfrak{E})$ quelconque:

$$(\bar u\oplus\bar v, \Theta w\oplus\Delta w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\Theta(e^{it})^*\bar u(e^{it})+\Delta(t)\bar v(t), w(e^{it}))_{\mathfrak{E}}\,dt = 0$$

puisque

$$\Theta^*\bar u+\Delta\bar v = \Theta^* g-\Theta^*\Theta\Theta_0^* g-\Delta^2\Theta_0^* g = (\Theta(e^{it})^*-\Theta_0^*)g = \sum_1^\infty e^{-int}\Theta_n^* g\perp H^2(\mathfrak{E}).$$

En vertu de (4.9) nous avons

$$(\mathbf{I_K}-\mathbf{UT}^*)(\bar u\oplus\bar v) = (I-\Theta_0\Theta_0^*)g\oplus 0. \tag{4.10}$$

Or, les éléments de la forme $(I-\Theta_0\Theta_0^*)g$ $(g\in\mathfrak{E}^*)$ sont *denses* dans $\mathfrak{E}_*$. En cas contraire il existerait un $g'\in\mathfrak{E}_*$, $g'\neq 0$, tel que

$$(I_{\mathfrak{E}_*}-\Theta_0\Theta_0^*)g' = 0, \tag{4.11}$$

d'où $(I_{\mathfrak{E}}-\Theta_0^*\Theta_0)\Theta_0^*g' = \Theta_0^*(I_{\mathfrak{E}_*}-\Theta_0\Theta_0^*)g' = 0$, $\|\Theta_0^*g'\|=\|\Theta_0\Theta_0^*g'\|$. En vertu de (4. 4) cela entraîne $\Theta_0^*g'=0$ et, par (4. 11), $g'=0$. Contradiction.

En combinant ce résultat avec (4. 9) et (4. 10) nous obtenons

(4. 12) $$\mathbf{L}_* = \mathfrak{E}_*\oplus\{0\}$$

(si l'on identifie, de manière évidente, les fonctions constantes $\in L^2(\mathfrak{E}_*)$ à leurs valeurs $\in\mathfrak{E}_*$), d'où il s'ensuit finalement que

(4. 13) $$\mathfrak{M}(\mathbf{L}_*) = L^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\{0\}.$$

En d'autres termes, si Q désigne la projection dans $\mathbf{K}$ sur $\mathfrak{M}(\mathbf{L}_*)$, on a

(4. 14) $$Q(u\oplus v) = u\oplus 0 \qquad (u\oplus v\in\mathbf{K}).$$

5. La condition que l'élément $u\oplus v$ de $\mathbf{K}_+$ appartienne à $\mathbf{H}$ s'exprime en forme détaillée comme suit:

$$(u\oplus v,\ \Theta w\oplus\Delta w)_{\mathbf{K}_+} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(u,\Theta w)_{\mathfrak{E}_*}+(v,\Delta w)_{\mathfrak{E}}]\,dt = 0,$$

ou

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\Theta^*u+\Delta v,\ w)_{\mathfrak{E}}\,dt = 0,$$

et cela pour tout $w\in H^2(\mathfrak{E})$. En d'autres termes, la condition en question veut dire que la fonction $\Theta^*u+\Delta v$ (qui appartient évidemment à $L^2(\mathfrak{E})$), soit orthogonale à $H^2(\mathfrak{E})$, donc admette un développement de Fourier de la forme suivante:

(4. 15) $$\Theta(e^{it})^*u(e^{it})+\Delta(t)v(t) = e^{-it}f_1+\cdots+e^{-int}f_n+\cdots,$$

où $$f_n\in\mathfrak{E},\quad \sum_1^\infty\|f_n\|^2<\infty.$$

Cela étant, nous allons calculer la forme explicite de la transformation $\mathbf{T}$. En vertu de (4. 3) on a

$$\mathbf{T}(u\oplus v) = \mathbf{PU}(u\oplus v) = \mathbf{P}(e^{it}u\oplus e^{it}v) \qquad (u\oplus v\in\mathbf{H}),$$

donc $$\mathbf{T}(u\oplus v) = (e^{it}u\oplus e^{it}v)-(\Theta w\oplus\Delta w),$$

la fonction $w\in H^2(\mathfrak{E})$ étant déterminée par la condition d'orthogonalité

$$(e^{it}u\oplus e^{it}v)-(\Theta w\oplus\Delta w)\perp\Theta w'\oplus\Delta w' \text{ pour tout } w'\in H^2(\mathfrak{E}),$$

ou, ce qui revient au même, par la condition d'orthogonalité

(4. 16) $$\Theta^*(e^{it}u-\Theta w)+\Delta(e^{it}v-\Delta w) = e^{it}(\Theta^*u+\Delta v)-w\perp H^2(\mathfrak{E})$$

dans $L^2(\mathfrak{E})$. Vu le développement (4. 15), on conclut de (4. 16) que w doit être égal à f_1.

Donc, *la forme explicite de* $\mathbf{T}$ *est*

(4. 17) $$\mathbf{T}(u\oplus v) = \big(e^{it}u(e^{it})-\Theta(e^{it})f_1\big)\oplus\big(e^{it}v(t)-\Delta(t)f_1\big)$$

où $u\oplus v\in\mathbf{H}$ *et*

$$f_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{it}(\Theta^*u+\Delta v)\,dt. \tag{4.18}$$

De ce résultat on obtient

$$(\mathbf{U}-\mathbf{T})(u\oplus v)=\Theta(e^{it})f_1\oplus\Delta(t)f_1 \tag{4.19}$$

pour $u\oplus v\in\mathbf{H}$, d'où on conclut, en vertu de (4. 14),

$$Q(\mathbf{U}-\mathbf{T})(u\oplus v)=\Theta(e^{it})f_1\oplus 0 \qquad (u\oplus v\in\mathbf{H}). \tag{4.20}$$

Lorsque $u\oplus v$ parcourt $\mathbf{H}$, les éléments f_1 correspondants parcourent un ensemble *dense* dans $\mathfrak{E}$. Pour démontrer cette assertion, observons d'abord que, grâce à (4. 4), les éléments de la forme

$$f=(I-\Theta_0^*\Theta_0)g \qquad (g\in\mathfrak{E};\ \Theta_0=\Theta(0))$$

sont denses dans $\mathfrak{E}$. En posant

$$u\oplus v=e^{-it}[\Theta(e^{it})-\Theta_0]g\oplus e^{-it}\Delta(t)g$$

on aura
$$\Theta^*u+\Delta v=e^{-it}(\Theta^*\Theta-\Theta^*\Theta_0)g+e^{-it}\Delta^2g=$$
$$=e^{-it}(I-\Theta^*\Theta_0)g=e^{-it}(I-\Theta_0^*\Theta_0)g-e^{-2it}\Theta_1^*\Theta_0g-\cdots,$$

ce qui met en évidence (*cf.* (4. 15)) que $u\oplus v$ appartient à $\mathbf{H}$ et que l'élément correspondant f_1 est égal à l'élément f dont nous sommes parti.

En vertu de (4. 19) on aura, pour $u\oplus v\in\mathbf{H}$ quelconque,

$$\|(\mathbf{U}-\mathbf{T})(u\oplus v)\|_{\mathbf{K}}^2=\|\Theta f_1\|_{H^2(\mathfrak{E}_*)}^2+\|\Delta f_1\|_{L^2(\mathfrak{E})}^2=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(\Theta^*\Theta f_1,f_1)_{\mathfrak{E}}+(\Delta^2f_1,f_1)_{\mathfrak{E}}]\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f_1,f_1)_{\mathfrak{E}}\,dt=\|f_1\|_{\mathfrak{E}}^2,$$

donc l'application

$$\varrho:\ (\mathbf{U}-\mathbf{T})(u\oplus v)\to f_1$$

est isométrique; complétons-la par continuité à une application *unitaire* ϱ de $\mathbf{L}=\overline{(\mathbf{U}-\mathbf{T})\mathbf{H}}$ sur $\mathfrak{E}$.

D'autre part, on obtient, en vertu de (4. 12), une application *unitaire* σ de $\mathbf{L}_*=\overline{(\mathbf{I_K}-\mathbf{UT}^*)\mathbf{H}}$ sur $\mathfrak{E}_*$, si l'on pose

$$\sigma(f\oplus 0)=f \qquad (f\in\mathfrak{E}).$$ [9]

(4. 20) peut alors être écrit sous la forme

$$Ql=\Theta(e^{it})\varrho l\oplus 0=\left[\sum_0^\infty e^{int}\Theta_n\varrho l\right]\oplus 0=\sum_0^\infty e^{int}[\Theta_n\varrho l\oplus 0]=\sum_0^\infty e^{int}\sigma^{-1}\Theta_n\varrho l \tag{4.21}$$

[9]) Rappelons que nous identifions les fonctions constantes dans $L^2(\mathfrak{E}_*)$ à leurs valeurs dans $\mathfrak{E}_*$.

pour $l = (\mathbf{U}-\mathbf{T})(u\oplus v)\,(u\oplus v\in\mathbf{H})$; par continuité, ce résultat s'étend à tous les éléments l de $\mathbf{L}$.

Définissons, en appliquant les formules (3. 11)—(3. 12) dans notre cas, les transformations unitaires

$$\varphi\colon \text{ de } \mathbf{L} \text{ sur } \mathfrak{D}_\mathbf{T} \quad \text{et} \quad \psi\colon \text{ de } \mathbf{L}_* \text{ sur } \mathfrak{D}_{\mathbf{T}^*}$$

et les transformations unitaires correspondantes

$$\Phi\colon \text{ de } \mathfrak{M}(\mathbf{L}) \text{ sur } L^2(\mathfrak{D}_\mathbf{T}) \quad \text{et} \quad \Psi\colon \text{ de } \mathfrak{M}(\mathbf{L}_*) \text{ sur } L^2(\mathfrak{D}_{\mathbf{T}^*}).$$

Grâce au fait que $\mathbf{U}$ est la multiplication par e^{it}, on déduit de (4. 21)

$$(4.22)\qquad \begin{aligned}\Psi Q l &= \Psi\sum_0^\infty e^{int}\sigma^{-1}\Theta_n\varrho l = \sum_0^\infty e^{int}\psi(\sigma^{-1}\Theta_n\varrho l) = {}^{10)}\\ &= \psi\sigma^{-1}\sum_0^\infty e^{int}\Theta_n\varrho l = \psi\sigma^{-1}\Theta(e^{it})\varrho\varphi^{-1}(\varphi l) \qquad (l\in\mathbf{L}_*).\end{aligned}$$

Observons que $\tau=\varphi\varrho^{-1}$ est une transformation unitaire de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{D}_\mathbf{T}$, et $\tau_*=\psi\sigma^{-1}$ est une transformation unitaire de $\mathfrak{E}_*$ sur $\mathfrak{D}_{\mathbf{T}^*}$. En comparant (4. 22) à (3. 15) nous voyons que

$$\Theta_\mathbf{T}(\lambda)=\tau_*\Theta(\lambda)\tau^{-1}.$$

Ainsi, la fonction caractéristique de $\mathbf{T}$ coïncide avec la fonction analytique contractive pure $\{\mathfrak{E},\mathfrak{E}_*,\Theta(\lambda)\}$, dont nous sommes parti dans notre construction.

Ainsi, nous avons démontré le

Théorème 2. *Pour toute fonction analytique contractive donnée $\{\mathfrak{E},\mathfrak{E}_*,\Theta(\lambda)\}$, la transformation $\mathbf{T}$ de l'espace fonctionnel de Hilbert*

$$\mathbf{H} = \left(H^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}\right)\ominus\{\Theta w\oplus\Delta w\colon w\in H^2(\mathfrak{E})\},$$

définie par

$$\mathbf{T}^*(u\oplus v) = e^{-it}[u(e^{it})-u(0)]\oplus e^{-it}v(t) \qquad (u\oplus v\in\mathbf{H}),$$

est une contraction complètement non-unitaire de $\mathbf{H}$; *ici* $\Delta(t) = [I-\Theta(e^{it})^*\Theta(e^{it})]^{\frac12}$.

Si de plus la fonction analytique contractive $\{\mathfrak{E},\mathfrak{E}_*,\Theta(\lambda)\}$ est pure, c'est-à-dire $\|\Theta(0)f\|<\|f\|$ pour tout $f\in\mathfrak{E}$ $(f\neq 0)$, elle coïncide avec la fonction caractéristique de $\mathbf{T}$. *Dans ce cas, en plongeant* $\mathbf{H}$ *de manière évidente dans l'espace* $\mathbf{K} = L^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$, *la transformation* $\mathbf{U}(u\oplus v) = e^{it}u\oplus e^{it}v$ $(u\oplus v\in\mathbf{K})$ *sera la dilatation unitaire minimum de* $\mathbf{T}$.

6. Soient $\{\mathfrak{E},\mathfrak{E}_*,\Theta\}$ et $\{\mathfrak{E}',\mathfrak{E}'_*,\Theta'\}$ deux fonctions analytiques contractives *coïncidentes*, c'est-à-dire telles qu'il existe une application unitaire τ de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{E}'$ et une application unitaire τ_* de $\mathfrak{E}_*$ sur $\mathfrak{E}'_*$, de sorte qu'on ait $\Theta'(\lambda)=\tau_*\Theta(\lambda)\tau^{-1}$.

---

[10]) Nous avons à observer que toute transformation unitaire τ d'un espace de Hilbert $\mathfrak{A}$ sur un espace de Hilbert $\mathfrak{A}'$, engendre, moyennant la formule $u(t)\to u'(t)=\tau u(t)$, une transformation unitaire de l'espace $L^2(\mathfrak{A})$ sur l'espace $L^2(\mathfrak{A}')$, ainsi que de l'espace $H^2(\mathfrak{A})$ sur l'espace $H^2(\mathfrak{A}')$.

Puisque τ et τ_* sont unitaires, on aura $\Theta'(\lambda)^* = \tau\Theta(\lambda)^*\tau_*^{-1}$, d'où $\Theta'(\lambda)^*\Theta'(\lambda) = \tau\Theta(\lambda)^*\Theta(\lambda)\tau^{-1}$ et par conséquent

$$\Delta'(t) = \tau\Delta(t)\tau^{-1}. \tag{4.23}$$

Ainsi,

$$\omega:\ u(e^{it}) \oplus v(t) \to \tau_* u(e^{it}) \oplus \tau v(t)$$

est une application unitaire de l'espace $\mathbf{K} = H^2(\mathfrak{E}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$ sur l'espace $\mathbf{K}' = H^2(\mathfrak{E}'_*) \oplus \overline{\Delta' L^2(\mathfrak{E}')}$ (observons, à cet effet, que $\tau v \in \overline{\tau\Delta L^2(\mathfrak{E})} = \overline{\Delta'\tau L^2(\mathfrak{E})} = \overline{\Delta' L^2(\mathfrak{E}')}$). De plus, ω applique $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{G}'$ parce que

$$\tau_*\Theta w \oplus \tau\Delta w = \Theta'(\tau w) \oplus \Delta'(\tau w) \qquad (w \in H^2(\mathfrak{E}),\ \tau w \in H^2(\mathfrak{E}'));$$

par conséquent ω applique $\mathbf{H} = \mathbf{K} \ominus \mathbf{G}$ sur $\mathbf{H}' = \mathbf{K}' \ominus \mathbf{G}'$. Finalement, il est manifeste que la restriction de ω à $\mathbf{H}$ transforme $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}'$. Donc $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont *unitairement équivalentes.*

En appliquant ce résultat en particulier aux fonctions caractéristiques et en rappelant aussi § 2. 2, nous pouvons énoncer notre

Théorème 3. *Deux contractions complètement non-unitaires sont unitairement équivalentes, si leurs fonctions caractéristiques coïncident, et dans ce cas seulement.*

7. Dans la Note VII [3] on a introduit les classes suivantes des contractions complètement non-unitaires:

$$T \in C_{0.} \text{ si } T^n \to O \text{ fortement}; \quad T \in C_{1.} \text{ si } T^n h \to 0 \text{ pour } \textit{aucun } h \neq 0;$$

$$T \in C_{.0} \text{ si } T^{*n} \to O \text{ fortement}; \quad T \in C_{.1} \text{ si } T^{*n} h \to 0 \text{ pour } \textit{aucun } h \neq 0;$$

de plus on a posé $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha.} \cap C_{.\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$.

Nous voulons maintenant caractériser ces classes par la fonction caractéristique de T. A cet effet faisons la définition suivante:

Définition. Une fonction analytique bornée $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ $(|\lambda| < 1)$ sera appelée *intérieure* si $\Theta(e^{it})$ est isométrique presque partout, et *extérieure* si $\Theta H^2(\mathfrak{E}) = \{\Theta(e^{it})u(e^{it}):\ u \in H^2(\mathfrak{E})\}$ est dense dans $H^2(\mathfrak{E}_*)$.[11])

Cela étant, nos théorèmes admettent le suivant

Corollaire. *Soit T une contraction complètement non-unitaire et soient $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$, $\{\mathfrak{D}_{T^*}, \mathfrak{D}_T, \Theta_{T^*}(\lambda)\}$ les fonctions caractéristiques de T et T^*; $\Theta_{T^*}(\lambda) = [\Theta_T(\bar{\lambda})]^*$. Pour qu'on ait*

(i) $T \in C_{.0}$, (ii) $T \in C_{.1}$, (iii) $T \in C_{0.}$, (iv) $T \in C_{1.}$,

il faut et il suffit que (i) *$\Theta_T(\lambda)$ soit intérieure,* (ii) *$\Theta_T(\lambda)$ soit extérieure,* (iii) *$\Theta_{T^*}(\lambda)$ soit intérieure,* (iv) *$\Theta_{T^*}(\lambda)$ soit extérieure, suivant les cas. Par conséquent, on a $T \in C_{00}$ si et seulement si $\Theta_T(e^{it})$ est unitaire presque partout.*

Démonstration. Les cas (iii) et (iv) se ramènent aux cas (i) et (ii) si l'on remplace T par T^*. Le cas (i) est contenu dans le théorème 1. Ainsi il nous reste

---

[11]) Pour les fonctions analytiques bornées dans le cercle unité, à valeurs numériques, ces définitions coïncident, en vertu d'un théorème de Beurling (*cf.* [13] ou [15] p. 101), avec celles données par cet auteur (*cf.* [13] ou [15], p. 62).

à envisager le cas (ii). Comme les classes sont évidemment invariantes par rapport à une équivalence unitaire et comme, d'autre part, la propriété d'une fonction analytique contractive d'être intérieure ou extérieure se conserve lorsque'on passe aux fonctions coïncidentes, il suffit de considérer notre modèle fonctionnel pour T.

Soit donc $\mathbf{T}$ la contraction engendrée par une fonction analytique contractive pure $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ au sens du théorème 2. D'après le n° 2 on a

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{T}^{*n}(u\oplus v)\| = \|v\| \quad \text{pour} \quad u\oplus v\in \mathbf{H},$$

ce qui montre que $\mathbf{T}\in C_{\cdot 1}$ si, et seulement si $u\oplus 0\in\mathbf{H}$ entraîne $u=0$. Or, $u\oplus 0\in\mathbf{H}$ veut dire que $u\perp \Theta H^2(\mathfrak{E})$, et ceci entraîne $u=0$ si, et seulement si Θ est une fonction extérieure.

5. Relations entre la fonction caractéristique et le spectre

1. Le théorème suivant établit des relations entre le spectre $\sigma(T)$ et le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$ [12]) d'une contraction complètement non-unitaire T, d'une part, et de sa fonction caractéristique $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$, d'autre part. Comme jusqu'ici, C désignera le cercle unité et D son intérieur.

Théorème 4.[13]) *Le spectre $\sigma(T)$ coïncide avec l'ensemble S_T, composé des points $\lambda\in D$ où $\Theta_T(\lambda)$ n'a pas d'inverse au sens strict (c'est-à-dire partout définie dans $\mathfrak{D}_T$ et bornée) et du complémentaire dans C de l'union des arcs ouverts de C sur lesquels $\Theta_T(\lambda)$ est analytique et unitaire.*

Le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$ coïncide avec l'ensemble s_T des points $\lambda\in D$ où $\Theta_T(\lambda)$ n'a pas d'inverse, même pas au sens large.

Démonstration. Comme T est complètement non-unitaire, elle ne peut avoir de valeur propre sur C. Lorsque $a\in\sigma_p(T)$, on a donc $a\in D$; en posant $T_a = (T-aI)(I-\bar{a}T)^{-1}$ on a alors $0\in\sigma_p(T_a)$. Par conséquent $T_a u=0$, $(I-T_a^*T_a)u=u$ pour un certain $u\neq 0$, ce qui montre que $u\in\mathfrak{D}_{T_a}$ et en vertu de (2. 1)

$$\Theta_{T_a}(0)u = -T_a u = 0.$$

Comme $\Theta_{T_a}(0)$ ne diffère de $\Theta_T(a)$ qu'en des facteurs unitaires près (*voir* le n° 3 du paragraphe 2), il résulte que $\Theta_T(a)v=0$ pour un certain $v\neq 0$, donc $a\in s_T$. Ainsi on a $\sigma_p(T)\subseteq s_T$. L'inclusion inverse peut être démontrée en parcourant ce raisonnement dans l'ordre inverse. Donc $\sigma_p(T)=s_T$.

Passons au problème du spectre et montrons d'abord pour le point 0 que s'il appartient à $\sigma(T)$, il appartient à S_T aussi et inversement. Le même fait subsiste alors pour tout point a dans D; pour le voir, il n'y a qu'à remplacer, comme plus haut, T par T_a. Ainsi, on aura prouvé

$$\sigma(T)\cap D = S_T\cap D. \tag{5. 1}$$

Rappelons que la relation (1) entraîne $T\mathfrak{D}_T\subseteq\mathfrak{D}_{T^*}$; montrons de plus que T applique $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_T$ sur $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_{T^*}$ isométriquement. En effet, les conditions $u\in\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_T$,

[12]) $\sigma_p(T)$ est constitué des valeurs propres de T.

[13]) Pour le cas particulier où les indices de défaut sont finis et égaux, un énoncé voisin se trouve dans [11]; *cf.* aussi [12], théorème 7.

$D_T u=0$, $\|u\|=\|Tu\|$ sont évidemment équivalentes, de même que les conditions $v\in\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_{T^*}$, $D_{T^*}v=0$, $\|v\|=\|T^*v\|$. Or, en vertu de (1), $D_T u=0$ entraîne $D_{T^*}Tu=0$ et $D_{T^*}v=0$ entraîne $D_T T^*v=0$, d'où l'on conclut que $Z=T|(\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_T)$ est une application unitaire de $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_T$ sur $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_{T^*}$. En vertu de la définition (2. 1) de la fonction caractéristique on a, d'autre part, $T|\mathfrak{D}_T=-\Theta_T(0)$. Ainsi, T est la somme directe de $-\Theta_T(0)$ et d'une transformation unitaire; pour que T admette une inverse au sens strict il faut donc et il suffit que $\Theta_T(0)$ jouisse de la même propriété. Cela prouve notre assertion concernant le point 0 et par conséquent aussi (5. 1).

Supposons maintenant que α est un arc de C, compris dans l'ensemble résolvant de T; son image α^* par rapport à l'axe réel est alors comprise dans l'ensemble résolvant de T^*, d'où il s'ensuit que $\lambda(I-\lambda T^*)^{-1}=(1/\lambda-T^*)^{-1}$ existe (au sens strict) et est une fonction analytique de λ dans un domaine renfermant l'arc α. Moyennant la formule (2. 1), $\Theta_T(\lambda)$ admet alors un prolongement analytique dans le même domaine. De plus il s'ensuit de (2. 3) que $\|f\|^2-\|\Theta_T(\lambda)f\|^2\to 0$ lorsque λ tend vers un point de α; ainsi, $\Theta_T(\lambda)$ est pour $\lambda\in\alpha$ un opérateur isométrique. En remplaçant dans ce raisonnement α par α^* et T par T^*, on obtient que $\Theta_{T^*}(\bar\lambda)$ est isométrique pour $\bar\lambda\in\alpha^*$. Comme $\Theta_{T^*}(\bar\lambda)=[\Theta_T(\lambda)]^*$, il résulte que, pour $\lambda\in\alpha$, $\Theta_T(\lambda)$ est même unitaire. De cette façon, on a obtenu:

$$\sigma(T)\cap C\supseteqq S_T\cap C. \tag{5. 2}$$

En vertu de (5. 1) et (5. 2) il nous reste à prouver que si α est un arc de C sur lequel $\Theta_T(\lambda)$ est analytique et unitaire, α est contenu dans l'ensemble résolvant de T. Il suffit de démontrer cela pour notre modèle fonctionnel.

Soit donc $\mathbf{T}$ la contraction complètement non-unitaire engendrée, au sens du théorème 2, par une fonction analytique contractive pure $\{\mathfrak{E},\mathfrak{E}_*,\Theta(\lambda)\}$ telle que $\Theta(\lambda)$ est analytique et unitaire sur l'arc α. Montrons d'abord le fait suivant:

Lemme. *Pour tout élément $u\oplus v$ de*

$$\mathbf{H}=\left(H^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}\right)\ominus\{\Theta w\oplus\Delta w\colon w\in H^2(\mathfrak{E})\},$$

la fonction u $(\in H^2(\mathfrak{E}_*))$ est analytique sur α.

Démonstration. $u\oplus v\in\mathbf{H}$ veut dire, d'après (4. 15), que la fonction

$$f(t)=\Theta(e^{it})^*u(e^{it})+\Delta(t)v(t)\qquad(\in L^2(\mathfrak{E})) \tag{5. 3}$$

est orthogonale à $H^2(\mathfrak{E})$, c'est-à-dire

$$f(t)=e^{-it}f_1+e^{-2it}f_2+\cdots,\quad\text{où}\quad\sum_1^\infty\|f_k\|^2<\infty. \tag{5. 4}$$

En vertu de la dernière propriété, la fonction

$$\varphi(\lambda)=\lambda f_1+\lambda^2 f_2+\cdots$$

appartient à $H^2(\mathfrak{E})$, d'où il s'ensuit en vertu des Préliminaires que pour $r\to 1-0$

$$\varphi(re^{-it})\to\varphi(e^{-it})=f(t)\quad\text{p. p. (convergence forte dans }\mathfrak{E}) \tag{5. 5}$$

et

$$\int_0^{2\pi}\|\varphi(re^{-it})-f(t)\|_{\mathfrak{E}}^2\,dt\to 0. \tag{5. 6}$$

D'autre part, comme $u(\lambda) \in H^2(\mathfrak{E}_*)$, on a aussi

(5. 7) $$u(re^{it}) \to u(e^{it}) \quad \text{p. p. (convergence forte dans } \mathfrak{E}_*)$$

et

(5. 8) $$\int_0^{2\pi} \|u(re^{it}) - u(e^{it})\|^2_{\mathfrak{E}_*} dt \to 0.$$

Observons aussi que, $\Theta(e^{it})$ étant unitaire pour $e^{it} \in \alpha$, (5. 3) entraîne

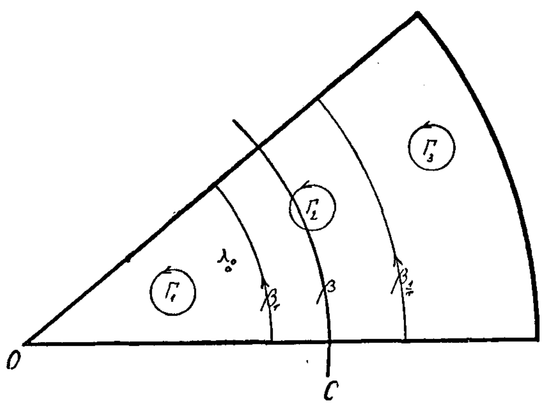
(5. 9) $$\Theta(e^{it})f(t) = u(e^{it}) \text{ pour presque tous les points } e^{it} \in \alpha.$$

Soit $\beta = \{e^{it}:\ t_1 \leqq t \leqq t_2\}$ un arc fermé contenu dans α, tel que pour $t = t_1$ et $t = t_2$ les convergences (5. 5) et (5. 7) aient lieu; il est manifeste que β peut être choisi aussi proche de α que l'on veut. Choisissons le contour Γ, indiqué par la figure en ligne grasse, de sorte que $\Theta(\lambda)$ soit analytique sur Γ ainsi que dans son intérieur Σ. Définissons la fonction $F(\lambda)$ dans la partie de Σ intérieure à C par $u(\lambda)$, et dans la partie extérieure à C par $\Theta(\lambda)\varphi(1/\lambda)$; notons que $\varphi(1/\lambda)$ est analytique dans tout l'extérieur de C. $F(\lambda)$ est continue sur le contour Γ sauf aux points d'intersection avec C; là elle admet des limites des deux côtés. Par conséquent, l'intégrale

(5. 10) $$G(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - \lambda}\, d\zeta$$

existe et fournit une fonction analytique dans Σ. Nous allons montrer que $G(\lambda) = u(\lambda)$ dans $\Sigma \cap D$, ce qui achèvera la démonstration du lemme.

Dans ce but, choisissons, pour λ_0 fixé dans D, r assez proche de 1 pour que les arcs β_r et $\beta_{1/r}$, de rayons r et $1/r$, soient situés comme l'indique la figure. Les arcs β_r et $\beta_{1/r}$ coupent Σ en trois parts dont les contours soient désignés par Γ_1, Γ_2 et Γ_3 (*voir* la figure). L'intégrale (5. 10) se décompose en la somme des intégrales sur ces contours, dont la première est égale à $u(\lambda_0)$ et la troisième à 0, puisque λ_0 est à l'intérieur de Γ_1 et à l'extérieur de Γ_3, et que $u(\lambda)$ et $\Theta(\lambda)\varphi(1/\lambda)$ sont analytiques sur les contours correspondants et dans leurs intérieurs. Quant à l'intégrale sur Γ_2, celle-ci tend



vers 0 lorsque $r \to 1$. Cela est évident pour les intégrales sur les deux segments joignant les extrémités de β_r et $\beta_{1/r}$. D'autre part, on a pour $r \to 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_r} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \lambda_0}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} \frac{re^{it}}{re^{it} - \lambda_0} u(re^{it})\, dt \to \frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{it}}{e^{it} - \lambda_0} u(e^{it})\, dt,$$

conséquence, par l'inégalité de Schwarz, de (5. 8), et

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_{1/r}} \frac{F(\zeta)}{\zeta-\lambda_0}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} \frac{r^{-1}e^{it}}{r^{-1}e^{it}-\lambda_0}\,\Theta\left(\frac{1}{r}e^{it}\right)\varphi(re^{-it})\,dt \to$$

$$\to \frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{it}}{e^{it}-\lambda_0}\,\Theta(e^{it})f(t)\,dt,$$

conséquence, toujours par l'inégalité de Schwarz, de (5. 6) et de ce que $\Theta(\lambda)$ est analytique dans $\Sigma\cup\Gamma$. Vu (5. 9), on conclut que l'intégrale en question, prise sur le contour Γ_2, tend vers 0 lorsque $r\to 1$. Donc on a $G(\lambda_0)=u(\lambda_0)$, c. q. f. d.

Cela étant, nous achevons la démonstration du théorème 4 comme il suit.

Observons que pour $u(e^{it})\oplus v(t)\in \mathbf{H}$ et ν fixé dans D, on a aussi $u_\nu(e^{it})\oplus v_\nu(t)\in\mathbf{H}$ où

(5. 11) $$u_\nu(\lambda) = \frac{1}{\lambda-\nu}[\lambda u(\lambda)-\nu u(\nu)],\quad v_\nu(t) = \frac{1}{e^{it}-\nu}e^{it}v(t);$$

de plus

(5. 12) $$(\mathbf{I}-\nu\mathbf{T}^*)(u_\nu\oplus v_\nu) = u\oplus v \qquad (\mathbf{I}=I_{\mathbf{H}}).$$

Tout cela se vérifie par un calcul simple basé sur la définition de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{T}$ dans le théorème 2, faisant usage notamment de la caractérisation (4. 15) des éléments de $\mathbf{H}$. Faisons tendre ν vers un point ε de l'arc α. Comme $u(\lambda)$ est analytique en ε d'après le lemme, et comme, d'autre part, $v(t)=0$ presque partout sur l'intervalle des t correspondant à l'arc α (en effet, $\Delta(t)=O$ presque partout sur cet intervalle, et $v\in\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$), on conclut que $u_\nu\oplus v_\nu$ converge dans $H^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$ vers une limite, que nous désignons par $u_\varepsilon\oplus v_\varepsilon$ et qui appartient donc aussi à $\mathbf{H}$; en vertu de (5. 12) on aura aussi dans ce cas limite

(5. 13) $$(\mathbf{I}-\varepsilon\mathbf{T}^*)(u_\varepsilon\oplus v_\varepsilon) = u\oplus v.$$

Comme $\mathbf{T}^*$ est complètement non-unitaire, elle n'a pas de valeur propre sur C; par conséquent $\mathbf{I}-\varepsilon\mathbf{T}^*$ admet une inverse, du moins au sens large. Mais comme, d'après (5. 13), cette inverse est définie partout dans $\mathbf{H}$, elle doit être bornée. Donc $(\mathbf{I}-\varepsilon\mathbf{T}^*)^{-1}$, et alors aussi $(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1}$, existent au sens strict. Cela prouve que tout point de α appartient à l'ensemble résolvant de $\mathbf{T}$, ce qui achève la démonstration de théorème 4.

2. Voici un exemple qui montre la maniabilité de notre modèle fonctionnel pour obtenir des contractions de certains types préscrits.

Dans la Note VII [3] on a démontré que toute contraction T de classe C_{11} est quasi similaire à une transformation unitaire (théorème 3). (Deux transformations linéaires bornées A et B sont dites quasi similaires lorsque chacune d'elles est une transformée quasi affine de l'autre, c'est-à-dire qu'il existe des transformations linéaires bornées X et Y, admettant des inverses non nécessairement bornées mais à domaines denses, telles que $AX=XB$ et $BY=YA$.)

Toutefois, cette quasi similarité ne conserve pas le spectre. Nous allons montrer notamment qu'il existe *une contraction* $T \in C_{11}$ *dont le spectre coïncide avec le disque unité fermé* $\bar{D}$.

En effet, soit A une transformation autoadjointe bornée dans un espace de Hilbert $\mathfrak{E}$, telle que $\|A\| < 1$; supposons de plus que le point 0 appartient au spectre de A, sans être une valeur propre de A. La fonction constante $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, A\}$ est alors évidemment une fonction analytique pure; soit $\mathbf{T}$ la contraction complètement non-unitaire qu'elle engendre en vertu du théorème 2. Comme A^{-1} n'existe pas au sens strict, on a d'après le théorème 4: $\sigma(T) \supset D$, donc, vu que $\sigma(T)$ est un ensemble fermé, $\sigma(T) = \bar{D}$.

Montrons que $T \in C_{\cdot 1}$. En vertu du corollaire dans § 4.7 cela revient à montrer que $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, A\}$ est une fonction extérieure, c'est-à-dire que $AH^2(\mathfrak{E})$ est dense dans $H^2(\mathfrak{E})$. Or, si $u \in H^2(\mathfrak{E})$ est orthogonale à $AH^2(\mathfrak{E})$, on a $Au(\lambda) = 0$ pour tout $|\lambda| < 1$; vu que le point 0 n'est pas une valeur propre de A, cela entraîne $u(\lambda) \equiv 0$, $u = 0$, ce qui prouve que $AH^2(\mathfrak{E})$ est dense dans $H^2(\mathfrak{E})$. Donc T appartient à $C_{\cdot 1}$.

Comme notre fonction analytique contractive pure $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, A\}$ coïncide (et même est identique) à son adjointe, on a aussi $T \in C_{1\cdot}$, donc $T \in C_{11}$.

6. Cas particuliers de contractions de classe C_0

Dans la Note VII [3] on a introduit encore une classe de contractions, notamment la classe C_0, constituée des contractions complètement non-unitaires T pour lesquelles il existe une fonction à valeurs numériques $d(\lambda) \in H^\infty$ (c'est-à-dire analytique et bornée dans D), telle que $d(\lambda) \not\equiv 0$ et $d(T) = O$. On a montré que

$$C_0 \subseteqq C_{00} \quad (cf.\ \S\, 4.7).$$

De plus, on a démontré que pour toute contraction $T \in C_0$ il existe une *fonction minimum* $m_T(\lambda)$, déterminée à un facteur constant $\varkappa$ près $(|\varkappa| = 1)$, jouissant des propriétés suivantes: (i) $m_T(\lambda)$ est une fonction intérieure [14]; (ii) $m_T(T) = O$; (iii) $m_T(\lambda)$ est un diviseur dans H^∞ de toute autre fonction $u(\lambda)$ pour laquelle $u(T) = O$. La connaissance de la fonction minimum nous a permis d'obtenir des informations importantes concernant le spectre de T et les sous-espaces invariants pour T (*voir* les théorèmes 7—9 de la Note citée, dont le théorème 7 est analogue au théorème 4 de la Note présente).

Nous allons démontrer une condition suffisante pour qu'une contraction T appartienne à la classe C_0 et, pour ces T, nous déduirons la fonction minimum en partant de la fonction caractéristique.

Théorème 5. *Soit T une contraction complètement non-unitaire, appartenant à la classe C_{00}, et telle que les indices de défaut $\mathfrak{d}_T$ et $\mathfrak{d}_{T^*}$ sont finis. On a alors $T \in C_0$. De manière plus précise, on a dans ce cas $\mathfrak{d}_T = \mathfrak{d}_{T^*} = n \geqq 1$ et*

(6. 1) $$d(T) = O \quad où \quad d(\lambda) = \det\left[\Theta_T(\lambda)\right],$$

$\left[\Theta_T(\lambda)\right]$ étant la matrice carrée attachée à $\Theta_T(\lambda)$ par le choix de deux bases orthonormales dans les espaces de défaut $\mathfrak{D}_T$ et $\mathfrak{D}_{T^*}$; de plus la fonction minimum $m_T(\lambda)$ est

---

[14]) Rappelons qu'une fonction numérique $u(\lambda)$, analytique dans $D = \{\lambda : |\lambda| \leqq 1\}$, est *intérieure*, si l'on a $|u(\lambda)| \leqq 1$ dans D et $|u(e^{it})| = 1$ pp. sur la circonférence unité (*cf.* [13] ou [15]).

égale au quotient de $d(\lambda)$ par le plus grand diviseur intérieur des mineurs d'ordre $n-1$ de $[\Theta_T(\lambda)]$ si $n>1$, et à $d(\lambda)$ si $n=1$.

Démonstration. En vertu du corollaire de § 4. 7, $T\in C_{00}$ entraîne que $\Theta_T(e^{it})$ est unitaire p. p., ce qui montre que $\mathfrak{d}_T=\mathfrak{d}_{T^*}$. Comme on a supposé que les indices de défaut sont finis, ils sont donc égaux au même nombre entier fini $n\geqq 1$. ($n=0$ veut dire que T est unitaire, ce qui contredit nos hypothèses.) La fonction caractéristique $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$ coïncide donc avec une fonction analytique contractive pure de la forme $\{E^n, E^n, \Theta(\lambda)\}$ où E^n est l'espace euclidien des vecteurs à n composantes complexes et $\Theta(\lambda)$ est une matrice carrée d'ordre n, telle que $\Theta(e^{it})$ est p. p. unitaire. Comme les assertions du théorème sont invariantes par rapport à une équivalence unitaire de T, il suffira de les démontrer pour le modèle correspondant, c'est-à-dire pour la contraction $\mathbf{T}$ de l'espace

$$\mathbf{H} = H^2(E^n)\ominus\Theta H^2(E^n),$$

définie par

$$\mathbf{T}^*u = e^{-it}(u-u(0)) \qquad (u\in\mathbf{H}).$$

Rappelons que, dans ce cas, $\mathbf{K}_+=H^2(E^n)$ et $\mathbf{T}^n u=\mathbf{P}_+(e^{int}u)$ pour $u\in\mathbf{H}$ et $n=0, 1, \ldots$ (*voir* (4. 3)); $\mathbf{P}_+$ désigne la projection de $H^2(E^n)$ sur $\mathbf{H}$. Cela entraîne pour toute fonction $h(\lambda)\in H^\infty$:

$$h(\mathbf{T})u=\mathbf{P}_+(h(e^{it})u) \qquad (u\in\mathbf{H}).$$

Pour qu'on ait $h(\mathbf{T})=\mathbf{O}$ il faut donc et il suffit que hu appartienne à $\Theta H^2(E^n)$ pour tout $u\in\mathbf{H}$. Comme hu appartient évidemment à $\Theta H^2(E^n)$ pour $u\in\Theta H^2(E^n)$, la condition obtenue veut dire que hu appartient à $\Theta H^2(E^n)$ pour *tout* $u\in H^2(E^n)$. Répétons:

(6. 2) $\qquad h(\mathbf{T})=\mathbf{O}$ *si, et seulement si* $hH^2(E^n)\subseteqq\Theta H^2(E^n)$.

Or, soit $\Theta^A(\lambda)$ la matrice algébriquement adjointe à $\Theta(\lambda)$, c'est-à-dire pour laquelle

(6. 3) $$\Theta^A(\lambda)\,\Theta(\lambda)=\Theta(\lambda)\,\Theta^A(\lambda)=d(\lambda)I$$

où $d(\lambda)$ est le déterminant de $\Theta(\lambda)$ et I est la transformation identique de E^n. $d(\lambda)$ est analytique dans D et on a $|d(e^{it})|=1$ p. p. (puisque $\Theta(e^{it})$ est unitaire p. p.) donc $d(\lambda)$ est une fonction intérieure. Si $n>1$, les éléments de la matrice $\Theta^A(\lambda)$ sont les mineurs d'ordre $n-1$ de la matrice $\Theta(\lambda)$ et par conséquent ils sont des fonctions appartenant à la classe H^∞; si $n=1$, $\Theta^A(\lambda)$ a le seul élément 1. Soit $k(\lambda)$ le plus grand diviseur commun intérieur[15]) des éléments de $\Theta^A(\lambda)$ (comme fonctions dans H^∞). On a alors $\Theta^A(\lambda)=k(\lambda)\,\Omega(\lambda)$ et $d(\lambda)=k(\lambda)m(\lambda)$ où $\Omega(\lambda)$ est une matrice dont les éléments appartiennent à H^∞ et n'ont pas de diviseur commun intérieur non-constant, et $m(\lambda)$ est une fonction intérieure. (Dans le cas $n=1$ on a évidemment $k(\lambda)=1$, donc $m(\lambda)=d(\lambda)$). De (6. 3) on obtient

(6. 4) $$\Omega(\lambda)\Theta(\lambda)=\Theta(\lambda)\Omega(\lambda)=m(\lambda)I,$$

d'où

$$mH^2(E^n)=\Theta\Omega H^2(E^n)\subseteqq\Theta H^2(E^n);$$

ainsi, en vertu de (5. 15), on a $m(\mathbf{T})=\mathbf{O}$, donc aussi $d(\mathbf{T})=k(\mathbf{T})m(\mathbf{T})=\mathbf{O}$.

---

[15]) *Cf.* [13].

Par conséquent, $\mathbf{T}$ appartient à la classe C_0. Soit $m_{\mathbf{T}}(\lambda)$ sa fonction minimum; celle-ci doit être un diviseur de $m(\lambda)$ et par conséquent $p(\lambda)=m(\lambda)/m_{\mathbf{T}}(\lambda)$ est aussi une fonction intérieure. Puisque $m_{\mathbf{T}}(\mathbf{T})=\mathbf{O}$, on obtient de (6. 2) que $m_{\mathbf{T}}H^2(E^n)\subseteqq \Theta H^2(E^n)$, d'où, vu aussi (6. 4), il résulte

$$m_{\mathbf{T}}\Omega H^2(E^n)\subseteqq \Omega\Theta H^2(E^n)=mH^2(E^n)$$

et par conséquent

$$\Omega H^2(E^n)\subseteqq pH^2(E^n). \tag{6. 5}$$

Désignons par e_j $(k=1, \dots, n)$ le vecteur à n composantes, dont toutes sont égales à 0 sauf la j-ième qui est égale à 1. On peut considérer e_j comme une fonction constante appartenant à $H^2(E^n)$, donc, en vertu de (6. 5), il existe des fonctions $u_j\in H^2(E^n)$ de sorte que $\Omega(\lambda)e_j=p(\lambda)u_j(\lambda)$, donc

$$\Omega_{ij}(\lambda)=p(\lambda)u_{ji}(\lambda) \qquad (i,j=1, \dots, n),$$

Ω_{ij} désignant les éléments de la matrice Ω et $u_{j1}, \dots, u_{jn}$ étant les composantes du vecteur u_j, où $\Omega_{ij}\in H^\infty$ et $u_{ji}\in H^2$. Par suite, si nous désignons par Ω'_{ij}, u'_{ji} les facteurs intérieurs correspondants, nous avons

$$\Omega'_{ij}(\lambda)=p(\lambda)u'_{ji}(\lambda)$$

pour tous les i,j tels que $\Omega_{ij}(\lambda)\not\equiv 0$. Ainsi, p est un diviseur commun intérieur de tous les Ω_{ij}, d'où il résulte que p est une fonction constante, de module 1, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Dans le cas $n=1$, $m_{\mathbf{T}}(\lambda)$ coïncide avec $d(\lambda)$, donc avec $\Theta_{\mathbf{T}}(\lambda)$. Comme la fonction caractéristique d'une contraction complètement non-unitaire T, considérée à coïncidence près, détermine T à une équivalence unitaire près, il s'ensuit que *les contractions complètement non-unitaires* $T\in C_{00}$, *ayant les indices de défaut* 1, *sont déterminées par leurs fonctions minimum à une équivalence unitaire près*.

Or, on a démontré dans la Note VII, § 4. 4, que deux contractions de classe C_0, dont l'une est une transformée quasi affine de l'autre[16]), ont les mêmes fonctions minimum. Donc on a le

Corollaire. *Deux contractions de classe* C_{00} *et aux indices de défaut* 1, *dont l'une est une transformée quasi affine de l'autre, sont unitairement équivalentes.*

7. Le type spectral de la dilatation unitaire minimum

1. Notre théorie permet de résoudre complètement le problème de déterminer le type spectral de la dilatation unitaire minimum U d'une contraction complètement non-unitaire T quelconque.

---

[16]) Rappelons que si, pour $i=1, 2$, S_i est une transformation linéaire bornée de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}_i$ en soi-même, nous disons que S_2 est une *transformée quasi affine* de S_1 lorsqu'il existe une transformation linéaire bornée X de $\mathfrak{H}_2$ dans $\mathfrak{H}_1$, admettant une inverse (au sens large), à domaine dense dans $\mathfrak{H}_1$, de sorte qu'on ait $S_2=X^{-1}S_1X$.

Rappelons que dans [1], théorème 3, on a démontré que, sauf peut-être le cas où les indices de défaut de T sont finis tous les deux, U est une translation bilatérale dont la multiplicité spectrale est égale à $\mathfrak{d}_{\max}=\max\{\mathfrak{d}_T, \mathfrak{d}_{T^*}\}$: en d'autres termes, U est unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans une somme orthogonale de $\mathfrak{d}_{\max}$ répliques de l'espace $L^2(0, 2\pi)$ des fonctions à valeurs numériques $x(t)$.

Pour le cas qui reste, on va démontrer la caractérisation suivante où, en parlant d'un espace $L^2(S)$, $S\subseteqq(0, 2\pi)$, on sous-entendra toujours qu'il est formé par rapport à la mesure normée $\frac{dt}{2\pi}$.

Théorème 6. *Soit T une contraction complètement non-unitaire, dont les indices de défaut sont finis: $\mathfrak{d}_T=n$, $\mathfrak{d}_{T^*}=m$. La dilatation unitaire minimum U de T est alors unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans l'espace*

$$L^2(M_1)\oplus\ldots\oplus L^2(M_m)\oplus L^2(N_1)\oplus\ldots\oplus L^2(N_n) \tag{7.1}$$

où $M_1=\ldots=M_m=(0, 2\pi)$ et

$$N_k=\{t\colon\ t\in(0, 2\pi),\ r(t)\geqq k\}\qquad(k=1, \ldots, n), \tag{7.2}$$

$r(t)$ désignant le rang de l'opérateur

$$\varDelta_T(t)=[I-\Theta_T(e^{it})^*\,\Theta_T(e^{it})]^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Puisque les dilatations unitaires minimum de deux contractions unitairement équivalentes sont aussi unitairement équivalentes, il suffit de considérer notre modèle fonctionnel $\mathbf{T}$ aux indices de défaut donnés n, m. Soit donc $\{E^n, E^m, \Theta(\lambda)\}$[17]) une fonction analytique contractive pure donnée et soit $\mathbf{T}$ la contraction qu'elle engendre au sens du théorème 2. Comme la fonction caractéristique de $\mathbf{T}$ coïncide avec la fonction analytique contractive donnée, $\varDelta_{\mathbf{T}}(t)$ est unitairement équivalente à $\varDelta(t)=[I-\Theta(e^{it})^*\Theta(e^{it})]^{\frac{1}{2}}$ (par une transformation unitaire constante), donc on a

$$r(t)=\text{rang}\ \varDelta_{\mathbf{T}}(t)=\text{rang}\ \varDelta(t)\ \text{ pour tout } t.$$

En vertu du théorème 2, la dilatation unitaire minimum $\mathbf{U}$ de $\mathbf{T}$ est égale à la multiplication par e^{it} dans l'espace

$$\mathbf{K}=L^2(E^m)\oplus\overline{\varDelta L^2(E^n)}.$$

Or, il est manifeste que $L^2(E^m)$ est la somme orthogonale de m répliques de l'espace $L^2(0, 2\pi)$ des fonctions numériques, et cela de sorte qu'à la multiplication par e^{it} dans $L^2(E^m)$ il correspond la multiplication par e^{it} dans chacun des espaces composants $L^2(0, 2\pi)$.

Passons à étudier la partie de $\mathbf{U}$ dans $\overline{\varDelta L^2(E^n)}$.

$\varDelta(t)$ étant, pour toute valeur fixée t pour laquelle elle a un sens, une transformation autoadjointe de E^n, bornée par 0 et 1, il existe dans E^n un système ortho-

[17]) Rappelons que nous avons désigné par E^d l'espace euclidien des vecteurs à d composantes complexes.

normal complet $\{\psi_k(t)\}_1^{r}$ de vecteurs propres de $\Delta(t)$, notamment tel que

$$\Delta(t)\psi_k(t)=\delta_k(t)\psi_k(t) \qquad (k=1, \ldots, n),$$

les valeurs propres étant arrangées en ordre non-croissant:

$$1\geqq\delta_1(t)\geqq\delta_2(t)\geqq\ldots\delta_n(t)\geqq 0.$$

Comme $\Delta(t)f$ est, pour tout $f\in E^n$, fonction mesurable de t, les valeurs propres $\delta_k(t)$ seront aussi des fonctions mesurables de t et, puisqu'on a évidemment

$$\{t:\ t\in(0,2\pi),\ r(t)\geqq k\} = \{t:\ t\in(0,2\pi),\ \delta_k(t)>0\},$$

les ensembles N_k définis dans le théorème seront aussi mesurables; de plus, les vecteurs propres $\psi_k(t)$ peuvent aussi être choisis en fonctions mesurables de t. [18])

En posant, pour $v\in L^2(E^n)$,

$$x_k(t)=(v(t),\ \psi_k(t))_{E^n},$$

on aura

$$\Delta(t)v(t) = \Delta(t)\sum_1^n x_k(t)\psi_k(t) = \sum_1^n x_k(t)\delta_k(t)\psi_k(t),$$

d'où
$$\|\Delta(t)v(t)\|_{E^n}^2 = \sum_1^n |x_k(t)\delta_k(t)|^2$$

et
$$\|\Delta v\|_{L^2(E^n)}^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_1^n\int_0^{2\pi}|x_k(t)\delta_k(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_1^n\int_{N_k}|x_k(t)\delta_k(t)|^2\,dt,$$

ce qui montre que, par la correspondance

$$\Delta v\to\{x_1(t)\delta_1(t),\ldots,x_n(t)\delta_n(t)\}, \tag{7. 3}$$

$\Delta L^2(E^n)$ est appliqué isométriquement dans l'espace

$$L^2(N_1)\oplus\ldots\oplus L^2(N_n). \tag{7. 4}$$

En vertu de la relation évidente

$$(e^{it}v(t),\ \psi_k(t))_{E^n}=e^{it}x_k(t),$$

il correspondra à la multiplication par e^{it} dans $\Delta L^2(E^n)$ la multiplication par e^{it} dans chacun des espaces $L^2(N_k)$.

Choisissons en particulier, pour k fixé, $v(t)=\varepsilon(t)\psi_k(t)$ où $\varepsilon(t)$ est une fonction numérique mesurable bornée, d'ailleurs quelconque; on aura $v\in L^2(E^n)$ et le vecteur qui correspond à Δv par l'application (7. 3) aura sa k-ième composante égale à $\varepsilon(t)\delta_k(t)$, et les autres égales à 0. Comme les fonctions de type $\varepsilon(t)\delta_k(t)$ forment

[18]) La mesurabilité de la plus grande valeur propre $\delta_1(t)$ en fonction de t est immédiate en vertu de la formule $\delta_1(t)=\sup\,(\Delta(t)f,f)$ où f parcourt une suite dense sur la sphere unité de E^n; pour les valeurs propres $\delta_k(t)$ de rang $k>1$ on peut faire usage du théorème „minimax". Le choix mesurable du système orthonormal des vecteurs propres exige plus de travail, on peut faire ici usage des mineurs de la matrice de $\Delta(t)$.

évidemment un ensemble dense dans $L^2(N_k)$, on conclut que la correspondance (7. 3), prolongée par continuité à $\overline{\Delta L^2(E^n)}$, applique cet espace isométriquement *sur* l'espace (7. 4). L'assertion concernant la multiplication par e^{it} reste valable par continuité lors de ce prolongement.

Ainsi, Théorème 6 est démontré.

2. Il est manifeste que $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots \supseteq N_n$. Il peut arriver que le vrai maximum $r_{\max}$ de la fonction $r(t)$ n'atteint pas la valeur n; dans ce cas $L^2(N_k)$ se réduit pour $k > r_{\max}$ à l'espace banal $\{0\}$ et peut être écarté dans (7. 1).

L'asymétrie dans (7. 1) des rôles des deux indices de défaut n'est pas essentielle. En effet, si l'on change T pour T^*, on obtient que U^* est unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans un espace de type (7. 1), mais avec les rôles de n et m intervertis; il est alors de même pour U (il n'y a qu'à remplacer les ensembles en question par leurs images lors de la transformation $t \to 2\pi - t$).[19])

Donc, Théorème 6 a le

Corollaire. *La dilatation unitaire minimum U d'une contraction complètement non-unitaire T à indices de défaut finis $\mathfrak{d}_T = n$, $\mathfrak{d}_{T^*} = m$, est unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans un espace*

$$L^2(P_1) \oplus L^2(P_2) \oplus \ldots \oplus L^2(P_{n+m})$$

où $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \ldots \supseteq P_{n+m}$ sont des sous-ensembles mesurables de $(0, 2\pi)$, *dont du moins les premiers $\nu = \max\{n, m\}$ sont de mesure complète dans* $(0, 2\pi)$.

3. La question se pose si, inversement, l'opérateur de multiplication par e^{i} dans tout espace de ce type est la dilatation unitaire minimum d'une contraction complètement non-unitaire? La réponse affirmative à cette question est donnée par e suivant

Théorème 7. *Soient n, m deux entiers $\geqq 0$ tels que $\nu = \max\{n, m\} \geqq 1$. Soient de plus*

$$P_1 \supseteq P_2 \supseteq \ldots \supseteq P_{n+m}$$

des sous-ensembles mesurables de $(0, 2\pi)$, *dont du moins les premiers ν sont de mesure complète dans* $(0, 2\pi)$. *Il existe alors une contraction complètement non-unitaire T telle que $\mathfrak{d}_T = n$, $\mathfrak{d}_{T^*} = m$ et dont la dilatation unitaire minimum U est unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans l'espace*

$$L^2(P_1) \oplus L^2(P_2) \oplus \ldots \oplus L^2(P_{n+m}).$$

[19]) Dans la somme (7. 1), le nombre des termes différents de $\{0\}$ est égal à $m + r_{\max}$. L'asymétrie des rôles de n et m est seulement apparente, ce qui s'ensuit de manière directe de la relation suivante: Si Θ est une contraction de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{M}$ (où $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}$ sont des espaces de Hilbert de dimension finie), on a

$$\dim \mathfrak{M} + \dim \overline{(I - \Theta^*\Theta)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{N}} = \dim \mathfrak{N} + \dim \overline{(I - \Theta\Theta^*)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{M}}.$$

En effet, le premier membre est égal à $\dim \mathfrak{M} + \dim \mathfrak{N} - \dim \mathfrak{N}_0$ et le second à $\dim \mathfrak{N} + \dim \mathfrak{M} - \dim \mathfrak{M}_0$ où

$$\mathfrak{N}_0 = \{h : h \in \mathfrak{N}, (I - \Theta^*\Theta)h = 0\}, \quad \mathfrak{M}_0 = \{h : h \in \mathfrak{M}, (I - \Theta\Theta^*)h = 0\};$$

or, $\dim \mathfrak{N}_0 = \dim \mathfrak{M}_0$, car Θ applique $\mathfrak{N}_0$ isométriquement sur $\mathfrak{M}_0$.

(Nous admettons aussi que quelques des P_i puissent être de mesure 0; dans ce cas les espaces correspondants $L^2(P_i)=\{0\}$ peuvent être écartés.)

Démonstration. On supposera d'abord que $n \leqq m$.

Le cas où $n=0$ ($\nu=m=n+m$) est simple. En effet, dans ce cas l'opérateur de multiplication par e^{it} en question est une translation bilatérale, de multiplicité égale à ν, qui est la dilatation unitaire minimum d'une translation unilatérale de même multiplicité.

Dans le cas où $1 \leqq n \leqq m$, envisageons la fonction matricielle

$$\Theta(\lambda)=(\Theta_{jk}(\lambda)) \qquad (j=1, \ldots, m;\ k=1, \ldots, n;\ |\lambda|<1)$$

où $\Theta_{jk}(\lambda)=0$ pour $j \neq k$ et

$$\Theta_{kk}(\lambda)=\lambda u_k(\lambda) \qquad (k=1, \ldots, n),$$

$u_k(\lambda)$ étant une fonction, analytique et bornée dans le cercle unité, telle que

$$|u_k(e^{it})|^2 = 1-\tfrac{1}{2}\chi_k(t) \qquad \text{p. p.}$$

où $\chi_k(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble P_{m+k}. L'existence de telle fonction $u_k(\lambda)$ est assurée par le fait que $\log\left[1-\frac{1}{2}\chi_k(t)\right]$ est intégrable (théorème de SZEGŐ; *cf.* [15], p. 53). Comme on a

$$|\Theta_{kk}(\lambda)| \leqq |u_k(\lambda)| \leqq 1 \ \text{ et } \ \Theta_{kk}(0)=0 \qquad (k=1, \ldots, n),$$

$\{E^n, E^m, \Theta(\lambda)\}$ sera une fonction analytique contractive pure.

La matrice $\Delta(t) = [I-\Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it})]^{\frac{1}{2}}$ est d'ordre n et de forme diagonale, ses éléments dans la diagonale étant

$$\Delta_{kk}(t) = \left[1-\left(1-\frac{1}{2}\chi_k(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_k(t) \qquad (k=1, \ldots, n).$$

Donc on a

$$\operatorname{rang} \Delta(t) = \sum_{k=1}^{n} \chi_k(t).$$

Comme les ensembles P_{m+k} ($k=1, \ldots, n$) vont en décroissant, l'inégalité $\operatorname{rang} \Delta(t) \geqq k$ est donc valable précisément (à un ensemble de mesure 0 près) pour les points t de l'ensemble P_{m+k}.

Soit $\mathbf{T}$ la contraction complètement non-unitaire, engendrée par la fonction analytique contractive pure $\{E^n, E^m, \Theta(\lambda)\}$ au sens du théorème 2. En appliquant le théorème 7 on obtient que la dilatation unitaire minimum de $\mathbf{T}$ est unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans l'espace

$$\left[\bigoplus_1^m L^2(0, 2\pi)\right] \oplus L^2(P_{m+1}) \oplus \ldots \oplus L^2(P_{m+n}).$$

Vu que, pour $i \leqq m$, P_i est de mesure complète et par conséquent $L^2(P_i)=L^2(0, 2\pi)$, Théorème 7 est prouvé dans le cas $n \leqq m$.

Dans le cas $m<n$ on construit d'abord une contraction complètement non-unitaire S telle que $\mathfrak{d}_S=m$ et $\mathfrak{d}_{S^*}=n$ et dont la dilatation unitaire minimum est unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans l'espace

$$L^2(P_1') \oplus L^2(P_2') \oplus \ldots \oplus L^2(P_{m+n}')$$

où P_t' désigne l'image de l'ensemble P_t par rapport au point $t=\pi$; telle contraction S existe d'après ce que nous venons de démontrer. $T=S^*$ vérifie alors les assertions du théorème.

Ainsi, Théorème 7 se trouve complètement démontré.

Remarques. Les Théorèmes 6 et 7 (pour le cas des indices de défaut finis) et le Théorème 3 de [1] (pour le cas des indices de défaut dont du moins un est infini) donnent une solution complète du problème du type spectral des dilatations unitaires minimum des contractions complètement non-unitaires. Toutefois il faut remarquer que la contraction T construite au cours de la démonstration du Théorème 7 est, en général, réductible. Il est naturel de se demander si dans Théorème 7 T peut être prise irréductible. Nous n'insistons plus sur ce sujet.

4. Dans [1] on a indiqué un exemple d'une contraction complètement non-unitaire dont la dilatation minimum *n'est pas* une translation bilatérale. Notre Théorème 7 fournit toute une classe de pareils exemples, il n'y a qu'à choisir quelques des ensembles P_j tels que leurs complémentaires dans $(0, 2\pi)$ soient de mesure positive. Voici un autre exemple, basé sur le Théorème 6, mais qui est entièrement élémentaire.

Envisageons une fonction numérique $w(\lambda)$, analytique dans D et telle que $|w(\lambda)| \leqq 1$ dans D et que $|w(0)| < 1$. Soit T la contraction complètement non-unitaire engendrée par la fonction analytique contractive pure $\{E^1, E^1, w(\lambda)\}$. Comme T a les indices de défaut 1,1, sa dilatation unitaire minimum sera, en vertu du Théorème 6, unitairement équivalente à la multiplication par e^{it} dans l'espace $L^2(0, 2\pi) \oplus \oplus L^2(N)$ où $N = \{t\colon\ t \in (0, 2\pi),\ 1 - |w(e^{it})|^2 > 0\}$. Soit en particulier $w(\lambda)$ la fonction qui fournit la représentation conforme de $D = \{\lambda\colon |\lambda| < 1\}$ sur le demi-cercle $\{\lambda\colon |\lambda| < 1, \operatorname{Im} \lambda > 0\}$; on aura alors $0 < \operatorname{mes} N < 2\pi$. La multiplication par e^{it} dans $L^2(0, 2\pi)$ est une translation bilatérale simple, tandis que dans $L^2(N)$ elle ne l'est pas, par conséquent elle ne peut être une translation bilatérale dans $L^2(0, 2\pi) \oplus \oplus L^2(N)$ non plus (*cf.* [1], lemme 2).

Ouvrages cités

[1] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V. Translations bilatérales, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 106—129.

[2] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI. Calcul fonctionnel, *ibidem*, **23** (1962), 130—167.

[3] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VII. Triangulations canoniques. Fonction minimum, *ibidem*, **25** (1964), 12—37.

[4] ——— Modèles fonctionnels des contractions de l'espace de Hilbert. La fonction caractéristique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3236—3238.

[5] ——— Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification des contractions de l'espace de Hilbert, *ibidem*, **256** (1963), 3413—3415.

[6] ——— Une caractérisation des sous-espaces invariants pour une contraction de l'espace de Hilbert, *ibidem*, **258** (1964), 3426—3429.

[6] М. С. Лившиц, Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, *Матем. Сворник*, **19 (61)** (1946), 239—260.

[7] ——— Изометрические операторы с равными дефектными числами, квазиунитарные операторы, *Матем. Сворник*, **26 (68)** (1950), 247—264.

[8] М. С. Лившиц—В. П. Потапов, Теорема умножения характеристических матриц-функций, *Доклады Акад. Наук СССР*, **72** (1950), 625—628.

[9] Ю. Л. Шмульян, Операторы с вырожденной характеристической функцией, *Доклады Акад. Наук СССР*, **93** (1953), 985—988.
[10] В. Т. Поляцкий, О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов, *Доклады Акад. Наук СССР*, **113** (1957), 756—759.
[11] ——— Приведение к треугольному виду некоторых операторов (autoréférat **d'une** dissertation, Kiev, 1960).
[12] М. С. Бродский—М. С. Лившиц, Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *Успехи Матем. Наук*, XIII, **1 (79)** (1958), 3—85.
[13] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, **81** (1949), 239—255.
[14] E. Hille—R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups* (Providence, R. I., 1957).
[15] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions* (Englewood Cliffs, N. J., 1962).

(Reçu le 23 avril, sous forme revue le 27 décembre 1963)

Remarks on n-th roots of operators [1])

By G. LUMER in Grenoble (France)

Some years ago, P. HALMOS and the author showed, by means of general results on semi-continuity of spectral fine-structure, that the set of operators (i. e. bounded linear transformations) on a separable Hilbert space, which are invertible and fail to possess a root of order n ($n=2, 3, \ldots$), has interior points in the uniform operator topology; [2]. Recently B. SZ.-NAGY has asked us if one could obtain quantitative results of that type, i. e. give estimates on how large can be the radius of an open sphere (in the operator norm) consisting of operators like mentioned above, as compared with the norm of the center. A similar question also arises without invertibility requirements. In either case, it is clear that an open sphere centered at T, and whose points have no n-th roots, must have a radius $\leqq \|T\|$; it is natural to ask (for both cases separately) if $\|T\|$ is actually reached for some T. The purpose of this note is to extract, by slightly changing the approach, such quantitative information implicitely contained in the methods of [2], and to answer at least in part, the questions stated above.

For a quantitative analogue of theorem 6 in [2], one must proceed in a slightly different manner, since the use of lemma 2, theorem 3, invoked there, would cut the sharpness of the estimates. Let H be a complex Hilbert space, $B(H)$ the algebra of all operators on H. An adequate gauge for our purpose is defined as follows: For $T \in B(H)$, λ complex, we set $N(\lambda, T) = \inf\{\|(T-\lambda I)x\|: \|x\|=1\}$, where I denotes the identity operator. As in lemma 1, [2], one sees easily that $N(\lambda, T)$ is a lower semi-continuous function of λ, for fixed T. If K is any compact subset of the complex plane, we set $N(K, T)$ for the minimum of $N(\lambda, T)$ on K. We denote by $\Sigma(T)$, $\Pi(T)$, the spectrum, and approximate point spectrum of T; and by $m(\lambda, T)$ the multiplicity function corresponding to T ([2], p. 592).

Theorem. *Suppose $T \in B(H)$, and K is a compact subset of $\Sigma(T) - \Pi(T)$ such that $0 \notin K$, $m(\lambda, T) = 1$ for $\lambda \in K$, $\sqrt{K}$ is a connected set (or, equivalently, 0 does not belong to the unbounded component of the complement of K). Then $S \in B(H)$ fails to possess a root of order n ($n=2, 3, \ldots$) whenever $\|S-T\| < N(K, T)$.*

Proof. Suppose $S \in B(H)$, $\|S-T\| < N(K, T)$, $\lambda \in K$. Since $\|(S-\lambda I) - (T-\lambda I)\| = \|S-T\| < N(K, T)$, it follows from lemma 5, [2], that $R^{\perp}(S-\lambda I) \cap R(T-\lambda I) = R(S-\lambda I) \cap R^{\perp}(T-\lambda I) = 0$, where "$R(\,)$" denotes "range of".

[1]) Supported by National Science Foundation Grant G 24502.

Again, from $\|(S-\lambda I)-(T-\lambda I)\|<N(K, T)$, and since by definition $\|(T-\lambda I)x\| \geqq N(K, T)\;\|x\|$, we have as in lemma 1, [2], that $N(K, S)>0$. This implies, on one hand, that the above ranges are closed, so that we may conclude $m(\lambda, S)=1$, for $\lambda \in K$. On the other hand, we conclude that K is in the complement of $\Pi(S)$; but in turn, $m(\lambda, S)=1$, for $\lambda \in K$, implies in particular that $\lambda \in \Sigma(S)$; thus we have $K \subset \Sigma(S)-\Pi(S)$. The rest follows from lemma 6, [2], and remarks (b), p. 149, [1].

Notice that at difference from theorem 6, [2], mentioned earlier, in the previous theorem nothing is said (nor can be said under the present assumptions, in general), about the invertibility of the operators S, whether T itself be invertible or not.

Corollary 1. *If H is a separable Hilbert space, there exists an operator U on H (non-invertible, and) such that in the open sphere centered at U, of radius $\|U\|$, every operator fails to possess a root of order n $(n=2, 3, \ldots)$.*

Proof. Let $x_1, x_2, \ldots$ be an orthonormal basis for H. Let U be the so-called shift operator, which sends x_n into x_{n+1}, for $n=1, 2, \ldots$ The adjoint operator U^* sends x_{n+1} into x_n, for $n=1, 2, \ldots$, and x_1 into 0. Direct computation readily shows that for every complex λ, with $|\lambda|<1$, U^* admits exactly one eigenvector (within scalar multiples), so that $m(\lambda, U)=1$, for $|\lambda|<1$. Again direct computation shows that $N(\lambda, U) \geqq 1-|\lambda|$, for $\lambda \in \Sigma(U)$. Let now S denote an operator such that $\|S-U\|<1$, and let K denote the circumpherence of a circle centered at 0, of radius less than $1-\|S-U\|$. Then clearly $N(K, U)>\|S-U\|$, and by the previous theorem, S has no n-th root. Since $\|U\|=1$, all is proved.

If we require invertibility, the answer is incomplete:

Corollary 2. *Suppose H is a separable Hilbert space. Then for any $R<\frac{1}{2}\sqrt{2}$, there exists an invertible operator A_1 on H, of norm 1, center of a sphere of radius R, every point of which fails to possess a root of order n $(n=2, 3, \ldots)$. Again there exists an invertible operator A_2 on H, of norm 1, center of an open sphere of radius $(2\sqrt{2}+1)^{-1}$, every point of which is invertible and fails to possess a root of order n $(n=2, 3, \ldots)$.*

Proof. Let A be an analytic position operator, as defined in [1], p. 143, corresponding to a bounded domain of the complex plane; and let C denote the boundary of D. From lemma 3, [1], follows that for $\lambda \in D$, $N(\lambda, A)=d(\lambda, C)/\sqrt{2}$, where "$d(,)$" denotes "distance between". From now on D shall be an annulus centered at 0, with radii 1 and r, $0<r<1$. If K is the circumpherence of the circle centered at 0, of radius $(1+r)/2$, then $N(K, A)=(1-r)/2\sqrt{2}$. On the other hand one checks easily that $\|A^{-1}\| \leqq 1/r$, so that $\|S-A\|<r \leqq (\|A^{-1}\|)^{-1}$, insures the invertibility of S, (for instance, [3], p. 118). Then an operator having the properties required for A_1, A_2, can clearly be obtained by choosing r sufficiently small, $=(2\sqrt{2}+1)^{-1}$. [2])

At this point, several remarks seem pertinent. Let B denote an arbitrary complex Banach algebra with identity. Denote by G the group of all invertible elements of B; by F the set of all elements of B that fail to possess a root of order n $(n=2, 3, \ldots)$.

---

[2]) We have used the fact that $\|A^{-1}\| \leqq 1/r$. Actually equality holds, as is seen at once from $\Sigma(A)=$closure of D (see [1]), and the spectral mapping theorem which yields $1/r=$spectral radius of $A^{-1} \leqq \|A^{-1}\|$, (of course one has also $\|A\|=1$), so that $(2\sqrt{2}+1)^{-1}$ is actually the best value the above procedure will yield.

One can, in this setting, consider questions analoguous to those just discussed for the case $B=B(H)$, and since the case of commutative Banach algebras is particularly easy to handle, gain some insight on what may be true for $B(H)$. It is easy to verify, by considering 2×2 matrix algebras, that in general (whether commutativity is assumed or not) F is neither open nor closed in B. However, if B is commutative $F_1 = F\cap G$ is open in B, and is moreover the union of connected components of G (which is open). For suppose $a\in G$, then the connected component of G containing a is of the form aG_0, where G_0 is the connected component of G that contains the identity (see [3], p. 119); furthermore, every element of G_0 possesses a logarithm, hence n-th roots (see [3], p. 286); and it follows that a fails to possess n-th roots if and only if every element of the open component aG_0 does. Noticing that for $B(H)$ the only examples of elements in F_1 we know, are interior points of F_1 it is natural to ask whether F_1 is open in this case also.

We observe, finally, that it is easy to construct a commutative B, for which F_1 contains elements of norm 1, centers of maximal open spheres consisting of regular elements without n-th roots, whose radii take on any preassigned value >0, and $\leqq 1$. In fact, let X denote the compact space formed by the circumpherence of the unit disk in the complex plane, and $C(X)$ the algebra of all complex continuous functions on X, with the usual "sup"-norm. Let a_s be an element of $C(X)$ mapping X into a simply closed Jordan curve surrounding the origin, so chosen that $\|a_s\|=1$, and that the distance from the origin to $a_s(X)$, be s. Then, winding number considerations show at once that a_s can have no n-th root, while homotopy considerations show that the same must hold for all $b\in C(X)$, such that $\|a_s-b\|<s$. On the other hand there exists λ complex, $|\lambda|$ as close to s as desired, such that $(\lambda 1+a_s)(X)$ does not surround the origin, hence $\lambda 1+a_s$ having n-th roots. Thus a_s is the center of a maximal sphere as described above, of radius s. The similar question for $B(H)$ remains open.

References

[1] P. R. Halmos, G. Lumer, and J. J. Schäffer, Square roots of operators, *Proc. Amer. Math Soc.*, 4 (1953), 142—149.

[2] P. R. Halmos and G. Lumer, Square roots of operators. II, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 589—595.

[3] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups* (Providence, 1957).

UNIVERSITY OF WASHINGTON
AND
UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

(*Received January 30, 1963*)

Spectral operators, hermitian operators, and bounded groups[1])

By G. LUMER in Grenoble (France)

The theory of spectral operators on a Banach space, developped by N. DUNFORD and others, extends the classical spectral theory of hermitian and normal operators on a Hilbert space. In [12], on the other hand, there was introduced a notion of semi-inner-product compatible with any Banach space structure, that leads in particular to a natural concept of hermitian operator on a Banach space[2]). Because of general characteristics of both developments it would seem natural to think that there exists a strong connection between spectral and hermitian operators in general. That this is the case, was proved recently by E. BERKSON [3], who kindly communicated his results to us. In particular, he shows that any spectral operator of scalar type, [6], is of the form $R+iJ$, where $RJ=JR$, and there exists an equivalent renorming of the underlying space such that R and J become hermitian. The results of [3], satisfactory from a descriptive point of view, have however the inconvenient of involving a renorming, as just described. Our first step, in part *I*, is to derive a necessary and sufficient condition, in terms of the boundedness of certain associated groups, for a commutative family of operators to be "hermitian-equivalent", in the sense that there exists an equivalent renorming of the underlying space under which all members of the given family become hermitian. The result shows in particular that if one starts with a Hilbert space, and a commuting, hermitian-equivalent, family of operators, then an appropriate renorming can be found which gives again a Hilbert space, thus hermitian operators in the classical sense. One also derives easily that given a finite collection of families of operators on a same Banach space (everything commuting), that are separately hermitian-equivalent, then they are jointly (i. e., their union is) hermitian-equivalent. An immediate consequence is an extension (also a short new proof) of a result of WERMER on commuting spectral measures. We have occasion to use this extension, in part III.

Our main results are in part II, where we discuss infinite collections of commuting families (in particular single elements), which are separately hermitian-equivalent. Here a necessary and sufficient condition is given, in terms of closure properties, for such a collection to be hermitian-equivalent. We derive, in particular, that if the uniformly closed algebra generated by a boolean algebra of projections on a reflexive Banach space, consists of spectral operators of scalar type, then the boolean

1) This research was supported by National Science Foundation Grant G 24502.

2) This concept turns out to coincide with one introduced differently in [16]. See [12], p. 39.

algebra is uniformly bounded. Thus, one obtains converses of well-known results of DUNFORD. This is of some general interest as it supports the idea that the quite restrictive hypothesis of uniform boundedness made by DUNFORD on the admissible spectral measures, is necessary for a satisfactory theory along his lines.

Remarks and counter-examples are collected in part III. The latter are given to clarify the situation concerning the hypothesis of [3]. They show for instance that the characterization of spectral operators of scalar type, proved for reflexive spaces, really fails if reflexivity is omitted. It is also seen that, even on reflexive spaces, products of commuting hermitian operators are not necessarily hermitian.

Terminology and notations. In what follows, the term Banach space always means complex Banach space. Operator means bounded linear transformation. If T is an operator on a Banach space, we put

$$\exp T = \sum_{n=0}^{\infty} T^n/n!.$$

Basic definitions, and properties concerning semi-inner-product spaces and hermitian operators, are reviewed in the next section, in order to make the paper more self-contained. The reader familiar with these notions may conseqently omit the first section of I.[3])

I. Hermitian operators and bounded groups

1. Hermitian operators on a Banach space. We collect here basic definitions and facts, almost all taken from [12] and [13].

Definition 1. A complex vector space X is called a semi-inner-product space, if to each pair of vectors $x, y \in X$ corresponds a complex number $[x, y]$, called their semi-inner-product, and the following holds:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &[x, y] \text{ is linear in } x\\ &[x, x] \text{ is real} > 0, \text{ for } x \neq 0\\ &|[x, y]|^2 \leqq [x, x]\,[y, y]. \end{aligned}$$

A semi-inner-product space can always be normed, setting $\|x\| = ([x, x])^{\frac{1}{2}}$, [12]. Conversely it is shown in [12] that every normed space X admits at least one (in general infinitely many) semi-inner-product structures compatible with its norm, in the sense that $\|x\|^2 = [x, x]$. If X is a Hilbert space, the usual inner-product is the only semi-inner-product compatible with the norm of X.

If an operator T on a semi-inner-product space X (T being bounded in the sense of the induced norm) has the property that $[Tx, x]$ is real valued for all $x \in X$, then this situation is unchanged by replacing the given semi-inner-product by another one inducing the same norm, [12] p. 37. Hence no ambiguity is introduced in the following

[3]) Reference [8] may be used for general functional analysis results and terminology used below without explanation.

Definition 2. An operator T on a Banach space is called hermitian if $[Tx, x]$ is real valued for all $x \in X$, and some semi-inner-product on X compatible with its norm.

If X is a Hilbert space, this coincides, naturally, with the usual concept. It is shown that an operator T is hermitian if and only if $\|I+itT\| = 1+o(t)$, t real, where I denotes the identity operator, [12]. We also mention the case of unbounded hermitian transformations, although we shall later deal; essentially, with bounded transformations only.

Definition 3. A linear transformation T, with domain D, on a semi-inner-product space X, is called hermitian if $[Tx, x]$ is real valued for all $x \in D$.

Unlike the case of operators, the hermitian character of a general linear transformation may be altered by replacing the given semi-inner-product by another inducing the same norm, even if T is closed and densely defined, [13] p. 688. However this cannot happen if T is the infinitesimal generator of a strongly continuous semi-group of operators. The latter happens for instance if T is spectral, [1], and [13], theorem 3. 2.

Definition 4. Let T be a linear transformation on a semi-inner-product space X, with domain D. Then the numerical range of T, $W(T)$, is the set of complex numbers defined by

$$W(T) = \{[Tx, x] : x \in D, [x, x] = 1\}. \tag{2}$$

2. Hermitian-equivalent operators. What is meant by a hermitian-equivalent family of operators, has been discussed in the introduction. One might notice that in the case of a single operator on a Hilbert space, hermitian-equivalent coincides with what is often called "symmetrizable".

Definition 5. Let F be any commutative family of operators on a Banach space. We denote by $S(F)$ the real-linear span of F. The exponential group assotiated to F, $G(F)$, is then defined as follows

$$G(F) = \{\exp iT \colon T \in S(F)\}. \tag{3}$$

Theorem 6. *Let F be a commutative family of operators on a Banach space X. Then F is hermitian-equivalent if and only if its associated exponential group is uniformly bounded. Furthermore, if X is a Hilbert space, and F is hermitian-equivalent, then the renorming may be chosen so as to obtain again a Hilbert space.*

Proof. First we show that an operator T on X is hermitian, if and only if $\|\exp itT\| = 1$, for t real. In fact, if this condition is satisfied, then by theorem 3. 1 of [13] follows that both iT and $-iT$ are dissipative operators, [13] p. 680, hence $W(T)$ is real and T hermitian. Conversely, T hermitian implies that iT and $-iT$ are dissipative, and the conclusion follows using theorem 2. 1 of [13].

If F is a commutative, hermitian-equivalent, family of operators on X, denote by T' the operator into which an operator T on X is carried by the equivalent renorming; let F' denote the family corresponding in that way to F. Then there exists, naturally, a constant K such that $\|T\| \leqq K\|T'\|$ for $T \in F$. Since F' consists of hermitian operators the same holds for $S(F')$; thus, by what we just saw above, the exponential group $G(F')$ is uniformly bounded by 1. Hence $G(F)$ is bounded by K.

The converse uses the fact that given a uniformly bounded commutative group G of operators on a Banach space X, there exists an equivalent renorming of X, carrying G into a group of unitary, i. e. norm-preserving operators (of X onto X); if X is a Hilbert space, its renorming may be chosen so as to obtain again a Hilbert space. See Sz.-Nagy [15] and Dixmier [4].

Thus, in the situation that interests us specifically, i. e. if F is a commutative family of operators on X, for which $G(F)$ is uniformly bounded, then, after equivalent renorming, all elements of $G(F)$ will have norm 1. In particular for any $T \in F$, we have for T', in the new norm $\| \ \|'$,

$$\|\exp itT'\|' = 1 \qquad (t \text{ real}). \tag{4}$$

From what we saw earlier, (4) implies that T' is hermitian.

Finally notice that if X is a Hilbert space, and F is hermitian-equivalent, then by the first part of the argument we know that $G(F)$ is uniformly bounded, and under this circumstance we have seen that (although there may exist other renormings) there is always a renorming which gives again a Hilbert space, and is otherwise as desired. This completes the proof.

Corollary 7. *Suppose F_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ are finitely many commutative families of operators on a Banach space X, each of them hermitian-equivalent; then if $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ is commutative it is hermitian-equivalent. If X is a Hilbert space, then the corresponding renorming may be chosen so as to obtain again a Hilbert space.*

Proof. The hypothesis implies that every $G(F_i)$ is uniformly bounded, say by K_i, in virtue of the preceding theorem. Since everything commutes, $G\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \prod_{i=1}^{n} G(F_i)$. Hence $G\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)$ is uniformly bounded, by $\prod_{i=1}^{n} K_i$, and it follows that $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ is Hermitian-equivalent.

3. Spectral operators. We had mentioned in the introduction a recent result of E. Berkson [3] connecting spectral operators of scalar type, [6], [7], with hermitian operators. Theorems I and II below, are taken from [3]:

Theorem I.[4]) *Let S be a spectral operator of scalar type, on a Banach space X, and with spectral measure $E = \{E(\sigma)\}$. Then E is hermitian-equivalent. S admits the decomposition $S = R + iJ$, $RJ = JR$, and the family $\{R^n J^m \colon n, m = 0, 1, 2, \ldots\}$ is hermitian-equivalent.*

---

[4]) It might be noticed that the result from [3] we mainly use (i. e. the one mentioned in the introduction, and used in part II), can be derived from results above as follows: Let $\operatorname{Re} \lambda$, as a function on the spectrum σ of the scalar spectral operator S, be denoted by r. Set $R = \int_\sigma r \, dE(\lambda)$. Since for t real, $|\exp itr| = 1$ on σ, it follows from theorem 7, [6], that $\|\exp itR\| \leqq \nu(E)$, independently of t. A similar argument for $j = \operatorname{Im} \lambda$, and application of theorem 6, corollary 7, finish the proof.

Theorem II. *If X is reflexive, and S an operator on X, then the existence of a decomposition as in theorem I, is necessary and sufficient for S to be a spectral operator of scalar type.*

By means of theorem 6, readily derives from the above theorems results not depending on equivalent renormings. We explicit the following:

Theorem 8. *If S is a spectral operator of scalar type on a Banach space, then $S = R+iJ$, where $RJ=JR$, and $G(\{R^n J^m: n, m=0, 1, 2, \dots\})$ is uniformly bounded.*

In [3] it was shown that a decomposition like that of theorem I is unique. As a simple application of preceding results we derive uniqueness under less assumptions.

Proposition 9. *If S is a spectral operator of scalar type on a Banach space X, and $S = R+iJ$, where $RJ=JR$, and R and J are hermitian-equivalent, then $R=\int \operatorname{Re}\lambda\, dE(\lambda)$, $J=\int \operatorname{Im}\lambda\, dE(\lambda)$, $E(\lambda)$ denoting the spectral measure corresponding to S.*

Proof. If we write R_0, J_0, for the integrals that appear in the statement of the proposition, it follows from theorem I that R_0+iJ_0 certainly supplies a decomposition of S with the same properties as $R+iJ$. Since R and J commute with S, Dunford's extension of the Fuglede theorem, and the definition of R_0 and J_0 imply that R, J, R_0, J_0 is a commutative family, which by corollary 7 is hermitian-equivalent. Consequently, after equivalent renorming, we get $R'-R_0'+i(J'-J_0')=0$, where $R'-R_0'$ and $J'-J_0'$ are hermitian. The latter facts readily imply that for $x\in X$, $[(R'-R_0')x, x]=0$ and $[(J'-J_0')x, x]=0$, and by theorem 5 of [12], we conclude $R'-R_0'=0$, $J'-J_0'=0$. Thus $R=R_0, J=J_0$.

Remark 10. If S is a spectral operator of scalar type on X, then $S = R+iJ$ as described in theorem I. If now, X is a Hilbert space, and since R and J are hermitian-equivalent, theorem 6 tells us that this equivalence can be realized so as to obtain again a Hilbert space. This implies by a well-known argument that there exists on the Hilbert space X an invertible hermitian operator A such that ASA^{-1} is a normal operator (in the usual sense, of course). This is a result of Wermer [17]. In fact an extended version of Wermer's results on commuting spectral measures follows easily along the same lines. We make this explicit in the next section.

4. Commuting spectral measures. Wermer's theorem. For sake of simplicity, we call an operator T on a Banach space *normal*, if $T = R+iJ$, where R and J are hermitian, and $RJ=JR$. The meaning of the term spectral measure, in this section, will be the same as in [17], except the space considered is an arbitrary Banach space, instead of a Hilbert space.

Theorem 11. *Let $\{E_1(\sigma)\}$ and $\{E_2(\eta)\}$ be two commuting spectral measures on the Banach space X, in the sense that*

$$E_1(\sigma)E_2(\eta)=E_2(\eta)E_1(\sigma) \text{ for all } \sigma, \eta. \tag{5}$$

Then $\{E_1(\sigma)\}\cup\{E_2(\eta)\}$ is hermitian-equivalent. If T_1 and T_2 are spectral operators on X, there exists an equivalent renorming of X, under which the scalar parts of T_1, T_2, go into normal operators, provided T_1 and T_2 commute. If X is a Hilbert space the renorming may chosen so as to obtain again a Hilbert space.

Proof. Theorem I, or better, the underlying argument (since here the spectral measures are not immediately given as attached to certain operators) implies that $\{E(\sigma)\}$ and $\{E(\eta)\}$ are each hermitian-equivalent; since they commute the rest follows from corollary 7, and the decomposition of the scalar parts into "real" and "imaginary" parts, as before.

The results of [17] follow immediately from the above theorem, when X is a Hilbert space.[5])

Corollary 12. *If S_1, S_2, are spectral operators of scalar type on a Banach space, then S_1+S_2 becomes normal under some appropriate equivalent renorming of the underlying space.*

We shall use this fact later to show that it is not always true that the product of hermitian operators is hermitian, even if the space is reflexive.

II. Closure properties and boundedness of boolean algebras of projections

5. Equivalence and closure. In a sense, corrollary 7 represents the elementary case of what we want to do here, namely to determine under what circumstance an infinite commutative collection of elements, or families, which are separately hermitian-equivalent, is hermitian-equivalent. An answer, in terms of a closure property is supplied by the following

Theorem 13. *A necessary and sufficient condition for a commutative family of operators on a Banach space to be hermitian-equivalent, is that the uniform closure of its real-linear span consists of (individually) hermitian-equivalent operators.*

Proof. Let X denote the Banach space, F the family considered above. Since real-linear combinations, and uniform limits, of hermitian operators are again hermitian, the necessity of the condition is immediately verified. Next, we prove the sufficiency.

For any operator T on X, we define

$$M(T) = \sup\{\|\exp itT\| : \ t \text{ real}\}.$$

In general $M(T)$ may be $+\infty$, but theorem 6 tells us that if T is hermitian-equivalent, then $M(T)$ is finite. Now, given any real number M_0, we denote by A the algebra of all operators on X, and define

$$B(M_0) = \{T \in A : M(T) \leqq M_0\}.$$

The first step will be to show, using merely the fact that F is a commutative subset of A, that the uniform closure of $F \cap B(M_0)$ is contained in $B(M_0)$. In fact, let us consider a sequence, with elements $T_n \in F \cap B(M_0)$ $(n=1, 2, \ldots)$ and such that $\|T-T_n\| \to 0$, for some $T \in A$. We wish to show that $T \in B(M_0)$. By definition, one has for any $T \in A$ the expansion

$$\exp tT = \sum_{n=0}^{\infty} t^n T^n/n!,$$

---

[5]) A particular case was obtained earlier by LORCH [11]; see also [14] theorem 55, and [4].

however, one may also use TAYLOR's formula with integral remainder, and thus obtain, in our context,

$$\exp it(T-T_n) = \sum_{m=0}^{N} \frac{t^m}{m!}(i(T-T_n))^m + \tag{6}$$
$$+\int_0^t \frac{(t-s)^N}{N!}(i(T-T_n))^{N+1} \exp is(T-T_n)\, ds.$$

Naturally, T commutes with all elements of F, and consequently, for $|s| \leqq |t|$,

$$\|\exp is(T-T_n)\| \leqq \|\exp isT\| \, \|\exp(-isT_n)\| \leqq M_0 \sup\{\|\exp isT\| : |s| \leqq |t|\} = K_t$$

where K_t depends on t only. Hence, one obtains for the remainder term the estimate

$$\left\| \int_0^t \frac{(t-s)^N}{N!}(i(T-T_n))^{N+1} \exp is(T-T_n)\, ds \right\| \leqq K_t \frac{|t|^{N+1}}{N!} \|T-T_n\|^{N+1}. \tag{7}$$

Suppose that n is taken sufficiently large to insure that $\|T-T_n\| \leqq 1$. Then, for fixed t, N may be chosen, in virtue of (7), independently of n, so as to insure that the remainder term is in norm $<\varepsilon/2$, for any $\varepsilon > 0$ given a priori. Next, one may choose n large enough, so that

$$\left\| \sum_{m=1}^{N} t^m (i(T-T_n))^m / m! \right\| \leqq \sum_{m=1}^{N} |t|^m \|T-T_n\|^m / m! < \varepsilon/2.$$

With this choice of n, we have from (6) that $\|\exp it(T-T_n)\| < 1+\varepsilon$. Thus

$$\|\exp itT\| = \|\exp it(T-T_n) \exp itT_n\| < (1+\varepsilon) M_0.$$

Since ε is arbitrary, we have $\|\exp itT\| \leqq M_0$. Since t was arbitrary, we have proved that $T \in B(M_0)$.

Now let $Y = \overline{S(F)}$ denote the closure of the real-linear span, in the uniform topology. Y is commutative, since F is. Taking $M_0 = 1, 2, \ldots, n, \ldots$; set $Y_n = Y \cap B(n)$. Then by what we have proved above, Y_n is uniformly closed in Y. If it is assumed that Y consists of hermitian-equivalent elements, then $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, and by the Baire—Banach category theorem, there exists an n_0 such that Y_{n_0} contains a non-trivial sphere Z. Let T_0 denote the center of that sphere. Then every operator $T \in Y$ is of the form

$$T = -rT_0 + rT', \quad T' \in Z, \quad r \text{ real } \geqq 0. \tag{8}$$

To complete the proof, observe that clearly for any pair of commuting operators T_1, T_2, and any real number t, one has

$$M(tT_1) \leqq M(T_1), \quad M(T_1+T_2) \leqq M(T_1) \cdot M(T_2). \tag{9}$$

It follows from (8) and (9) that for any $T \in Y$, $M(T) \leqq M(T_0) n_0$. But this says in particular that $G(F)$ is uniformly bounded, hence, theorem 6, F is hermitian-equivalent.

6. The boundedness of boolean algebras of projections. In order to discuss, below, a necessary and sufficient condition for a boolean algebra of projections to be uniformly bounded, we need an important property of hermitian operators contained in the following

Lemma 14. *Suppose T is a hermitian operator on a Banach space X. Let $\|T\|_\infty$ denote the spectral norm of T, i. e.* $\sup\{|\lambda|: \lambda \in \text{spectrum}(T)\}$. *Then* $\|T\| \leqq 4\|T\|_\infty$.

Proof. Considering the equivalence of concepts established in [12] p. 39, Hilfssatz 3* of [17] tells us that under the above assumptions, if a and b denote the extremities ($a \leqq b$) of the smallest closed interval containing the (real valued) spectrum of T, we have

$$a = -\lim_{t\to+0}\{(\|I - tT\| - 1)/t\}, \quad b = \lim_{t\to+0}\{(\|I + tT\| - 1)/t\}.$$

It was shown in [12], lemma 12, that for any operator T one has

$$\sup\{\operatorname{Re}\lambda: \lambda \in W(T)\} = \lim_{t\to+0}\{(\|I + tT\| - 1)/t\}$$

where $W(T)$ denotes the numerical range of T (see definition 4). Thus a and b are also the extremities of the smallest closed interval containing the (real valued) numerical range of the hermitian operator T. If $|W(T)| = \sup\{\|\lambda\|: \lambda \in W(T)\}$, we have, consequently, for a hermitian operator, $|W(T)| = \|T\|_\infty$. But again, it was shown in [12], theorem 5, that, for any operator, $\|T\| \leqq 4|W(T)|$ (for this, it is essential that the space be a complex Banach space). Hence we have, finally,

$$\|T\| \leqq 4\|T\|_\infty$$

Lemma 15. *If T is an operator on X, and admits the decomposition $T = R + iJ$, where $RJ = JR$, and R and J are hermitian-equivalent, then $J = O$ if and only if the spectrum of T is real valued.*

Proof. The "only if part" is obvious. Suppose the spectrum is real. Because of corollary 7 we may suppose without loss of generality that R and J are actually hermitian. Let A be any maximal commutative subalgebra of the algebra of all operators on X, containing R and J, hence T. Then the spectra of R, J, T, are the same as operators or as elements of A. Consider the Gelfand representation of A ([10], chap. IV). If m is any point of the maximal ideal space, we have $\hat{T}(m) = \hat{R}(m) + i\hat{J}(m)$. But $\hat{R}(m)$ and $\hat{J}(m)$ are necessarily real valued. Hence $J(m)$ is identically 0 and by lemma 14, $\|J\| = \|J\|_\infty = 0$.

We turn now our attention to commutative families of projections on arbitrary Banach spaces.

Theorem 16. *If every operator in the uniform closure of the real-linear span of a commutative family $E = \{E_\sigma\}$ of projections on a Banach space is hermitian-equivalent, then E is uniformly bounded.*

Proof. By theorem 13, E is hermitian equivalent. Under the corresponding renorming each $E_\sigma \in E$ goes into a hermitian projection E'_σ, and there is a constant K such that $\|E_\sigma\| \leqq K\|E'_\sigma\|$, for all σ. Since all spectra consist at most of the points

0 and 1, it folows from lemma 14 that $\|E'_\sigma\| \leqq 4$, uniformly. Hence $\|E_\sigma\| \leqq 4K$, for all $E_\sigma \in E$.

In what follows, we shall mean by the expression boolean algebra of projections on the Banach space X, a family of projections on X having all the algebraic properties of a spectral measure as defined by DUNFORD [6].

Theorem 17. *Let E be a boolean algebra of projections on a Banach space X. Then a necessary and sufficient condition for that the adjoint of every operator in the uniformly closed algebra generated by E, be spectral of scalar type, is that E be uniformly bounded.*

Proof. The "if part" is a well-known result of DUNFORD [6], section 4. We prove the converse. Most of the work has already been done above. By the hypothesis, the adjoint T^* of every operator in the uniform closure $\overline{S(E)}$ of $S(E)$ is spectral of scalar type, hence of the form $R+iJ$, where $RJ=JR$, and R and J are hermitian-equivalent, by theorem I. A priori R and J need not be adjoint of operators on X, but we shall show that J is necessarily O, so that $T^*=R$. In fact, it is clear that the spectrum of every operator in $S(E)$ is real, and because of the commutativity, the same will then hold for any $T \in \overline{S(E)}$. (This is in the litterature, and follows also easily from a Gelfand representation argument as above). Hence lemma 15 implies $J=O$. Hence T^* is hermitian-equivalent; thus $G(\{T^*\})$ is uniformly bounded, which implies in turn that $G(\{T\})$ is uniformly bounded (same bound); and finally, that T itself is hermitian-equivalent, always by theorem 6. Now it suffices to invoke theorem 16, to complete the proof.

Corollary 18. *Let E be a boolean algebra of projections on a reflexive Banach space X. Then a necessary and sufficient condition for that the uniformly closed algebra generated by E should consist of spectral operators of scalar type, is that E be uniformly bounded.*

III. Remarks and counter-examples

7. **Remarks.** One should notice that the results of section 6 imply that for a boolean algebra E, of projections on a Banach space, the following are all equivalent:

(i) The uniform closure of the real-linear span of E consists of hermitian-equivalent operators.

(ii) The uniform closure of the real-linear span of E consists of operators whose adjoint is spectral.

(iii) E is uniformly bounded.

Under the circumstances, one might be easily led to believe that every hermitian operator is spectral. This is false, however, as we shall see later. On general Banach spaces, hermitian-equivalent and scalar type spectral operators, preserve each a somewhat different subset of the properties they share on Hilbert space. Thus, the sum of hermitian-equivalent operators is hermitian-equivalent, while the sum of scalar type spectral operators is not necessarily of the same kind; on the other hand at least powers of a scalar spectral operators are again scalar spectral, while we shall see later that the similar statement for hermitian operators is false. The following may perhaps shed some further light on the connection between spectral and hermitian operators (see also theorem II):

Proposition 19. *A necessary and sufficient condition for that the real-algebra generated by an operator T of real spectrum, on some Banach space X, and the identity operator I, be hermitian-equivalent, is that there exist a constant K, such that for any polynomial $p(z)$ of the complex variable z, one has $\|p(T)\| \leqq K\|p(T)\|_\infty$, where $\|T\|_\infty$ denotes* $\sup\{|p(z)|: z \in \text{spectrum } T\}$.

Proof. The necessity of the condition follows from lemma 14, and the spectral mapping theorem. Let $q(z)$ be any polynomial with real coefficients, then $|\exp iq(z)|=1$, on the spectrum of T. Approximating $\exp iq(z)$, uniformly on the spectrum of T, by partial sums of the expansion, we conclude that $\|\exp iq(T)\| \leqq K$. The rest follows from theorem 6.

Naturally the existence of a constant like K above, is fundamental in the spectral theory.

8. Examples. In [9], S. Kakutani gives an example of cummuting spectral operators of scalar type, T and T', on some Banach space, whose sum is not spectral. On the other hand, it is easy to check, by direct computation (based on the fact that T is hermitian if and only if $\|I+itT\| = 1+o(t)$, t real), that $T+T'$ is hermitian. Thus not every hermitian operator is spectral. In fact, a similar computation will show that $T^nT'^m$ is hermitian for $n, m=0, 1, 2, \ldots$. Since T and T' commute it follows that $(T+T')^n$ is hermitian for $n=1, 2, \ldots$ Hence setting $R = T+T'$, $J=O$, the hypotheses of theorem II are satisfied, except for the fact that the underlying space constructed in [9] is not reflexive. Since here $R+iJ$ is not spectral, it turns out that reflexivity is indeed not a superfluous hypothesis in theorem II.

One might still wonder if R hermitian implies R^n hermitian, for all positive integers n, in general, or at least on a reflexive space. However C. A. McCarthy has shown recently[6]), that there exist commuting spectral operators T and T' (which one may assume to have real spectra), on a *reflexive* Banach space X, and such that $T+T'$ is not spectral. His method does not allow the same direct computational approach as above, but corollary 12 tells us that $T+T' = R+iJ$, where R and J commute and are hermitian-equivalent. Lemma 15 implies that $J=O$, since the spectrum of $T+T'$ is real valued (T and T' commuting, and having real spectra). Since X is reflexive, and we know that $T+T' = R$ is not spectral, it follows from theorem II that R^n $(n=1, 2, \ldots)$ are not all hermitian-equivalent. Since R is, we conclude the existence of a hermitian operator whose powers are not all hermitian.

References

[1] W. Bade, Unbounded spectral operators, *Pacific J. Math.*, 4 (1954), 373–392.

[2] ——— Weak and strong limits of spectral operators, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 393–414.

[3] E. Berkson, A characterization of scalar type operators on reflexive Banach spaces. To appear in *Pacific J. Math.*

[4] J. Dixmier, Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications, *Acta Sci. Math.*, **12** C (1950), 213–217.

[5] N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques*, livre V, *Espaces vectoriels topologiques* (Paris, 1953).

[6] N. Dunford, Spectral operators, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 321–354.

[6]) C. A. McCarthy, Commuting boolean algebras of projections, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 295–307.

[7] N. Dunford, A survey of the theory of spectral operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **64** (1958), 217—274.
[8] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., XXXI (Providence, 1957).
[9] S. Kakutani, An example concerning uniform boundedness of spectral measures, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 363—372.
[10] L. H. Loomis, *Abstract harmonic analysis* (New York, 1953).
[11] E. R. Lorch, Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 564—569.
[12] G. Lumer, Semi-inner-product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **100** (1961), 29—43.
[13] G. Lumer and R. S. Phillips, Dissipative operators in a Banach space, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 679—698.
[14] G. W. Mackey, *Commutative Banach algebras* (Harvard lecture notes, edited by A. Blair, 1952).
[15] B. Sz.-Nagy, On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *Acta Sci. Math.*, **11** (1947), 152—157.
[16] I. Vidav, Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren, *Math. Z.*, **66** (1956), 121—128.
[17] J. Wermer, Commuting spectral measures on Hilbert space, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 355—362.

UNIVERSITY OF WASHINGTON
AND
UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

(Received March 12, 1963)

Fourier transform in locally compact groups *)

By M. RAJAGOPALAN in New Haven (Conn., U. S. A.)

SEGAL [7] has proved that if G is a locally compact abelian group with the dual group $\hat{G}$ then the Fourier transform maps $L^1(G)$ onto $C_0(\hat{G})$ if and only if G is finite. He has mentioned in the same paper that the non-commutative analogue of this result is true but a proof of it has not appeared so far.

In this paper we give some simple proofs to these results. These proofs are based on the following interesting observations:

(1) An extremally disconnected locally compact group which is Hausdorff must be discrete.

(2) Any weakly sequentially complete C^*-algebra must be finite-dimensional.

The second observation is the non-commutative analogue of the well-known result that the space $C_0(S)$ where S is a locally compact Hausdorff space is weakly sequentially complete iff it is finite-dimensional. We also give here a proof to the conjecture of SEGAL in [7] about the Fourier transform of $L^p(G)$ where $1<p<2$ and G is a locally compact abelian group.

Notations. All the topological spaces occurring in this paper are assumed to be Hausdorff. The symbol $C_0(S)$ where S is a locally compact Hausdorff space will denote the Banach space of all complex-valued continuous functions on S vanishing at infinity. If S is compact then we may write $C(S)$ instead of $C_0(S)$. If G is a locally compact group then $M(G)$ will denote the Banach space of all bounded Borel measures with the variation norm. If (X, Σ, μ) is a measure space then $L^p(X)$ where $1 \leqq p \leqq \infty$ will denote the usual L^p-space and $\|f\|_p$ will denote the L^p-norm of a measurable function f defined on X. For terms not defined here see [1], [3], [4], [5], [6], [9].

Theorem 1. *An extremally disconnected locally compact group G must be discrete.*

Proof. By a known theorem on totally disconnected groups (see [5]) we get that G contains a compact open subgroup H. Then H is also extremally disconnected. We claim that H is discrete. If not we can find a decreasing sequence $H_1 \supset H_2 \supset \dots$ $\dots \supset H_n \supset \dots$ of compact, open, normal subgroups of H such that $\mu(H_n) \to 0$ as $n \to \infty$, where μ is a Haar measure of H. Then $H_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ is a compact normal

*) This research was supported by an Air Force Research Grant No. AFOSR 62-20.
The paper forms a part of the author's doctoral dissertation submitted to Yale University under the guidance of Prof. C. E. RICKART.

subgroup of H and $\mu(H_0)=0$. Then the factor group H/H_0 is compact and metrisable by a theorem of KAKUTANI and BIRKHOFF (see [5]). Since H is compact and extremally disconnected and since the canonical map from H onto H/H_0 is open and continuous we have that H/H_0 is also extremally disconnected. Since H/H_0 is compact and metrisable we get that H/H_0 is finite. But then H_0 must be open in H and hence $\mu(H_0)\neq 0$ which is a contradiction. So H must be discrete and being compact must be finite. So G must be discrete.

Corollary 1. *Let G be a locally compact abelian group with the character group $\hat{G}$. Then the Fourier transform T maps $L^1(G)$ onto $C_0(\hat{G})$ if and only if G is finite.*

Proof. First of all we notice that if T_1 is a one-to-one, continuous, linear map from a Banach space X_1 onto a Banach space X_2 then the adjoint map T_1^* of T_1 is also a one-to-one and onto map from X_2^* to X_1^*. Now coming to the Corollary, if T maps $L^1(G)$ onto $C_0(\hat{G})$ then T^* maps $M(\hat{G})$ onto $L^\infty(G)$. By an easy calculation it is seen that T^* coincides with the Fourier transform on $M(G)$. So the image of T^* consists of continuous functions on G. So every function in $L^\infty(G)$ is equivalent to a continuous function on G. Then G must be extremally disconnected and hence discrete. Moreover T^* maps $L^1(\hat{G})$ onto $C_0(G)$. So $\hat{G}$ also must be discrete. So both G and $\hat{G}$ must be finite. The converse is obvious.

Theorem 2. *A C^*-algebra A is weakly sequentially complete if and only if it is finite-dimensional.*

Proof. If A is finite-dimensional then it is weakly sequentially complete. Conversely, let A be weakly sequentially complete. Let $B\subset A$ be any commutative, closed and $*$-closed subalgebra of A. Then, by a theorem of GELFAND on Banach algebras, B is isomorphic to the space $C_0(X)$ where X is a locally compact Hausdorff space. Since A is weakly sequentially complete we have that B is also weakly sequentially complete and hence $C_0(X)$ is finite-dimensional. So every closed, $*$-closed, commutative subalgebra of A is finite-dimensional. In particular the closed subalgebra generated by the element xx^* is finite-dimensional for any $x\in A$. Hence every closed left (or right) ideal of A contains minimal self-adjoint idempotents. Moreover, any set of pairwise orthogonal minimal, self-adjoint idempotents of A is finite. Then let $e_1, e_2, \ldots, e_n$ be a maximal set of pairwise orthogonal minimal self-adjoint idempotents of A. Then $e_1+e_2+\ldots+e_n = e$ is a self-adjoint idempotent. We must have that $ex=x$ for all $x\in A$, since otherwise, the set $B = \overline{\{ex-x|x\in A\}}$ will be a proper closed right ideal of A and will contain a minimal self-adjoint idempotent $e_{n+1}\neq 0$ orthogonal to $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Then $e = e_1+e_2+\ldots+e_n$ is an identity of A. Then the centre of A is a proper closed, $*$-closed subalgebra of A and hence is finite-dimensional. So there is a maximal set $f_1, f_2, \ldots, f_k$ of minimal, self-adjoint and pairwise orthogonal, central idempotents $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Clearly $f_1A, f_2A, \ldots, f_kA$ are closed, $*$-closed mutually orthogonal minimal two-sided ideals of A and $A = f_1A\oplus f_2A\oplus\ldots\oplus f_kA$. Let us denote by I_i the ideal f_iA for $i=1, 2, \ldots, k$. Then I_i contains a maximal set of minimal, pairwise orthogonal self-adjoint idempotents $e_{11}^i, e_{22}^i, \ldots, e_{n_i n_i}^i$. Then by adopting the same line of reasoning as that used in the Wedderburn structure theorem for algebras we get that I_i is isomorphic to the matrix algebra of order $n_i\times n_i$ over the complex numbers and hence finite-dimensional. Since I_i is finite-dimensional we get that A is finite-dimensional.

Corollary 2. *Let G be a locally compact group with a left Haar measure μ. For any $f \in L^1(G)$, let T_f denote the operator in $L^2(G)$ given by $g \to f * g$ for any $g \in L^2(G)$. Let $|||f||| = \|T_f\|$ for any $f \in L^1(G)$. Then $L^1(G)$ is complete under the norm $|||\cdot|||$ if and only if G is finite.*

Proof. Let $\Delta(x)$ be the modular function of G. Let us put $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\,\Delta(x^{-1})$ for any $f \in L^1(G)$. Then $L^1(G)$ is a Banach algebra with $*$ as involution. Now suppose $L^1(G)$ is complete under the norm $|||\cdot|||$. Then, from the fact that $|||f||| \leqq \|f\|_1$ for all $f \in L^1(G)$ we get that $\|\cdot\|_1$ and $|||\cdot|||$ are equivalent norms on $L^1(G)$. So $L^1(G)$ with the norm $|||\cdot|||$ and convolution as multiplication and $*$ as involution is a weakly sequentially complete C^*-algebra. So $L^1(G)$ must be finite-dimensional. So G must be finite.

Now we proceed to give a proof to the following conjecture of SEGAL in [7]: "If G is a locally compact abelian group with the character group $\hat{G}$ and $1 < p < 2$ and $1/p + 1/q = 1$ then the Fourier transform will map $L^p(G)$ onto $L^q(\hat{G})$ if and only if G is finite." From now onwards all groups will be assumed to be abelian.

Definition 1. Let G be a locally compact group with the character group $\hat{G}$. Let $1 < p < 2$ and $1/p + 1/q = 1$. The group G is said to have (P) if the Fourier transform maps $L^p(G)$ onto $L^q(\hat{G})$.

Definition 2. Let G be a locally compact group. Then $L(G)$ will denote the set of all continuous functions on G which vanish outside a compact set.

Lemma 1. *Let G be a locally compact group with the character group $\hat{G}$. Let $1 < p < 2$ and $1/p + 1/q = 1$. Then G has (P) if and only if there is a constant K such that $\|Tf\|_q \geqq K\|f\|_p$ for all $f \in L(G)$.* (Here T stands for the Fourier transform from $L^p(G)$ into $L^q(\hat{G})$).

Lemma 2. *Let G, $\hat{G}$, p and q be as in Lemma 1. Then G has (P) if and only if $\hat{G}$ has (P).*

Proof. Let G have (P). Let T: $L^p(G) \to L^q(\hat{G})$ be the Fourier transform from $L^p(G)$ into $L^q(\hat{G})$. Since T is one-to-one and onto, we have that T^* is also one-to-one and onto. But T^* is only the Fourier transform from $L^p(\hat{G})$ onto $L^q(G)$. So $\hat{G}$ has (P). Now the lemma follows by the duality theorem.

Lemma 3. *Let G_1 and G_2 be locally compact groups and $1 < p < 2$ and $1/p + 1/q = 1$. Let $G = G_1 \times G_2$. Then, if G has (P) then both G_1 and G_2 have (P).*

Proof. This follows from Lemma 1 by considering functions of the form $f(x)g(y)$ on $G_1 \times G_2$ where $f(x) \in L(G_1)$ and $g(y) \in L(G_2)$.

Lemma 4. *Let G be a locally compact group with (P). Then G contains a compact open subgroup.*

Proof. By a theorem in [9], G is of the form $R^n \times G_1$ where R^n is the n-dimensional Euclidean space with the usual addition and G_1 is a locally compact group with a compact open subgroup H. Now R does not have (P). (See [8].) So $n = 0$ from Lemma 3. Hence the result.

Lemma 5. *Let $1 < p < 2$. Let G be a locally compact group with (P) and $H \subset G$ a compact subgroup of G. Then G/H also has (P).*

Proof. Let ν be the normalized Haar neasure of H. Let μ be a Haar measure on G. Let 0 be a Haar measure on G/H such that $\int_G f(x)\,d\mu(x) = \int_{G/H}\left[\int_H f(tx)\,d\nu(t)\right] d0(\tilde{x})$ holds for all $f \in L(G)$. ($\tilde{x}$ stands for the image of x in G/H under the canonical map φ from $G \to G/H$.) Let ψ be the map from $L(G/H) \to L(G)$ defined by $\psi(\tilde{f}) = \tilde{f} \circ \varphi$ for all $\tilde{f} \in L(G/H)$. Then $\|\tilde{f}\|_p = \|\psi(\tilde{f})\|_p$ for all $\tilde{f} \in L(G/H)$. Let $\hat{G}$ be the character group of G. Let $H^{\perp} = \{\chi | \chi \in \hat{G};\ \chi(x) = 1 \text{ for all } x \in H\}$. Then, since H is compact, $H^{\perp}$ is open in $\hat{G}$. So the restriction of the Haar measure of $\hat{G}$ to $H^{\perp}$ is a Haar measure of $H^{\perp}$. Now $H^{\perp} = (G/H)^{\wedge}$ and $\int_{G/H} \tilde{f}(\tilde{x})\chi(\tilde{x})\,d\tilde{x} = \int_G (\psi(\tilde{f}))(x)\overline{\chi(x)}\,dx$ for any $\chi \in H^{\perp}$ and $\tilde{f} \in L(G/H)$. So the result follows from Lemma 1.

Lemma 6. *Let G be a compact group and $1 < p < 2$. Let G have (P). Then G is finite.*

Proof. The dual group $\hat{G}$ of G is discrete. So if $f \in l^q(\hat{G})$ where $1/p + 1/q = 1$ and $g \in l^2(\hat{G})$ then $gf \in l^2(\hat{G})$. Now $L^p(G) \subset L^1(G)$ since G is compact. So every element of $l^2(\hat{G})$ is a Fourier transform of a function in $L^1(G)$. Hence from Theorem A on page 271 of [2], we get that $l^q(\hat{G}) \subset l^2(\hat{G})$. But $q > 2$ since $p > 2$. So $l^q(\hat{G}) = l^2(\hat{G})$. Hence $\hat{G}$ is finite. Then G is finite.

Theorem 3. *Let G be a locally compact abelian group with dual group $\hat{G}$. Let $1 < p < 2$ and $1/p + 1/q = 1$. Then, the Fourier transform maps $L^p(G)$ onto $L^q(\hat{G})$ if and only if G is finite.*

Proof. Let the Fourier transform map $L^p(G)$ onto $L^q(\hat{G})$. Then G contains a compact open subgroup H. Then G/H has (P) by Lemma 5. Since G/H is discrete, we get from Lemma 6 and 2 that G/H is finite. But then G must be compact and hence, finite by Lemma 6. Now the converse is obvious.

References

[1] N. Dunford, and J. Schwartz, *Linear Operators*, vol. I (New York, 1958).
[2] S. Helgason, Topologies of group algebras and a theorem of Littlewood, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **86** (1957), 269—283.
[3] L. J. Kelley, *General Topology* (New York, 1961).
[4] L. H. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis* (New York, 1953).
[5] D. Montgomery, and L. Zippin, *Transformation Groups* (New York, 1955).
[6] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras* (New York, 1960).
[7] I. E. Segal, The class of functions which are absolutely convergent Fourier transforms, *Acta. Sci. Math.*, **12 B** (1950), 157—162.
[8] E. C. Titchmarsh, *Theory of Fourier integrals* (London, 1937).
[9] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses application* (Paris, 1953).

YALE UNIVERSITY
AND
BANARAS HINDU UNIVERSITY

(Received May 16, 1963)

О ФАКТОРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И. Ц. ГОХБЕРГ (Кишинев) и М. Г. КРЕЙН (Одесса)

В линейной алгебре давно известен метод обращения матрицы, опирающийся на её „факторизацию", т. е. её представление в виде произведения левой и правой треугольных матриц. Значительно позже была поставлена и решена задача о возможности приведения матрицы к треугольному виду с помощью унитарного преобразования. Как известно, вторая задача требует значительно более сложных операции, чем первая.

В абстрактной теории операторов развитие аналогичных вопросов происходило в другом порядке. Сперва в работах М. С. Лившица [1, 2], Л. А. Сахновича [3, 4], М. С. Бродского [5], авторов [6—8] и В. И. Мацаева [9, 10] получила развитие идея треугольного представления операторов, а задача факторизации операторов до последнего времени в общем виде даже не была поставлена. Оказалось, что её решение в тех случаях, когда оно возможно, существенным образом опирается на теорию абстрактного треугольного представления оператора.

С помощью последней удалось построить теорию факторизации операторов, отличающихся от единичного на вполне непрерывный. Изложению результатов этих исследований и посвящена настоящая статья.

В последних параграфах статьи мы показываем, что специальные задачи факторизации, играющие большую роль в теориях различных классов интегральных уравнений, входят в схему общей операторной постановки задачи о факторизации, в связи с чем, однако, возникают некоторые проблемы.

Основные результаты этой статьи кратко изложены в заметке [11].

Для удобства читателя мы начнем с краткого обзора используемых далее результатов теории абстрактного треугольного представления операторов.

§ 1. Краткий обзор резрультатов теории абстрактного треугольного представления операторов

1. Максимальные цепочки инвариантных подпространств вполне непрерывного оператора. В дальнейшем $\mathfrak{H}$ обозначает сепарабельное гильбертово пространство; $\mathfrak{R}$ — кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{S}_\infty$ — идеал этого кольца, состоящий из всех линейных вполне непрерывных операторов. Замкнутое (в смысле сильной сходимости) множество ортогональных проекторов $\mathfrak{P}=\{P\}$ называется *цепочкой*, если оно упорядочено (естественным образом) и содержит проекторы O и I. Пара проекторов (P^-, P^+) $(P^- < P^+; P^\pm \in \mathfrak{P})$ называется *разрывом* цепочки $\mathfrak{P}$, если в $\mathfrak{P}$ нет ни одного проектора, расположенного между P^- и P^+. Размерность подпространства $(P^+ - P^-)\mathfrak{H}$ называется размерностью разрыва. Цепочка, не имеющая ни одного разрыва, называется *непрерывной*. Цепочка называется *максимальной*, если она не является правильной частью никакой другой цепочки. Максимальная цепочка характеризуется тем, что либо она непрерывна, либо всякий ее разрыв одномерен.

Цепочка $\mathfrak{P}$ называется *собственной цепочкой оператора A*, если для любого $P \in \mathfrak{P}$ подпространство $P\mathfrak{H}$ инвариантно относительно A: $AP = PAP$ $(P \in \mathfrak{P})$.

Из теоремы Дж. Неймана и Н. Аронпайна [12] о существовании собственного инвариантного подпространства у всякого оператора $A \in \mathfrak{S}_\infty$ выводится следующее предложение [3, 5].

1°. *У всякого оператора $A \in \mathfrak{S}_\infty$ существует по крайней мере одна собственная максимальная цепочка.*

2. Абстрактное треугольное представление вольтеррова оператора. *Вольтерровым* оператором называется любой оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty$ со спектром, сосредоточенным в нуле.

Имеет место предложение [5, 7]:

2°. *Пусть A вольтерров оператор, действующий в $\mathfrak{H}$, и $\mathfrak{P}$ его собственная максимальная цепочка. Тогда*

$$A = 2i \int_{\mathfrak{P}} PA_{\mathfrak{J}}\, dP, \tag{1.1}$$

где $A_{\mathfrak{J}} = (A - A^*)/2i$ — мнимая компонента оператора A.

Сходимость интеграла (1.1), как и любого интеграла вида

$$Y = \int_{\mathfrak{P}} F(P)\, dP, \tag{1.2}$$

где $F(P)$ $(P \in \mathfrak{P})$—оператор-функция со значениями из кольца $\mathfrak{R}$, понимается в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение $\mathfrak{z}_\varepsilon$ цепочки $\mathfrak{P}$ (т. е. цепочка, состоящая из конечного числа проекторов $O = P_0' < P_1' < \ldots < \ldots < P_m' = I$ из $\mathfrak{P}$) такое, что для всех расширенных разбиений $\mathfrak{z} = \{P_j\}_0^n \supseteq \mathfrak{z}_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left| Y - \sum_{j=1}^{n} F(Q_j)(P_j - P_{j-1}) \right| < \varepsilon$$

при любых операторах $Q_j \in \mathfrak{P}$, удовлетворяющих условиям $P_{j-1} \leq Q_j \leq P_j$.

Предложение 2° допускает следующее обращение [5—7]:

3°. *Если для некоторого самосопряженного вполне непрерывного оператора X и некоторой максимальной цепочки $\mathfrak{P}$ интеграл*

$$Y = 2i \int_{\mathfrak{P}} PX\, dP \tag{1.3}$$

сходится, то Y является единственным вольтерровым оператором с собственной цепочкой $\mathfrak{P}$ и мнимой компонентой X.

Вещественная компонента $Y_{\mathfrak{R}} = (Y+Y^*)/2$ оператора Y выражается через X при помощи формулы

$$(1.4) \qquad Y_{\mathfrak{R}} = i\int_{\mathfrak{P}} (PX\,dP - dP\,XP).$$

Отметим еще, что для сходимости интеграла (1. 2) *необходимо*, чтобы выполнялось условие

$$(1.5) \qquad \big(F(P^+) - F(P^-)\big)(P^+ - P^-) = 0$$

для любого разрыва (P^-, P^+) цепочки $\mathfrak{P}$. В частности, для интеграла (1. 3) условие (1. 5) превращается и условие

$$(1.6) \qquad (P^+ - P^-)X(P^+ - P^-) = 0.$$

Совокупность всех операторов $X \in \mathfrak{S}_\infty$, удовлетворяющих условию (1. 6), обозначим через $\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{P}]$.

3. Симметрично-нормированные идеалы кольца $\mathfrak{R}$. Для выяснения условий сходимости интеграла (1. 3) и зависимостей между поведениями спектров операторов X и $Y_{\mathfrak{R}}$ понадобятся некоторые специальные двусторонние идеалы кольца $\mathfrak{R}$, называемые симметрично-нормированными идеалами. Двусторонний идеал $\mathfrak{S}$ кольца $\mathfrak{R}$ называется *симметрично-нормированным (с. н.) идеалом* кольца $\mathfrak{R}$, если в нем можно определить норму $|X|_{\mathfrak{S}}$, относительно которой $\mathfrak{S}$ является банаховым пространством и которая обладает следующим свойством:

$$|AXB|_{\mathfrak{S}} \leqq |A|\,|X|_{\mathfrak{S}}|B| \qquad (X \in \mathfrak{S};\quad A, B \in \mathfrak{R}).$$

Без ограничения общности мы будем предполагать, что для любого одномерного оператора X:

$$|X| = |X|_{\mathfrak{S}}.$$

Как известно, всякий двусторонний идеал $\mathfrak{S}$ кольца $\mathfrak{R}$ содержится в $\mathfrak{S}_\infty$.

С. н. идеалы были введены и изучались Дж. Нейманом и Р. Шаттеном [13] в их теории „cross-spaces".

Приведем примеры конкретных с. н. идеалов. При их построении используется понятие последовательности s-чисел $\{s_n(A)\}_1^\infty$ оператора $A \in \mathfrak{S}_\infty$. Последняя определяется, как последовательность всех собственных чисел неотрицательного оператора $(AA^*)^{1/2}$, занумерованных в порядке убывания с учетом их кратности.

Простейшие с. н. идеалы образуют совокупности $\mathfrak{S}_p$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ всех операторов $A \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых $\sum s_n^p(A) < \infty$, а норма определяется равенством

$$|A|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(A)\Big)^{1/p} = \big(\mathrm{Sp}\,(A^*A)^{p/2}\big)^{1/p}.$$

В частности, $\mathfrak{S}_1$ совпадает с множеством всех *ядерных* операторов [14], а $\mathfrak{S}_2$ — с множеством операторов Гильберта—Шмидта. С. н. идеал $\mathfrak{S}_2$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением, определяемым равенством

$$(X, Y) = \operatorname{Sp}(XY^*) \qquad (X, Y \in \mathfrak{S}_2).$$

Пусть π_n $(n=1, 2, \ldots)$ — некоторая невозрастающая последовательность положительных чисел такая, что

$$\pi_1 = 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \pi_n = 0.$$

Каждая такая последовательность $\Pi = \{\pi_n\}$ порождает тройку с. н. идеалов $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$, $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\Pi$.

Идеалы $\mathfrak{S}_\Pi$ и $\mathfrak{S}_\pi$ состоят, соответственно, из всех операторов $A \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых

$$|A|_\Pi = \sup_n \frac{\sum_{j=1}^{n} s_j(A)}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} < \infty \quad \text{и} \quad |A|_\pi = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j s_j(A) < \infty.$$

Через $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$ обозначается с. н. идеал, представляющий собой замыкание по норме $|X|_\Pi$ всех конечномерных операторов. Этот идеал состоит из тех $A \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} s_j(A)}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} = 0.$$

Оказывается, что $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$ и $\mathfrak{S}_\pi$ сепарабельны, а $\mathfrak{S}_\Pi$ всегда несеперабельно. Важную роль играют с. н. идеалы $\mathfrak{S}_\omega$ и $\mathfrak{S}_\Omega$, являющиеся частными случаями с. н. идеалов $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\Pi$ при $\Pi = \Omega = \{(2n-1)^{-1}\}$. С. н. идеал $\mathfrak{S}_\omega$ введен впервые в [9], об остальных с. н. идеалах см. [7, 8].

Пусть

$$\pi_n = n^{-1/p} L(n) \qquad (1 < p < \infty; \quad n = 1, 2, \ldots),$$

где $L(\nu)$ $(1 \leqq \nu < \infty)$ — *положительная медленно изменяющаяся функция*, т. е. произвольная положительная дважды дифференцируемая функция, для которой $\nu L'(\nu) \to 0$ при $\nu \to \infty$. В этом случае введем следующие обозначения: $\mathfrak{S}_{[p;L]}^{(0)} = \mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$, $\mathfrak{S}_{[p;L]} = \mathfrak{S}_\Pi$ и $\mathfrak{S}_{(p;L)} = \mathfrak{S}_\pi$. С. н. идеалы $\mathfrak{S}_{[p;L]}^{(0)}$ и $\mathfrak{S}_{[p;L]}$ состоят соответственно из тех операторов $A \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых

$$s_n(A) = o\left(n^{-1/p} L(n)\right) \quad \text{и} \quad s_n(A) = O\left(n^{-1/p} L(n)\right) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Отметим еще, что во всяком сепарабельном с. н. идеале $\mathfrak{S}$ множество конечномерных операторов образует плотное множество в смысле нормы $|X|_\mathfrak{S}$.

4. Условия сходимости интеграла треугольного усечения. Интеграл треугольного усечения как оператор. Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольная максимальная цепочка и (P_j^-, P_j^+) $(j=1, 2, \ldots, N;\ N\leqq\infty)$ — все ее разрывы. Имеет место следующее предложение:

4°. *Если оператор* $X\in\mathfrak{S}_\omega$ *и выполняется необходимое условие*

$$(P_j^+ - P_j^-)X(P_j^+ - P_j^-) = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, N),$$

то интеграл треугольного усечения

$$\int_{\mathfrak{P}} PX\,dP \tag{1.7}$$

сходится. Для всякого оператора X, *не принадлежащего* $\mathfrak{S}_\omega$, *найдется непрерывная цепочка такая, что интеграл* (1.7) *не сходится даже в слабом смысле.*

Первая и основная часть этой теоремы доказана В. И. Мацаевым [9], вторая — авторами [7]. До этого результата М. С. Бродским была доказана сходимость интеграла (1.7) для $X\in\mathfrak{S}_1$, а авторами для $X\in\mathfrak{S}_p$ $(p<\infty)$.

Пусть $\mathfrak{P}$—произвольная непрерывная максимальная цепочка. Она порождает два трансформатора (два оператора, действующих в пространстве операторов), определенных равенствами

$$\mathfrak{T}(X;\ \mathfrak{P})=\int_{\mathfrak{P}} PX\,dP, \quad \mathfrak{S}(X;\ \mathfrak{P})=i\int_{\mathfrak{P}}(PX\,dP-dPXP).$$

Трансформаторы $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{S}$ являются замкнутыми неограниченными операторами в $\mathfrak{S}_\infty$ [7]. Трансформатор $\mathfrak{T}$ является неограниченным проектором $(\mathfrak{T}^2=\mathfrak{T})$, определенным на всех операторах X, допускающих представление $X=X_1+X_2$, где $X(\in\mathfrak{S}_\infty)$ обладает собственной цепочкой $\mathfrak{P}$, а X_2 —дополнительной цепочкой $\mathfrak{P}^\perp=\{I-P\}_{P\in\mathfrak{P}}$. При этом $\mathfrak{T}(X)=X_1$.

В дальнейшем существенную роль играет следующее предложение (см. [6—10]).

5°. *Пусть* $\mathfrak{P}$—*произвольная непрерывная цепочка. Тогда трансформатор* $\mathfrak{T}(\cdot;\mathfrak{P})$ $(\mathfrak{S}(\cdot;\mathfrak{P}))$ *отображает непрерывно каждый из с. н. идеалов* $\mathfrak{S}_p(1<p<\infty)$, $\mathfrak{S}^{(0)}_{[p;L]}$, $\mathfrak{S}_{[p;L]}\mathfrak{S}_{(p;L)}$ $(1<p<\infty)$ *в себя, а каждый из с. н. идеалов* $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_\omega$, *соответственно в с. н. идеалы* $\mathfrak{S}_\Omega$, $\mathfrak{S}_\infty$.

§ 2. Постановка задачи о факторизации операторов по цепочке

Как известно (см. например, Д. К. Фаддеев и Д. Ф. Фаддеева [15]), метод Гаусса обращения неособенной матрицы $A=\|a_{jk}\|_1^n$ показывает, что при определенных условия обратная матрица A^{-1} может быть представлена, притом единственным образом, в виде произведения трех сомножителей

$$A^{-1}=S_+DS_-,$$

где средний—диагональная матрица, а крайние $S_\pm=\|s_{jk}^{\pm}\|_1^n$—правая и левая треугольные матрицы с диагональными элементами, равными единице. Такое представление возможно в том и только том случае, когда все главные миноры $D_r=|a_{jk}|_1^r\neq 0$ $(r=1, 2, \ldots, n)$.

В операторной форме указанные множители могут быть получены по формуле

$$S_+=\sum_{j=1}^{n}\frac{D_j}{D_{j-1}}(P_jAP_j)^{(-1)}\Delta P_j,\quad S_-=\sum_{j=1}^{n}\frac{D_j}{D_{j-1}}\Delta P_j(P_jAP_j)^{(-1)}, \tag{2.1}$$

$$D=\sum_{j=1}^{n}\frac{D_{j-1}}{D_j}\Delta P_j. \tag{2.2}$$

Поясним обозначения. С каждой матрицей n-го порядка ассоциируется оператор, действующий в n-мерном пространстве E_n комплексных векторов $\xi=\{\xi_j\}_1^n$ и обозначаемый той же буквой, что и матрица. Через P_j $(j=0, 1, 2, \ldots, n)$ обозначается оператор проектирования в E_n, сохраняющий первые j координат вектора ξ и аннулирующий все остальные; $\Delta P_j=$ $=P_j-P_{j-1}$ $(j=1, 2, \ldots, n;\ P_0=0)$. Наконец, $(P_jAP_j)^{(-1)}$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ обозначает оператор, действующий в подпространстве P_jE_n и являющийся там обратным к оператору P_jAP_j (ему соответствует матрица, обратная к усеченной матрице $\|a_{ik}\|_1^j$).

Мы не останавливаемся здесь на выводе формул (2. 1) и (2. 2), они непосредственно вытекают из более общих операторных формул § 7.

В случае, когда A—эрмитова матрица, обязательно $S_-=S_+^*$, а само представление $A^{-1}=S_+DS_+^*$ легко получается из разложения формы $(A\xi, \xi)$ в сумму квадратов по методу Лагранжа—Якоби.

Известен также континуальный аналог указанной факторизации матриц для интегрального оператора Фредгольма (см. § 8).

Естественным абстрактным представлением объединяющим и обобщающим обе эти факторизации, является факторизация оператора относительно цепочки, которая определяется следующим образом.

Факторизацией оператора $A\in\mathfrak{R}$ *относительно цепочки* $\mathfrak{P}$ будем называть представления оператора A в виде

$$A=A_+DA_-, \tag{2.3}$$

где A_+, A_- $(\in\mathfrak{R})$—операторы с собственными цепочками соответственно $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^\perp$, а D $(\in\mathfrak{R})$—оператор, обладающий одновременно обеими цепочками $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^\perp$, т. е. перестановочный со всеми ортопроекторами $P\in\mathfrak{P}$.

Если факторизация (2. 3) для данного оператора $A\in\mathfrak{R}$ возможна, то она неоднозначна. Действительно, по данной факторизации можно получить бесконечное множество других, полагая, например $A'_+=A_+B$, $A'_-=CA_-$ и $D'=B^{-1}DC^{-1}$, где B и $C(\in\mathfrak{R})$—произвольные обратимые операторы, перестановочные со всеми проекторами $P\in\mathfrak{P}$.

Обозначим через $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{P})$ множество всех операторов из $\mathfrak{S}_\infty$, обладающих собственной цепочкой $\mathfrak{P}$. Очевидно, $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{P})$ является замкнутым подкольцом $\mathfrak{S}_\infty$. Если $\mathfrak{P}$—максимальная цепочка, то для того, чтобы оператор $X\in\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{P})$ был вольтерровым, необходимо и достаточно, чтобы $X\in\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{P}]$.

Специальной факторизацией оператора $A(\in\mathfrak{R})$ *относительно цепочки* $\mathfrak{P}$ назовем представление A в виде

$$A=(I+X_+)D(I+X_-), \tag{2.4}$$

где X_+, X_-—вольтерровы операторы соответственно из $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{P})$ и $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{P}^\perp)$, а оператор D перестановочен со всеми проекторами P цепочки $\mathfrak{P}$, причём $D-I\in\mathfrak{S}_\infty$.

Множители $I+X_\pm$ являются обратимыми операторами. В случае, когда оператор A обратим, обратимым будет и диагональный множитель $D=I+Z$. В последнем случае, очевидно, обратимыми будут и все операторы $P(I+X_\pm)P$, PDP, рассматриваемые в подпространстве $P\mathfrak{H}$. Отсюда следует, что *для того, чтобы обратимый оператор A допускал специальную факторизацию относительно цепочки $\mathfrak{P}$ необходимо, чтобы все операторы $PA^{-1}P$ $(P\in\mathfrak{P})$ были обратимы в подпространстве $P\mathfrak{H}$ $(P\in\mathfrak{P})$.*

Если обратимый оператор $A\in\mathfrak{R}$ допускает специальную факторизацию, относительно максимальной цепочки $\mathfrak{P}$, то она уже будет единственной.

В самом деле, если

$$(I+X_+)D(I+X_-) = (I+X'_+)D'(I+X'_-),$$

то

$$(I+X'_+)^{-1}(I+X_+)D = D'(I+X'_-)(I+X_-)^{-1}.$$

Отсюда следует, что оператор $(I+X'_+)^{-1}(I+X_+)D$ обладает обеими собственными цепочками $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^\perp$, а следовательно, он перестановочен со всеми проекторами $P\in\mathfrak{P}$. Так как оператор D обратим, то и оператор $(I+X'_+)^{-1}(I+X_+)$ перестановочен со всеми проекторами $P\in\mathfrak{P}$. Таким образом, вольтерров оператор $V_+ = Y'_+ +X_+ +Y'_+X_+$ $\left(Y'_+ = (I+X'_+)^{-1}-I\right)$ с собственной цепочкой $\mathfrak{P}$, перестановочен со всеми проекторами из этой цепочки. Последнее возможно только в случае $V_+=0$, т. е. $X'_+=X_+$. Аналогично доказывается, что $X'_-=X_-$. Как следствие этих двух равенств вытекает $D'=D$.

Из единственности специальной факторизации для обратимого оператора вытекает, что если самосопряженный обратимый оператор $A=A^*(\in\mathfrak{R})$ допускает факторизацию (2. 4), то $X_+^*=X_-$ и $D^*=D$.

Отметим, что в дальнейшем, разыскивая формулы для операторов $X_\pm$ и D для обратимого A, мы без ограничения общности можем сразу предположить, что оператор A имеет вид $A = (I-T)^{-1}$, где $T\in\mathfrak{S}_\infty$.

Если цепочка $\mathfrak{P}$ непрерывна, то задача специальной факторизации упрощается. В этом случае, как легко видеть, $D=I$, и следовательно, равенство (2. 4) принимает вид

$$A = (I+X_+)(I+X_-). \tag{2.5}$$

Если оператор $A(\in\mathfrak{R})$ допускает специальную факторизацию относительно непрерывной цепочки, то, очевидно, он всегда обратим. Если же он, кроме того, самосопряжен, то $X_+^*=X_-$, и следовательно, A положителен.

Отметим еще, что факторизации, используемые в теории скалярных и векторных уравнений Винера — Хопфа (см. М. Г. Крейн [16], И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [17]), также являются примерами факторизации в смысле общих определений этого параграфа; подробнее об этом см. в § 9.

§ 3. Общие теоремы о факторизации операторов

Теорема 3. 1. *Для того, чтобы оператор* $A=(I-T)^{-1}$ $(A\in\mathfrak{R};\ T\in\mathfrak{S}_\infty)$ *допускал специальную факторизацию относительно непрерывной цепочки* $\mathfrak{P}$, *необходимо и достаточно, чтобы:*

а) *все операторы* $I-PTP\,(P\in\mathfrak{P})$ *были обратимы*) и* б) *сходился по равномерной норме хотя бы один из интегралов*

$$(3.1)\qquad X_+=\int\limits_{\mathfrak{P}}(I-PTP)^{-1}PT\,dP;\quad X_-=\int\limits_{\mathfrak{P}}dP\,TP(I-PTP)^{-1}.$$

Если хотя бы один из этих интегралов сходится, то сходится и другой и их значения дают специальную факторизацию (2. 5).

Доказательство. Пусть оператор $A=(I-T)^{-1}$ допускает специальную факторизацию (2. 5). Тогда

$$I-T=(I+Y_-)(I+Y_+),$$

где

$$Y_\pm=(I+X_\pm)^{-1}-I\qquad(\in\mathfrak{S}_\infty).$$

Операторы Y_+, Y_- являются вольтерровыми операторами, обладающими соответственно собственными цепочками $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^\perp$, и, следовательно, для любого проектора $P\in\mathfrak{P}$

$$-PTP=PY_-P+PY_+P+PY_-PPY_+P$$

и

$$(I-PTP)=(I+PY_-P)(I+PY_+P).$$

Так как операторы $PY_\pm P$ вольтерровы, то оператор $I-PTP$ обратим и

$$(I-PTP)^{-1}=(I+PY_+P)^{-1}(I+PY_-P)^{-1}\qquad(P\in\mathfrak{P}).$$

Легко видеть, что

$$(I+PY_\pm P)^{-1}P=P(I+PY_\pm P)P=P(I+Y_\pm)^{-1}P\qquad(P\in\mathfrak{P}).$$

Следовательно,

$$(I+PY_+P)^{-1}P=(I+Y_+)^{-1}P=(I+X_+)P$$

и

$$(I+PY_-P)^{-1}P=P(I+Y_-)^{-1}=P(I+X_-).$$

Таким образом,

$$(I-PTP)^{-1}P=(I+X_+)P(I+X_-).$$

Помножая последнее равенство на оператор $T=-Y_--(I+\quad_+)Y_+$, получим

$$(3.2)\qquad (I-PTP)^{-1}PT=(I+X_+)PX_--(I+X_+)PY_+.$$

---

*) Условие а) означает, что операторы $P(I-T)P$ $(P\in\mathfrak{P})$ обратимы в подпространстве $P\mathfrak{H}$.

Так как интегралы

$$\int_{\mathfrak{P}} PX_{-}dP \quad \text{и} \quad \int_{\mathfrak{P}} PY_{+}dP$$

сходятся по равномерной норме и первый из них равен нулю, а второй Y_{+}, то

$$\int_{\mathfrak{P}} (I-PTP)^{-1}PT\,dP = -(I+X_{+})Y_{+} = X_{+}.$$

Аналогично доказывается равномерная сходимость второго интеграла из (3. 1) и его равенство оператору X_{-}.

Докажем теперь достаточность условий теоремы. Пусть выполняется условие а) и первый интеграл из (3. 1) сходится по равномерной норме. Через $\mathfrak{z}=\{P_j\}_0^n$ обозначим произвольное разбиение цепочки $\mathfrak{P}$ и через $X_{\mathfrak{z}}$— оператор, определенный равенством

$$X_{\mathfrak{z}}=\sum_{j=1}^{n}(I-P_{j-1}TP_{j-1})^{-1}P_{j-1}T\,\Delta P_j.$$

Кроме того, любому оператору $A\in\mathfrak{S}_\infty$, сопоставим сумму

$$S_{\mathfrak{z}}(A)=\sum_{j=1}^{n}P_{j-1}A\,\Delta P_j.$$

Так как

$$S_{\mathfrak{z}}(TX_{\mathfrak{z}})=\sum_{k=1}^{n}P_{k-1}T\sum_{j=1}^{n}(I-P_{j-1}TP_{j-1})^{-1}P_{j-1}T\,\Delta P_j\,\Delta P_k =$$

$$=\sum_{j=1}^{n}P_{j-1}TP_{j-1}(I-P_{j-1}TP_{j-1})^{-1}P_{j-1}T\,\Delta P_j$$

и

$$P_{j-1}TP_{j-1}(I-P_{j-1}TP_{j-1})^{-1}=(I-P_{j-1}TP_{j-1})^{-1}-I,$$

то

$$S_{\mathfrak{z}}(TX_{\mathfrak{z}})=X_{\mathfrak{z}}-S_{\mathfrak{z}}(T)$$

или, что одно и то же,

$$S_{\mathfrak{z}}(T(I+X_{\mathfrak{z}}))=X_{\mathfrak{z}}.$$

Любому оператору $A\in\mathfrak{S}_\infty$ сопоставим также оператор

$$S'_{\mathfrak{z}}(A)=\sum_{j=1}^{n}\Delta P_jA P_j.$$

Легко видеть, что

$$S_{\mathfrak{z}}(A)+S'_{\mathfrak{z}}(A)=A.$$

Следовательно,

$$-X_{\mathfrak{z}}+T(I+X_{\mathfrak{z}})=S'_{\mathfrak{z}}(T(I+X_{\mathfrak{z}}))$$

или

$$(I-T)(I+X_{\mathfrak{z}})=I-Y_{\mathfrak{z}}, \tag{3. 3}$$

где $Y_{\mathfrak{z}}=S'_{\mathfrak{z}}(T(I+X_{\mathfrak{z}}))$.

Оператор $X_{\mathfrak{z}}$ имеет равномерный предел по цепочке $\mathfrak{P}$ и этот предел X_+ является вольтерровым оператором с собственной цепочкой $\mathfrak{P}$. Из равенства (3. 3) вытекает, что оператор $Y_{\mathfrak{z}}$ также имеет равномерный предел Y_- по цепочке $\mathfrak{P}$. Этот предел, как легко видеть, является вполне непрерывным оператором с собственной цепочкой $\mathfrak{P}^{\perp}$. Так как цепочка $\mathfrak{P}^{\perp}$ непрерывна, то оператор Y_- вольтерров.

Таким образом, оператор $I-T$ допускает специальную факторизацию

$$(I-T)^{-1} = (I-Y_-)^{-1}(I+X_+).$$

Аналогично доказывается достаточность условий теоремы в случае сходимости второго интеграла из (3. 1).

Теорема доказана.

Теорема 3. 2. *Пусть $\mathfrak{P}$—произвольная непрерывная цепочка и $\mathfrak{S}$—некоторый сепарабельный с. н. идеал.*

Если для оператора $T\in\mathfrak{S}$, удовлетворяющего условию а) теоремы 3. 1, хотя бы один из интегралов (3. 1) *сходится слабо и его значение принадлежит $\mathfrak{S}$, то оба интеграла сходятся по норме идеала $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Повторяя почти дословно доказательство последней части теоремы 3. 1, можно показать, что при условиях теоремы оператор $(I-T)^{-1}$ допускает специальную факторизацию (2. 5) с операторами $X_{\pm}\in\mathfrak{S}$. Отсюда, в силу равенства (3. 2), получаем

$$\int_{\mathfrak{P}}(I-PTP)^{-1}PT\,dP = (I+X_+)\int_{\mathfrak{P}}PX_-\,dP-(I+X_+)\int_{\mathfrak{P}}PY_+\,dP, \tag{3. 4}$$

где $Y_+ = (I+X_+)^{-1}-I \ (\in\mathfrak{S})$.

Можно покозать, что оба интеграла из правой части равенства (3. 4) сходятся по норме идеала $\mathfrak{S}$, и стало быть, интеграл из левой части этого равенства сходится по той же норме.

§ 4. Факторизация операторов, отличающихся от единичного на конечномерный

Начнем со следующей леммы:

Лемма 4. 1. *Пусть $X=(\cdot,\psi)\chi$—одномерный оператор, образованный произвольными ортами $\psi,\chi\in\mathfrak{H}$, и $\mathfrak{P}$—некоторая непрерывная цепочка. Тогда для любой комплекснозначной непрерывной функции $a(P)$ $(P\in\mathfrak{P})$ интеграл*

$$Y=\int_{\mathfrak{P}}a(P)PX\,dP \tag{4. 1}$$

сходится по равномерной норме и

$$s_j(Y)\leqq \max_{P\in\mathfrak{P}}|a(P)|\,s_j\Bigl(\int_{\mathfrak{P}}PX\,dP\Bigr) \qquad (j=1,2,\ldots). \tag{4. 2}$$

Доказательство. Покажем, что по равномерной норме сходится интеграл

$$Y_1 = \int_{\mathfrak{P}} F(P)(\cdot, dP\psi), \tag{4.3}$$

где $F(P)$—произвольная непрерывная вектор-функция со значениями из $\mathfrak{H}$. Отсюда будет вытекать сходимость интеграла (4.1), получающегося из (4.3) при $F(P)=a(P)P\chi$.

Для произвольного числа $\varepsilon(>0)$ через $\mathfrak{z}_\varepsilon$ обозначим разбиение цепочки $\mathfrak{P}$, обладающее тем свойством, что

$$|F(P^{(1)})-F(P^{(2)})|<\varepsilon,$$

для всякой пары проекторов $P^{(1)}, P^{(2)}\in\mathfrak{P}$, находящейся между соседними проекторами разбиения $\mathfrak{z}_\varepsilon$.

Пусть $\mathfrak{z}_1$ и $\mathfrak{z}_2$—произвольные продолжения разбиения $\mathfrak{z}_\varepsilon$ и S_1 и S_2—некоторые частные суммы интеграла (4.3), отвечающие этим разбиениям $\mathfrak{z}_1$ и $\mathfrak{z}_2$. Обозначим через $\mathfrak{z}=\{P_j\}_0$ объединение разбиений $\mathfrak{z}_1$ и $\mathfrak{z}_2$. Тогда легко видеть, что разность $\Delta S=S_1-S_2$ можно представить в виде

$$\Delta S=\sum_{j=1}^{n}\left(F(P_j')-F(P_j'')\right)(\cdot, \Delta P_j\psi),$$

причем

$$|F(P_j')-F(P_j'')|<\varepsilon \qquad (j=1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, для любого вектора $f\in\mathfrak{H}$

$$|\Delta Sf|\leqq\varepsilon\sum_{j=1}^{n}|(\Delta P_jf, \Delta P_j\psi)|.$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{n}|(\Delta P_jf, \Delta P_j\psi)|\leqq\sum_{j=1}^{n}|\Delta P_jf|\,|\Delta P_j\psi|\leqq\Big(\sum_{j=1}^{n}|\Delta P_jf|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\Delta P_j\psi|^2\Big)^{1/2}\leqq|f|,$$

то

$$|\Delta S|<\varepsilon.$$

Отсюда обычным образом легко выводится равномерная сходимость интеграла (4.3), а с ней и равномерная сходимость интеграла (4.1).

Докажем теперь соотношения (4.2).

Так как оператор Y, определяемый равенством (4.1), имеет вид

$$Y=\int_{\mathfrak{P}}a(P)(\cdot, dP\psi)P\chi,$$

то

$$Y^*=\int_{\mathfrak{P}}\overline{a(P)}(\cdot, P\chi)dP\psi,$$

и стало быть,

$$YY^*=\int_{\mathfrak{P}}|a(P)|^2\,|dP\psi|^2(\cdot, P\chi)P\chi.$$

Легко видеть, что

$$YY^* \leqq \max_{P\in\mathfrak{P}} |a(P)|^2 \int_{\mathfrak{P}} |dP\psi|^2 (\cdot, P\chi)P\chi. \tag{4.4}$$

Оператор

$$\int_{\mathfrak{P}} |dP\psi|^2 (\cdot, P\chi)P\chi = Y_1 Y_1^*, \tag{4.5}$$

где

$$Y_1 = \int_{\mathfrak{P}} (\cdot, dP\psi)P\chi = \int_{\mathfrak{P}} PX\, dP.$$

Следовательно, из (4.4) и (4.5) вытекают соотношения (4.2).

Основной в этом параграфе является

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{P}$—произвольная непрерывная цепочка и K—любой конечномерный оператор, для которого все операторы $I-PKP$ ($P\in\mathfrak{P}$) обратимы. Тогда интеграл*

$$Y = \int_{\mathfrak{P}} (I-PKP)^{-1} PK\, dP \tag{4.6}$$

равномерно сходится и оператор $Y\in\mathfrak{S}_\Omega$.

Следовательно, оператор $(I-K)^{-1}$ допускает специальную факторизацию (2.5) *относительно цепочки $\mathfrak{P}$ с операторами $X_\pm\in\mathfrak{S}_\Omega$.*

Доказательство. Оператор K можно представить в виде

$$K = \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \psi_j)\chi_j,$$

где $\{\psi_j\}_1^n$, $\{\chi_j\}_1^n$—линейно незавицимые системы векторов из $\mathfrak{H}$. Уравнение

$$g - PKPg = f \tag{4.7}$$

можно переписать в виде системы

$$g = f + \sum_{j=1}^{n} \xi_j P\chi_j,$$

$$\xi_j = (g, P\psi_j) \qquad (j=1, 2, \dots, n).$$

Отсюда следует, что уравнение (4.7) эквивалентно системе

$$\xi_j - \sum_{j=1}^{n} (P\chi_k, \psi_j)\xi_k = (f, P\psi_j) \qquad (j=1, 2, \dots, n).$$

Так как оператор $I-PKP$ обратим, то определитель

$$\Delta_p = |\delta_{jk} - (P\chi_k, \psi_j)|_1^n \qquad (P\in\mathfrak{P})$$

нигде на цепочке $\mathfrak{P}$ не обращается в нуль.

Легко видеть, что решение g уравнения (4. 7) находится по формуле

$$g=\frac{1}{\Delta_p}\begin{vmatrix} f & (f, P\psi_1) \dots (f, P\psi_n) \\ P\chi_1 & \\ \vdots & \Delta_p \\ P\chi_n & \end{vmatrix},$$

и следовательно, оператор $(I-PKP)^{-1}PK\Delta P$ будет иметь вид

$$(4.8) \qquad (I-PKP)^{-1}PK\Delta P = \frac{1}{\Delta_p}\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} P\chi_j & (P\chi_j, \psi_1) \dots (P\chi_j, \psi_n) \\ P\chi_1 & \\ \vdots & \Delta_p \\ P\chi_n & \end{vmatrix}(\cdot, \Delta P\psi_j).$$

Разлагая определители из правой части равенства (4. 8) по элементам первой строки, получим

$$(4.9) \qquad (I-PKP)^{-1}PK\Delta P = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(P)(\cdot, \Delta P\psi_j)P\chi_k,$$

где $a_{jk}(P)$ ($P\in\mathfrak{P}$)—определенные комплекснозначные непрерывные функции.

Из равенства (4. 9) в силу леммы 4. 1 вытекает, что интеграл (4. 6) сходится по равномерной норме. Согласно той же лемме 4. 1, каждый из операторов

$$(4.10) \qquad \int_{\mathfrak{P}} a_{jk}(P)(\cdot, dP\psi_j)P\psi_k \qquad (j, k=1, 2,\dots, n)$$

принадлежит с. н. идеалу $\mathfrak{S}_\Omega$; следовательно, оператор Y, определенный равенством (4. 6), также приналежит $\mathfrak{S}_\Omega$.

Теорема доказана.

§ 5. Вспомогательная лемма о факторазации в нормированных кольцах

В настоящем параграфе приводится одна лемма о факторизации элементов, „близких" к единичному, играющая важную роль в доказательстве основной теоремы о факторизации операторов по цепочке (§ 6). Предложения, родственные этой лемме по содержанию и доказательству, имеются в работах Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе [18], Г. Бакстера [19] и Н. Винера и П. Мазани [20].

Лемма 5. 1. *Пусть R—произвольное нормированное кольцо с единицей e ($|e|_R=1$), содержащее два замкнутых подкольца $R_\pm$, пересекающиеся только в нуле.*

Пусть, кроме того, в R существует двусторонний идеал $\mathfrak{J}$ ($\subseteq R$) со свойствами:

а) *в* $\mathfrak{J}$ *определена своя норма* $|c|_{\mathfrak{J}}$ $(c\in\mathfrak{J})$, *превращающая* $\mathfrak{J}$ *в банахово пространство, причем*

$$l=\sup_{c\in\mathfrak{J}}\frac{|c|_R}{|c|_{\mathfrak{J}}}<\infty \qquad (c\in\mathfrak{J}), \tag{5.1}$$

б) *существует константа* $k\ (>0)$ *такая, что для любых* $x, y\in R$ *и* $c\in\mathfrak{J}$

$$|xcy|_{\mathfrak{J}}\leqq k|x|_R|c|_{\mathfrak{J}}|y|_R,$$

в) *любой элемент* $c\in\mathfrak{J}$ *представим единственным образом в виде:* $c=c_+ +c_-$, *где* $c_\pm\in R_\pm$.

Тогда существует такое число δ $(0<\delta<1)$, *что для всякого* $a\in\mathfrak{J}$ *с нормой* $|a|_{\mathfrak{J}}<\delta$ *элемент* $(e-a)^{-1}$ *представим в виде*

$$(e-a)^{-1}=(e+b_+)(e+b_-) \qquad (b_\pm\in R_\pm), \tag{5.2}$$

причем

$$b_+ = a_+ +[aa_+]_+ +[a[aa_+]_+]_+ +\dots \tag{5.3}$$

и

$$b_- = a_- +[a_-a]_- +[[a_-a]_-a]_- +\dots \tag{5.4}$$

Сходимость рядов (5.3), (5.4) *понимается в смысле сходимости по норме кольца* R.

Доказательство. Через P обозначим оператор, сопоставляющий каждому элементу $c\in\mathfrak{J}$ элемент $c_+(\in R)$.

Оператор P является линейным замкнутым оператором. В самом деле, пусть

$$\lim_{n\to\infty}|x^{(n)}-x|_{\mathfrak{J}}=0 \qquad (x^{(n)}, x\in\mathfrak{J})$$

и

$$\lim_{n\to\infty}|x_+^{(n)}-y_+|_R=0.$$

Тогда последовательность $x_-^{(n)}=x^{(n)}-x_+^{(n)}$ сходится по норме кольца R и имеет своим пределом элемент $y_-=x-y_+$, который, очевидно, принадлежит подкольцу R_-. Из равенства $x=y_+ +y_-$ вытекает, что

$$Px=x_+=y_+.$$

Кроме того, оператор P определен на всем банаховом простанстве $\mathfrak{J}$; следовательно, в силу теоремы Банаха он ограничен.

Параллельно с оператором P будем рассматривать оператор $Q=I-P$, для которого

$$Qc=c_- \qquad (c\in\mathfrak{J}).$$

Очевидно, Q является линейным ограниченным оператором, действующим из $\mathfrak{J}$ в R, и

$$|Q|\leqq l+|P|,$$

где через l обозначена величина из (5.1).

Покажем, что число

$$\delta=\min\left(1, \frac{1}{(l+2|P|)(k+1)}\right) \tag{5. 5}$$

является искомым. Для этого рассмотрим уравнение

$$x-Pax = Pa, \tag{5. 6}$$

где a—произвольный элемент из $\mathfrak{J}$ с нормой $|a|_{\mathfrak{J}}<\delta$.

Равенством

$$Sx=Pax \qquad (x\in R)$$

определяется линейный ограниченный оператор, действующий в R. Для него

$$|Sx|_R \leqq |P|\, |ax|_{\mathfrak{J}} \leqq k\,|P|\,|a|_{\mathfrak{J}}\,|x|_R,$$

и стало быть, в силу (5. 5) $|S|<1$. Следовательно, оператор $I-S$ имеет обратный

$$(I-S)^{-1} = I+S+S^2+\dots$$

Таким образом, уравнение (5. 6) имеет единственное решение $x=b_+$, получаемое по формуле

$$b_+ = Pa+P(aPa)+P\big(aP(aPa)\big)+\dots \tag{5. 7}$$

и, очевидно, принадлежащее подкольцу R_+.

Для него

$$(e-a)b_+ = a+Q(-a-ab_+)$$

или

$$(e-a)(e+b_+) = e+y_-, \tag{5. 8}$$

где $y_- = Q(-a-ab_+)\in R_-$.

Так как

$$y_- = -\ Q\big(a(e+Pa+P(aPa)+\dots)\big),$$

то

$$|y_-|_R \leqq \frac{|Q|\,|a|_{\mathfrak{J}}}{1-k|P|\,|a|_{\mathfrak{J}}} \tag{5. 9}$$

Принимая во внимание, что $|Q|<l+|P|$, получим в силу (5. 9), что $|y_-|_R<1$. Следовательно, $(e+y_-)^{-1}=e+b_-$, где $b_-\in R_-$.

Отсюда вытекает, что равенство (5. 8) можно переписать следующим образом

$$(e-a)^{-1} = (e+b_+)(e+b_-). \tag{5. 10}$$

Для завершения доказательства леммы осталось показать, что элемент b_- выражается формулой (5. 4). Так как

$$|b_+|_R \leqq \frac{|P|\,|a|_{\mathfrak{J}}}{1-|P|\,|a|} < 1,$$

то $(e+b_+)^{-1}=e+y_+$, где $y_+\in R_+$. Следовательно,

$$(e+b_-)(e-a) = e+y_+$$

или

$$b_- - b_-a = a+y_+.$$

Из последнего равенства вытекает, что элемент b_- является решением уравнения

$$x-Qxa = Qa.$$

Для оператора T, определенного равенством

$$Tx=Qxa,$$

имеем

$$|Tx|_R \leqq k|Q|\,|x|_R\,|a|_{\mathfrak{J}},$$

откуда в силу (5. 5) $|T|<1$. Поэтому имеет место разложение

$$x = b_- = \sum_{n=1}^{\infty} T^n Qa,$$

которое совпадает с разложением (5. 4).

Лемма доказана. При её доказательстве выяснилось, что при указанном выборе числа δ элементы $e+b_\pm$ оказываются обратимыми и $(e+b_\pm)^{-1}-e\in R_\pm$.

Пусть множество D состоит из всех элементов $a\in\mathfrak{J}$, для которых элемент $e-a$ обратим и $(e-a)^{-1}$ допускает факторизацию (5. 1) с обратимыми множителями $e+b_\pm$, для которых $(e+b_\pm)^{-1}-e\in R_+$. Такая факторизация для $a\in D$ будет единственной.

Из леммы можно вывести, что при указанных в ней условиях D является открытой частью $\mathfrak{J}$ и отображается непрерывно в $R_\pm$ операторами соответствия $a\to b_+$ и $a\to b_-$.

§ 6. Основная теорема о факторизации операторов в с. н. идеалах

1. Теорема 6. 1. *Пусть $\mathfrak{P}$—некоторая непрерывная цепочка, $\mathfrak{S}_I$—произвольный сепарабельный с. н. идеал и $\mathfrak{S}_{II}$—какой-либо с. н. идеал, содержащий $\mathfrak{S}_I$: $\mathfrak{S}_{II}\supseteq\mathfrak{S}_I$.*

Если для всякого оператора $T\in\mathfrak{S}_{II}$ интеграл

$$S=\int_{\mathfrak{P}} PT\,dP \tag{6.1}$$

сходится и принадлежит $\mathfrak{S}_{II}$, то для всякого оператора $T\in\mathfrak{S}_I$, удовлетворяющего необходимому условию а) (из теоремы 3. 1), интегралы (3. 1) сходятся по равномерной норме, операторы $X_I\in\mathfrak{S}_{II}$ и, следовательно, оператор $A=(I-T)^{-1}$ допускает специальную факторизацию (2. 5) с операторами $X_I\in\mathfrak{S}_{II}$.

Доказательство. Обозначим через R нормированное кольцо, полученное присоединением к $\mathfrak{S}_{II}$ единичного оператора. Норма в R определяется равенством

$$|\lambda I + A|_R = |\lambda| + |A|_{\mathfrak{S}_{II}} \qquad (A \in \mathfrak{S}_{II}).$$

Через R_+ обозначим нормированное кольцо, полученное присоединением единичного оператора к $\mathfrak{S}_{II}(\mathfrak{P})$, а через R_- обозначим кольцо $\mathfrak{S}_{II}(\mathfrak{P}^+)$. Пересечение $R_+ \cap R_-$ состоит из нуль-оператора.

Множество $\mathfrak{J} = \mathfrak{S}_I$ образует двусторонний идеал кольца R, и всякий элемент $C \in \mathfrak{J}$ единственным образом представляется в виде

$$C = C_+ + C_- \qquad (C_\pm \in R_\pm),$$

где

$$C_+ = \int_{\mathfrak{P}} PC\,dP \quad \text{и} \quad C_- = \int_{\mathfrak{P}} dPCP,$$

т. е. идеал $\mathfrak{J}$ обладает свойством в) из леммы 5. 1. Кроме того, легко видеть, что идеал $\mathfrak{J}$ обладает и всеми остальными свойствами а) и б) из леммы 5. 1. Следовательно, в силу этой же леммы, существует число δ (>0) такое, что для всех операторов $T \in \mathfrak{S}_I$ с нормой $|T|_{\mathfrak{S}_I} < \delta$ оператор $(I-T)^{-1}$ допускает специальную факторизацию (2. 5) относительно цепочки $\mathfrak{P}$ с $X_\pm \in \mathfrak{S}_{II}$.

Пусть теперь T—произвольный оператор из $\mathfrak{S}_I$, удовлетворяющий необходимому условию а) из теоремы 3. 1, и пусть K—конечномерный оператор такой, что

$$|T-K|_{\mathfrak{S}_I} < \delta.$$

Обозначим через M разность $T-K$. Как уже отмечалось, согласно лемме 5. 1 оператор $(I-M)^{-1}$ допускает специальную факторизацию

$$(I-M)^{-1} = (I+Z_+)(I+Z_-) \qquad (Z_\pm \in \mathfrak{S}_{II}).$$

Следовательно, для оператора $I-T = I-M-K$ имеет место представление

$$I-T = (I+Z_-)^{-1}\big(I-(I+Z_-)K(I+Z_+)\big)(I+Z_+)^{-1}$$

или

$$(6.2) \qquad (I-T)^{-1} = (I+Z_+)(I-K_1)^{-1}(I+Z_-),$$

где K_1-конечномерный оператор, равный $(I+Z_-)K(I+Z_+)$.

Из равенства (6. 2) легко вывести, что

$$I-PK_1P = (I-PZ_-P)^{-1}(I-PTP)I-PZ_+P)^{-1} \qquad (P \in \mathfrak{P}).$$

Стало быть, оператор $I-PK_1P$ обратим при любом $P \in \mathfrak{P}$.

В силу теоремы 4. 1 оператор $(I-K_1)^{-1}$ допускает специальную факторизацию

$$(I-K_1)^{-1} = (I+V_+)(I+V_-).$$

Таким образом,

$$(I-T)^{-1} = (I+Z_+)(I+V_+)(I+V_-)(I+Z_-).$$

Очевидно, теорема будет доказана, коль скоро будет показано, что операторы $V_{\pm}\in\mathfrak{S}_{II}$.

В доказательстве теоремы 4.1 было установлено, что каждый из операторов $V_{\pm}$ можно представить в виде суммы m^2 ($m=\dim K_1$) слагаемых $L_j^{\pm}$ таких, что

$$s_n(L_j^{\pm})\leqq k_j s_n\Big(\int_{\mathfrak{P}} PX_j\,dP\Big) \qquad (n=1, 2, \ldots;\ j=1, 2, \ldots, m^2),$$

где числа k_j не зависят от n, а X_j—одномерные операторы. Согласно условию теоремы с. н. идеал $\mathfrak{S}_{II}$ содержит все вольтерровы операторы $Y_j=\int_{\mathfrak{P}} PX_j dP$.

Следовательно, в $\mathfrak{S}_{II}$ содержатся все операторы $L_j^{\pm}$, а с ними и операторы $V_{\pm}$.

Теорема доказана.

В силу результатов § 1 теорема 6.1 применима, если в качестве $\mathfrak{S}_I$ например, взять с. н. идеалы $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_p$ ($1<p<\infty$), $\mathfrak{S}_\omega$ и — в качестве $\mathfrak{S}_{II}$ — соответственно с. н. идеалы $\mathfrak{S}_\Omega$, $\mathfrak{S}_p$, $\mathfrak{S}_\infty$.

Замечание 6.1. Нетрудно вывести, что если оператор $T\in\mathfrak{S}_I$ удовлетворяет необходимому условию a) теоремы 3.1 то и все операторы некоторой его окрестности в $\mathfrak{S}_I$ будут удовлетворять этому условию, и интегралы (3.1) будут непрерывно отображать эту окрестность в $\mathfrak{S}_{II}$.

2. Напомним, что если оператор $T=H$ самосопряжен, то условие a) теоремы 3.1 не зависит от непрерывной цепочки $\mathfrak{P}$, и означает, что оператор $I-H$ положителен.

Для этого случая теорему 6.1 можно дополнить еще следующей.

Теорема 6.2. *Пусть $\mathfrak{P}$ — непрерывная цепочка и $\mathfrak{S}_I$, $\mathfrak{S}_{II}$ — два произвольных двусторонних идеала кольца $\mathfrak{R}$, причем трансформатор $\mathfrak{T}(\cdot\,;\mathfrak{P})$ отображает $\mathfrak{S}_I$ в $\mathfrak{S}_{II}$.*

Если некоторый самосопряженный оператор $(I-H)^{-1}$ ($H\in\mathfrak{S}_I$) допускает специальную факторизацию

$$(I-H)^{-1}=(I+X_+)(I+X_+^*), \tag{6.3}$$

то в этой факторизации $X_+\in\mathfrak{S}_{II}$.

Факторизация (6.3) *всегда возможна, если кроме необходимого условия — положительности оператора $I-H$ — выполняется ещё условие: $H\in\mathfrak{S}_\omega$.*

После теоремы 6.1 эта теорема представляет интерес лишь в том случае, когда $\mathfrak{S}_I$ не является сепарабельным с. н. идеалом.

Доказательство. Пусть оператор $(I-H)^{-1}$ ($H\in\mathfrak{S}_I$) допускает специальную факторизацию (6.3). Образуем оператор Y по формуле

$$Y=(2I+X_+)^{-1}X_+. \tag{6.4}$$

Для него

$$Y_R = \frac{1}{2}(Y+Y^*) = \frac{1}{2}(2I+X_+)^{-1}[X_+(2I+X_+^*)+(2I+X_+)X_+^*](2I+X_+^*)^{-1} =$$

$$= (2I+X_+)^{-1}(X_+ + X_+^* + X_+X_+^*)(2I+X_+^*)^{-1},$$

или

$$Y_R = (2I+X_+)^{-1}T_1(2I+X_+^*)^{-1},$$

где $T_1 = I-(T)^{-1}-I \in \mathfrak{S}_I$.

Оператор Y обладает собственной цепочкой $\mathfrak{P}$, и следовательно,

$$Y = 2\mathfrak{T}(Y_R;\ \mathfrak{N}).$$

Таким образом, оператор $Y \in \mathfrak{S}_{II}$.

Учитывая, что оператор Y вольтерров, получаем из (6. 4)

$$X_+ = (I-Y)^{-1}2Y,$$

откуда $X_+ \in \mathfrak{S}_{II}$.

Теорема доказана.

По-видимому, последнее утверждение теоремы 6. 2 является „точным" в том смысле, что, если H не принадлежит $\mathfrak{S}_\omega$, то найдется цепочка $\mathfrak{P}$, относительно которой специальная факторизация оператора $(I-H)^{-1}$ окажется невозможной.

Вспоминая предложение 5° § 1, можно сделать следующий вывод из доказанной теоремы.

Если собственные числа $\lambda_j(H)$ оператора $H=H^*(\in\mathfrak{S}_\infty)$ имеют поведение

$$\lambda_n(H) = O(n^{1/p}L(n)) \qquad (n\to\infty), \tag{6. 5}$$

где $1<p<\infty$, а $L(\nu)$—положительная медленно изменяющаяся функция, то положительный оператор $I-H$ допускает факторизацию (6. 3) и

$$s_n(X_+) = O(n^{1/p}L(n)) \qquad (n\to\infty). \tag{6. 6}$$

В силу каждой из теорем 6. 1 и 6. 2 это утверждение остается верным, если в (6. 5) и (6. 6) заменить „O" на „o".

§ 7. Специальная факторизация операторов относительно цепочки с разрывами

Как уже отмечалось в § 2, специальная факторизация относительно цепочки с разрывами отличается от специальной факторизации по непрерывной цепочке наличием диагонального множителя.

В настоящем параграфе указываются на те изменения, которые необходимо внести в формулировки и доказательства теорем предыдущих параграфов для того, чтобы они остались в силе и для разрывных цепочек.

1. Для внесения этих изменений понадобятся новые понятия интеграла по цепочке. Пусть $\mathfrak{P}$-произвольная цепочка, $F(P)$ $(P\in\mathfrak{P})$—оператор-функция

со значениями из $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{z} \doteq \{P_j\}_0^n$—разбиение цепочки $\mathfrak{P}$. Под интегралами

$$(7.1)\qquad \int\limits_{\mathfrak{P}}^{m} F(P)\,dP, \quad \int\limits_{\mathfrak{P}}^{M} F(P)\,dP$$

будем понимать предел в смысле Шатуновского соответственных интегральных сумм вида

$$S_m = \sum_{j=1}^{n} F(P_{j-1})\Delta P_j, \quad S_M = \sum_{j=1}^{n} F(P_j)\Delta P_j.$$

Если интеграл

$$(7.2)\qquad \int\limits_{\mathfrak{P}} F(P)\,dP$$

сходится по равномерной норме, то, очевидно, сходятся интегралы (7. 1) и

$$(7.1)\qquad \int\limits_{\mathfrak{P}} F(P)\,dP = \int\limits_{\mathfrak{P}}^{m} F(P)\,dP = \int\limits_{\mathfrak{P}}^{M} F(P)\,dP.$$

Легко видеть, что условие

$$[F(P^+) - F(P^-)](P^+ - P^-) = 0,$$

где (P^-, P^+)—произвольный разрыв цепочки $\mathfrak{P}$, являющееся необходимым условием сходимости интеграла (7. 2), ни в какой мере не является необходимым для сходимости интегралов (7. 1).

Рассмотрим трансформаторы $\mathfrak{T}_M, \mathfrak{T}_m$, определенные равенствами

$$\mathfrak{T}_{m,M}(X) = \mathfrak{T}_{m,M}(X;\ \mathfrak{P}) = \int\limits_{\mathfrak{P}}^{m,M} PX\,dP.$$

Легко видеть, что если сходится по равномерной норме хотя бы один из интегралов $\mathfrak{T}_{m,M}$, то сходится и второй и они связаны между собой равенством

$$\mathfrak{T}_M(X) = \mathfrak{T}_m(X) + \sum_j (P_j^+ - P_j^+)X(P_j^+ - P_j^-),$$

где (P_j^-, P_j^+)—полный набор всех разрывов цепочки $\mathfrak{P}$.

Если оба интеграла $\mathfrak{T}_{m,M}(X)$ сходятся по равномерной норме и равны между собой, то без труда можно убедиться, что

$$\mathfrak{T}_{m,M}(X) = \int\limits_{\mathfrak{P}} PX\,dP.$$

Если интеграл $\mathfrak{T}_m(X)$ сходится, то сходится интеграл

$$\mathfrak{T}(Y) = \int\limits_{\mathfrak{P}} PY\,dP,$$

где

$$Y = X - \sum_j (P_j^+ - P_j^-)X(P_j^+ - P_j^-),$$

причем
$$\mathfrak{T}(Y)=\mathfrak{T}_m(X).$$

Каждый из трансформаторов $\mathfrak{T}_{m,M}(\cdot\,;\mathfrak{P})$ является в $\mathfrak{S}_\infty$ неограниченным проектором. Множество значений $\mathfrak{T}_m$ совпадает с подпространством всех вольтерровых операторов, обладающих собственной цепочкой $\mathfrak{P}$, а множество значений $\mathfrak{T}_M$ совпадает с пространством всех операторов из $\mathfrak{S}_\infty$ (не обязательно вольтерровых), обладающих собственной цепочкой $\mathfrak{P}$.

Можно также легко показать, что если трансформатор $\mathfrak{T}(\cdot\,;\mathfrak{P})$ при любой непрерывной цепочке отображает некоторый сепарабельный с. н. идеал $\mathfrak{S}_I$ в с. н. идеал $\mathfrak{S}_{II}$, то при любой цепочке $\mathfrak{P}$ каждый из трансформаторов $\mathfrak{T}_{m,M}(\cdot\,;\mathfrak{P})$ также отображает $\mathfrak{S}_I$ в $\mathfrak{S}_{II}$.

2. Аналогом теоремы 3. 1 для случая цепочки с разрывами является следующая:

Теорема 7. 1. *Для того, чтобы оператор* $A=(I-T)^{-1}$ $(A\in\mathfrak{R},\, T\in\mathfrak{S}_\infty)$ *допускал специальную факторизацию относительно максимальной цепочки* $\mathfrak{P}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

а) *все операторы* $I-PTP$ $(P\in\mathfrak{P})$ *были обратимы*, б) *сходился по равномерной норме хотя бы один из интегралов*

$$(7.\,3)\qquad \begin{aligned} X_+ &= \int_{\mathfrak{P}}^{m}(I-PTP)^{-1}PT\,dP, & X_- &= \int_{\mathfrak{P}}^{m}dPTP(I-PTP)^{-1}.\\ \tilde{X}_+ &= \int_{\mathfrak{P}}^{M}(I-PTP)^{-1}PT\,dP, & \tilde{X}_- &= \int_{\mathfrak{P}}^{M}dPTP(I-PTP)^{-1}. \end{aligned}$$

Если хотя бы один из интегралов (7. 3) *сходится по равномерной норме, то сходятся все остальные и имеют место равенства*

$$(7.\,4)\qquad A=(I+X_+)(I+\tilde{X}_-)=(I+\tilde{X}_+)(I+X_-)$$

и специальная факторизация

$$(7.\,5)\qquad A=(I+X_+)D(I+X_-),$$

где

$$(7.\,6)\qquad D=I+\sum_j(P_j^+-P_j^-)\left[(I-P_j^+TP_j^+)^{-1}-I\right](P_j^+-P_j^-),$$

а $\{(P_j^-,P_j^+)\}$*—полный набор разрывов цепочки* $\mathfrak{P}$.

Доказательство. Пусть оператор A допускает специальную факторизацию (7. 5). Тогда полагая $D=I+L$ $(L\in\mathfrak{S}_\infty)$, получим

$$(7.\,7)\qquad A=(I+X_+)(I+\tilde{X}_-)=(I+\tilde{X}_+)(I+X_-),$$

где

$$(7.\,8)\qquad \tilde{X}_-=L+X_-+LX_- \quad\text{и}\quad \tilde{X}_+=L+X_++X_+L.$$

Очевидно, $\tilde{X}_+\in\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{P})$, а $\tilde{X}_-\in\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{P}^\perp)$.

Повторяя теперь для равенств (7. 8) первую часть доказательства теоремы 3. 1 и заменяя при этом интеграл $\int\limits_{\mathfrak{P}}$ на соотвествующий интеграл $\int\limits_{\mathfrak{P}}^{m}, \int\limits_{\mathfrak{P}}^{M}$, получим, что выполняется условие а) и что операторы $X_\pm$, $\tilde{X}_\pm$ выражаются сходящимися по равномерной норме интегралами (7. 3).

Из равенства (7. 8) вытекает, что

$$(P_j^+-P_j^-)\tilde{X}_+(P_j^+-P_j^-)=(P_j^+-P_j^-)L(P_j^+-P_j^-)+(P_j^+-P_j^-)X_+L(P_j^+-P_j^-).$$

Так как

$$(P_j^+-P_j^+)X_+L(P_j^+-P_j^-=(P_j^+-P_j^-)X_+(P_j^+-P_j^-)L$$

и $(P_j^++P_j^-)X(P_j^+-P_j^-)=0$, то

$$(P_j^+-P_j^-)\tilde{X}_+(P_j^+-P_j)=(P_j^+-P_j^-)L(P_j^+-P_j^-).$$

Учитывая, что оператор $L\in\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{P})\cap\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{P}^\perp)$, получаем

$$L=\sum_j(P_j^+-P_j^-)L(P_j^+-P_j^-)=\sum_j(P_j^+-P_j^-)\tilde{X}_+(P_j^+-P_j^-).$$

Подставляя в последнее равенство интегральное выражение для $\tilde{X}_+$ из (7. 3), без труда получаем

$$\sum_{j=1}^{N}(P_j^+-P_j^+)\tilde{X}_+(P_j^+-P_j^-)=\sum_{j=1}^{N}(P_j^+-P_j^-)\left((I-P_j^+TP_j^+)^{-1}-I\right)(P_j^+-P_j^-).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $N\to\infty$, приходим к равенству (7. 6).

Если хотя бы один из интегралов (7. 3) сходится, например, интеграл X_-, то повторяя расуждения из второй части доказательства теоремы 3. 1, убеждаемся в том, что оператор A допускает факторизацию

$$A=(I+Y_+)(I-X_-),$$

где $Y_+\in\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{P})$.

Для извлечения из оператора $I+Y_+$ диагонального множителя образуем оператор

$$L=\sum_j(P_j^+-P_j^-)Y_+(P_j^+-P_j^-)\quad(\in\mathfrak{S}_\infty).$$

Легко видеть, что вместе с оператором $I+Y_+$ будет обратимой и его „диагональная" часть—оператор $I+L$. Обозначим через $Z_+(\in\mathfrak{S}_\infty)$ оператор, определенный равенством:

$$I+Z_+=(I+Y_+)(I+L)^{-1}.$$

Очевидно, оператор Z_+ обладает собственной цепочкой $\mathfrak{P}$. Кроме того,

$$(P_j^+-P_j^-)(I+Y_+)(I+L)^{-1}(P_j^+-P_j^-)=(P_j^+-P_j^-)(I+Y_+)(P_j^+-P_j^-)(I+L)^{-1}=$$

$$=(P_j^+-P_j^-)(I+L)(I+L)^{-1}=P_j^+-P_j^-,$$

и стало быть,

$$(P_j^+ - P_j^-) Z_+ (P_j^+ - P_j^-) = 0.$$

Таким образом, Z_+—вольтерров оператор, и оператор A допускает специальную факторизацию

$$A = (I+Z_+)(I+L)(I+X_-).$$

Теорема доказана.

В качестве непосредственного следствия из теоремы 7. 1 получаются формулы (2. 1) и (2. 2) для множителей из факторизации матриц.

Отметим также, что в формулировке теоремы 7. 1 интегралы $\tilde{X}_\pm$ могут быть заменены следующими

$$\tilde{X}_- = \int_{\mathfrak{P}}^{M} ((I-PTP)^{-1} - I)\, dP, \quad \tilde{X}_+ = \int_{\mathfrak{P}}^{M} dP((I-PTP)^{-1} - I).$$

Из теоремы 7. 1 можно легко вывести

Следствие 7. 1. *Пусть $T(\in\mathfrak{S}_\infty)$—оператор, для которого относительно некоторой максимальной цепочки $\mathfrak{P}$ выполняется условие а) и интеграл*

$$\int_{\mathfrak{P}}^{m} (I-PTP)^{-1} PT\, dP$$

сходится по равномерной норме. Тогда для того, чтобы

$$\int_{\mathfrak{P}}^{m} (I-PTP)^{-1} PT\, dP = \int_{\mathfrak{P}}^{M} (I-PTP)^{-1} PT\, dP, \tag{7.9}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(P_j^+ - P_j^-)(I - P_j^+ T P_j^+)^{-1} (P_j^+ - P_j^-) = P_j^+ - P_j^-. \tag{7.10}$$

Если условие (7. 10) *выполняется, то оба интеграла* (7. 9) *равны интегралу*

$$\int_{\mathfrak{P}} (I-PTP)^{-1} PT\, dP.$$

Для специальной факторизации оператора относительно цепочки с разрывами имеет место теорема, аналогичная теореме 3. 2.

3. Теорема 7. 1 позволяет получить новые абстрактные треугольные представления для операторов, „мало” отличающихся от единичного. Так мы называем всякий оператор $Y=I+X$, где X—вольтерров оператор. В этом представлении оператор Y восстанавливается по своей собственной максимальной цепочке и своему операторному модулю $(YY^*)^{1/2}$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{P}$ некоторая максимальная цепочка вольтеррова оператора X и $T = -(YY^*)^{-1} + I$ $(\in\mathfrak{S}_\infty)$. Тогда равенство

$$(I-T)^{-1} = YY^* = (I+X)(I+X^*)$$

дает специальную факторизацию оператора $(I-T)^{-1}$ и следовательно,

$$Y = I+X = I+\int\limits_{\mathfrak{P}} (I-PTP)^{-1}\, PT\, dP.$$

Полученное представление обобщается на случай операторов, „мало" отличающихся от унитарных, т. е. операторов вида $Y=U+T$ (U—унитарный оператор, $T\in\mathfrak{S}_\infty$), весь спектр которых находится на единичной окружности.

Основываясь на теореме Ю. И. Любича и В. И. Мацаева [25], можно построить собственную максимальную цепочку $\mathfrak{P}$ оператора $Y=U+X$ ($X\in\mathfrak{S}_\omega$), с помощью которой оператор Y представляется в следующем треугольном виде

$$Y = \Big(I+\int\limits_{\mathfrak{P}} (I-PTP)^{-1}\, PT\, dP\Big) \int\limits_{\mathfrak{P}}^{M} e^{i\varphi(P)}\, dP,$$

где $T=-(YY^*)^{-1}+I$, а $\varphi(P)$ ($P\in\mathfrak{P}$)—монотонная вещественная функция.

4. Имеет место следующее обобщение теоремы 6. 1.

Теорема 7. 2. *Пусть $\mathfrak{P}$—произвольная максимальная цепочка, $\mathfrak{S}_I$—произвольный сепарабельный с. н. идеал и $\mathfrak{S}_{II}$—какой-либо с. н. идеал, содержащий $\mathfrak{S}_I$: $\mathfrak{S}_I\subseteq\mathfrak{S}_{II}$.*

Если для всякого оператора $T\in\mathfrak{S}_{II}$ интеграл

$$S = \int\limits_{\mathfrak{P}}^{m} PT\, dP$$

сходится и принадлежит $\mathfrak{S}_{II}$, то для всякого оператора $T\in\mathfrak{S}_I$, удовлетворяющего необходимому условию а) (из теоремы 7. 1) интегралы (7. 3) *сходятся по равномерной норме, операторы $X_\pm$, $D-I\in\mathfrak{S}_{II}$ и следовательно, оператор $A=(I-T)^{-1}$ допускает специальную факторизацию* (7. 5) *с операторами $X_\pm$, $D-I\in\mathfrak{S}_{II}$.*

Доказательство. Эта теорема доказывается так же, как теорема 6. 1, после соответствующих обобщений на разрывную цепочку вспомогательных предложений—леммы 4. 1 и теоремы 4. 1.

Лемма 4. 1 сохраняет силу и для разрывной цепочки $\mathfrak{P}$, если в ней интеграл $\int\limits_{\mathfrak{P}}$ заменить любым из интегралов $\int\limits_{\mathfrak{P}}^{m}$, $\int\limits_{\mathfrak{P}}^{M}$, а на функцию $a(P)$ ($P\in\mathfrak{P}$) в случае бесконечного числа разрывов цепочки $\mathfrak{P}$, наложить следующее дополнительное условие

$$\lim_{j\to\infty} |a(P_j^+)-a(P_j^-)| = 0, \tag{7.11}$$

где $\{(P_j^-, P_j^+)\}$—полный набор разрывов цепочки $\mathfrak{P}$.

Легко видеть, что при этом дополнительном условии доказательство леммы почти без изменений остается в силе и для разрывной цепочки.

Доказательство теоремы 6.1 проводится независимо от характера цепочки вплоть до получения равенства 4.9.

Далее рассуждаем следующим образом. Все функции $a_{jk}(P)$ из (4.9) удовлетворяют дополнительному условию (7.11). В самом деле, заменяя в выражениях, определяющих функции $a_{jk}(P)$, векторы χ_j и ψ_j на векторы

$$\chi'_j = \chi_j - \sum_{k=M}^{N} (P_k^+ - P_k^-)\chi_j \quad \text{и} \quad \psi'_j = \psi_j - \sum_{k=M}^{N} (P_k^+ - P_k^-)\psi_j,$$

где N—достаточно большое число, придем к функциям $b_{jk}(P)$, которые сколь угодно мало отличаются от функций $a_{jk}(P)$ и обладают свойством

$$b_{jk}(P_r^+) = b_{jk}(P_r^-) \qquad (r = M, M+1, \ldots).$$

Таким образом, если в равенстве (4.10) символ $\int\limits_{\mathfrak{P}}$ заменить символом $\int\limits_{\mathfrak{P}}^{m}$, то полученный после этой замены интеграл будет сходиться по равномерной норме.

Теорема доказана.

§ 8. Факторизация фредгольмовых операторов второго рода

В настоящем параграфе специальная факторизация операторов будет проиллюстрирована на примере интегральных операторов Фредгольма второго рода, определяемых в $L_2^{(r)}(a, b)$ $(r \leqq \infty)$ некоторым непрерывным матричным ядром.

Через $L_2^{(r)}(a, b)$ обозначается гильбертово пространство, состоящее из всех r-мерных вектор-функций $f(t) = \{f_j(t)\}_1^r$ $(a \leqq t \leqq b)$ с измеримыми координатами $f_j(t)$ такими, что

$$|f|^2 = \int\limits_a^b \sum_{j=1}^{r} |f_j(t)|^2 \, dt < \infty.$$

Скалярное произведение в $L_2^{(r)}(a, b)$ определяется естественным образом

$$(f, g) = \int\limits_a^b \sum_{j=1}^{r} \overline{g_j(t)} f_j(t) \, dt.$$

В рассматриваемом случае естественно в качестве цепочки $\mathfrak{P}$ взять цепочку *усечения* $\hat{\mathfrak{P}} = \{\hat{P}(t)\}_{a \leqq t \leqq b}$, определяемую равенством

$$(\hat{P}(x) f)(t) = \begin{cases} f(t) & (a \leqq t \leqq x), \\ 0 & (x < t \leqq b) \end{cases} \qquad (f \in L_2^{(r)}(a, b)).$$

1. Наши рассмотрения начнем с общего случая—операторов с матрич-

ным ядром Гильберта—Шмидта. Такой оператор A будет задаваться формулой

$$(8.1)\qquad (Af)(t)=f(t)-\int_a^b T(t,s)f(s)\,ds \quad (f\in L_2^{(r)}(a,b)),$$

где $T(t,s)=\|T_{jk}(t,s)\|_1^n$ и

$$\int_a^b\int_a^b \sum_{j,k=1}^{r} |T_{jk}(t,s)|^2\,dt\,ds<\infty.$$

Оператор A вида (8. 1) будет обладать цепочкой $\hat{\mathfrak{P}}$ в том и только том случае, когда (почти всюду)

$$(8.2)\qquad T(t,s)=0 \quad \text{при} \quad a\leqq s<t\leqq b,$$

и дополнительной цепочкой $\hat{\mathfrak{P}}^{\perp}$ в том и только том случае, когда (почти всюду)

$$T(t,s)=0 \quad \text{при} \quad a\leqq t<s\leqq b.$$

В первом случае мы будем писать, что $T(t,s)=T_+(t,s)$ и называть это ядро *левым вольтерровым*, а во втором случае — $T(t,s)=T_-(t,s)$ и называть *правым вольтерровым.*

Если уравнение

$$(8.3)\qquad g(t)-\int_a^b T(t,s)g(s)ds=f(t)$$

разрешимо в $L_2^{(r)}(a,b)$ при любой правой части, то его решение представимо в виде

$$g(t)=f(t)+\int_a^b \Gamma(t,s)f(s)\,ds,$$

где $\Gamma(t,s)$—снова некоторое ядро Гильберта—Шмидта, называемое резольвентным ядром.

В рассматриваемом случае существование специальной факторизации оператора $A^{-1}=(I-T)^{-1}=(I+V_+)(I+V_-)$ будет означать существование правого и левого вольтерровых ядер Гильберта—Шмидта $V_+(t,s)$ и $V_-(t,s)$ таких, что

$$(8.4)\qquad \Gamma(t,s)=V_+(t,s)+V_-(t,s)+V_+(t,s)*V_-(t,s),$$

где символ $*$ означает операцию композиции ядер. Учитывая вольтерровость ядер $V_\pm(t,s)$, это соотношение можно подробнее расписать следующим образом:

$$(8.5)\qquad \Gamma(t,s)=\begin{cases} V_+(t,s)+\int_a^b V_+(t,r)V_-(r,s)\,dr & (a\leqq t<s\leqq b),\\ V_-(t,s)+\int_a^b V_+(t,r)V_-(r,s)\,dr & (a\leqq s\leqq t\leqq b).\end{cases}$$

Теоремы 3. 1 и 6. 1 позволяют сформулировать следующее предложение:

1°. *Для того, чтобы у уравнения* (8. 3) *с ядром Гильберта—Шмидта* $T(t, s)$ *существовала резольвента, представимая в виде* (8. 4), *где* $V_+(t, s)$ *и* $V_-(t, s)$*—левое и правое вольтерровы ядра Гильберта—Шмидта, необходимо и достаточно, чтобы при любом* ξ $(a<\xi\leqq b)$ *уравнение*

$$(8.6)\qquad g(t)-\int_a^{\xi} T(t, s)g(s)\,ds = f(t) \qquad (a\leqq t\leqq \xi)$$

было разрешимо в пространстве $L_2^{(2)}(a, \xi)$.

Теорема 6. 2 позволяет также утверждать, что если s-числа оператора T при некотором $p\,(1<p\leqq 2)$ удовлетворяет условию

$$\sum_n s_n^p(T)<\infty$$

или, например, условию

$$s_n(T)=o(n^{-1/p}) \qquad (n\to\infty),$$

то такому же условию будут удовлетворять s-числа операторов $V_\pm$.

Если же T—ядерный оператор, то

$$\sup_n \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} s_j(V_\pm)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{2j-1}}<\infty.$$

Вероятно, установление этих фактов методами обычной теории интегральных уравнений натолкнулось бы на большие трудности.

Отметим еще, что если $T(t, s)$—эрмитово-положительное ядро, то уравнение (8. 6) разрешимо при любом $\xi\leqq b$, коль скоро оно разрешимо при $\xi=b$.

2. В случае непрерывного матричного ядра $T(t, s)$ и $r<\infty$ это предложение допускает дальнейшее развитие. В этом случае, при условии разрешимости уравнения (8. 6) в $L_2^{(r)}(a, \xi)$ (каковое эквивалентно условию разрешимости увранения (8. 6) в пространстве непрерывных вектор-функций $C^{(r)}(a, \xi)$) у уравнения (8. 6) будет существовать непрерывное резольвентное ядро $\Gamma_\xi(t, s)$. Оно будет однозначно определяться из двух интегральных уравнений

$$(8.7)\qquad \Gamma_\xi(t, s)-\int_a^{\xi} T(t, r)\Gamma_\xi(r, s)\,dr = T(t, s) \qquad (a\leqq t, s\leqq \xi),$$

$$\Gamma_\xi(t, s)-\int_a^{\xi} \Gamma_\xi(t, r)T(r, s)\,dr = T(t, s) \qquad (a\leqq t, s\leqq \xi).$$

Заметим, что если резольвента $\Gamma_\xi(t, s)$ существует при любом ξ $(a \leqq \xi \leqq b)$, то из формул Фредгольма, представляющих ее в виде отношения минора Фредгольма и определителя Фредгольма, легко вывести, что функция $\Gamma_\xi(t, s)$ будет непрерывной по совокупности переменных ξ, t, s и, более того, по переменной ξ она будет непрерывно дифференцируемой.

Вместо предложения 1° теперь можно сформулировать более полное предложение.

2°. *Для того, чтобы у уравнения* (8. 3) *с непрерывным ядром* $T(t, s)$ *существовала резольвента* $\Gamma(t, s)$, *представимая в виде* (8. 4), *необходимо и достаточно, чтобы при любом* ξ $(a < \xi \leqq b)$ *существовала резольвента* $\Gamma_\xi(t, s)$. *При выполнении этого условия ядра* $V_\pm(t, s)$ *непрерывны в соответствующих треугольниках и их значения там находятся по формулам*

$$V_+(t, s) = \Gamma_s(t, s) \qquad (a \leqq t \leqq s \leqq b), \tag{8.8}$$

$$V_-(t, s) = \Gamma_t(t, s) \qquad (a \leqq s \leqq t \leqq b). \tag{8.9}$$

В самом деле, остается вывести равенства (8. 8) и (8. 9).

Возвращаясь к операторной записи соотношения (8. 4):

$$(I - T)^{-1} = (I + V_+)(I + V_-)$$

перепишем его в виде

$$(I - T)(I + V_+) = (I + V_-)^{-1} = I + Z_-,$$

где Z_--некоторый оператор с левым вольтерровым ядром $Z_-(t, s)$. Отсюда

$$-T(t, s) + V_+(t, s) - \int_a^b T(t, r) V_+(r, s)\, dr = Z_-(t, s).$$

Рассмотрим это равенство в треугольнике $(a \leqq t \leqq s \leqq b)$, в котором ядро $Z_-(t, s)$ можно считать равным нулю. Тогда получим

$$V_+(t, s) - \int_a^b T(t, r) V_+(r, s)\, dr = T(t, s) \qquad (a \leqq t \leqq s \geqq b).$$

Этим уравнением ядро $V_+(t, s)$ определяется в своем треугольнике единственным образом.

С другой стороны, если в уравнении (8. 7) положить $\xi = s$, получим

$$\Gamma_s(t, s) - \int_a^b T(t, r) \Gamma_s(r, s)\, dr = T(t, s) \qquad (a \leqq t \leqq s \leqq b),$$

откуда следует равенство (8. 8). Аналогично доказывается равенство (8. 9).

Представление (8. 4) для некоторых классов ядер $T(t, s)$ использовалось М. Г. Крейном [21] в связи с обратными задачами спектральной теории дифференциальных операторов, а также для вывода одного нового метода решения интегральных уравнений [22]. В скалярном случае в иных целях это представление использовалось в работах Н. П. Сергеева [23] и С. Л. Соболева [24].

Разложение (8. 4) для непрерывных ядер может быть выведено независимо от общей теории факторизации операторов на основании следующего свойства резольвенты $\Gamma_\xi(t, s)$:

$$\frac{\partial\Gamma_\xi(t, s)}{\partial\xi} = \Gamma_\xi(t, \xi)\Gamma_\xi(\xi, s). \tag{8.10}$$

Для получения равенства (8. 10) продифференцируем по ξ соотношение (8. 7) получим

$$\frac{\partial\Gamma_\xi(t, s)}{\partial\xi} - \int_a^\xi T(t, r)\frac{\partial\Gamma_\xi(r, s)}{\partial\xi}\,dr = T(t, \xi)\Gamma_\xi(\xi, s).$$

С другой стороны, полагая $s=\xi$ в уравнении (8. 7) и помножая полученное уравнение справа на $\Gamma_\xi(\xi, s)$, мы обнаружим, что матричное ядро $\varphi(t, s) = \Gamma_\xi(t, \xi)\,\Gamma_\xi(\xi, s)$ является решением уравнения

$$\varphi(t, s) - \int_a^\xi T(t, r)\varphi(r, s)\,dr = T(t, \xi)\,\Gamma_\xi(\xi, s).$$

Так как написанное уравнение при фиксированном $s\,(a \leqq s \leqq b)$ имеет единственное непрерывное по r решение, то приходим к (8. 10).

Для проверки соотношения (8. 4) или эквивалентных соотношений (8. 5), где $V_\pm(t, s)$ задаются формулами (8. 8) и (8. 9) остается в (8. 5) использовать то, что

$$V_+(t, r)V_-(r, s) = \Gamma_r(t, r)\Gamma_r(r, s) = \frac{\partial\Gamma_r(t, s)}{\partial r}.$$

3. Полученным правилом факторизации операторов Фредгольма второго рода можно пользоваться в тех случаях, когда существует резольвентное ядро $\Gamma_\xi(t, s)$ $(a \leqq \xi \leqq b)$ и имеют смысл формулы (8. 8), (8. 9), для чего непрерывность ядра $T(t, s)$ не обязательна.

Поясним это на примере оператора $I-K$, действующего в $L_2^{(r)}(a, b)$ $(r<\infty)$, где K — n-мерный оператор:

$$K = \sum_{j=1}^{n} (\cdot, g_j)f_j.$$

У такого оператора ядро $K(t, s)$, очевидно, имеет следующий вид

$$K(t, s) = F(t)G^*(s),$$

где столбцы матриц-функций $F(t)$ и $G(t)$ соответственно совпадают с вектор-функциями $f_1, f_2, \ldots, f_n$; $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Для вычисления резольвентного ядра $\Gamma_\xi(t, s)$ рассматриваемого оператора, рассмотрим уравнение

$$g(t) - F(t)\int_a^\xi G^*(s)g(s)\,ds = f(t).$$

Так как

$$g(t) = F(t)x + f(t), \tag{8.11}$$

где

$$x = \int_a^{\xi} G^*(s) g(s)\, ds, \tag{8.12}$$

то, подставляя (8. 11) в (8. 12), получим

$$\Big(I - \int_a^{\xi} G^*(s) F(s)\, ds\Big)x = \int_a^{\xi} G^*(s) f(s)\, ds.$$

Отсюда следует, что для существования ядра $\Gamma_{\xi}(t, s)$ необходимо, чтобы матрица $I - \int_a^{\xi} G^*(s) F(s) ds$ была обратима.

Последнее условие является также достаточным для существования резольвентного ядра $\Gamma_{\xi}(t, s)$. В самом деле, из (8. 12) следует, что

$$x = \mathfrak{A}_{\xi} \int_a^{\xi} G^*(s) f(s)\, ds$$

где

$$\mathfrak{A}_{\xi} = \Big(I - \int_a^{\xi} G^*(s) F(s)\, ds\Big)^{-1}.$$

Таким образом,

$$g(t) = F(t) \mathfrak{A}_{\xi} \int_a^{\xi} G^*(s) f(s)\, ds + f(t)$$

и

$$\Gamma_{\xi}(t, s) = F(t) \mathfrak{A}_{\xi} G^*(s).$$

Если матрицы-функции $F(t)$ и $G^*(t)$ непрерывны, то согласно предложению 2° ядра $V_{\pm}(t, s)$, дающие факторизацию (8. 4), определяются по формулам (8. 8) и (8. 9), т. е.

$$V_{+}(t, s) = F(t) \mathfrak{A}_s G^*(s) \qquad (s > t) \tag{8.13}$$

и

$$V_{-}(t, s) = F(t) \mathfrak{A}_t G^*(s) \qquad (s < t). \tag{8.14}$$

Оказывается, что в нашем случае всегда ядра $V_{\pm}(t, s)$, определенные равенствами (8. 13) и (8. 14), дают факторизацию (8. 4). В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Действительно, при $a \leqq t \leqq s \leqq b$

$$F(t) \mathfrak{A}_s G^*(s) + \int_s^b F(t) \mathfrak{A}_r G^*(r) F(r) \mathfrak{A}_r G^*(s)\, dr =$$

$$F(t) \Big[\mathfrak{A}_s + \int_s^b \mathfrak{A}_r G^*(r) F(r) \mathfrak{A}_r\, dr\Big] F(s).$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_\xi}{\partial \xi} = \mathfrak{A}_\xi G^*(\xi) F(\xi) \mathfrak{A}_\xi,$$

а следовательно,

$$\mathfrak{A}_s + \int_s^b \mathfrak{A}_r G^*(r) F(r) \mathfrak{A}_r \, dr = \mathfrak{A}_b.$$

Так как

$$\Gamma(t, s) = \Gamma_b(t, s) = F(t) \mathfrak{A}_b G^*(s),$$

то отсюда вытекает, что выполняется первое из соотношении (8. 5). Аналогично доказывается справедливость второго из этих соотношений.

Легко видеть, что полученный результат обобщается на случай $r=\infty$. Он обобщается также на случай $r \leqq \infty$ и $n=\infty$, по крайней мере, когда оператор K ядерный. Если для такого K по разложению Шмидта соответствующим образом построить матрицы $F(t)$ и $G(t)$, то они будут обладать свойством

$$\int_a^b \mathrm{Sp}\,(F^*(t)F(t))\,dt = |K|_1 < \infty$$

и

$$\int_a^b \mathrm{Sp}\,(G^*(t)G(t))\,dt = |K|_1 < \infty.$$

Тогда матрица $\mathfrak{A}_\xi - I$ будет ядерной и формулы (8. 13), (8. 14) будут иметь смысл.

§ 9. Заключителные замечания

Хотя до сих пор мы рассматривали задачу факторизации только для операторов, отличающихся от единичного на вполне непрерывный, вместе с тем известны примеры решения этой задачи и для некоторых специальных классов ограниченных операторов, не обладающих этим свойством.

А именно, как уже отмечалось в § 2, факторизацию функций и матриц-функций, являющуюся важным средством в теории интегральных уравнений на полуоси с ядрами, зависящими от разности аргументов (см. [16], [17]), можно интерпретировать как факторизацию некоторых классов операторов в смысле общего определения из параграфа 2.

В равной мере это относится и к теории дискретных аналогов этих уравнений. Так как указанное обстоятельство легче пояснить на этих дискретных аналогах, то мы с них и начнем.

Пусть $a(t)$ $(|t|=1)$—произвольная функция, разлагающаяся в абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$a(t) = \sum_{j=-1}^{\infty} \alpha_j t^j \qquad \left(|t|=1, \ \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\alpha_j| < \infty\right). \tag{9.1}$$

Если выполняется условие $a(t)\neq 0$ $(|t|=1)$, то согласно результатам статьи [16] функцию $a(t)$ можно представить в виде

$$a(t)=a_+(t)a_-(t), \quad (|t|=1) \tag{9.2}$$

где

$$a_\pm(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j^{\pm}t^{\pm j} \qquad (|t|=1).$$

Покажем, что факторизация (9. 2) порождает некоторую операторную факторизацию. Каждой функции $a(t)$ вида (9. 1) сопоставим оператор A, порожденный в пространстве l_2 последовательностей $\xi=\{\xi_j\}_{-\infty}^{\infty}$ $(\sum|\xi_j|^2<\infty)$ матрицей $\|\alpha_{j-k}\|_{-\infty}^{\infty}$.

Легко видеть, что A является линейным ограниченным оператором. Кроме того, если $a_1(t)$ и $a_2(t)$—функции вида (9. 1) и $a(t)=a_1(t)\,a_2(t)$, то

$$A=A_1A_2.$$

Обозначим через P_j $(j=0, \pm 1, \ldots)$ ортопроектор в l_2, действующий по правилу

$$P_j\{\xi_n\}_{-\infty}^{\infty}=\{\ldots, \xi_{j-1}, 0, 0, \ldots\}.$$

Совокупность всех проекторов P_j вместе с O и I образует максимальную цепочку; обозначим ее через $\mathfrak{P}$.

Очевидно, операторам A_+ и A_-, порожденным функциями $a_+(t)$ и $a_-(t)$, отвечают соотственно левая нижняя и правая верхняя треугольные матрицы. Следовательно, операторы A_+ и A_- обладают соответственно цепочками $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^\perp$. Таким образом, равенство (9. 2) влечет за собой факторизацию оператора A относительно цепочки $\mathfrak{P}$:

$$A=A_+A_-. \tag{9.3}$$

Из результатов цитированной выше статьи [16] вытекает, что, если выполняются условия $a(t)\neq 0$ $(|t|=1)$ и, кроме того,

$$\oint_{|t|=1} d\arg a(t)=0, \tag{9.4}$$

то операторы $A_\pm$ обратимы и обратные к ним имеют такую же треугольную структуру. Кроме того, поделив оператор A на соответствующую константу, можно добиться, чтобы на диагоналях матриц операторов $A_\pm$ стояли только единицы. Отметим, что в рассматриваемом примере условие (9. 4) является необходимым и достаточным условием обратимости всех операторов P_jAP_j в соответствующих пространствах P_jl_2.

Изложенный пример имеет свой континуальный аналог.

Пусть $k(t)\in L_1(-\infty, \infty)$ и

$$K(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}k(t)e^{i\lambda t}\,dt.$$

Согласно цитированной выше статье [16], если выполняется условие

$$1-K(\lambda)\neq 0 \qquad (-\infty<\lambda<\infty),$$

то функция $1-K(\lambda)$ допускает следующую факторизацию

$$1-K(\lambda)=(1-K_+(\lambda))(1-K_-(\lambda)), \tag{9.5}$$

где

$$K_+(\lambda)=\int_0^\infty k_+(t)e^{i\lambda t}dt, \quad K_-(\lambda)=\int_{-\infty}^0 k_-(\lambda)e^{i\lambda t}\,dt \qquad (k_\pm(t)\in L_1).$$

Каждой функции $1+k(t)$ $(k(t)\in L_1(-\infty,\infty))$ сопоставим линейный ограниченный оператор A, действующий в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ по формуле

$$(Af)(t)=f(t)-\int_{-\infty}^\infty k(t-s)f(s)\,ds.$$

Рассмотрим ортопроекторы P_s $(-\infty<s<\infty)$, определенные в $L_2(-\infty,\infty)$ равенством

$$(P_sf)(t)=\begin{cases} f(t) & (t\leqq s),\\ 0 & (t>s).\end{cases}$$

Через $\mathfrak{P}$ обозначим непрерывную цепочку, состоящую из всех ортопроекторов $P_s(-\infty<s<\infty)$, $0, I$. Очевидно, операторы $I+K_+$, $I+K_-$, порожденные функциями $1+k_+(t)$ и $1+k_-(t)$ обладают собственными цепочками $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^\perp$.

Легко видеть, что в операторной записи равенство (9. 5) дает следующую факторизацию оператора A относительно цепочки $\mathfrak{P}$:

$$A=A_+A_-.$$

При выполнении условия

$$\int_{-\infty}^\infty d\arg(1-K(\lambda))=0 \tag{9. 6}$$

операторы $A_\pm$ являются операторами такого же типа, что и операторы $A_\pm$.

Условие (9. 6) является необходимым и достаточным условием обратимости всех операторов PAP $(P\in\mathfrak{P})$ в соответствующих пространствах PL_2.

Отметим, в заключение два обстоятельства, заслуживающих на наш взгляд внимания.

Хотя рассмотренные в этом параграфе операторы A и не отличаются от единичного на вполне непрерывный, однако относительно соответствующей цепочки $\mathfrak{P}$ они обладают следующим свойством: для любого $P\in\mathfrak{P}$ оператор $PA(I-P)\in\mathfrak{S}_\infty$. Это свойство явилось весьма существенным при построении факторизации матриц функций (см. [17]).

Второе обстоятельство заключается в том, что все результаты этого параграфа сохраняют силу, если заменить пространство l_2 на любое из банаховых пространств l_p $(1\leqq p\leqq\infty)$, c_0, c, а пространство L_2 на одно из пространств L_p $(1\leqq p\leqq\infty)$, C, C_0 и др. Таким образом, имеются примеры факторизации определенных классов операторов, действующих в банаховом пространстве.

Цитированная литература

[1] М. С. Лившиц, О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, *Матем. сб.*, **34** (**76**) (1954), 145—198.

[2] М. С. Бродский и М. С. Лившиц, Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *УМН*, **13**, вып. **1** (**79**) (1958), 3—85.

[3] Л. А. Сахнович, О приведении несамосопряженных операторов к треугольному виду, *Изв. высших учебных заведений, Математика*, № I (**8**) (1959), 180—186.

[4] Л. А. Сахнович, Исследование „треугольной модели" несамосопряженных операторов, *Изв. высших учебных заведений, Математика*, № 4 (**11**) (1959), 141—149.

[5] М. С. Бродский, О треугольном представлении вполне непрерывных операторов с одной точкой спектра, *УМН*, **16**, вып. **1** (**97**) (1961), 135—141.

[6] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, О вполне непрерывных операторах со спектром, сосредоточенном в нуле, *ДАН СССР*, **128** (1959), 227—230.

[7] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, К теории треугольного представления несамосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **137** (1961), 1034—1038.

[8] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, О вольтерровых операторах с мнимой компонентой того или иного класса, *ДАН СССР*, **139** (1961), 779—780.

[9] В. И. Мацаев, Об одном классе вполне непрерывных операторов, *ДАН СССР*, **139** (1961), 548—552.

[10] В. И. Мацаев, О вольтерровых операторах, получаемых возмущением самосопряженных, *ДАН СССР*, **139** (1961), 810—814.

[11] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, О проблеме факторизации операторов в гильбертовом пространстве, *ДАН СССР*, **147** (1962), 279—282.

[12] N. Aronszajn and K. T. Smith, Invariant subspaces of completely continuous operators, *Ann. of Math*, **60** (1954), 316—320 (имеется русский перевод в журнале *Математика*, Сборник переводов, **2**, № 1 (1958), 97—102).

[13] R. Schatten, *A theory of cross-spaces* (Princeton, 1950).

[14] И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функции*, вып. 4 (Москва, 1961).

[15] Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры*, Физматгиз (1960).

[16] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полуоси с ядрами, зависящими от разности аргументов, *УМН*, **13**, вып. **5** (1958), 3—120.

[17] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Системы интегральных уравнений на полуоси с ядрами, зависящими от разности аргументов, *УМН*, **13**, вып. **2** (1958), 3—72.

[18] Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе, О задаче Римана—Привалова с непрерывными коэффициентами, *ДАН СССР*, **123** (1958), 791—794,

[19] G. Baxter, An operator indentity, *Pacific J. Math.*, **8** (1959), 649—663.

[20] N. Wiener and P. Masani, The prediction theory of multivariate stochastic processes. II, *Acta Math.*, **99** (1958), 93—137.

[21] М. Г. Крейн, Об интегральных уравнениях порождающих дифференциальные уравнения второго порядка, *ДАН СССР*, **97** (1954), 21—24.

[22] М. Г. Крейн, Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода, *ДАН СССР*, **100** (1955), 413—416.

[23] К. П. Сергеев, Об одном методе решения линейных интегральных уравнений, *Зап. Ленинградского горн. инст.*, **33** (1956), 149—153.

[24] С. Л. Соболев, Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений, *Изв. АН СССР*, сер. матем, **20** (1956), 413—436.

[25] Ю. И. Любич и В. И. Мацаев, Об операторах с отделимым спектром, *Матем. сборник*, **56** (1962), 433—468.

(Поступило IV/16, 1963)

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ УПОРЯДОЧЕННЫХ АВТОМАТОВ. II

Ф. ГЕЧЕГ (Сегед)*)

В первой части работы приведены необходимые и достаточные условия для вложимости автомата Мура в произведение автоматов. Результаты аналогичным путем доказываются и для случая автоматов Мили.

В этой статье мы дадим необходимые и достаточные условия представления автоматов Мили в виде произведения автоматов.

Рассмотрим произвольный упорядоченный автомат $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, Y, \delta, \lambda)$ и некоторое множество его допустимых разбиений, удовлетворящее следующим условиям:[1]

1. Если для разбиений π_1, π_2 имеет место $\pi_1>\pi_2$, то мощность множества $M^{\pi_2}_{\pi_1(a_1)}$ классов по разбиению π_2, содержащихся в классе $\pi_1(a_1)$, совпадает с мощностью множества $M^{\pi_2}_{\pi_1(a_2)}$ классов по разбиению π_2, содержащихся в классе $\pi_1(a_2)$, и существуют такие изоморфизмы $\psi^{1,2}_{a_i,a_j}\colon M^{\pi_2}_{\pi_1(a_i)}\to M^{\pi_2}_{\pi_1(a_j)}$, для которых:

(α) $\psi^{1,2}_{a_i,a_j}(x)=\psi^{1,2^{-1}}_{a_j,a_k}(\psi^{1,2^{-1}}_{a_k,a_i}(x))$,[2]

(β) $\psi^{1,2}_{a_j,a_k}(x)=\psi^{1,2^{-1}}_{a_k,a_i}(\psi^{1,2^{-1}}_{a_i,a_j}(x))$,

(γ) $\psi^{1,2}_{a_k,a_i}(x)=\psi^{1,2^{-1}}_{a_i,a_j}(\psi^{1,2^{-1}}_{a_j,a_k}(x))$,

(δ) $\psi^{1,2^{-1}}_{a_i,a_j}(x)=\psi^{1,2}_{a_j,a_i}(x)$ и $\psi^{1,2}_{a_i,a_j}(x)=\psi^{1,2}_{a_i',a_j'}(x)$, если $a_i\equiv a_i', a_j\equiv a_j'(\pi_1)$.

Пусть $\pi_2(a)\in M^{\pi_2}_{\pi_1(a_i)}$, $\pi_2(a')\in M^{\pi_2}_{\pi_1(a_j)}$ и $\pi_1(a_i)\leqq\pi_1(a_j)$. Тогда $\pi_2(a)\leqq\pi_2(a')$ равносльно тому, что $\psi^{1,2}_{a_i,a_j}(\pi_2(a))\leqq\pi_2(a')$.

2. Если разбиение π_1 не находится в отношении упорядоченности с разбиением π_2, то для любого фиксированного $a\in A$ все пересечения $\pi_1(a)\cap\pi_2(a')$ $(a'\in A)$ обладают одинаковой мощностью.

Множество допустимых разбиений, удовлетворящее условиям 1. и 2., мы назовем множеством со свойством K.

Теорема. *Автомат* $\mathbf{M}=\mathbf{M}(X_M, M, Y_M, \delta_M, \lambda_M)$ *изоморфен некоторому R-произведению автоматов* $\mathbf{A}_i$ $(i=1, \ldots, r)$ *тогда и только тогда,*

---

*) F. Gécseg (Szeged)

[1]) Относительно терминологии этой статьи см. [2].

[2]) Где a_i, a_j, a_k — произвольны из множества A.

если он обладает множеством разбиений со свойством K, каждый класс пересечения π которого имеет одну и ту же мощность, можно установить изоморфизм между классами разбиения π, удовлетворящий условиям (α)—(δ), произвольные различные максимальные цепи данных разбиений не содержат общего разбиения кроме π и $\pi_{i_1}(m_{i_1})\cap\ldots\cap\pi_{i_k}(m_{i_k})\neq\emptyset$ для всех различных разбиений $\pi_{i_1},\ldots\pi_{i_k}$, опережающих разбиение π.

Доказательство. Для доказательства необходимости рассмотрим некоторое R-произведение автоматов $\mathbf{A}_i$ $(i=1,\ldots,r)$, изоморфное автомату $\mathbf{M}$. Обозначим этот изоморфизм через χ. Рассмотрим разбиения π_i автомата $\mathbf{M}$, индуцируемые множествами $P(\mathbf{A}_i)$ $(i=1,\ldots,r)$ (см. [2]). Разбиения π_i, получаемые таким образом — допустимы (см. [2]). Покажем, что с помощью этих разбиений можно задавать множество разбиений автомата $\mathbf{M}$, удовлетворящее условиям теоремы.

Рассмотрим пересечение π разбиений π_i $(i=1,\ldots,r)$. Если найдется две максимальной цепи множества $\{\pi_i\}$, содержащие обшее разбиение, отличное от разбиения π, то одну из них оставим без внимания. В так полученном множестве разбиений пусть π_i и π_j такие, что $\pi_i>\pi_j$. Тогда $\mathbf{M}_i>\mathbf{M}_j$. Далее, пусть m и m' такие, что $m\not\equiv m'(\pi_i)$ и $\chi(m)=(a_1,\ldots,a_i,a_{i+1},\ldots,a_j,\ldots,a_r)$, $\chi(m')=(a_1',\ldots,a_i',a_{i+1},\ldots,a_j,\ldots,a_r)$. По определению разбиений, индуцирующихся множеством $P(\mathbf{A}_i)$, мощности множества классов по разбиению π_j, содержащихся в классе $\pi_i(m)$ соотв. $\pi_i(m')$, совпадают с мощностью множества $\prod\limits_{k=i+1}^{j} A_k$. (Здесь упорядочение составляющих $A_1\times\ldots\times A_r$ такое, что множества A_i и A_j будут опережены такими и только такими множествами, которые больши их). Пусть теперь $M^{\pi_j}_{\pi_i(m_i)}$, $M^{\pi_j}_{\pi_i(m_j)}$, $M^{\pi_j}_{\pi_i(m_k)}$ — различны, а m_i, m_j и m_k такие, что

$$\chi(m_i)=(a_1,\ \ldots,\ a_i,\ a_{i+1},\ \ldots,\ a_j,\ \ldots,\ a_r),$$
$$\chi(m_j)=(a_1',\ \ldots,\ a_i',\ a_{i+1},\ \ldots,\ a_j,\ \ldots,\ a_r),$$
$$\chi(m_k)=(a_1'',\ \ldots,\ a_i'',\ a_{i+1},\ \ldots,\ a_j,\ \ldots,\ a_r).$$

Отображение $\psi^{i,j}_{m_i,m_j}$, $\psi^{i,j}_{m_j,m_k}$ и $\psi^{i,j}_{m_k,m_i}$ определяются следующим образом:

$$\psi^{i,j}_{m_i,m_j}(\pi_j(m_i))=\pi_j(m_j);\ \psi^{i,j}_{m_j,m_k}(\pi_j(m_j))=\pi_j(m_k);\ \psi^{i,j}_{m_k,m_i}(\pi_j(m_k))=\pi_j(m_i).$$

Пусть $\pi_i(m_i)\leqq\pi_i(m_j)$, $\pi_j(m_i^*)\leqq\pi_j(m_j^*)$ $(m_i\equiv m_i^*(\pi_i),\ m_j\equiv m_j^*(\pi_i))$. В этом случае если

$$\chi(m_i^*)=(a_1,\ \ldots,\ a_i,\ a_{i+1}^*,\ \ldots,\ a_j^*,\ a_{j+1},\ \ldots,\ a_r)$$

и

$$\chi(m_j^*)=(a_1',\ \ldots,\ a_i',\ a_{i+1}^{*\prime},\ \ldots,\ a_j^{*\prime},\ a_{j+1},\ \ldots,\ a_r)$$

то

$$a_1\leqq a_1'',\ \ldots,\ a_i\leqq a_i',\ a_{i+1}^*\leqq a_{i+1}^{*\prime},\ \ldots,\ a_j^*\leqq a_j^{*\prime}.$$

Заметим, что по определению допустимого разбиения $\pi_i(m)\geqq\pi_i(m')$ тогда и только тогда, если найдутся такие $m_1(\in\pi_i(m))$ и $m_2(\in\pi_i(m'))$, для которых выполняется неравенство $m_1\geqq m_2$. Так как в классе $\psi^{i,j}_{m_i,m_j}(\pi_j(m_i^*))$ содержится элемент $m_i^{*\prime}$, для которого $\chi(m_i^{*\prime})=(a_1', \ldots, a_i', a_{i+1}^*, \ldots a_j^*, a_{j+1}, \ldots, a_r)$, то, очевидно, имеет место $\psi_{m_i, m_j}^{i, j}(\pi_j(m_i^*) \leqq \pi_j(m_j^*))$. Аналогично получается обратное утверждение.

Пусть разбиения π_l и π_j не находятся в отношении упорядоченности. Тогда множества $P(\mathbf{A}_l)$ и $P(\mathbf{A}_j)$ не содержат общего элемента. В самом деле, если $\mathbf{A}_k \in P(\mathbf{A}_l) \cap P(\mathbf{A}_j)$, то $\mathbf{A}_k > \mathbf{A}_l$ и $\mathbf{A}_k > \mathbf{A}_j$, откуда $\pi_k > \pi_l$ и $\pi_k > \pi_j$. Это однако противоречит утверждению, что максимальные цепи разбиения не содержат общего разбиения — отичного от π. Так как $P(\mathbf{A}_l) \cap P(\mathbf{A}_j)$— пусто, то в каждом классе по разбиению π_l из любого класса по разбиению π_j содержится ΠA_k элементов, где произведение берется для всех $\mathbf{A}_k \notin P(\mathbf{A}_l) \cup \cup P(\mathbf{A}_j)$. Этим доказана необходимость условия 2.

Надо еще доказать необходимость последнего утверждения теоремы. Это однако очевидно, так как разбиение совпадает с тривиальным. Итак, необходимость условий теоремы полностью доказана.

Для доказательства достаточности рассмотрим автомат $\mathbf{M} = \mathbf{M}(X_M, M, Y_M, \delta_M, \lambda_M)$ и множество $T = \{\pi_1, \ldots, \pi_{r-1}\}$ его разбиений, удовлетворяющее условиям теоремы. Обозначим через T_1 множество максимальных элементов множества T. Мы берем все максимальные цепи множества T, причем, если $\pi \in T$, то каждая максимальная цепь рассматривается без разбиения π. Мы конструируем автоматы $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(X_i, A_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i)$ для каждого разбиения $\pi_i \in \{T, \pi\}$, подходящее R-произведение которых изоморфен автомату $\mathbf{M}$. Пусть $\pi_i \in T_1$. В этом случае автомат $\mathbf{A}_i$ определяется так: множество X_i входных сигналов совпадает с множеством входных сигналов автомата $\mathbf{M}$, множеством состояний служит множество классов автомата $\mathbf{M}$ по разбиению π_i, множеством выходных сигналов является множество $Y_i = A_i \times X_i$, функция перехода: $\delta_i(\pi_i(m), x) = \pi_i(\delta_M(m, x))$, а функция выходов: $\lambda_i(\pi_i(m), x) = (\pi_i(m), x)$.

Пусть π_{i_j} $(\neq \pi)$ произвольное разбиение цепи, начинающейся с разбиения π_i. Обозначим через A_{i_j} множество, мощность которого совпадает с мощностью множества $M_{\pi_{i_{j-1}}(m)}^{\pi_{i_j}}$, где $\pi_{i_{j-1}}$ — разбиение, опережающее разбиение π_{i_j}. Пусть $\xi_{i_{j-1}(m)}^{i_j}$ — взаимно однозначное отображение множества A_{i_j} на $M_{\pi_{i_{j-1}}(m)}^{\pi_{i_j}}$. Оно будет изоморфизмом, если мы упорядочим A_{i_j} следующим образом: $\alpha < \alpha' (\alpha, \alpha' \in A_{i_j})$ тогда и только тогда, если $\xi_{i_{j-1}(m)}^{i_j}(\alpha) < \xi_{i_{j-1}(m)}^{i_j}(\alpha')$. Берем изоморфные отображения $\xi_{i_{j-1}(m')}^{i_j}(x) = \psi_{m, m'}^{i_{j-1}, i_j}(\xi_{i_{j-1}(m)}^{i_j}(x))$ множества A_{i_j} на множества $M_{\pi_{i_{j-1}}(m')}^{\pi_{i_j}}$.

Теперь для каждого j мы сконструируем автомат $\mathbf{A}_{i_j} = \mathbf{A}_{i_j}(X_{i_j}, A_{i_j}, Y_{i_j}, \delta_{i_j}, \lambda_{i_j})$ множество входных сигналов которого совпадает с множеством выходных сигналов автомата $\mathbf{A}_{i_{j-1}}$. Множеством состояний служит множество A_{i_j}, а множеством выходных сигналов — множество $Y_{i_j} = A_{i_j} \times X_{i_j}$. Функция перехода $\delta_{i_j}(\alpha_{i_j}, x_{i_j}) = \alpha_{i_j}^*$, где элемент $\alpha_{i_j}^*$ определяется так: если $x_{i_j} = (\alpha_{i_{j-1}}, (\ldots, (\alpha_{i_1}, (\pi_i(m), x)) \ldots))$ и $\xi_{i(m)}^{i_1}(\alpha_{i_1}) = \pi_{i_1}(m_1)$, $\xi_{i_1(m_1)}^{i_2}(\alpha_{i_2}) = \pi_{i_2}(m_2)$, $\ldots$, $\xi_{i_{j-2}(m_{j-2})}^{i_{j-1}}(\alpha_{i_{j-1}}) = \pi_{i_{j-1}}(m_{j-1})$, $\xi_{i_{j-1}(m_{j-1})}^{i_j}(\alpha_{i_j}) = \pi_{i_j}(m_j)$, то $\alpha_{i_j}^* = \xi_{i_{j-1}(\delta_M(m_j, x))}^{i_j - 1}(\pi_{i_j}(\delta_M(m_j, x)))$.

При этом, если $\pi_i \in T_1$, то упорядочение множества состояний совпадает с упорядочением множества классов по разбиению π_i, а в множестве выходных сигналов $(\pi_i(m), x) \geqq (\pi_i(m'), x')$ тогда и только тогда, если $\pi_i(m) \geqq \geqq \pi_i(m'), x \geqq x'$.

Упорядочение множества входных сигналов автомата $\mathbf{A}_{i_j}$ — следующее: $x_{i_j}(=(a_{i_{j-1}}, (\ldots, (\alpha_{i_1}, (\pi_i(m), x)) \ldots))) \geqq x'_{i_j}(=(\alpha'_{i_{j-1}}, (\ldots, (\alpha'_{i_1}, (\pi_i(m'), x')) \ldots)))$ тогда и только тогда, если $\alpha_{i_{j-1}} \geqq \alpha'_{i_{j-1}}, \ldots, \alpha_{i_1} \geqq \alpha'_{i_1}, \ldots, \pi_i(m) \geqq \pi_i(m')$ и $x \geqq x'$. Далее, для его выходных сигналов $(\alpha_{i_j}, x_{i_j}) \geqq (\alpha'_{i_j}, x'_{i_j})$ тогда и только тогда, если $\alpha_{i_j} \geqq \alpha'_{i_j}, x_{i_j} \geqq x'_{i_j}$.

Рассмотрим множество A_r, мощность которого совпадает с мощностью некоторого класса $M_{\pi_{i_j}(m_{i_j}), \ldots, \pi_{k_l}(m_{k_l})}$ $(=\pi_{i_j}(m_{i_j}) \cap \ldots \cap \pi_{k_l}(m_{k_l}))$ по разбиению π (где $\pi_{i_1}, \ldots, \pi_{k_l}$ все опережают π) и взаимно однозначное отображение $\xi^{i_j, \ldots, k_l}_{m_{i_j}, \ldots, m_{k_l}}$ множества A_r на $M_{\pi_{i_j}(m_{i_j}), \ldots, \pi_{k_l}(m_{k_l})}$. Мы упорядочим A_r так, чтобы $\xi^{i_j, \ldots, k_l}_{m_{i_j}, \ldots, m_{k_l}}$ было изоморфизмом.

Мы сконструируем автомат $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_r(X_r, A_r, Y_r, \delta_r, \lambda_r)$, принадлежащий к разбиению π. Множеством его входных сигналов является множество X_r таких элементов множества $Y_{i_j} \times \ldots \times Y_{k_l}$, во всех компонентах которых фигурирует одно и то же $x (\in X_M)$, где $\pi_{i_j}, \ldots, \pi_{k_l}$ опережеют разбиение π. Множество выходных сигналов $Y_r = A_r \times X_r$. Функция перехода: $\delta_i(\alpha_r, x_r) = \alpha_r^*$, где элемент α_r^* определяется так: если

$$x_r = ((\alpha_{i_j}, (\ldots, (\alpha_{i_1}, (\pi_i(m_i), x))\ldots)), \ldots, (\alpha_{k_l}, (\ldots, (\alpha_{k_1}, (\pi_k(m_k), x) \ldots)))$$

и

$$\xi^{i_1}_{i(m_i)}(\alpha_{i_1}) = \pi_{i_1}(m_{i_1}), \ldots, \xi^{i_j}_{i_{j-1}(m_{i_{j-1}})}(\alpha_{i_j}) = \pi_{i_j}(m_{i_j}), \ldots, \xi^{k_1}_{k(m_k)}(\alpha_{k_1}) = \pi_{k_1}(m_{k_1}), \ldots$$

$$\ldots, \xi^{k_l}_{k_{l-1}(m_{l-1})}(\alpha_{k_l}) = \pi_{k_l}(m_{k_l}), \xi^{i_j, \ldots, k_l}_{m_{i_j}, \ldots, m_{k_l}}(\alpha_r) = m_r,$$

то $\xi^{i_j, \ldots, k_l^{-1}}_{\delta_M(m_{i_j}, x), \ldots, \delta_M(m_{k_l}, x)}(\delta_M(m_r, x))$. Функция выходов: $\lambda_r(\alpha_r, x_r) = (\alpha_r, x_r)$.

Упорядочение входных сигналов — следующее:

$$x_r(=((\alpha_{i_j}, (\ldots, (\alpha_{i_1}, (\pi_i(m_i), x)) \ldots)), \ldots, (\alpha_{k_l}, (\ldots, (\alpha_{k_1}, (\pi_k(m_k), x)) \ldots)))) \geqq$$

$$\geqq x'_r(=((\alpha'_{i_j}, (\ldots, (\alpha'_{i_1}, (\pi_i(m'_i), x'))\ldots)), \ldots, (\alpha'_{k_l}, (\ldots, (\alpha'_{k_1}, (\pi_k(m'_k), x')) \ldots))))$$

тогда и только тогда, если $\alpha_{i_j} \geqq \alpha'_{i_j}, \ldots, \alpha_{i_1} \geqq \alpha'_{i_1}, \pi_i(m_i) \geqq \pi_i(m'_i), \ldots, \alpha_{k_l} \geqq \alpha'_{k_l} \ldots$ $\alpha_{k_1} \geqq \alpha'_{k_1}, \pi_k(m_k) \geqq \pi_k(m'_k)$ и $x \geqq x'$.

Упорядочение множества Y_r выходных сигналов: $(\alpha_r, x_r) \geqq (\alpha'_r, x'_r)$ тогда и только тогда, если $\alpha_r \geqq \alpha'_r, x_r \geqq x'_r$

Покажем, что описанным выше способом получаются упорядоченные автоматы. Пусть $\alpha_{i_j} \leqq \alpha'_{i_j}$ и $x_{i_j} = (\alpha_{i_{j-1}}, (\ldots, (\alpha_{i_1}, (\pi_i(m), x)) \ldots))$. Тогда имеет место $\alpha^*_{ij} = \delta_{i_j}(\alpha_{i_j}, x_{i_j}) \leqq \delta_{i_j}(\alpha'_{i_j}, x_{i_j}) = \alpha^{*\prime}_{ij}$.

Действительно $\alpha^*_{ij} = \xi^{i_j^{-1}}_{i_{j-1}(\delta_M(m_j, x))}(\pi_{i_j}(\delta_M(m_j, x)))$,

$$\alpha^{*\prime}_{ij} = \xi^{i^{-1}}_{i_{j-1}(\delta_M)m_{j-1}, x))}(\pi_{i_j}(\delta_M(m'_{i_j}, x))).$$

Так как $\pi_{i_j}(m_j) \leqq \pi_i(m'_j)$, то $\pi_{i_j}(\delta_M(m_j, x)) \leqq \pi_{i_j}(\delta_M(m'_j, x))$.

Остается показать, что из $x_{i_j} \leqq x'_{i_j}$ вытекает $\alpha^*_{ij} = \delta_{i_j}(\alpha_{i_j}, x_{i_j}) \leqq \delta_{i_j}(\alpha_{i_j}, x'_{i_j}) = \alpha^{*\prime}_{ij}$. Мы определим элемент $\alpha^{*\prime}_{ij}$ следующим образом. Если $\xi^{i_1}_{i(m')}(\alpha'_{i_1}) = \pi_{i_1}(m'_1)$, $\xi^{i_2}_{i_1(m'_1)}(\alpha'_{i_2}) = \pi_{i_2}(m'_2), \ldots, \xi^{i_{j-1}}_{i_{j-2}(m'_{j-2})}(\alpha'_{i_{j-1}}) = \pi_{i_{j-1}}(m'_{j-1}), \xi^{i_j}_{i_{j-1}(m'_{j-1})}(\alpha_{i_j}) = \pi_{i_j}(m'_j)$, то

$\alpha_{l_j}^{*\prime}=\xi^{l_j-1}_{l_{j-1}(\delta_M(m'_j,x))}(\pi_{l_j}(\delta_M(m'_j,x)))$. Так как $\pi_l(m)\leqq\pi_l(m')$, $\alpha_{l_1}\leqq\alpha'_{l_1}$, имеет место $\pi_{l_1}(m_1)\leqq\pi_{l_1}(m'_1)$. Заметим, что $\xi^{l_2}_{l_1(m'_1)}(\alpha'_{l_2})=\psi^{l_1,l_2}_{m_1,m'_1}(\xi^{l_2}_{l_1(m_1)}(\alpha'_{l_2}))$. Ввиду неравенства $\alpha_{l_2}\leqq\alpha'_{l_2}$ получим $\xi^{l_2}_{l_1(m_1)}(\alpha_{l_2})\leqq\xi^{l_2}_{l_1(m_1)}(\alpha'_{l_2})$. Так по условию 1. имеем: $\psi^{l_1,l_2}_{m_1,m'_1}(\xi^{l_2}_{l_1(m_1)}(\alpha'_{l_2}))=\pi_{l_2}(m'_2)\geqq\pi_{l_2}(m_2)$. Продолжая этот метод, получим, что $\pi_{l_j}(m'_{l_j})\geqq\pi_{l_j}(m_{l_j})$, так $\pi_{l_j}(\delta_M(m'_{l_j},x'))\geqq\pi_{l_j}(\delta_M(m_{l_j},x))$. В силу условию 1. получается:

$$\alpha_{l_j}^{*\prime}=\xi^{l_j-1}_{l_{-1}(\delta_M(m'_j,x'))}(\pi_{l_j}(\delta_M(m'_j,x')))\geqq\xi^{i_j-1}_{l_{-1}(\delta_M(m_j,x))}(\pi_{l_j}=\delta_M(m_j,x)))=\alpha_{l_i}^{*}.$$

Аналогично доказывается упорядоченность автомата $\mathbf{A}_r$.

Рассмотрим теперь R-произведение $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X;A,Y,\delta,\lambda)$ автоматов $\mathbf{A}_i$ $(i=1,\dots,r)$, множество входных сигналов которого совпадает с множеством входных сигналов автомата $\mathbf{M}=\mathbf{M}(X_M,M,Y_M,\delta_M,\lambda_M)$, множеством состояний является $A_1\times\dots\times A_r$, а множеством выходных сигналов — множество выходных сигналов автомата $\mathbf{M}$. Упорядочение множества $\{\mathbf{A}_i\}$ $(i=1,\dots,r)$ — следующее: $\mathbf{A}_i>\mathbf{A}_j$ тогда и только тогда, если $\pi_i>\pi_j$.

Функцию φ обратной связи мы определим так:

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r\,x)=(x_1,\dots,x_r),\quad x_i=\varphi_i(\alpha_i,\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_k},x)\quad(i=1,\dots,r),$$

где комлоненты $\alpha_i,\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_k}$ элемента $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r)$ — элементы автомата $\mathbf{A}_i$ и всех опережающих его автоматов. Если $\pi_i\in T_1$, то $x_i=\varphi_i(\alpha_1,x)=x$. Таким образом, если $x_{i_1}=\varphi_{i_1}(\alpha_{i_1},\dots,x),\dots,x_{i_k}=\varphi_{i_k}(\alpha_{i_k},\dots,x)$ и $\lambda_{i_1}(\alpha_{i_1},x_{i_1})=(\alpha_{i_1},x_{i_1}),\dots,\lambda_{i_k}(\alpha_{i_k},x_{i_k})=(\alpha_{i_k},x_{i_k})$, то $x_i=((\alpha_{i_1},x_{i_1}),\dots,(\alpha_{i_k},x_{i_k}))$.

Определение функции δ перехода:

$$\delta((\alpha_1,\dots,\alpha_r),x)=(\delta_1(\alpha_1,x_1),\dots,\delta_r(\alpha_r,x_r)).$$

Рассмотрим отображение η множества $A_1\times\dots\times A_r$ на M: $\eta((\alpha_1,\dots,\alpha_r))=m$, где $m=\pi_1(m_1)\cap\dots\cap\pi_r(m_r)$; здесь $\pi_i(m_i)=\alpha_i$, если $\pi_i\in T_1$, а $\pi_{i_j}(m_{i_j})=\xi^{i_j}_{i_{j-1}(m_{j-1})}(\alpha_{i_j})$ если $\pi_{i_j}(\notin T_1)\neq\pi_r$ и $\xi^{i_j,\dots,k_l}_{m_{i_j},\dots,m_{k_l}}(\alpha_r)=\pi_r(m_r)$. Легко убедиться, что отображение η — изоморфно.

Наконец мы определим функцию λ выходов: $\lambda((a_1,\dots,\alpha_r),x)=\lambda_M(m,x)$.

Обозначим через ϱ, соотв. σ тождественные отображения множества X, соотв. Y. Тогда $\varepsilon=\varepsilon(\varrho,\eta,\sigma)$ является изоморфным отображением автомата $\mathbf{A}$ на $\mathbf{M}$.

Литература

[1] В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, *Успехи Мат. Наук*, **5** (1961), 3—63.

[2] Ф. Гечег, О произведениях упорядоченных автоматов. I, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 244—250.

(Поступило 5/II/1963 г.)

Commutative Schreier semigroup extensions of a group

By V. RAY HANCOCK in Blacksburg (Virginia, U. S. A.)

1. Introduction

This paper continues the study of complete structures begun by WIEGANDT [5] and later extended by WIEGANDT [6] and this author [3]. It is shown here (§ 4, Theorem 5) that the group of (equivalence classes of) commutative Schreier extensions of a group S by a semigroup Q is isomorphic to and can be obtained from, the group of commutative group extensions of S by a group Q^* which is related to the semigroup Q. It is then an immediate consequence of Theorem 5 that a commutative semigroup is complete if and only if it is a divisible group (§ 5). The first part of Theorem 5 is the special case $n=2$ of Proposition 4. 1 of CARTAN—EILENBERG [2, p. 191], but an elementary proof is incuded here for the sake of completeness. The second part of Theorem 5 can probably be generalized to arbitrary dimension n, but the present paper is intended to be a study of extension theory and not of homological algebra.

The contents of this paper were included in the author's dissertation at Tulane University, work on which was partially supported by the National Science Foundation. The author is deeply indebted to Professor A. H. CLIFFORD for his assistance, encouragement, and criticism during the preparation of this material.

2. Background

Hereafter the term *semigroup* is used only to refer to a commutative semigroup, written additively, with identity element 0; and the term *subsemigroup* is used only to refer to a subsemigroup containing 0. A semigroup T is called a *Schreier extension* of a subsemigroup S if there is a set of cosets of S in T which partitions T and for which there is a set $\{u_a | a \in Q\}$ of coset representatives ($u_a \in T$) such that $u_a+\alpha = u_b+\beta$ with $a, b \in Q$ and $\alpha, \beta \in S$ implies $a=b$ and $\alpha=\beta$. It is easily proved that the partitioning cosets of S in T are unique; that $S = u_a+S$ for some $a \in Q$ so that we may (and shall) assume the existence of an element $0 \in Q$ such that $u_0=0$; and that coset addition induces an addition $+$ on Q so that $(Q, +)$ is a homomorphic image of T. Moreover, the representation $u_a+\alpha$, with $a \in Q$ and $\alpha \in S$, of each element of T is unique for every set $\{u_a | a \in Q\}$ of representatives of the partitioning cosets. The extension T (or, equivalently, (T, η) with η the natural homomorphism of T onto Q) is then referred to as an extension of S by Q. Two extensions (T_1, η_1) and (T_2, η_2) are called *equivalent* if there is an isomorphism

τ of T_1 onto T_2 such that $\tau|S=\iota_S$ (=the identity automorphism of S), and $\eta_1=\eta_2\tau$. Rédei [4] has shown, in an analogue of the Schreier theory of group extensions, that the existence and structure of an extension of S by Q is determined to within equivalence by the existence of a function $\varphi: Q\times Q\to S$ satisfying

I. $\varphi(a, 0)=0$,

II. $\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$,

III. $\varphi(a+b, c)+\varphi(a, b) = \varphi(a, b+c)+\varphi(b, c)$,

for all a, b, c in Q. For a given extension T with the set $\{u_a|a\in Q\}$ of partitioning representatives, the function φ, which is called a factor-system for the extension and the factor-system corresponding to the set $\{u_a|a\in Q\}$ of partitioning representatives, is defined by $u_a+u_b = u_{a+b}+\varphi(a, b)$. We shall write $T=T(S, Q, u, \varphi)$ to indicate that T is a Schreier extension of S by Q with $\{u_a|a\in Q\}$ a set of partitioning representatives whose corresponding factor-system is φ.

If $T_1=T_1(S, Q, u, \varphi)$ and $T_2=T_2(S, Q, v, \psi)$, then Rédei has shown that T_1 and T_2 are equivalent if and only if there exists a function $f: Q\to U(S)$ (=the group of units of S; i. e.: the group of all elements of S having inverses relative to 0) such that $\varphi(a, b)+f(a+b) = \psi(a, b)+f(a)+f(b)$ for all $a, b\in Q$. Consequently, S is a direct summand of $T=T(S, Q, u, \varphi)$ if and only if φ can be expressed as $\varphi(a, b) = f(a)+f(b)-f(a+b)$ for some $f: Q\to U(S)$. A corollary to this is the assertion that S is a direct summand of $T=T(S, Q, u, \varphi)$ only if $\varphi(Q\times Q)\subseteq U(S)$. An extension of a semigroup S in which S is a direct summand is called a splitting extension.

It can be shown that a Schreier extension T of S by Q is a group or is cancellative if and only if S and Q are both groups, or cancellative, respectively.

If Q is a semigroup, then the relation $\nu = \{(a, b)\in Q\times Q|\ a+c = b+c$ for some $c\in Q\}$ is the smallest congruence relation on Q for which Q/ν is cancellative. We shall call Q/ν the maximal cancellative homomorphic image of Q. Any cancellative semigroup Q' can be embedded in an isomorphically unique smallest group Q^*, called the difference-group of Q', each element of which is expressible (not necessarily uniquely) as the difference of two elements of Q'.

3. The semigroup of Schreier semigroup extensions of S by Q

Let $Z(Q, S)$ be the set of all factor-systems φ of Schreier extensions of semigroup S by a semigroup Q. Thus $Z(Q, S)$ is the set of all functions $\varphi: Q\times Q\to S$ satisfying I, II, and III. Then $(\varphi+\psi)(a,b) = \varphi(a, b)+\psi(a, b)$ defines an addition under which $Z(Q, S)$ is a semigroup. If S is a group then $Z(Q, S)$ is also a group, regardless of whether Q is a group or not.

Let $B(Q, S) = \{\varphi\in Z(Q, S)|\varphi(a, b) = f(a)+f(b) = f(a+b)$ for some $f: Q\to U(S)\}$. Then $B(Q, S)$ is a subgroup of $Z(Q, S)$; and two elements φ and ψ of $Z(Q, S)$ are factor-systems for equivalent extensions of S by Q if and only if $\varphi\in\psi+B(Q, S)$. In that case φ and ψ are themselves called equivalent. Equivalence is easily shown to be a congruence relation on $Z(Q, S)$, and the factor-semigroup of equivalence-classes is denoted by $H(Q, S)=Z(Q, S)/B(Q, S)$. $H(Q, S)$ is called the semigroup of Schreier extensions of S by Q. If both S and Q are groups,

$H(Q, S)$ is exactly the second co-homology group, $H^2(Q, S)=\mathrm{Ext}^2(Q, S)$, of all abelian group extensions of S by Q.

If S and Q are semigroups and $h: Q\to Q'$ is a homomorphism of Q into a semigroup Q', then $h^{\#}$: $Z(Q', S)\to Z(Q, S)$ defined by $(h^{\#}\varphi')(a, b) = \varphi'(h(a), h(b))$ is easily shown to be a homomorphism of $Z(Q', S)$ into $Z(Q, S)$ for which $h^{\#}(B(Q', S))\subseteq B(Q, S)$. Therefore h induces a homomorphism h^* of $H(Q', S)$ into $H(Q, S)$, defined by $h^*(\varphi'+B(Q', S)) = h^{\#}\varphi'+B(Q, S)$.

4. The group of Schreier semigroup extensions of a group by a semigroup

Lemma 1. *Let S be a cancellative semigroup, Q a semigroup, and $\varphi\in Z(Q, S)$. If a, b, x, and y are elements of Q such that $a+x = b+x$ and $a+y = b+y$, then $\varphi(a, x)+\varphi(b, y) = \varphi(a, y)+\varphi(b, x)$.*

Proof. $\varphi(a+x, y)+\varphi(a, x)+\varphi(b, y) = \varphi(x, a+y)+\varphi(a, y)+\varphi(b, y)$ (by III) $= \varphi(x, b+y)+\varphi(a, y)+\varphi(b, y) = \varphi(b+x, y)+\varphi(a, y)+\varphi(b, x)$ (by III) $=$ $= \varphi(a+x, y)+\varphi(a, y)+\varphi(b, x)$. Therefore, by cancellation in S, $\varphi(a, x)+\varphi(b, y) =$ $=\varphi(a, y)+\varphi(b, x)$. Q. E. D.

For arbitrary semigroups S and Q let $Z_0(Q, S) = \{\varphi\in Z(Q, S) \mid a+x = b+x$ implies $\varphi(a, x)=\varphi(b, x)\}$, and let $B_0(Q, S) = B(Q, S)\cap Z_0(Q, S)$.

Lemma 2. *If S is a group and Q a semigroup, then each element φ of $Z(Q, S)$ is equivalent to some element φ_0 of $Z_0(Q, S)$.*

Proof. Let $r: Q\to Q$ be any function which is constant on each ν-class in Q, for which $(a, r(a))\in\nu$ for each $a\in Q$, and for which $r(0)=0$. Let $g: Q\to S$ be defined by

$$(*)\quad g(a) = \begin{cases} 0 \text{ if } a=0, \\ \text{arbitrary if } a\in r(Q)\setminus 0, \\ g(r(a))+\varphi(r(a), x)-\varphi(a, x) \text{ otherwise, where } x \text{ is any element of} \\ Q \text{ such that } r(a)+x = a+x. \end{cases}$$

By Lemma 1, g is single-valued. Let φ_0: $Q\times Q\to S$ be defined by $\varphi_0(a, b) = \varphi(a, b)+$ $+g(a)+g(b)-g(a+b)$. Then φ_0 is easily shown to be an element of $Z(Q, S)$ which is clearly equivalent to φ. Moreover, if $a+x = b+x$ $(a, b, x\in Q)$ then $r(a)=r(b)$ and, for some $y\in Q$, $a+y = b+y = r(a)+y$. Consequently

$$\begin{aligned}\varphi_0(a, x) &= \varphi(a, x)+g(a)+g(x)-g(a+x) \text{ (by definition of } \varphi_0) = \\ &= \varphi(a, x)+[g(a)+\varphi(a, y)]-\varphi(a, y)+g(x)-g(a+x) = \\ &= \varphi(a, x)+[g(r(a))+\varphi(r(a), y)]-\varphi(a, y)+g(x)-g(a+x) \text{ (by } (*))= \\ &= \varphi(a, x)+[g(b)+\varphi(b, y)]-\varphi(a, y)+g(x)-g(b+x) \text{ (by } (*)) = \\ &= \varphi(b, x)+g(b)+g(x)-g(b+x) \text{ (by Lemma 1)} = \\ &= \varphi_0(b, x) \text{ (by definition of } \varphi_0).\end{aligned}$$

Thus $\varphi_0\in Z_0(S, Q)$. Q. E. D.

Lemma 3. *Let S be a group, Q be a semigroup, and h be the natural homomorphism of Q onto its maximal cancellative homomorphic image Q'. Then the induced homomorphism h^* is an isomorphism of $H(Q', S)$ onto $H(Q, S)$.*

Proof. (1) $h^{\#} Z(Q, S) = Z_0(Q, S)$: If $\varphi' \in Z(Q', S)$ and if $a+x = b+x$ (where $a, b, x \in Q$), then $h(a)=h(b)$ and $(h^{\#}\varphi')(a, x) = \varphi'(h(a), h(x)) = \varphi'(h(b), h(x)) = (h^{\#}\varphi')(b, x)$. Thus $h^{\#}(Z(Q', S)) \subseteq Z_0(Q, S)$. Conversely, if $\varphi_0 \in Z_0(Q, S)$, let φ': $Q' \times Q' \to S$ be defined by $\varphi'(h(a), h(b)) = \varphi_0(a, b)$. If $h(a) = h(c)$, then there exists $x \in Q$ such that $a+x = c+x$, so that $a+b+x = c+b+x$ for every $b \in Q$. By the defining property of $Z_0(Q, S)$, we then have: (a) $\varphi_0(a, x) = \varphi_0(c, x)$, (b) $\varphi_0(a+b, x) = \varphi_0(b+c, x)$, and (c) $\varphi_0(a, b+x) = \varphi_0(c, b+x)$.

Consequently, $\varphi_0(a+b, x)+\varphi_0(a, b) = \varphi_0(b, a+x)+\varphi_0(a, x)$ (by III) $= \varphi_0(b, c+x)+\varphi_0(c, x)$ (by (a)) $= \varphi_0(b+c, x)+\varphi_0(b, c)$ (by III) $= \varphi_0(a+b, x)+\varphi_0(b, c)$ (by (b)). Therefore, by II and cancellation in S, $\varphi_0(a, b) = \varphi_0(c, b)$. If, also, $h(b)=h(d)$, then, by the preceding and II, $\varphi_0(a, b) = \varphi_0(c, b) = \varphi_0(c, d)$. Thus φ' is single-valued. It is easily shown that $\varphi' \in Z(Q', S)$ and that $h^{\#}\varphi' = \varphi_0$. Thus $Z_0(Q, S) \subseteq h^{\#}(Z(Q', S))$.

(2) $h^{\#-1}(B_0(Q, S)) = B(Q', S)$: It is easily shown, by an argument similar to the preceding, that $h^{\#}(B(Q', S)) = B_0(Q, S)$. Suppose $\varphi' \in Z(Q', S)$ is such that $h^{\#}\varphi' \in B_0(Q, S)$. Then for some function $f: Q \to S$, $h^{\#}\varphi'(a, b) = f(a)+f(b)-f(a+b)$ for all $a, b \in Q$. Let $g: Q' \to S$ be defined by $g(h(a)) = f(a)$ for all $a \in Q$. If $h(a)=h(b)$, then $a+c = b+c$ for some $c \in Q$. Consequently, $h^{\#}\varphi'(a, c) = h^{\#}\varphi'(b, c)$ since, by part (1) above, $h^{\#}\varphi' \in Z_0(Q, S)$. Thus $f(a)+f(c)-f(a+c) = f(b)+f(c)-f(b+c) = f(b)+f(c)-f(a+c)$; and hence $f(a)=f(b)$. Hence g is single-valued. From $\varphi'(h(a), h(b)) = h^{\#}\varphi'(a, b) = f(a)+f(b)-f(a+b) = g(h(a))+g(h(b))-g(h(a)+h(b))$ (where a, b are arbitrary elements of Q) we see that $\varphi' \in B(Q', S)$.

(3) h^* is an isomorphism of $H(Q', S)$ onto $H(Q, S)$: In § 3 it is indicated (and is easily proved) that h^* is a homomorphism of $H(Q', S)$ into $H(Q, S)$. By Lemma 2, each element of $H(Q, S)$ can be expressed as $\varphi_0+B(Q, S)$ for some $\varphi_0 \in Z_0(Q, S)$; and by part (1) above, φ_0 can be expressed as $h^{\#}\varphi'$ for some $\varphi' \in Z(Q', S)$. Thus $h^*(H(Q', S)) = H(Q, S)$. If φ' and ψ' are two elements of $Z(Q', S)$ for which $h^*(\varphi'+B(Q', S)) = h^*(\psi'+B(Q', S))$, then $h^{\#}\varphi'+B(Q, S) = h^{\#}\psi'+B(Q, S)$. Therefore $h^{\#}(\varphi'-\psi') = h^{\#}\varphi'-h^{\#}\psi' \in Z_0(Q, S) \cap B(Q, S) = B_0(Q, S)$. Then, by part (2) above, $\varphi'-\psi' \in B(Q', S)$ and hence $\varphi'+B(Q', S) = \psi'+B(Q', S)$; that is, h^* is an isomorphism. Q. E. D.

If S and Q are cancellative semigroups then any Schreier extension T of S by Q is also cancellative and can be embedded in its difference-group T^*.

Lemma 4. *Let S and Q' be cancellative semigroups, $T = T(S, Q', u, \varphi)$, and S^*, Q^*, and T^* be the difference-groups of S, Q', and T, respectively. Then T^* is a Schreier extension of S^* by Q^*, and for a suitable choice of partitioning representatives the corresponding factor-system φ^* is such that $\varphi^* | Q' \times Q' = \varphi$.*

Proof. T^* is clearly an extension of S^* since T^* is an abelian group. Each element of T has a unique representation of the form $u_a+\alpha$ with $a \in Q'$ and $\alpha \in S$, and each element of T^* has a representation of the form t_1-t_2 with $t_1, t_2 \in T$. Therefore, each element of T^* has a representation of the form $(u_a+\alpha)-(u_b+\beta) = (u_a-u_b)+(\alpha-\beta) = u_a-u_b+\alpha^*$ with α^* in S^*. If $u_a-u_b+S^* = u_c-u_d+S^*$ (with $a, b, c, d \in Q^*$), then for some $\alpha, \beta \in S$, $u_a-u_b = u_c-u_d+\alpha-\beta$. But then $u_a+u_d+\beta = u_b+u_c+\alpha$, so that $u_{a+d}+\varphi(a, d)+\beta = u_{b+c}+\varphi(b, c)+\alpha$, and hence $a+d = b+c$. That is, in Q^*, $a-b = c-d$. Conversely, if $a-b = c-d$ in Q^*, then

$$u_a+u_d+\varphi(b, c) = u_b+u_c+\varphi(a, d),$$

and hence, in T^*, $u_a - u_b \in u_c - u_d + S^*$. Therefore, $u_a - u_b + S^* = u_c - u_d + S^*$. Thus there is a one-to-one correspondence between the cosets of S^* in T^* and the elements of Q^*. This correspondence is easily shown to be an isomorphism between the factor-group T^*/S^* and the group Q^*, and therefore T^* is an extension of S^* by Q^*. Clearly, if a set $\{u_a^* | a \in Q^*\}$ of representatives for the cosets of S^* in T^* are chosen so that $u_a^* = u_a$ whenever $a \in Q$, then the corresponding factor-system φ^* will be such that $\varphi^* | Q' \times Q' = \varphi$. Q. E. D.

Theorem 5. *Let S be a group, Q be a semigroup, Q' be the maximal cancellative homomorphic image of Q, and Q^* be the difference-group of Q'. Then*

$$H(Q, S) \cong H(Q', S) \cong H(Q^*, S).$$

Proof. By Lemma 3, the natural homomorphism h of Q onto Q' induces the first of the indicated isomorphisms.

Let k be the embedding mapping of Q' into Q^*, so that $k(a) = a$ for each $a \in Q'$, Then $k^{\#}\varphi^* = \varphi^* | Q' \times Q'$ for each $\varphi^* \in Z(Q^*, S)$. Let $\varphi' \in Z(Q', S)$ and let $T = T(S, Q', u, \varphi')$. By Lemma 4, $T^* = T^*(S, Q^*, u^*, \varphi^*)$ with $\varphi' = \varphi^* | Q' \times Q' = k^{\#}\varphi^*$. Therefore, $k^{\#}(Z(Q^*, S)) = Z(Q', S)$. If φ^* and ψ^* are equivalent elements of $Z(Q^*, S)$, then it is easily shown that $k^{\#}\varphi^*$ and $k^{\#}\psi^*$ are also equivalent. Conversely, if $k^{\#}\varphi^*$ and $k^{\#}\psi^*$ are equivalent elements of $Z(Q', S)$, then there exists an extension T of S by Q for which $T = T(S, Q', u, k^{\#}\varphi^*) = T(S, Q', v, k^{\#}\psi^*)$. Then by Lemma 4 $T^* = T^*(S, Q^*, u^*, \varphi^*) = T^*(S, Q^*, v^*, \psi^*)$ for suitable sets $\{u_a^* | a \in Q^*\}$ and $\{v_a^* | a \in Q^*\}$ of partitioning representatives. That is, φ^* and ψ^* are equivalent. By the Induced Homomorphism Theorem, $k^{\#}$ induces an isomorphism k^* of $H(Q^*, S)$ onto $H(Q', S)$, and the theorem is proved. Q. E. D.

5. Complete semigroups

In the terminology introduced by WIEGANDT [5], a semigroup (cancellative semigroup, group) is called *complete* if it is a direct summand of every Schreier semigroup (cancellative semigroup, group) extension of itself. By the preceding discussion, a semigroup (cancellative semigroup, group) S is complete if and only if $H(Q, S) = 0$ for every semigroup (cancellative semigroup, group) Q. It is well-known that a group is complete if and only if it is divisible (that is, contains, with each element a and each positive integer n, an element x such that $nx = a$). WIEGANDT and this author proved in [6] and [3] that a cancellative semigroup is also complete if and only if it is a divisible group. That proof is superseded and supplemented by the following corollary to Theorem 5.

Theorem 6. *A semigroup (cancellative semigroup) S is complete if and only if it is a divisible group.*

Proof. Let α be any element of S and let n be any positive integer. Let Q be the additive semigroup of the integers reduced modulo n, and let $\varphi \in Z(Q, S)$ be defined by $\varphi(a, b) = \left[\frac{a+b}{n}\right]\alpha$ where $[x]$ denotes the greatest integer in x, and $a+b$ denotes the ordinary sum of a and b. Then an extension $T = T(S, Q, u, \varphi)$ is a semigroup or a cancellative semigroup according as S is a semigroup or a cancellative semigroup. In either case, if S is complete, then $T=S\oplus K$ for some subsemigroup K of T. Therefore there exist elements $\beta\in S$ and $k\in K$ such that $u_1 = \beta+k$. Then $\alpha = nu_1 = n\beta+nk\in S\oplus K$ so that $nk=0$ and $n\beta=\alpha$. Thus S must be divisible. Moreover, $\varphi(Q\times Q)\cong U(S)$ and hence $\alpha = \varphi(n-1, 1)\in U(S)$, so that S is a group.

Conversely, if S is a divisible group, then $H(Q^*, S)=0$ for every group Q^*. Hence, by Theorem 5, $H(Q, S)=0$ for every semigroup Q. That is, a divisible group S is a complete semigroup, a complete cancellative semigroup and a complete group. Q. E. D.

The factor-system φ used in the proof of Theorem 6 is due to WIEGANDT [6].

Theorem 7. *A semigroup Q is such that every extension of itself by a group S is a splitting extension if and only if the difference-group Q^* of the maximal cancellative homomorphic image Q' of Q is a free abelian group.*

Proof. By Theorem 7. 2 of EILENBERG and MACLANE [2], $H(Q^*, S)=0$ for every group S if and only if Q^* is a free abelian group. By Theorem 5, $H(Q^*, S)=0$ if and only if $H(Q, S)=0$. Therefore, $H(Q, S)=0$ for every group S if and only if Q^* is a free abelian group. Q. E. D.

References

[1] H. CARTAN and S. EILENBERG, *Homological Algebra* (Princeton, 1956).
[2] S. EILENBERG and S. MACLANE, Group extensions and homology, *Ann. of Math.*, 43 (1942), 757—831.
[3] V. R. HANCOCK, On complete semimodules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 71—76.
[4] L. RÉDEI, Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta. Sci. Math.*, 14 (1952), 252—273.
[5] R. WIEGANDT, On complete semi-groups, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 93—97.
[6] R. WIEGANDT, On complete semi-modules, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 219—223.

THE TULANE UNIVERSITY OF LOUSIANA
AND
VIRGINIA POLYTECHNIC INSTITUTE

(Received Aug. 20, 1962)

Die Halbgruppen, deren endlich erzeugte echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale sind

Von F. SZÁSZ in Budapest

Professor Béla Szőkefalvi-Nagy zu seinem 50. Geburtstag gewidmet

Der Zweck dieser Arbeit ist die Bestimmung aller im Titel genannten Halbgruppen. Das analoge ringtheoretische, aber viel zusammengesetztere Problem habe ich früher behandelt [5]. Bezüglich weiterer ähnlicher Untersuchungen vgl. man etwa [1], [3], [4] und [6].

Eine Halbgruppe H werde eine Ω-Halbgruppe genannt, wenn sämtliche endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale von H sind.

Wir haben also alle Ω-Halbgruppen zu bestimmen.

Es wäre interessant auch alle Halbgruppen, deren Teilhalbgruppen Rechstsideale sind, explicit zu beschreiben. (Vgl. bezüglich der Hamiltonschen Gruppen die Arbeit [1] und bezüglich der entsprechenden Ringe die Arbeiten [3] und [4].)

Bezüglich der nötigen Begriffe der Algebra verweisen wir z. B. auf das Buch [2] von L. RÉDEI. $\{\ldots\}$ bezeichnet die durch die eingeklammerten Elemente erzeugte Teilhalbgruppe einer Halbgruppe.

Alle Ω-Halbgruppen bestehen aus höchstens vier Elementen und zwar gilt der

Satz. *Die untereinander nichtisomorphen Ω-Halbgruppen sind die folgenden:*

1. $\{a\}$ *mit* $a^2=a$;
2. $\{a\}$ *mit* $a^3=a^2$;
3. $\{a\}$ *mit* $a^4=a^3$;
4. $\{a, b\}$ *mit* $a^2=ab=a,\ b^2=ba=b$;
5. $\{a, b\}$ *mit* $a^3=a^2=b^3=b^2=ab=ba$;
6. $\{a, b\}$ *mit* $a^4=a^3=b^4=b^3=ab=ba$;
7. $\{a, b\}$ *mit* $a^4=a^3=b^4=b^3=ab,\ a^2=b^2=ba$;
8. $\{a, b\}$ *mit* $a^4=a^3=b^4=b^3,\ a^2=b^2=ab=ba$.

Offenbar ist sowohl jede Teilhalbgruppe, als auch jedes homomorphe Bild einer Ω-Halbgruppe ebenfalls eine Ω-Halbgruppe. Ferner gibt es in jeder Ω-Halbgruppe zu beliebigen Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die eine echte Teilhalbgruppe erzeugen, ein weiteres Element b mit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}=b\cup bH=\{b\}$, also läßt sich jede endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppe einer Ω-Halbgruppe schon durch ein Element erzeugen. Daher sind die Ω-Halbgruppen entweder kommutativ, oder einstufig nichtkommutativ im Sinne von L. RÉDEI [2]. Bei unserer Untersuchung über die

Ω-Halbgruppen wird aber der Satz von L. Rédei [2] über die einstufig nichtkommutativen endlichen Halbgruppen nicht benützt.

Wir brauchen den folgenden

Hilfssatz. *Damit in einem potenzenassoziativen Gruppoid G alle Teilgruppoide Rechtsideale sind, ist notwendig und hinreichend, daß für beliebige Elemente a, b von G eine Gleichung von der Form $ab = a^j$ ($j = 1, 2$ oder 3) gilt. Hieraus folgt $a^{l+1} = a^l$ ($l = 1, 2$ oder 3).*

Beweis. Ist jedes Teilhalbgruppoid des Gruppoides G ein Rechtsideal, so erhält man $a^2 \cdot a = a^3 \in \{a^2\}$, also $a^3 = a^{2k}$ für eine natürliche Zahl k. Es seien nun m und n für $a \in G$ möglichst klein gewählt, derart, daß $a^m = a^n$ mit $0 < m < n$ erfüllt ist. Dann sind die Elemente $a, a^2, \ldots, a^m, \ldots, a^{n-1}$ voneinander verschieden. Ferner ist das Element $e = a^{m(n-m)}$ idempotent (vgl. z. B. Rédei [2], Seite 51). Da $e = a^l$ für ein l mit $1 \leqq l \leqq n-1$ idempotent ist, gilt $\{e\} = e$, und da jede Teilhalbgruppe ein Rechtsideal von H ist, gewinnen wir $eb = e$ für jedes $b \in G$. Also gilt auch $a^{l+1} = a^l$. Eine leichte Überlegung liefert nun die Beziehung $m = l < l+1 = n$, woraus wegen $a^3 = a^{2k}$ und wegen der Minimalität von $m = l$ auch $l \leqq \min(3, 2k)$, also $l \leqq 3$ folgt. Deshalb muß gewiß $a^4 = a^3$ und auch $ab = a^j$ für jedes $a, b \in G$ mit einem Exponenten $j (\geqq 1, \leqq 3)$ bestehen. Die weiteren Behauptungen sind trivial. Somit haben wir den Hilfssatz bewiesen.

Beweis des Satzes. Es genügt zu zeigen, daß jede Ω-Halbgruppe H einer im Satz vorkommenden Halbgruppe isomorph ist. Andererseits sind nämlich die im Satz erwähnten Halbgruppen offenbar Ω-Halbgruppen. Im folgenden sei also H eine Ω-Halbgruppe.

I. Zuerst bestimmen wir die durch ein Element erzeugten Ω-Halbgruppen.

Nach dem Hilfssatz gilt für $H = \{a\}$ gewiß $a^{l+1} = a^l$ mit $l = 1, 2$ oder 3. In allen drei Fällen wirkt hierbei a^l als das (multiplikative) Nullelement von H. Somit erhält man die im Satz bei 1., 2. und 3. erwähnten Halbgruppen.

Unter II—VII bestimmen wir die durch zwei, aber nicht durch ein Element erzeugten Ω-Halbgruppen.

II. Ist $H = \{a, b\}$ eine Ω-Halbgruppe, gelten ferner $a^2 = a$ und $b^2 = b$, so ergibt sich $ab = a$ und $ba = b$, also der im Satz bei 4. erwähnte Fall.

Für diesen Fall ist nichts zu beweisen.

III. Ist $H = \{a, b\}$ eine Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^2 = a$ und $b^3 = b^2$, so ist $\{a, b\}$ keine Ω-Halbgruppe.

Zum Beweis nehmen wir an, daß H eine Ω-Halbgruppe ist, und bilden die echte Teilhalbgruppe $S = \{a, b^2\}$ von $\{a, b\}$, wobei wegen $(b^2)^2 = b^2$, $a^2 = a$, $ab^2 = a$, $b^2 a = b^2$ jedes Element von S idempotent ist, weil jede Teilhalbgruppe ein Rechtsideal von H ist. Dann gelten $S = \{s\}$, $s^2 = s$ und somit $a = b^2$, woraus $H = \{b\}$ folgt, was der Voraussetzung widerspricht. Also ist $H = \{a, b\}$ keine Ω-Halbgruppe, w. z. b. w.

IV. Ist $H = \{a, b\}$ eine beliebige Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^2 = a$ und $b^4 = b^3$, so ist $H = \{a, b\}$ ebenfalls keine Ω-Halbgruppe.

Ist nämlich $H = \{a, b\}$ unter den erwähnten Voraussetzungen eine Ω-Halbgruppe, so gilt wegen $\{a, b^3\} \neq \{a, b\}$ auch $S = \{a, b^3\} = \{s\}$, $s^2 = s$. Hieraus folgt

$a=b^3 \in \{b\}$ und $\{a, b\}=\{b\}$, was unmöglich ist. Daher ist $\{a, b\}$ keine Ω-Halbgruppe, w. z. b. w.

V. Ist $H=\{a, b\}$ eine Ω-Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^3=a^2$ und $b^3=b^2$, so erhält man $ab=ba=a^2=b^2$, also den im Satz bei 5. erwähnten Fall.

Die Untersuchung von $S=\{a^2, b^2\}$ liefert nämlich $S=\{s\}$, $a^2b^2=a^2$, $b^2a^2=b^2$, woraus wegen $s^2=s$ auch $a^2=b^2$ folgt. Ist nun $ab=a$, so erhält man $ab^2=a$, also $a=a^2=b^2 \in \{b\}$ und $H=\{b\}$, was wegen der Voraussetzung unmöglich ist. Daher gilt gewiß $ab=a^2$ und ähnlich auch $ba=b^2$, w. z. b. w.

VI. Ist $H=\{a, b\}$ eine beliebige Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^3=a^2$ und $b^4=b^3$, so ist H keine Ω-Halbgruppe.

Ist nämlich $H=\{a, b\}$ eine Ω-Halbgruppe, so gilt für $S=\{a^2, b^3\}$ wegen $S \neq H$ gewiß $S=\{s\}$ mit $s^2=s$, denn man erhält $a^2b^3=a^2$ und $b^3a^2=b^3$. Daher ist $a^2=b^3$. Da $T=\{a, b^2\} \neq \{a, b\}$ ist, gewinnen wir $T=\{t\}$ mit entweder $t \in \{a\}$ oder $t \in \{b^2\}$ folglich $|T| \leqq 2$. Deshalb ergibt sich $a \in \{b^2\}$ und $\{a, b\}=\{b\}$, was ausgeschlossen ist. Daher ist $H=\{a, b\}$ tatsächlich keine Ω-Halbgruppe, w. z. b. w.

VII. Ist $H=\{a, b\}$ eine Ω-Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^4=a^3$ und $b^4=b^3$, so gewinnen wir die im Satz bei 6., 7. oder 8. erwähnten Fälle.

Aus der Untersuchung von $S_1=\{a^3, b^3\}$ folgt nämlich, mit ähnlichen Methoden, wie in V bzw. VI, daß $a^3=b^3$ gilt. Ferner läßt sich nach der Untersuchung der echten Teilhalbgruppe $S_2=\{a, b^2\}$ auch $b^2 \in \{a\}$ bestätigen, denn sonst erhielte man $|S_2| \geqq 4$ für $S_2=\{s_2\}$, was wegen I unmöglich ist.

Jetzt sind neun weitere Unterfälle möglich, unter denen nur drei Unterfälle wirklich vorkommen werden: $ab=a^j$, wobei $j=1, 2$ oder 3, ferner $ba=b^k$, wobei $k=1, 2$ oder 3 gelten. Im Falle $j=1$ ergibt sich $a^3=a^4=ab^3=a$, was unmöglich ist. Daher gilt $j \neq 1$, und ähnlich auch $k \neq 1$. Da die Halbgruppen $\{a, b\}$, die den Fällen $(j, k)=(2, 3)$ und $(j, k)=(3, 2)$ entsprechen, untereinander isomorph sind, gewinnen wir für diese Fälle gleichzeitig die im Satz bei 7. vorkommende Halbgruppe. Im Unterfalle $(j, k)=(2, 2)$ erhält man die im Satz bei 8. erwähnte Halbgruppe und im Falle $(j, k)=(3, 3)$ die im Satz bei 6. vorkommende Halbgruppe. Daher liefern diese neun Möglichkeiten für (j, k) wirklich nur drei nichtisomorphe Halbgruppen, und zwar die im Satz bei 6., 7. und 8. betrachteten Halbgruppen, w. z. b. w.

VIII. Jetzt beweisen wir, daß jede Ω-Halbgruppe H entweder durch ein Element oder durch zwei Elemente erzeugt werden kann.

Läßt sich nämlich die Ω-Halbgruppe H durch keine ihrer endlichen Teilmengen erzeugen, so kann aus jedem unendlichen erzeugenden System $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von H eine abzählbar unendliche Teilmenge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ausgewählt werden, derart, daß $b_{j+1} \notin \{b_1, b_2, \ldots, b_j\}$ für jedes $j=1, 2, 3, \ldots$ gilt. Es sei nun $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Dann gilt wegen der Definition der Folge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ einerseits $|B| \geqq 4$, andererseits wegen I und wegen $B \neq H$, $B=\{b\}$ gewiß $|B| \leqq 3$, was aber ein Widerspruch ist. Also läßt sich H schon durch endlich viele Elemente erzeugen. Es sei m das Minimum derjenigen natürlichen Zahlen n, für welche wenigstens ein aus genau n Elementen bestehendes erzeugendes System der Halbgruppe H existiert. Dann gibt es Elemente $c_1, c_2, \ldots, c_m \in H$ mit $H=\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ und mit $S=\{c_2, \ldots, c_m\} \neq$

$\neq H$, denn m ist minimal gewählt. Da H eine Ω-Halbgruppe ist, erhält man wegen $S=\{s\}$ gewiß $H=\{c_1, S\}=\{c_1, s\}$, folglich $m\leqq 2$, w. z. b. w.

Somit haben wir den Satz bewiesen.

Jetzt betrachten wir noch eine Klasse von Halbgruppen.

Eine Halbgruppe H wird eine Ω'-Halbgruppe genannt, wenn jede endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppe S von H in der Gestalt hH $(h\in H)$ dargestellt werden kann.

Es wird sich unter anderem herausstellen, daß jede Ω'-Halbgruppe eine Ω-Halbgruppe ist.

Wegen $hH\subseteqq\{h\}$ sind die Ω'-Halbgruppen entweder kommutativ, oder einstufig nichtkommutativ. Ferner sind die echten, endlich erzeugbaren Teilhalbgruppen S einer Ω'-Halbgruppe H wegen $hH\subseteqq\{h\}$ und wegen des Hilfssatzes höchstens von der Mächtigkeit drei. Ähnlich dem Beweisschritt VIII über die Ω-Halbgruppen kann bewiesen werden, daß auch jede Ω'-Halbgruppe endlich ist.

Ist eine Ω'-Halbgruppe durch ein Element erzeugbar, so ist sie einer im Satz bei 1., 2. oder 3. erwähnten Halbgruppe isomorph.

Läßt sich aber eine Ω'-Halbgruppe nicht durch ein Element erzeugen, so ist sie durch zwei Elemente erzeugbar, wie diese Tatsache dem Schritt VIII ähnlich einzusehen ist.

Wir betrachten jetzt diejenigen Ω'-Halbgruppen $H=\{a, b\}$, die sich nicht durch ein Element erzeugen lassen. Es sei $M=mH$ $(m\in H)$ eine beliebige maximale Teilhalbgruppe von H. Dann erhält man $mH\subseteqq\{m\}$, also $mH=\{m\}\neq H$ und $mh=m$ $(h\in H)$. Dann besteht die Teilhalbgruppe $S=m\{h\}$ aus dem einzigen idempotenten Element $m\in H$, womit $|M|=1$ bewiesen ist. Es seien jetzt $x\in H$ ein beliebiges Element mit $x\neq m$ und $\{y\}$ eine maximale Teilhalbgruppe von H mit $x\in\{y\}$. Nach den Vorigen gelten dann $\{x\}=\{y\}$, $|\{y\}|=1$ und $H=\{m, x\}$, wobei offenbar $m^2=mx=m$ und $x^2=xm=x$ bestehen. Das ist der im Satz bei 4. vorkommende Fall. Umgekehrt sind diese Halbgruppen Ω'-Halbgruppen.

Damit ist bewiesen:

Alle Ω'-Halbgruppen sind die im Satz bei 1—4. *aufgezählten Ω-Halbgruppen.*

Literatur

[1] R. Baer, Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg*, **2** (1933), 12—17.
[2] L. Rédei, *Algebra I* (Leipzig, 1959).
[3] L. Rédei, Die Vollidealringe, *Monatshefte f. Math.*, **56** (1952), 89—95.
[4] L. Rédei, Vollidealringe im weiteren Sinne I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1962), 243—268.
[5] F. Szász, Die Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptrechtsideale sind, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), 115—132.
[6] F. Szász, Ringe, deren echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közleményei*, **5** (1960), 287—297.

(Eingegangen am 3. August 1962, in veränderter Form am 10. Juli 1963)

On group homomorphic images of partially ordered semigroups

By L. FUCHS in Budapest

Our present aim is to investigate the case when a partially ordered semigroup S can be mapped order-homomorphically onto a partially ordered group G. The corresponding question without partial order has been considered in a number of papers by P. DUBREIL and members of his school (see e. g. [2]). If S is lattice-ordered (or at least a union-semilattice), commutative and residuated, then the answer is given by M.-L. DUBREIL-JACOTIN's well-known generalization of ARTIN's equivalence relation (see [3]) and its recent extensions (see [4]). In order to get satisfactory statements in the more general partially ordered case, it seems to be necessary to make rather natural restrictions. First, we assume that every relation $\leqq$ in G is a consequence of one in S; then it is more natural to consider congruence relations in S with convex classes. Secondly, we wish to obtain from S a possible largest group G, and to this end we suppose — in accordance with DUBREIL-JACOTIN's point of view — that the identity of S is the largest element of its class.[1]) Our discussion leads directly to generalized residuals which are related to the usual residuals as ideals are related to generators of principal ideals.

This note was inspired by the lectures of Madame DUBREIL held at Tulane University, New Orleans, March 1962. She gave a survey of the different generalizations of ARTIN's equivalence relation in partially ordered groupoids and semigroups. In the cases she discussed the equivalence was defined either in terms of closure operator or residual.

1. Assume that S is a partially ordered semigroup, i. e., S is a semigroup and a partially ordered set such that, for all $a, b, c \in S$, $a \leqq b$ implies $ac \leqq bc$ and $ca \leqq cb$. For all $a, b \in S$ we define the *generalized right residual* of a by b as the set[2])

$$\langle a^{\cdot}.b\rangle = \{x \in S \mid xb \leqq a\},$$

and the *generalized left residual* of a by b as

$$\langle a.^{\cdot}b\rangle = \{x \in S \mid bx \leqq a\}.$$

We call S *generalized right (left) residuated*[3]) if the set $\langle a^{\cdot}.b\rangle$ (the set $\langle a.^{\cdot}b\rangle$) is

[1]) Actually, we assume somewhat more, namely, that the identity e of S is greater than or equal to any element of S whose class is less than or equal to the class of e.

[2]) BIRKHOFF [1] uses the symbol $a:b$ for the right and the symbol $a::b$ for the left residual of a by b; cf. also [5].

[3]) If S is trivially ordered, then it is easy to see that it is generalized right residuated if and only if it is a group.

never empty. S is *generalized residuated* if it has this property both from the right and from the left. Clearly, a generalized residual contains along with $x \in S$ also all $y \in S$ satisfying $y \leqq x$.

If the right residual element $a^{\cdot}.b$ happens to exist for certain $a, b \in S$, then $\langle a^{\cdot}.b \rangle$ is just the set of all $x \in S$ with $x \leqq a^{\cdot}.b$. Thus a generalized right residuated semigroup S is right residuated if and only if each $\langle a^{\cdot}.b \rangle$ contains a maximum element.

The generalized residuals obey a number of formal rules which are immediate extensions of known rules of the residuals.[4]) Since we shall not need them, we omit their systematic discussion.

Next suppose that S contains a left (right) identity e. Let U be a subset of S. A $u \in U$ is said to be *left (right) multiplicatively maximal* in U if $v \in S$ and $vu \in U$ ($v \in S$ and $uv \in U$) imply $v \leqq e$. It is evident that if u is left multiplicatively maximal in $U = \langle a^{\cdot}.b \rangle$ and if $u' \in U$ satisfies $u < u'$, then u' is likewise left multiplicatively maximal in U.

Let S be a partially ordered semigroup with left identity e. We consider congruence relations θ of S. Thus, by definition, θ is an equivalence relation such that, for all $a, b, c \in S$,

1. $a \equiv b(\theta)$ implies $ca \equiv cb(\theta)$ and $ac \equiv bc(\theta)$;
2. $a \leqq c \leqq b$ and $a \equiv b(\theta)$ imply $a \equiv c(\theta)$.

We denote by $\theta(a)$ the class of $a \in S$ under θ.

The set of classes under θ need not form a partially ordered semigroup, the quotient semigroup S/θ, if multiplication is defined by $\theta(a)\,\theta(b) = \theta(ab)$ and order relation is defined by putting $\theta(a) \leqq \theta(b)$ if and only if there are $a' \in \theta(a)$, $b' \in \theta(b)$ such that $a' \leqq b'$ in S. In fact, the relation $\theta(a) \leqq \theta(b)$ now defined is in general not a partial order. But it is whenever S/θ is a group and θ is a Dubreil-Jacotin congruence in the following sense.

A congruence θ of S is said to be a *Dubreil-Jacotin congruence* if, in addition to 1—2., it satisfies

3. $\theta(a) \leqq \theta(e)$ implies $a \leqq e$.

In particular, e is then the maximum element in its class.

Now let θ be a Dubreil-Jacotin congruence of S such that S/θ is a group, and let $\theta(a) \leqq \theta(b) \leqq \theta(c)$. If $a \leqq b$, $b' \leqq c$ $(b' \in \theta(b))$, then some $c^* \in S$ satisfies $c^*c \equiv e(\theta)$. We have $c^*b' \leqq c^*c \leqq e$ whence $c^*b \leqq e$ too, and so $cc^*a \leqq cc^*b \leqq c$. Since $a \equiv cc^*a(\theta)$, we have $\theta(a) \leqq \theta(c)$, i. e. transitivity. Antisymmetry follows in the same way.

2. Let S be a partially ordered semigroup with identity e, and θ a Dubreil-Jacotin congruence on S such that S/θ is a group G, necessarily a partially ordered group. Then we can in turn conclude:

A. *S is a generalized residuated semigroup.*

In order to show that $\langle e^{\cdot}.a \rangle$ is not void for any $a \in S$, it suffices to take an $a' \in S$ with $a'a \equiv e(\theta)$. Then, by 3., we have $a'a \leqq e$, and thus $a' \in \langle e^{\cdot}.a \rangle$. Clearly, $ba' \in \langle b^{\cdot}.a \rangle$, and therefore S is generalized right residuated. Similarly, it is generalized left residuated.

---

[4]) Cf. e. g. Birkhoff [1] and Fuchs [5].

B. *For each* $a \in S$, $\langle e^{\cdot}.a\rangle$ *contains left multiplicatively maximal elements.*

If a' is chosen as in A, then it has the desired property. In fact, $va' \in \langle e^{\cdot}.a\rangle$, i. e., $va'a \leqq e$ implies $\theta(v)=\theta(v)\,\theta(a'a)=\theta(va'a)\leqq\theta(e)$, and so, by 3., we obtain $v \leqq e$. — The converse holds as well:

C. *If* $a' \in \langle e^{\cdot}.a\rangle$ *is left multiplicatively maximal, then it satisfies* $a'a \equiv e(\theta)$.

For, if a' is such an element, then $a'a \leqq e$ whence $\theta(a'a)\leqq\theta(e)$. Thus there is a $v \in S$ such that $\theta(v) \geqq \theta(e)$ and $\theta(v)\,\theta(a'a)=\theta(e)$. By 3. we have $va'a \leqq e$, $va' \in \langle e^{\cdot}.a\rangle$. Our hypothesis on a' implies $v \leqq e$, $\theta(v)\leqq\theta(e)$. Therefore $\theta(v)=\theta(e)$ and $a'a\equiv e(\theta)$.

D. $a \equiv b(\theta)$ *if and only if* $\langle e^{\cdot}.a\rangle=\langle e^{\cdot}.b\rangle$.

Assume first that $a\equiv b(\theta)$ and let $x \in \langle e^{\cdot}.a\rangle$. Then $xa \leqq e$, $\theta(x)\,\theta(a)\leqq\theta(e)$, and thus $\theta(x)\,\theta(b)\leqq\theta(e)$. Hence $xb \leqq e$ and $x \in \langle e^{\cdot}.b\rangle$. Changing the roles of a and b we are led to $\langle e^{\cdot}.a\rangle=\langle e^{\cdot}.b\rangle$. The converse follows from the fact that if the left multiplicatively maximal elements in $\langle e^{\cdot}.a\rangle$ and in $\langle e^{\cdot}.b\rangle$ are the same, then by C they belong both to the left inverse class of a and to the left inverse class of b. Therefore the classes of a and b coincide.

E. $\langle e^{\cdot}.a\rangle=\langle e.^{\cdot}a\rangle$ *holds for all* $a \in S$.

Assume $x \in \langle e^{\cdot}.a\rangle$, that is to say, $xa \leqq e$. Then $\theta(x)\,\theta(a)\leqq\theta(e)$, and in the group of classes conjugation with $\theta(x)$ yields $\theta(a)\,\theta(x)\leqq\theta(e)$. Hence $ax \leqq e$ and $x \in \langle e.^{\cdot}a\rangle$. Changing the roles of left and right, we obtain the assertion.

Let us formulate what we have proved so far.

THEOREM 1. *Let θ be a Dubreil-Jacotin congruence of the partially ordered semigroup S with identity e. If S/θ is a group, then in S the generalized left and right residuals exist and satisfy*

(i) $\langle e^{\cdot}.a\rangle=\langle e.^{\cdot}a\rangle$ *for all* $a \in S$;
(ii) $\langle e^{\cdot}.a\rangle$ *contains left multiplicatively maximal elements for all* $a \in S$;
(iii) $\langle e^{\cdot}.a\rangle=\langle e^{\cdot}.b\rangle$ *if and only if* $a\equiv b$ (θ).

3. We are going to show that the converse of this result holds true.

Theorem 2. *Let S be a partially ordered semigroup with identity e such that S is generalized residuated and* (i), (ii) *are fulfilled. If we define the relation θ by* (iii), *then θ is a Dubreil-Jacotin congruence of S and S/θ is a group.*

Assume the hypotheses of the theorem and define θ by (iii). Then θ is evidently an equivalence relation. Since $\langle e^{\cdot}.a\rangle=\langle e^{\cdot}.b\rangle$ implies $\langle e^{\cdot}.ca\rangle=\langle e^{\cdot}.cb\rangle$, we have $ca \equiv cb(\theta)$, and because of (i) similarly $ac\equiv bc(\theta)$ whenever $a\equiv b(\theta)$. Hence it follows that θ is a congruence with respect to multiplication. If $a \leqq c \leqq b$ then $\langle e^{\cdot}.b\rangle \subseteqq \subseteqq \langle e^{\cdot}.c\rangle \subseteqq \langle e^{\cdot}.a\rangle$, and therefore $a\equiv b(\theta)$ will imply $a \equiv c(\theta)$. In order to verify that it is a Dubreil-Jacotin congruence, let $\theta(x)\leqq\theta(e)$. This means that there exist $x', e' \in S$ such that $x'\equiv x(\theta)$, $e' \equiv e(\theta)$ and $x' \leqq e'$. Then $\langle e^{\cdot}.x\rangle=\langle e^{\cdot}.x'\rangle\supseteqq\langle e^{\cdot}.e'\rangle= =\langle e^{\cdot}.e\rangle \ni e$, and so $x \leqq e$. Finally we have to show that S/θ is a group.[5] By (ii), there exists a left multiplicatively maximal element a' in $\langle e^{\cdot}.a\rangle$. Thus $a'a \leqq e$, and $va'a \leqq e$ holds if and only if $v \leqq e$. Consequently, $\langle e^{\cdot}.a'a\rangle$ is just the set of all $v \in S$

[5]) It is clear that $\theta(e)$ must be the identity of S/θ.

with $v \leqq e$, and hence it is equal to $\langle e^{\cdot} . e \rangle$. In view of the definition of θ, $a'a \equiv e(\theta)$ and the class $\theta(a)$ has the left inverse $\theta(a')$. This completes the proof of Theorem 2.

4. In order to clarify the meaning of condition (ii) in the residuated case, and at the same time to show that our result is actually a generalization of ARTIN's equivalence from the residuated case, let us now suppose that $\langle e^{\cdot} . a \rangle$ contains a maximum element $e^{\cdot} . a$. In this event, $\langle e^{\cdot} . a \rangle$ contains a left multiplicatively maximal element exactly if $e^{\cdot} . a$ is left multiplicatively maximal, and this is the case if and only if

$$\langle (e^{\cdot} . a)^{\cdot} . (e^{\cdot} . a) \rangle = \{x \in S \,|\, x \leqq e\}.$$

In fact, $x \in \langle (e^{\cdot} . a)^{\cdot} . (e^{\cdot} . a) \rangle$ is equivalent to $x(e^{\cdot} . a) \in \langle e^{\cdot} . a \rangle$, and so $e^{\cdot} . a$ is left multiplicatively maximal in $\langle e^{\cdot} . a \rangle$ if and only if the last inclusion implies $x \leqq e$. It follows that, in the residuated case, (ii) can be replaced by the condition

$$(e^{\cdot} . a)^{\cdot} . (e^{\cdot} . a) = e \qquad \text{for all } a \in S$$

which is known to be equivalent to integral closure.

References

[1] G. BIRKHOFF, *Lattice theory* (New York, 1948).
[2] P. DUBREIL, Introduction à la théorie des demi-groupes ordonnés, *Convegno Italo-Francese di Algebra Astratta* (Padova, 1956).
[3] M.-L. DUBREIL-JACOTIN, Quelques propriétés des équivalences régulières par rapport à la multiplication et à l'union, dans un treillis à multiplication commutative avec élément unité, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232** (1951), 287–289.
[4] ——— *Residuated groupoids*, mimeographed notes (Tulane University, 1962).
[5] L. FUCHS, *Partially ordered algebraic systems* (Oxford–London–New York–Paris, 1963).

(Received January 3, 1963)

Über ein spezielles dreifaches schiefes Produkt

Von GÜNTER SCHAAR in Freiberg

Problemstellung. Im folgenden soll das von RÉDEI [1] erwähnte spezielle dreifache schiefe Produkt $\mathfrak{G}\circ\Gamma\circ G$ der Gruppen $\mathfrak{G}=(a, b, \ldots)$; $\Gamma=(\alpha, \beta, \ldots)$; $G=(A, B, \ldots)$ mit der Multiplikationsvorschrift

$$(a, \alpha, A)(b, \beta, B)=(ab^{\alpha}, \alpha\beta^{A}, AB^{a}),$$

wobei b^{α}, β^{A}, B^{a} drei beliebige Funktionen mit Werten in $\mathfrak{G}$, Γ, G bezeichnen, untersucht werden. Es wird sich herausstellen, daß die Struktur dieses schiefen Produktes, falls es eine Gruppe bildet, sich in einfacher Weise durch direkte Produkte und eine Schreiersche Erweiterung charakterisieren läßt (**1**). Ferner ergibt sich ein interessanter Zusammenhang mit einer Klasse von faktorisierbaren Gruppen (**2**).

1. Wir fragen zunächst, unter welchen Bedingungen das Produkt $\mathfrak{G}\circ\Gamma\circ G$ eine Gruppe bildet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dabei (e, ε, E) als Einselement voraussetzen, wobei e, ε, E die Einselemente von $\mathfrak{G}$, Γ, G bedeuten. Daraus ergeben sich die Anfangsbedingungen

$$\text{(0)}\qquad \begin{array}{lll} a^{\varepsilon}=a; & \alpha^{E}=\alpha; & A^{e}=A \\ e^{\alpha}=e; & \varepsilon^{A}=\varepsilon; & E^{a}=E \end{array}$$

für beliebige $a\in\mathfrak{G}$; $\alpha\in\Gamma$; $A\in G$. Dann gilt:

Satz 1. *Das schiefe Produkt $\mathfrak{G}\circ\Gamma\circ G$ ist eine Gruppe genau dann, wenn für alle $a, b, c\in\mathfrak{G}$; $\alpha, \beta, \gamma\in\Gamma$; $A, B, C\in G$ die folgenden Relationen erfüllt sind:*

$$\text{(1)}\qquad (bc)^{\alpha}=b^{\alpha}c^{\alpha}; \quad (\beta\gamma)^{A}=\beta^{A}\gamma^{A}; \quad (BC)^{a}=B^{a}C^{a};$$

$$\text{(2)}\qquad (c^{\beta})^{\alpha}=c^{\alpha\beta}; \quad (\gamma^{B})^{A}=\gamma^{AB}; \quad (C^{b})^{a}=C^{ab};$$

$$\text{(3)}\qquad c^{\beta^{A}}=c^{\beta}; \quad \gamma^{B^{a}}=\gamma^{B}; \quad C^{b^{\alpha}}=C^{b}.$$

Beweis. 1. Wenn $\mathfrak{G}\circ\Gamma\circ G$ eine Gruppe ist, so folgt aus dem Assoziativgesetz $[(a, \alpha, A)(b, \beta, B)](c, \gamma, C) = (a, \alpha, A)[(b, \beta, B)(c, \gamma, C)]$

$$(ab^{\alpha}c^{\alpha\beta^{A}}, \alpha\beta^{A}\gamma^{AB^{a}}, AB^{a}C^{ab^{\alpha}})=\big(a(bc^{\beta})^{\alpha}, \alpha(\beta\gamma^{B})^{A}, A(BC^{b})^{a}\big),$$

also
$$b^{\alpha}c^{\alpha\beta^{A}}=(bc^{\beta})^{\alpha}; \quad \beta^{A}\gamma^{AB^{a}}=(\beta\gamma^{B})^{A}; \quad B^{a}C^{ab^{\alpha}}=(BC^{b})^{a}.$$

Aus der ersten Beziehung ergeben sich nacheinander für $\beta=\varepsilon$, $\alpha=\varepsilon$, $A=E$ die Spezialisierungen:

$$b^{\alpha}c^{\alpha}=(bc)^{\alpha}; \quad c^{\beta^{A}}=c^{\beta}; \quad c^{\alpha\beta}=(c^{\beta})^{\alpha}.$$

Entsprechend erhält man $\beta^A\gamma^A=(\beta\gamma)^A$; $\gamma^{B^a}=\gamma^B$; $\gamma^{AB}=(\gamma^B)^A$ sowie $B^aC^a=(BC)^a$; $C^{b^\alpha}=C^b$; $C^{ab}=(C^b)^a$, womit alle Relationen (1), (2), (3) nachgewiesen sind.

2. Sind umgekehrt diese Relationen erfüllt, so ergibt sich

$$b^\alpha c^{\alpha\beta^A}=b^\alpha(c^{\beta^A})^\alpha=b^\alpha(c^\beta)^\alpha=(bc^\beta)^\alpha$$

und genauso

$$\beta^A\gamma^{AB^a}=(\beta\gamma^B)^A;\quad B^aC^{ab^\alpha}=(BC^b)^a,$$

womit nach dem im ersten Teil des Beweises Bemerkten das Assoziativgesetz bewiesen ist. Daß das Element (e, ε, E) Links-Eins ist, folgt aus den Anfangsbedingungen (0). Wegen

$$a=a^\varepsilon=a^{\alpha^B(\alpha^B)^{-1}}=(a^{(\alpha^B)^{-1}})^{\alpha^B}=(a^{(\alpha^B)^{-1}})^\alpha$$

wird

(4) $\quad a^{\alpha^{-1}}=a^{(\alpha^B)^{-1}}$ für alle $B\in G$; entsprechend: $\alpha^{A^{-1}}=\alpha^{(A^b)^{-1}}$; $A^{a^{-1}}=A^{(a^\beta)^{-1}}$.

Daher gilt

$$\big((a^{\alpha^{-1}})^{-1}, (\alpha^{A^{-1}})^{-1}, (A^{a^{-1}})^{-1}\big)(a, \alpha, A)=$$
$$=\big((a^{\alpha^{-1}})^{-1}a^{(\alpha^{A^{-1}})^{-1}}, (\alpha^{A^{-1}})^{-1}\alpha^{(A^{a^{-1}})^{-1}}, (A^{a^{-1}})^{-1}A^{(a^{\alpha^{-1}})^{-1}}\big)=$$
$$=\big((a^{\alpha^{-1}})^{-1}a^{\alpha^{-1}}, (\alpha^{A^{-1}})^{-1}\alpha^{A^{-1}}, (A^{a^{-1}})^{-1}A^{a^{-1}}\big)=(e, \varepsilon, E),$$

d. h. es existiert ein Linksinverses von (a, α, A), nämlich

(5) $$\big((a^{\alpha^{-1}})^{-1}, (\alpha^{A^{-1}})^{-1}, (A^{\alpha^{-1}})^{-1}\big).$$

Demnach ist $\mathfrak{G}\circ\Gamma\circ G$ eine Gruppe.

Übrigens folgt aus $a^\beta(a^{-1})^\beta=(aa^{-1})^\beta=e^\beta=e$ die nützliche Relation

(6) $\quad (a^{-1})^\beta=(a^\beta)^{-1}$; entsprechend: $(\alpha^{-1})^B=(\alpha^B)^{-1}$; $(A^{-1})^b=(A^b)^{-1}$.

Ferner ist stets

(7) $$a^{\beta^{-1}\beta^C}=(a^{\beta^C})^{\beta^{-1}}=(a^\beta)^{\beta^{-1}}=a;\quad \alpha^{B^{-1}B^c}=\alpha;\quad A^{b^{-1}b^\gamma}=A.$$

Wir bemerken noch, daß die Abbildungen $a\xrightarrow{\sigma_\alpha}a^\alpha$, $\alpha\xrightarrow{\sigma_A}\alpha^A$, $A\xrightarrow{\sigma_a}A^a$ Automorphismen von $\mathfrak{G}$, Γ, G sind. (Beispielsweise folgt für $\mathfrak{G}$ die Homomorphieeigenschaft von $a\xrightarrow{\sigma_\alpha}a^\alpha$ aus $(1)_1$; daß es sich um einen Endomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}$ handelt, ergibt sich aus $(2)_1$: $(a^{\alpha^{-1}})^\alpha=a^\varepsilon=a$, und da aus $a^\alpha=e$ stets $a=(a^\alpha)^{\alpha^{-1}}=e^{\alpha^{-1}}=e$ folgt, hat die Eins nur sich selbst als Urbild.) Dann besagt $(2)_1$, daß die Abbildung $\alpha\to\sigma_\alpha$ ein Antihomomorphismus von Γ in die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ ist. Ebenso ist $A\to\sigma_A$ ein Antihomomorphismus von G in $\mathfrak{A}(\Gamma)$ und $a\to\sigma_a$ ein solcher von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}(G)$. Die Mengen $\Gamma_1\subset\Gamma$ bzw. $G_1\subset G$ bzw. $\mathfrak{G}_1\subset\mathfrak{G}$ derjenigen Elemente aus Γ bzw. G bzw. $\mathfrak{G}$, die bei diesen Antihomomorphismen auf den identischen Automorphismus von $\mathfrak{G}$ bzw. Γ bzw. G abgebildet werden, bilden dann je einen Normalteiler von Γ bzw. G bzw. $\mathfrak{G}$. Dabei besteht $\mathfrak{G}_1$ genau aus allen Elementen $a\in\mathfrak{G}$ mit $A^a=A$ für alle $A\in G$; ebenso ist $\Gamma_1=(\alpha|\alpha\in\Gamma\wedge a^\alpha=a\forall a\in\mathfrak{G})$ und $G_1=(A|A\in G\wedge\alpha^A=\alpha\forall\alpha\in\Gamma)$. Weil mit $A^a=A$ auch $A^{a^\alpha}=A^a=A$ ist, folgt aus $a\in\mathfrak{G}_1$ sofort $a^\alpha\in\mathfrak{G}_1$; d. h. $\mathfrak{G}_1$ ist zulässiger Normalteiler von $\mathfrak{G}$. (Zulässig in Bezug auf den „Operatorenbereich" Γ.) Genauso sind Γ_1 und G_1 zulässige Normalteiler von Γ und G. Wir behaupten nun:

Die Menge $(\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1)$ *der Elemente* (a_1, α_1, A_1) *mit* $a_1 \in \mathfrak{G}_1, \alpha_1 \in \Gamma_1, A_1 \in G_1$ *bildet einen Normalteiler in der Gruppe* $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$.

Beweis. Mit $a_1, b_1 \in \mathfrak{G}_1, \alpha_1, \beta_1 \in \Gamma_1, A_1, B_1 \in G_1$ gilt:

$$(a_1, \alpha_1, A_1)(b_1, \beta_1, B_1)^{-1} = (a_1, \alpha_1, A_1)\big((b_1^{\beta_1^{-1}})^{-1}, (\beta_1^{B_1^{-1}})^{-1}, (B_1^{b_1^{-1}})^{-1}\big) =$$
$$= (a_1, \alpha_1, A_1)(b_1^{-1}, \beta_1^{-1}, B_1^{-1}) = \big(a_1 (b_1^{-1})^{\alpha_1}, \alpha_1 (\beta_1^{-1})^{A_1}, A_1 (B_1^{-1})^{a_1}\big) =$$
$$= (a_1 b_1^{-1}, \alpha_1 \beta_1^{-1}, A_1 B_1^{-1}) \in (\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1),$$

also ist $(\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1)$ Untergruppe von $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$. Ferner ist

$$\big((a^{\alpha^{-1}})^{-1}, (\alpha^{A^{-1}})^{-1}, (A^{a^{-1}})^{-1}\big)(a_1, \alpha_1, A_1)(a, \alpha, A) =$$
$$= \big((a^{\alpha^{-1}})^{-1}, (\alpha^{A^{-1}})^{-1}, (A^{a^{-1}})^{-1}\big)(a_1 a^{\alpha_1}, \alpha_1 \alpha^{A_1}, A_1 A^{a_1}) =$$
$$= \big((a^{-1})^{\alpha^{-1}}, (\alpha^{-1})^{A^{-1}}, (A^{-1})^{a^{-1}}\big)(a_1 a, \alpha_1 \alpha, A_1 A) =$$
$$= \big((a^{-1})^{\alpha^{-1}}(a_1 a)^{(\alpha^{-1})^{A^{-1}}}, (\alpha^{-1})^{A^{-1}}(\alpha_1 \alpha)^{(A^{-1})^{a^{-1}}}, (A^{-1})^{a^{-1}}(A_1 A)^{(a^{-1})^{\alpha^{-1}}}\big) =$$
$$= \big((a^{-1})^{\alpha^{-1}}(a_1 a)^{\alpha^{-1}}, (\alpha^{-1})^{A^{-1}}(\alpha_1 \alpha)^{A^{-1}}, (A^{-1})^{a^{-1}}(A_1 A)^{a^{-1}}\big) =$$
$$= \big((a^{-1} a_1 a)^{\alpha^{-1}}, (\alpha^{-1} \alpha_1 \alpha)^{A^{-1}}, (A^{-1} A_1 A)^{a^{-1}}\big) \in (\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1),$$

d. h. $(\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1)$ ist Normalteiler in $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$.

Wegen

$$(a_1, \alpha_1, A_1)(b_1, \beta_1, B_1) = (a_1 b_1^{\alpha_1}, \alpha_1 \beta_1^{A_1}, A_1 B_1^{a_1}) = (a_1 b_1, \alpha_1 \beta_1, A_1 B_1)$$

ergibt sich außerdem

$$(\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1) \cong \mathfrak{G}_1 \times \Gamma_1 \times G_1. \tag{8}$$

Die Elemente der Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1, \Gamma/\Gamma_1, G/G_1$ sind die Nebenklassen $a\mathfrak{G}_1$, $\alpha\Gamma_1, AG_1$ mit $a \in \mathfrak{G}, \alpha \in \Gamma, A \in G$; dabei gilt $a\mathfrak{G}_1 = b\mathfrak{G}_1$ genau dann, wenn $b^{-1}a \in \mathfrak{G}_1$ ist, und entsprechend in den anderen Fällen. Dann können wir das direkte Produkt $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1 \times \Gamma/\Gamma_1 \times G/G_1$ als schiefes Produkt mit den Elementen $[a\mathfrak{G}_1, \alpha\Gamma_1, AG_1]$ und der Multiplikationsregel

$$[a\mathfrak{G}_1, \alpha\Gamma_1, AG_1][b\mathfrak{G}_1, \beta\Gamma_1, BG_1] = [a\mathfrak{G}_1 \cdot b\mathfrak{G}_1, \alpha\Gamma_1 \cdot \beta\Gamma_1, AG_1 \cdot BG_1] =$$
$$= [ab\mathfrak{G}_1, \alpha\beta\Gamma_1, ABG_1]$$

auffassen, wobei $[\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1]$ das Einselement bedeutet. Die Abbildung

$$(a, \alpha, A) \to [a\mathfrak{G}_1, \alpha\Gamma_1, AG_1]$$

ist eine Abbildung von $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$ auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1 \times \Gamma/\Gamma_1 \times G/G_1$; sie ist homomorph, denn es gilt:

$$(a, \alpha, A)(b, \beta, B) = (ab^\alpha, \alpha\beta^A, AB^a) \to [ab^\alpha\mathfrak{G}_1, \alpha\beta^A\Gamma_1, AB^aG_1] =$$
$$= [abb^{-1}b^\alpha\mathfrak{G}_1, \alpha\beta\beta^{-1}\beta^A\Gamma_1, ABB^{-1}B^aG_1] =$$
$$= [ab\mathfrak{G}_1, \alpha\beta\Gamma_1, ABG_1] =$$
$$= [a\mathfrak{G}_1, \alpha\Gamma_1, AG_1][b\mathfrak{G}_1, \beta\Gamma_1, BG_1],$$

weil wegen (7) stets $b^{-1}b^{\alpha} \in \mathcal{G}_1$, $\beta^{-1}\beta^{A} \in \Gamma_1$, $B^{-1}B^{a} \in G_1$ ist. Ferner wird

$$(a, \alpha, A) \to [\mathcal{G}_1, \Gamma_1, G_1]$$

genau dann, wenn $a \in \mathcal{G}_1$, $\alpha \in \Gamma_1$, $A \in G_1$, also $(a, \alpha, A) \in (\mathcal{G}_1, \Gamma_1, G_1)$ gilt. Damit ist gezeigt:

Satz 2. *Es ist*

$$\mathcal{G} \circ \Gamma \circ G/(\mathcal{G}_1, \Gamma_1, G_1) \cong \mathcal{G}/\mathcal{G}_1 \times \Gamma/\Gamma_1 \times G/G_1$$

mit

$$(\mathcal{G}_1, \Gamma_1, G_1) \cong \mathcal{G}_1 \times \Gamma_1 \times G_1,$$

d. h. $\mathcal{G} \circ \Gamma \circ G$ *ist isomorph einer Schreierschen Erweiterung von* $\mathcal{G}_1 \times \Gamma_1 \times G_1$ *durch* $\mathcal{G}/\mathcal{G}_1 \times \Gamma/\Gamma_1 \times G/G_1$.

2. Ähnlich wie das bekannte Zappa—Szép-Produkt lassen sich die von uns betrachteten Gruppen $\mathcal{G} \circ \Gamma \circ G$ als in bestimmter, sogleich noch näher zu beschreibender Weise faktorisierbare Gruppen deuten. Wir können für das Weitere voraussetzen, daß keine der Gruppen $\mathcal{G}$, Γ, G nur aus dem Einselement besteht. (Andernfalls wäre $\mathcal{G} \circ \Gamma \circ G$ bereits einem zweifachen schiefen Produkt bekannter Struktur isomorph.)

Wir nennen eine Gruppe $\mathfrak{G}$ dreifach faktorisierbar, wenn es drei eigentliche Untergruppen $\mathcal{G}, \Gamma, G \subset \mathfrak{G}$ gibt, so daß

$$\mathfrak{G} = \mathcal{G}\Gamma G \tag{9}$$

gilt. ($\mathcal{G}\Gamma G$ bezeichnet das Komplexprodukt.) Die Untergruppen $\mathcal{G}$, Γ, G sind die Faktoren der Faktorisation (9). Die Faktorisation (9) soll streng heißen, wenn jedes Element $\in \mathfrak{G}$ sich eindeutig in der Form

$$a \cdot \alpha \cdot A$$

mit $a \in \mathcal{G}$, $\alpha \in \Gamma$, $A \in G$ darstellen läßt. (Das bedeutet $G \cap \Gamma\mathcal{G}\Gamma = \Gamma \cap \mathcal{G} = 1 = \text{Eins} \in \mathfrak{G}$.)

Den Kommutator der Elemente $x, y \in \mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Sind H und K zwei Untergruppen $\subset \mathfrak{G}$, so soll $[H, K]$ die von allen Kommutatoren $[x, y]$ mit $x \in H$, $y \in K$ erzeugte Untergruppe $\subset \mathfrak{G}$ bedeuten. Mit $N(H)$ werde der Normalisator, mit $Z(H)$ der Zentralisator von H in $\mathfrak{G}$ bezeichnet.

Wir betrachten nun Faktorisationen der Form (9) von $\mathfrak{G}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $$\Gamma \subset N(\mathcal{G}); \quad G \subset N(\Gamma); \quad \mathcal{G} \subset N(G);$$

(b) $$[\mathcal{G}, \Gamma] \subset Z(G); \quad [\Gamma, G] \subset Z(\mathcal{G}); \quad [G, \mathcal{G}] \subset Z(\Gamma).$$

Damit gleichbedeutend sind die Bedingungen

(a′) $$[\mathcal{G}, \Gamma] \subset \mathcal{G}; \quad [\Gamma, G] \subset \Gamma; \quad [G, \mathcal{G}] \subset G;$$

(b′) $$[[\mathcal{G}, \Gamma], G] = [[\Gamma, G], \mathcal{G}] = [[G, \mathcal{G}], \Gamma] = \{1\}.$$

Dann gilt:

Satz 3. *Jede dreifach streng-faktorisierbare Gruppe* $\mathfrak{G}$ *mit den Faktoren* $\mathcal{G}, \Gamma, G$ *und den Eigenschaften* (a), (b) *ist einem schiefen Produkt* $\mathcal{G} \circ \Gamma \circ G$ *des Satzes* 1 *isomorph und umgekehrt.*

Beweis. 1. Es sei $\mathfrak{G} = \mathcal{G}\Gamma G$ eine strenge Faktorisation mit den Eigenschaften (a), (b). Dann definieren wir

$$a^{\alpha} = \alpha a \alpha^{-1} \in \mathcal{G} \quad \text{(wegen (a))}$$

und entsprechend

$$\alpha^{A} = A\alpha A^{-1} \in \Gamma; \quad A^{a} = aAa^{-1} \in G.$$

Durch diese Funktionen $a^{\alpha}, \alpha^{A}, A^{\alpha}$, die den Anfangsbedingungen (0) genügen, ist das schiefe Produkt $\mathcal{G} \circ \Gamma \circ G$ eindeutig bestimmt. Nun behaupten wir, daß die Abbildung

$$(10) \qquad a \cdot \alpha \cdot A \to (a, \alpha, A^{a})$$

von $\mathfrak{G}$ in $\mathcal{G} \circ \Gamma \circ G$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathcal{G} \circ \Gamma \circ G$ ist. Wegen

$$a \cdot \alpha \cdot A^{a^{-1}} \to (a, \alpha, (A^{a^{-1}})^{a}) = (a, \alpha, (a^{-1}Aa)^{a}) = (a, \alpha, aa^{-1}Aaa^{-1}) = (a, \alpha, A)$$

ist (10) eine Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathcal{G} \circ \Gamma \circ G$. Da aus $(a, \alpha, A^{a}) = (b, \beta, B^{b})$ sofort $a = b, \alpha = \beta, A^{a} = B^{b} = B^{a}$, also $A = B$ folgt, ist die Abbildung (10) eineindeutig. Ferner gelten die Beziehungen:

$$\beta^{A^{a}} = A^{a}\beta(A^{a})^{-1} = aAa^{-1}\beta aA^{-1}a^{-1} = A[A^{-1}, a]\beta[A^{-1}, a]^{-1}A^{-1} =$$
$$= A\beta A^{-1} \quad \text{(wegen (b))} = \beta^{A};$$

$$A^{a}(B^{b})^{a} = aAa^{-1}aB^{b}a^{-1} = aAbBb^{-1}a^{-1} = abb^{-1}AbBb^{-1}a^{-1} = abA^{b^{-1}}Bb^{-1}a^{-1} =$$
$$= ab[b^{-1}, \alpha]A^{b^{-1}}B[b^{-1}, \alpha]^{-1}b^{-1}a^{-1} \qquad \text{(wegen (b))}$$
$$= a\alpha b\alpha^{-1}A^{b^{-1}}B\alpha b^{-1}\alpha^{-1}a^{-1} = ab^{\alpha}A^{b^{-1}}B(ab^{\alpha})^{-1} = (A^{b^{-1}}B)^{ab^{\alpha}}.$$

Daraus folgt:

$$(a, \alpha, A^{a})(b, \beta, B^{b}) = (ab^{\alpha}, \alpha\beta^{A^{a}}, A^{a}(B^{b})^{a}) = (ab^{\alpha}, \alpha\beta^{A}, (A^{b^{-1}}B)^{ab^{\alpha}}).$$

Schließlich ist

$$(a \cdot \alpha \cdot A) \cdot (b \cdot \beta \cdot B) = a\alpha A b\beta B = a\alpha bA[A^{-1}, b^{-1}]\beta B =$$
$$= a\alpha b\alpha^{-1}\alpha A[A^{-1}, b^{-1}]\beta B = a\alpha b\alpha^{-1}\alpha A\beta[A^{-1}, b^{-1}]B \qquad \text{(wegen (b))}$$
$$= ab^{\alpha}\alpha A\beta A^{-1}b^{-1}AbB = ab^{\alpha} \cdot \alpha\beta^{A} \cdot A^{b^{-1}}B.$$

Damit erhält man

$$(a \cdot \alpha \cdot A) \cdot (b \cdot \beta \cdot B) = ab^{\alpha} \cdot \alpha\beta^{A} \cdot A^{b^{-1}}B \to (ab^{\alpha}, \alpha\beta^{A}, (A^{b^{-1}}B)^{ab^{\alpha}}) = (a, \alpha, A^{a})(b, \beta, B^{b}),$$

also ist (10) ein Homomorphismus und somit nach dem Vorigen ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathcal{G} \circ \Gamma \circ G$.

2. In der Gruppe $\mathcal{G} \circ \Gamma \circ G$ bilden die Elemente (a, ε, E) mit $a \in \mathcal{G}$ offenbar eine Untergruppe $(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$; entsprechendes gilt für die Elemente (e, α, E) und (e, ε, A).

Wir können nun durch den Isomorphismus $(\mathfrak{C}) \ni (a, \varepsilon, E) \to a \in \mathfrak{G}$ die Untergruppe $\mathfrak{G}$ — und entsprechend Γ und G — in $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$ einbetten. Dann ist jedes Element $(a, \alpha, A) \in \mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$ eindeutig in der Form

$$(a, \alpha, A) = (a, \varepsilon, E)(e, \alpha, E)(e, \varepsilon, A^{a^{-1}}) = a \cdot \alpha \cdot A^{a^{-1}}$$

mit $a \in \mathfrak{G}$, $\alpha \in \Gamma$, $A^{a^{-1}} \in G$ darstellbar, d. h. $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$ ist dreifach streng-faktorisierbar mit den Faktoren $\mathfrak{G}, \Gamma, G$.

Aus

$$\begin{aligned}[\alpha, a] = \alpha a \alpha^{-1} a^{-1} &= (e, \alpha, E)(a, \varepsilon, E)(e, \alpha^{-1}, E)(a^{-1}, \varepsilon, E) = \\ &= (a^{\alpha}, \alpha, E)\big((a^{-1})^{\alpha^{-1}}, \alpha^{-1}, E\big) = (a^{\alpha} a^{-1}, \varepsilon, E) = a^{\alpha} a^{-1} \in \mathfrak{G}\end{aligned}$$

folgt die erste Bedingung von (a'); entsprechend ergeben sich die beiden anderen.

Mit

$$\begin{aligned}\big[[\alpha, a], A\big] &= [a^{\alpha} a^{-1}, A] = (a^{\alpha} a^{-1}, \varepsilon, E)(e, \varepsilon, A)(a^{\alpha} a^{-1}, \varepsilon, E)^{-1}(e, \varepsilon, A)^{-1} = \\ &= (a^{\alpha} a^{-1}, \varepsilon, A^{a^{\alpha} a^{-1}})\big(a(a^{\alpha})^{-1}, \varepsilon, E\big)(e, \varepsilon, A^{-1}) = \\ &= (a^{\alpha} a^{-1}, \varepsilon, A)\big(a(a^{-1})^{\alpha}, \varepsilon, (A^{-1})^{a(a^{-1})^{\alpha}}\big) = \\ &= (a^{\alpha} a^{-1}, \varepsilon, A)\big(a(a^{-1})^{\alpha}, \varepsilon, A^{-1}\big) = \\ &= \big(e, \varepsilon, A(A^{-1})^{a^{\alpha} a^{-1}}\big) = (e, \varepsilon, AA^{-1}) = (e, \varepsilon, E)\end{aligned}$$

ist die erste Beziehung (b′) erfüllt; genauso folgen die beiden anderen. Also besitzt die Faktorisation $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G = \mathfrak{G}\Gamma G$ die Eigenschaften (a), (b), q. e. d.

Literatur

[1] L. RÉDEI, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für d. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 201–227.

(Eingegangen am 13. November 1962)

Additive Ideale und unabhängige Mengen

Von ATTILA MÁTÉ in Szeged

Für eine beliebige Menge E bezeichnen wir mit $\mathbf{Pt}(E)$ die Menge aller Teilmengen von E (die Potenzmenge von E).

$A \subset B$ bedeutet, daß A in B enthalten und nicht gleich B ist; $A \subseteqq B$ bedeutet, daß A in B enthalten ist, aber auch gleich B sein kann. $A \setminus B$ bedeutet die Menge derjenigen Elemente von A, die keine Elemente von B sind. Ist E ein metrischer Raum, $x \in E$ und $\varepsilon > 0$, so bezeichnet $U(x; \varepsilon)$ die Menge derjenigen Punkte von E, die von x in einer Entfernung $< \varepsilon$ liegen.

Eine Menge $\mathbf{I}$ von Teilmengen einer Menge E heißt ein $\aleph_\alpha$-additives Ideal, wenn eine beliebige Teilmenge eines beliebigen Elementes von $\mathbf{I}$, sowie die Vereinigungsmenge beliebiger, doch weniger als $\aleph_\alpha$ Elemente von $\mathbf{I}$ ebenfalls zu $\mathbf{I}$ gehören. Das Ideal $\mathbf{I}$ ist ein echtes Ideal, falls $\emptyset \neq \mathbf{I} \neq \mathbf{Pt}(E)$ ist. Ein Erzeugendensystem eines $\aleph_\alpha$-additiven Ideals $\mathbf{I}$ ist eine Menge $\mathbf{G} \subseteqq \mathbf{I}$, für die kein $\aleph_\alpha$-additives Ideal $\mathbf{J}$ existiert, für welches $\mathbf{G} \subseteqq \mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ ist. Es ist leicht einzusehen, daß der Durchschnitt beliebig vieler $\aleph_\alpha$-additiver Ideale ebenfalls ein $\aleph_\alpha$-additives Ideal ist. Daraus folgt, daß jede Menge $\mathbf{G} \subseteqq \mathbf{Pt}(E)$ ein und nur ein $\aleph_\alpha$-additives Ideal erzeugt.

Ist $\aleph_\alpha$ singulär, so stimmt das durch die Menge $\mathbf{G}$ erzeugte $\aleph_\alpha$-additive Ideal mit dem durch $\mathbf{G}$ erzeugten $\aleph_{\alpha+1}$-additiven Ideal überein. Ist $\aleph_\alpha$ regulär, so ist jedes Element des durch $\mathbf{G}$ erzeugten $\aleph_\alpha$-additiven Ideals als Teilmenge einer Vereinigungsmenge von weniger als $\aleph_\alpha$ Elemente von $\mathbf{G}$ darstellbar.

Ein Ideal $\mathbf{I}$ hat den Erzeugungsgrad $\mathfrak{m}$, wenn es ein Erzeugendensystem von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, aber kein Erzeugendensystem von der Mächtigkeit $< \mathfrak{m}$ besitzt.

Zu jedem Element x der Menge E ordnen wir eine (eventuell leere) Menge $S(x)$ in E derart zu, daß $x \notin S(x)$ ist. Es sei $S^{-1}(x) = \{y : x \in S(y), y \in E\}$. Ist $M \subseteqq E$, so sei $S(M) = \bigcup_{x \in M} S(x)$, und $S^{-1}(M) = \bigcup_{x \in M} S^{-1}(x)$. Eine Menge $M \subseteqq E$ wird *unabhängig* genannt, wenn $M \cap S(M) = \emptyset$ ist.

Wir sagen, daß die Elemente eines Mengensystems $\mathbf{B} \subseteqq \mathbf{Pt}(E)$ *gegenseitig unabhängig* sind, wenn es für beliebige zwei verschiedene Mengen $P, Q \in \mathbf{B}$ gilt: $P \cap S(Q) = \emptyset$ und $S(P) \cap Q = \emptyset$.

*

Diese Arbeit beschäftigt sich mit gewissen Zusammenhängen zwischen Idealen und unabhängigen Mengen.

In § 1 wird die Frage untersucht, unter welchen weiteren Bedingungen kann man behaupten, daß, falls sowohl $S(x)$ als auch $S^{-1}(x)$ für jedes $x \in E$ in einem Ideal $\mathbf{I}$ enthalten sind, eine unabhängige Menge existiert, die kein Element des Ideals $\mathbf{I}$ ist. S. MARCUS hat einige solche Ideale gefunden: Sei E die Menge der reellen Zahlen; angenommen, daß die Kontinuumshypothese gilt, sind das Ideal der Mengen erster Kategorie in E, bzw. der Mengen vom Lebesgueschen Maß Null in E solche Ideale.

§ 2 gibt ebenfalls eine Verallgemeinerung eines Satzes von S. MARCUS. Im Fall, daß E die Menge der reellen Zahlen ist, fand S. MARCUS eine solche Abbildung $x \to S(x)$, daß $\overline{\overline{S(x)}} \leqq 1$, ferner hat er gezeigt, daß keine unabhängige Residualmenge in einem beliebigen Intervall existiert. (Eine Menge H ist in einem Intervall I *residual,* wenn $I \setminus H$ erster Kategorie ist.) In der Definition der residualen Mengen kann das Ideal der Mengen erster Kategorie durch andere Ideale ersetzt werden. Wir werden solche Ideale angeben, für welche, wenn wir die residualen Mengen für diese Ideale definieren, sich der Satz von S. MARCUS verallgemeinern läßt.

§ 3 enthält eine Verallgemeinerung von zwei Sätzen. Der erste stammt von P. ERDŐS [5]: Ist E ein separabler metrischer Raum, und $S(x)$ nirgends dicht, so existiert eine abzählbar unendliche unabhängige Menge; der andere stammt von S. MARCUS. Ist E ein separabler metrischer Raum, und $S(x)$ nirgends dicht, so existieren beliebig, doch endlich viele, gegenseitig unabhängige, paarweise disjunkte Mengen zweiter Kategorie. Wir werden beweisen, daß es unter denselben Bedingungen sogar abzählbar unendlich viele, paarweise disjunkte, gegenseitig unabhängige Mengen zweiter Kategorie gibt. (Unser Satz ist noch etwas allgemeiner.)

§ 1

Satz 1. *Es sei $\aleph_\alpha$ eine reguläre Kardinalzahl. Hat das $\aleph_\alpha$-additive, echte Ideal* **I** *von E den Erzeugungsgrad $\aleph_\alpha$, so existiert eine solche Menge $H \subseteqq E$ von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, daß jede Teilmenge von H mit der Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ ein Element von* **I** *ist, dagegen jede Teilmenge von H mit der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ kein Element von* **I** *ist.*

Beweis. Sei

$$G_0, G_1, G_2, \ldots, G_\xi, \ldots \qquad (\xi < \omega_\alpha)$$

ein wohlgeordnetes Erzeugendensystem der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ des Ideals **I** und sei

$$H_\xi = G_\xi \setminus \bigcup_{\beta < \xi} G_\beta .$$

Es können für ein gewisses $\xi < \omega_\alpha$ nicht alle H_β $(\beta \geqq \xi)$ leer sein, weil dann auch die Menge $\{G_\gamma\}_{\gamma < \xi}$ das Ideal erzeugen würde, was dem Erzeugungsgrad $\aleph_\alpha$ des Ideals widerspricht.

Deshalb ist die Menge derjenigen ξ, für welche H_ξ nicht leer ist, konfinal mit der Menge $W(\omega_\alpha)$ (der Ordinalzahlen $\gamma < \omega_\alpha$), also ist die Menge der nicht leeren H_ξ von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$. Ist $\xi < \lambda < \omega_\alpha$, so gilt $H_\xi \cap H_\lambda = \emptyset$. Wir wählen nun aus jedem, nicht leeren H_ξ ein Element h_ξ, und setzen $H = \{h_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha}$.

Diese Menge H hat offenbar die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$; alle ihre Teilmengen der Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ sind Elemente des Ideals **I**, da jedes Element von H Element eines G_ξ $(\xi < \omega_\alpha)$ ist; dagegen gehört keine Teilmengen von H von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ zum Ideal, da $\overline{\overline{H \cap G_\xi}} < \aleph_\alpha$ für beliebiges $\xi < \omega_\alpha$ ist; damit haben wir den Satz 1 bewiesen.

Korollar 1. 1. *Die Menge erster Kategorie und die Mengen vom Lebesgueschen Maß Null bilden im Raume der reellen Zahlen je ein $\aleph_1$-additives Ideal. Beide Ideale* *haben ein Erzeugendensystem von der Mächtigkeit des Kontinuums. (Das Erzeugendensystem des Ideals der Mengen erster Kategorie bilden die nirgends dichten abgeschlossenen Mengen, dasjenige des Ideals der Mengen vom Lebesgueschen Maß Null bilden die Borelschen Mengen vom Lebesgueschen Maß Null.) Keines der Ideale wird von weniger als* $\aleph_1$ *seiner Elemente erzeugt.*

Gäbe es nämlich ein Ideal mit $\aleph_0$ Erzeugenden, so würde die Vereinigungsmenge M der Elemente dieser Erzeugenden ebenfalls zum Ideal gehören. Dann wäre aber das Ideal gleich $\mathbf{Pt}(E)$, da jede Menge mit nur *einem* Element von der ersten Kategorie, bzw. vom Lebesgueschen Maß Null ist. Dies ist aber offenbar unmöglich. (Ob diese Ideale ein Erzeugendensystem der Mächtigkeit $<2^{\aleph_0}$ besitzen, oder nicht, ist mir unbekannt.)

So erhalten wir, wenn $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, und $\alpha=1$ gesetzt wird, aus dem Satz 1 den Lusinschen Satz über Mengen erster Kategorie und den Sierpinskischen Satz über Mengen vom Lebesgueschen Maß Null.

Satz 2. *Sei* $\aleph_\alpha$ *eine beliebige Kardinalzahl, und* $\mathbf{I}$ *ein* $\aleph_\alpha$*-additives echtes Ideal der Menge* E *mit einem Erzeugungsgrad* $\leqq \aleph_\alpha$. *Wenn die Abbildung* $x \to S(x)$ *derartig ist, daß mit Ausnahme der Elemente einer Menge* $K \in \mathbf{I}$ *(d. h. für alle* $x \in E \setminus K$*)* $S(x) \in \mathbf{I}$ *und* $S^{-1}(x) \in \mathbf{I}$ *sind, so existiert eine unabhängige eine Menge, welche nicht zum Ideal* $\mathbf{I}$ *gehört.*

Beweis.

α) Ist $\aleph_\alpha$ singulär, so stimmt das durch die Menge $\mathbf{I}$ erzeugte $\aleph_{\alpha+1}$-Ideal mit $\mathbf{I}$ überein. Somit folgt aus der Behauptung für reguläre Mächtigkeiten auch der auf singuläre Mächtigkeiten bezügliche Satz. Würde man von $\mathbf{I}$ $\aleph_{\alpha+1}$-Additivität statt $\aleph_\alpha$-Additivität fordern, so wäre die Behauptung ein Spezialfall der auf reguläre Mächtigkeiten bezüglichen Behauptung des Satzes (bekanntlich ist $\aleph_{\alpha+1}$ stets regulär).

β) Sei $\aleph_\alpha$ regulär. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Ist der Erzeugungsgrad des Ideals $<\aleph_\alpha$, so wählen wir eines seiner Erzeugendensysteme von der Mächtigkeit $<\aleph_\alpha$. Es ist klar, daß dann auch die Vereinigungsmenge M der Elemente des Erzeugendensystems ein Element des Ideals $\mathbf{I}$ ist. Da $\mathbf{I}$ echt ist, so ist $M \subset E$; andererseits ist $\mathbf{I}=\mathbf{Pt}(M)$; daraus folgt, daß die (nicht leere) Menge $E \setminus M$ unabhängig und kein Element des Ideals $\mathbf{I}$ ist.

b) Ist das Ideal vom Erzeugungsgrade $\aleph_\alpha$, $\aleph_\alpha$-additiv und echt, so kann Satz 1 angewendet werden:

Die im Satz 1 konstruierte Menge H sei wohlgeordnet: $t_0, t_1, \dots, t_\xi, \dots$ $(\xi<\omega_\alpha)$. Die gewünschte unabhängige Menge wird durch transfinite Induktion konstruiert.

Sei x_1 das erste t_γ, für welches $t_\gamma \notin K$. Ein solches x_1 existiert unbedingt, da H von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ und andererseits $K \in \mathbf{I}$ ist; also ist die Mächtigkeit des Durchschnitts $K \cap H$ kleiner als $\aleph_\alpha$.

Wir nehmen an, daß x_γ für alle $\gamma<\xi$ $(\xi<\omega_\alpha)$ definiert ist, und zwar so, daß $x_\gamma \notin K$, $x_\gamma \in H$, und $\{x_\gamma\}_{\gamma<\xi}$ unabhängig ist. Es sei $x_\xi \in H$ das erste Element, für welches die Menge $\{x_\gamma\}_{\gamma \leqq \xi}$ unabhängig ist, und $x_\xi \notin K$, d. h.

$$x_\xi \in H \setminus K \setminus \bigcup_{\gamma<\xi} S(x_\gamma) \setminus \bigcup_{\gamma<\xi} S^{-1}(x_\gamma).$$

Da x_γ $(\gamma<\xi)$ kein Element von K ist, sind die Mengen $H \cap \Big(\bigcup_{\gamma<\xi} S(x_\gamma)\Big)$,

$H\cap(\bigcup_{\gamma<\xi} S^{-1}(x_\gamma))$ und $H\cap K$ Elemente von **I**, und, da sie Teilmengen von H sind, ist ihre Mächtigkeit kleiner als $\aleph_\alpha$. Daraus folgt, daß die Menge

$$H\setminus K\setminus \bigcup_{\gamma<\xi} S(x_\gamma)\setminus \bigcup_{\gamma<\xi} S^{-1}(x_\gamma)$$

nicht leer ist; somit existiert ein die Bedingungen erfüllendes x_ξ. Damit ist x_ξ für jede Ordinalzahl $\xi<\omega_\alpha$ definiert. Die Menge $\{x_\xi\}_{\xi<\omega_\alpha}$ ist offenbar unabhängig. Da sie die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ hat und eine Teilmenge von H ist, so ist sie kein Element des Ideals **I**, was zu beweisen war.

Gilt $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, so erhält man im Falle $\alpha=1$ als Korollar zwei Sätze von S. Marcus [1]. In diesen Sätzen ist E die Menge der reellen Zahlen und **I** das Ideal der Mengen erster Kategorie, bzw. der Mengen vom Lebesgueschen Maße Null; s. Korollar 1. 1.

In Satz 2 ist die Bedingung über den Erzeugungsgrad des Ideals sehr streng. Es erhebt sich die Frage, inwieweit diese Bedingung wichtig ist. Eine Antwort dazu gibt der folgende

Satz 3. *Es sei $\aleph_\alpha$ eine reguläre Kardinalzahl, und E eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_\beta\geqq\aleph_\alpha$. Dann existiert eine Abbildung $x\to S(x)$, und dazu ein $\aleph_\alpha$-additives echtes Ideal* **I** *mit dem Erzeugungsgrad $>\aleph_\alpha$ derart, daß $S(x)\in$* **I** *und $S^{-1}(x)\in$* **I** *für jedes $x\in E$, und jede unabhängige Menge ein Element des Ideals ist.*

Wir stellen die Menge E in der Form $W(\omega_\beta)\times W(\omega_\beta)$ dar. Ist ein beliebiges $x=(\lambda,\xi)\in E(\lambda,\xi<\omega_\beta)$ gegeben, so sei das Abbild des Elements x die Menge

$$S(x)=((W(\omega_\beta)\times\xi)\cup(\lambda\times W(\omega_\beta)))\setminus\{x\},$$

d. h. die Menge der Elemente der Form $(\gamma;\xi)$ und $(\lambda;\delta)$, mit den Bedingungen $\gamma\neq\lambda$, $\delta\neq\xi$ und $\gamma<\omega_\beta$, $\delta<\omega_\beta$.

Sehen wir die Menge E als eine Matrix mit ω_β Zeilen und ω_β Spalten an, so kann behauptet werden, daß $S(x)$ die Menge derjenigen Elemente von E — mit Ausnahme von x selbst — ist, welche in derselben Zeile oder derselben Spalte wie x enthalten sind.

Ferner ist es klar, daß in dieser Konstruktion $S(x)=S^{-1}(x)$ $(x\in E)$ gilt.

Eine Menge $M\subseteqq E$ ist dann und nur dann unabhängig, wenn sein Durchschnitt mit einer beliebigen Zeile oder Spalte der Matrix höchstens ein Element hat.

Es sei nun **I** das durch die sämtlichen $S(x)=S^{-1}(x)$ $(x\in E)$ und die sämtlichen unabhängigen Mengen erzeugte $\aleph_\alpha$-additive Ideal.

Dann sind $S(x)$, $S^{-1}(x)$ und alle unabhängigen Mengen Elemente von **I**. Es ist nachzuweisen, daß das Ideal **I** echt ist. Der Beweis ist der folgende:

Da $\aleph_\alpha$ regulär ist, kann jedes Element von **I** als Teilmenge der Vereinigungsmenge von weniger als $\aleph_\alpha$ Mengen $S(x)\,(=S^{-1}(x))$ $(x\in E)$ und weniger als $\aleph_\alpha$ unabhängigen Teilmengen von E dargestellt werden. Es ist zu beweisen, daß keine solche Vereinigungsmenge mit E identisch sein kann.

Wir nehmen eine Menge M der Mächtigkeit $<\aleph_\alpha$ $(M\subset E)$, und untersuchen die Vereinigungsmenge $\bigcup_{x\in M} S(x)=S(M)$.

Die Anzahl derjenigen Zeilen, die ein Element der Mengen M enthalten, ist offenbar kleiner als $\aleph_\alpha$; so existiert mindestens eine Zeile H, die kein Element von

M enthält. Daraus folgt, daß der Durchschnitt $S(M)\cap H$ genau aus denjenigen Elementen von M besteht, welche die Durchschnitte von H mit denjenigen Spalten sind, die ein Element von M enthalten. Da die Anzahl solcher Spalten kleiner als $\aleph_\alpha$ ist, und der Durchschnitt einer Zeile und einer Spalte nur ein Element enthält, so ist die Menge $S(M)\cap H$ von kleinerer Mächtigkeit als $\aleph_\alpha$.

Es sei nun die Menge $\mathbf{F}$, deren Elemente unabhängige Teilmengen von E sind, von der Mächtigkeit $<\aleph_\alpha$, und wir untersuchen den Durchschnitt $\bigcup_{T\in\mathbf{F}}(T\cap H)$. Da eine Menge $T\in\mathbf{F}$ unabhängig, und H eine Zeile der Matrix ist, hat die Menge $T\cap H$ höchstens ein Element. Daraus folgt, daß die Mächtigkeit der Menge $\bigcup_{T\in\mathbf{F}}(T\cap H)$ kleiner als $\aleph_\alpha$ ist. Es wurde bereits bewiesen, daß die Mächtigkeit der Menge $S(M)\cap H$ kleiner als $\aleph_\alpha$ ist. Daraus folgt, daß die Menge

$$(S(M)\cap H)\cup\Big(\bigcup_{T\in\mathbf{F}}(T\cap H)\Big)=H\cap\Big(\bigcup_{T\in\mathbf{F}}T\cup S(M)\Big)$$

eine Mächtigkeit $<\aleph_\alpha$ besitzt. Es folgt weiterhin, daß die Menge $H\setminus\Big(\bigcup_{T\in\mathbf{F}}T\cup S(M)\Big)$ nicht leer (sogar von der Mächtigkeit $\aleph_\beta$) ist (da $\overline{\overline{H}}=\aleph_\beta\geqq\aleph_\alpha$); also ist die Menge $E\setminus\Big(\bigcup_{T\in\mathbf{F}}T\cup S(M)\Big)$ auch nicht leer. Da ein beliebiges Element von $\mathbf{I}$ als Teilmenge einer Menge in der Form $\bigcup_{T\in\mathbf{F}}T\cup S(M)$ darstellbar ist, wo $M\subseteqq E$, $\overline{\overline{M}}<\aleph_\alpha$, $\mathbf{F}\subseteqq\mathbf{Pt}(E)$, $\overline{\overline{\mathbf{F}}}<\aleph_\alpha$, und die Elemente von $\mathbf{F}$ unabhängig sind; und da es in den vorausgehenden bewiesen wurde, daß die Menge $E\setminus\Big(\bigcup_{T\in\mathbf{F}}T\cup S(M)\Big)$ nicht leer (d. h. $\bigcup_{T\in\mathbf{F}}T\cup S(M)\subset E$) ist, so ist $E\notin\mathbf{I}$, d. h. das Ideal $\mathbf{I}$ ist echt, was zu beweisen war.

Bemerkung 3. 1. Diese Konstruktion kann auch so durchgeführt werden, daß $S(x)\cap S^{-1}(x)=\emptyset$ für jedes $x\in E$, und dabei noch die Bedingung $\overline{\overline{S(x)}}<\aleph_\beta(=\overline{\overline{E}})$ erfüllt sei.

Es sei nämlich $x=(\lambda;\xi)$, und dabei

$$S(x)=(W(\lambda)\times\xi)\cup(\lambda\times W(\xi)),$$

dann ist offenbar

$$S^{-1}(x)=(\{\gamma\}_{\lambda<\gamma<\omega_\beta}\times\xi)\cup(\lambda\times\{\delta\}_{\xi<\delta<\omega_\beta}).$$

Da
$$S(x)\cup S^{-1}(x)=(W(\omega_\beta)\times\xi)\cup(\lambda\times W(\omega_\beta))\setminus\{x\}$$

identisch mit dem $S(x)$ der vorherigen Konstruktion ist, sind die unabhängigen Mengen dieselben, wie in der vorherigen Konstruktion, deshalb stimmt das durch sämtliche $S(x)$, $S^{-1}(x)$ und sämtliche unabhängige Mengen erzeugte $\aleph_\alpha$-additive Ideal mit dem Ideal der vorherigen Konstruktion überein. Andererseits ist es klar, daß $\overline{\overline{S(x)}}<\aleph_\beta$, und $S(x)\cap S^{-1}(x)=\emptyset$ für jedes Element $x\in E$ gilt.

Korollar 3. 1. *Ist E eine Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\beta$ und $\aleph_\alpha\leqq\aleph_\beta$, wobei $\aleph_\alpha$ eine reguläre Kardinalzahl bedeutet, so existiert ein $\aleph_\alpha$-additives echtes Ideal von E derart, daß eine beliebige Menge $H\subseteqq E$ von der Mächtigkeit $\geqq\aleph_\alpha$ eine Teilmenge von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ besitzt, welche ein Element von* $\mathbf{I}$ *ist.* (D. h., in Satz 1 ist die Bedingung, daß der Erzeugungsgrad des $\aleph_\alpha$ additiven Ideals $\aleph_\alpha$ sei, unerläßlich.)

Im Beweise des Satzes 2 wurde nämlich die Bedingung, daß **I** den Erzeugungsgrad $\aleph_\alpha$ besitzt, nur in der Weise benützt, daß Satz 1 zum Beweise von Satz 2 verwendet wurde.

Falls Satz 1 für alle echte Ideale **I** wahr wäre, so wäre Satz 2 für alle echte Ideale wahr, was aber dem Satz 3 widerspricht.

Übrigens ist es auch unmittelbar einzusehen, daß die Behauptung des Satzes 1 für das Ideal von Satz 3 nicht zutrifft.

§ 2

Definition 1. Sei E eine beliebige Menge, M eine ihrer Teilmengen, und **I** ein echtes Ideal von E. Eine Menge $H \subseteqq E$ wird *in M residual über* **I** genannt, wenn $M \setminus H \in \mathbf{I}$ ist. Ist E die Menge der reellen Zahlen, **I** die Menge der Mengen erster Kategorie (welche ein $\aleph_1$-additives echtes Ideal ist), so wird H einfach *residual in M* genannt.

Definition 2. Sei R^α $(\alpha \leqq \omega)$ der α-dimensionale Euklidische Vektorraum für $\alpha < \omega$, und der Hilbertsche Raum für $\alpha = \omega$.

Die Summe $M+N$ von zwei Mengen M und N von Vektoren in R^α wird als die Menge aller Vektoren von der Form $m+n$ definiert, wobei $m \in M$, $n \in N$. $-M$ ist die Menge aller Vektoren der Form $-m$, wo $m \in M$. Die Differenz $M-N$ wird durch die Identität $M-N = M+(-N)$ definiert. Der Nullvektor des Raumes wird mit o bezeichnet.

Definition 3. Man sagt, das Ideal **I** in R^α sei *um die Elemente einer Menge $M \subseteqq R^\alpha$ verschiebbar*, wenn aus $K \in \mathbf{I}$ folgt: $K+\{m\} \in \mathbf{I}$ für alle $m \in M$. Ist $M = R^\alpha$, wird **I** einfach *im Raume R verschiebbar* genannt.

Sei A^α eine Menge von Vektoren im Raume R^α, die den Vektor t dann und nur dann enthält, wenn sämtliche Koordinaten von t algebraische Zahlen sind, und nur endlich viele Koordinaten von Null verschieden sind. Sei P^α die Menge derjenigen Vektoren von A^α, deren sämtliche Koordinaten rationale Zahlen sind.

Offenbar sind A^α und P^α abzählbar unendliche Mengen, und beide Mengen sind im Raume R^α dicht.

Satz 4. *Ist $E = R^\alpha$ $(\alpha \leqq \omega)$, so existiert eine Abbildung $x \to S(x)$ mit $\overline{\overline{S(x)}} = 1$ und mit der weiteren Eigenschaft: wenn* **I** *ein beliebiges, um die Elemente von A^α verschiebbares, $\aleph_1$ additives, echtes Ideal von E ist, dann ist keine Menge $M \subseteqq E$, die in einer offenen Teilmenge von E über* **I** *residual ist, eine unabhängige Menge.*

Beweis. Es sei $m \in E, n \in E$. Die Relation $m-n \in A^\alpha$ ist eine Äquivalenzrelation; der Raum E zerfällt also in disjunkte Äquivalenzklassen.

Wir wählen aus jeder Klasse ein Element aus: die Menge der ausgewählten Elemente sei A_0. Ist $a \in A^\alpha$, so sei $A_0 + \{a\} = A_a$.

a) Ist $o \neq a \in A^\alpha$, so ist $A_0 \cap A_a = \emptyset$. A_0 enthält nur je ein Element jeder Klasse, also keine zwei Elemente, deren Differenz zu A^α gehört; folglich kann kein Element von A_a zu A_0 gehören.

Daraus folgt trivialerweise, daß es für zwei beliebige verschiedene Elemente a, b von A^α gilt: $A_a \cap A_b = \emptyset$.

b) $E=\bigcup_{a\in A^\alpha} A_a$. Denn ist e ein beliebiges Element von E, so hat die Äquivalenzklasse von e ein repräsentantes Element h in A_0 und so ist: $e = h+e-h\in A_0+ +\{e-h\} = A_{e-h}$ $(e-h\in A^\alpha)$.

Die Relation $a-b\in P^\alpha$ $(a, b\in A^\alpha)$ ist auch eine Äquivalenzrelation; deshalb zerfällt die Menge A^α in disjunkte Klassen inbezug auf diese Äquivalenzrelation.

Es ist bekannt, daß der Index der additiven Gruppe der algebraischen Zahlen über der additiven Gruppe der rationalen Zahlen unendlich ist. Daraus folgt, daß die Anzahl der Äquivalenzklassen in A^1 unendlich ist. Für $a\in R^\alpha=E$ $(\alpha>1)$ bezeichne $\sigma(a)$ die erste Koordinate von a. Falls $a\in A^\alpha$, so ist offenbar $\sigma(a)\in A^1$, und falls $a\in P^\alpha$, dann $\sigma(a)\in P^1$. Da $\sigma(a)-\sigma(b) = \sigma(a-b)$, so folgt aus $a-b\in P^\alpha$, daß $\sigma(a)-\sigma(b)\in P^1$. Folglich können a und b nur dann zu derselben Klasse der Menge A^α gehören, wenn $\sigma(a)$ und $\sigma(b)$ zu derselben Klasse der Menge A^1 gehören. Deshalb zerfällt A^α auch für $\alpha>1$ in unendlich viele Klassen. Da A^α abzählbar ist, so ist die Anzahl der Klassen in A^α auch abzählbar, also abzählbar unendlich.

Wir bezeichnen die Klassen in A^α durch:

$$D_0, D_1, \ldots, D_n, \ldots \qquad (n<\omega).$$

Nach der Definition ist keine dieser Klassen leer, und dabei noch $D_m\cap D_n=\emptyset$, wenn $m<n<\omega$, und $\bigcup_{n<\omega} D_n=A^\alpha$.

Es sei nun $E_n=\bigcup_{x\in D_n} A_x$. Die Mengen E_n sind disjunkt. Würden nämlich etwa E_m und E_n $(m<n<\omega)$ nicht disjunkt sein, so gäbe es Elemente $x\in D_m$, $y\in D_n$ derart, daß $A_x\cap A_y$ nicht leer ist. Da aber $D_m\cap D_n=\emptyset$ ist, muß $A_x\cap A_y=\emptyset$ sein. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung.

Die Vereinigung aller E_n ist gleich E:

$$\bigcup_{n<\omega} E_n=\bigcup_{n<\omega}\bigcup_{x\in D_n} A_x=\bigcup_{x\in\bigcup_{n<\omega} D_n} A_x=\bigcup_{x\in A^\alpha} A_x=E.$$

Andererseits ist, da im Falle $t\in P^\alpha$ $D_n+\{t\}=D_n$ gilt,

$$\{t\}+E_n = \{t\}+\bigcup_{x\in D_n} A_x = \bigcup_{x\in D_n}(A_x+\{t\}) = \bigcup_{x\in D_n} A_{x+t} =$$
$$= \bigcup_{x\in D_n+\{t\}} A_x=\bigcup_{x\in D_n} A_x=E_n,$$

d. h. $\{t\}+E_n = E_n$, falls $t\in P^\alpha$, und deshalb $E_n+P^\alpha = E_n$.

Wir betrachten die folgende Abbildung $x\to S(x)$ von E in $\mathbf{Pt}(E)$:

Ist $x\in E_n$, so sei $S(x)$ gleich der Menge mit dem einzigen Element $x+t_n$, wo $t_n\in A^\alpha$, $t_n\neq o$ und $t_n\in U(o; 1/n)$. Es sei $G\subseteqq E$ eine offene Menge und $\mathbf{I}$ ein beliebiges, $\aleph_1$ additives, um die Elemente der Menge A^α verschiebbares echtes Ideal. Wir behaupten, daß $E_n\cap G$ in $\mathbf{I}$ nicht enthalten ist.

Es sei nämlich e_n ein beliebiges Element von E_n. Da $\{e_n\}-G$ eine offene Menge, und P^α in E dicht ist, so existiert ein $t\in P^\alpha$ derart, daß $t\in\{e_n\}-G$, d. h. $e_n-t\in G$ ist. Da $t\in P^\alpha$, so ist auch $-t\in P^\alpha$, also $e_n-t\in E_n$ (weil $E_n+P^\alpha = E_n$), d. h. $e_n-t\in E_n\cap G$, und so $e_n\in E_n\cap G+\{t\}$. Folglich gibt es zu jedem $e_n\in E_n$ ein $t\in P^\alpha$ mit $e_n\in E_n\cap G+\{t\}$. Es gilt also $E_n\subseteqq E_n\cap G+P^\alpha$, und da $E_n\cap G+P^\alpha\subseteqq E_n+P^\alpha=E_n$, ist $E_n \cap G + P^\alpha = E_n$. Wir nehmen nun an, daß $E_n \cap G \in \mathbf{I}$. Da $\mathbf{I}$ um die Elemente von A^α verschiebbar und $\aleph_1$ additiv ist, A^α aber abzählbar ist und $P^\alpha \subset A^\alpha$ gilt, so ist

$$E_n = E_n \cap G + P^\alpha = \bigcup_{t \in P^\alpha} (E_n \cap G + \{t\})$$

auch ein Element von $\mathbf{I}$ und das gleiche gilt dann auch für $E = \bigcup_{a \in A^\alpha} (E_n + \{a\})$, was aber der Bedingung widerspricht, daß $\mathbf{I}$ ein echtes Ideal ist. Folglich kann $E_n \cap G$ wirklich nicht zu $\mathbf{I}$ gehören.

Es sei jetzt M in der offenen Menge G über $\mathbf{I}$ residual. Es sei $x \in G$. Da G offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $U(x; \varepsilon) \subseteqq G$. Da $U(x; \varepsilon/2)$ offen ist, gehört $U(x; \varepsilon/2) \cap E_n$ für kein $n < \omega$ zu $\mathbf{I}$. Andererseits ist M in G residual über $\mathbf{I}$, d. h. $G \setminus M \in \mathbf{I}$. Dies zeigt, daß $(U(x; \varepsilon/2) \cap E_n) \setminus M$, eine von Teilmengen der Menge $G \setminus M$, auch zu $\mathbf{I}$ gehört. Da $U(x; \varepsilon/2) \cap E_n \notin \mathbf{I}$ ist, es folgt weiter, daß $U(x; \varepsilon/2) \cap \cap E_n \cap M$ nicht zu $\mathbf{I}$ gehört. Verschiebt man die Menge $U(x; \varepsilon/2) \cap E_n \cap M$ um den Vektor $t_n \in A^\alpha$, so erhält man die Menge $S(U(x; \varepsilon/2) \cap E_n \cap M)$, welche auch kein Element von $\mathbf{I}$ ist, weil $\mathbf{I}$ um die Elemente von A^α verschiebbar ist. Andererseits ist, wenn $1/n < \varepsilon/2$, $S(U(x; \varepsilon/2) \cap E_n \cap M) \subseteqq U(x; \varepsilon/2) + \{t_n\} \subseteqq U(x; \varepsilon/2) + U(o; 1/n) \subseteqq U(x; \varepsilon) \subseteqq G$; da $G \setminus M \in \mathbf{I}$, so ist $S(U(x; \varepsilon/2) \cap M \cap E_n) \cap M \neq \emptyset$. Wegen $S(U(x; \varepsilon/2) \cap M \cap E_n) \subseteqq S(M)$ hat man also auch $S(M) \cap M \neq \emptyset$, folglich ist M nicht unabhängig, was zu beweisen war.

Korollar 4. 1. *Ist $\mathbf{I}$ das Ideal der Mengen erster Kategorie des Raumes $E = R^\alpha$ ($\alpha \leqq \omega$), so ist die im Beweis des Satzes* 4 *definierte Abbildung $x \to S(x)$ derart, daß es keine unabhängige Menge gibt, die in irgendeiner offenen Teilmenge von E (über $\mathbf{I}$) residual ist.* (Ist $E = R^1$, so ergibt sich hieraus der Satz von S. MARCUS [1].)

Ist in $E = R^1$ $\mathbf{I}$ das Ideal der Mengen vom Lebesgueschen Maße Null, so genügt $\mathbf{I}$ ebenfalls den Bedingungen unseres Satzes 4 ($\mathbf{I}$ ist verschiebbar, $\aleph_1$-additiv, echt), also ist der Satz auch für dieses Ideal gültig.

§ 3

Um je einen Satz von P. ERDŐS bzw. S. MARCUS zu verallgemeinern, lassen wir den folgenden Satz vorausgehen:

Satz 5. *Sei E ein separabler mertischer Raum von der zweiten Kategorie in sich, und sei $\mathbf{I}$ ein $\aleph_1$-additives echtes Ideal in E. Dann sind die folgenden zwei Behauptungen äquivalent:*

1. *Für jede Menge $M \notin \mathbf{I}$ existiert eine nicht leere offene Menge $G \subseteqq E$ derart, daß $H \cap M$ für keine nicht leere offene Teilmenge H von G zu $\mathbf{I}$ gehört.*

2. $\mathbf{I}$ *enthält sämtliche nirgends dichte Teilmengen von E, und somit alle Teilmengen erster Kategorie.*

Beweis. a) Für eine beliebige, nirgends dichte Menge K in E und eine beliebige nicht leere offene Menge G in E gibt es eine nicht leere offene Teilmenge H von G mit $H \cap K = \emptyset$, also mit $H \cap K \in \mathbf{I}$. Wenn also Beh. 2 nicht gilt, d. h. eine nirgends dichte Menge K existiert, die nicht zu $\mathbf{I}$ gehört, dann gilt Beh. 1 auch nicht (man setze $M = K$).

b) Sei $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ $(n<\omega)$ eine abzählbare Basis in E (wobei keine Menge B_n leer ist). Wir nehmen an, daß Beh. 2 gilt, Beh. 1 aber nicht. Dann gibt es eine Menge $M \notin \mathbf{I}$ derart, daß eine beliebige nicht leere offene Menge $Q \subseteqq E$ eine nicht leere offene Teilmenge H enthält, für die $H \cap M \in \mathbf{I}$ gilt. Da H ein Element der Basis enthält, gibt es ein n derart, daß $B_n \subseteqq Q$ und $B_n \cap M \in \mathbf{I}$; das erste Element der Basis mit diesen beiden Eigenschaften bezeichnen wir mit $B(Q)$.

Sei nun $\mathbf{N}$ die Menge aller nicht leeren offenen Menge des Raumes E. Die Menge $E \setminus \bigcup_{Q \in \mathbf{N}} B(Q)$ ist offenbar nirgends dicht, sie gehört also zu $\mathbf{I}$. Da es unter den Mengen $B(Q)$ $(Q \in \mathbf{N})$ nur abzählbar viele verschiedene gibt, gehört $\bigcup_{Q \in \mathbf{N}} (B(Q) \cap M)$ ebenfalls zu $\mathbf{I}$, und das gleiche gilt auch für

$$\bigcup_{Q \in \mathbf{N}} (B(Q) \cap M) \cup \big(E \setminus \bigcup_{Q \in \mathbf{N}} B(Q)\big).$$

M ist aber offenbar eine Teilmenge dieser Vereinigungsmenge, somit ist $M \in \mathbf{I}$, was unserer Ausnahme $M \notin \mathbf{I}$ widerspricht. Aus diesem Widerspruch folgt, daß wenn Beh. 2 gilt, dann auch Beh. 1 gelten muß. Damit ist unser Satz bewiesen.

Satz 6. *Sei E ein separabler metrischer Raum zweiter Kategorie und es sei in E eine Abbildung $x \to S(x)$ derart gegeben, daß $S(x)$ für jedes $x \in E$ eine in E nirgends dichte Menge ist. Ferner sei $\mathbf{I}$ ein $\aleph_1$-additives echtes Ideal, das keine residuale Mengen, dagegen alle Mengen mit nur einem Element als Elemente enthält. Dann existieren abzählbar unendlich viele, inbezug auf die Abbildung $x \to S(x)$ gegenseitig unabhängige Teilmengen von E, die keine Elemente des Ideals $\mathbf{I}$ sind.*

Bemerkung. Die Bedingung, daß alle Mengen mit nur einem Element zu $\mathbf{I}$ gehören, ist dann von Bedeutung, wenn der Raum E einen isolierten Punkt besitzt (sonst kann diese Bedingung weggelassen werden). Ist $e \in E$ ein isolierter Punkt, so genügt $\mathbf{I} = \mathbf{Pt}(E \setminus e)$ den Bedingungen des Satzes (mit Ausnahme der letzten); es gibt aber keine zwei disjunkte Mengen, von denen keine zu $\mathbf{I}$ gehört.

Den Beweis von Satz 6 werden wir mit einer Reihe von Lemmas vorbereiten.

Lemma 6. 1. *Sei K eine Teilmenge des metrischen Raumes H und sei G eine Teilmenge von K, die offen in K (d. h. inbezug auf die relative Topologie von K) ist. Dann existiert eine Teilmenge $G(H)$ von H derart, daß $G(H)$ offen ist und $G(H) \cap K = G$ gilt.*

Beweis. Da G offen in K ist, besitzt jeder Punkt $x \in G$ eine Umgebung $U(x; \varepsilon(x))$, für die $U(x; \varepsilon(x)) \cap K \subseteqq G$ gilt. Man braucht dann offenbar nur $G(H) = \bigcup_{x \in G} U(x; \varepsilon(x))$ zu setzen.

Hieraus folgt trivial:

Lemma 6. 2. *Sei H ein metrischer Raum und sei $L \subseteqq K \subseteqq H$.*

a) *Ist L nirgends dicht in K, so ist auch L nirgends dicht in H.*

b) *Ist L nirgends dicht in H und ist K dicht in einer offenen Teilmenge G von H, so ist L in $G \cap K$ ebenfalls nirgends dicht.*

Zum Beweis von b) ist bloß zu beachten, daß für jede in H offene Menge D, die eine Teilmenge von G ist, $D \cap (G \cap K)$ nicht leer ist.

Definition. Unter dem Produkt $\mathbf{IJ}=\mathbf{K}$ von zwei $\aleph_\alpha$-additiven Idealen $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ verstehen wir das durch die Menge $\mathbf{I}\cup\mathbf{J}$ erzeugte $\aleph_\alpha$-additive Ideal.

Wir wählen insbesondere für $\mathbf{I}$ das im Satz 6 definierte Ideal in E und für $\mathbf{J}$ die Menge aller Mengen erster Kategorie in E, die beide $\aleph_1$-additive Ideale sind. Dann ist das Ideal $\mathbf{K}=\mathbf{IJ}$ *echt*, da die residualen Mengen offenbar nicht zu $\mathbf{K}$ gehören.

Ist $H\subseteqq E$ und $H\notin\mathbf{K}$, so ist die Menge $\mathbf{K}\cap\mathbf{Pt}(H)$ ein echtes $\aleph_1$-additives Ideal von H. Wir bezeichnen das Ideal $\mathbf{K}\cap\mathbf{Pt}(H)$ durch $\mathbf{K}\wedge H$. Es ist klar, daß, falls $L\subseteqq H$, die Behauptung $L\in\mathbf{K}$ dann und nur dann wahr ist, wenn $L\in\mathbf{K}\wedge H$.

Lemma 6. 3. *Sei $H\subseteqq E$, $H\notin\mathbf{K}$, ferner die Abbildung sei $x\to S(x)$ derart, daß $S(x)$ für alle x nirgends dicht in E ist. Dann existieren zwei disjunkte, gegenseitig unabhängige Teilmengen von H, von denen keine zu $\mathbf{K}$ gehört.*

Beweis. Da $\mathbf{K}$ das Ideal $\mathbf{J}$ (die Menge der Mengen erster Kategorie von E) enthält, existiert eine solche nicht leere, in E offene Menge G, daß $Q\cap H\notin\mathbf{K}$ für alle offenen Mengen $Q\subseteqq G$ ist (s. Satz 5).

a) Daraus folgt einerseits, daß H in G dicht, und so $S(x)$ $(x\in E)$ im Raume $H\cap G$ nirgends dicht ist (Lemma 6. 2).

b) Andererseits ist keine offene Menge des Raumes $H\cap G$ ein Element des Ideals $\mathbf{K}$ (Lemma 6. 1). Der Raum $H\cap G(\subseteqq E)$ ist offenbar separabel. Sei $\mathbf{B}$ eine abzählbare Basis dieses Raumes.

Da $S(x)$ im Raume $H\cap G$ nirgends dicht ist, existiert zu jedem $x\in H\cap G$ ein $B\in\mathbf{B}$ mit $B\cap S(x)=\emptyset$, d. h. $x\notin S^{-1}(B)$, folglich ist

$$(*)\qquad H\cap G=\bigcup_{B\in\mathbf{B}}(H\cap G\setminus S^{-1}(B))\notin\mathbf{K};$$

da $\overline{\overline{\mathbf{B}}}=\aleph_0$, so folgt aus $(*)$ die Existenz eines $B_1\in\mathbf{B}$ mit $H\cap G\setminus S^{-1}(B_1)\notin\mathbf{K}$, d. h. mit

$$H\cap G\setminus S^{-1}(B_1)\notin\mathbf{K}\wedge(H\cap G).$$

Andererseits, es folgt wegen $\mathbf{J}\subseteqq\mathbf{K}$ aus Lemma 6. 2, daß das Ideal $\mathbf{K}\wedge(H\cap G)$ sämtliche Mengen erster Kategorie des Raumes $H\cap G$ enthält. Es folgt also aus Satz 5, daß im Raume $H\cap G$ eine solche offene Menge Q existiert, daß für eine beliebige, im Raume $H\cap G$ offene Menge $P\subseteqq Q$ gilt:

$$P\cap(H\cap G\setminus S^{-1}(B_1)=P\setminus S^{-1}(B_1)\notin\mathbf{K}\wedge(H\cap G),$$

d. h.

$$P\setminus S^{-1}(B_1)\notin\mathbf{K}.$$

(Die beiden Behauptungen sind äquivalent, da $P\setminus S^{-1}(B_1)\subseteqq H\cap G$.)

1. Ist $Q\cap B_1\neq\emptyset$, so existieren zwei disjunkte, im Raume $H\cap G$ nicht leere, offene Mengen U, V derart, daß $U\subset Q\cap B_1$, $V\subset Q\cap B_1$. ($Q\cap B_1$ ist nämlich offen in $H\cap G$, also gehört nicht zu $\mathbf{K}$. Deshalb besitzt $Q\cap B_1$ mindestens zwei Punkte; diese Punkte haben disjunkte Umgebungen in $Q\cap B_1$, und diese Umgebungen genügen den Bedingungen für U und V.)

Dann sind $U\setminus S^{-1}(B_1)$ und $V\setminus S^{-1}(B_1)$ disjunkte, gegenseitig unabhängige Teilmengen von H, welche keine Elemente von $\mathbf{K}$ sind; daher ist die Behauptung des Lemmas wahr.

2. Wir betrachten nun den Fall $Q \cap B_1 = \emptyset$.

Sei $\mathbf{P}$ eine abzählbare Basis des Raumes Q. Da Q in $H \cap G$ offen, deshalb ist, wie wir sahen, für ein beliebiges $P \in \mathbf{P}$

$$P \setminus S^{-1}(B_1) \notin \mathbf{K}.$$

Andererseits existiert, da $S(x)$ in $H \cap G$ nirgends dicht ist, zu einem beliebigen $x \in B_1$ ein solches $P \in \mathbf{P}$, daß $P \cap S(x) = \emptyset$, d. h.

$$B_1 = \bigcup_{P \in \mathbf{P}} (B_1 \setminus S^{-1}(P)) \notin \mathbf{K}$$

ist (B_1 ist in $H \cap G$ offen, also $B_1 \notin \mathbf{K}$). Da $\mathbf{P}$ abzählbar ist, existiert ein $P_1 \in \mathbf{P}$ mit $B_1 \setminus S^{-1}(P_1) \notin \mathbf{K}$; die Mengen $B_1 \setminus S^{-1}(P_1), P_1 \setminus S^{-1}(B_1)$ sind Teilmengen von H, disjunkt (da $P_1 \subseteqq Q$, $Q \cap B_1 = \emptyset$), keine Elemente von $\mathbf{K}$, und gegenseitig unabhängig. Damit ist Lemma 6. 3 bewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen kann Satz 6 wie folgt bewiesen werden.

Da $S(x)$ in E nirgends dicht ist, existieren in E zwei gegenseitig unabhängige disjunkte Mengen A_0, B_0, die keine Elemente von $\mathbf{K}$ sind (Lemma 6. 3).

Wir nehmen an, daß wir für ein $n < \omega$ die Mengen A_k, B_k $(k < n)$ erhalten haben, worin A_k und B_k zwei disjunkte, gegenseitig unabhängige Mengen sind, ferner $A_k, B_k \notin \mathbf{K}$ $(A_k, B_k \subset E)$, und $A_k \subset B_l, B_k \subset B_l$, falls $k > l$.

Nach Lemma 6. 3 existieren solche Mengen $A_n \subset B_{n-1}$ und $B_n \subset B_{n-1}$, daß $A_n \cap B_n = \emptyset$, $A_n, B_n \notin \mathbf{K}$ gilt und A_n, B_n gegenseitig unabhängig sind.

Auf diese Weise können wir die Mengen $\{A_n\}_{n<\omega}$ und $\{B_n\}_{n<\omega}$ konstruieren, u. zw. derart, daß A_n und B_n gegenseitig unabhängig, und, falls $m < n < \omega$, $A_n, B_n \subset B_m$ sind, ferner $A_n \notin \mathbf{K}$ gilt. Es bleibt noch zu beweisen, daß für $n \neq m$ die Mengen A_n und A_m gegenseitig unabhängig und disjunkt sind.

Das ist aber klar. Es sei nämlich z. B. $n > m$. Dann ist $A_n \subset B_m$, $A_m \cap B_m = \emptyset$, also wirklich $A_m \cap A_n = \emptyset$; andererseits sind A_m und B_m gegenseitig unabhängig, und so sind auch A_m und A_n gegenseitig unabhängig, da $A_n \subset B_m$.

Damit ist unser Satz 6 bewiesen.

Literatur

[1] S. Marcus, Sur les ensembles indépendants dans la théorie des relations, *Monatshefte d. Math.*, **63** (1959), 245–255.
[2] P. Erdős and G. Fodor, Some remarks on set theory. VI, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 243–260.
[3] N. Lusin, Sur un problème de M. Baire, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **158** (1914), 1258–1261.
[4] W. Sierpinski, Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), *Fund. Math.*, **5** (1927), 177–187.
[5] P. Erdős, Some remarks on set theory. III, *Michigan Math. J.*, **2** (1953), 51–57.
[6] H. Hahn, *Punktfunktionen.* Erster Teil (Leipzig, 1932).

(Eingegangen am 8. Januar 1963)

On the class of subdirect powers of a finite algebra

By G. GRÄTZER in Budapest

1. Introduction. Let $\mathbf{K}$ be a class of algebras, $Sp(\mathbf{K})$ the class of all algebras which are subdirect products of algebras in $\mathbf{K}$. If $\mathbf{K}$ consists of a single algebra $\mathfrak{A}$ then we put $Sp(\mathfrak{A})$ for $Sp(\{\mathfrak{A}\})$.

In case $\mathbf{K}$ is an elementary class in the wider sense[1]) ($\mathbf{K} \in EC_\Delta$), $Sp(\mathbf{K})$ was studied by LYNDON [4]. He proved that $Sp(\mathbf{K})$ is, in general, not an arithmetical class in the wider sense.

The simplest case of $\mathbf{K} \in EC_\Delta$ is when $\mathbf{K} = \{\mathfrak{A}\}$, where $\mathfrak{A}$ is a finite algebra of finite order. This special case is discussed, but not completely settled, in this paper.

I will define a property (U_N) which may or may not hold for a finite algebra $\mathfrak{A}$. The main result is that if $\mathfrak{A}$ is a finite algebra of finite order and (U_N) holds on $\mathfrak{A}$ then $Sp(\mathfrak{A})$ is an elementary class, $Sp(\mathfrak{A}) \in EC$.

A simple example will show that $Sp(\mathfrak{A}) \notin EC$ may happen.

Several known classes of algebras can be represented as $Sp(\mathfrak{A})$. I will list a few examples:

(i) $\mathfrak{A}$ is the two element Boolean algebra; $Sp(\mathfrak{A})$ is the class of Boolean algebras;

(ii) $\mathfrak{A}$ is the two element lattice; $Sp(\mathfrak{A})$ is the class of distributive lattices;

(iii) $\mathfrak{A}$ is the n element chain; $Sp(\mathfrak{A})$ can be characterized and is in EC;[2])

(iv) $\mathfrak{A}$ is a group of order p (p is a prime); $Sp(\mathfrak{A})$ is the class of elementary abelian p-groups;

(v) $\mathfrak{A}$ is the ring of integers modulo 2; $Sp(\mathfrak{A})$ is the class of Boolean rings.

References. Ad (i): [6] (STONE's theorem); ad (ii): [2] (BIRKHOFF's theorem); ad (iii): ANDERSON and BLAIR [1].

The content of the paper is the following: § 2 gives the notions and notations. The algebraic part of the paper is § 3 where theorem 3. 3 gives a necessary and sufficient condition for $\mathfrak{B} \in Sp(\mathfrak{A})$. Condition (U_N) is introduced in § 4 and in 4. 3 we show how to use it. In § 5 a first order formula is constructed. The main result is given in § 6 (theorem 6. 1). A generalization of 6. 1 is given in § 7 where some examples are given too. § 7 is concluded with a list of problems.

I want to express my gratitude to Prof. R. C. LYNDON who read the manuscript of this paper and made several valuable suggestions. The metamathematical proof of 3. 3 and Problem 5 are due to him and are included with his permission.

[1]) For the notions see § 2.

[2]) The present paper was inspired by this very interesting result of ANDERSON and BLAIR [1]

2. Notions and notations. An algebra $\mathfrak{A}$ is a sequence $\langle A, f_0, \ldots, f_\gamma, \ldots\rangle_{\gamma<\alpha}$ where A is a set and f_γ is an n_γ-ary operation on A, i. e. $f_\gamma \in A^{A^{n_\gamma}}$ and $0 \leqq n_\gamma < \omega$. The sequence $\langle n_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha}$ is the *type* of $\mathfrak{A}$, α is the *order* of $\mathfrak{A}$. An algebra $\mathfrak{A}$ is finite if A is a finite set.

In this note we will consider algebras of finite order, $\alpha<\omega$. Further, a type $\langle n_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha}$ is fixed and every algebra considered (except when otherwise specified) will be of this type.

With this type we associate, in the well-known way, a first order predicate logic with the identity symbol, without predicate variables, with the individual variables $x, y, z, \ldots$ and with the operation symbols $F_0, \ldots, F_{\alpha-1}$.

We hope that the reader is familiar with the following notions: formula, closed formula; the validity of a formula in $\mathfrak{A}$; elementary class in the wider sense (EC_Δ; i. e. the class $\mathbf{K}$ of all algebras satisfying a given set of closed formulae); elementary class EC (algebras satisfying a single closed formula). Detailed information on these can be found in [7], [8].

We will need the notion of a *partial algebra*. It is a sequence $\langle A, f_0, \ldots, f_\gamma, \ldots\rangle_{\gamma<\alpha}$ where f_γ is an n_γ-ary *partial operation* on A, i. e. $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma})$ is either not defined or an element of A.

In building up the logic for partial algebras one has to consider a partial algebra as a relational system $\langle A, r_0, \ldots, r_{\alpha-1}\rangle$ where r_γ is a relation of rank $n_\gamma+1$, $r(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}, a_{n_\gamma+1})$ if and only if $a_{n_\gamma+1} = f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma})$, and to use the relational symbols $R_0, \ldots, R_{\alpha-1}$ as non-logical predicate constants. These relations always satisfy the sentences

$$(x_1)\ldots(x_{n_\gamma})(y)(z)\big(R_\gamma(x_1, \ldots, x_{n_\gamma}, y) \wedge R_\gamma(x_1, \ldots, x_{n_\gamma}, z) \rightarrow y=z\big).$$

If $\mathfrak{A} = \langle A, f_0, \ldots, f_{\alpha-1}\rangle$ is an algebra, $B \subseteq A$, then restricting the f_γ to B we get a partial algebra $\mathfrak{B}$, which is called a partial subalgebra of $\mathfrak{A}$.

A congruence relation Θ on a partial algebra $\mathfrak{B}$ is an equivalence relation which satisfies the substitution property whenever it makes sense, i. e. if $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma})$, $f_\gamma(a'_1, \ldots, a'_{n_\gamma})$ exist and $a_i \equiv a'_i\,(\Theta)$ $(1 \leqq i \leqq n_\gamma)$ then $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) \equiv f_\gamma(a'_1, \ldots, a'_{n_\gamma})\,(\Theta)$; the operations on A/Θ are defined as follows: $f_\gamma(a_1|\Theta, \ldots, a_{n_\gamma}|\Theta) = b|\Theta$ if there exist elements $a'_1, \ldots, a'_{n_\gamma}, b'$ such that $a_i \equiv a'_i(\Theta)$ $(1 \leqq i \leqq n_\gamma)$, $b \equiv b'(\Theta)$ and $f_\gamma(a'_1, \ldots, a'_{n_\gamma}) = b'$.

3. Subdirect products. We fix the algebra $\mathfrak{A} = \langle A, f_0, \ldots, f_{\alpha-1}\rangle$, $\alpha<\omega$, of type $\langle n_0, \ldots, n_{\alpha-1}\rangle$, $0 \leqq n_\gamma < \omega$ $(0 \leqq \gamma < \alpha)$. We assume that $\mathfrak{A}$ is finite, with elements $a_1, \ldots, a_n$.

We would like to find a criterion for $\mathfrak{B} \in Sp(\mathfrak{A})$. The well-known result of Birkhoff [3] takes on the following form:

3. 1. *$\mathfrak{B} \in Sp(\mathfrak{A})$ if and only if for every $x, y \in B$ $(x \neq y)$ there exists a homomorphism φ of $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{A}$ such that $x\varphi \neq y\varphi$.*

We will give a "local condition" for $\mathfrak{B} \in Sp(\mathfrak{A})$. To formulate it we need

3. 2. *Let φ be a homomorphism of $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{A}$. We can find a $B_1 \subseteq B$ such that B_1 has at most $f(n)$ elements and $\mathfrak{A}$ is the homomorphic image of $\mathfrak{B}$ under φ_{B_1}, where φ_{B_1} denotes the restriction of φ to B_1. Here $f(n)$ depends only on n (the number of elements in A) and not on $\mathfrak{B}$ and φ.*

Let $c \in B_1$ if and only if

$$c = f_\gamma(b_{i_1}, \ldots, b_{i_{n_\gamma}})$$

for some $0 \leqq \gamma < \alpha$, $1 \leqq i_j \leqq n$, where $b_1, \ldots, b_n$ are elements of B such that every element of A has an inverse image which is a b_i. The number of such c with a fixed γ is at most n^{n_γ}. Hence $f(n) = n^{n_0} + \ldots + n^{n_{\alpha-1}}$ is certainly effective in 3. 2.

This $f(n)$ is used in the following statement:

3. 3. $\mathfrak{B} \in Sp(\mathfrak{A})$ *if and only if for every* $x, y \in B$ $(x \neq y)$ *there exists a partial subalgebra* $\mathfrak{B}_1$ *of* $\mathfrak{B}$ *with* $x, y \in B_1$, *containing at most* $f(n)+2$ *elements, and a homomorphism* φ *with* $\mathfrak{B}_1\varphi = \mathfrak{A}$ $(x\varphi \neq y\varphi)$ *such that whenever* $\mathfrak{B}_2$ *is a finite partial subalgebra of* $\mathfrak{B}$ *containing* $\mathfrak{B}_1$ *then* φ *can be extended to a homomorphism* $\bar{\varphi}$ *of* $\mathfrak{B}_2$ *such that* $\mathfrak{B}_2\bar{\varphi} = \mathfrak{A}$.

The "only if" part is obvious. Indeed, if $\mathfrak{B} \in Sp(\mathfrak{A})$ and $x, y \in B$, $x \neq y$ then by 3. 1 there exists a homomorphism ψ with $\mathfrak{B}\psi = \mathfrak{A}$, $x\psi \neq y\psi$. By 3. 2 there exists a partial subalgebra $\mathfrak{B}_1'$ containing at most $f(n)$ elements such that $\mathfrak{B}_1'\psi_{\mathfrak{B}_1'} = \mathfrak{A}$. Let B_1 equal B_1' with x and y adjoined and φ be the restriction of ψ to B_1. Then $\mathfrak{B}_1\varphi = \mathfrak{A}$ is trivial as well as $x\varphi \neq y\varphi$. Further, if $B_1 \subset B_2$ then $\bar{\varphi}$ i. e. the extension of φ to $\mathfrak{B}_2$ is simply the restriction of ψ to B_2.

To prove the less obvious "if" part of 3. 3 suppose that the algebra $\mathfrak{B}$ satisfies the condition formulated in 3. 3. By 3. 1 we have to show that if $x, y \in B$ $(x \neq y)$ then we can produce a homomorphism ψ with $\mathfrak{B}\psi = \mathfrak{A}$ $(x\psi \neq y\psi)$. By assumption we can find $\mathfrak{B}_1$ and φ as specified in 3. 3. Consider the set P of all couples $\langle \mathfrak{C}, \chi \rangle$ satisfying the following conditions:

(a) $\mathfrak{C}$ is a partial subalgebra of $\mathfrak{B}$, containing $\mathfrak{B}_1$;

(b) χ is a homomorphism with $\mathfrak{C}\chi = A$;

(c) φ is the restriction of χ to $\mathfrak{B}_1$;

(d) if $\mathfrak{C}_1$ is a partial subalgebra of $\mathfrak{B}$ such that $C \subseteqq C_1$ and $C_1 \setminus C$ is *finite* then χ can be extended to a homomorphism $\bar{\chi}$ of $\mathfrak{C}_1$ with $C_1\chi = A$.

P is not empty since $\langle B_1, \varphi \rangle \in P$.

We define a partial ordering $\leqq$ on P as follows:

$$\langle \mathfrak{C}^1, \chi^1 \rangle \leqq \langle \mathfrak{C}^2, \chi^2 \rangle$$

if and only if the following two conditions are fulfilled:

(e) $\mathfrak{C}^1$ is contained in $\mathfrak{C}^2$;

(f) χ^1 is the restriction of χ^2 to $\mathfrak{C}^1$.

We want to prove that we can apply ZORN's lemma to the partially ordered set $\mathfrak{P} = \langle P, \leqq \rangle$. To this end consider a well-ordered ascending chain in $\mathfrak{P}$:

$$\langle \mathfrak{C}^0, \chi^0 \rangle \leqq \langle \mathfrak{C}^1, \chi^1 \rangle \leqq \ldots \leqq \langle \mathfrak{C}^\gamma, \chi^\gamma \rangle \leqq \ldots \qquad (\gamma < \beta).$$

Let $C = \bigcup_{\gamma < \beta} C^\gamma$. There exists a unique mapping χ of C which is an extension of all χ^γ $(\gamma < \beta)$. We prove

$$\langle \mathfrak{C}, \chi \rangle \in P.$$

Conditions (a)—(d) are to be verified. Conditions (a), (b) and (c) hold for $\langle \mathfrak{C}, \chi \rangle$ trivially.

To prove (d) let $\mathfrak{D}$ be a partial subalgebra of $\mathfrak{B}$, containing $\mathfrak{C}$ such that $D \setminus C$ is finite, say $\{d_1, \ldots, d_m\}$. Consider the partial algebras $\mathfrak{D}^\gamma$ with $D^\gamma = C^\gamma \cup \{d_1, \ldots, d_m\}$. By definition χ^γ can be extended to D^γ. Let $Q(\gamma)$ denote the set of all possible extensions, i. e. an $\varepsilon \in Q(\gamma)$ is a homomorphism of D^γ onto A. If $\gamma_1 < \gamma_2$ then $D^{\gamma_1} \subseteqq D^{\gamma_2}$ and the restriction of an $\varepsilon \in Q(\gamma_2)$ to D^{γ_1} gives an element of $Q(\gamma_1)$. Thus a natural mapping $p(\gamma_2, \gamma_1)$ of $Q(\gamma_2)$ into $Q(\gamma_1)$ is defined. Obviously, if $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$ then $p(\gamma_3, \gamma_2) \cdot p(\gamma_2, \gamma_1) = p(\gamma_3, \gamma_1)$. $Q(\gamma)$ is finite, it cannot contain more than n^m elements. Hence we may apply STEENROD's theorem [5] to the system $\langle Q(\gamma) \rangle_{\gamma < \alpha}$ with the mappings p, and we get the existence of $\varepsilon_\gamma \in Q(\gamma)$ such that $\gamma_1 < \gamma_2$ implies $\varepsilon_{\gamma_2} p(\gamma_2, \gamma_1) = \varepsilon_{\gamma_1}$. That is ε_γ is a homomorphism of $\mathfrak{D}^\gamma$ onto $\mathfrak{A}$ and ε_{γ_1} is the restriction of ε_{γ_2} to $\mathfrak{D}^{\gamma_1}$ if $\gamma_1 < \gamma_2$. Thus the limit of the ε_γ is a uniquely defined relation ε on $D = \bigcup D^\gamma$. Obviously, ε is a homomorphism of $\mathfrak{D}$ onto $\mathfrak{A}$ and ε is an extension of χ, which thus verifies condition (d).

By ZORN's lemma there exists a maximal element

$$\langle \mathfrak{C}, \chi \rangle$$

in $\mathfrak{P}$. If $b \in B, b \notin C$ then χ can be extended to a homomorphism $\bar{\chi}$ of $\mathfrak{C}'$ with $C' = \{C, b\}$ and $\langle \mathfrak{C}', \bar{\chi} \rangle$ were an element greater than $\langle \mathfrak{C}, \chi \rangle$.

Thus $C = B$, and the homomorphism χ is the one we were looking for. The proof of 3. 3 is complete.

* * *

In a letter dated July 14, 1963, R. C. LYNDON gave a metamathematical version of 3. 3. Since his proof is very interesting, I include his proof too.

Lemma. *Let $\mathfrak{A}$ be finite, $B_1 \subseteqq B$, and Φ_1 be any map from $\mathfrak{B}_1$ into $\mathfrak{A}$. If Φ_1 cannot be extended to a homomorphism Φ from $\mathfrak{B}$ into $\mathfrak{A}$, then there exists some finite $B_2 \subseteqq B$ such that Φ_1 does not agree on $B_1 \cap B_2$ with any homomorphism Φ_2 from $\mathfrak{B}_2$ into $\mathfrak{A}$.*

Proof. In an extended language with predicates P_{a_i}, $1 \leqq i \leqq n$, and names b for the elements of B, consider sentences as follows:

S_b expressing that exactly one $P_{a_i}(b)$ holds;

$$S_{\gamma, b_1, \ldots, b_{n_\gamma}, b} \equiv \bigwedge_{h_1, \ldots, h_{n_\gamma}} \Big[\bigwedge_{1 \leqq i \leqq n_\gamma} P_{a_{h_i}}(b_i) \rightarrow P_f(a_{h_1}, \ldots)(b) \Big].$$

For $B_0 \subseteqq B$, let $S(B_0)$ be the set of all sentences S_b for b in B_0, and all $S_{\gamma, b_1, \ldots, b_{n_\gamma}}$, for $b_1, \ldots, b_{n_\gamma}$, b in B_0 such that $f_\gamma(b_1, \ldots, b_{n_\gamma}) = b$. Now $S(B_0)$ holds if and only if there exists a homomorphism Φ from $\mathfrak{B}_0$ into $\mathfrak{A}$ such that $b\Phi = a_i$ if and only if $P_a(b)$. Let Φ_1 be given. For $B_0 \subseteqq B_1$, let $D(B_0)$ be the set of all sentences

$$D_b \equiv P_{b\varphi_1}(b), \quad \text{for } b \text{ in } B_0.$$

Now, Φ_1 has an extension to a homomorphism φ from $\mathfrak{B}$ into $\mathfrak{A}$ if and only if $S(B) \cup D(B_1)$ is consistent. If this set is inconsistent, some finite subset is, hence, for some finite B_2, the set $S(B_2) \cup D(B_2)$ is inconsistent. This gives the asserted conclusion.

4. The condition (U_N). $\mathfrak{A}$ as in § 3. In order to formulate condition (U_N) we need the notion "a system of equations over $\mathfrak{A}$".

Let us fix a finite list of "unknowns": $x_1, \ldots, x_m$. Let X denote set of unknowns. An equation is

$$f_\gamma(y_1, \ldots, y_{n_\gamma}) = y_0. \quad (0 \leqq \gamma < \alpha) \tag{4. 1}$$

where y_i $(0 \leqq i \leqq n_\gamma)$ is either an x_j or an element of A $(y_i \in X \cup A)$.

E. g. if $n_0 = 2$ then examples of equations are the following:

$$f_0(x_1, x_5) = x_2, \quad f_0(a_1, a_2) = a_3, \quad f_0(a_5, x_3) = x_1, \quad f_0(a_1, a_3) = x_1,$$

and so on.

A system of equations $\Gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ over $\mathfrak{A}$ is a finite set of equations of the form (4. 1). A solution of Γ is a mapping $\chi: X \to A$ $(x \to x\chi)$ such that if (4. 1) is an equation in Γ then the relation

$$f_\gamma(y_1\chi, \ldots, y_{n_\gamma}\chi) = y_0\chi$$

holds in $\mathfrak{A}$, where $y_i\chi = y_i$ if $y_i \in A$. Γ is unsolvable if it has no solution.

The system of equations $\Gamma' = \Gamma'(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t})$, $t \leqq m$, is a *consequence* of $\Gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_m)$ if using the equations in Γ and the known relations in $\mathfrak{A}$ one can prove the equations in Γ.

E. g. if $\Gamma = \Gamma(x_1, x_2)$ consists of two equations:

$$f_0(x_1, x_2) = a_1, \quad f_1(a_3, a_5) = x_1 \qquad (n_0 = n_1 = 2)$$

and we know that $f_1(a_3, a_5) = a_2$, then $\Gamma' = \Gamma'(x_2)$ consisting of a single equation $f_0(a_2, x_2) = a_1$ is a consequence of Γ.

The algebra $\mathfrak{A}$ is said to satisfy condition (U_N) if there exists an integer N such that whenever $\Gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ is a system of equations over $\mathfrak{A}$, Γ is unsolvable, then there exists a consequence $\Gamma' = \Gamma'(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t})$ of Γ which is unsolvable too, and for which $t \leqq N$.

We will list without proof what is the value of N for the algebras listed in § 1: (i) $N=2$, (ii) $N=2$, (iii) $N=n$, (iv) $N=0$, (v) $N=0$. That is every algebra listed here satisfies condition (U_N), for some N.

4. 1. *There exist algebras which satisfy condition* (U_N) *for no* N. [3])

Let the algebra be of type $\langle 1 \rangle$, let $n=2$, i. e. $\mathfrak{A}$ contains two elements a_1, a_2, and f_0 is defined by

$$f_0(a_1) = a_2, \quad f_0(a_2) = a_1.$$

Now suppose that this algebra $\mathfrak{A}$ satisfies condition (U_N) and consider the following system $\Gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_{2N+1})$ of equations:

$$f_0(x_1) = x_2, \quad f_0(x_2) = x_3, \ldots, f_0(x_{2N}) = x_{2N+1}, \quad f_0(x_{2N+1}) = x_1.$$

Γ has no solution for if χ were a solution and e. g. $x_1\chi = a_1$, then $x_2\chi = f_0(x_1\chi) = f_0(a_1) = a_2$, similarly, $x_3\chi = a_1, \ldots, x_{2N+1}\chi = a_1$, and then the last equation gives $f_0(a_1) = a_1$, a contradiction. At the same time any consequence of Γ containing less than $2N+1$ unknowns has a solution, thus $\mathfrak{A}$ does not satisfy (U_N).

---

[3]) Essentially the same example was suggested by A. HAJNAL.

Now we prove what is condition (U_N) good for:

4. 2. *Let $\mathfrak{A}$ be an algebra satisfying condition (U_N). Suppose that $\mathfrak{B}_2$ is a finite partial algebra, $\mathfrak{B}_1$ a partial subalgebra of $\mathfrak{B}_2$, and φ a homomorphism of $\mathfrak{B}_1$ onto $\mathfrak{A}$. The homomorphism φ can be extended to $\mathfrak{B}_2$ if and only if it can be extended to any partial subalgebra $\mathfrak{B}_3$ of $\mathfrak{B}_2$ such that $B_1 \subseteqq B_3 \subseteqq B_2$ and $B_3 \setminus B_2$ contains not more than N elements.*

The "only if" part is obvious, therefore we prove the "if" part. Suppose that the condition holds and let $b_1, \ldots, b_m$ be the elements of B_2 not in B_1.

We build up a system of equations $\Gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_m)$ as follows:

We consider the relations

$$f_\gamma(c_0, \ldots, c_{n_\gamma - 1}) = c_0$$

in $\mathfrak{B}_2$. We substitute a b_i by x_i and a c_i by $c_i\varphi \in A$. Thus we get an equation. Γ is the set of all such equations.

E. g. if

$$f_0(b_1, c_1) = c_2$$

holds in $\mathfrak{B}_2$ $(c_1, c_2 \in B_1; c_1\varphi = a_2, c_2\varphi = a_5)$, then the corresponding equation is

$$f_0(x_1, a_2) = a_5.$$

It is now obvious that φ can be extended to $\mathfrak{B}_2$ if and only if Γ has a solution. If Γ has no solution then Γ has a consequence $\Gamma' = \Gamma'(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t})$, $t \leqq N$ such that Γ' has no solution. Obviously then if we consider $\mathfrak{B}_3$, which contains besides the elements of $\mathfrak{B}_1$, the elements $b_{i_1}, \ldots, b_{i_t}$, we will find that φ cannot be extended to $\mathfrak{B}_3$, contradicting the hypothesis.

Now 3. 3 and 4. 2 give the following result:

4. 3. *Let the algebra $\mathfrak{A}$ satisfy condition (U_N). Then $\mathfrak{B} \in Sp(\mathfrak{A})$ if and only if for every $x, y \in B$ $(x \neq y)$ there exists a partial subalgebra $\mathfrak{B}_1$ of $\mathfrak{B}$ with $x, y \in \mathfrak{B}_1$ containing at most $f(n)+2$ elements, and a homomorphism φ with $\mathfrak{B}_1\varphi = \mathfrak{A}$ $(x\varphi \neq y\varphi)$ such that whenever $\mathfrak{B}_2$ is a finite partial subalgebra of $\mathfrak{B}$ $(B_1 \subseteqq B_2 \subseteqq B)$, $B_2 \setminus B_1$ contains at most N elements, then φ can be extended to a homomorphism $\overline{\varphi}$ of $\mathfrak{B}_2$ and $\mathfrak{B}_2\overline{\varphi} = \mathfrak{A}$.*

5. A first order formula.

5. 1. *There exists a first order formula*

$$\Phi(x_1, \ldots, x_l)$$

free in the variables $x_1, \ldots, x_l$ expressing the following fact: if $\mathfrak{B}$ is a partial algebra, and $b_1, \ldots, b_l$ are the elements of $\mathfrak{B}$, then $\Phi(b_1, \ldots, b_l)$ holds if and only if $\mathfrak{B}$ has a homomorphism φ onto $\mathfrak{A}$ such that $b_1\varphi \neq b_2\varphi$.

The formula we are going to construct is of the form

$$(5.2) \qquad (\exists y_1^1)(\exists y_2^1)\ldots(\exists y_l^1)\ldots(\exists y_1^n)\ldots(\exists y_l^n)(\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_5),$$

where the Φ_i contain no quantifier. (n is the number of elements in $\mathfrak{A}$.)

The idea of the construction is the following: we want to describe a congruence relation Θ, such that $\mathfrak{B}|\Theta \cong \mathfrak{A}$; let the congruence classes be $\{y_1^1, \ldots, y_l^1\}, \ldots$ $\ldots, \{y_1^n, \ldots, y_l^n\}$. Then we have to guarantee that:

(i) this is a partition;
(ii) $\{y_1^1, \ldots, y_l^n\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$;
(iii) $x_1 \not\equiv x_2(\Theta)$;
(iv) Θ is a congruence relation;
(v) $y_j^i \to a_i$ is a homomorphism.

Conditions (i)—(v) are taken care of by $\Phi_1, \ldots, \Phi_5$.

(i) Φ_1 expresses that $y_{j_1}^{i_1} = y_{j_2}^{i_2}$ implies $i_1 = i_2$, thus

$$\Phi_1\colon\ y_1^1 \neq y_1^2 \wedge y_1^1 \neq y_2^2 \wedge \ldots \wedge y_1^1 \neq y_l^n \wedge y_2^1 \neq y_1^2 \wedge \ldots \wedge y_l^{n-1} \neq y_l^n.$$

(ii) every x_i is a $y_{j_1}^{i_1}$ and conversely:

$$\Phi_2\colon\ (x_1 = y_1^1 \vee x_1 = y_2^1 \vee \ldots \vee x_1 = y_l^n) \wedge \ldots \wedge (x_l = y_1^1 \vee \ldots \vee x_l = y_l^n) \wedge$$

$$\wedge (y_1^1 = x_1 \vee y_1^1 = x_2 \vee \ldots \vee y_1^1 = x_l) \wedge \ldots \wedge (y_l^n = x_1 \vee \ldots \vee y_l^n = x_l).$$

(iii) $x_1 \not\equiv x_2(\Theta)$:

$$\Phi_3\colon\ (x_1 = y_1^1 \wedge x_2 = y_1^2) \vee (x_1 = y_1^1 \wedge x_2 = y_2^2) \vee \ldots \vee (x_1 = y_1^1 \wedge x_2 = y_l^n) \vee \ldots$$

$$\vee (x_1 = y_l^{n-1} \wedge x_2 = y_l^n) \vee (x_2 = y_1^1 \wedge x_1 = y_1^2) \vee \ldots \vee (x_2 = y_l^{n-1} \wedge x_1 = y_l^n).$$

(iv) We want to assert that if $b_1 \equiv b_1'(\Theta), \ldots, b_{n_\gamma} \equiv b_{n_\gamma}'(\Theta)$ and $b \not\equiv b'(\Theta)$ then not $f_\gamma(b_1, \ldots, b_{n_\gamma}) = b$ and $f_\gamma(b_1', \ldots, b_{n_\gamma}') = b'$. This is expressed by the conjunction of all formulas of the form

$$(f_\gamma(y_{j_1}^{h_1}, \ldots, y_{j_{n_\gamma}}^{h_{n_\gamma}}) = y_j^h \wedge f_\gamma(y_{k_1}^{h_1}, \ldots, y_{k_{n_\gamma}}^{h_{n_\gamma}}) = y_k^{h'})$$

for $h \neq h'$.

(v) Now we would like $y_j^i \to a_i$ to be a homomorphism. This means that if e. g. $f(a_1, \ldots, a_{n_1}) = a_3$ then $f_1(y_{j_1}^1, \ldots, y_{j_{n_1}}^{n_1}) = y_p^3$ holds for suitable $j_1, \ldots, j_{n_1}$ and p, further if $f_1(y_{j_1}^1, \ldots, y_{j_{n_1}}^{n_1})$ is defined then it takes as value some y_p^3.

In formula:

$$f_1(y_1^1, \ldots, y_1^{n_1}) = y_1^3 \vee \ldots \vee f_1(y_1^1, \ldots, y_1^{n_1}) = y_l^3 \vee f_1(y_1^1, \ldots, y_2^{n_1}) =$$

$$= y_1^3 \vee \ldots \vee f_1(y_l^1, \ldots, y_l^{n_1}) = y_l^3.$$

We take one such formula for each (in $\mathfrak{A}$ valid) expression of the type $f_\gamma(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}) = a_\delta$ and Φ_5 is the conjunction of all such formulae.

6. The main theorem. Now it is easy to formulate and prove our main result:

6. 1. *Let $\mathfrak{A}$ be a finite algebra of finite order satisfying condition (U_N). Then $Sp(\mathfrak{A}) \in EC$. In other words, there exists a closed first order formula ψ such that ψ is satisfied by an algebra $\mathfrak{B}$ if and only if $\mathfrak{B}$ is a subdirect power of $\mathfrak{A}$.*

Let

$$(\exists y_1^1)\dots(\exists y_l^n)(\Phi_{l,n}(x_1, \dots, x_l))$$

denote the formula which we constructed in § 5. The formula ψ is the following

$$(x)(y)(\exists y_1)\dots(\exists y_{f(n)})(\exists y_1^1)\dots(\exists y_{f(n)+2}^1)\dots(\exists y_1^n)\dots$$

$$\dots(\exists y_{f(n)+2}^n)(z_1)\dots(z_N)(\exists u_1^1)\dots(\exists u_{2+f(n)+N}^1)\dots(\exists u_{2+f(n)+N}^n)$$

$$(x \neq y \to ((\exists y_1^1)\dots(\exists y_{f(n)+2}^n)(\Phi_{f(n)+2,n}(x, y, y_1, \dots, y_{f(n)})) \wedge$$

$$\wedge (\exists u_1^1)\dots(\exists u_{2+f(n)+N}^n)(\Phi_{2+f(n)+N,n}(x, y, y_1, \dots, y_{f(n)}, z_1, \dots, z_N)) \wedge$$

$$\wedge (y_1^1 = u_1^1 \vee y_1^1 = u_2^1 \vee \dots \vee y_1^1 = u_{2+f(n)+N}^1) \wedge \dots$$

$$\dots \wedge (y_{f(n)+2}^n = u_1^n \vee \dots \vee y_{f(n)+2}^n = u_{2+f(n)+N}^n))),$$

where $f(n)$ was specified in 3. 2.

The proof of 6. 1 is an application of 4. 4 and 5. 1.

7. Generalization, counter examples, problems. A natural generalization of the main theorem is the following:

7. 1. *Let $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_m$ be finite algebras of finite order, each of which satisfies condition (U_N), $\mathbf{K} = \{\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_m\}$. Then $Sp(\mathbf{K}) \in EC$.*

Let $\Psi(x, y)$ denote the formula free in x and y what we get from the formula Ψ in the proof of 6. 1 after omitting the first two universal quantifiers. Let $\Psi_i(x, y)$ denote the corresponding formula for the algebra $\mathfrak{A}_i$. Consider the following formula:

$$\Psi\colon\ (x)(y)(x \neq y \to (\Psi_1(x, y) \vee \dots \vee \Psi_m(x, y))).$$

Using the same ideas as in the proofs of 3. 3, 4. 4 and 5. 1 we can verify that this Ψ is satisfied on $\mathfrak{B}$ if and only if $\mathfrak{B} \in Sp(\mathbf{K})$.

All theorems proved so far remain true if we replace "algebra" by "partial algebra". Even more is true. These theorems hold true for relational systems as well. Some changes are, of course, necessary (e. g. in the definition of (U_N)); the details are obvious.

7. 2. *There exists a finite algebra $\mathfrak{A}$ of finite order such that $Sp(\mathfrak{A}) \notin EC$.*

Let $\mathfrak{A}$ be the algebra given in the proof of 4. 2. Let Σ be the following system of axioms:

$$(x)(x \neq f_0(x))$$
$$(x_1)(x_2)(x_3)((f_0(x_1) = x_2 \wedge f_0(x_2) = x_3) \to f_0(x_3) \neq x_1)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(x_1)(x_2)\dots(x_{2t_1})((f_0(x_1) = x_2 \wedge f_0(x_2) = x_3 \wedge \dots \wedge f_0(x_{2t}) = x_{2t+1}) \to f_0(x_{2t+1}) \neq x_1)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Using 3. 1 one can verify that $\mathfrak{B} \in Sp(\mathfrak{A})$ if and only if Σ is satisfied in $\mathfrak{B}$. Thus $Sp(\mathfrak{A}) \in EC_\Delta$. At the same time no finite subsystem of Σ is equivalent to Σ, thus $Sp(\mathfrak{A}) \notin EC$.

7. 3. *Let $\mathfrak{A}$ be an algebra of power $>\omega$. Then $Sp(\mathfrak{A}) \notin EC_\Delta$.*

Obviously, $\mathfrak{B} \in Sp(\mathfrak{A})$ implies that the power of $\mathfrak{B} > \omega$ (or $\mathfrak{B}$ is a one element algebra) which (by the theorem of SKOLEM and LÖWENHEIM) implies $Sp(\mathfrak{A}) \notin EC_\Delta$.
If the power of $\mathfrak{A}$ equals ω then either $Sp(\mathfrak{A}) \in EC_\Delta$ or not.

7. 4. *Let $\mathfrak{A}$ be a countable field, then $Sp(\mathfrak{A}) \notin EC_\Delta$.*

Indeed, suppose $Sp(\mathfrak{A}) \in EC$ then by the completeness theorem of the first order functional calculus (or by using prime products) we get that there are in $Sp(\mathfrak{A})$ fields of arbitrarily large power. Since these are subdirectly irreducible, we get a contradiction.
A less trivial example is the following:

7. 5. *Consider $\omega+\omega^*+\omega$ as a lattice. Then $Sp(\omega+\omega^*+\omega) \notin EC_\Delta$.*

Indeed, if $Sp(\omega+\omega^*+\omega)$ where in EC_Δ then ω (being elementarily equivalent to $\omega+\omega^*+\omega$) would be in $Sp(\omega+\omega^*+\omega)$ obviously contradicting 3. 1, since ω has no homomorphism onto $\omega+\omega^*+\omega$.

7. 6. *Let $\mathfrak{A}_i$ be the field of p_i elements where $p_1, p_2, \ldots$ is the sequence of prime numbers. Let $\mathbf{K} = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots\}$. Then $Sp(\mathbf{K}) \notin EC_\Delta$.*

The same reasoning as in 7. 4.
Now I will list a few problems which arise most naturally.

Problem 1. Let $\mathfrak{A}$ be a finite algebra of finite order. Find necessary and sufficient conditions for $Sp(\mathfrak{A}) \in EC$.

Problem 2. The same for $Sp(\mathfrak{A}) \in EC_\Delta$.

Problem 3. What can be said about $Sp(\mathfrak{A})$ if (i) $\mathfrak{A}$ is finite but of infinite order; or (ii) $\mathfrak{A}$ is countable?
Find sufficient conditions for $Sp(\mathfrak{A}) \in EC_\Delta$ in these cases.

Problem 4. $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ be an infinite sequence of finite algebras of finite order, each of which satisfies condition (U_N). Let $\mathbf{K} = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots\}$. Under what conditions is $Sp(\mathbf{K}) \in EC_\Delta$ true?

Problem 5. Does $Sp(\mathfrak{A})$ agree with some $\mathbf{S}$ in EC_Δ for all $\mathfrak{B}$ of large power?

References

[1] F. W. ANDERSON and R. L. BLAIR, Representations of distributive lattices as lattices of functions, *Math. Annalen*, **143** (1961), 187–211.
[2] G. BIRKHOFF, On the combination of subalgebras, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **29** (1933), 441–464.
[3] G. BIRKHOFF, Subdirect union in the universal algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 764–768.
[4] R. C. LYNDON, Properties preserved in subdirect products, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 155–164.
[5] N. E. STEENROD, Universal homology groups, *Amer. J. Math.*, **58** (1936), 661–701.
[6] M. H. STONE, The theory of representation of Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 37–111.
[7] A. TARSKI, Contributions to the theory of models. I–III, *Indagationes Math.*, **16** (1954), 572–588; **17** (1955), 55–64.

(Received June 26, 1963)

A note on finite graphs

By K. A. CORRADI in Budapest

In this paper we consider only finite graphs without loops and multiple edges. If A and B are two graphs of this kind, we shall denote by $A \cup B$ the graph consisting of all vertices and edges of both A and B. Our aim is to prove the following.

Theorem. *Let G be a finite graph. Suppose that A, B and C are independent complete subgraphs of G such that every vertex of G belongs to exactly one of them. Suppose that the number of vertices in A, B and C is*

$$v(A)=a, \quad v(B)=b, \quad \text{and} \quad v(C)=c,$$

respectively, further that the inequality

$$c \geqq a \geqq b$$

holds. If the number of edges connecting a vertex of C with a vertex of $A \cup B$ is at least $(a+b)c-2b+1$, then there exist two subgraphs D and E in G, both complete, having no vertex in common, such that

$$v(D)=c, \quad v(E) \geqq a+1.^{1)}$$

Proof. We introduce a partition for the vertices of $A \cup B$. We will say that a vertex of $A \cup B$ belongs to the first, second or third class in our partition, if it is joined with all, with all but one, or with at most $c-2$ vertices of C, respectively. Let us denote by x_A, y_A the number of vertices belonging to the first or the second class in A, respectively. Let x_B and y_B have the same meaning with respect to the graph B. We shall give a lower and an upper estimation of the number of edges between $A \cup B$ and C.

The lower estimation is given by

$$(a+b)c-2b+1,$$

as supposed in the theorem.

An upper one can be obtained in virtue of the partition of the vertices in $A \cup B$ considered above. This gives that the number of edges examined is not greater than

$$c(x_A+x_B)+(c-1)(y_A+y_B)+(c-2)\{(a-x_A-y_A)+(b-x_B-y_B)\}$$

[1]) This theorem plays an important role in a method developed in our paper entitled „On the maximal number of independent complete polygons in a graph" appearing in the *Acta Math. Hung.*

From these results it follows the inequality

$$2(x_A+x_B)+y_A+y_B \geqq 2a+1$$

which means that the two inequalities

$$x_A+x_B+y_A \leqq a, \quad x_A+x_B+y_B \leqq a$$

can not hold simultaneously. We may suppose without loss of the generality, that the first of them is false. We have also

$$x_A+x_B+y_A \geqq a+1.$$

This inequality enables us to construct the subgraphs D and E with the properties required. We begin with the construction of D.

Let D consist of all vertices of A belonging to the first or the second class in our partition, further of $c-x_A-y_A$ vertices of C, each of them joined with all vertices in A belonging to the second class. The inequality

$$c-x_A-y_A \geqq c-a \geqq 0$$

shows, that after omitting at most $y_A \leqq a$ vertices from C, all the remaining vertices satisfy the condition required. It is easy to see that the graph D constructed in this way fulfills all the requirements of our theorem.

Now we have to construct the graph E. Let E consist of all vertices of B belonging to the first class in our partition, further from the remaining vertices of C. In virtue of the inequality

$$x_A+x_B+y_A \geqq a+1$$

the graph E constructed above fulfills all the requirements of the theorem. So our theorem is proved.

We show now that our theorem is best possible of its kind. Namely we show that *for all values of a, b and c satisfying the inequality*

$$c \geqq a \geqq b$$

there exists a graph G_0 having independent complete subgraphs A_0, B_0 and C_0, every vertex of G_0 belonging to exactly one of them, for which

$$v(A_0)=a, \quad v(B_0)=b, \quad v(C_0)=c,$$

further the number of edges connecting a vertex of C_0 with a vertex of $A_0 \cup B_0$ is exactly $(a+b)c-2b$, and G_0 does not include subgraphs D_0 and E_0 of the type mentioned in the theorem.

To show this, let
$A_0=\{P_1, \ldots, P_a\}$, $B_0=\{Q_1, \ldots, Q_b\}$, $C_0=\{R_1, \ldots, R_c\}$, and $G_0 = A_0 \cup B_0 \cup C_0$.

Suppose that A_0, B_0 and C_0 are complete graphs, not two of them having a vertex in common. Suppose further that for all values of i $(1 \leqq i \leqq b)$ the edges between the vertices P_i, Q_i and R_i are not drawn. In virtue of the inequality

$$c \geqq a \geqq b$$

the systems $\{P_i, Q_i, R_i\}$ exist for all values of i in question. Suppose finally, that all other edges in G_0 not mentioned above are drawn.

The graph G_0 constructed in this way does not include subgraphs D_0 and E_0 with the properties required in the theorem. Namely from the $3b$ vertices

$$P_i, Q_i, R_i \qquad (1 \leqq i \leqq b),$$

no more than $2b$ can be used in the construction for D_0 and E_0, and so finally D_0 and E_0 cannot contain together more than

$$c+a$$

vertices from G_0. This shows that our theorem cannot be improved for values a, b and c satisfying the inequality

$$c \geqq a \geqq b$$

by weakening the inequality for the number of edges connecting a vertex of C with a vertex of $A \cup B$, assumed in the theorem.

(Received May 2, 1963)

A criterion for Neumann regularity of normal semigroups

By SÁNDOR LAJOS in Budapest

A semigroup S is a non-empty set, which is closed under an associative multiplication. An element a of a semigroup S is said to be regular if there exists an element x in S such that $axa=a$. (See, e. g. GREEN [2].) A semigroup S is called regular if every element of S is regular.

The notion of regularity was introduced for the case of (associative) rings by J. VON NEUMANN [6]. L. KOVÁCS [4] characterized the regular ring A as a ring satisfying the relation

$$RL=R\cap L$$

for every right ideal R of A and for every left ideal L of A. K. ISÉKI [3] extended this result for the case of semigroups. The present author proved in [5], that the following statements concerning a semigroup S are equivalent:

1. S is regular;
2. $RL = R\cap L$ for every right ideal R of S and for every left ideal L of S;
3. $(a)_R(b)_L = (a)_R\cap(b)_L$,[1]) for all a, b in S;
4. $(a)_R(a)_L = (a)_R\cap(a)_L$, for each a in S.

This result is generalized for the case of general algebraic systems in [8].

A semigroup is said to be normal, if

$$xS=Sx$$

for every element x in S. (See [7].)

Our regularity criterion for normal semigroups reads as follows.

Theorem. *A normal semigroup is regular if and only if every left ideal of it is idempotent.*

Proof. Let S be a regular semigroup, and let L be a left ideal of S. We show that L is idempotent, i. e.

$$L^2=L.$$

It is trivial that $L^2\subseteqq L$. To show that $L\subseteqq L^2$, let a be an element of L. Since S is regular, there exists an element x in S, such that $a=axa$. Hence we have $a=a(xa)\in L^2$. Therefore $L\subseteqq L^2$, which implies $L^2=L$, i. e. the left ideal L is idempotent.

---

[1]) $(a)_R$ denotes the principal right ideal of S, generated by a.

Conversely, let S be a normal semigroup, in which every left ideal is idempotent. Let a be an element of S. Then the principal left ideal of S generated by a is the following:

$$(a)_L = a \cup Sa.$$

By our hypothesis $(a)_L$ is idempotent, i. e.

$$(a \cup Sa)(a \cup Sa) = a \cup Sa.$$

This implies that $a \in (a \cup Sa)(a \cup Sa)$. Since S is normal, it follows that

$$(a \cup Sa)(a \cup Sa) = a^2 \cup aSa,$$

therefore $a = a^2$ or $a \in aSa$. This means that a is regular in both cases. Thus S is regular, which proves our theorem.

Remark. The example constructed by J. CALAIS [1] shows that there exists such a semigroup, in which every left ideal is idempotent and wich is not regular. Thus the idempotency of all the left ideals of a semigroup S does not imply the regularity of S. It is therefore very natural to raise the problem to *describe the class of all semigroups, in which every left ideal is idempotent.*

It is known that the regular semigroups and the quasi-regular semigroups (see [1]) do have this property.

Bibliography

[1] J. CALAIS, Demi-groupes quasi-inversifs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **252** (1961), 2357—2359.
[2] J. A. GREEN, On the structure of semigroups, *Ann. of Math.* 2, **54** (1951), 163—172.
[3] K. ISÉKI, A characterisation of regular semigroups, *Proc. Japan Acad.*, **32** (1956), 676—677.
[4] L. KOVÁCS, A note on regular rings, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955—1956), 465—468.
[5] S. LAJOS, A remark on regular semigroups, *Proc. Japan Acad.*, **37** (1961), 29—30.
[6] J. VON NEUMANN, On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S., A.* **22** (1936), 707—713.
[7] Š. SCHWARZ, A theorem on normal semigroups, *Czechoslovak Math. J.*, **10 (85)**, (1960). 197—200.
[8] F. M. SIOSON, On regular algebraic systems, A note on notes by Iséki, Kovács and Lajos, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 283—286.

(Received October 16, 1963)

Bibliographie

Richard R. Goldberg, Fourier Transforms (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 52), VIII+76 pages, University Press, Cambridge, 1961.

This tract was designed for providing a background in those classical theorems concerning Fourier transforms on the real line which have fruitful generalizations in abstract harmonic analysis. Although a familiarity with Lebesgue and Riemann—Stieltjes integration is required from the reader, all the use of function analytic methods is avoided (at the expense of some theorems being left without proof). There is a neat introduction to the Fourier transform on L^1, including WIENER's theorem on the translates in L^1 and ending with an „algebraized" reformulation of some of the results in terms of ideals in a commutative Banach algebra. A chapter deals with the Fourier transform on L^2, giving in particular a proof of PLANCHEREL's theorem. The next chapter considers generalizations of the Wiener theorem, taking up the problem (equivalent to a famous problem of BEURLING) of whether or not the zeros of the Fourier transform of an L^1-function determine the span of the translates of the function. BOCHNER's theorem on the Fourier—Stieltjes transforms of non-decreasing bounded functions is the subject of the last chapter. There is an appendix in which it is briefly pointed out how the concepts and theorems treated can be carried over to an arbitrary locally compact abelian group.

As it can be seen from these short indications, the tract succeeds in condensing, on its 72 pages of text, a very large amount of material. This is done in a clear and readable style. To the reviewer's opinion the tract has attained the object it was designed for.

Béla Sz.-Nagy (Szeged)

Alexander Dinghas, Vorlesungen über Funktionentheorie (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 110), XV+403 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1961.

In diesen Vorlesungen werden die Grundlagen der Cauchy—Riemann—Nevanlinnaschen Funktionentheorie dargestellt, auf Grund moderner Gesichtspunkte. Die Kapiteltitel entsprechen der traditionellen Aufbau der Theorie: I. Die komplexe Ebene, II. Topologie der komplexen Ebene. Die Cauchysche Konvergenztheorie. Stetige Abbildungen, III. Lokale Eigenschaften der eindeutigen analytischen Funktionen, IV. Die Hauptsätze der Cauchyschen Funktionentheorie, V. Erzeugung analitischer Funktionen durch Grenzprozesse. Der Riemann—Weierstraßsche Begriff der analytischen Funktion, VI. Die Eulersche Gammafunktion und die Riemannsche Zetafunktion, VII. Majorisierung und Wachstumsprobleme, VIII. Geometrische Funktionentheorie. Konforme Abbildung, IX. Eindeutige analytische Funktionen in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität. Unter diesen Kapiteltiteln wird eine Fülle an klassischem und modernem Material geboten, teilweise in Paragraphen eingeteilt, teilweise als Ergänzungen und Aufgaben, mit vielen Literaturhinweisen. Zur Orientation mögen hier einige Titel aus den „Ergänzungen" stehen: Der Satz von LOOMANN—MENSCHOFF. MORDELLS Beweis der Hadamardschen Lückensatzes. KUMMERS Fourier-Entwicklung von $\log \Gamma(\sigma)$. Der Satz von MILLOUX—SCHMIDT. Der Verzerrungssatz von KOEBE und BIEBERBACH. Der transfinite Durchmesser einer Punktmenge. BEURLINGS Verallgemeinerung eines Satzes von FATOU.

An Vorkenntnissen werden nur die Elemente der reellen Analysis vorausgesetzt. Alles ist mit großer Sorgfalt angeordnet und dargestellt. Der Leser wird bis an die Grenze eines großen Teiles moderner Forschung geführt.

Zweifellos werden diese Vorlesungen Studenten sowie Lehrern der Funktionentheorie von vielem Nutzen sein und das Buch wird auch als Nachschlagewerk viel gebraucht.

Béla Sz.-Nagy (Szeged)

E. R. Lorch, Spectral Theory (University Texts in the Mathematical Sciences), 158 pages, Oxford University Press, New York, 1962.

This is a compact, but very readable and clear introduction to the theories of Banach and Hilbert spaces and Banach algebras. It covers a large amount of general information and goes into a considerable depth when treating the key points of the theory.

The work consists of six chapters. The first two introduce the Banach spaces and their linear transformations, and give — among other basic material — a complete treatment of the three cardinal points: the Hahn—Banach theorem, the theorem on the boundedness of the inverse transformation, and the uniform boundedness theorem. The author's mean ergodic theorem on uniformly bounded transformations in a reflexive Banach space finds here its natural place. The third chapter introduces the Hilbert space and its linear transformations, both bounded and unbounded, and leads as far as the concepts of the resolution of the identity and the spectral integral. The spectral theorem for selfadjoint transformations is delayed until the fifth chapter, where it is proved by the author's own method, first expounded in these *Acta*, **12 B** (1950), 137—144. The proof is a natural outgrow of the Riesz—Lorch—Gelfand—Dunford contour integration theory in the resolvent sets; this theory is treated, in the Banach space operators setting, including spectral radius and other related theorems, in the fourth chapter. The last — sixth — chapter deals with commutative Banach algebras, expounding all the basic facts of GELFAND's theory, including some illustrative examples. A footnote remark points out that the author's own work in connection with Banach algebras in part ran parallel with GELFAND's work, which, though published in Moscow in 1941, due to the war conditions did not immediately reach all the centers of mathematical activity.

In its original limited edition in Italian, Professor LORCH's book found a cordial reception in Italy about 10 years ago. The present, enlarged edition in English will centainly be given a similarly warm reception by everyone who shares with the reviewer his appreciation of a text-book which is "generous in its demands and complete in its details" and which, moreover, makes the reader constantly feel the deep and creative contact of the author with the subject he mastered.

Béla Sz.-Nagy (Szeged)

Ladislaus Rédei, Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen, 228 Seiten, Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1963.

Die Theorie der Halbgruppen ist in den letzten zwei bis drei Jahrzenten Gegenstand von vielen Untersuchungen geworden. Da aber die Halbgruppen ein sehr allgemeiner Begriff sind, ist es kein Wunder, daß in ihrer Theorie neben einer Reihe schöner Ergebnisse noch sehr viele Probleme ihrer Lösung harren. Ein solches Problem boten die endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen, deren Theorie hier erstmalig aufgestellt wird.

Alle Resultate der vorliegenden Monographie sind fast buchstäblich neu. Die Betrachtungen sind zwar rein algebraisch, sind jedoch auf natürliche Weise in ein geometrisches Gewand gekleidet, nämlich in den mehrdimensionalen Gitterpunktsraum eingebettet, wodurch die Ausführungen sehr erleichtert werden. Die Theorie kann so gewißermaßen als ein Kapitel der mehrdimensionalen Gitterpunkttheorie betrachtet werden.

Im folgenden wollen wir einige grundlegende Ideen des Buches hervorheben. F bezeichnet den freien Halbmodul n-ten Ranges. Da die homomorphen Bilder von F genau die durch n Elemente erzeugten kommutativen Halbgruppen mit Einselement sind, ist die Aufstellung eines vollständigen Systems untereinander nicht isomorpher endlich erzeugbarer kommutativer Halbgruppen mit Einselement im wesentlichen mit der Untersuchung aller Kongruenzen in F (kurz F-Kongruenzen) äquivalent.

Ein treffliches Mittel zur Beschreibung der F-Kongruenzen zu finden gelang Prof. RÉDEI mittels sogenannter Kernfunktionen, die wir nun in Kürze beschreiben.

Die Elemente von F werden als $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) = a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n$ geschrieben, wobei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ freie Erzeugende von F sind und die a_i nichtnegative ganze Zahlen bezeichnen. Es werde F in natürlicher Weise in die Gruppe $F^\circ = \{(a_1, \ldots, a_n),\ a_i = \text{ganz}\}$ eingebettet.

Für beliebige $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ (Elemente von F°) definiere man $\alpha \cup \beta = (\max(a_1, b_1), \ldots, \max(a_n, b_n))$, $\alpha \cap \beta = (\min(a_1, b_1), \ldots, \min(a_n, b_n))$, $\alpha^+ = \alpha \cup 0$, $\alpha^- = (-\alpha) \cup 0$.

Es sei $\mathcal{C}$ eine F-Kongruenz. Dann ist $M = M(\mathcal{C}) = \{\alpha - \beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{C}\}$ ein Untermodul von F°. Zu jedem $\mu \in M$ ordner wir folgendes Ideal von F zu:

$$(*) \qquad f(\mu) = \{\xi \in F \mid (\xi + \mu^+, \xi + \mu^-) \in \mathcal{C}\}.$$

Diese Funktion (deren Wertevorrat also die Menge der Ideale von F ist) wird die der Kongruenz $\mathcal{C}$ zugeordnete Kernfunktion genannt.

Umgekehrt: Eine Funktion f, die an einem Untermodul von F° definiert ist und deren Funktionswerte $f(\mu)$ Ideale von F sind, nennt man eine Kernfunktion, falls A_1) $f(0) = F$; A_2) $f(\mu) = f(-\mu)$; A_3) $(\mu^+ + f(\mu)) \cap (\nu^+ + f(\nu)) \subseteqq \mu \cup \nu + f(\mu - \nu)$.

Ist an einem Untermodul $M \subseteqq F^\circ$ eine Kernfunktion gegeben, so kann man mittels ihrer eine F-Kongruenz (die der Kernfunktion f zugeordnete Kongruenz) konstruieren durch folgende Feststellung:

$$(**) \qquad \mathcal{C} = \{(\alpha, \beta) \in F \times F \mid \alpha - \beta \in M,\ \alpha \cap \beta \in f(\alpha - \beta)\}$$

Das vorliegende Buch ist in fünf Kapitel geteilt.

Kapitel I (Seite 12—26) ist, außer den Vorbemerkungen und der Definition der Kernfunktion, dem Fundamentalsatz gewidmet. Es existert eine ein-eindeutige Abbildung der Menge aller F-Kongruenzen auf die Menge aller Kernfunktionen derart, daß für jedes zusammengehörende Paar $(\mathcal{C}, f)$:

1) Der $\mathcal{C}$ zugeordnete Modul M mit dem Erklärungsmodul von f übereinstimmt. 2) f ist durch $\mathcal{C}$ mittels der Relation $(*)$ gegeben. 3) $\mathcal{C}$ ist durch f mittels $(**)$ festgelegt.

Das ermöglicht das Studium von F-Kongruenzen in das Studium der Kernfunktionen zu überführen.

Kapitel II (Seite 26—51) hat die Überschrift „Elementare Eigenschaften der Kernfunktionen". Es werden hier mehrere äquivalente Formen von Axion A_3 gegeben. Ein interessanter Satz (den der Verfasser als ersten Reziprozitätssatz bezeichnet) löst die folgende Frage. Es seinen $\mu, \nu, \in F^\circ$ und $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ zwei Ideale von F. Es ist die notwendige und hinreichende Bedingung zu finden, damit es eine Kernfunktion gibt so, daß $f(\mu)=\mathfrak{m}$, $f(\nu)=\mathfrak{n}$.

Kapitel III (Seite 51—94) behandelt die Idealtheorie des freien Halbmoduls endlichen Ranges. Dieses Kapitel hat naturgemäß auch ein selbstständiges Interesse.

Unter anderem wird für Ideale $\mathfrak{a}$ von F der Begriff einer Kongruenz (mod $\mathfrak{a}$) in F eingeführt. Man setze $\varrho \equiv \sigma (\text{mod } \mathfrak{a})$ dann und nur dann, wenn $F \cap (-\varrho + \mathfrak{a}) = F \cap (-\sigma + \mathfrak{a})$. Für jedes $\mathfrak{a}$ gibt es nur endlich viele Klassen mod $\mathfrak{a}$. Verschiedene Sätze über solche Klassen werden bewiesen. Der sogenannte zweite Reziprozitätssatz beschreibt die Beziehung zwischen Klassen mod $\mathfrak{a}$ und Klassen mod μ, wo $\mu \in F^\circ$ ist (die Kongruenz mod μ ist in natürlicher Weise definiert).

Kapitel IV (Seite 95—212) mit der Überschrift „Weitere Eigenschaften der Kernfunktionen" enthält die wichtigsten Ergebnisse.

Zuerst wird bewiesen: Es sei $\mathcal{C}$ eine F-Kongruenz mit dem zugeordneten Modul M. Dann gibt es mindestens ein Hauptideal $\xi + F (\xi \in F)$, sodaß für die Elemente $\alpha, \beta \in \xi + F$ die Inklusion $\alpha \equiv \beta (\text{mod } M) \Rightarrow \alpha \equiv \beta (\text{mod } \mathcal{C})$ gilt. (Die umgekehrte Inklusion ist trivial). Die Vereinigung aller solchen Hauptideale heißt der Kern $\mathfrak{k}$ der F-Kongruenz. Der Kern einer Kernfunktion f wird als der Kern der f zugeordneten F-Kongruenz definiert. Es gilt $\mathfrak{k} = \bigcap_{\mu \in M} f(\mu)$, d. h. $\mathfrak{k}$ ist der Durchschnitt aller Werte von f und $\mathfrak{k}$ ist nicht leer (das ist nicht trivial!). (An einem Beispiel wird gezeigt, daß $\mathfrak{k}$ nicht zu dem Wertevorrat von f gehören muß.)

Ein sehr wichtiges Ergebnis besagt: Jede Kernfunktion hat einen endlichen Wertevorrat.

Es liegt an der Hand, daß die Menge der Kernfunktionen sich auf natürliche Weise verschiedenartig klassifizieren läßt. Der Verfasser führt einige Begriffe ein, wie z. B. Dimension, Rang, Ordnung und Grad einer Kernfunktion und studiert eingehend spezielle Klassen von Kernfunktionen.

Ein schwerwiegendes Resultat, das für abelsche Gruppen wohlbekannt ist, aber für Halbgruppen nicht bekannt war, ist in § 33 bewiesen und lautet: Jede endlich erzeugbare kommutative Halbgruppe ist endlich (nämlich durch endlich viele Gleichungen) definierbar.

Daß die Kernfunktionen ein treffliches Mittel zur Beschreibung der F-Kongruenzen sind, wird auch durch die Tatsache bestätigt, daß jede F-Kongruenz $\mathcal{C}$ eine gemeinsame Verfeinerung aller Kongruenzen nach denjenigen Idealen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ ist, die zum Wertevorrat der zugehörigen Kernfunktion gehören.

Kapitel V (Seite 213—224) ist dem Isomorphieproblem der Theorie gewidmet. Zwei Kernfunktionen heißen äquivalent, wenn die Faktorhalbmoduln nach den zugeordneten F-Kongruenzen isomorph sind. Das Problem ist in dem Sinne gelöst, daß ein Verfahren angegeben wird, nach dem man aus einer Kernfunktion die sämtlichen mit ihr äquivalenten Kernfunktion gewinnt.

In einem kurzen Anhang wird der Fall der Halbgruppen ohne Einselement erledigt.

Bei der Lektüre treten mehrere ungelöste Probleme auf, einige solche werden explizit angegeben.

Die Idee der Kernfunktionen wird wahrscheinlich auch in anderen Fragen der Theorie der Halbgruppen Anwendungen finden.

Der Stil ist meisterhaft. Eine Reihe von Vorbemerkungen macht die einzelnen Absätze sehr gut lesbar. Die Hauptideen und Hauptresultate werden an passend gewählten Stellen klar hervorgehoben.

Wie schon bemerkt, fast alles in dieser Arbeit ist neu. Professor Rédei gab mit diesem Buch eine erstklassige Leistung. Die vorliegende Monographie bedeutet eine wesentliche Bereicherung der Theorie der Halbgruppen.

Štefan Schwarz (Bratislava)

INDEX — TARTALOM

Halmos, P. R., Numerical ranges and normal dilations 1
McCarthy, C. A. and *Stampfli, J. G.*, On one-parameter groups and semi-groups of operators in Hilbert space 6
✓ *Sz.-Nagy, B.* et *Foiaş, C.*, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VII. Triangulations canoniques. Fonction minimum 12
✓ *Sz.-Nagy, B.* et *Foiaş, C.*, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VIII. Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels 38
Lumer, G., Remarks on *n*-th roots of operators 72
Lumer, G., Spectral operators, hermitian operators and bounded groups 75
Rajagopalan, M., Fourier transform in locally compact groups 86
Гохберг, И. Ц., и *Крейн, М. Г.*, О факторизации операторов в гильбертовом пространстве 90
✓ *Гечег, Ф.*, О произведениях упорядоченных автоматов. II. 124
Hancock, V. R., Commutative Schreier semigroup extension of a group 129
Szász, F., Die Halbgruppen, deren endlich erzeugte echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale sind 135
Fuchs, L., On group homomorphic images of partially ordered semigroups 139
Schaar, G., Über ein spezielles dreifaches schiefes Produkt 143
Máté, A., Additive Ideale und unabhängige Mengen 149
Grätzer, G., On the class of subdirect powers of a finite algebra 160
Corradi, K. A., A note on finite graphs 169
Lajos, S., A criterion for Neumann regularity of normal semigroups 172
Bibliographie 174

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

SZEGED, (HUNGARIA), ARADI VÉRTANÚK TERE 1

Prix d'abonnement pour l'étranger $ 8.50. On peut s'abonner à l'entreprise de commerce des livres et journaux „Kultúra" (Budapest, I. Fő utca 32).

INDEX: 26024

64-1039 Szegedi Nyomda Vállalat

Felelős szerkesztő és kiadó: Szőkefalvi-Nagy Béla
A kézirat nyomdába érkezett: 1964. január hó
Megjelenés: 1964. július hó

Példányszám: 800. Terjedelem: 15,38 (A/5) ív
Készült monószedéssel, íves magasnyomással az MSZ 5601-54 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint