ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

TOMUS XXIII

FASC. 1—2

SZEGED, 1962

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY

KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

23. KÖTET

1—2. FÜZET

SZEGED, 1962. JÚNIUS HÓ

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

TOMUS XXIII

1962

SZEGED, 1962

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY

KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

23. KÖTET

1962

SZEGED, 1962

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

TOMUS XXIII – 1962 – 23. KÖTET

BIBLIOGRAPHIE

Von Neumann's Arithmetics of Continuous Rings

By ISRAEL HALPERIN in Kingston (Canada)

This paper is a revision of an unpublished manuscript *Arithmetics of Regular Rings Derived From Continuous Geometries* written by J. VON NEUMANN in 1937[1]) and summarized in §§ 6, 7 of his note [3]. I am grateful for permission to present this work of VON NEUMANN. The material has been freely re-arranged, the introduction, footnotes and Lemma 6. 1 have been added and I have strengthened Lemmas 2. 1, 2. 2, 3. 1, 6. 2 and 6. 3 by using different proofs. Any faults in the present exposition are, of course, mine.

1. Introduction

1. 1. We use terminology close to that of [4]. $\mathfrak{R}$ will usually denote a fixed regular ring with unit, $\bar{R}_{\mathfrak{R}}$ = lattice of all principal right ideals of $\mathfrak{R}$ and $\bar{L}_{\mathfrak{R}}$ = lattice of all principal left ideals of $\mathfrak{R}$. For any idempotent e in $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}(e)$ will denote the ring of all eae, $a \in \mathfrak{R}$. We shall say "a has a reciprocal in $\mathfrak{R}(e)$" if $a \in \mathfrak{R}(e)$ and $ab = ba = e$ for some $b \in \mathfrak{R}(e)$.

If $\mathfrak{R}$ is a complete rank ring, $R(a)$ will denote the unique normalized rank, defined for all a in $\mathfrak{R}$ and related to the dimension functions D in $\bar{R}_{\mathfrak{R}}$ and D' in $\bar{L}_{\mathfrak{R}}$ by:

$$R(a) = D((a)_r) = D'((a)_l).$$

A complete rank ring $\mathfrak{R}$ is (cf. [4]) either a discrete or a continuous ring according as the range of R is $0, 1/n, \ldots, n/n$ for some integer $n \geqq 1$ or the set of all real numbers $0 \leqq t \leqq 1$. If $e \neq 0$, $\mathfrak{R}(e)$ is discrete or continuous along with $\mathfrak{R}$ and the rank function of $\mathfrak{R}(e)$ coincides with $R(a)/R(e)$, a in $\mathfrak{R}(e)$.

Z will denote the center of $\mathfrak{R}$ and we let $P = P(\mathfrak{R})$ denote the set of all polynomials

$$p(t) = t^m + z_{m-1}t^{m-1} + \ldots + z_0 t^0$$

with all z_i in Z and $m \geqq 1$. When $p(a)$ is calculated, t^0 is ordinarily to be replaced by the unit of $\mathfrak{R}$. But whenever we write "$p(a)$ in $\mathfrak{R}(e)$" we shall mean that t^0 is to be replaced by e.

We shall show below (cf. Lemma 2. 1) that if $\mathfrak{R}$ satisfies a weak condition (in particular, if $\mathfrak{R}$ is discrete or continuous) then the center of $\mathfrak{R}(e)$ consists of

1) The original manuscript is kept in the VON NEUMANN file of the Institute for Advanced Study in Princeton and may be seen there.

all $ez, z \in Z$. Hence if $a \in \mathfrak{R}(e)$ and $q \in P(\mathfrak{R}(e))$ then $q(a)$ coincides with $(p(a)$ in $\mathfrak{R}(e))$ for some $p \in P(\mathfrak{R})$.

Suppose $\mathfrak{R}$ is a discrete or continuous ring. If $p \in P$ and ε is a real number >0, we shall say a is *ε-p-algebraic* or simply *ε-algebraic* if $R(p(a)) < \varepsilon$. If a is *ε-algebraic* for every $\varepsilon > 0$ we shall say that a is *almost-algebraic*. If $R(p^m(a)) \to 0$ as $m \to \infty$ we shall say a is *limiting p-algebraic* or simply *limiting algebraic*. If $R(p(a)) = 0$, equivalently $p(a) = 0$, we shall say a is *p-algebraic* or simply *algebraic*.

On the other hand, if $R(p(a)) = 1$ for every $p \in P$ we shall say a is *purely transcendental.*[2])

1. 2. In this paper we shall prove the theorem:

(1. 2. 1) *In a continuous ring the algebraic elements are everywhere dense in the sense of rank-metric.*

(1. 2. 1) means: for every $a \in \mathfrak{R}$ and every real $\varepsilon > 0$ there exists an algebraic $b \in \mathfrak{R}$ such that $R(a-b) < \varepsilon$. It is easy to see that (1. 2. 1) follows from (1. 2. 2)—(1. 2. 5) below:

(1. 2. 2) If a is ε-algebraic then $R(a-b) < \varepsilon$ for some algebraic b (cf. Lemma 3. 2).

(1. 2. 3) If a is limiting p-algebraic then for every real $\varepsilon > 0$, a is ε-q-algebraic when $q = p^m$ for sufficiently large integer m (cf. § 4).

(1. 2. 4) If a is purely transcendental then for every real $\varepsilon > 0$ and every $p \in P$ with p of degree greater than $1/\varepsilon$, $R(a-b) < \varepsilon$ for some ε-p-algebraic b (cf. Lemma 5. 3).

(1. 2. 5) If (1. 2. 3), (1. 2. 4) hold then for every a and every real $\varepsilon > 0$, $R(a-b) < \varepsilon$ for some ε-algebraic b (cf. Lemma 7. 1 and Theorem 8. 1).

Before going into the detailed proof (cf. sections 2—8) we give a brief indication of its principal ideas.

1. 3. To prove (1. 2. 2) we suppose $R(p(a)) < \varepsilon$ and let $(e)_r = (p(a))_r$. Set $b = (1-e)a + x$ with x arbitrary in $\mathfrak{R}(e)$. We show that $(1-e)a$ is in $\mathfrak{R}(1-e)$ and $p(b) = (p(x)$ in $\mathfrak{R}(e))$. Since $R(a-b) = R(ea - ex) \leqq R(e) < \varepsilon$, (1. 2. 2) will be verified if for given $p \in P$ and given e we can find $x \in \mathfrak{R}(e)$ such that $(p(x)$ in $\mathfrak{R}(e)) = 0$. In the Corollary to Lemma 3. 1 we show that this is possible.

1. 4. The statement (1. 2. 3) is almost trivial (cf. § 4).

1. 5. The proof of (1. 2. 4) is technically the most difficult part of the entire proof. We show first that if a is purely transcendental then for every integer $N \geqq 1$ there exists a decomposition into independent elements: $\mathfrak{R} = \Sigma((a^i e_j)_r;$ $i = 1, \ldots, j; j \geqq N)$. Now choose $m > 1/\varepsilon$, choose any integer $N > \dfrac{m}{\varepsilon}$ and define an idempotent g so that $(g)_r = \Sigma((a^i e_j)_r; j \geqq N;\ i = m, 2m, \ldots,$ but $i \leqq j)$, $(1-g)_r = \Sigma((a^i e_j)_r;\ j \geqq N,\ i \leqq j$ but $i \neq m, 2m, \ldots)$. We set[3]) $b \equiv a - a^{-m+1} p(a) g$ and show: $p(b) a^i e_j = 0$ for all $j \geqq N$ and all i satisfying $i \leqq ms$ for some $ms \leqq j$. It follows that $R(p(b)) \leqq \dfrac{m}{N} < \varepsilon$ and $R(a-b) \leqq R(g) \leqq \dfrac{1}{m} < \varepsilon$, hence this b verifies (1. 2. 4).

---

2) VON NEUMANN discovered [3] that in every continuous ring there exist purely transcendental elements but the manuscript (see 1)) gives no details of his proof. See [2] for a proof.

3) The symbol $\equiv$ means "equality by definition".

1. 6. To verify (1. 2. 5) we define $P' = P'(a)$ to the set of irreducible polynomials p in P for which $R(p(a)) < 1$. We show that P' is finite or denumerable, $P' \equiv (p_1, p_2, \ldots)$. Then we determine a "resolution of the identity" for a, that is, a sequence of orthogonal idempotents $e_0, e_1, \ldots$, each of which commutes with a, such that $\mathfrak{R} = \Sigma(e_i)_r$ and:

(1. 6. 1) $ae_0 = e_0 a$ is purely transcendental in the ring $\mathfrak{R}(e_0)$,

(1. 6. 2) for $i \geqq 1$, $ae_i = e_i a$ is limiting p_i-algebric in the ring $\mathfrak{R}(e_i)$.

Suppose now (1. 2. 3) and (1. 2. 4) hold for every continuous ring. Then if n_i is sufficiently large, $R(p_i^{n_i}(ae_i)$ in $\mathfrak{R}(e_i)) < \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}$. And if p_0 is any polynomial of sufficiently high degree there exists b_0 in $\mathfrak{R}(e_0)$ such that $R(ae_0 - b_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ and $R(p_0(b_0)$ in $\mathfrak{R}(e_0)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Now we choose j so large that $R(1-(e_0 + \ldots + e_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$ and set

$$b = b_0 + ae_1 + \ldots + ae_j, \quad p = p_0 p_1^{n_1} \ldots p_j^{n_j}.$$

It follows that $R(a-b) \leqq R(ae_0 - b_0) + R(1-(e_0 + \ldots + e_j)) < \varepsilon$, and $R(p(b)) < \varepsilon$. This verifies (1. 2. 5).

1. 7. Some of our Lemmas are proved under hypotheses weaker than the requirement that $\mathfrak{R}$ be a continuous ring; in particular, irreducibility of $\mathfrak{R}$ is frequently not required. This will facilitate an extension (to the reducible case) of Theorem (1. 2. 1).

2. Preliminary lemmas

Lemma 2. 1. *Suppose e is an idempotent in an associative ring $\mathfrak{R}$ and that* (i): *$e=0$ or* (ii): *$\mathfrak{R}$ possesses a set of matrix units s_{ij}, $i, j = 1, \ldots, k$ for some $k = 1, 2, \ldots$ with $es_{11} = s_{11}e = s_{11}$. Then the center of $\mathfrak{R}(e)$ is the set of all ze, $z \in Z$.*

Proof. The Lemma is trivially true if $e=0$. Consider the case $e \neq 0$ and suppose a is any element in the center of $\mathfrak{R}(e)$. Then clearly $\bar{a} \equiv as_{11}$ is in the center of $\mathfrak{R}(s_{11})$. Let $z = \sum_{i=1}^{k} s_{i1}\bar{a}s_{1i}$. Then z is in Z: for if x is in $\mathfrak{R}$, $x = \sum_{i=1}^{k} xs_{ii} = \sum_{i=1}^{k} s_{ii}x$, so (since $s_{1j}xs_{i1}$ is in $\mathfrak{R}(s_{11})$ and $\bar{a}$ is in the center of $\mathfrak{R}(s_{11})$)

$$xz = \sum_{i=1}^{k} xs_{i1}\bar{a}s_{1i} = \sum_{j=1}^{k} s_{j1}\left(\sum_{i=1}^{k} s_{1j}xs_{i1}\bar{a}s_{1i}\right) = \sum_{j=1}^{k} s_{j1}\left(\sum_{i=1}^{k} \bar{a}s_{1j}xs_{i1}s_{1i}\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{k} s_{j1}\bar{a}s_{1j}\right)x = zx.$$

We shall show that $y \equiv ze - a$ satisfies $y = 0$. Clearly, y is in the center of

$\mathfrak{R}(e)$ and $ys_{11}=\bar{a}s_{11}-as_{11}=0$. Hence for all u, v in $\mathfrak{R}$, $yus_{11}v=(yeues_{11})v=$ $=(eue)ys_{11}v=0$. Then for each $i=1,\dots,k$, $ys_{ii}=ys_{i1}s_{11}s_{1i}=0$ so $y=\sum_{i=1}^{k} ys_{ii}=0$.

Thus, if a is in the center of $\mathfrak{R}(e)$ then $a=ze$ for some z in Z. Conversely if z is in Z and x is in $\mathfrak{R}(e)$ then $(ze)x=zx=xz=(xe)z=x(ze)$ so ze is in the centre of $\mathfrak{R}(e)$. This completes the proof of Lemma 2. 1.

Corollary. *If e is an idempotent in a continuous or discrete ring $\mathfrak{R}$, then the center of $\mathfrak{R}(e)$ consists of all ze, $z\in Z$. And if $q(t)=t^m+z_{m-1}t^{m-1}+\dots+z_0t^0$ with all z_i in the center of $\mathfrak{R}(e)$ then for some p in P, for every a in $\mathfrak{R}(e)$, $(p(a)$ in $\mathfrak{R}(e))$ coincides with $ep(a)=q(a)$.*

Proof. If $e\neq 0$, $\mathfrak{R}$ does possess a set of matrix units s_{ij}, $i,j=1,\dots,k$ for some $k=1,2,\dots$ with $es_{11}=s_{11}e=s_{11}$. Hence Lemma 2. 1 applies and the Corollary follows.

Lemma 2. 2. *Suppose $\mathfrak{R}$ is an associative ring possessing a set of matrix units, s_{ij}, $i,j=1,\dots,k$ for some $k\geqq 2$. Then for any a in $\mathfrak{R}$, if $faf=af$ for every idempotent f in $\mathfrak{R}$, a is in the center of $\mathfrak{R}$.*

Proof. The condition $faf=af$ can be written: $(1-f)af=0$. With f in place of $1-f$ this gives: $fa(1-f)=0$, hence $fa=faf=af$.

Now for any x in $\mathfrak{R}$, $f+fx(1-f)$ is idempotent along with f, so $(f+fx(1-f))a=$ $=a(f+fx(1-f))$. But $fa=af$, and so we obtain

$$(fx(1-f))a=a(fx(1-f))$$

for every x in $\mathfrak{R}$ and every idempotent f in $\mathfrak{R}$.

Thus, $xa=ax$ whenever $x=fx(1-f)$ for some idempotent f, in particular whenever $x=s_{ii}x=xs_{jj}$ for some $i\neq j$ (use $f=s_{ii}$). Hence, for every x, if $i\neq j$ then $s_{ii}xs_{jj}$ commutes with a, and for any i, using some $j\neq i$ (here we use the hypothesis $k\geqq 2$),

$$a(s_{ii}xs_{ii})=a(s_{ii}xs_{ij})s_{ji}=(s_{ii}xs_{ij})as_{ji}=(s_{ii}xs_{ij})s_{ji}a=(s_{ii}xs_{ii})a,$$

so

$$xa=\sum_{i,j=1}^{k}(s_{ii}xs_{jj})a=\sum_{i,j=1}^{k}a(s_{ii}xs_{jj})=ax$$

showing that a is in the center of $\mathfrak{R}$, as stated.

Corollary. *Suppose a is an element in $\mathfrak{R}(e)$ with e idempotent in an associative ring $\mathfrak{R}$ and suppose $faf=af$ for every idempotent f in $\mathfrak{R}(e)$. Then $a=ze$ for some z in the center of $\mathfrak{R}$ if* (i): *$e=0$ or* (ii): *$\mathfrak{R}(e)$ possesses a set of matrix units s_{ij}, $i,j=1,\dots,k$ for some $k\geqq 2$ and $\mathfrak{R}$ possesses some set of matrix units S_{ij}, $i,j=1,\dots,K$, for some $K\geqq 1$ with $eS_{11}=S_{11}e=S_{11}$.*

Proof. The Corollary follows at once from Lemma 2. 2 and Lemma 2. 1.

Remark. The conditions of the Corollary to Lemma 2. 2 are always satisfied if $\mathfrak{R}$ is a continuous ring. But if $\mathfrak{R}$ is a discrete ring (then $\mathfrak{R}$ is the ring of $n\times n$ matrices over some division ring $\mathfrak{D}$) and $(e)_r$ is an atom in $\bar{R}_{\mathfrak{R}}$ (so $\mathfrak{R}(e)$ is ring isomorphic to $\mathfrak{D}$) the conditions fail to hold, and in fact if $\mathfrak{D}$ is not commutative, the Corollary actually fails to hold.

3. Proof of (1. 2. 1)

Lemma 3. 1. *Suppose $\mathfrak{R}$ is any associative ring with unit (not assumed regular) and let $\mathfrak{R}_N$ denote the ring of all $N\times N$ matrices over $\mathfrak{R}$. If $N\geqq 1$ and*

$$p(t) = t^N + z_{N-1}t^{N-1} + \dots + z_0$$

is any polynomial of degree N with all z_i in the centre of $\mathfrak{R}$ then there exists a matrix M in $\mathfrak{R}_N$ such that $p(M)=0$.

Proof. For $i, j=1, \dots, N$, let S_{ij} be the matrix with ij-th entry equal to 1 and all other entries 0. Then our requirements are satisfied by the matrix $M=\sum_{i=1}^{N-1} S_{i+1,1} - \sum_{i=0}^{N-1} z_i S_{i+1,N}$. We have

$$M=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -z_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -z_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -z_2 \\ . & . & \dots & . & . \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -z_{N-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -z_{N-1} \end{vmatrix}.$$

In fact, $MS_{i1}=S_{i+1,1}$ for $i=1, \dots, N-1$, hence $M^hS_{11}=S_{h+1,1}$ for $h=0, \dots, N-1$. Now,

$$M^N S_{11} = MM^{N-1}S_{11} = MS_{N,1} = -\sum_{i=0}^{N-1} z_i S_{i+1,1} =$$

$$= -\sum_{i=0}^{N-1} z_i M^i S_{11} = -(z_{N-1}M^{N-1} + \dots + z_0)S_{11}.$$

Thus $p(M)\cdot S_{11}=0$ and for $i>1, p(M)S_{i1}=p(M)M^{i-1}S_{11}=M^{i-1}p(M)S_{11}=0$. Hence, $p(M)S_{ii}=p(M)S_{i1}S_{1i}=0$ for $i=1, \dots, N$ and summation over i gives $p(M)=0$. This completes the proof.

Corollary. *If e is an idempotent in a continuous ring $\mathfrak{R}$ and p is a polynomial in P then for some x in $\mathfrak{R}(e)$, $\big(p(x)$ in $\mathfrak{R}(e)\big)=0$.*

Proof. The statement is obvious if $e=0$ (with $x=0$). So we may assume $e\neq 0$, and then by replacing $\mathfrak{R}$ by $\mathfrak{R}(e)$ we may suppose $e=1$. Since $\mathfrak{R}$ is a *continuous* ring it can be represented (cf. [4, page 99, Theorem 3. 3 and page 93, Definition 3. 2]) as a ring of $n\times n$ matrices over an associative ring $\mathfrak{S}$ with unit for *every n* (the center of $\mathfrak{R}$ can be identified with center of $\mathfrak{S}$). The Corollary now follows from Lemma 3. 1.

Remark. In the proof of this Corollary we made use of the fact that $\mathfrak{R}$ is continuous, not discrete.

Lemma 3. 2. *For arbitrary $\varepsilon > 0$, if a is ε-algebraic in a continuous ring $\mathfrak{R}$ then $R(a-b) < \varepsilon$ for some algebraic b in $\mathfrak{R}$.*

Proof. Suppose $R(p(a)) < \varepsilon$, choose an idempotent e with $(e)_r = (p(a))_r$ and let $b = (1-e)a + x$ with x arbitrary in $\mathfrak{R}(e)$. Then $e = p(a)\cdot u$ for some u in $\mathfrak{R}$ so $ae = ap(a)u = p(a)\cdot au = ep(a)\cdot au = eap(a)u = eae$; thus $(1-e)ae = 0$, $(1-e)a = (1-e)a(1-e) \in \mathfrak{R}(1-e)$. Then $p(b) = p((1-e)a(1-e) + exe)) = (1-e)\cdot p(a) + (p(x) \text{ in } \mathfrak{R}(e)) = (p(x) \text{ in } \mathfrak{R}(e))$, since $(1-e)p(a) = (1-e)ep(a) = 0$.

Now $a - b = ea - x = e(a-x)$ so $R(a-b) \leqq R(e) = R(p(a)) < \varepsilon$. And $p(b) = 0$ if x is chosen in $\mathfrak{R}(e)$ so that $(p(x) \text{ in } \mathfrak{R}(e)) = 0$. Now x can be so chosen by the Corollary to Lemma 3. 1 and then the Lemma is proved.

4. Proof of (1. 2. 3)

If $R((p(a))^m) \to 0$ as $m \to \infty$ then the polynomial $q(t) = p^m(t)$ has the property $R(q(a)) < \varepsilon$ if m is sufficiently large. This proves (1. 2. 3).

5. Proof of (1. 2. 4)

We shall use the symbol $E_n(e)$ to denote the expression $\Sigma(A, (a^i e)_r; i = 1, \ldots, n)$.

Lemma 5. 1. *Suppose a is purely transcendental in a continuous ring $\mathfrak{R}$, let N be any integer $\geqq 1$, and suppose A is a principal right ideal such that $A \neq \mathfrak{R}$, $aA \leqq A$. Then there exists an idempotent $e \neq 0$ which is a solution for*

(5. 1) $$(A, (ae)_r, \ldots, (a^N e)_r) \perp.$$ [4]

Proof. We note for future use that if d, c are in $\mathfrak{R}$ then

$$D(d(c)_r) = R(dc) \leqq R(c) = D((c)_r).$$

If $R(d) = 1$ and $dA \leqq A$ (in particular if $d = p(a)$ for some p in P) then $dc \in A$ implies $d((c)_r + A) \leqq A$, hence $(c)_r + A \leqq d^{-1}A$ and so $D((c)_r + A) \leqq D(A)$, and so $(c)_r \leqq A$. Thus for such d, if $dc \in A$ then $c \in A$.

Now suppose $N = 1$. Choose B to be a complement of A in $\mathfrak{R}$. Then $B = a(a^{-1}B)$ (a^{-1} exists since $R(a) = 1$). Choose an idempotent e such that $(e)_r = a^{-1}B$. Then $e \neq 0$ since $A \neq \mathfrak{R}$, hence $B \neq 0$. Also (5. 1) holds since it asserts only that $A(ae)_r = 0$ and this is true since $(ae)_r = B$. So the Lemma holds for $N = 1$.

Next, suppose the Lemma is established and $f_0 \neq 0$ is a solution for the case $N = n$ for some integer $n \geqq 1$. We shall prove below:

(5. 2) $(a^{n+1}f)_r \leqq E_n(f)$ is false for some idempotent $f \neq 0$, $f \in (f_0)_r$.

Assuming (5. 2) we have

(5. 3) $$(a^{n+1}f)_r E_n(f) \neq (a^{n+1}f)_r$$

---

[4]) The symbol $\perp$ signifies independence of the lattice elements (cf. [4, page 8]).

so we can choose an idempotent $e' \neq 0$ with $(e')_r$ a relative complement of the left side of (5. 3) in the right side of (5. 3).

Now choose an idempotent e with $(e)_r = (a^{-(n+1)}e')_r$. We shall prove: *this e is a solution of* (5. 1) *for* $N = n+1$. In fact, $(e')_r \leqq (a^{n+1}f)_r$ so $(e)_r \leqq (f)_r$ and $(a^{n+1}e)_r = (e')_r$. Thus $e \neq 0$ since $e' \neq 0$, and $(A, (ae)_r, \ldots, (a^n e)_r) \perp$ since $(e)_r \leqq \leqq (f)_r \leqq (f_0)_r$ and f_0 is a solution for (5. 1) with $N = n$. Furthermore, $(a^{n+1}e)_r E_n(e) \leqq \leqq (e')_r E_n(f) = 0$. Thus (5. 1) holds with $N = n+1$, as required. Thus by induction on N the Lemma would be proved for all N if (5. 2) were verified.

Assume (5. 2) false, if possible. Then for every f in $(f_0)_r$, $(a^{n+1}f)_r \leqq E_n(f)$. This implies

$$a^{n+1}f = y + \sum_{i=1}^{n} a^i f v_i \tag{5. 4}$$

for some y in A and some v_i in $\mathfrak{R}$. Using right multiplication by f we could suppose $y = yf$ and $v_i = f v_i f$ for all i. Choose, in particular, $f = f_0$ and let the resulting y, v_i in (5. 4) be denoted by x, u_i respectively. Then (5. 4) becomes

$$a^{n+1}f_0 = x + \sum_{i=1}^{n} a^i u_i. \tag{5. 5}$$

Right multiplication of (5. 5) by f and subtraction from (5. 4) yields

$$0 = (y - xf) + \sum_{i=1}^{n} a^i (v_i - u_i f). \tag{5. 6}$$

Since the addends in (5. 6) are in the principal right ideals A, $(a^i f_0)_r$, $i = 1, \ldots, n$, respectively, and $(A, (af_0)_r, \ldots, (a^n f_0)_r) \perp$, therefore all of $y - xf$, $a^i(v_i - u_i f)$ must be 0. Then $v_i - u_i f = (a^{-1})^i a^i (v_i - u_i f) = 0$, so $v_i = u_i f$. But $f v_i = v_i$ so $f u_i f = u_i f$ for every idempotent f in $(f_0)_r$, in particular for every idempotent f in $\mathfrak{R}(f_0)$. Hence, by the Corollary to Lemma 2. 2, $u_i = z_i f_0$ for some z_i in Z. Now (5. 5) becomes

$$a^{n+1}f_0 = x + \sum_{i=1}^{n} a^i z_i f_0,$$

$$\left(a^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} z_i a^i\right) f_0 = x.$$

Put $p(t) = t^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (-z_i) t^i$. Then p is in P and $p(a) f_0 = x \in A$. Since $R(p(a)) = 1$, $f_0 \in A, f_0 \in (f_0)_r A = 0$, $f_0 = 0$. This contradicts $f_0 \neq 0$, so (5. 2) cannot be false and this completes the proof of the Lemma.

Corollary. *Under the hypotheses of Lemma* 5. 1 *there exists a maximal solution e. This means: if f is a solution and* $(e)_r \leqq (f)_r$ *then* $(e)_r = (f)_r$.

Proof. By transfinite induction there exists an ordinal number Ω (not necessarily a limit ordinal) and a set of solutions of (5. 1) e_α, $\alpha < \Omega$, such that $(e_\alpha)_r < (e_\beta)_r$ whenever $\alpha < \beta < \Omega$ and such that no solution f satisfies $(e_\alpha)_r < (f)_r$ for all $\alpha < \Omega$.

Let $(e)_r=\Sigma_\alpha(e_\alpha)_r$. Then by Axiom III of [4, page 2] (the continuity of lattice operations) assumed for $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$, we have: for $n=1, 2, \dots, N$

$$(a^n e)_r E_{n-1}(e)=\sum_\alpha\big((a^n e_\alpha)_r E_{n-1}(e)\big)=\sum_{\alpha,\beta}(a^n e_\alpha)_r E_{n-1}(e_\beta)=$$
$$=\sum_\alpha(a^n e_\alpha)_r E_{n-1}(e_\alpha)=\sum_\alpha 0=0.$$

This implies that e is a solution of (5. 1). Since $(e)_r\geqq(e_\alpha)_r$ for all $\alpha<\Omega$ it follows that no solution f can satisfy $(f)_r>(e)_r$.

Lemma 5. 2. *Let $\mathfrak{R}$, a, N, A be as in Lemma 5. 1. Then there exists a sequence of idempotents $e_N, e_{N+1}, \dots$ with the properties:*

$$\big(A, (a^i e_j)_r;\ i=1, \dots, j;\ j\geqq N\big)\perp. \tag{5.7}$$

$$\sum\big(A, (a^i e_j)_r;\ i=1, \dots, j;\ j\geqq N\big)=\mathfrak{R}. \tag{5.8}$$

Proof. Let $\bar{e}_N$ be a maximal solution of (5. 1) (existing by the Corollary to Lemma 5. 1) and for each $j\geqq N$ define idempotents $e_j, \bar{e}_{j+1}$ by induction on j so that:

$$(e_j)_r=a^{-(j+1)}\sum_{n=N}^{j}E_n(\bar{e}_n)(\bar{e}_j)_r,$$
$$(\bar{e}_{j+1})_r=\text{relative complement of } (e_j)_r \text{ in } (\bar{e}_j)_r.$$

Then for all $k\geqq j\geqq N$ and all i,

$$(a^i e_j)_r+(a^i\bar{e}_{j+1})_r=(a^i\bar{e}_j)_r,$$
$$(a^{j+1}\bar{e}_{j+1})_r\sum_{n=N}^{j}E_n(\bar{e}_n)=0,$$
$$(a^{j+1}e_j)_r\leqq\sum_{n=N}^{j}E_n(\bar{e}_n),$$
$$E_j(\bar{e}_j)=\sum_{n=j}^{k}E_j(e_n)+\sum_{i=1}^{j}(a^i\bar{e}_{k+1})_r.$$

Since $R(\bar{e}_{k+1})\leqq\dfrac{1}{k+1}$, $D\left(\sum_{i=1}^{j}(a^i\bar{e}_{k+1})_r\right)\leqq\dfrac{j}{k+1}$ and, consequently, converges to 0 as $k\to\infty$ for fixed j; hence $E_j(\bar{e}_j)=\sum\big(E_j(e_n);\ n\geqq j\big)$.

It is now easily verified that (5. 7) holds. We need only show $\big(A, (a^i e_j)_r;$ $i=1, \dots, j;\ k\geqq j\geqq N\big)\perp$ for all $k\geqq N$, and it is therefore sufficient to prove

$$\big(A, (a^i e_j)_r;\ i=1, \dots, j;\ k-1\geqq j\geqq N;\ (a^i\bar{e}_k)_r;\ i=1, \dots, k\big)\perp \tag{5.9}$$

for all $k\geqq N$. But (5. 9) holds for $k=N$, (by the definition of $\bar{e}_N$), and if (5.9) holds for some $k\geqq N$ then it holds also for $k+1$ since

(i): $(a^i\bar{e}_k)_r$ is the union of the independent elements $(a^i e_k)_r$, $(a^i\bar{e}_{k+1})_r$ for $i=1, \dots, k$ and (ii): $\quad (a^{k+1}\bar{e}_{k+1})_r(A+\sum((a^ie_j)_r;\ i=1,\ldots,j;\ k\geqq j\geqq N)+$

$+\sum((a^i\bar{e}_{k+1})_r;\ i=1,\ldots,k))\leqq(a^{k+1}\bar{e}_{k+1})_r\sum_{j=N}^{k}E_j(\bar{e}_j)=0.$

Thus, by induction on k, (5. 9) holds for all $k\geqq N$ and so (5. 7) holds.

If the left side of (5. 8) is denoted by E then for each addend S on the left side of (5. 8) we have $aS\leqq E$. From this we deduce $aE\leqq E$ since the mapping: $x\to ax(x\in\bar{R}_{\mathfrak{R}})$ is an order-isomorphism of $\bar{R}_{\mathfrak{R}}$ onto itself with inverse mapping: $x\to a^{-1}x$(use: $x=(e)_r$ for some e, and then $ax=(ae)_r$).

Now if $E=\mathfrak{R}$ were false we could apply Lemma 5. 1 to obtain an $f\neq 0$ with $(E,(af)_r,\ldots,(a_Nf)_r)\perp$. Since $(af)_r(a\bar{e}_N)_r\leqq(af)_rE=0$, so $(f)_r(\bar{e}_N)_r=0$; choosing an idempotent e' with $(e')_r=(f)_r+(\bar{e}_N)_r$ we would have a solution e' of (5. 1) with $(e')_r>(\bar{e}_N)_r$, contradicting the choice of $\bar{e}_N$ as a maximal solution. Thus $E=\mathfrak{R}$ and (5. 8) holds. This completes the proof of the Lemma.

Lemma 5. 3. *Suppose a is purely transcendental in a continuous ring $\mathfrak{R}$. Then for every real $\varepsilon>0$ and for every $p(t)=t^m+z_{m-1}t^{m-1}+\ldots+z_0t^0$ with all z_i in Z, and $m>1/\varepsilon$ there exists b in $\mathfrak{R}$ such that $R(p(b))<\varepsilon$ and $R(a-b)<\varepsilon$.*

Proof. Choose $N>\dfrac{m}{\varepsilon}$ and apply Lemma 5. 2 (with $A=0$) to obtain $\mathfrak{R}=$ $=\Sigma((a^ie_j)_r;\ i=1,\ldots,j;\ j=N,N+1,\ldots)$. For each j let t_j be the largest integer with $mt_j\leqq j$ and set

$$A=\sum((a^{ms}e_j)_r;\ j\geqq N;\ s=1,\ldots,t_j),$$

$$B=\sum((a^ie_j)_r;\ j\geqq N;\ i\neq ms \text{ for all } s=1,\ldots,t_j).$$

Then A and B are complementary in $\mathfrak{R}$ and

$$(g)_r=A,\quad (1-g)_r=B \text{ for some idempotent } g$$

and $R(g)=D(A)\leqq\dfrac{1}{m}$.

Choose $b=a-a^{-m+1}p(a)g$. Then

$$R(a-b)\leqq R(g)\leqq\frac{1}{m}<\varepsilon.$$

Now we shall prove below:

(5. 10) $\qquad p(b)a^ie_j=0$ for $j\geqq N$ and $i=1,\ldots,mt_j$.

From (5. 10) it will follow at once that

$$R(p(b))=D'(p(b))_l=1-D(p(b))_l^r\leqq$$

$$\leqq D(\Sigma((a^ie_j)_r;\ j\geqq N;\ mt_j<i<m(t_j+1)))\leqq\frac{m}{N}<\varepsilon$$

as required. Thus we need only prove (5. 10).

Clearly $bx=ax$ whenever $gx=0$, that is, whenever $x\in B$. By repetition $b^h(a^ie_j)=a^h(a^ie_j)$ whenever $a^ie_j, a^{i+1}e_j,\ldots,a^{i+h-1}e_j$ are all in B.

Hence, if $i=ms+1$ for some s with $0\leqq s<t_j$ we can deduce:

$$b^h(a^ie_j)=a^h(a^ie_j) \text{ for } h=0, 1, \ldots, m-1,$$

$$\begin{aligned} b^m(a^ie_j)&=bb^{m-1}(a^ie_j)=b(a^{m-1+i}e_j)=\\ &=\big(a-a^{-m+1}p(a)g\big)a^{m(s+1)}e_j=\\ &=a^{m(s+1)+1}e_j-p(a)a^{ms+1}e_j \quad (\text{use } ga^{m(s+1)}=a^{m(s+1)})=\\ &=a^m(a^ie_j)-p(a)a^ie_j;\end{aligned}$$

and so $p(b)a^ie_j=-p(a)a^ie_j+p(a)a^ie_j=0$. Therefore $p(b)a^ie_j=0$ for all $i=ms+1$, $0\leqq s<t_j$. But this implies $p(b)a^h(a^ie_j)=p(b)b^h(a^ie_j)=b^hp(b)a^ie_j=0$ for such i and all $h=0, 1, \ldots, m-1$. This proves (5. 10) and establishes the Lemma.

6. Preliminary Lemmas

In this section L will be assumed to be a relatively complemented modular lattice which is $\aleph_0$-complete and $\aleph_0$-continuous. This means: whenever I is countable,

(6. 1) $$\Sigma(a_\alpha;\,\alpha\in I) \quad\text{and}\quad \Pi(a_\alpha;\,\alpha\in I) \quad \text{exist,}$$

(6. 2) $$b\Sigma(a_\alpha;\,\alpha\in I)=\Sigma_F\big(b\Sigma(a_\alpha;\,\alpha\in F)\big),$$

$$b+\Pi(a_\alpha;\,\alpha\in I)=\Pi_F\big(b+\Pi(a_\alpha;\,\alpha\in F)\big)$$

(where F varies over all finite subsets of I). $\mathfrak{R}$ will be assumed to be a regular ring not necessarily with unit such that

(6. 3) $$\bar{R}_{\mathfrak{R}} \text{ is } \aleph_0\text{-complete and } \aleph_0\text{-continuous.}$$

If $\mathfrak{R}$ has a unit $\bar{R}_{\mathfrak{R}}$ and $\bar{L}_{\mathfrak{R}}$ are anti-isomorphic under the mutually inverse mappings

(6. 4) $$(a)_r\to(a)_r^l\equiv(x;\,xa=0), \quad (a)_l\to(a)_l^r\equiv(x;\,ax=0)$$

(cf. [4, page 71, Corollary 2 to Lemma 2.2]). Since $\aleph_0$-completeness and $\aleph_0$-continuity are self-dual properties it follows that they are possessed by $\bar{L}_{\mathfrak{R}}$ if by $\bar{R}_{\mathfrak{R}}$.

Lemma 6. 1. *Let L be an $\aleph_0$-complete $\aleph_0$-continuous relatively complemented modular lattice. Suppose a, b are in L and suppose $Tx=y$ defines a $(1, 1)$ mapping of $L(0, a)$ onto $L(0, b)$ such that (i): $a_1\leqq a_2\leqq a$ holds if and only if $Ta_1\leqq Ta_2\leqq Ta(=b)$ and (ii): $a_1\sim Ta_1$ whenever $a_1(Ta_1)=0$. Then $a\sim b$.*

Proof. (i) If $Ta_1\leqq a_1$ let d be a relative complement of Ta_1 in a_1. Then $d, Td, \ldots, T^nd, \ldots$ are all defined, independent and mutually perspective. To prove this, note firstly that $Ta_1\leqq a_1$ implies that $T^2a_1=T(Ta_1)$ is defined and $T^2a_1\leqq Ta_1\leqq a_1$. By induction, T^na_1 is defined for all n and so T^nd is defined for all n since $d\leqq a_1$. Then for all $n\geqq 0, m\geqq 1$,

$$(T^nd)(T^{n+1}d+\ldots+T^{n+m}d)=T^n\big(d(Td+\ldots+T^md)\big)\leqq T^n\big(d(Ta_1)\big)=T^n(0)=0,$$

so d, $Td,\ldots$ are independent Finally, $T(T^nd)=T^{n+1}d$ and $(T^nd)\ (T^{n+1}d)=0$, so the hypotheses of Lemma 6. 1 yield $T^n d \sim T^{n+1} d$. From this it follows that $d, Td, \ldots$ are mutually perspective.

Now the argument given in [4, page 21, Theorem 3. 8] is valid with our present hypothesis on L, so $d=0$. Thus $Ta_1 \leqq a_1$ *implies* $Ta_1 = a_1$.

(ii) Set $a_1' = a$, $b_1' = b$. Define $a_{n+1}', a_n, b_{n+1}', b_n$ for all $n \geqq 1$ by induction on n so that:

$$a_{n+1}' = a_n' b_n', \qquad a_n = \text{relative complement of } a_{n+1}' \text{ in } a_n',$$

$$b_{n+1}' = Ta_{n+1}', \qquad b_n = Ta_n.$$

Then (cf. [1, page 543, Lemma 2.11]),

$$a_n' = a_{n+1}' + a_n, \quad a_0' \geqq a_1' \geqq \ldots,$$

$$a = \Pi a_n' + \Sigma a_n, \quad (\Pi a_n', a_1, a_2, \ldots) \perp,$$

$$b_n' = b_{n+1}' + b_n, \quad b_0' \geqq b_1' \geqq \ldots,$$

$$b = \Pi b_n' + \Sigma b_n, \quad (\Pi b_n', b_1, b_2, \ldots) \perp,$$

$$T(\Pi a_n') = \Pi b_n' \geqq \Pi a_n'.$$

Applying the preceding paragraph (with T^{-1} in place of T) it follows that $T(\Pi a_n') = \Pi a_n' = \Pi b_n'$. Since $a_n b_n = 0$ for $n \geqq 1$, so $a_n \sim b_n$. Now under the present hypothesis on L, perspectivity is additive for countable independent families (cf. [1, page 561, Theorem 6. 2]). Then $a = \Pi a_n' + \Sigma a_n$ is perspective to $b = \Pi b_n' + \Sigma b_n$, proving the Lemma.

Lemma 6. 2.[5] *Let $\mathfrak{R}$ be a regular ring with unit such that $\bar{R}_{\mathfrak{R}}$ (hence also $\bar{L}_{\mathfrak{R}}$) is $\aleph_0$-complete and $\aleph_0$-continuous. Then for all a, b in $\mathfrak{R}$:*

(6. 5) $\quad (a)_r \sim (b)_r$ *if and only if* $(a)_l \sim (b)_l$.

(6. 6) $\quad (a)_r \precsim (b)_r$ *if and only if* $(a)_l \precsim (b)_l$.

(6. 7) $\quad (a)_l^r \Pi((a^n)_r;\, n \geqq 1) = (a)_r^l \Pi((a^n)_l;\, n \geqq 1) = 0.$

(6. 8) *There exists a unique idempotent e such that*

$$(e)_r = \Pi((a^n)_r;\, n \geqq 1) \quad \text{and} \quad (e)_l = \Pi((a^n)_l;\, n \geqq 1).$$ [6]

Proof of (6. 5). Suppose $(a)_r$ and $(b)_r$ have a common complement in $\mathfrak{R}$. Then by [4, page 69, Theorem 2. 1] there exist idempotents f, g such that $(a)_r = (f)_r$, $(b)_r = (g)_r$ and the common complement is $(1-f)_r = (1-g)_r$. This implies $f = fg$, $g = gf$ so $(f)_l = (g)_l$. Now perspectivity is transitive in $\bar{L}_{\mathfrak{R}}$ under our present hypotheses on $\mathfrak{R}$ (see [1, page 550, Theorem 5. 1]), so if we can show $(a)_r = (f)_r$ implies $(a)_l \sim (f)_l$, the same result for $(b)_r = (g)_r$ will yield $(a)_l \sim (f)_l$, $(f)_l = (g)_l$, $(g)_l \sim (b)_l$,

5) (6. 5) was proved in [4, page 223] for the special case of complete rank rings.

6) Although not required for this paper, the following remark may be of interest to the reader. Assume the hypotheses of Lemma 6. 2 and suppose $x \in \mathfrak{R}$. From (6. 6), (6. 7) and (6. 8) it follows that $(x)_r = (e)_r$, $(x)_l = (e)_l$ for some idempotent e (necessarily unique) if and only if $(x^2)_r = (x)_r$, equivalently: for $a \in \mathfrak{R}$, $x^2 a = 0$ implies $xa = 0$.

hence $(a)_l \sim (b)_l$. This will prove: $(a)_r \sim (b)_r$ implies $(a)_l \sim (b)_l$. We shall show now that $(a)_r = (f)_r$ implies $(a)_l \sim (f)_l$.

Since $(a)_r = (f)_r$, so $a = fa$, $f = ad$ for some d. Replacing d by df we can suppose $d = df$ so $(d)_l = (f)_l$. Now define the mappings T, T_1 by:

$$T(x)_l = (xd)_l \quad \text{for} \quad (x)_l \leqq (a)_l,$$

$$T_1(x)_l = (xa)_l \quad \text{for} \quad (x)_l \leqq (f)_l.$$

If $(x)_l \leqq (a)_l$ then $x = ua$, $xda = uada = ufa = ua = x$. It follows that T and T_1 are mutually inverse (1, 1) order preserving mappings between $L(0, (a)_l)$ and $L(0, (f)_l)$. Moreover, if $(x)_l \leqq (a)_l$ and $(x)_l\,(xd)_l = 0$ then $(x)_l \sim T(x)_l = (xd)_l$ with axis $(x + xd)_l$; for

(i) $(x)_l + (x+xd)_l = (x)_l + (xd)_l = (xd)_l + (x+xd)_l$;

(ii) $(x)_l(x+xd)_l = 0$ since $y = ux = v(x+xd)$ implies $(u-v)x = v(xd) \in \in (x)_l(xd)_l = 0$, $vxd = 0$, $vx = vxda = 0$, $y = vx + vxd = 0 + 0 = 0$.

(iii) $(xd)_l(x+xd)_l = 0$ since $y = uxd = v(x+xd)$ implies $vx = (u-v)xd \in \in (x)_l(xd)_l = 0$, $vx = 0$, $y = vx + vxd = 0$.

Now Lemma 6. 1 applies and shows that $(a)_l \sim (f)_l$.

Thus $(a)_r \sim (b)_r$ implies $(a)_l \sim (b)_l$. This result is equivalent to its dual: $(a)_l \sim (b)_l$ implies $(a)_r \sim (b)_r$. This proves (6. 5).

P r o o f of (6. 6). If $(a)_r \sim (c)_r \leqq (b)_r$ there exist orthogonal idempotents e, f such that $(e)_r = (c)_r$, $(f)_r =$ relative complement of $(c)_r$ in $(b)_r$. Then $(a)_r \sim (e)_r$, $ef = 0$, $(e+f)_r = (e)_r + (f)_r = (b)_r$.

By (6. 5) $(e+f)_l \sim (b)_l$. Since $e = e(e+f)$, so $(e)_l \leqq (e+f)_l$, $(e)_l \precsim (b)_l$. Using (6. 5) again and the transitivity of perspectivity [1, page 550, Theorem 5. 1] it follows that $(a)_l \sim (e)_l \precsim (b)_l$, and $(a)_l \precsim (b)_l$. So $(a)_r \precsim (b)_r$ implies $(a)_l \precsim (b)_l$. Combining this result with its dual we obtain (6. 6).

P r o o f of (6. 7). We need only prove $x \in ((a)_l^r \Pi((a^n)_r; n \geqq 1)$ implies $x = 0$ (together with its dual this yields (6. 7)). We have: $ax = 0$ but for every $n \geqq 1$, $x = a^n y_n$ for some y_n. For each $n \geqq 1$ let $(b_n)_l$ be a relative complement of $(a^{n+1})_l$ in $(a^n)_l$. Then $(a^n)_l = (a^{n+1})_l + (b_n)_l$, $a_n = ua^{n+1} + vb_n$ for some u, v;

$$x = a^n y_n = (ua^{n+1} + vb_n)y_n = uaa^n y_n + vb_n y_n = uax + vb_n y_n = 0 + vb_n y_n = vb_n y_n.$$

So $(x)_l \leqq (b_n y_n)_l$ and (6. 6) yields $(x)_r \precsim (b_n y_n)_r \leqq (b_n)_r$. Hence, again by (6. 6), $(x)_l \precsim \precsim (b_n)_l$, that is, $(x)_l \sim (x_n)_l \leqq (b_n)_l$ for some x_n. But the $(b_n)_l$ are independent, so the $(x_n)_l$ are independent. It follows that all $(x_n)_l = 0$ (cf. [4, page 21, Theorem 3. 8]) and so $(x)_l = 0$, $x = 0$ as required.[7])

---

7) This type of argument shows: *if* $x \in \Pi_n(a^n)_r$ *and* $\Pi_n(a^n x)_l = 0$ *then* $x = 0$. Indeed, for fixed m, $a^m = ua^{m+n} + vb_n$ with $(b_n)_l =$ relative complement of $(a^{m+n})_l$ in $(a^m)_l$. So $x = a^m y = ua^{m+n}y + + vb_n y = ua^n x + vb_n y$; $(x)_l \leqq (a^n x)_l + (b_n y)_l$; $(x)_l \leqq \Pi_n((a^n x)_l + \Sigma_m(b_m y)_l) = \Pi_n(a^n x)_l + \Sigma_n(b_n y)_l = = \Sigma_n(b_n y)_l$. But the b_n can be chosen so that $((b_n(_l;\ n \geqq 1) \perp$ and $\Sigma_n(b_n)_l =$ relative complement of $\Pi_n(a^n)_l$ in $(a^m)_l$ (use [1, Theorem 6. 2]). Then $(x)_l \leqq \Sigma_n(b_n y)_l \precsim$ relative complement of $\Pi_n(a^n)_l$ in $(a^m)_l$ and letting $m \to \infty$, we obtain $(x)_l = 0$ (use [1, Theorem 6. 1]). Hence, $x = 0$.

Proof of (6. 8). The existence of e as described is equivalent to

(6. 9) $$\Pi((a^n)_r;\ n\geqq 1)(\Pi((a^n)_l;\ n\geqq 1))^r=0,$$

and

(6. 10) $$\Pi((a^n)_r;\ n\geqq 1)+(\Pi((a^n)_l;\ n\geqq 1))^r=\mathfrak{R},$$

and then [4, page 69, Theorem 2. 1] shows that if e exists, it is uniquely determined.
The statement (6. 10) is equivalent to the left-right dual of (6. 9) (by (6. 3) and (6. 4)). So we need only prove (6. 9), equivalently:

(6. 11) $$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a^n)_l^r\right)\Pi((a^n)_r;\ n\geqq 1)=0.$$

Because of (6. 2) we need only prove (6. 11) with arbitrary finite m in place of ∞. Since $(a^1)_l^r\leqq(a^2)_l^r\leqq\ldots$ we need only prove: for each $m\geqq 1$,

(6. 12) $$(a^m)_l^r\Pi((a^n)_r;\ n\geqq 1)=0.$$

But from (6. 7), with a there replaced by a^m, the left side of (6. 22) is less than or equal to $(a^m)_l^r\Pi((a^{mn})_r;\ n\geqq 1)=0$. This proves (6. 8).

Lemma 6. 3. *Let $\mathfrak{R}$ be a regular ring with unit such that $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ and $\overline{L}_{\mathfrak{R}}$ satisfy the axioms I—V of discrete or continuous geometry* (cf. [4, pages 1, 2], *irreducibility is not assumed). Suppose S is a subset of $\mathfrak{R}$ such that for any a, b in S there is some c in S such that $(c)_r\leqq(ab)_r(ba)_r$ and some d in S such that $(d)_l\leqq(ab)_l(ba)_l$. Then there exists an idempotent $e=e(S)$ such that*

$$(e)_r=\Pi((a)_r;\ a\in S),\qquad (e)_l=\Pi((a)_l;\ a\in S)$$

(this e is unique) and e commutes with any u which commutes with every a in S.

Remark. The hypotheses on S are satisfied if $a, b\in S$ imply $ab=ba\in S$, in particular if S consists of all $p(a)$, $p\in P$ with a fixed, or if S consists of all $p^n(a)$, $n\geqq 1$ with $p\in P$, p fixed and a fixed.

Proof. Note that the hypotheses on S imply: for each d in S and each $n\geqq 1$, $(d^n)_r\geqq(a)_r$ for some a in S.
Now to prove e exists we need only prove (as in the proof of (6. 8)) that $(\Sigma((a)_l^r;\ a\in F))\,\Pi((a)_r;\ a\in S)=0$ for every finite subset F of S. But the hypotheses on S imply that for some d in S, $(d)_l\leqq(a)_l$ for all $a\in F$, hence $(d)_l^r\geqq(a)_l^r$ for all a in F. Thus we need only prove $(d)_l^r\Pi((a)_r;\ a\in S)=0$ for every d in S. But the hypotheses on S together with (6. 7) yield, $(d)_l^r\Pi((a)_r;\ a\in S)\leqq(d)_l^r\Pi((d^n)_r;\ n\geqq 1)=0$, so e does exist as described.
If $ua=au$ for all $a\in S$, then $(e)_r\leqq(a)_r$ yields $av=e$, $ue=uav=auv\in(a)_r$, so $ue\in\Pi((a)_r;\ a\in S)$, $ue=eue$. By the dual of this result, $eu=eue$ so $eu=ue$ as required.

Corollary. *If $ua=au$ for all a in S then there is a unique decomposition $u=u_1+u_2$ with u_1 in $\mathfrak{R}(e)$, u_2 in $\mathfrak{R}(1-e)$, namely $u_1=ue$, $u_2=u(1-e)$ and for every p in P*

(i) $p(u)=(p(ue)$ *in* $\mathfrak{R}(e))+(p(u(1-e))$ *in* $\mathfrak{R}(1-e))$,

(ii) $(p(ue) \text{ in } \mathfrak{R}(e))_r$ *and* $(p(u(1-e)) \text{ in } \mathfrak{R}(1-e))_r$ *are independent and their lattice union is* $(p(u))_r$.

(iii) *If this* u *is also in* S *then* $(ue)_r=(e)_r$, *equivalently, if* $e\neq 0$, ue *has a reciprocal in* $\mathfrak{R}(e)$.

Proof. By Lemma 6. 3, $eu=ue$ and the unique decomposition of u follows immediately. Since

$$p(u) = p(u)e+p(u)\,(1-e) = (p(ue) \text{ in } \mathfrak{R}(e))+(p(u(1-e)) \text{ in } \mathfrak{R}(1-e)),$$

(i) holds. Since the two addends on the right side of (i) are orthogonal, (ii) follows.

Finally, if u *is also in* S *then* $(u)_r \geqq (e)_r$ so $e=uv$ for some v, $e=(eu)v$, hence $(e)_r \geqq (eu)_r$. But $(eu)_r \leqq (e)_r$, so (iii) holds.

7. Decomposition into limiting algebraic and transcendental parts

7. 1. Assume that $\mathfrak{R}$ is a regular ring with unit for which $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ and $\overline{L}_{\mathfrak{R}}$ satisfy the axioms I—V of discrete or continuous geometry (cf. [4, pages 1, 2]) (irreducibility is not assumed). Let a be a fixed element of $\mathfrak{R}$ and set $S_0=(p(a); p\in P)$ and for each p in P, $S_p=(p^n(a); n\geqq 1)$.

Clearly S_0 (and each S_p) satisfies the hypotheses of Lemma 6. 3. We may set $e_0=e(S_0)$, $f_0=1-e_0$, $f_p=e(S_p)$, $e_p=1-f_p$.

Since all members of S_0 commute, it follows from Lemma 6. 3 that they all commute with e_0 and with every f_p, and then, again from Lemma 6. 3, that e_0, all f_p commute. So e_0, all e_p commute. Moreover $S_0\supset S_p$ so $(e_0)_r \leqq (f_p)_r$, hence $f_pe_0=e_0$, $e_pe_0=0$.

Suppose p, q in P have the property:

(7. 1) $\quad p(t)h+q(t)k = 1$ for some h, k of the form $z_mt^m+\ldots+z_0$ with $m\geqq 0$ and all z_i in Z.

Then p^m, q^n have this property (7. 1) also (use: $1 = (ph+qk)^{m+n} = p^mh_1+q^nk_1$ for some h_1, k_1 of the form $z_jt^j+\ldots+z_0$ with $j\geqq 0$ and all z_i in Z). Hence $p^m(a)h_1(a)+q^n(a)k_1(a) = 1$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= (p^m(a))_r+(q^n(a))_r = \Pi\big((p^m(a))_r+(q^n(a))_r;\, m\geqq 1, n\geqq 1\big) = \\ &= \Pi\big((p^m(a))_r+\Pi((q^n(a))_r;\, n\geqq 1);\, m\geqq 1\big) = \\ &= \Pi\big((p^m(a))_r;\, m\geqq 1\big)+\Pi\big((q^n(a))_r;\, n\geqq 1\big) = \\ &= (f_p)_r+(f_q)_r = \mathfrak{R} \text{ and, consequently, } 0 = \mathfrak{R}^l = (f_p)_r^l(f_q)_r^l = (e_p)_l(e_q)_l\end{aligned}$$

Thus (7. 1) implies $e_pe_q=0$, $(e_q)_r \leqq (f_p)_r$.

7. 2. From now on we assume also that $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ is irreducible so that $\mathfrak{R}$ is a complete rank ring, either discrete or continuous and so Z is a commutative division ring. Let $P'=P'(a)$ denote the set of $p\in P$ for which $(p(a))_r\neq\mathfrak{R}$ and p is irreducible (that is, $p\neq p_1\,p_2$ with $p_1, p_2\in P$). If p, q are in P' and $p\neq q$, then p, q are relatively prime with respect to coefficient domain Z so (7. 1) holds, hence $e_pe_q=0$. Moreover if $p\in P'$ then $(f_p)_r \leqq (p(a))_r \neq \Re$ so $f_p \neq 1$, $e_p \neq 0$. Since the e_p are mutually orthogonal, $1 \geqq R(e_p+e_q+\dots) = R(e_p)+R(e_q)+\dots$ with all $R(e_p)>0$, so P' is finite or denumerable.

Let P' be enumerated: $p_1, p_2, \dots$ (say) and from now on write e_m, f_m in place of e_p, f_p (with $p=p_m$). Since each p in P can be expressed as a product of powers of irreducible polynomials $p=p_1^{n_1}\dots p_m^{n_m}$ for suitable $n_1, \dots, n_m \geqq 0$, it follows that

$$(e_o)_r = \Pi\big((p(a))_r;\ p\in P\big)=$$
$$=\Pi\big((p_m^n(a))_r;\ m\geqq 1,\ n\geqq 1\big)=\Pi\big((f_m)_r;\ m\geqq 1\big),$$
$$(e_0)_r^l=(f_0)_l=\Sigma\big((f_m)_r^l;\ m\geqq 1\big)=\Sigma\big((e_m)_l;\ m\geqq 1\big).$$

By the dual argument, $(f_0)_r=\Sigma\big((e_m)_r;\ m\geqq 1\big)$. Since the e_i, $i\geqq 0$ are orthogonal, for all $m\geqq 0$

$$(f_m)_r=\Sigma\big((e_i)_r;\ i\geqq 0,\ i\neq m\big),$$
$$(f_m)_l=\Sigma\big((e_i)_l;\ i\geqq 0,\ i\neq m\big).$$

Also

$$\Re=\Sigma\big((e_m)_l;\ m\geqq 0\big)=\Sigma\big((e_m)_r;\ m\geqq 0\big),$$
$$\Sigma\big(R(e_m);\ m\geqq 0\big)=1,$$
$$R\big(1-(e_0+\dots+e_m)\big)\to 0 \text{ as } m\to\infty.$$

Lemma 7. 1. *With notation as in the preceding paragraphs,*

(7. 2) *ae_0 is purely transcendental in $\Re(e_0)$,*

(7. 3) *if $i\geqq 1$, ae_i is limiting p_i-algebraic in $\Re(e_i)$,*

(7. 4) *if $p=p_1^{n_1}\dots p_m^{n_m}$ then $\big(1-(e_1+\dots+e_m)\big)_r$ and the $\big(p_i^{n_i}(ae_i)$ in $\Re(e_i)\big)_r$, $i=1,\dots,m$ are an independent set and their lattice union is $\big(p(a)\big)_r$.*

Proof. For every p in P, $\big(p(ae_0)$ in $\Re(e_0)\big)=e_0p(ae_0)$ and, by (iii) of the Corollary to Lemma 6. 3, has a reciprocal in $\Re(e_0)$. The Corollary to Lemma 2. 1 now yields (7. 2).

For every $i\geqq 1$, a and e_i commute so $\big(p_i(ae_i)$ in $\Re(e_i)\big)=e_ip_i(a)$. Hence

$$\Pi\big((p_i^n(ae_i))_r;\ n\geqq 1\big)=(e_i)_r\Pi\big((p_i^n(a))_r;\ n\geqq 1\big)=(e_i)_r(f_i)_r=0.$$

This proves (7. 3).

Now let $g_m=1-(e_1+\dots+e_m)=f_1\dots f_m$. Then $\big((g_m)_r, (e_1)_r, \dots, (e_m)_r\big)\perp$ (the g_m, e_i; $i=1,\dots,m$ are even orthogonal) and $\big(p_i^{n_i}(ae_i)$ in $\Re(e_i)\big)=e_ip_i^{n_i}(ae_i)\in(e_i)_r$. It follows that $\big((g_m)_r, (p_i^{n_i}(ae_i))_r;\ i=1,\dots,m\big)\perp$. Also,

$$p(a)=p(ae_1+\dots+ae_m+ag_m)=$$
$$=e_1p(ae_1)+\dots+e_mp(ae_m)+g_mp(ag_m)=$$
$$=p(ae_1)e_1+\dots+p(ae_m)e_m+p(ag_m)g_m.$$

Since $g_m, e_1, \dots, e_m$ are orthogonal,

$$(p(a))_r = (p(ae_1)e_1)_r + \dots + (p(ae_m)e_m)_r + (p(ag_m)g_m)_r.$$

But $e_i p(ae_i) = e_i p(a) = e_i p_1^{n_1}(a) \dots p_m^{n_m}(a)$. If for some $j = 1, \dots, m$ we consider $S = S_{p_j} = (p_j^n(a);\ n \geqq 1)$ and apply (iii) of the Corollary to Lemma 6.3 with $u = p_j^{n_j}(a)$ and $e = f_j$ we see that $p_j^{n_j}(a) b_j = f_j$ for some b_j. If $j \neq i$, then $f_j e_i = e_i$ so $p_j^{n_j}(a)(b_j e_i) = f_j e_i = e_i$ which implies

$$(e_i p(ae_i))_r = (e_i p_i^{n_i}(a) \Pi(p_j^{n_j}(a);\ j \neq i,\ j = 1, \dots, m))_r = (e_i p_i^{n_i}(a))_r$$

for $i = 1, \dots, m$. Similarly since $f_j g_m = g_m$,

$$(g_m p(ag_m))_r = (g_m p(a))_r = (g_m)_r.$$

From this, (7.4) follows at once.

Remark. ae_0 will be called the *transcendental part* of a, $a(1-e_0)$ will be called the *almost algebraic part* of a, and for $i \geqq 1$, the ae_i will be called the p_i — *limiting algebraic parts* of a.

8. The main theorem

Theorem 8.1. *Let a be an element of a continuous ring $\mathfrak{R}$ and suppose given any real $\varepsilon > 0$. Then there exists $p \in P$ and $b \in \mathfrak{R}$ such that $p(b) = 0$ and $R(a-b) < \varepsilon$. Moreover p can be of the form $p = p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$ if $P'(a) = (p_1, p_2, \dots)$ is not empty and p can be required to be any assigned polynomial in P of degree $> \dfrac{1}{\varepsilon}$ if $P'(a)$ is empty.*

Proof. We shall show first that with p as described, b' exists with $R(a-b') < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $R(p(b')) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. This follows from Lemma 5.3 if $P'(a)$ is empty (then a is purely transcendental) so we may suppose $P'(a)$ is not empty.

Set $g_m = 1 - (e_0 + \dots + e_m)$. Choose m so large that $R(g_m) < \dfrac{\varepsilon}{4}$ and for $i = 1, \dots, m$ choose n_i so large that $n = n_1 + \dots + n_m$ and $p = p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$ satisfy; $n > 1$, $R(ae_0 - b_0) < \dfrac{\varepsilon}{4}$, $R(e_0 p(b_0)) < \dfrac{\varepsilon}{4(m+1)}$ for some b_0 in $\mathfrak{R}(e_0)$, and $R(p_i^{n_i}(ae_i)e_i) < \dfrac{\varepsilon}{4(m+1)}$ for $i = 1, \dots, m$.

To see that such n_i exist, use the fact that for any c and any idempotent e, if $c \in e\mathfrak{R}e$ then: Rank of c in $\mathfrak{R}$ is equal to Rank of e in $\mathfrak{R}$ multiplied by (normalized) Rank of c in $e\mathfrak{R}e$. Now by (7.3), ae_i is limiting p_i-algebraic in $\mathfrak{R}(e_i)$, a fortiori, $R(e_i p_i^{n_i}(ae_i)) \to 0$ as $n_i \to \infty$; and by (7.2), ae_0 is purely transcendental in $\mathfrak{R}(e_0)$ which implies by Lemma 5.3, whenever $\eta > 0$ and p is given of degree n, $n > \dfrac{1}{\eta}$, there exists b_0 in $\mathfrak{R}(e_0)$ (and so in $\mathfrak{R}$), with the properties $R(e_0 p(b_0)) \leqq R(e_0)\eta$, $R(ae_0 - b_0) \leqq R(e_0)\eta$.

Set $b' = b_0 + ae_1 + \dots + ae_m$. Then

$$R(a-b') = R(ae_0 - b_0) + R(ag_m) \leqq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$R(p(b')) \leqq R(e_0 p(b_0)) + R(e_1 p(ae_1)) + \dots + R(e_m p(ae_m)) + R(g_m) \leqq$$
$$\leqq R(e_0 p(b_0)) + R(p_1^{n_1}(ae_1)e_1) + \dots + R(p_m^{n_m}(ae_m)e_m) + R(g_m) <$$
$$< (m+1)\frac{\varepsilon}{4(m+1)} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

so b' exists as stated above.

Now with this b' let $(e)_r = (p(b'))_r$ so $e = p(b')u$ for some u. Then $b'e = b'p(b')u = p(b')b'u$ so $b'e = eb'e$, $(1-e)b'e = 0$, $(1-e)b'(1-e) = (1-e)b'$; so for all x in $\Re(e)$,

$$p((1-e)b' + x) = (1-e)p(b') + ep(x) =$$
$$= (1-e)ep(b') + ep(x) = ep(x).$$

By the Corollary to Lemma 3.1 we can choose x_0 in $\Re(e)$ so that $p(x_0) = 0$. Choose $b = (1-e)b' + x_0$. Then $p(b) = 0$ and $R(a-b) \leqq R(a-b') + R(eb' - ex_0) < \frac{\varepsilon}{2} + R(p(b')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Thus this b satisfies the requirements of the Theorem.

References

[1] ISRAEL HALPERIN, On the transitivity of perspectivity in continuous geometries, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 537–562.

[2] ISRAEL HALPERIN, Transcendental elements in continuous rings, *Canadian J. Math.*, **14** (1962), 39–44.

[3] JOHN von NEUMANN, Continuous rings and their arithmetics, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **23** (1937), 341–349.

[4] JOHN von NEUMANN, *Continuous Geometry* (Princeton University Press, 1960, reprint of the 1935–1937 edition).

(Received March 13, 1961)

Über die monotone Superposition der Wahrheitsfunktionen

Von ANDRÁS ÁDÁM in Szeged

§ 1

A. W. KUSNJEZOW faßt den Inhalt des Paragraphen 2 seiner Arbeit [2] in dem Satz zusammen: *Wenn eine Wahrheitsfunktion auf zwei Weisen durch wiederholungsfreie Superpositionen aus irreduziblen Funktionen dargestellt wird, dann sind diese Darstellungen fast übereinstimmend* (S. 202). Dieses Resultat kann folgenderweise etwas ausführlicher erläutert werden. Es existieren evidente Methoden, die, für eine (im allgemeinen mehrstufige) Superpositionsdarstellung angewandt, eine Darstellung derselben Funktion liefern, so daß die beiden Darstellungen „gleiche Tiefe" haben. Seien diejenigen Superpositionsdarstellungen einer Wahrheitsfunktion betrachtet, die „am tiefsten" sind im Sinne, daß die in ihnen auftretenden Funktionen durch Superposition nicht zerlegt werden können. Die Behauptung des Kusnjezowschen Satzes besteht darin, daß jede solche Darstellung in eine beliebige andere solcher Art durch die erwähnten evidenten Methoden umformt werden kann.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, eine Variante der Theorie von KUSNJEZOW zu erbauen. Unsere Untersuchungen weichen aber in Gegenstand, Aufbau und Methode von denen von KUSNJEZOW beträchtlich ab. Was den Gegenstand anbetrifft, gebrauchen wir den Begriff der wiederholungsfreien Superposition in einer durch eine Monotonitäts-Erforderung beschränkten Form.[1]) Im Aufbau unserer Forschungen und in der Formulierung unserer Ergebnisse weichen wir besonders von [2] ab; in dieser Hinsicht ist unsere Arbeit mehr einigen Teilen des Artikels [3] von TRACHTENBROT ähnlich,[2]) und folgt den in [1] begonnenen Weg. Wir gehen in einige Einzelheiten der Theorie mehr ein, als KUSNJEZOW; die Technik unserer Beweise ist meistens ganz verschieden; der Begriff der Primimplikante[3]) wird in großen Maße benützt, und die Herleitung der tieferen Ergebnisse gründet sich auf dem zweiten Satze von [1].

Da unsere Betrachtung parallel zu den Untersuchungen von KUSNJEZOW und TRACHTENBROT geht, braucht der Leser nicht [2] und [3] zu kennen. Wir defi-

---

1) Dieser Umstand bedeutet, daß unsere Forschungen „nicht so tiefgehend" sind, wie die von KUSNJEZOW. Es ist bemerkenswert, daß obwohl sein Satz den analogen Satz im Falle unseres beschränkten Superpositionsbegriffes gewissermaßen plausibel macht, ihn doch nicht enthält.

2) Es besteht aber eine gewisse Dualität mit den Methoden von TRACHTENBROT: er betrachtet hauptsächlich die *maximalen* zweipoligen Teilgraphen, wir werden aber meistens die *minimalen* abtrennbaren Teilmengen untersuchen.

3) Es zeigt die Bedeutung dieses Begriffes, daß er auch im Beweis derartiger Sätze, die nicht über Primimplikanten reden, sehr wirksam verwendet werden kann.

nieren die ein- und mehrstufigen Superpositionsdarstellungen einer Funktion, doch ist es meistens genügend, die Untersuchungen auf die einstufigen Darstellungen einzuschränken. Um alle monotone Superpositionsdarstellungen zu beschreiben, macht nur die Erläuterung der Anlagen der monoton-abtrennbaren Teilmengen Schwierigkeiten (Satz 1). Darum beschäftigt sich die Arbeit hauptsächlich mit der mengentheoretischen Situation dieser Teilmengen: es wird im Satz 7 gezeigt, daß die Gesamtheit der monoton-abtrennbaren Teilmengen in Bezug auf die Vereinigung und die Differenzbildung der nicht-disjunkten Mengen abgeschlossen ist. Es wird eine kanonische Darstellung der Wahrheitsfunktionen so eingeführt, daß jede Funktion eine wohlbestimmte derartige Darstellung hat, und durch eine Kette derartiger Darstellungen aus solchen Funktionen aufgebaut werden kann, deren jede entweder zum vierten Typ gehört,[4]) oder Konjunktion oder Disjunktion ist. Die Sätze 2 und 11 geben (sukzessiv angewandt) eine Übersicht der monoton-abtrennbaren Teilmengen für eine Funktion f, wenn die iterierte kanonische Darstellung von f bekannt ist. Die Folgerung des Satzes 12 zeigt, daß unsere Forschungen im Falle einer monotonen Funktion „gleiche Tiefe" haben, wie die von Kusnjezow. Der letzte Paragraph zählt einige offene Probleme auf, deren Erläuterung (auch wegen des Zusammenhanges mit der Theorie der Relais-Kontakt-Schaltungen) wünschenswert scheint.

§ 2

Es wird vorausgesetzt, daß die Terminologie und die Ergebnisse der vorhergehenden Arbeit [1] dem Leser bekannt sind. Wir werden die Sätze von [1] als Satz 1*, 2*, 3* erwähnen. In den Beweisen wird der Satz 2* oft auch ohne Berufung angewandt werden.

Es wird immer angenommen werden, daß eine Wahrheitsfunktion von jeder ihrer Variablen effektiv abhängt.[5]) Wir bezeichnen die Implikation durch $\rightarrow$, das Zeichen $\Rightarrow$ wird einem anderen Zweck dienen.

Nun führen wir einige allgemeinere Superpositionsbegriffe ein, als der (in [1] grundlegende) Begriff der einfachen wiederholungsfreien Superposition. Betrachten wir eine Wahrheitsfunktion $f[\theta]$ $(\theta=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$. Seien $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots, \theta^{(m)}$ $(m \geqq 1)$ paarweise disjunkte Teilmengen von θ, und werde die Vereinigungsmenge $\theta^{(1)} \cup \theta^{(2)} \cup \ldots \cup \theta^{(m)}$ durch θ' bezeichnet. Im Falle, daß $n+1$ Wahrheitsfunktionen

$$f^*[(\theta-\theta') \cup \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}\}], f^{(1)}[\theta^{(1)}], f^{(2)}[\theta^{(2)}], \ldots, f^{(m)}[\theta^{(m)}]$$

existieren,[6]) derart, daß durch die Substitutionen $x^{(1)}=f^{(1)}, x^{(2)}=f^{(2)}, \ldots, x^{(m)}=f^{(m)}$ eine Funktion entsteht, die als Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (in dieser Reihenfolge aufgefaßt) mit f übereinstimmt, sprechen wir über eine Darstellung von $f[\theta]$ in

---

[4]) D. h. sie hängt von keiner Variablen monoton abnehmend ab, und gestattet keine nichttriviale Superpositionsdarstellung.

[5]) Dies ist äquivalent mit der Aussage: ist x_i eine beliebige Variable von f, so hat f eine Primimplikante, die x_i (unnegiert oder negiert) enthält.

[6]) Die Anordnung der Menge θ auch auf ihre Teilmengen übertragen wird; die Variablen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ kommen in θ nicht vor, und sie treten in $(\theta-\theta') \cup \{x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\}$ — in der Reihenfolge der wachsenden Indizes — als letzte auf.

der Form einer *einstufigen wiederholungsfreien Superposition,* und schreiben wir

$$f = (f^*; f^{(1)} \Rightarrow x^{(1)}, f^{(2)} \Rightarrow x^{(2)}, \ldots, f^{(m)} \Rightarrow x^{(m)}). \tag{2.1}$$

Wir sagen, daß $x^{(i)}$ und jede Variable von $f^{(i)}$ einander entsprechen; eine Variable von f^*, die nicht substituiert wird, entspricht sich selbst.

Zunächst wollen wir die k-stufige wiederholungsfreie Superposition induktiv definieren. Es sei angenommen, daß die Begriffe der einstufigen, zweistufigen, ..., $(k-1)$-stufigen wiederholungsfreien Superpositionen bekannt sind. So sei eine Darstellung der Funktion f in der Form einer einstufigen wiederholungsfreien Superposition gegeben. Wir betrachten einige der inneren Funktionen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(m)}$ in einer wiederholungsfreien Superpositionsdarstellung, wobei

jede dieser Darstellungen entweder einstufig, oder zweistufig, ..., oder $(k-1)$-stufig ist, und

mindestens eine der Darstellungen $(k-1)$-stufig ist.

In diesem Falle sprechen wir über eine *k-stufige wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung* der Funktion f.

Wir bemerken, daß von der Mitte des Paragraphen 3 an diese Superpositionsbegriffe mit der Beschränkung gebraucht werden, daß f^* von jeder der Variablen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ monoton wachsend abhängt.

Ist $f[\theta]$ eine monoton wachsende Funktion von x_i und x_j, und ist $\{x_i, x_j\}$ eine monoton-abtrennbare Teilmenge von θ für f, so heißen x_i und x_j *assoziierte Variablen.* Jede Variable ist mit sich selbst assoziiert genannt.

Betrachten wir die Funktionen, die von mindestens zwei Variablen abhängen und von der Konjunktion und Disjunktion (von zwei oder mehreren Variablen) verschieden sind. Wir führen vier Type dieser Wahrheitsfunktionen ein, so daß jede Wahrheitsfunktion zu genau einem dieser Type gehört. Hat $f[\theta]$ mindestens eine Variable, von deren sie monoton abnehmend abhängt, so gehört $f[\theta]$ zum *ersten Typ.* Ist $f[\theta]$ nicht vom ersten Typ, und hat sie mindestens ein Paar assoziierter Variablen, so gehört sie zum *zweiten Typ.* Die übrigen Wahrheitsfunktionen (d. h. diejenigen, die von jeder Variablen monoton wachsend oder nicht-monoton abhängen, und kein assoziiertes Variablenpaar haben) bilden den dritten und vierten Typ, und zwar eine derartige Funktion $f[\theta]$ gehört zum *dritten Typ* genau dann, wenn sie mindestens eine monoton-abtrennbare Teilmenge hat, die in θ echt enthalten wird und aus zwei oder mehreren Elementen besteht. Es ist klar, welche Funktionen zum *vierten Typ* gehören.

Es sei eine Primimplikante $\mathfrak{A}$ der Funktion $f[\theta]$ gegeben. Sei die Relation $\varrho(\mathfrak{A}, \theta')$ wahr für $\mathfrak{A}$ und $\theta'(\subset\theta)$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{A}_{\theta'}$ nicht die leere Konjunktion ist (d. h. wenn mindestens ein Element von θ' in $\mathfrak{A}$ — unnegiert oder negiert — auftritt).

Sei f eine Wahrheitsfunktion, die von den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abhängt. Bezeichnen wir durch α eine Teilmenge der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$. Definieren wir eine Funktion $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ so, daß die Werte von g durch die Gleichheit

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$$

bestimmt werden, wo $\tilde{x}_j$ im Fall $j \notin \alpha$ x_j, und im Fall $j \in \alpha$ $\bar{x}_j$ bedeutet. Dann sagen wir, den Negationsoperator N_α für f angewandt zu haben. Hat α nur ein Element i, dann schreiben wir statt $\mathsf{N}_{\{i\}}$ auch N_{x_i}.

§ 3

Wir erwähnen zuerst die triviale Tatsache, daß jede einstufige wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung (2. 1) einer Wahrheitsfunktion f folgenderweise sukzessiv aufgebaut werden kann. Erstens betrachten wir selbst f, danach eine einfache Darstellung von f, in deren die innere Funktion eine der Funktionen $f^{(1)}$, $f^{(2)}, \ldots, f^{(m)}$ ist (die äußere Funktion wird durch die innere eindeutig bestimmt). Im nächsten Schritt kommen zwei innere Funktionen vor (die innere Funktion der vorhergehenden Superposition und eine andere, gewählt aus $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(m)}$). Die Fortsetzung des Verfahrens führt in m Schritten zur vorgegebenen Superpositionsdarstellung der Funktion f.

Hilfssatz 1. *Betrachten wir die Wahrheitsfunktion $f[\theta]$; sei θ' eine Teilmenge von θ. Wenn es eine einfache wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung von f gibt, in deren die innere Funktion genau von den Elementen der Menge θ' abhängt, dann gibt es genau zwei derartige Darstellungen von f, und zwar kann die andere Darstellung folgenderweise aus der ersten gebildet werden: wir wenden den Negationsoperator $\mathsf{N}_{x'}$ auf f^* an, und wir ersetzen f' durch $\bar{f}'$.*[7])

Beweis. Es ist klar, daß unser Verfahren eine (von der gegebenen verschiedene) Superpositionsdarstellung von f gibt. Es ist zu beweisen, daß f keine übrige Darstellung erlaubt, in deren die innere Funktion von den Elementen von θ' abhängt. Nämlich sei

$$(f_1^*[(\theta-\theta')\cup\{x'\}]\,;\, f_1'[\theta']\Rightarrow x')$$

eine beliebige Darstellung von f.

Fall 1: Es gibt eine volle Elementarkonjunktion $\mathfrak{A}$ von f', bei deren die Werte von f' und f_1' übereinstimmen. Es ist (aus Symmetriegründen) genügend, den Fall zu untersuchen, daß dieser Wert $\uparrow$ ist. Es kann zuerst gezeigt werden, daß f^* und f_1^* immer gleich sind, wenn x' den Wert $\uparrow$ hat. In der Tat, sei $\mathfrak{B}\,\&\,x'$ eine volle Elementarkonjunktion für f^* (und f_1^*). So soll die Gleichheit

$$f^*(\mathfrak{B}\,\&\,x')=f(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{A})=f_1^*(\mathfrak{B}\,\&\,x')$$

gelten.

Nun können wir beweisen, daß f' und f_1' identisch gleich sind. Da f^* und f_1^* effektiv von x' abhängen, besitzen diese Funktionen vier volle Elementarkonjunktionen von der Form $\mathfrak{D}\,\&\,x'$, $\mathfrak{D}\,\&\,\bar{x}'$, $\mathfrak{E}\,\&\,x'$, $\mathfrak{E}\,\&\,\bar{x}'$, so daß

$$f^*(\mathfrak{D}\,\&\,x')\neq f^*(\mathfrak{D}\,\&\,\bar{x}') \quad \text{und} \quad f_1^*(\mathfrak{E}\,\&\,x')\neq f_1^*(\mathfrak{E}\,\&\,\bar{x}')$$

gelten. Sei $\mathfrak{C}$ eine volle Elementarkonjunktion von f' (und f_1'). Wäre $f'(\mathfrak{C})=\uparrow$ und $f_1'(\mathfrak{C})=\downarrow$, so bekämen wir die Ungleichheit

$$f(\mathfrak{E}\,\&\,\mathfrak{C})=f^*(\mathfrak{E}\,\&\,x')=f_1^*(\mathfrak{E}\,\&\,x')\neq f_1^*(\mathfrak{E}\,\&\,\bar{x}')=f(\mathfrak{E}\,\&\,\mathfrak{C}),$$

die ein Widerspruch ist. Die Gültigkeit der beiden Gleichheiten $f'(\mathfrak{C})=\downarrow$ und

---

[7]) Der Leser kann wahrnehmen, daß die Zeitwörter „substituieren" und „ersetzen" nicht in demselben Sinne verwendet sind. „Substituieren" bezieht sich nämlich auf die Bildung einer Funktion durch Superposition; „ersetzen" bedeutet an dieser Stelle des Textes: $\bar{f}'$ spielt dieselbe Rolle in der neuen Darstellung, wie f' in der ursprünglichen. (Wir werden im § 6 auch über Substitution von Primimplikanten reden.)

$f_1'(\mathfrak{S}) = \uparrow$ führt auf dieselbe Weise zu einem Widerspruch. Die so bewiesene Übereinstimmung von f' und f_1' impliziert auch die identische Gleichheit von f^* und f_1^*.

Fall 2: f_1' ist die Negation von f'. Es ist klar, daß f_1^* aus f^* durch die Anwendung von $\mathsf{N}_{x'}$ entsteht.

Satz 1. *Wir betrachten die Wahrheitsfunktion $f[\theta]$; seien $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(m)}$ paarweise disjunkte Teilmengen von θ. Wenn es eine einstufige wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung von f gibt, in deren die inneren Funktionen $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(m)}$ (der Reihe nach) von den Mengen $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(m)}$ abhängen, dann gibt es genau 2^m derartige Darstellungen von f; und zwar kann jede Darstellung aus der angegebenen folgenderweise eindeutig gebildet werden: wir betrachten eine Teilmenge α der Menge $\{1, 2, \dots, m\}$, wir wenden den Negationsoperator N_α auf f^* an, und wir ersetzen $f^{(i)}$ durch $\bar{f}^{(i)}$ genau in denjenigen Fällen, daß $i \in \alpha$ gilt.*

Beweis. Der Spezialfall $m=1$ ist im Hilfssatz 1 bewiesen worden. Der allgemeine Fall wird daraus durch vollständige Induktion nach m leicht folgen, wenn wir das sukzessive Erbauen der gegebenen Darstellung (s. den Anfang dieses Paragraphen) betrachten. Wir dürfen annehmen, daß die inneren Funktionen so numeriert sind, daß in der ersten Darstellung nur $f^{(1)}[\theta^{(1)}]$, in der zweiten nur $f^{(1)}$ und $f^{(2)}[\theta^{(2)}]$, in der dritten nur $f^{(1)}, f^{(2)}$ und $f^{(3)}[\theta^{(3)}], \dots$ als innere Funktionen auftreten. Sei der Satz für $m=i-1$ gültig angenommen. f erlaubt genau 2^{i-1} Darstellungen, in denen die Variablenmengen der inneren Funktionen genau $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(i-1)}$ sind. Für jede dieser Darstellungen hat die äußere Funktion (nach dem Hilfssatz 1) genau zwei einfache wiederholungsfreie Superpositionsdarstellungen, in denen die innere Funktion von den Elementen von $\theta^{(i)}$ abhängt. Die Substitution der Funktionen $f^{(1)}, \dots, f^{(i-1)}$ führt zu $2 \cdot 2^{i-1} = 2^i$ einstufigen wiederholungsfreien Darstellungen von f, in denen die Variablenmengen der inneren Funktionen $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(i)}$ sind. Also gilt der Satz auch für $m=i$, womit der Beweis durch Induktion vollbracht wurde.

In den folgenden Teilen der Arbeit werden unsere sämtlichen Superpositionsbegriffe durch eine beschränkende Bedingung spezialisiert verwendet werden. Nämlich, es wird über die einstufigen wiederholungsfreien Superpositionen vorausgesetzt, daß die Funktion f^* monoton von jeder der Variablen $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ abhängt; in entsprechendem Sinne werden die mehrstufigen Superpositionen verstanden. Wir bringen diese Beschränkung dadurch zum Ausdruck, daß wir über *monotone* Superpositionen reden.

Eine einfache wiederholungsfreie Superposition heißt *wachsend*, wenn f^* monoton wachsend von x' abhängt.

Satz 2. *Es sei eine Darstellung der Wahrheitsfunktion f in der Form einer einfachen wiederholungsfreien wachsenden Superposition gegeben. Eine Teilmenge θ^+ von $\theta - \theta'$ ist dann und nur dann monoton-abtrennbar für f^*, wenn θ^+ monoton-abtrennbar für f ist. Eine Teilmenge θ^+ von θ' ist dann und nur dann monoton-abtrennbar für f', wenn θ^+ monoton-abtrennbar für f ist.*

Beweis. Der Teil „nur dann" der ersten Behauptung kann leicht eingesehen werden. Umgekehrt, sei $\theta^+ (\subseteq \theta - \theta')$ monoton-abtrennbar für f. Nach Satz 1* sind die Primimplikanten von f^* genau

$$\mathfrak{A}^{(1)}_{\theta-\theta'} \,\&\, x', \dots, \mathfrak{A}^{(k)}_{\theta-\theta'} \,\&\, x', \mathfrak{A}^{(k+1)}, \dots, \mathfrak{A}^{(m)}, \tag{3.1}$$

wobei $\mathfrak{A}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{A}^{(m)}$ sämtliche Primimplikanten von f bedeuten, so numeriert, daß $\mathfrak{A}^{(i)}_{\theta'} (1 \leqq i \leqq m)$ genau in den Fällen $k < i \leqq m$ die leere Konjunktion ist. Dieselbe Primimplikante von f^* kann in (3. 1) auch in mehreren Exemplaren auftreten. Seien $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zwei beliebige Primimplikanten von f^*, so daß keine von $\mathfrak{B}_{\theta^+}$ und $\mathfrak{C}_{\theta^+}$ die leere Konjunktion ist. Sei $\mathfrak{B}$ das j_1-te und $\mathfrak{C}$ das j_2-te Glied in der Aufzählung (3. 1). Die Konjunktionen $\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\theta^+}$ und $\mathfrak{A}^{(j_2)}_{\theta^+}$ sind offenbar nicht leer; dies impliziert (durch die Annahme für θ^+ und den Satz 2*), daß $\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\theta-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{A}^{(j_2)}_{\theta^+}$ eine Primimplikante von f ist. Wir sondern nun zwei Fälle ab, je nachdem

$$(\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\theta-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{A}^{(j_2)}_{\theta^+})_{\theta'} = \mathfrak{A}^{(j_1)}_{\theta'}$$

leer ist oder nicht. Ist es leer, so gilt offenbar die Gleichheit

$$\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\theta-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{A}^{(j_2)}_{\theta^+} = \mathfrak{B}_{((\theta-\theta')\cup\{x'\})-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{C}_{\theta^+}, \tag{3. 2}$$

und im entgegengesetztem Falle stimmt ersichtlich $(\mathfrak{A}^{(j_1)}_{\theta-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{A}^{(j_2)}_{\theta^+})_{\theta-\theta'} \,\&\, x'$ mit dem an der rechten Seite von (3. 2) vorkommenden Ausdruck überein. Dieser Ausdruck ist also eine Primimplikante von f^*, und θ^+ ist monoton-abtrennbar für f^*.

Um die zweite Behauptung in der Richtung „nur dann" zu beweisen, sei die innere Funktion f' in der Form

$$(g_1[(\theta'-\theta^+)\cup\{x''\}]; \quad g_2[\theta^+] \Rightarrow x'')$$

dargestellt. So gestattet f die Darstellung

$$f = ((f^*; g_1 \Rightarrow x'); g_2 \Rightarrow x'').$$

Es folgt aus dem Satze 1*, daß die äußere Funktion der letzten Darstellung monoton von x'' abhängt, wenn sowohl g_1 von x'' wie f^* von x' monoton abhängt. So soll θ^+ auch für f monoton-abtrennbar sein.

Umgekehrt, sei $\theta^+ (\subset \theta')$ für f monoton-abtrennbar. Seien $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ beliebige Primimplikanten von f', für die $\mathfrak{B}_{\theta^+}$ und $\mathfrak{C}_{\theta^+}$ nicht leer sind. Es gibt nach Satz 1* zwei Primimplikanten $\mathfrak{A}^{(1)}$, $\mathfrak{A}^{(2)}$ von f, die $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{(1)}_{\theta'}$ und $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}^{(2)}_{\theta'}$ genügen; $\mathfrak{A}^{(1)}_{\theta-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{A}^{(2)}_{\theta^+}$ ist dann auch eine Primimplikante von f. Wegen des Satzes 1* und der monotonen Abhängigkeit der Funktion f^* von x' ist dann

$$(\mathfrak{A}^{(1)}_{\theta-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{A}^{(2)}_{\theta^+})_{\theta'} = \mathfrak{B}_{\theta'-\theta^+} \,\&\, \mathfrak{C}_{\theta^+}$$

eine Primimplikante von f'.

§ 4

Satz 3.[8]) *Es seien θ' und θ'' monoton-abtrennbare Teilmengen von θ für die Wahrheitsfunktion $f[\theta]$. Wir nehmen an, daß jede der Mengen θ' und θ'' mindestens zwei Elemente enthält, und ihr Durchschnitt aus einer Variablen x_i besteht.*[9]) *Dann gilt entweder*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta'-\{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{A}, \theta''-\{x_i\})$$

[8]) Wir werden später die Sätze 3 und 4 verallgemeinern (Sätze 6, 7).

[9]) Es ist klar, daß die Funktion f monoton von x_i abhängt.

für jede Primimplikante von f, oder erfüllt jede Primimplikante höchstens eine der Relationen

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}).$$

Wir werden den Satz 3 in den Hilfssätzen 2–6 beweisen. Die Hilfssätze 4, 5, 6 geben die Behauptung des Satzes. Es wird in jedem Hilfssatz die Annahme des Satzes erfordert.

Hilfssatz 2. *Gilt*

$$\varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{B}, \{x_i\})$$

für eine Primimplikante $\mathfrak{B}$, so gibt es eine Primimplikante $\mathfrak{C}$, die

$$\varrho(\mathfrak{C}, \theta'' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\})$$

erfüllt.

Beweis. Betrachten wir eine beliebige Primimplikante $\mathfrak{D}$, für die $\varrho(\mathfrak{D}, \theta'' - \{x_i\})$ wahr ist. (Es gibt immer eine Primimplikante von dieser Beschaffenheit.) Dann ist

$$(\mathfrak{D}_{\theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta-\theta''})_{\theta-\theta'} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta'} = \mathfrak{C}$$

eine Primimplikante, die $\varrho(\mathfrak{C}, \theta'' - \{x_i\})$ und $\varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\})$ genügt.

Hilfssatz 3. *Es existiere eine Primimplikante $\mathfrak{B}$, für die*

$$\varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{B}, \{x_i\})$$

gilt. Dann ist

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta') \to \varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\})$$

wahr für jede Primimplikante $\mathfrak{A}$.

Beweis. Angenommen, der Hilfssatz sei falsch, erhält man durch iterierte Anwendung des Satzes 2* in jedem Falle einen Widerspruch zur Tatsache, daß eine Primimplikante keine Teil-Konjunktion einer anderen Primimplikante sein kann.

In der Tat, betrachten wir eine Primimplikante $\mathfrak{A}$, die die Konklusion des Satzes nicht erfüllt (d. h. für den $\varrho(\mathfrak{A}, \theta') = \uparrow$ und $\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) = \downarrow$ gelten).

Fall 1: $\varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}) = \uparrow$. Dann sind

$$\mathfrak{B}_{\theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\theta-\theta'} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{B}_{\theta-\theta''} \,\&\, \mathfrak{A}_{\theta''})_{\theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\theta-\theta'}$$

Primimplikanten; die zweite ist eine echte Teil-Konjunktion der ersten.

Fall 2: $\varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}) = \downarrow$ und $\varrho(\mathfrak{B}, \theta'' - \{x_i\}) = \uparrow$. Dann wird der Widerspruch durch $\mathfrak{B}$ und die Primimplikante

$$(\mathfrak{B}_{\theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\theta-\theta'})_{\theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta-\theta''} = \mathfrak{B}_{\theta-(\theta''-\{x_i\})}$$

geliefert.

Fall 3: $\varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, \theta'' - \{x_i\}) = \downarrow$. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein echter Teil der Primimplikante

$$\mathfrak{A}_{\theta'} \,\&\, (\mathfrak{C}_{\theta''} \,\&\, (\mathfrak{B}_{\theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\theta-\theta'})_{\theta-\theta''})_{\theta-\theta'} = \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C}_{\theta''-\{x_i\}},$$

wobei $\mathfrak{C}$ eine Primimplikante ist, die

$$\varrho(\mathfrak{C}, \theta'' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\})$$

genügt (der Hilfssatz 2 sichert die Existenz einer Primimplikanten von dieser Beschaffenheit).

Hilfssatz 4. *Entweder gilt*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cup \theta'') \rightarrow \varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\})$$

für jede Primimplikante $\mathfrak{A}$, *oder genügt jede Primimplikante höchstens einer der Relationen*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}), \quad \varrho(\mathfrak{A}, (\theta' \cup \theta'') - \{x_i\}).$$

Beweis. Wir nehmen an, der Hilfssatz sei falsch, d. h. daß es zwei Primimplikanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gibt, für die

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cup \theta'') = \varrho(\mathfrak{B}, \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, (\theta' \cup \theta'') - \{x_i\}) = \uparrow$$

und

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) = \downarrow$$

gelten.

Die Gleichheit

$$\varrho(\mathfrak{B}, (\theta' \cup \theta'') - \{x_i\}) = \uparrow$$

kann auch in der Form

$$\varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{B}, \theta'' - \{x_i\}) = \uparrow$$

geschrieben werden. Wir können (aus Symmetriegründen) ohne wesentliche Einschränkung annehmen, daß $\varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\})$ gilt. Nach Hilfssatz 2 wird auch die Gleichheit

$$\varrho(\mathfrak{C}, \theta'' - \{x_i\}) \,\&\, \varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\}) = \uparrow$$

durch eine passende Primimplikante $\mathfrak{C}$ erfüllt.

Andererseits impliziert die Gültigkeit von $\varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cup \theta'')$, daß entweder $\varrho(\mathfrak{A}, \theta')$ oder $\varrho(\mathfrak{A}, \theta'')$ wahr ist. Wir können den Hilfssatz 3 anwenden (eventuell soll in ihm θ' durch θ'' und $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{C}$ ersetzt werden); dieser behauptet, daß $\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\})$ wahr ist. Dieser Widerspruch beweist den Hilfssatz 4.

Hilfssatz 5. *Gilt die erste Alternative des Hilfssatzes 4, so sind*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) \rightarrow \varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\})$$

und

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) \rightarrow \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\})$$

für jede Primimplikante wahr.

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, die erste Implikation zu beweisen. Betrachten wir eine Primimplikante $\mathfrak{B}$, der $\varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\})$ genügt. Wäre $\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) = \uparrow$ und $\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}) = \downarrow$ für irgendwelche Primimplikante $\mathfrak{A}$, so wäre auch

$$\mathfrak{B}_{\theta - \theta'} \,\&\, \mathfrak{A}_{\theta'} = \mathfrak{B}_{\theta - (\theta' - \{x_i\})}$$

eine Primimplikante. Diese ist aber eine echte Teil-Konjunktion von $\mathfrak{B}$ und so kann keine Primimplikante sein. Dieser Widerspruch beweist den Hilfssatz.

Hilfssatz 6. *Gilt die zweite Alternative des Hilfssatzes 4, so genügt jede Primimplikante höchstens einer der Relationen*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}).$$

Beweis. Es seien

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}) \quad \text{und} \quad \varrho(\mathfrak{B}, \{x_i\})$$

wahr für zwei passende Primimplikanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. Dann erfüllt die Primimplikante $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_{\theta - \theta'} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta'}$ beide der Relationen

$$\varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\}) \quad \text{und} \quad \varrho(\mathfrak{C}, \theta'' - \{x_i\}).$$

Dies widerspricht der angenommenen zweiten Alternative des Hilfssatzes 4.

Satz 4.[8]) *Es seien θ' und θ'' monoton-abtrennbare Teilmengen von θ, deren jede mindestens zwei Elemente enthält, und deren Durchschnitt aus einer Variablen x_i besteht. Dann sind auch*

$$\theta' \cup \theta'', \quad \theta' - \{x_i\}, \quad \theta'' - \{x_i\} \quad \text{und} \quad (\theta' \cup \theta'') - \{x_i\}$$

monoton-abtrennbare Teilmengen von θ.

Beweis.

A) Wir zeigen erstens die Behauptung für $\theta' - \{x_i\}$. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Primimplikanten von f, so daß $\mathfrak{A}_{\theta' - \{x_i\}}$ und $\mathfrak{B}_{\theta' - \{x_i\}}$ nicht leer sind. Wir sollen zeigen, daß auch

$$\mathfrak{A}_{\theta' - \{x_i\}} \,\&\, \mathfrak{B}_{(\theta - \theta') \cup \{x_i\}}$$

eine Primimplikante ist. Wir werden zwei Fälle danach absondern, welche der Alternativen des Satzes 3 gilt.

Fall 1. Beide von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ enthalten die Variable x_i. Dann ist

$$\mathfrak{A}_{\theta' - \{x_i\}} \,\&\, \mathfrak{B}_{(\theta - \theta') \cup \{x_i\}} = \mathfrak{A}_{\theta' - \{x_i\}} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta - \theta'} \,\&\, \tilde{x}_i = \mathfrak{A}_{\theta'} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta - \theta'}$$

wahrlich eine Primimplikante. ($\tilde{x}_i$ bedeutet die Variable x_i unnegiert oder negiert danach, ob die Funktion f von x_i monoton wachsend oder monoton abnehmend abhängt.)

Fall 2. $\mathfrak{A}_{\{x_i\}}$ und $\mathfrak{B}_{\{x_i\}}$ sind beide leer. Dann gilt ersichtlich die Gleichheit

$$\mathfrak{A}_{\theta' - \{x_i\}} \,\&\, \mathfrak{B}_{(\theta - \theta') \cup \{x_i\}} = \mathfrak{A}_{\theta'} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta - \theta'}.$$

B) Die Richtigkeit der Behauptung für $\theta'' - \{x_i\}$ kann durch eine der vorhergehenden analoge Gedankenfolge bewiesen werden.

C) Wir wollen beweisen, daß $\theta' \cup \theta''$ monoton-abtrennbar ist. Dafür genügt es zu zeigen, daß auch

$$\mathfrak{A}_{\theta' \cup \theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\theta - (\theta' \cup \theta'')}$$

eine Primimplikante ist, wenn die Primimplikanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cup \theta'') = \varrho(\mathfrak{B}; \theta' \cup \theta'') = \uparrow$$

erfüllen. Ersichtlich ist $\varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cup \theta'')$ äquivalent mit

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}).$$

Wir unterscheiden fünf Fälle.

Fall 1: Es gilt die erste Alternative des Satzes 3. Dann ist

$$\mathfrak{A}_{\theta' \cup \theta''} \mathbin{\&} \mathfrak{B}_{\theta - (\theta' \cup \theta'')} = \mathfrak{A}_{\theta'' - \{x_i\}} \mathbin{\&} (\mathfrak{A}_{\theta'} \mathbin{\&} \mathfrak{B}_{\theta - \theta'})_{(\theta - \theta'') \cup \{x_i\}}$$

eine Primimplikante.

Wir werden in jedem der übrigen vier Fälle die Gültigkeit der zweiten Alternative des Satzes 3 annehmen.

Fall 2:

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\}) = \downarrow.$$

Dann wird die Gleichheit

$$\mathfrak{A}_{\theta' \cup \theta''} \mathbin{\&} \mathfrak{B}_{\theta - (\theta' \cup \theta'')} = \mathfrak{A}_{\theta''} \mathbin{\&} \mathfrak{B}_{\theta - \theta''}$$

erfüllt.

Fall 3:

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, \theta'' - \{x_i\}) = \uparrow.$$

Dann haben wir die Gleichheit

$$\mathfrak{A}_{\theta' \cup \theta''} \mathbin{\&} \mathfrak{B}_{\theta - (\theta' \cup \theta'')} = \mathfrak{A}_{\theta'} \mathbin{\&} (\mathfrak{B}_{\theta - \theta''} \mathbin{\&} \mathfrak{C}_{\theta''})_{\theta - \theta'},$$

wo $\mathfrak{C}$ eine beliebige Primimplikante ist, die $\varrho(\mathfrak{C}, \{x_i\})$ genügt.

Die Fälle 4 und 5 stammen aus den Fällen 2 bzw. 3 durch den Vertausch der Rollen von θ' und θ''.

Offenbar enthalten die Fälle 2–5 alle Möglichkeiten, wenn die zweite Alternative des Satzes 3 gilt.

D) Der letzte Teil dient zum Beweis der Tatsache, daß $(\theta' \cup \theta'') - \{x_i\}$ monoton-abtrennbar ist. Wir wollen zeigen, daß

$$\mathfrak{A}_{(\theta' \cup \theta'') - \{x_i\}} \mathbin{\&} \mathfrak{B}_{(\theta - (\theta' \cup \theta'')) \cup \{x_i\}} \tag{4.1}$$

eine Primimplikante ist, wenn

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \{x_i\}) = \varrho(\mathfrak{B}, \theta' - \{x_i\}) \vee \varrho(\mathfrak{B}, \theta'' - \{x_i\}) = \uparrow$$

gilt. Der Ausdruck (4.1) ist in allen möglichen Fällen gleich mit $\mathfrak{A}_{\theta' \cup \theta''} \mathbin{\&} \mathfrak{B}_{\theta - (\theta' \cup \theta'')}$, der Gedankengang des Teils C) impliziert also unsere Aussage. (Die erwähnte Gleichheit ist durch eine Diskussion leicht verifizierbar; man soll den Satz 3 in Betracht nehmen.)

§ 5

Es sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Wahrheitsfunktion ersten Typs; seien $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ diejenigen Variablen, von denen f monoton abnehmend abhängt ($i_1 < i_2 < \ldots < i_m$). Dann bedeute die *kanonische Darstellung* von f die Superpositionsdarstellung

$$f = (f^*; \bar{x}_{i_1} \Rightarrow x^{(1)}, \bar{x}_{i_2} \Rightarrow x^{(2)}, \ldots, \bar{x}_{i_m} \Rightarrow x^{(m)}).$$

Die Funktion f^* ist durch f eindeutig bestimmt, sie gehört zum zweiten, dritten oder vierten Typ.

Nun betrachten wir eine Wahrheitsfunktion f zweiten Typs. Dann haben wir den

Satz 5. *Die Assoziiertheit ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der Variablen von f. Die sämtlichen Variablen einer Äquivalenzklasse, die wenigstens zwei Elemente enthält, bilden eine monoton-abtrennbare Teilmenge.*

Beweis. Wir wollen zuerst die Transitivität der Assoziiertheit zeigen. Seien x_1 und x_2, ferner x_2 und x_3 assoziiert. So sind $\{x_1, x_2\}$ und $\{x_2, x_3\}$ monoton-abtrennbar. Wegen des Satzes 4 ist auch $\{x_1, x_3\}$ monoton-abtrennbar, also sind auch x_1 und x_3 miteinander assoziiert.

Die zweite Aussage des Satzes wird durch Induktion bewiesen. Es sei angenommen, daß $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ eine Klasse assoziierter Variablen ist, und die Variablen $x_1, \ldots, x_l$ $(1 \leqq l < k)$ eine monoton-abtrennbare Menge bilden. (Die Anordnung der Variablen ist beliebig.) Wegen der Assoziiertheit von x_l und x_{l+1} ist auch $\{x_l, x_{l+1}\}$ monoton-abtrennbar. So ist durch den Satz 4 auch $\{x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}\}$ monoton-abtrennbar.

Der so bewiesene Satz 5 gibt uns die Möglichkeit den Begriff der *kanonischen Darstellung* einer Wahrheitsfunktion f von zweitem Typ einzuführen. Seien $\theta^{(1)}, \ldots$ $\ldots, \theta^{(m)}$ die mindestens zwei Elemente enthaltenden Äquivalenzklassen. Die Darstellung

$$f = (f^*; f^{(1)} \Rightarrow x^{(1)}, \ldots, f^{(m)} \Rightarrow x^{(m)})$$

heißt die *kanonische Darstellung* von f, wenn f^* von jeder der Variablen $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ monoton *wachsend* abhängt, und die Variablenmengen von $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ (der Reihe nach) genau $\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(m)}$ sind. Diese kanonische Darstellung ist bis auf Permutationen von $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ als Variablen von f^* (und bis auf die entsprechende Permutation von $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$) eindeutig bestimmt.

§ 6

Hilfssatz 7. *In der kanonischen Darstellung einer Wahrheitsfunktion von zweitem Typ ist jede innere Funktion entweder eine Konjunktion oder eine Disjunktion (von zwei oder mehreren Variablen).*

Beweis. Sei $f^{(i)}[\theta^{(i)}] = f^{(i)}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})$ eine innere Funktion in der kanonischen Darstellung der Funktion $f[\theta]$ vom zweitem Typ. Nach Satz 1* sind die Primimplikanten von $f^{(i)}$ genau die (verschiedenen) nicht-leeren Elementarkonjunktionen der Form $\mathfrak{A}_{\theta^{(i)}}$, wo $\mathfrak{A}$ die Primimplikanten von f durchläuft, und kommen die Variablen $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ nur unnegiert in den Primimplikanten von $f^{(i)}$ vor. (Die letzte Behauptung folgt daraus, daß f von $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ monoton wachsend abhängt, und dasselbe auch für f^* und $x^{(i)}$ gilt.) Es ist nun genügend die folgende Aussage zu beweisen: enthält eine Primimplikante von f zwei verschiedene Variablen aus $\theta^{(i)}$, so enthält sie (und hiermit jede Primimplikante von f, für die $\mathfrak{A}_{\theta^{(i)}}$ nicht-leer ist) alle Elemente von $\theta^{(i)}$.

In der Tat, enthalte eine Primimplikante $\mathfrak{A}$ von f die Variablen x_{i_p}, x_{i_q}, und sei x_{i_r} eine beliebige weitere Variable aus $\theta^{(i)}$. Da aber sowohl $\{x_{i_p}, x_{i_q}\}$ als auch $\{x_{i_p}, x_{i_r}\}$ monoton-abtrennbare Teilmengen für f sind, nach Satz 3 enthält $\mathfrak{A}$ auch x_{i_r}.

Hilfssatz 7 ermöglicht die folgende Definition. Zwei assoziierte Variablen x_j, x_k der Funktion f (von zweitem Typ) heißen *konjunktiv-assoziiert* (bzw. *disjunktiv-assoziiert*), wenn diejenige Funktion $f^{(i)}[\theta^{(i)}]$ der kanonischen Darstellung von f, für die $x_j \in \theta^{(i)}$, $x_k \in \theta^{(i)}$ gelten, eine Konjunktion (bzw. eine Disjunktion) ist.

Aus den Definitionen und aus dem Satze 1* folgt ersichtlich der

Hilfssatz 8. *Sei die Wahrheitsfunktion f monoton wachsend von x_i und von x_j abhängig. Die Variablen x_i und x_j sind dann und nur dann disjunktiv-assoziiert, wenn jede Primimplikante höchstens eine dieser Variablen enthält und diese Variablen in den Primimplikanten miteinander austauschbar sind. x_i und x_j sind dann und nur dann konjunktiv-assoziiert, wenn in jeder Primimplikanten von f entweder keine oder beide von ihnen enthalten sind.*

Hilfssatz 9. *Sei $f[\theta]$ eine Wahrheitsfunktion von viertem Typ. Ist x_i eine Variable von f, von der f monoton wachsend abhängt, dann gibt es*

a) *eine Primimplikante von f, die x_i enthält und die eine Konjunktion mit mindestens zwei Gliedern ist, und*

b) *eine Primimplikante von f, die x_i nicht enthält.*

Beweis. Ist a) falsch, so ist x_i selbst eine Primimplikante und so kommt x_i in den übrigen Primimplikanten nicht vor. Dies bedeutet, daß $\theta - \{x_i\}$ eine monoton-abtrennbare Teilmenge ist, weil f eine Darstellung in der Form $x_i \vee g[\theta - \{x_i\}]$ erlaubt (g ist die Disjunktion der übrigen Primimplikanten).

Wenn die zweite Aussage nicht gilt, so ist f offenbar in der Form $x_i \& h[\theta - \{x_i\}]$ darstellbar, was die monotone Abtrennbarkeit von $\theta - \{x_i\}$ bedeutet.

Hilfssatz 10. *Seien $x^{(i)}$ und $x^{(j)}$ disjunktiv-assoziierte Variablen der Wahrheitsfunktion f^* von zweiten Typ. Seien diese Variablen durch die Funktionen $f^{(i)}[\theta^{(i)}]$ bzw. $f^{(j)}[\theta^{(j)}]$ substituiert. Es sei zugelassen, daß höchstens eine dieser Variablen nicht substituiert wird. Dann gilt Folgendes für die entstehende Funktion f:*

a) *wenn $f^{(i)}$ und $f^{(j)}$ beide Disjunktionen sind, dann ist jedes Paar von Variablen aus $\theta^{(i)} \cup \theta^{(j)}$ disjunktiv-assoziiert, und*

b) *wenn von $f^{(i)}$ und $f^{(j)}$ mindestens die eine entweder eine Konjunktion oder eine Funktion vierten Typs ist, dann ist kein Paar von Variablen x_{i_k}, x_{j_l} ($x_{i_k} \in \theta^{(i)}$, $x_{j_l} \in \theta^{(j)}$) assoziiert.*[10])

[10]) Es ist vorteilhaft die Konklusion des Satzes in demjenigen Falle, daß die eine der Variablen von $x^{(i)}$ und $x^{(j)}$ — z. B. $x^{(i)}$ — nicht substituiert wird, auch explizit zu formulieren. Sie lautet folgenderweise:

a) wenn $f^{(j)}$ eine Disjunktion ist, so ist $x^{(i)}$ disjunktiv-assoziiert zu jedem Element von $\theta^{(j)}$, und

b) wenn $f^{(j)}$ entweder eine Konjunktion oder eine Funktion vierten Typs ist, so ist $x^{(i)}$ zu keinem Element von $\theta^{(j)}$ assoziiert.

Beweis. a) folgt leicht (durch den Satz 1*) aus dem Hilfssatz 8. Um b) zu zeigen, sei es angenommen, daß z. B. $f^{(i)}$ entweder eine Konjunktion oder eine Funktion von viertem Typ ist. Betrachten wir ein Paar von Variablen der gegebenen Form. Da $x^{(i)}$ und $x^{(j)}$ in keiner Primimplikante von f^* zusammen auftreten, versichert der Satz 1*, daß für jede Primimplikante $\mathfrak{A}$ von f mindestens eine der Konjunktionen $\mathfrak{A}_{\theta^{(i)}}$, $\mathfrak{A}_{\theta^{(j)}}$ leer ist. So sind x_{i_k}, x_{j_l} offenbar nicht konjunktiv-assoziiert. Wir wollen beweisen, daß sie auch nicht disjunktiv-assoziiert sein können. x_{i_k} kommt in einer passenden Primimplikante $\mathfrak{B}$ von $f^{(i)}$ vor, die eine Konjunktion mit mindestens zwei Gliedern ist. Sei $\mathfrak{B} \mathbin{\&} x^{(i)}$ eine $x^{(i)}$ enthaltende Primimplikante von f^*. Dann soll $\mathfrak{C} \mathbin{\&} \mathfrak{B}$ eine Primimplikante von f sein. Wären x_{i_k}, x_{j_l} disjunktiv-assoziiert, so sollte

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \mathbin{\&} \mathfrak{B}_{\theta^{(i)} - \{x_{i_k}\}} \mathbin{\&} x_{j_l}$$

eine Primimplikante von f wegen des Hilfssatzes 8 sein, dies widerspricht aber der Tatsache, daß eine der Konjunktionen $\mathfrak{A}_{\theta^{(i)}}$ und $\mathfrak{A}_{\theta^{(j)}}$ leer sein muß.

Hilfssatz 11. *Seien $x^{(i)}$ und $x^{(j)}$ konjunktiv-assoziierte Variablen der Wahrheitsfunktion f^* von zweitem Typ. Seien diese Variablen durch die Funktionen $f^{(i)}[\theta^{(i)}]$ bzw. $f^{(j)}[\theta^{(j)}]$ substituiert. Es sei zugelassen, daß höchstens eine dieser Variablen nicht substituiert wird. Dann gilt für die entstehende Funktion f Folgendes:*

a) *wenn $f^{(i)}$ und $f^{(j)}$ beide Konjunktionen sind, dann ist jedes Paar von Variablen aus $\theta^{(i)} \cup \theta^{(j)}$ konjunktiv-assoziiert, und*

b) *wenn von $f^{(i)}$ und $f^{(j)}$ mindestens die eine entweder eine Disjunktion oder eine Funktion vierten Typs ist, so ist kein Paar von Variablen x_{i_k}, x_{j_l} ($x_{i_k} \in \theta^{(i)}$, $x_{j_l} \in \theta^{(j)}$) assoziiert.*[11])

Beweis. a) folgt aus Hilfssatz 8. Es sei nun angenommen, daß z. B. $f^{(i)}$ entweder eine Disjunktion oder eine Funktion vierten Typs ist. Da $x^{(i)}$ und $x^{(j)}$ in den Primimplikanten von f^* zusammen auftreten (Hilfssatz 8), so folgt aus dem Satz 1*, daß, für jede Primimplikante $\mathfrak{A}$ von f, $\mathfrak{A}_{\theta^{(i)}}$ und $\mathfrak{A}_{\theta^{(j)}}$ entweder beide leer sind, oder beide existieren. Betrachten wir ein Paar von Variablen der gegebenen Form. Ist z. B. $f^{(i)}$ entweder eine Disjunktion oder eine Funktion vierten Typs, so hat $f^{(i)}$ eine die Variable x_{i_k} nicht enthaltende Primimplikante $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{B}$ eine x_{j_l} enthaltende Primimplikante von $f^{(j)}$, so gibt es eine Primimplikante $\mathfrak{C}$ von f, für die

$$\mathfrak{C}_{\theta^{(i)} \cup \theta^{(j)}} = \mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}$$

gilt (wegen des Satzes 1*), also können x_{i_k} und x_{j_l} nicht konjunktiv-assoziiert sein. Ferner sei $\mathfrak{D}$ eine x_{i_k} enthaltende Primimplikante von $f^{(i)}$; die Existenz einer passenden Primimplikante $\mathfrak{E}$ von f, die

$$\mathfrak{E}_{\theta^{(i)} \cup \theta^{(j)}} = \mathfrak{D} \mathbin{\&} \mathfrak{B}$$

genügt, zeigt, daß x_{i_k} und x_{j_l} auch nicht disjunktiv-assoziiert sein können.

Hilfssatz 12. *Betrachten wir eine einfache wachsende wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung der Funktion f. Ist θ^* eine Teilmenge von θ, die $\theta^* \supset \theta'$*

---

[11]) Wird z. B. $x^{(i)}$ nicht substituiert, so ist die explizite Form der Konklusion dieselbe, wie in der Fußnote [10]) ausgesprochene Aussage, sollen aber „Konjunktion" mit „Disjunktion", „konjunktiv" mit „disjunktiv" vertauscht werden.

und $\theta^* - \theta' \neq \emptyset$ *genügt und für* f *monoton-abtrennbar ist, dann ist* $(\theta^* - \theta') \cup \{x'\}$ *für* f^* *monoton-abtrennbar.*

Beweis. Seien $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$ Primimplikanten von f^*, die $\varrho(\mathfrak{A}, (\theta^* - \theta') \cup \{x'\})$ und $\varrho(\mathfrak{B}^*, (\theta^* - \theta') \cup \{x'\})$ genügen. Wählen wir eine Primimplikante $\mathfrak{C}$ von f' aus, bilden wir die Elementarkonjunktionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}^*$ $\mathfrak{B}^*$ durch die Substitution von $\mathfrak{C}$ für x'. Nach Satz 1* sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Primimplikanten von f, die $\varrho(\mathfrak{A}, \theta^*)$ und $\varrho(\mathfrak{B}, \theta^*)$ genügen. So ist auch $\mathfrak{A}_{\theta^*} \& \mathfrak{B}_{\theta - \theta^*}$ eine Primimplikante von f; dies impliziert (durch den Satz 1*), daß

$$(\mathfrak{A}_{\theta^*} \& \mathfrak{B}_{\theta - \theta^*})_{\theta - \theta'}[\& x']$$

eine Primimplikante von f^* ist (x' soll hier genau dann vorkommen, wenn es in $\mathfrak{A}$ auftritt). Diese Primimplikante ist gleich mit

$$\mathfrak{A}^*_{(\theta^* - \theta') \cup \{x'\}} \& \mathfrak{B}^*_{\bar{\theta} - \theta^*}.$$

§ 7

In diesem Paragraphen wollen wir die Superpositionsdarstellungen der Funktionen von drittem Typ zu untersuchen und die kanonische Darstellung dieser Funktionen zu definieren. Wir beginnen die Betrachtung mit der Verallgemeinerung der Sätze 3 und 4.

Seien θ' und θ'' monoton-abtrennbare Teilmengen für die Wahrheitsfunktion $f[\theta]$, wo $\theta' \cap \theta''$, $\theta' - \theta''$, $\theta'' - \theta'$ all nicht-leer sind. Betrachten wir die einfache wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung

$$f = (f^*;\ f' \Rightarrow x'),$$

wo f' von den Elementen der Variablenmenge $\theta' \cap \theta''$ abhängt. Die Sätze 3 und 4 sind anwendbar für f^*; $(\theta' - \theta'') \cup \{x'\}$ bzw. $(\theta'' - \theta') \cup \{x'\}$ spielen die Rollen von θ' bzw. θ'' (diese sind monoton-abtrennbar wegen des Hilfssatzes 12). Wenn wir nun durch die Substitution von f' für x' die Funktion f bilden, dann führen die Sätze 3, 4 zu den folgenden zwei Sätzen (man soll auch die Sätze 1* und 2 in Betracht nehmen):

Satz 6. *Es seien* θ' *und* θ'' *monoton-abtrennbare Teilmengen für* $f[\theta]$, *so daß* $\theta' \cap \theta''$, $\theta' - \theta''$ *und* $\theta'' - \theta'$ *nicht leer sind. Dann gilt die folgende Alternative:*

a) *entweder wird die Gleichheit*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \theta'') = \varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cap \theta'') = \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \theta')$$

von jeder Primimplikanten von f *genügt, oder*

b) *erfüllt jede Primimplikante höchstens eine der Relationen*

$$\varrho(\mathfrak{A}, \theta' - \theta''), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \theta' \cap \theta''), \quad \varrho(\mathfrak{A}, \theta'' - \theta').$$

Satz 7. *Es seien* θ' *und* θ'' *monoton-abtrennbare Teilmengen wie im Satze 6. Dann sind auch* $\theta' \cup \theta''$, $\theta' - \theta''$, $\theta'' - \theta'$ *und* $(\theta' - \theta'') \cup (\theta'' - \theta')$ *monoton-abtrennbar.*

In den folgenden Teilen des Paragraphen untersuchen wir eine Funktion $f[\theta]$ von drittem Typ. Eine monoton-abtrennbare Teilmenge $\theta^*(\subset\theta)$ heißt eine *kanonische Teilmenge* (für f), wenn

θ^* mindestens zwei Elemente enthält, und

$$x_i\in\theta^{**}\subseteqq\theta^* \quad \text{entweder} \quad \theta^{**}=\{x_i\} \quad \text{oder} \quad \theta^{**}=\theta^*$$

für jedes Paar einer monoton-abtrennbaren Menge θ^{**} und einer Variablen x_i impliziert.

Satz 8. *Die kanonischen Teilmengen von θ (für f) sind paarweise disjunkt.*

Beweis. Betrachten wir die kanonischen Teilmengen θ' und θ''. Gilt $\theta'\subset\theta''$ oder $\theta''\subset\theta'$, so haben wir sofort einen Widerspruch mit der Definition der kanonischen Teilmenge. Wir wollen noch zeigen, daß mindestens eine der Mengen $\theta'\cap\theta''$, $\theta'-\theta''$, $\theta''-\theta'$ leer ist. In der Tat, können wir im Falle, daß sie alle nichtleer sind, die Sätze 3* und 7 anwenden; es folgt aus der Definition der kanonischen Teilmengen, daß jedes von $\theta'\cap\theta''$, $\theta'-\theta''$ und $\theta''-\theta'$ aus einem Element besteht; seien diese Elemente durch x_i, x_j, x_k bezeichnet. So ist $\theta'=\{x_i, x_j\}$ und $\theta''=\{x_i, x_k\}$. Dies bedeutet, daß f ein Paar verschiedener Variablen hat, die zueinander assoziiert sind, dies aber widerspricht der Definition der Wahrheitsfunktionen dritten Typs.

Auf dem Grund des Satzes 8 definieren wir die *kanonische Darstellung* einer Wahrheitsfunktion $f[\theta]$ von drittem Typ als die Superpositionsdarstellung

$$f=(f^*;\, f^{(1)}\Rightarrow x^{(1)}, \dots, f^{(m)}\Rightarrow x^{(m)}),$$

wo die Variablenmengen von $f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ genau die kanonischen Teilmengen für f sind, und f^* monoton *waschend* von $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ abhängt. Diese Darstellung ist eindeutig im demselben Sinne, wie die kanonische Darstellung der Funktionen von zweitem Typ.

§ 8

Offenbar ist eine einstufige wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung der Wahrheitsfunktion f ersten Typs dann und nur dann die kanonische Darstellung von f, wenn f^* zum zweiten, dritten oder vierten Typ gehört, und jede innere Funktion die Negation einer derartigen Variablen ist, von deren f^* monoton wachsend abhängt. Wir wollen in diesem Paragraphen analoge Ergebnisse für die Funktionen von zweitem und drittem Typ erzielen.

Wir definieren zunächst die *allgemein-kanonischen Teilmengen* für die Funktionen zweiten und dritten Typs auf induktive Weise. Eine kanonische Teilmenge einer Funktion von drittem Typ ist auch allgemein-kanonisch. Ist $f[\theta]$ eine Funktion zweiten Typs, werden die Elemente einer Teilmenge θ^* von θ' in der kanonischen Darstellung von f nicht substituiert, und bilden diese Elemente eine allgemein-kanonische Teilmenge für f^*, so ist θ^* auch für f allgemein-kanonisch.

Satz 9. *Die Darstellung*

$$f=(f^*;\, f^{(1)}\Rightarrow x^{(1)}, \dots, f^{(m)}\Rightarrow x^{(m)}) \tag{8.1}$$

ist dann und nur dann die kanonische Darstellung der Wahrheitsfunktion f von zweitem Typ, wenn die Bedingungen α) – δ) erfüllt sind:

α) f^* nicht zum ersten Typ gehört;

β) die Funktionen $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ Konjunktionen oder Disjunktionen (von zwei oder mehreren Variablen) sind;

γ) im Falle, daß (f^* zum zweiten Typ gehört oder eine Disjunktion ist und) gewisse Variablen von f^* eine vollständige Klasse von disjunktiv-assoziierten Variablen bilden, und die Anzahl der Variablen in dieser Klasse durch l bezeichnet ist, so werden mindestens $l-1$ dieser Variablen durch Konjunktion substituiert;

δ) im Falle, daß gewisse Variablen von f^* eine vollständige Klasse von konjunktiv-assoziierten Variablen bilden, und die Anzahl der Variablen in dieser Klasse durch l bezeichnet ist, so werden mindestens $l-1$ dieser Variablen durch Disjunktion substituiert.

Beweis. Betrachten wir die kanonische Darstellung von f. Die Erfüllung von *α)* ist evident, *β)* folgt aus dem Hilfssatz 7. *γ)* kann indirekt bewiesen werden: ist es falsch, so gibt es zwei disjunktiv-assoziierte Variablen von f^*, so daß jede dieser Variablen entweder eine Variable von f ist, oder durch Disjunktion substituiert wird. Betrachten wir nun die entsprechenden Variablen von f. Diese Variablen sind paarweise disjunktiv-assoziiert nach Hilfssatz 10. Darum sollten sie einer einzigen Variablen von f^* entsprechen (laut der Definition der kanonischen Darstellung der Funktionen zweiten Typs), und dieser Widerspruch beweist die Aussage *γ)*. Die Gültigkeit von *δ)* folgt mit einem analogen Schluß (mit der Anwendung des Hilfssatzes 11.)

Umgekehrt, sei es angenommen, daß *α)*, *β)*, *γ)* und *δ)* erfüllt sind. Wir haben zu beweisen, daß f zum zweiten Typ gehört, und die Variablenmengen der Funktionen $f^{(i)}$ genau die nicht aus einem Element bestehenden maximalen Teilmengen von θ sind, die paarweise assoziierte Elemente enthalten. Die erste dieser Aussagen folgt aus *α)* und *β)* unmittelbar, die andere aber folgt aus den Hilfssätzen 10, 11 auf Grund von *γ)* und *δ)*.

Satz 10. *Die Darstellung* (8. 1) *ist dann und nur dann die kanonische Darstellung der Wahrheitsfunktion f von drittem Typ, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

α) f^* nicht zum ersten Typ gehört;

β) jede $f^{(i)}$ zum vierten Typ gehört;

γ) im Falle, daß gewisse Variablen von f^* eine allgemein-kanonische Teilmenge bilden, wird mindestens eine dieser Variablen substituiert;

δ) im Falle, daß gewisse Variablen von f^* eine vollständige Assoziiertheitsklasse bilden, die aus l Elementen besteht, werden mindestens $l-1$ dieser Variablen substituiert.

Beweis. Betrachten wir die kanonische Darstellung von f. Die Erfüllung von *α)* ist evident, *β)* folgt aus dem Satze 2. Sei es angenommen, daß *γ)* nicht gilt. Dies bedeutet, daß eine allgemein-kanonische Teilmenge für f^* existiert, so daß jedes Element dieser Teilmenge ohne Substitution bleibt. Dann ist diese Teilmenge kanonisch für f. Die Annahme, daß *γ)* nicht gilt, führt somit zu einem Widerspruch. *δ)* kann (auch dies auf indirekter Weise) leicht bewiesen werden: wird es nicht genügt, dann hat f zwei Variablen, die zueinander assoziiert sind.

Umgekehrt, seien $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$ erfüllt. Es soll bewiesen werden, daß f zum dritten Typ gehört, und die Variablenmengen der Funktionen $f^{(i)}$ genau die mindestens zwei Elemente enthaltenden minimalen monoton-abtrennbaren Teilmengen für f sind. In der Tat, gehört f nach $\alpha)$ und $\beta)$ nicht zum ersten Typ. Wenn man auch $\delta)$ in Betracht zieht, dann machen die Hilfssätze 10 und 11 klar, daß f kein Paar assoziierter Variablen hat. Die Minimalitäts-Eigenschaft der Variablenmengen der Funktionen $f^{(i)}$ ist evident auf Grund von $\beta)$, $\gamma)$ und Satze 2.

§ 9

Sei $f[\theta]$ eine Wahrheitsfunktion zweiten oder dritten Typs. Wir werden nun die Konjunktiv- und Disjunktiv-Assoziiertheit für die Paare von Teilmengen von θ (induktiv) definieren.

Sind x_i und x_j konjunktiv-assoziierte Variablen der Funktion f, dann sind auch $\{x_i\}$ und $\{x_j\}$ konjunktiv-assoziiert. Betrachten wir die kanonische Darstellung von f; seien die Mengen θ^* und θ^{**} konjunktiv-assoziiert für f^*. Bezeichnet θ^+ (bzw. θ^{++}) die Menge der (sämtlichen) Variablen von f, die den Elementen von θ^* (bzw. θ^{**}) entsprechen, so sind θ^+ und θ^{++} *konjunktiv-assoziierte Teilmengen* für f.

Seien $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots, \theta^{(l)}$ $(l \geqq 2)$ paarweise (disjunkte und) konjunktiv-assoziierte Teilmengen für f. Wir sagen dann, daß die Relation

$$\sigma_k^f(\theta^{(1)}, \theta^{(2)} \cup \ldots \cup \theta^{(l)})$$

gilt.

Der Begriff der *disjunktiv-assoziierten Teilmengen* und die Relation σ_d werden analog definiert.

Satz 11. *Betrachten wir eine einfache wiederholungsfreie Superpositionsdarstellung der Funktion $f[\theta]$, sei f' entweder eine Funktion vierten Typs, oder eine Konjunktion oder eine Disjunktion. Eine Teilmenge θ^*, die $\theta^* - \theta' \neq \emptyset$ und $\theta^* \cap \theta' \neq \emptyset$ genügt, ist dann und nur dann monoton-abtrennbar für f, wenn $(\theta^* - \theta') \cup \{x'\}$ für f^* monoton-abtrennbar ist, und eine der folgenden Aussagen* A, B), C) *erfüllt wird:*

A) $\theta^* \supset \theta'$;

B) $\sigma_k^{f^*}(\{x'\}, \theta^* - \theta')$ *und f' ist eine Konjunktion;*

C) $\sigma_d^{f^*}(\{x'\}, \theta^* - \theta')$ *und f' ist eine Disjunktion.*

Beweis. Es kann leicht gezeigt werden, daß die Abtrennbarkeit von $(\theta^* - \theta') \cup \cup \{x'\}$ notwendig ist. Im Falle $\theta^* \supset \theta'$ wurde diese Tatsache schon im Hilfssatz 12 bewiesen. Sei nun $\theta' - \theta^* \neq \emptyset$ angenommen. Nach Satz 7 ist $\theta^* \cup \theta'$ für f monoton-abtrennbar, also können wir den Hilfssatz 12 anwenden.

Im Beweis der Notwendigkeit der Bedingungen haben wir noch zu zeigen, daß eine der Aussagen A), B), C) gelten muß, wenn θ^* für f monoton-abtrennbar ist. Sei $\theta' - \theta^*$ nicht leer; wir wollen zuerst beweisen, daß f' nicht zum vierten Typ gehören kann. $\theta^* \cap \theta'$ und $\theta' - \theta^*$ sind beide monoton-abtrennbar für f (Satz 7), und so auch für f' (Satz 2). Gehört f' zum vierten Typ, so sollen diese Mengen aus je einem Element x_i, x_j bestehen. Dies impliziert entweder $f' = x_i \& x_j$ oder $f' = x_i \vee x_j$, und damit einen Widerspruch zur letzten Annahme für f'.

Die behauptete Notwendigkeit kann nur in demjenigen Falle falsch sein, wenn es ein Gegenbeispiel von folgendem Charakter existiert: die Funktion $f[\theta]$ ist in der Form

$$f=(f^*;f'[\theta']\Rightarrow x')$$

dargestellt, wo f' eine Konjunktion (bzw. Disjunktion) ist, ferner ist θ^* eine monoton-abtrennbare Teilmenge für f, so daß $\theta^*-\theta'$, $\theta^*\cup\theta'$ und $\theta'-\theta^*$ nicht leer sind, aber $\sigma_k^{f^*}(\{x'\}, \theta^*-\theta')$ (bzw. $\sigma_d^{f^*}(\{x'\}, \theta^*-\theta')$) nicht gilt. Wir dürfen dieses Gegenbeispiel so erwählen, daß die Anzahl der Variablen von f minimal ist. Dieser Auswahl impliziert, daß jede von $\theta^*-\theta'$, $\theta^*\cup\theta'$ und $\theta'-\theta^*$ aus einem Elemente besteht. (Im entgegengesetztem Falle führte die einstufige Darstellung von f, in deren die Variablenmengen der inneren Funktionen genau diese drei Mengen sind, zu einem Beispiel, in dem die dargestellte Funktion von wenigeren Variablen abhängt.) Seien diese Elemente (der Reihe nach) x_i, x_j, x_k. Wir können den Satz 3 für θ^* und θ' anwenden; er behauptet, daß x_i, x_j und x_k paarweise konjunktiv- (bzw. disjunktiv)-assoziiert sind.

Umgekehrt, sei $(\theta^*-\theta')\cup\{x'\}$ monoton-abtrennbar für f^*; seien $f^{**}[(\theta-(\theta^*\cup\theta'))\cup\{x''\}]$ und $f''[(\theta^*-\theta')\cup\{x'\}]$ derartige Funktionen, daß

$$f^*=(f^{**};\ f''\Rightarrow x'')$$

gilt. Dann gestattet

$$f=((f^{**};\ f''\Rightarrow x'');\ f'\Rightarrow x')$$

auch in der Form

$$(f^{**};\ (f'';\ f'\Rightarrow x')\Rightarrow x'')=(f^{**};\ g[\theta^*\cup\theta']\Rightarrow x'')$$

eine Darstellung. Gilt A), so hängt g genau von den Elementen der Menge θ^* ab.

Sei nun B) als gültig, A) als ungültig angenommen. Es ist hinreichend die Monoton-Abtrennbarkeit von θ^* für $g=(f'';f'\Rightarrow x')$ zu zeigen. Weil $\sigma_k^{f^*}(\{x'\}, \theta^*-\theta')$ wahr ist, gilt

$$\varrho(\mathfrak{A}, \{x'\})=\varrho(\mathfrak{A}, \theta^*-\theta')$$

für jede Primimplikante von f^* (Satz 1*). So soll jede Primimplikante von f'' die Variable x', und jede Primimplikante von g die sämtlichen Elemente von θ' (unnegiert) enthalten. Dies bedeutet, daß $\mathfrak{A}_{\theta^*}\,\&\,\mathfrak{B}_{\theta'-\theta^*}=\mathfrak{A}$ für jedes Paar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von Primimplikanten der Funktion g gilt.

Ist C) gültig (A) aber nicht), so beginnt der Gedankengang ähnlich. $\sigma_d^{f^*}(\{x'\}, \theta^*-\theta')$ impliziert, daß x' eine Primimplikante von f'', ein jedes Element von θ' eine Primimplikante von g ist, also kann g ersichtlich in der Form $h_1[\theta^*]\vee h_2[\theta'-\theta^*]$ dargestellt werden.

§ 10

Der letzte Satz der Arbeit besagt die Umkehrung einer evidenten Tatsache.

Satz 12. *Sei eine Darstellung der Wahrheitsfunktion $f[\theta]$ in der Form einer einfachen wiederholungsfreien (nicht notwendig monotonen) Superposition gegeben. Hängt f von einer in θ' enthaltenen Variablen x_i monoton ab, so ist sowohl f^* von x' wie f' von x_i monoton abhängig.*

Beweis. Sei es angenommen, daß der Satz nicht erfüllt wird.

Fall 1: f' ist eine nicht-monotone Funktion von x_i. Betrachten wir eine Primimplikante von f^*, der x' enthält. Auf Grund der Symmetrie können wir voraussetzen, daß er die Form $\mathfrak{C} \& x'$ hat. Wegen der Annahme des Falles gibt es zwei Primimplikanten von f', die die Form $\mathfrak{A} \& x_i$ bzw. $\mathfrak{B} \& \bar{x}_i$ haben. Nach Satz 1* sind sowohl $\mathfrak{C} \& \mathfrak{A} \& x_i$ als auch $\mathfrak{C} \& \mathfrak{B} \& \bar{x}_i$ Primimplikanten von f; f kann also keine monotone Funktion von x_i sein.

Fall 2: f' ist eine monotone Funktion von x_i, und f^* eine nicht-monotone Funktion von x'. Die erste dieser Bedingungen ist damit äquivalent, daß auch $\bar{f}'$ monoton von x_i abhängt, und zwar eine von f' und $\bar{f}'$ hängt von x_i monoton wachsend, die andere monoton abnehmend ab. f^* hat zwei Primimplikanten in der Form $\mathfrak{C} \& x'$, $\mathfrak{B} \& \bar{x}'$. f' (bzw. $\bar{f}'$) hat eine Primimplikante in der Form $\mathfrak{C} \& \tilde{x}_i$ (bzw. $\mathfrak{D} \& \bar{\tilde{x}}_i$). ($\tilde{x}_i$ bedeutet die Variable x_i entweder unnegiert oder negiert). Durch den Satz 1* sind dann $\mathfrak{A} \& \mathfrak{C} \& \tilde{x}_i$ und $\mathfrak{B} \& \mathfrak{D} \& \bar{\tilde{x}}_i$ Primimplikanten von f.

Folgerung. *Hängt die Wahrheitsfunktion $f[\theta]$ von jeder ihrer Variablen monoton ab, so ist eine Teilmenge von θ dann und nur dann abtrennbar, wenn sie monoton-abtrennbar (für f) ist.*

§ 11

Die kanonische Darstellung einer gegebenen Wahrheitsfunktion von erstem Typ kann leicht konstruiert werden. Auch die Konstruktion der kanonischen Darstellung einer Funktion zweiten Typs macht keine Schwierigkeiten, denn die matrixhafte Veranschaulichung des Enthaltenseins der Variablen in den Primimplikanten gibt eine gut behandelbare Methode um die Assoziiertheitsklassen zu bestimmen (Hilfssatz 8). Im Gegensatz dazu, erfordert die Konstruktion der kanonischen Darstellung einer Funktion von drittem Typ die Bestimmung der engsten nicht-trivialen monoton-abtrennbaren Teilmengen, die eine nicht leicht lösbare Aufgabe zu sein scheint.

Problem 1. Sei ein möglichst konstruktives Verfahren für die Bestimmung der kanonischen Teilmengen von θ für eine zum dritten Typ gehörende Wahrheitsfunktion $f[\theta]$ angegeben.

Es wird z. B. in [3] definiert (S. 230—231), was unter der wiederholungsfreien Realisation einer (monotonen) Wahrheitsfunktion durch einen zweipoligen Graphen verstanden wird.[12]) Zu dieser Zeit fehlt eine genügend explizite kennzeichnende Eigenschaft dafür, daß eine Wahrheitsfunktion eine derartige Realisation gestattet. Es folgt aus dem Satze von Kusnjezow ([2], S. 197), daß eine Funktion genau dann (derartig) realisierbar ist, wenn alle Funktionen realisierbar sind, die in ihrer kanonischen Darstellung auftreten. Das allgemeine Problem der Realisation wurde damit auf das Realisationsproblem der Funktionen vierten Typs reduziert.

Problem 2. Sei eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß eine Wahrheitsfunktion von viertem Typ, die von jeder ihrer Variablen mono-

---

[12]) Auch der ebenda definierte Begriff der Realisation mit Wiederholung wird im Problem 4 eine Rolle haben.

ton wachsend abhängt, durch einen zweipoligen Graphen ohne Wiederholung realisiert werden kann[13] [14].

In den Untersuchungen dieser Arbeit wurde der (von KUSNJEZOW benutzte) allgemeine Superpositionsbegriff durch eine Monotonitätsbedingung eingeschränkt. Die weitergehende Einschränkung, daß die äußeren Funktionen wiederholungsfrei realisierbar sein müssen, führt zum

Problem 3. Kann ein Analogon der in der vorliegenden Arbeit dargestellten Theorie erbaut werden, wenn wir von jeder äußeren Funktion der Superpositionen erfordern, daß sie von ihren Variablen monoton wachsend abhängt, und durch einen zweipoligen Graphen ohne Wiederholung realisierbar ist?

Wie üblich, nennen wir eine (im allgemeinen nicht wiederholungsfreie) Realisation der Wahrheitsfunktion f durch den l Kanten enthaltenden Graphen *optimal*, wenn jeder Graph, der f realisiert, mindestens l Kanten hat. Wenn die Antwort auf das Problem 3 bejahend ist, tritt auf auch das

Problem 4. Betrachten wir die kanonische Darstellung einer Wahrheitsfunktion f laut der analogen Theorie, auf die wir im Problem 3 verwiesen haben. Es sei $\mathfrak{G}^*$ ein zweipoliger Graph, der die äußere Funktion der kanonischen Darstellung von f ohne Wiederholung realisiert. Seien die inneren Funktionen $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ derselben Darstellung durch die Graphen $\mathfrak{G}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{G}^{(m)}$ (der Reihe nach) optimal realisiert. Substituieren wir jeden Graphen $\mathfrak{G}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ für die der Variablen $x^{(i)}$ entsprechende Kante von $\mathfrak{G}^*$, so ergibt sich damit offenbar ein Graph, der f realisiert. Das Problem besteht darin, die Funktionen zu kennzeichnen, bei denen dieses Verfahren zu einer optimalen Realisation führt.

Wir bemerken zum Schluß, daß das in der Fußnote 1 von [1] erwähnte Problem schon in der Arbeit [2] von KUSNJEZOW gelöst wurde (in der Folgerung des Hilfssatzes 2.5, S. 208).

Literaturverzeichnis

[1] A. ÁDÁM, Zur Theorie der Wahrheitsfunktionen, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 47—52.

[2] А. В. Кузнецов, О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики, Труды Мат. Инст. им. Стеклова, **51** (1958), 186—225.

[3] Б. А. Трахтенброт, К теории бесповторных контактных схем, Труды Мат. Инст. им. Стеклова, **51** (1958), 226—269.

(Eingegangen am 5. Oktober 1960)

[13] Es folgt aus dem erwähnten Satze von KUSNJEZOW, daß der realisierende Graph notwendig irreduzibel ist (im Sinne gegeben am Ende der Seite 232 von [3]).

[14] L. LÖFGREN beschäftigt sich in mehreren neueren Artikeln mit diesem und naheliegenden Problemen. *(Nachträgliche Bemerkung am 14. Juni 1961.)*

О СПЕКТРЕ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ, АНАЛИТИЧЕСКИ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА, В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Д. Ф. ХАРАЗОВ (Тбилиси, СССР)

1. Пусть X — отделимое линейное топологическое пространство над телом C комплексных чисел [1]; Λ — некоторая область плоскости комплексного переменного λ.

Рассмотрим семейство линейных (аддитивных, однородных и непрерывных) операторов $\{T_\lambda\}$, отображающих X в себя, заданных для всех $\lambda \in \Lambda$. Говорят, что оператор T_λ аналитически зависит от λ в области Λ, если для любых $\lambda_0 \in \Lambda$, $x \in X$, существует предел

(1)
$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(T_\lambda - T_{\lambda_0})x}{\lambda - \lambda_0} = T'_{\lambda_0} x,$$

где сходимость понимается в смысле топологии пространства X.

Оператор T_λ называется вполне непрерывным в X, если существует такая окрестность V_λ нуля пространства X [1]), что $T_\lambda(V_\lambda)$ — множество относительно компактное в X [2].

Рассмотрим уравнение

(2)
$$(I - T_\lambda)x = y, \quad x \in X, \quad y \in X,$$

где I — оператор тождественного преобразования в X, а T_λ — линейный оператор, аналитический в области Λ и вполне непрерывный в X при любом $\lambda \in \Lambda$.

В случае, когда X — пространство Банаха, уравнение (2) для полинома T_λ исследовали F. V. Atkinson [3], B. Sz.-Nagy [4], и P. H. Müller [5], а для аналитического в области Λ оператора T_λ, автор [6]. В общем случае отделимого линейного топологического пространства X, уравнение (2) рассмотрел M. Audin [7], допустивший в своих рассуждениях ряд погрешностей, которые обнаружил L. Schwartz (см. „Erratum" к работе [7]), указавший

1) В дальнейшем под словом окрестность мы всегда будем понимать окрестность нуля пространства X, если противное не оговаривается особо.

на возможность устранения этих погрешностей, но за счёт усиления налагаемых на T_λ требований.

В настоящей работе мы даём простой метод исследования спектра уравнения (2), для случая отделимого линейного топологического пространства X, являющийся непосредственным обобщением метода, использованного в работе [6] для пространства Банаха.

2. Мы будем считать в дальнейшем выполненным следующее условие (T): существует такая окрестность V_0, на которой предел (1) достигается равномерно (относительно $x \in V_0$) [2]).

Из существования предела (1) непосредственно следует, что для любых $\lambda_0 \in \Lambda$ и $x \in X$,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} (T_\lambda - T_{\lambda_0}) x = 0, \tag{3}$$

в смысле топологии пространства X.

Лемма 1. Если условие (T) выполнено, то для любой последовательности точек $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in \Lambda$, сходящейся к λ_0, существует такая окрестность $V_0' \subset V_0$, на которой

$$\lim_{n \to \infty} (T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0}) x = 0$$

достигается равномерно (относительно $x \in V_0'$).

Действительно, нетрудно видеть, что в силу условия (T) и полной непрерывности операторов $(\lambda_n - \lambda_0)^{-1} (T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0})$ при любом n, существует такая окрестность $V_0' \subset V_0$, на которой последовательность $\left\{ \dfrac{(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0}) x}{\lambda_n - \lambda_0} \right\}$ ограничена[3]) равномерно (относительно $x \in V_0'$). Следовательно, для любой окрестности W_0 найдётся такое число $\mu_0 > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$,

$$(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0}) V_0' \subset (\lambda_n - \lambda_0) \mu_0 W_0.$$

Так как, не ограничивая общности, мы можем считать w_0 уравновешенной окрестностью [1], то последнее включение показывает, что мы можем подобрать по W_0 такое число N, что для $n > N$ будет $|\lambda_n - \lambda_0| \mu_0 < 1$ и тогда, для $n > N$

$$(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0}) V_0' \subset W_0,$$

что завершает доказательство леммы 1.

Из леммы 1 вытекает справедливость следующего предложения.

---

[2]) Отметим, что в случае пространства Банаха предел (1) достигается равномерно на любой сфере $\|x\| \leqq r$ пространства X [8].

[3]) Множество элементов пространства X называется ограниченным, если оно поглощается любой окрестностью нуля [1].

Лемма 2. Если условие (T) выполнено, то для любой последовательности точек $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in \Lambda$, сходящейся к λ_0, существует такая окрестность $V_0'' \subset V_0'$, что множество $\{(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0})V_0''\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ограничено и последовательность $\{(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0})x\}$ сходится к нулю равномерно относительно $x \in V_0''$.

Действительно, в силу леммы 1 и полной непрерывности операторов $(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0})$ при любом n, легко убедиться в существовании такой окрестности $V_0'' \subset V_0'$, на которой последовательность $\{(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0})x\}$ ограничена равномерно относительно $x \in V_0''$.

Линейный оператор, отображающий X на себя взаимно однозначно, будем называть обратимым.

Лемма 3. Если оператор $(I - T_{\lambda_0})$ обратим, то найдётся такая окрестность K_0 точки λ_0, что для любого $\lambda \in K_0$ оператор $(I - T_\lambda)$ обратим.

Допустим противное. Тогда, в силу альтернативы Фредгольма[4]), в любой окрестности точки λ_0 найдётся такое значение $\lambda = \lambda_n$, что уравнение $(I - T_{\lambda_n})x = 0$ имеет нетривиальное решение. Рассмотрим последовательность точек $\{\lambda_n\}$, сходящуюся к λ_0 и нетривиальные решения x_n уравнений

$$(I - T_{\lambda_n})x_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Существуют такие элементы $z_n = v_n x_n$ $(v_n > 0)$, что $z_n \in V_0''$ и $z_n \notin \frac{1}{4} V_0''$.

Действительно, так как любой элемент x_n поглощается любой окрестностью нуля пространства X [1], то найдутся такие числа $\varkappa > 0$, что $x_n \in \varkappa V_0''$. Пусть χ_n нижняя грань таких $\varkappa$; мы утверждаем, что $\chi_n > 0$. В самом деле, допустив противное, что $x_n \in \varepsilon V_0''$ для любого сколь угодно малого положительного числа ε, мы найдём, что $\frac{1}{\varepsilon} x_n \in V_0''$ при любом $\varepsilon > 0$. Последнее противоречит ограниченности множества $\{(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0})V_0''\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (см. лемму 2). Полагая теперь $\frac{1}{\chi_n} > v_n > \frac{1}{4\chi_n}$ найдём z_n, удовлетворяющее указанным условиям. Кроме того, $(I - T_{\lambda_n})z_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В силу леммы 2, последовательность $\{(I - T_{\lambda_n})x - (I - T_{\lambda_0})x\}$ сходится к нулю равномерно относительно $x \in V_0''$. Следовательно, для любой окрестности W_0 найдётся число $N > 0$ такое, что для всех $n > N$

$$(I - T_{\lambda_n})x - (I - T_{\lambda_0})x \in W_0, \quad x \in V_0''.$$

[4]) Справедливость альтернативы Фредгольма для отделимых линейных топологических пространств доказал J. Williamson [9].

Отсюда, полагая $x=z_n$ найдём, что $\lim\limits_{n\to\infty}(I-T_{\lambda_0})z_n=0$ и $y_n=(I-T_{\lambda_0})z_n\to 0$. В силу непрерывности обратного оператора $(I-T_{\lambda_0})^{-1}$ [9], имеем $z_n=(I-T_{\lambda_0})^{-1}y_n\to 0$, что противоречит условию $z_n\bar{\in}\frac{1}{4}V_0''$ и доказывает лемму 3.

Лемма 4. Найдётся такая окрестность $K_0'\subset K_0$ точки λ_0, внутри которой оператор $(I-T_\lambda)^{-1}$ аналитически зависит от λ и

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{[(I-T_\lambda)^{-1}-(I-T_{\lambda_0})^{-1}]\,x}{\lambda-\lambda_0}=(I-T_{\lambda_0})^{-1}T'_{\lambda_0}(I-T_{\lambda_0})^{-1}x,$$

для любого $x\in X$.

Пусть W_0—произвольная окрестность, тогда для $\lambda\in K_0$ множество $(I-T_\lambda)w_0$ также будет некоторой окрестностью, как прообраз открытого множества W_0 при непрерывном преобразовании $(I-T_\lambda)^{-1}$. Тогда существуют [1] уравновешенные окрестности V_0 и W_0' такие, что $V_0+V_0\subset W_0'\subset\subset(I-T_\lambda)W_0$. В силу (1) и (3) для V_0 и $x\in X$ можно подобрать число $\varrho>0$ так, что для всех λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda-\lambda_0|<\varrho$, будем иметь

$$\{(\lambda-\lambda_0)^{-1}[(I-T_{\lambda_0})-(I-T_\lambda)]-T'_{\lambda_0}\}(I-T_{\lambda_0})^{-1}x\in V_0,$$
$$[(I-T_{\lambda_0})-(I-T_\lambda)](I-T_{\lambda_0})^{-1}T'_{\lambda_0}(I-T_{\lambda_0})^{-1}x\in V_0.$$

Отсюда

$$(\lambda-\lambda_0)^{-1}[(I-T_{\lambda_0})-(I-T_\lambda)](I-T_{\lambda_0})^{-1}x-(I-T_\lambda)(I-T_{\lambda_0})^{-1}T'_{\lambda_0}(I-T_{\lambda_0})^{-1}x\in$$
$$\in V_0+V_0\subset(I-T_\lambda)W_0.$$

Следовательно, для любой окрестности W_0 и любого $x\in X$ можно подобрать $\varrho>0$ так, что для всех $\lambda\in K_0$, $|\lambda-\lambda_0|<\varrho$,

$$(\lambda-\lambda_0)^{-1}[(I-T_\lambda)^{-1}-(I-T_{\lambda_0})^{-1}]x-(I-T_{\lambda_0})^{-1}T'_{\lambda_0}(I-T_{\lambda_0})^{-1}x\in W_0,$$

что и доказывает лемму 4.

3. Теорема 1. Если T_λ при каждом $\lambda\in\Lambda$ линейный вполне непрерывный оператор, отображающий X в себя, аналитически зависящий от λ в области Λ и удовлетворяющий условию (T), то уравнение

$$(2_0)\qquad (I-T_\lambda)x=0$$

имеет одинаковое число $\alpha\geqq 0$ линейно-независимых решений при любом $\lambda\in\Lambda$, за исключением, быть может, некоторого множества точек $Q\subset\Lambda$, не имеющего предельной точки внутри Λ, на котором уравнение (2_0) имеет больше чем α линейно-независимых решений. Если $\alpha=0$, то оператор $(I-T_\lambda)$ обратим для всех $\lambda\in\Lambda-Q$.

Пусть $\lambda_0\in\Lambda$. Уравнение (2) перепишем в виде

$$[I-T_{\lambda_0}-(T_\lambda-T_{\lambda_0})]x=y. \tag{4}$$

На основании теории F. RIESZ'a линейных уравнений с вполне непрерывными операторами, обобщённой на случай отделимых линейных топологических пространств J. WILLIAMSON-ом [9], оператор T_{λ_0} допускает представление

$$T_{\lambda_0}x=Ux+\sum_{k=1}^{n}f_k(x)x_k, \tag{5}$$

где $(I-U)$ — гомеоморфизм X на себя, x_k $(k=1,\ldots,n)$ — некоторая система линейно-независимых элементов пространства X, а f_k $(k=1,\ldots,n)$ — линейные непрерывные функционалы на X. При помощи (5), уравнение (4) запишем в виде

$$B_\lambda x=[I-U-(T_\lambda-T_{\lambda_0})]x=y+\sum_{k=1}^{n}f_k(x)x_k. \tag{6}$$

Полагая $A_\lambda x=T_\lambda x-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)x_k$ получим, что

$$B_\lambda x=(I-A_\lambda)x.$$

Но оператор A_λ, как сумма вполне непрерывного и конечномерного операторов, также вполне непрерывен в X при любом $\lambda\in\Lambda$. Кроме того, в силу условий, наложенных на T_λ, оператор A_λ аналитический в Λ и удовлетворяет условию (T). Но, $A_{\lambda_0}=U$ и следовательно оператор $(I-A_{\lambda_0})$ обратим. В силу леммы 3, существует окрестность K_0 точки λ_0 такая, что для всякого $\lambda\in K_0$, оператор $B_\lambda=(I-A_\lambda)$ обратим и, в силу леммы 4, оператор B_λ^{-1} аналитический внутри окрестности $K_0'\subset K_0$ точки λ_0.

Рассматривая теперь уравнение (2) или, что всё равно, уравнение (6), для $\lambda\in K_0'$ и действуя на обе части (6) оператором B_λ^{-1} получим

$$x=B_\lambda^{-1}y+\sum_{k=1}^{n}f_k(x)B_\lambda^{-1}x_k.$$

Полагая $a_k=f_k(x)$ $(k=1,\ldots,n)$ и пользуясь линейной независимостью элементов $B_\lambda^{-1}x_k$, легко убедимся в том, что если x — решение уравнения (2), то числа a_k $(k=1,\ldots,n)$ будут решением следующей системы уравнений:

$$a_k-\sum_{i=1}^{n}f_k(B_\lambda^{-1}x_i)a_i=f_k(B_\lambda^{-1}y) \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{7}$$

и наоборот, если a_k $(k=1,\ldots,n)$ — решение системы (7), то

$$x=B_\lambda^{-1}y+\sum_{k=1}^{n}a_kB_\lambda^{-1}x_k$$

будет решением уравнения (2) (для любого $\lambda\in K_0'$).

Рассмотрим определитель системы (7)

$$D_0(\lambda)=|\delta_{ik}-f_k(B_\lambda^{-1}x_i)|_{i,k=1,\ldots,n}.$$

$D_0(\lambda)$ — функция голоморфная в K_0', ибо, как легко видеть, все функции $f_k(B_\lambda^{-1}x_i)$ голоморфны в окрестности K_0', в которой B_λ^{-1} — аналитический оператор.

Пусть $\alpha\geqq 0$ — наименьшее число линейно-независимых решений, которым обладает уравнение (2_0) при λ, пробегающем область Λ. Пусть в некоторой точке $\lambda_1\in\Lambda$, уравнение (2_0) имеет $m>\alpha$ линейно независимых решений. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что существует такое $\varrho>0$, что для всех $\lambda\neq\lambda_1$, $|\lambda-\lambda_1|<\varrho$, число линейно-независимых решений уравнения (2_0) равно α. Рассмотрим точку $\lambda_0\in\Lambda$, для которой уравнение (2_0) имеет α линейно-независимых решений. Соединим точки λ_1 и λ_0 кривой $\gamma\subset\Lambda$ и построим для рассматриваемой точки λ_0 её окрестность K_0', в которой уравнение (2) эквивалентно, в указанном выше смысле, системе (7). Так как уравнение (2_0) при $\lambda=\lambda_0$ имеет α линейно незасимых решений, то найдётся некоторый минор порядка $n-\alpha$ определителя $D_0(\lambda)$, отличный от нуля в точке $\lambda=\lambda_0$ (поэтому n в представлении (5) для рассматриваемой точки λ_0 необходимо больше α). Обозначим этот минор через $D_{n-\alpha}(\lambda)$. Из аналитичности $D_{n-\alpha}(\lambda)$ в K_0' и того, что $D_{n-\alpha}(\lambda_0)\neq 0$ следует, что $D_{n-\alpha}(\lambda)$ отличен от нуля всюду в K_0' за исключением, быть может, некоторого множества точек, не имеющего предельной точки внутри K_0'. Покрывая все точки кривой γ окрестностями, внутри которых уравнение (2) будет эквивалентно соответствующей системе (7) и выбирая из этого покрытия конечное покрытие видим, что во всех точках окрестности K_1', соответствующей точке λ_1, за исключением, быть может, некоторого изолированного множества точек, уравнение (2_0) имеет α линейно-независимых решений, что и завершает доказательство теоремы 1.

Из проведённых при доказательстве теоремы 1 рассуждений следует справедливость следующего предложения.

Теорема 2. *Если оператор $(I-T_\lambda)$ обратим хотя бы в одной точке $\lambda\in\Lambda$, то решение уравнения (2) — мероморфная функция параметра λ в области Λ.*

4. Рассмотрим теперь случай, когда T_λ — полином относительно λ вида

$$T_\lambda=\sum_{k=0}^{m}\lambda^kT_k, \tag{8}$$

где T_k ($k=0, 1, \ldots, m$) — линейные вполне непрерывные операторы, отображающие X в себя. Нетрудно видеть, что если оператор T_k переводит окрестность $V_0^{(k)}$ в относительно компактное в X множество $T_k(V_0^{(k)})$ ($k=0, 1, \ldots, m$), то при любом λ, оператор T_λ переводит окрестность $V_0=\bigcap\limits_{k=0}^{m} V_0^{(k)}$ в относительно компактное множество $T_\lambda(V_0)$. Кроме того, нетрудно видеть, что для любого λ_0 и $x \in X$,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(T_\lambda - T_{\lambda_0})x}{\lambda-\lambda_0} = T_1 x + 2\lambda_0 T_2 x + \cdots + m\lambda_0^{m-1} T_m x,$$

причём этот предел достигается равномерно на окрестности $V_0=\bigcap\limits_{k=0}^{m} V_0^{(k)}$. Следовательно, полином T_λ удовлетворяет всем нашим требованиям и имеет место

Теорема 3. Если T_λ — полином вида (8), то уравнение $\left(I-\sum\limits_{k=0}^{m} \lambda^k T_k\right)x=0$ имеет одинаковое число $\alpha \geqq 0$ линейно-независимых решений при любом λ на плоскости комплексной переменной, за исключением, быть может, некоторого множества точек Q, которое может сгущаться лишь в бесконечности, на котором это уравнение имеет больше чем α линейно-независимых решений. Если $(I-T_0)$ — гомеоморфизм X на себя, то $\alpha=0$.

5. Пусть теперь $M \subset \Lambda$ — некоторое множество точек, не имеющее предельной точки внутри Λ. Следуя рассуждениям, проведённым в работе [6], можно доказать, что справедлива

Теорема 4. Если оператор T_λ в области $\Lambda - M$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а в окрестности любой точки $\mu \in M$ имеет вид

$$T_\lambda x = \frac{1}{(\lambda-\mu)^n} \sum_{i=1}^{\sigma_n} f_i^{(n)}(x)\,\omega_i^{(n)} + \cdots + \frac{1}{\lambda-\mu} \sum_{i=1}^{\sigma_1} f_i^{(1)}(x)\,\omega_i^{(1)} + H_\lambda x,$$

где H_λ — линейный аналитический оператор в рассматриваемой окрестности точки $\lambda=\mu$, удовлетворяющий условию вида (T) для точки $\lambda_0=\mu$ и вполне непрерывный в X при $\lambda=\mu$, $f_i^{(k)}$ ($k=1, \ldots, n$; $i=1, \ldots, \sigma_k$) — линейные непрерывные функционалы на X, $\omega_i^{(k)}$ ($i=1, \ldots, \sigma_k$) — система линейно-независимых элементов пространства X ($k=1, \ldots, n$), то уравнение $(I-T_\lambda)x=0$ имеет одинаковое число $\alpha \geqq 0$ линейно-независимых решений при любом $\lambda \in \Lambda - M$, за исключением, быть может, некоторого множества точек $Q \subset \Lambda - M$, не имеющего предельной точки внутри Λ, на котором это уравнение имеет больше чем α линейно-независимых решений.

На основании теоремы 1, применённой к области $\Lambda - M$, видим, что множество Q не может сгущаться внутри $\Lambda - M$. Следуя рассуждениям, изложенным в работе [6], убеждаемся в том, что и точки $\mu \in M$ не могут быть предельными для множества Q.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства (Москва, 1959).
[2] Н. Бурбаки, Общая топология. Основные структуры (Москва, 1958).
[3] F. V. Atkinson, A spectral problem for completely continuous operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae,* **3** (1952), 53—60.
[4] B. Sz.-Nagy, On a spectral problem of Atkinson, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae,* **3** (1952), 61—66.
[5] P. H. Müller, Zu einer Spektralbetrachtung von Atkinson und Sz.-Nagy, *Acta Sci. Math.,* **17** (1956), 195—197.
[6] Д. Ф. Харазов, К теории линейных уравнений в пространствах Банаха, Труды Тбил. мат. института, **19** (1953), 163—171.
[7] M. Audin, Sur les équations linéaires dans un espace vectoriel, *Thèses présentées à l'Université de Paris,* sér. A, No. 3081, **1957**, 5—71.
[8] Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы (Москва, 1951).
[9] J. H. Williamson, Compact linear operators in linear topological spaces, *J. London Math. Soc.,* **29** (1954), 149—156.

(Поступило 4/I/1961 г.)

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Б. ЧАКАНЬ*) (Москва)

Цель настоящей работы — установить взаимосвязь между следующими классами алгебраических систем: унитарные модули, абелевы Ω-группы и универсальные алгебры с некоторыми условиями (которые мы в дальнейшем точно сформулируем), исследованные К. Шода (см. [4], [5], [6]). Мы покажем, что с некоторой точки зрения между этими классами алгебраических образований нет существенного различия.

§ 1

Под алгеброй мы будем понимать множество вместе с некоторой системой определенных в нем конечноместных операций. Алгебры A и B называются подобными, если операции из A можно взаимно однозначно сопоставлять операциям из B так, что соответствующие операции применимы к одному и тому же числу злементов. Такой класс подобных алгебр, который состоит из всех алгебр, удовлетворяющих некоторому множеству тождественных соотношений, называется примитивным классом. Алгебры мы будем обозначать большими латинскими, примитивные классы алгебр — большими готическими, а элементы алгебр — маленькими латинскими буквами. Греческие буквы φ, ψ, θ будут обозначать отображения, а μ, ν, $\varrho, \ldots$ — операции.

Под операциями данного примитивного класса $\mathfrak{A}$ в дальнейшем мы будем понимать не только основные операции, но и все главные производные операции этого класса, т. е. такие производные операции, которые задаются полиномами класса $\mathfrak{A}$ (см. [1]). Результат операции μ, примененной к элементам $a_1, \ldots, a_m$, мы обозначим через $a_1 \ldots a_m \mu$. Рассмотрим операцию $x_1 \ldots x_{i_1} \ldots x_{i_n} \ldots x_m \mu$. Если результат этой операции зависит только от элементов, подставленных вместо символов

*) B. Csákány

$x_{l_1}, \ldots, x_{l_n}$, то операцию μ назовем *n-местной*. В дальнейшем, пользуясь обозначением $x_1 \ldots x_n \mu$, мы всегда будем предполагать, что μ — n-местная операция. Если в рассматриваемом примитивном классе тождественно $x_1 \ldots x_n \mu = x_1 \ldots x_n \nu$, то операции μ и ν не будем различать, несмотря на то, что они могут быть заданы полиномами с различными числами символов. Так, например, в примитивном классе абелевых групп с основными операциями 0, $-x$, $x+y$ мы не будем отличать формально одноместную операцию $x-x$ от 0. Множество всех операций примитивного класса $\mathfrak{A}$ обозначим через $O(\mathfrak{A})$. Слово из примитивного класса $\mathfrak{A}$, составленное из символов $x_1, \ldots, x_m$ и из операций (не обязательно основных) класса $\mathfrak{A}$ $\mu_1, \ldots, \mu_n$, обозначается так: $v(x_1, \ldots, x_m; \mu_1, \ldots, \mu_n)$. Будем говорить, что $v(x_1, \ldots, x_m; \mu_1, \ldots, \mu_n)$ является *словом первой степени* над системой операций $\mu_\lambda (\lambda \in \Lambda)$, если оно имеет вид $x_1 \ldots x_m \mu_\varkappa$ $(\varkappa \in \Lambda)$. Если же слово $v(x_1, \ldots, x_m; \mu_1, \ldots, \mu_n)$ имеет вид $u_1 \ldots u_l \mu_\varkappa (\varkappa \in \Lambda)$, где u_i $(i=1, \ldots, l)$ являются словами степени меньше n над системой μ_λ $(\lambda \in \Lambda)$ и среди них существует слово степени $n-1$, то мы его будем называть *словом степени n* над данной системой операций (ср. [1]).

Если в некотором примитивном классе мы отождествляем изоморфные между собой алгебры, то получаем класс алгебр, который будем называть *абстрактным примитивным классом*. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь абстрактные примитивные классы.

Определение 1. Алгебры A и B называются *эквивалентными*, если существуют такое взаимно однозначное отображение θ алгебры A на алгебру B и такое взаимно однозначное отображение φ множества всех операций алгебры A на множество всех операций алгебры B, что для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ и произвольной n-местной операции ν из A выполняется:

$$(a_1 \ldots a_n \nu)\theta = (a_1\theta) \ldots (a_n\theta)(\nu\varphi).$$

Будем говорить, что эта эквивалентность определяется отображением операций φ.

Определение 2. Примитивные классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются *эквивалентными*, если существуют такое взаимно однозначное отображение φ множества $O(\mathfrak{A})$ на множество $O(\mathfrak{B})$ и такое взаимно однозначное соответствие между алгебрами классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, что между соответствующими алгебрами существует эквивалентность, определяемая отображением операций φ.

Следует отметить, что из определений вытекает, что в обоих случаях φ n-местную операцию переводит в n-местную.

Лемма 1. Примитивные классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда эквивалентны, если существует такое взаимно однозначное отображение ψ множества $O(\mathfrak{A})$ на множество $O(\mathfrak{B})$, что

$$v(x_1, \ldots, x_j;\ \mu_1, \ldots, \mu_m) = w(x_i, \ldots, x_k;\ \mu_l, \ldots, \mu_n) \tag{1}$$

тогда и только тогда является тождеством в $\mathfrak{A}$, если

$$v(x_1, \ldots, x_j;\ \mu_1\psi, \ldots, \mu_m\psi) = w(x_i, \ldots, x_k;\ \mu_l\psi, \ldots, \mu_n\psi) \tag{2}$$

— тождество в $\mathfrak{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — эквивалентны с отображением операций ψ и пусть (1) — тождество в $\mathfrak{A}$. Покажем, что (2) — тождество в $\mathfrak{B}$. Если B — произвольная алгебра из $\mathfrak{B}$ и $b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_j, \ldots, b_k$ — произвольные ее элементы, то пусть A — алгебра из $\mathfrak{A}$, эквивалентная B относительно отображения элементов θ и $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_k$ — такие элементы из A, что $a_h\theta = b_h$ $(h = 1, \ldots, i, \ldots, j, \ldots, k)$. В A выполняется равенство $v(a_1, \ldots, a_j;$ $\mu_1, \ldots, \mu_m) = w(a_i, \ldots, a_k;\ \mu_l, \ldots, \mu_n)$, поэтому в силу эквивалентности A и B в B выполняется равенство $v(a_1\theta, \ldots, a_j\theta\colon \mu_1\psi, \ldots, \mu_m\psi) = w(a_i\theta, \ldots, a_k\theta;$ $\mu_l\psi, \ldots, \mu_n\psi)$, т. е. равенство $v(b_1, \ldots, b_j;\ \mu_1\psi, \ldots, \mu_m\psi) = w(b_i, \ldots, b_k;$ $\mu_l\psi, \ldots, \mu_n\psi)$. Аналогично можно показать, что, если (2) — тождество в $\mathfrak{B}$ то (1) — тождество в $\mathfrak{A}$. Получаем, что требуемым отображением является ψ.

Чтобы доказать обратное, предположим существование отображения ψ, требуемого леммой, и покажем, что для любой алгебры A из $\mathfrak{A}$ существует алгебра в $\mathfrak{B}$, эквивалентная A. В множестве A мы определим операции класса $\mathfrak{B}$ следующим образом:

$$a_1 \ldots a_n v = a_1 \ldots a_n (v\psi^{-1})$$

$(a_i \in A,\ v$ — операция класса $\mathfrak{B})$. Так мы получим алгебру A', эквивалентную A (отображение элементов — тождественное, а отображение операций есть ψ). Покажем, что A' принадлежит классу $\mathfrak{B}$. В самом деле, если $v(x_1, \ldots, x_j; v_1, \ldots, v_m) = w(x_i, \ldots, x_k; v_l, \ldots, v_n)$ — тождество в $\mathfrak{B}$, то $v(x_1, \ldots, x_j;$ $v_1\psi^{-1}, \ldots, v_m\psi^{-1}) = w(x_i, \ldots, x_k;\ v_l\psi^{-1}, \ldots, v_n\psi^{-1})$ — тождество в $\mathfrak{A}$, поэтому оно тождественно выполняется и в A, и, в силу определения операций класса $\mathfrak{B}$ в алгебре A', $v(x_1, \ldots, x_j;\ v_1, \ldots, v_m) = w(x_i, \ldots, x_k;\ v_l, \ldots v_n)$ тождественно выполняется в A'.

Сопоставим каждой алгебре A из $\mathfrak{A}$ алгебру A' из $\mathfrak{B}$, образованную указанным образом. Мы получим взаимно однозначное отображение класса $\mathfrak{A}$ в класс $\mathfrak{B}$. В самом деле, если $A' \cong C'$, где A, C — алгебры класса $\mathfrak{A}$, и если этот изоморфизм есть θ, то θ одновременно является и изоморфизмом A на C, т. е. $A \cong C$, а поэтому $A = C$, так как мы рассматриваем $\mathfrak{A}$ как абстрактный примитивный класс. Кроме того, $A \to A'$ — отображение класса

$\mathfrak{A}$ на весь класс $\mathfrak{B}$. Чтобы показать это, берем алгебру B из $\mathfrak{B}$. В множестве B мы определим операции класса $\mathfrak{A}$ следующим образом: $b_1 \ldots b_n\mu = b_1 \ldots b_n(\mu\psi)$ $(b_1, \ldots, b_n \in B$; μ — операция класса $\mathfrak{A})$. Тогда, как и выше, можно показать, что полученная алгебра B^* принадлежит классу $\mathfrak{A}$; далее, мы видим, что $B^{*\prime} = B$. Мы получаем, что $A \to A'$ — взаимно однозначное отображение $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, и между соответствующими алгебрами классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ существует эквивалентность, определяемая отображением операций ψ. Это и значит, что примитивные классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ эквивалентны.

§ 2

Сейчас мы напомним некоторые определения из общей теории алгебраических систем.

Подалгебра B алгебры A называется н о р м а л ь н о й в A, если она является классом некоторой конгруэнции алгебры A (см. [7]).

П р я м ы м п р о и з в е д е н и е м алгебр $A_1, \ldots, A_n$ называется множество $A_1 \times \ldots \times A_n$ всех векторов вида $(a_1, \ldots, a_n)$ $(a_i \in A_i;\ i = 1, \ldots, n)$, в котором операции производятся покомпонентно.

Примитивный класс $\mathfrak{A}$ называется п р а в и л ь н ы м, если в любой алгебре из $\mathfrak{A}$ каждая конгруэнция однозначно определяется любым своим классом (см. [1]).

Примитивный класс $\mathfrak{A}$ называется н о р м а л ь н ы м, если в любой алгебре из $\mathfrak{A}$ произвольные две конгруэнции перестановочны как отношения (см. [1]).

Л е м м а 2. П у с т ь $\mathfrak{A}$ — п р и м и т и в н ы й к л а с с, у д о в л е т в о р я ю щ и й с л е д у ю щ и м у с л о в и я м:

I. В $\mathfrak{A}$ с у щ е с т в у е т н у л ь м е с т н а я о п е р а ц и я, о т м е ч е н н ы й к о т о р о й э л е м е н т о б р а з у е т п о д а л г е б р у в л ю б о й а л г е б р е к л а с с а $\mathfrak{A}$.

II. К л а с с $\mathfrak{A}$ п р а в и л ь н ы й.

III. В л ю б о й а л г е б р е и з $\mathfrak{A}$ к а ж д а я п о д а л г е б р а н о р м а л ь н а.

Е с л и A, B, G — а л г е б р ы и з $\mathfrak{A}$, $A, B \subseteqq G$, $\{A, B\} = G$ и $A \cap B = 0$, г д е 0, к а к в с ю д у в д а л ь н е й ш е м, о з н а ч а е т э л е м е н т, о т м е ч е н н ы й н у л ь м е с т н о й о п е р а ц и е й у с л о в и я I, т о $G \cong A \times B$ и с у щ е с т в у е т т а к о й и з о м о р ф и з м φ а л г е б р ы G н а $A \times B$, ч т о $a\varphi = (a, 0)$, $b\varphi = (0, b)$ $(a \in A,\ b \in B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{A}$ — множество всех таких элементов $\bar{a}$ из G, которые конгруэнтны некоторому элементу алгебры A относительно конгруэнции алгебры G, в силу II и III однозначно определенной подалгеброй B. Эту конгруэнтность в дальнейшем, ради краткости, будем обозначать так: $\bar{a}\equiv a \pmod B$. Пусть μ — n-местная операция в классе $\mathfrak{A}$, $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n\in\bar{A}$, $\bar{a}_i\equiv a_i \pmod B$, $a_i\in A$ $(i=1,\ldots,n)$. Тогда $\bar{a}_1\ldots\bar{a}_n\mu\equiv a_1\ldots a_n\mu \pmod B$, и, ввиду $a_1\ldots a_n\mu\in A$, $\bar{a}_1\ldots\bar{a}_n\mu\in\bar{A}$, т. е. $\bar{A}$ — подалгебра в G. Очевидно, что $A\subseteqq\bar{A}$, далее, учитывая, что $0\in A, B$, мы видим, что $B\subseteqq\bar{A}$. Отсюда $\bar{A}=G$. Аналогично, если $\bar{B}$ есть множество всех таких элементов из G, которые конгруэнтны с некоторым элементом из B относительно той конгруэнции алгебры G, которая, снова в силу II и III, однозначно определена подалгеброй A, то $\bar{B}=G$.

Поэтому для любого $g\in G$ существуют такие $a\in A$ и $b\in B$, что $g\equiv a \pmod B$, $g\equiv b \pmod A$. Конгруэнция $\operatorname{mod} B$ определяет некоторую конгруэнцию в подалгебре A. Класс этой последней конгруэнции, содержащий 0, есть, ввиду $A\cap B=0$, сам 0; но 0 есть в A класс тривиальной конгруэнции, в которой каждый элемент сам образует класс, поэтому, в силу II, в A конгруэнция $\operatorname{mod} B$ совпадает с тривиальной. Если теперь $g\equiv a' \pmod B$, $(a'\in A)$, то $a'\equiv a \pmod B$, а поэтому $a'=a$. Мы получили, что g однозначно определяет a. Аналогично можно показать, что и b однозначно определяется элементом g.

Рассмотрим теперь однозначное отображение φ алгебры G в $A\times B$, ставящее в соответствие элементу $g\in G$ пару (a, b), где компоненты $a\in A$ и $b\in B$ определены выше. Пусть элемент $g'\in G$ таков, что $g'\varphi=(a, b)$. Тогда $g'\equiv a \pmod B$, $g'\equiv b \pmod A$, т. е. $g\equiv g' \pmod A$ и $g\equiv g' \pmod B$. Тогда g и g' конгруэнтны и в конгруэнции $\operatorname{mod} A\cap\operatorname{mod} B$, которая определяется так: $x\equiv y (\operatorname{mod} A\cap\operatorname{mod} B)$ тогда и только тогда, если $x\equiv y \pmod A$ и $x\equiv y \pmod B$. Класс конгруэнции $\operatorname{mod} A\cap\operatorname{mod} B$, содержащий 0, есть, ввиду $A\cap B=0$, сам 0; поэтому эта конгруэнция, в силу II, является тривиальной, поэтому $g'=g$. Мы получили, что отображение φ взаимно однозначно.

Пусть μ — операция, как выше, $g_1,\ldots,g_n\in G$, $g_i\varphi=(a_i, b_i)$ $(i=1,\ldots,n)$. Тогда $(g_1\varphi)\ldots(g_n\varphi)\mu=(a_1, b_1)\ldots(a_n, b_n)\mu=(a_1\ldots a_n\mu, b_1\ldots b_n\mu)$. Но $a_1\ldots a_n\mu\equiv$ $\equiv g_1\ldots g_n\mu \pmod B$ и $b_1\ldots b_n\mu\equiv g_1\ldots g_n\mu \pmod A$, откуда $(a_1\ldots a_n\mu, b_1\ldots b_n\mu)=$ $=(g_1\ldots g_n\mu)\varphi$, т. е. φ — изоморфное отображение. Если $a\in A$, то $a\equiv a \pmod B$ и $a\equiv 0 \pmod A$, т. е. $a\varphi=(a, 0)$. Аналогично получим, что если $b\in B$, то $b\varphi=(0, b)$.

Наконец, покажем, что φ отображает G на всю алгебру $A\times B$. Пусть (a, b) — произвольный элемент из $A\times B$. $A\varphi$ — подалгебра алгебры $A\times B$, и, в силу II и III, она однозначно определяет в $A\times B$ конгруэнцию $\operatorname{mod} A\varphi$. Далее, $A\varphi=(A, 0)$ является классом той конгруэнции алгебры $A\times B$, классами которой являются подмножества (A, b), $b\in B$. В силу II, эта конгруэнция и конгруенция $\operatorname{mod} A\varphi$ совпадают. Поэтому имеет место $(a, b)\equiv$ $\equiv(0, b) (\operatorname{mod} A\varphi)$. Очевидно, $A\varphi\subseteqq G\varphi$, а эта последняя подалгебра также однозначно определяет конгруэнцию $\mathrm{mod}\, G\varphi$. Класс конгруэнции $\mathrm{mod}\, A\varphi \cap \cap \mathrm{mod}\, G\varphi$, содержащий $0=(0,0)$, есть $A\varphi$, поэтому, ввиду II, эта конгруэнция совпадает с конгруэнцией $\mathrm{mod}\, A\varphi$, откуда следует, что $x\equiv y\,(\mathrm{mod}\, A\varphi)$ $(x, y \in A\times B)$ влечет за собой $x\equiv y\,(\mathrm{mod}\, G\varphi)$. Поэтому $(a, b)\equiv(0, b)\,(\mathrm{mod}\, G\varphi)$. Но $(0, b)=b\varphi\in G\varphi$, откуда $(a, b)\in G\varphi$. Этим лемма доказана.

§ 3

Примитивный класс $\mathfrak{A}$ называется примитивным классом абелевых Ω-групп, если среди операций класса $\mathfrak{A}$ есть бинарная операция сложение (для которой мы будем пользоваться обычной записью), являющееся ассоциативным, коммутативным и обратимым, далее, есть такое множество операций Ω, что для любой операции $\omega\in\Omega$ имеют место тождества

$$0\ldots 0\omega=0 \tag{3}$$

(где 0 — нуль операции сложения) и

$$(x_1+y_1)\ldots(x_n+y_n)\,\omega=x_1\ldots x_n\omega+y_1\ldots y_n\omega, \tag{4}$$

а все остальные операции являются главными производными операциями от $+$, $\dot{-}$ и Ω (см. [2]).

Заметим, что примитивные классы абелевых Ω-групп можно охарактеризовать следующим образом: примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда является примитивным классом абелевых Ω-групп, если в $\mathfrak{A}$ есть двуместная операция сложение, являющееся ассоциативным и обратимым; кроме того, если ω — произвольная n-местная операция в классе $\mathfrak{A}$, то имеют место тождества (3) и (4). Эту характеристику мы и считаем определением примитивного класса абелевых Ω-групп.

Теорема 1. *Примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда является примитивным классом абелевых Ω-групп, если $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям I, II, III леммы 2 и условию:*

IV. Класс $\mathfrak{A}$ нормальный.

Доказательство. Необходимость условий I—IV вытекает из известных свойств абелевых Ω-групп (см. [2]). Перейдем к доказательству достаточности.

Прежде всего заметим, что для любой операции ω класса $\mathfrak{A}$ по определению элемента 0 выполняется (3).

Теперь рассмотрим свободную алгебру F в классе $\mathfrak{A}$ со свободными образующими x, y. Тогда $F=\{\{x\}, \{y\}\}$. Пусть $Z\in\{x\}\cap\{y\}$, тогда $z=x\pi=y\varrho$, где π, ϱ — подходящие операции класса $\mathfrak{A}$. Поскольку x, y — свободные образующие алгебры F, значит, $x\pi=y\varrho$ — тождество в $\mathfrak{A}$, поэтому оно выполняется в F и для случая $y=0$, т. е. имеет место $x\pi=0$, откуда $z=0$. Получаем, что $\{x\}\cap\{y\}=0$. Мы видим, что для F, $\{x\}$, $\{y\}$ выполняются требования леммы 2, поэтому существует изоморфное отображение φ алгебры F на $\{x\}\times\{y\}$, при котором $x\varphi=(x, 0)$, $y\varphi=(0, y)$. В F есть такой элемент $f(x, y)$, что $f(x, y)\varphi=(x, y)$. Однако, $f(x, y)$ — полином от x, y в классе $\mathfrak{A}$, т. е. оно — думестная операция класса $\mathfrak{A}$. Обозначим эту операцию через $x+y$. Тогда

$$(x, y)=(x+y)\varphi=x\varphi+y\varphi=(x, 0)+(0, y)=(x+0, 0+y),$$

откуда $x=x+0$, $y=0+y$, что показывает, что 0 — единичный элемент относительно сложения, ввиду того, что x, y — свободные образующие алгебры F.

Пусть теперь ω — произвольная n-местная операция класса $\mathfrak{A}$. Рассмотрим свободную алгебру M в классе $\mathfrak{A}$ со свободными образующими $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ и ее подалгебры $K=\{x_1, \ldots, x_n\}$, $L=\{y_1, \ldots, y_n\}$. Как и выше, можно показать, что лемма 2 применима к алгебрам M, K, L. Значит, существует такой изоморфизм θ алгебры M на $K\times L$, что $x\theta=(x, 0)$, $y\theta=(0, y)$ для $x\in K$, $y\in L$. Тогда имеет место:

$$\begin{aligned}
&(x_1+y_1)\ldots(x_n+y_n)\,\omega=\\
&=[(x_1+y_1)\,\theta\ldots(x_n+y_n)\,\theta\omega]\,\theta^{-1}=[(x_1\theta+y_1\theta)\ldots(x_n\theta+y_n\theta)\,\omega]\,\theta^{-1}=\\
&=[((x_1, 0)+(0, y_1))\ldots((x_n, 0)+(0, y_n))\,\omega]\,\theta^{-1}=\\
&=[(x_1, y_1)\ldots(x_n, y_n)\,\omega]\,\theta^{-1}=(x_1\ldots x_n\omega, y_1\ldots y_n\omega)\,\theta^{-1}=\\
&=(x_1\ldots x_n\omega+0, 0+y_1\ldots y_n\omega)\,\theta^{-1}=[(x_1\ldots x_n\omega, 0)+(0, y_1\ldots y_n\omega)]\,\theta^{-1}=\\
&=[(x_1\ldots x_n\omega)\,\theta+(y_1\ldots y_n\omega)\,\theta]\theta^{-1}=x_1\ldots x_n\omega+y_1\ldots y_n\omega.
\end{aligned}$$

Мы видим, что в классе $\mathfrak{A}$ для любой операции ω тождественно выполняется равенство (4). Отсюда следует и ассоциативность операции сложения.

Мы только сейчас используем условие IV, чтобы показать обратимость операции сложения. Как доказал А. И. Мальцев [1], выполнение IV в классе $\mathfrak{A}$ влечет за собой существование в $\mathfrak{A}$ трехместной операции ϱ, удовлетворяющей тождеству: $xxy\varrho=yxx\varrho=y$. Поэтому, в силу только что доказанного, имеет место и тождество:

$$\begin{gathered}
x+0x0\varrho=x00\varrho+0x0\varrho=\\
=(x+0)\,(0+x)\,(0+0)\,\varrho=xx0\varrho=0,
\end{gathered}$$

т. е. $0x0\varrho$ не что иное, как противоположный элемент для x. Итак, теорема доказана.

§ 4

Теорема 2. Для произвольного примитивного класса $\mathfrak{A}$ абелевых Ω-групп существует такое ассоциативное кольцо с единицей R, единственное с точностью до изоморфизма, что примитивный класс всех правых унитарных R-модулей $\mathfrak{R}$ эквивалентен классу $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Множество M, состоящее из всех одноместных операций и из нульместной операции 0 класса $\mathfrak{A}$, можно превратить в кольцо следующим естественным образом: если $\mu_1, \mu_2 \in M$, то

$$x(\mu_1+\mu_2)=x\mu_1+x\mu_2,\quad x(-\mu_1)=-x\mu_1,$$
$$x(\mu_1\mu_2)=(x\mu_1)\mu_2.$$

Легко проверить для операций, определенных таким образом, выполнение аксиом ассоциативного кольца. Полученное кольцо будем обозначать через R. Заметим, что R — кольцо с единицей, причем роль единицы играет тождественная операция ε: $x\varepsilon=x$. В дальнейшем для операции $\mu\in M$, рассматриваемой как элемент кольца R, будет использоваться обозначение $\bar{\mu}$

Покажем, что примитивный класс всех правых унитарных R-модулей $\mathfrak{R}$ эквивалентен классу $\mathfrak{A}$. Для этого, по лемме 1, достаточно найти такое взаимно однозначное отображение множества $O(\mathfrak{A})$ на множество $O(\mathfrak{R})$, при котором тождества класса $\mathfrak{A}$ и только они переходят в тождества класса $\mathfrak{R}$.

В силу тождества (4) в классе $\mathfrak{A}$ каждая n-местная ($n>0$) операция μ разлагается следующим образом: $x_1\ldots x_n\mu=x_1 0\ldots 0\mu+\ldots+0\ldots 0x_n\mu=$ $=x_1\mu_1+\ldots+x_n\mu_n$, где μ_i означает одноместную операцию $0\ldots 0x_{(i)}0\ldots 0\mu$. Если μ обладает также разложением вида $x_1\mu_1'+\ldots+x_n\mu_n'$, где операции μ_i' одноместны, то, подставляя $x_j=0\,(j\neq i)$ и $x_i=x$, получим, что $x\mu_i=$ $=0\ldots 0x_{(i)}0\ldots 0\mu=x\mu_i'$ $(i=1,\ldots,n)$, поэтому $x_1\ldots x_n\mu=x_1\mu_1+\ldots+x_n\mu_n$ есть единственное разложение операции μ в одноместные операции. Рассмотрим следующее отображение φ множества $O(\mathfrak{A})$ в множество $O(\mathfrak{R})$: если $x_1,\ldots,x_n$ — элементы модуля, то $x_1\ldots x_n(\mu\varphi)=x_1\bar{\mu}_1+\ldots+x_n\bar{\mu}_n$, если μ — не нульместно (сложение в $\mathfrak{R}$ обозначается тоже через $+$), и $0\varphi=0$. Тогда, если операция μ одноместная, то $\mu\varphi=\bar{\mu}$. В частности, $\varepsilon\varphi=\bar{\varepsilon}$ (единица кольца R), откуда $x_1(+\varphi)x_2=x_1+x_2$. Отображение φ n-местную операцию переводит в n-местную. Кроме того, φ взаимно однозначно. Однозначность φ мы видели выше, а если $\mu\varphi=\nu\varphi$, то $x_1\bar{\mu}_1+\ldots+x_n\bar{\mu}_n=x_1\bar{\nu}_1+\ldots+x_n\bar{\nu}_n$, откуда, подставляя $x_j=0$ $(j\neq i)$, $x_i=x$, мы получим $x\bar{\mu}_i=x\bar{\nu}_i$, а так как это справедливо в любом R-модуле, в том числе и в самом кольце R, то $\bar{\mu}_i=\bar{\nu}_i$, т. е. $\mu_i=\nu_i\,(i=1,\ldots,n)$, откуда $\mu=\nu$.

Далее, φ отображает. множество $O(\mathfrak{A})$ на множество $O(\mathfrak{R})$. Чтобы показать это, мы сперва покажем, что любая одноместная операция π класса $\mathfrak{R}$ имеет вид $x\bar{\varrho}$, где $\bar{\varrho}\in R$. Это очевидно для операций, задаваемых полиномом первой степени над системой операций, состоящей из сложения и умножений на элементы кольца R. Пусть π — одноместная операция, задаваемая полиномом степени n. Тогда $x\pi$ имеет один из следующих видов: $x\varrho_1+x\varrho_2$, $(x\varrho_1)\bar{\varrho}_3$, где ϱ_1, ϱ_2-операции, задаваемые полиномами степени меньше n, а $\bar{\varrho}_3\in R$. По индуктивному предположению $\varrho_i=\bar{\varrho}_i\in R\,(i=1,2)$. Тогда из аксиом модуля вытекает, что соответственно $\pi=\bar{\varrho}_1+\bar{\varrho}_2\in R$, $\pi=\bar{\varrho}_1\bar{\varrho}_3\in R$. Пусть теперь $x_1\ldots x_n\pi$ — произвольная операция класса $\mathfrak{R}$. Легко видеть, что $\mathfrak{R}$ является примитивным классом абелевых Ω-групп, поэтому имеет место следующее разложение: $x_1\ldots x_n\pi=x_1\pi_1+\ldots+x_n\pi_n$, где π_i — одноместные операции класса $\mathfrak{R}$ $(i=1,\ldots,n)$. Значит, $x_1\ldots x_n\pi=x_1\bar{\varrho}_1+\ldots\ldots+x_n\bar{\varrho}_n$ $(\bar{\varrho}_i\in R;\ i=1,\ldots,n)$, откуда, если в классе $\mathfrak{A}$ $x_1\varrho_1+\ldots+x_n\varrho_n==x_1\ldots x_n\varrho$, то $\varrho\varphi=\pi$.

Остается показать, что φ переводит тождества класса $\mathfrak{A}$ в тождества класса $\mathfrak{R}$ и что любое тождество класса $\mathfrak{R}$ получается отображением φ из некоторого тождества класса $\mathfrak{A}$. Пусть в классе $\mathfrak{A}$ имеет место тождество

$$s(x_1,\ldots,x_j;\ \varrho_1,\ldots,\varrho_m)=t(x_i,\ldots,x_k;\ \varrho_l,\ldots,\varrho_n). \tag{5}$$

Введем следующее обозначение: $s(0,\ldots,0,x_{(p)},0,\ldots,0;\ \varrho_1,\ldots,\varrho_m)=x\sigma_p$. Аналогично определяются τ_q: $t(0,\ldots,0,x_{(q)},0,\ldots,0,\varrho_l,\ldots,\varrho_n)=x\tau_q$. Тогда (5) можно записать в виде

$$x_1\sigma_1+\ldots+x_j\sigma_j=x_i\tau_i+\ldots+x_k\tau_k,$$

откуда

$$\begin{aligned} x\sigma_h&=0 && (h=1,\ldots,i-1),\\ x\sigma_h&=x\tau_h && (h=i,\ldots,j),\\ x\tau_h&=0 && (h=j+1,\ldots,k), \end{aligned} \tag{6}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_h&=0 && (h=i,\ldots,i-1),\\ \bar{\sigma}_h&=\bar{\tau} && (h=i,\ldots,j),\\ \bar{\tau}_h&=0 && (h=j+1,\ldots,k). \end{aligned} \tag{7}$$

Покажем, что в классе $\mathfrak{R}$ имеют место следующие тождества:

$$s(0,\ldots,0,x_{(p)},0,\ldots,0;\ \varrho_1\varphi,\ldots,\varrho_m\varphi)=x\bar{\sigma}_p \qquad (p=1,\ldots,j). \tag{8}$$

Будем пользоваться индукцией по степени слова s над системой операций $\varrho_1\varphi,\ldots,\varrho_m\varphi$. Если s — слово первой степени, то

$$s(0,\ldots,0,x_{(p)},0,\ldots,0;\ \varrho_1\varphi,\ldots,\varrho_m\varphi)=s(0,\ldots,0,x_{(p)},0,\ldots,0;\ \varrho_1\varphi)=$$
$$=0\ldots0x_{(l_1)}0\ldots0x_{(l_r)}0\ldots0\,(\varrho_1\varphi)=x\bar{\varrho}_{1l_1}+\ldots+x\bar{\varrho}_{1l_r}=x\bar{\sigma}_p.$$

Если (7) справедливо для слов степени меньше n и s — слово степени n, то

$$\begin{aligned}
&s(0,\ldots,0,x_{(p)},0,\ldots,0;\ \varrho_1\varphi,\ldots,\varrho_m\varphi)=\\
&=s'(s_{(1)}(0,\ldots,0,x_{(i_1)},0,\ldots,0;\ \varrho_1\varphi,\ldots,\varrho_m\varphi),\ldots\\
&\ldots,s_{(r)}(0,\ldots,0,x_{(i_r)},0,\ldots,0;\ \varrho_1\varphi,\ldots,\varrho_m\varphi),0;\ \varrho_s\varphi)=\\
&=s'(x\bar\sigma_{(1)i_1},\ldots,x\bar\sigma_{(r)i_r},0;\ \varrho_s\varphi)=(x\bar\sigma_{(1)i_1})\bar\varrho_{s1_1}+\ldots+(x\bar\sigma_{(1)i_1})\bar\varrho_{s1_{t_1}}+\\
&+\ldots+(x\bar\sigma_{(r)i_r})\bar\varrho_{sr_1}+\ldots+(x\bar\sigma_{(r)i_r})\bar\varrho_{sr_{t_r}}=\\
&=x\overline{(\sigma_{(1)i_1}\varrho_{s1_1}+\ldots+\sigma_{(1)i_1}\varrho_{s1_{t_1}}+\ldots+\sigma_{(r)i_r}\varrho_{sr_1}+\ldots+\sigma_{(r)i_r}\varrho_{sr_{t_r}})}=x\bar\sigma_p,
\end{aligned}$$

ибо

$$\begin{aligned}
&x(\sigma_{(1)i_1}\varrho_{s1_1}+\ldots+\sigma_{(1)i_1}\varrho_{s1_{t_1}}+\ldots+\sigma_{(r)i_r}\varrho_{sr_1}+\ldots+\sigma_{(r)i_r}\varrho_{sr_{t_r}})=\\
&=(x\sigma_{(1)i_1})\varrho_{s1_1}+\ldots+(x\sigma_{(1)i_1})\varrho_{s1_{t_1}}+\ldots+(x\sigma_{(r)i_r})\varrho_{sr_1}+\ldots+(x\sigma_{(r)i_r})\varrho_{sr_{t_r}}=\\
&=s'(x\sigma_{(1)i_1},\ldots,x\sigma_{(r)i_r},0;\ \varrho_s)=s'(s_{(1)}(0,\ldots,0,x_{(i_1)},0,\ldots,0;\ \varrho_1,\ldots,\varrho_m),\ldots\\
&\ldots,s_{(r)}(0,\ldots,0,x_{(i_r)},0,\ldots,0;\ \varrho_1,\ldots,\varrho_m),0;\ \varrho_s)=\\
&=s(0,\ldots,0,x_{(i)},0,\ldots,0;\ \varrho_1,\ldots,\ \varrho_m)=x\sigma_p.
\end{aligned}$$

В силу соотношений (7) и (8) мы получим:

$$\begin{aligned}
&s(x_1,\ldots,x_j;\ \varrho_1\varphi,\ldots,\varrho_m\varphi)=s(x_1,0,\ldots,0;\ \varrho_1\varphi,\ldots,\varrho_m\varphi)+\ldots\\
&\ldots+s(0,\ldots,0,x_j;\ \varrho_1\varphi,\ldots,\varrho_m\varphi)=x_1\bar\sigma_1+\ldots+x_j\bar\sigma_j=\\
&=x_i\bar\tau_i+\ldots+x_k\bar\tau_k=t(x_i,0,\ldots,0;\ \varrho_l\varphi,\ldots,\varrho_n\varphi)+\ldots\\
&\ldots+t(0,\ldots,0,x_k;\ \varrho_l\varphi,\ldots,\varrho_n\varphi)=t(x_i,\ldots,x_k;\ \varrho_l\varphi,\ldots,\varrho_n\varphi).
\end{aligned}$$

С другой стороны, если в классе $\mathfrak{R}$ имеет место тождество

$$s(x_1,\ldots,x_j;\ \varrho_1\varphi,\ldots,\varrho_m\varphi)=t(x_i,\ldots,x_k;\ \varrho_l\varphi,\ldots,\varrho_n\varphi),$$

то в силу (8)

$$x_1\bar\sigma_1+\ldots+x_j\bar\sigma_j=x_i\bar\tau_i+\ldots+x_k\bar\tau_k,$$

откуда следуют равенства (7). Это значит, что в классе $\mathfrak{A}$ имеют место тождества (6). Получим:

$$\begin{aligned}
&s(x_1,\ldots,x_j;\ \varrho_1,\ldots,\varrho_m)=x_1\sigma_1+\ldots+x_j\sigma_j=\\
&=x_i\tau_i+\ldots+x_k\tau_k=t(x_i,\ldots,x_k;\ \varrho_l,\ldots,\varrho_n),
\end{aligned}$$

т. е. в классе $\mathfrak{A}$ выполняется тождество (5).

Нам нужно еще доказать, что если P такое ассоциативное кольцо с единицей, что примитивный класс $\mathfrak{P}$ всех правых унитарных P-модулей эквивалентен классу $\mathfrak{A}$, то $P\cong R$. Пусть φ — взаимно однозначное отображение множества $O(\mathfrak{A})$ на множество $O(\mathfrak{P})$, определяющее эквивалентность классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{P}$. Учитывая, что, как показано выше, одноместными операциями класса $\mathfrak{P}$ являются лишь умножения на элементы кольца и что отображение φ n-местную операцию переводит в n-местную, мы видим, что φ взаимно однозначно отображает R на P.

Покажем, что φ — гомоморфное отображение кольца R. Операция 0 класса $\mathfrak{A}$ при φ переходит в 0 класса $\mathfrak{P}$. Поэтому из тождества класса $\mathfrak{A}$ $x+0=0+x=x$ получается тождество класса $\mathfrak{P}$

$$x(+\varphi)0=0(+\varphi)x=x. \tag{9}$$

Обозначая через $\oplus$ сложение класса $\mathfrak{P}$, в $\mathfrak{A}$, как показывает (4), тождественно выполняется

$$(x+0)(\oplus\varphi^{-1})(0+y)=(x(\oplus\varphi^{-1})0)+(0(\oplus\varphi^{-1})y).$$

Применяя к этому тождеству отображение φ, получим:

$$(x(+\varphi)0)\oplus(0(+\varphi)y)=(x\oplus 0)(+\varphi)(0\oplus y).$$

Это последнее в силу (9) означает, что в $\mathfrak{P}$ тождественно $x(+\varphi)y=x\oplus y$.

Пусть теперь $\mu, \nu\in R$ (черточку здесь можем упустить). В классе $\mathfrak{A}$ имеет место тождество $x(\mu+\nu)=x\mu+x\nu$, откуда в $\mathfrak{P}$ получим: $x(\mu+\nu)\varphi= =x(\mu\varphi)\oplus x(\nu\varphi)=x(\mu\varphi+\nu\varphi)$, значит, $(\mu+\nu)\varphi=\mu\varphi+\nu\varphi$. Наконец, рассмотрим в $\mathfrak{A}$ тождество $x(\mu\nu)=(x\mu)\nu$. При φ оно превращается в тождество класса $\mathfrak{P}: x(\mu\nu)\varphi=(x(\mu\varphi))(\nu\varphi)=x((\mu\varphi)(\nu\varphi))$. Отсюда, $(\mu\nu)\varphi=(\mu\varphi)(\nu\varphi)$.

Этим доказано, что φ гомоморфизм, а ввиду взаимной однозначности и изоморфизм R на P. Итак, теорема полностью доказана.

Следствие. Примитивный класс алгебр $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда эквивалентен примитивному классу всех правых унитарных модулей над некоторым ассоциативным кольцом с единицей, если $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям I—IV.

Заметим, что лемма 2, теорема 1 и следствие остаются в силе, если условие II заменим

II′. В любой алгебре из $\mathfrak{A}$ каждая конгруэнция однозначно определяется своим классом, являющимся нормальной подалгеброй.

§ 5

В работах [5], [6] К. Шода доказал следующую теорему:

Каждая алгебра A в примитивном классе $\mathfrak{A}$, удовлетворяющем условиям I, II′, III, IV, обладает алгебраически замкнутым алгебраическим расширением в этом классе, притом единственным с точностью до изоморфизма над A (относительно терминологии см. [5]).

С другой стороны, Б. Экман и А. Шопф [3] получили следующий результат:

Каждый унитарный модуль M над ассоциативным кольцом с единицей R обладает инъективным существенным расширением над R, единственным с точностью до изоморфизма над M.*)

Мы покажем на основании предыдущих теорем, что эти результаты равносильны. В самом деле, пусть A — алгебра в некотором примитивном классе $\mathfrak{A}$, удовлетворяющем условиям I, II′, III, IV. В силу следствия, приведенного в конце § 4, существует такое ассоциативное кольцо с единицей R, что $\mathfrak{A}$ эквивалентен примитивному классу всех унитарных модулей над R. Поэтому существует унитарный R-модуль A', эквивалентный алгебре A. Согласно [3] A' обладает инъективным существенным расширением над R, т. е. существует такой унитарный R-модуль A'^*, который в качестве подмодуля содержит A', не содержит никакого прямого расширения модуля A', и является прямым слагаемым в каждом собственном расширении. Возьмем в классе $\mathfrak{A}$ алгебру A^*, эквивалентную модулю A'^*. Тогда A вложима в A^*, притом A^* не содержит никакого прямого расширения алгебры A и является прямым слагаемым в каждом собственном расширении. Поэтому, в силу теорем 1, 7, 9 из [5], A^* есть алгебраически замкнутое алгебраическое расширение алгебры A. Единственность же алгебры A^* является следствием единственности модуля A'^*. Таким образом, результат Шода вытекает из результата Экмана и Шопфа.

С другой стороны, поскольку в примитивном классе всех унитарных R-модулей выполняются условия I—IV, а понятие алгебраически замкнутого алгебраического расширения здесь совпадает с понятием инъективного существенного расширения, то результат Экмана и Шопфа вытекает из теоремы Шода.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность А. Г. Курошу за ряд ценных советов и указаний.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Мальцев, К общей теории алгебраических систем, Мат. Сборник, **35 (77)** (1954), 3—20.

[2] P. J. Higgins, Groups with multiple operators, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **6** (1956), 366—416 (перевод: Математика, **3** : 4 (1959), 55—106).

[3] B. Eckmann—A. Schopf, Über injektive Moduln, *Archiv der Math.*, **39** (1953), 75—79.

[4] K. Shoda, Allgemeine Algebra, *Osaka Math. J.* **2** (1949), 182—225.

[5] K. Shoda, Zur Theorie der algebraischen Erweiterungen, *Osaka Math. J.*, **4** (1952), 133—143.

[6] K. Shoda, Bemerkungen über die Existenz der algebraisch abgeschlossenen Erweiterung, *Proc. Japan Acad.*, **31** (1955), 128—130.

[7] T. Fujiwara, On the structure of algebraic systems, *Proc. Japan Acad.*, **30** (1954), 74—79.

(Поступило 6/VII/1961)

*) В цитированной работе речь идет о левых модулях, но это в данном случае не существенно.

ШРЕЙЕРОВО РАСШИРЕНИЕ МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫХ ГРУПП

Ф. ГЕЧЕГ (Сегед)*)

Введение

В настоящей работе дается обобщение известных теорем о шрейеровых расширениях групп и колец в рамках теории мультиоператорных групп.

Множество G — следуя Хиггинсу — называем группой с системой мультиоператоров Ω, или короче Ω-группой, если G — группа по отношению к операторам $+$ и $-$, и всякий оператор $\omega \in \Omega$ является n-арной ($n \geqq 0$) алгебраической операцией, заданной на G, причем выполняется требование

$$00\ldots 0\omega = 0.$$

Как известно, и группы и кольца содержатся в классе мультиоператорных групп.

Сейчас мы соберем основные понятия относящиеся к Ω-группам, которые будут применяться впоследствии.

Идеал A Ω-группы G есть такой нормальный делитель группы G, что для любых $\omega \in \Omega$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n \in A$ имеет место включение

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)\,\omega \in a_1 a_2 \ldots a_n \omega + A.$$

Мы говорим, что Ω-группа G' является Ω-гомоморфным образом Ω-группы G, если между их элементами можно установить соответствие $\Theta : b_i \to b_i'$ ($b_i \in G, b_i' \in G'$), в котором каждому элементу из G сопоставлен вполне определенный образ в G', в то время как всякий элемент из G' обладает одним или многими различными прообразами в G и которое обладает следующим свойством:

$$(b_1+b_2)\,\Theta = b_1'+b_2'; \;\; (b_1 b_2 \ldots b_n \omega)\,\Theta = b_1' b_2' \ldots b_n' \omega,$$

для любых $\omega \in \Omega$ и $b_i \in G$. В том случае, когда Θ: $b_i \to b_i'$ является взаимно однозначным соответствием, оно называется Ω-изоморфизмом.

---

*) F. Gécseg (Szeged)

В случае Ω-групп основной проблемой теории шрейеровых расширений является следующая: Пусть даны Ω-группы G и $\mathfrak{G}$. Надо определить все Ω-группы Γ содержащие G в качестве идеала, причем Ω-факторгруппа Γ/G Ω-изоморфа Ω-группе $\mathfrak{G}$.

§ 1. Теорема о расширении

Пусть дано множество G. Мы говорим, что на G определена операция ω_0, если на G уже определена бинарная операция $+$ и существует такой элемент 0 множества G, что

$$a+0=0+a=a$$

для любого $a \in G$. Этот элемент 0 и есть результат 0-арной операции ω_0.

Операция $-$ определена на G, если к каждому элементу a множества G можно найти такой элемент a', что

$$a+a'=a'+a=0.$$

В этом случае мы говорим, что a' равно $-a$.

Операция ω_1 определена на G, если для любых $a_i, a_j, a_k \in G$ имеет место равенство

$$(a_i+a_j)+a_k=a_i+(a_j+a_k), \tag{1}$$

и мы говорим, что тогда $a_i a_j a_k \omega_1$ равно левой (или правой) стороне равенства (1).

Пусть даны множества G и $\mathfrak{G}$ с системой операторов $+, \omega_0, -, \omega_1$ и Ω. Элементы из G условимся обозначать буквами b_i, элементы из $\mathfrak{G}$ буквами a_i, нулевой элемент группы G через 0, а группы $\mathfrak{G}$ — через θ. Множество пар элементов (a_i, b_j) обозначим буквой Γ.

Теперь докажем, что имеет место следующая

Теорема. Множество Γ тогда и толко тогда является шрейеровым расширением Ω-группы G с помошью Ω-группы $\mathfrak{G}$, если

(α) на Γ определены операции $+, \omega_0, -, \omega_1$ и Ω;

(β) $(a_i, b_i)+(a_j, b_j)=(a_i+a_j, a_i^{a_j}+b_i^{a_j}+b_j)$ для любых $b_i \in G$, $a_i \in \mathfrak{G}$, где $a_i^{a_j}, b_i^{a_j} \in G$ и $\theta^{a_i}=a_i^{\theta}=0^{a_i}=0$, $b_i^{\theta}=b_i$;

(γ) $(a_1, b_1)(a_2, b_2)\dots(a_n, b_n)\omega =$
$=(a_1 a_2 \dots a_n\omega, \omega^{a_1 a_2 \dots a_n} + {}^{b_1 b_2 \dots b_n}\omega^{a_1 a_2 \dots a_n} + b_1 b_2 \dots b_n\omega)$
для любых $b_1, b_2, \dots, b_n \in G$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathfrak{G}$ и $\omega \in \{\Omega, \omega_0, \omega_1\}$, где

$\omega^{a_1 a_2 \ldots a_n}$, ${}^{b_1 b_2 \ldots b_n}\omega^{a_1 a_2 \ldots a_n} \in G$ и $\omega^{\theta\theta\ldots\theta} = {}^{b_1 b_2 \ldots b_n}\omega^{\theta\theta\ldots\theta} = 0$, и обе эти функции равны 0, если $n=0$.[1])

Доказательство. Для доказательства необходимости пусть дана Ω-группа Γ содержащая в качестве идеала Ω-группу G, причем Ω-фактор-группа Γ/G Ω-изоморфна Ω-группе $\mathfrak{G}$.

Тогда

$$\Gamma/G \cong \mathfrak{G}(a'_i + G \to a_i,\ (a'_1 + G)(a'_2 + G)\ldots(a'_n + G)\,\omega \to a_1 a_2 \ldots a_n \omega),$$

для любой $\omega \in \{\omega_0, \omega_1, \Omega\}$, где a'_i является произволным элементом из смежного класса, являющегося прообразом элемента a при данном изоморфизме. Для однозначного выбора системы вычетов выберем заранее в каждом смежном классе по подгруппе G фиксированный элемент a'_i, и так получаем взаимно однозначное отображение Ω-группы $\mathfrak{G}$ в Ω-группу Γ. Можно принять, что $\theta' = 0$.

Так как $\mathfrak{G} = \Gamma/G$, то $(a_1 + a_2)' + G = a'_1 + G + a'_2 + G$. Таким образом существует такой элемент $b_k (\in G)$, что $(a_1 + a_2)' + b_k = a'_1 + a'_2$. Элемент b_k зависит лишь от элементов a_1 и a_2. Поэтому можно писать: $b_k = a_1^{a_2}$.

Итак $(a_1 + a_2)' + a_1^{a_2} = a'_1 + a'_2$.

Пусть a'_i произвольный элемент из Γ. Так как G является идеалом в Γ, то

$$G + a'_i = a'_i + G.$$

Таким образом к произвольному элементу $b_j \in G$ существует такой элемент $b_l \in G$, что

$$b_j + a'_i = a'_i + b_l.$$

Так как b_l зависит лишь от элементов b_j и a'_i, т. е. из-за взаимной однозначности отображения от b_j и a_i, то можно писать: $b_l = b_j^{a_i}$.

Отсюда следует

$$(a'_1 + b_1) + (a'_2 + b_2) = a'_1 + a'_2 + b_1^{a_2} + b_2 = (a_1 + a_2)' + a_1^{a_2} + b_1^{a_2} + b_2.$$

Левая сторона есть не что иное, как результат операции $+$, применительно к двум произвольным элементам группы Γ.

В дальнейшем пусть ω произвольный элемент множества $\{\omega_0, \omega_1, \Omega\}$. Так как G — идеал в группе Γ, то

$$(a'_1 + G)(a'_2 + G)\ldots(a'_n + G)\,\omega = a'_1 a'_2 \ldots a'_n \omega + G.$$

---

[1]) Вместо условия (γ) можно потребовать просто выполнение равенства $(a_1, b_1)\ldots$ $\ldots(a_n, b_n)\,\omega = (a_1 \ldots a_n\,\omega, b)$, где $b \in G$. Приведенная в тексте более сложная форма этого условия нужна нам потому, что из такой его формы будет непосредственно вытекать теорема о расширении групп с обычными операторами (см. § 2).

Итак, для произвольных элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n \in G$ можно найти такой $b \in G$, что

$$(a'_1 + b_1)(a'_2 + b_2) \ldots (a'_n + b_n)\,\omega = a'_1 a'_2 \ldots a'_n \omega + b.$$

Если $a'_1 = a'_2 = \ldots = a'_n = \theta'(=0)$, тогда

$$(0 + b_1)(0 + b_2) \ldots (0 + b_n)\,\omega = 0 + b_1 b_2 \ldots b_n \omega.$$

Так как G является группой, можно писать: $b = b_k + b_1 b_2 \ldots b_n \omega$, где b_k какой-то элемент из G. b зависит от $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и ω, а $b_1 b_2 \ldots b_n \omega$ от $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и ω. Таким образом можно писать: $b_k = {}^{b_1 b_2 \ldots b_n}\omega^{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Имеем

$$(a_1 a_2 \ldots a_n \omega)' = a'_1 a'_2 \ldots a'_n \omega + b_l.$$

b_l зависит лишь от $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ и ω, т. е. из-за взаимной однозначности отображения $'$ от $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и ω. Так мы получим

$$a'_1 a'_2 \ldots a'_n \omega = (a_1 a_2 \ldots a_n \omega)' + \omega^{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Отсюда

$$(a'_1 + b_1)(a'_2 + b_2) \ldots (a'_n + b_n)\,\omega = (a_1 a_2 \ldots a_n \omega)' +$$

$$+ \omega^{a_1 a_2 \ldots a_n} + {}^{b_1 b_2 \ldots b_n}\omega^{a_1 a_2 \ldots a_n} + b_1 b_2 \ldots b_n \omega.$$

Из-за взаимной однозначности отображения $'$ можно принять обозначение:

$$a'_i + b_j = (a_i, b_j).$$

Докажем, что обратно: если выполняются условия (α), (β) и (γ), тогда Γ есть шрейерово расширение Ω-группы G при помощи Ω-группы $\mathfrak{G}$.

(α) обеспечивает, чтобы Γ была Ω-группой.

Множество G' всех элементов (θ, b_i) есть Ω-подгруппа Ω-группы Γ, которая отображается Ω-изоморфно на Ω-группу G отображением $(\theta, b_i) \leftrightarrow b_i$:

$$(\theta, b_1) + (\theta, b_2) = (\theta, b_1 + b_2),\ (\theta, b_1)(\theta, b_2) \ldots (\theta, b_n)\,\omega = (\theta, b_1 b_2 \ldots b_n \omega).$$

G' является нормальным делителем в Γ, потому что для любой $(a_i, b_j) \in G$

$$(a_i, b_j) + (\theta, b_k) = (a_i, b_j + b_k),\ (\theta, b_k) + (a_i, b_j) = (a_i, b_k^{a_i} + b_j).$$

Мы получаем так же просто, что G' является идеалом. В самом деле, для любых $b_1, b_2, \ldots, b_n, b'_1, b'_2, \ldots, b'_n \in G$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$

$$\big((a_1, b_1) + (\theta, b'_1)\big)\big((a_2, b_2) + (\theta, b'_2)\big) \ldots \big((a_n, b_n) + (\theta, b'_n)\big)\,\omega =$$

$$= (a_1, b_1)(a_2, b_2) \ldots (a_n, b_n)\,\omega + (\theta, b)$$

где b один из элементов группы G.

Таким образом

$$((a_1, b_1)+(\theta, b_1'))((a_2, b_2)+(\theta, b_2'))\dots((a_n, b_n)+(\theta, b_n'))\,\omega -$$
$$-(a_1, b_1)(a_2, b_2)\dots(a_n, b_n)\,\omega \in G'.$$

Очевидно, что Ω-факторгруппа Γ/G' Ω-изоморфна Ω-группе $\mathfrak{G}$.

§ 2. Теоремы расширения в некоторых специалных случаях

В этом параграфе мы покажем, при каких областях мультиоператоров Ω перейдет теорема о расширении в теоремы о расширении групп, колец и групп с (обычными) операторами.

Для этой цели дадим подходящие определения понятий группы, кольца и группы с операторами.

Множество G элементов называется группой, если на нем определены операции $+$, $-$, ω_0 и ω_1. Таким образом, теорема предыдущего параграфа переходит в теорему о расширении групп, если множество Ω пустое.

Пусть дано множество G с операцией $+$. Мы говорим, что на G определена еще другая бинарная операция ω_2, если для любых $a, b \in G$:

$$a+b=b+a. \tag{2}$$

В этом случае $ab\omega_2(=ba\omega_2)$ равно левой (и правой) стороне равенства (2).

Пусть ω_3 произвольная бинарная операция на G, отличная от операции $+$.

Если для любых элементов

$$ab\omega_3c\omega_3=a(bc\omega_3)\,\omega_3, \tag{3}$$

тогда пусть определена на G тернарная операция ω_4, для которой $abc\omega_4$ равно левой (и правой) стороне равенства (3). Если есть такие элементы в G, для которых (3) не имеет место, тогда ω_4 не определена на G.

Опять пусть $a, b, c \in G$ произвольны. На G определены операции ω_5 и ω_6 тогда и только тогда, если

$$(a+b)\,c\omega_3=ac\omega_3+bc\omega_3 \tag{4}$$

$$a(b+c)\,\omega_3=ab\omega_3+ac\omega_3. \tag{5}$$

В этом случае $abc\omega_5$ и $abc\omega_6$ равны одной из сторон равенства (4), соответственно (5). Применяя теорему о расширении к Ω-группам с областью мультиоператоров $\Omega=\{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, получаем теорему о расширении колец.

Л. Фукс в работе [3] разработал теорию расширения групп с обычными операторами. Мы это получим из теоремы расширения, если будем применять на G, $\mathfrak{G}$ и Γ операции $+, -, \omega_0, \omega_1$ и множество Ω обычных операторов. В цитированной работе требовалось, чтобы имело место

$$(a, b)\,\omega = (a\omega, \omega^a + b\omega). \tag{6}$$

Так как $(a+b)\,\omega = a\omega + b\omega$, то в условии (γ) ${}^b\omega^a = 0$ и оно переходит в (6).

Тем самим мы доказали, что наша теорема содержит и теорему о расширении групп с операторами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] RÉDEI L., *Algebra* I (Budapest, 1954).
[2] J. HIGGINS, Groups with multiple operators, *Proc. London Math. Soc.*, **6** (1956), 366—416.
[3] L. FUCHS, Rédeian skew product of operator groups, *Acta Sci. Math.*, **13** (1952), 228—238.

(Поступило 16/IX/1961 г.)

Bemerkung zu meiner Arbeit „Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind"

Von F. SZÁSZ in Budapest

Herr W. DLAB hat in seiner Arbeit [1] den Satz meiner Note [9] verallgemeinert. In der vorliegenden Arbeit möchte ich diese Verallgemeinerung wesentlich kürzer und mehr elementar beweisen, wobei ich anders als Herr W. DLAB im nichtkommutativen Fall keine Fallunterscheidung nach periodischen bzw. nichtperiodischen Gruppen machen werde.[1])

Bezeichne G^n die durch die Elemente g^n $(g \in G)$ erzeugte, offenbar vollinvariante Untergruppe einer beliebigen Gruppe G. Die Mächtigkeit einer Gruppe G wird mit $|G|$ bezeichnet. $\mathfrak{J}$ bezeichnet den Ring der ganzen rationalen Zahlen.

Es gilt der folgende Satz von W. DLAB:

Satz. *Für eine beliebige Gruppe G und für den größten gemeinsamen Teiler d der natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ist die Gruppe G^d dann und nur dann zyklisch, wenn alle Potenzen $G^{n_1}, G^{n_2}, \ldots, G^{n_k}$ zyklisch sind.*

Beweis. Da die Behauptung „nur dann" trivial ist, so genügt es die Behauptung „dann" zu beweisen. Dabei genügt es den Fall $d=(n_1, n_2)$ d. h. $k=2$ zu betrachten, denn der allgemeine Beweis folgt daraus mit leichter Induktion nach k. Bestehe nun $G^{n_1}=\{g_1\}$ und $G^{n_2}=\{g_2\}$ mit $(n_1, n_2)=d$ und $n_i=d\cdot m_i$. Dann gilt $(m_1, m_2)=1$.

Zuerst wird $G^d=\{g_1, g_2\}$ $(=G^{n_1}G^{n_2})$ bewiesen.

Zum Beweis sei t_j $(j=1, 2)$ die Ordnung der Klasse $g_i\{g_j\}$ in der Faktorgruppe $G/\{g_j\}$ $(i\neq j)$. Dann folgt aus der trivialen Beziehung $\{g_1^{m_2}\}=\{g_2^{m_1}\}$ sofort t_j/m_j, also auch $(t_1, t_2)=1$. Hiernach existieren Zahlen $k_1, k_2 \in \mathfrak{J}$ mit

$$(*) \qquad t_1k_1+t_2k_2 = 1.$$

Da mit passenden $l_1, l_2 \in \mathfrak{J}$ auch $m_1l_1+m_2l_2 = 1$ besteht, so ergibt sich

$$x^d=(x^{l_1})^{m_1d}\cdot(x^{l_2})^{m_2d} \in G^{n_1}\cdot G^{n_2} \subseteqq \{g_1, g_2\},$$

folglich $G^d \subseteqq \{g_1, g_2\}$. Anderseits gilt

$$\{g_i\}=G^{n_i}=G^{m_id} \subseteqq (G^{m_i})^d \subseteqq G^d$$

d. h. $\{g_1, g_2\} \subseteqq G^d$. Also ist $G^d=\{g_1, g_2\}$, wie behauptet wurde.

[1]) Herr I. KÖRNYEI hat mich aufmerksam gemacht, daß die letzte Behauptung des Beweises auf Seite 83 meiner Note [9] falsch ist. Freilich wird dieser Fehler durch meine vorliegende Arbeit auch verbessert. (Vgl. auch die ungarisch gefaßte Version [10] meiner Note [9].)

Wir schicken jetzt den Fall voraus, daß G^d kommutativ ist.

I. Es sei G^d kommutativ. Sind $\{g_1\}$ und $\{g_2\}$ beide endlich, so ist auch G^d endlich, und zwar das direkte Produkt ihrer p-Komponenten $(G^d)_p$, also ist

$$G^d = \prod_p \otimes (G^d)_p.$$

Für die Untergruppen

$$H_1 = \prod_{p/m_1} \otimes (G^d)_p, \quad H_2 = \prod_{(p, m_1)=1} \otimes (G^d)_p$$

gelten dann $G^d = H_1 \otimes H_2$, $H_1^{m_2} = H_1$, $H_2^{m_1} = H_2$, also

$$G^{n_1} = H_1^{m_1} \otimes H_2 \quad \text{bzw.} \quad G^{n_2} = H_1 \otimes H_2^{m_2}.$$

Hiernach sind H_2 und H_1 zyklisch. Dann ist aber wegen $(|H_1|, |H_2|) = 1$ auch $G^d (= H_1 \otimes H_2)$ zyklisch.

Ist aber z. B. $\{g_1\}$ unendlich, so gilt wegen der Gleichungen

$$(**) \qquad g_1^{t_2} = g_2^{t_1 s_1} \quad \text{bzw.} \quad g_2^{t_1} = g_1^{t_2 s_2},$$

wobei $s_1, s_2 \in \mathfrak{J}$ passende Zahlen sind, entweder $t_2 = 0$ oder $O(g_2) = 0$. Im ersten Fall folgt aus $t_2 = 0$ und $(t_1, t_2) = 1$ sofort $t_1 = +1$ oder -1, folglich $g_2 \in \{g_1\}$ und $G^d = \{g_1, g_2\} = \{g_1\}$. Also können wir den zweiten Fall $O(g_2) = 0$ voraussetzen. Dann darf aber wegen der Gleichungen $(**)$ auch $g_1^{t_2} = g_2^{e \cdot t_1}$ angenommen werden wobei $e = +1$ oder -1 ist. Hiernach erhält man wegen der Gleichung $(*)$ sofort

$$g_i = (g_1^{k_1} \cdot g_2^{e \cdot k_2})^{e^{i+1} \cdot t_i} \qquad (i = 1, 2).$$

Hieraus folgt mit der Bezeichnung $g_0 = g_1^{k_1} \cdot g_2^{e k_2}$ offenbar $G^d = \{g_1, g_2\} = \{g_0\}$, w. z. b. w.

II. Es sei G^d beliebig. Dann liegt die vollinvariante Untergruppe $D = \{g_1\} \cap \{g_2\}$ von G im Zentrum Z_d von G^d. Da ferner aus $g_1^{f_1} D = g_2^{f_2} D$ $(f_i \in \mathfrak{J})$ sofort $g_1^{f_1} \cdot g_2^{-f_2} \in D \subseteqq \{g_2\}$ folgt, so ergibt sich $g_1^{f_1} \in \{g_2\}$, also $g_1^{f_1} \in D$ und $g_1^{f_1} D = g_2^{f_2} D = D$. Hiernach existiert das direkte Produkt

$$P = \{g_1 D\} \otimes \{g_2 D\},$$

das offenbar mit $G^d/D (= (G/D)^d)$ identisch ist. Hieraus folgt die Kommutativität von G^d/D. Aus $((G/D)^d)^{m_i} = (G/D)^{n_i}$ erhält man nach $(m_1, m_2) = 1$ und I, daß $(G/D)^d$ zyklisch ist. Dann ist aber G^d/Z_d ebenfallsch zyklisch, denn es gilt $D \subseteqq Z_d$. Hieraus folgt bekanntlich $G^d = Z_d$, und G^d ist wieder nach I zyklisch. Somit haben wir den Satz bewiesen.

Zum Schluß möchte ich einige Probleme aufwerfen, die meines Wissens im allgemeinen noch ungelöst sind.

Bezeichne E_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ eine der folgenden Eigenschaften:

E_1: die Gruppe ist das direkte Produkt von zyklischen Gruppen;
E_2: die Gruppe ist kommutativ;
E_3: die Gruppe ist nilpotent;
E_4: die Gruppe ist auflösbar.

Dann kann gefragt werden: Wenn die Potenzen $G^{n_1}, G^{n_2}, \ldots, G^{n_k}$ einer beliebigen Gruppe G alle die feste Eigenschaft E_j haben, braucht dann für $d=(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ auch die Gruppe G^d dieselbe feste Eigenschaft E_j $(j=1, 2, 3$ oder $4)$ zu haben?

Literaturverzeichnis

[1] W. Dlab, On cyclic groups, *Czechoslovak Math. J.*, **10/85** (1960), 244–254.

[2] Gh. Pic, De la caracterisation des groupes cycliques, *Comun. Acad. Republ. Popul. Romîne*, **6** (1956), 235–238 (Rumänisch, mit französischer Zusammenfassung).

[3] B. I. Plotkin, Verallgemeinerte auflösbare und verallgemeinerte nilpotente Gruppen, *Uspechi Math. Nauk*, **13** (1958), 89–172 (Russisch).

[4] L. A. Rosati, Sui gruppi ogni sottogruppo ciclico dei quali e caratteristico, *Bul. Univ. Mat. Ital.*, **11** (1956), 544–552.

[5] E. Schenkman, A characterization of some metacyclic groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8 (4)** (1957), 664–667.

[6] F. Szász, On groups every cyclic subgroup of which is a power of the group, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1956), 475–477.

[7] F. Szász, On cyclic groups, *Fund. Math.*, **43** (1956), 238–40.

[8] F. Szász, A characterization of the cyclic groups, *Revue de Math. Pures et Appl. Bucureşti*, **1** (1956), 13–16.

[9] F. Szász, Über Gruppen, deren sämtliche nicht-triviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956) 83–84.

[10] F. Szász, Csoportokról, amelyeknek összes nem-triviális hatványai ciklikus alcsoportok, *MTA III. Oszt. Közl.*, **5** (1955), 491–492.

[11] F. Szász, On rings, every subring of which is a multiple of the ring, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 327–238.

[12] B. Tóth, Über eine Charakterisierung der zyklischen Gruppen, *Szegedi Pedagógiai Főiskola Évkönyve*, (1959) 311–313 (Ungarisch, mit russischer und deutscher Zusammenfassung).

(Eingegangen am 11. Februar 1961)

Slender Groups*)

By R. J. NUNKE in Seattle (Washington, U. S. A.)

Let P be the direct product of countably many copies of the integers Z, i. e., the group of all sequences $x=(x_1, x_2, \ldots)$ of integers with termwise addition. For each natural number n let δ^n be the element of P whose n-th coordinate is 1 and whose other coordinates are 0. J. Łoś calls a torsion-free abelian group *slender* if every homomorphism of P into it sends all but a finite number of the δ^n into 0. The concept first appeared in [3]. E. Sąsiada [8] has shown that all reduced countable groups are slender. The purpose of this paper is to give a new description of the slender groups and to apply it to show that certain classes of groups are slender. All groups in this paper are abelian.

Our starting point is the observation that a group is slender if and only if every homomorphic image of P in it is slender. Our first task will be to describe the homomorphic images of P (theorem 5). Once this is done it is easy to describe the slender groups (corollary 6). The proof of theorem 5 is preceded by four lemmas. The first two of these are extensions of two results contained in [6]. Some details of their proofs will therefore be omitted. Lemma 4 is a consequence of theorem 1 of Balcerzyk's paper [2].

Following J. J. Rotman we call a group G a *B-group* if $\operatorname{Ext}(G, T)=0$ for every torsion group T, and a *W-group* if $\operatorname{Ext}(G, Z)=0$. In [7] Rotman showed that every separable B-group and every W-group is slender. His proof however requires the continuum hypothesis. We shall prove Rotman's results assuming neither the separability of the B-groups nor the continuum hypothesis.

1. The dual of the group A is the group $A^* = \operatorname{Hom}(A, Z)$. There is a natural homomorphism $\sigma_A\colon A \to A^{**}$ defined by considering the elements of A as homomorphisms of A^* into Z. Using the fact that P^* is the free group generated by the coordinate projections, it is easy to show that σ_P is an isomorphism between P and P^{**} so that P may be identified with its double dual.

Suppose A is a subgroup of P. Taking duals gives an exact sequence

$$0 \to (P/A)^* \to P^* \to A^*. \tag{1}$$

Let A' be the image of $(P/A)^*$ in P^*. It consists of all h in P^* such that $h(A)=0$,

---

*) This work was supported by the National Science Foundation through grant NSF—G11098.

i. e., it is the annihilator of A in P^*. Let B be the image of P^* in A^* so that the sequence

(2) $$0 \to (P/A)^* \to P^* \to B \to 0$$

is exact. Taking duals again gives a commutative diagram

(3) $$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & A & \to & P & \to & P/A & \to 0 \\ & \downarrow \lambda & & \downarrow \sigma_P & & \downarrow \sigma & \\ 0 \to & B^* & \to & P^{**} & \to & (P/A)^{**} & \end{array}$$

with exact rows. In this diagram $\sigma = \sigma_{(P/A)}$ and λ is induced by σ_P and σ. We use σ_P to identify P with P^{**}. Then the image of B^* in $P^{**} = P$ is the annihilator A'' of A'. It consists of all x in P such that $h(x) = 0$ whenever h is in P^* and $h(A) = 0$.

Lemma 1. *If $A \subset P$, then $P = A'' \oplus C$. Both A'' and C are direct products of at most countably many copies of Z and $(A''/A)^* = 0$.*

Proof. We refer to diagrams (1)–(3) preceding the lemma. Since A^* can be embedded in a product (of copies of Z) and $B \subset A^*$, B can also be embedded in a product. As an image of P^*, B is countable. These two properties together imply that B is free. Hence the sequence (2) splits. It follows that the bottom row of (3) also splits so that $P = A'' \oplus C$ with A'' isomorphic to B^* and C isomorphic to $(P/A)^{**}$. Since B and $(P/A)^*$ are free of at most countable rank, their duals are products of at most countably many copies of Z.

To show that $(A''/A)^* = 0$ suppose $h: A'' \to Z$ is such that $h(A) = 0$. Then h can be extended to P by annihilating C. From the definition of A'', $h(A'') = 0$ so that $h = 0$.

Let Z be given the discrete topology and P the associated cartesian product topology. The statement that P^* is free on the coordinate projections is equivalent to the statement that each homomorphism of P into Z is continuous. Hence every endomorphism of P is continuous and the product topology on P is independent of the way P is represented as a product of Z's. From lemma 1 we see that if $P = A \oplus C$, then both A and C are products. Moreover this splitting is topological and the induced topologies on A and C are the product topologies.

Lemma 2. *Let $A \subset P$ and let S be the subgroup of finite sequences in P.*

(a) *If A has finite rank, then A is closed.*

(b) *If A has infinite rank, there is an isomorphism of $\bar{A}$ with P which carries A onto a subgroup of P containing S.*

(c) *If A is dense in P, there is an automorphism of P which carries A onto a subgroup of P containing S.*

Proof. Let $P_n = \{x \in P \mid x_i = 0 \text{ for } i < n\}$. Then $P = P_1, P_2, \ldots$ is a base at 0 for the topology on P. There are elements a^n $(n = 1, 2, \ldots)$ in A such that

i) $a_i^n = 0$ for $i < n$;
ii) $a_n^n = 0$ if and only if $a^n = 0$;
iii) a_n^n divides x_n for all x in $A \cap P_n$.

In view of (i), (ii) the $a^n \neq 0$ are independent. If A has finite rank the set of $a^n \neq 0$ is finite and generates $\bar{A}$ (cf. [6]). Thus $A = \bar{A}$ in this case proving (a).

If A has infinite rank, the set of all n such that $a^n \neq 0$ is infinite. Let k be a one-to-one correspondence between the natural numbers and this set. There is an endomorphism h of P such that $h(x)_i = \Sigma_n \; x_n a_i^{k(n)}$. The properties (i)–(iii) show that h is an isomorphism between P and $\bar{A}$. If δ^n is the element of P whose n-th coordinate is 1 and whose other coordinates are 0, then $h(\delta^n) = a^{k(n)}$ and is in A. Thus h^{-1} is the isomorphism required to prove (b).

To prove (c) we observe that if A is dense in P it has infinite rank and then apply (b).

Suppose $A \subset P$. If h is in P^* and $h(A)=0$, then $h(\bar{A})=0$ because h is continuous. We therefore have $A \subset \bar{A} \subset A'' \subset P$. Moreover, in view of lemmas 1 and 2, $\bar{A}$ and A'' are products and A'' is a direct summand of P.

Lemma 3. *Let $A \subset P$ with A a product and $(P/A)^* = 0$. Then the map $P^* \to A^*$ induced by duality is a monomorphism. If $U = A^*/P^*$, then $U^* = 0$ and $P/A \approx$* Ext (U, Z).

Proof. The first statement is obvious. Since A is a product, A^* is free and Ext $(A^*, Z) = 0$. Dualizing the exact sequence

$$0 \to P^* \to A^* \to U \to 0$$

gives the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & \to & A & \to & P & \to & P/A & \to & 0 \\ & & & & \downarrow \sigma_A & & \downarrow \sigma_P & & \downarrow \tau & & \\ 0 & \to & U^* & \to & A^{**} & \to & P^{**} & \to & \mathrm{Ext}(U, Z) & \to & \mathrm{Ext}(A^*, Z) \to 0 \end{array}$$

with exact rows. The map τ is induced by σ_A and σ_P. Since A and P are products both σ_A and σ_P are isomorphisms. Thus τ is an isomorphism and $U^* = 0$.

As stated in the introduction the next lemma is a consequence of theorem 1 of [2]. We give here a direct proof using the theory of abelian group extensions. Moreover the method of proof used here, together with the representation theorem for Boolean σ-algebras, can be used to prove BALCERZYK's theorem.

Lemma 4. *If Q is the additive group of rational numbers, then* Ext $(Q, P/S) = 0$.

Proof. Let π: $P \to P/S$ be the natural projection. Since the sequence

$$\mathrm{Ext}(Q, P) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Ext}(Q, P/S) \to 0$$

is exact, it is enough to show that the image of π^* is 0. In terms of extensions this means that, for each extension

$$0 \to P \to E \to Q \to 0, \tag{4}$$

there is a homomorphism f: $E \to P/S$ which extends π.

For $n = 1, 2, \ldots$ let e^n be an element in E mapping onto $1/n!$ modulo P. Then E is generated by P and $e^1, e^2, \ldots$ with relations

$$e^n = (n+1)e^{n+1} + a^n \tag{5}$$

where the a^n are in P. If f: $\{e^1, e^2, \ldots\} \to P/S$ satisfies the relations

$$f(e^n) = (n+1)f(e^{n+1}) + \pi(a^n) \tag{6}$$

for all n, then f can be extended to a homomorphism of E into P/S with the desired properties. We therefore want to define f on the e's so as to satisfy the relations (6).

Each a^n is in P. There are elements b^n in S such that $(a^n+b^n)_i=0$ for $i<n$. We set

$$y^n = \sum_{k\geqq n} k!(a^k+b^k);$$

the sum has meaning because it is finite on each coordinate. We also define

$$x^n = y^n/n! = \sum_{k\geqq n} (k!/n!)(a^k+b^k).$$

Then

$$y^n = y^{n+1}+n!(a^n+b^n)$$

so that

$$x^n = (n+1)x^{n+1}+a^n+b^n. \tag{7}$$

If we now define $f(e^n)=\pi(x^n)$ we see that (7) implies (6) because the b's are in S. Thus the required homomorphism exists.

A group C is a *cotorsion* group if it is reduced and if $C\subset E$ and E/C torsion-free imply that C is a direct summand of E. The group C is the direct sum of a divisible group and a cotorsion group if and only if $\operatorname{Ext}(Q, C)=0$ (see HARRISON [4] § 2 or NUNKE [5] § 7). Since a pure subgroup of bounded order of a group is always a direct summand, every group of bounded order is cotorsion.

Theorem 5. *Each homomorphic image of P is the direct sum of a divisible group, a cotorsion group, and the direct product of at most countably many copies of Z.*

Proof. Let $A\subset P$. If A has finite rank, let B be the pure subgroup of P generated by A. The $P=B\oplus C$ where C is a product by lemma 1 and B is a finitely generated free group. Then $P/A=B/A\oplus C$ and B/A is finite, hence cotorsion.

Suppose that A has infinite rank. By lemma 1 we have $P=A''\oplus C$ where A'' and C are products and $(A''/A)^*=0$. Then $P/A=A''/A\oplus C$ so that the proof will be complete once we show that $\operatorname{Ext}(Q, A''/A)=0$.

We have inclusions $A\subset\bar{A}\subset A''$, hence an exact sequence

$$0\to\bar{A}/A\to A''/A\to A''/\bar{A}\to 0. \tag{8}$$

Since A has infinite rank both $\bar{A}$ and A'' are isomorphic to P. From (8) we get an exact sequence

$$\operatorname{Ext}(Q, \bar{A}/A)\to\operatorname{Ext}(Q, A''/A)\to\operatorname{Ext}(Q, A''/\bar{A}). \tag{9}$$

Since A'' and $\bar{A}$ are both isomorphic to P, lemma 3 gives $A''/\bar{A}\approx\operatorname{Ext}(U, Z)$ for some group U. Applying the associative law for Ext and Tor ([5] p. 225) we get

$$\operatorname{Ext}(Q, \operatorname{Ext}(U, Z))\approx\operatorname{Ext}(\operatorname{Tor}(Q, U), Z)=0.$$

The equality holds because Q is torsion-free which implies $\operatorname{Tor}(Q, U)=0$. Thus $\operatorname{Ext}(Q, A''/\bar{A})=0$.

Since A has infinite rank, there is by lemma 2 an isomorphism of $\bar{A}$ with P such that the image A_0 of A contains S. We have then $A/\bar{A} \approx P/A_0$ and, since $S \subset A_0 \subset P$, an exact sequence

$$P/S \to P/A_0 \to 0.$$

The sequence

$$\mathrm{Ext}(Q, P/S) \to \mathrm{Ext}(Q, P/A_0) \to 0$$

is then exact. By lemma 4 Ext $(Q, P/S)=0$ so that Ext $(Q, P/A_0)=0=$ Ext $(Q, \bar{A}/A)$.

Since the two end groups in (8) are 0 and (8) is exact, the middle group is also 0. Thus Ext $(Q, A''/A)=0$ as desired.

Corollary 6. *A torsion-free group is slender if and only if it is reduced, contains no copy of the p-adic integers for any prime p, and contains no copy of P.*

Proof. We note first that the group of p-adic integers is not slender for the homomorphism $x \to \Sigma_i x_i p^i$ sends each δ^n into $p^n \neq 0$. Since a subgroup of a slender group is slender, the proof in the forward direction is then easy.

According to [4] p. 371 a torsion-free cotorsion group C has the form Hom$(Q/Z, B)$ where B is a divisible torsion group. If C is not 0, it contains a subgroup isomorphic to Hom $(Z(p^\infty), Z(p^\infty))$ for some prime p. This last group is isomorphic to the p-adic integers. Thus every nonzero torsion-free cotorsion group contains a copy of the p-adic integers for some p.

Suppose G is a torsion-free group satisfying the second clause of the corollary. A group is slender if and only if every homomorphic image of P in it is slender. In view of theorem 5, the preceding paragraph, and the hypothesis on G, a homomorphic image of P in G is the product of a finite number of copies of Z and is therefore slender by [8].

A group is called $\aleph_1$-*free* if every at most countable subgroup is free.

Corollary 7. *An $\aleph_1$-free group is slender if and only if it contains no copy of P.*

2. In this section we apply corollary 7 to show that every B-group and every W-group is slender. Various people (see [5] or [7] for example) have shown that B-groups and W-groups are $\aleph_1$-free. If $B \subset A$, then

$$\mathrm{Ext}(A, C) \to \mathrm{Ext}(B, C) \to 0$$

is exact for every C. Hence every subgroup of a B-group (W-group) is a B-group (W-group). In view of corollary 7 slenderness will follow if we show that P is neither a B-group nor a W-group. The first of these was shown by Baer in [1]. The second is Ext $(P, Z) \neq 0$. The group structure of Ext (P, Z) is easily described.

Theorem 8. *Let $c=2^{\aleph_0}$. Then* Ext (P, Z) *is the direct sum of 2^c copies of Q and 2^c copies of Q/Z.*

Proof. Let p be a prime. If $pA=0$, then A is a vector space over Z/pZ whose dimension we shall call the p-rank of A. It is the number of summands in any representation of A as the direct sum of copies of Z/pZ. If A is the direct product of b copies of Z/pZ and b is infinite, then the p-rank of A is 2^b.

Since P/pZ is the direct product of $\aleph_0$ copies of Z/pZ, its p-rank is $c=2^{\aleph_0}$. Since Ext (, Z) carries direct sums into direct products, Ext $(P/pP, Z)$ is the direct product of c copies of Z/pZ and therefore has p-rank 2^c. The exact sequence

$$0 \to P \xrightarrow{p} P \xrightarrow{\alpha} P/pP \to 0$$

gives an exact sequence

$$\text{Hom}\,(P, Z) \to \text{Ext}\,(P/pP, Z) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Ext}\,(P, Z) \xrightarrow{p} \text{Ext}\,(P, Z) \to 0.$$

The image of α^* is Ext (P, Z) $[p]$. Moreover Hom (P, Z) has cardinal $\aleph_0$ while Ext $(P/pP, Z)$ has cardinal 2^c. Hence Ext (P, Z) $[p]$ has p-rank 2^c.

Now Ext (P, Z) is divisible because P is torsion-free. Hence the p-primary component of Ext (P, Z) is the direct sum of copies of $Z(p^\infty)$, the number of copies being the p-rank of Ext (P, Z) $[p]$, i. e., 2^c. Since this is true for all primes, the torsion subgroup of Ext (P, Z) is the direct sum of 2^c copies of Q/Z.

Since Ext (P, Z) is divisible, it is the direct sum of its torsion subgroup and the direct sum of copies of Q equal in number to its torsion-free rank. We shall therefore be finished when we show that the rank of Ext (P, Z) is 2^c. We have $0 \to P \to P \otimes Q$ exact and $rk\,(P \otimes Q) = rk\,(P) = c$. Thus $P \otimes Q$ is the direct sum of c copies of Q. Then

$$\text{Ext}(P \otimes Q, Z) \to \text{Ext}(P, Z) \to 0$$

is exact and Ext $(P \otimes Q, Z)$ is the direct product of c copies of Ext (Q, Z). Moreover Ext (Q, Z) is torsion-free with rank c. Hence Ext $(P \otimes Q, Z)$ has rank 2^c. Thus Ext (P, Z) has rank $\leqq 2^c$.

The group P has a sequence of subgroups $T_1, T_2, \ldots$ each isomorphic to P such that the sum $\Sigma_n T_n$ is direct. We thus get an exact sequence

$$\text{Ext}(P, Z) \to \Pi_n \text{Ext}(T_n, Z) \to 0.$$

Let p_n be the n-th prime and let I be a set of cardinal 2^c. There exists, for each n, a family $(y_{ni})_{i \in I}$ of elements in Ext (T_n, Z) $[p_n]$ independent modulo p_n. Let y_i be the element in Π_n Ext (T_n, X) whose n-th coordinate is y_{ni}. The family $(y_i)_{i \in I}$ is independent so that Π_n Ext (T_n, Z) has rank $\geqq 2^c$. Thus Ext (P, Z) has rank $\geqq 2^c$. Its rank is therefore exactly 2^c as required to prove the theorem.

The discussion at the beginning of this section now gives

Theorem 9. *Every B-group and every W-group is slender.*

References

[1] R. BAER, Die Torsionsuntergruppe einer abelschen Gruppe, *Math. Ann.*, **135** (1958), 219–234.
[2] S. BALCERZYK, On factor groups of some subgroups of a complete direct sum of infinite cyclic groups, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.*, **7** (1959), 141–142.
[3] L. FUCHS, *Abelian Groups* (Budapest, 1958).
[4] D. K. HARRISON, Infinite abelian groups and homological methods, *Ann. of Math.*, **69** (1959), 366–391.
[5] R. J. NUNKE, Modules of extensions over Dedekind rings, *Illinois Math. J.*, **3** (1959), 222–241.
[6] R. J. NUNKE, On direct products of infinite cyclic groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 66–71.
[7] J. ROTMAN, On a problem of Baer and a problem of Whitehead, *Acta Math. Hung.*, **12** (1961), 245–254.
[8] E. SĄSIADA, Proof that every countable and reduced torsion-free group is slender, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.*, **1** (1959), 143–144.

UNIVERSITY OF WASHINGTON
SEATTLE, WASHINGTON

(Received May 12, 1961)

Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn Steinfeld

Von RICHARD WIEGANDT in Orosháza (Ungarn)

Herr STEINFELD hat in seiner Arbeit[1]) [2] einen einfachen Beweis des Satzes von RÉDEI über die einstufig nichtregulären Ringe [1] gegeben und die einstufig nichtprimen Ringe charakterisiert[2]) Dabei hat er unter anderem die folgenden Behauptungen bewiesen:

Hilfssatz 1. *Wenn ein Ring R nichtregulär ist und jedes echte Linksideal von R regulär ist, dann ist R die direkte Summe von zwei Idealen oder ein Zeroring von Primzahlordnung.*

Hilfssatz 2. *Wenn ein Ring R nichtprim ist und jedes echte Ideal von R prim ist, dann ist R die direkte Summe von zwei Idealen oder ein Zeroring von Primzahlordnung.*

Wir gebrauchen auch den folgenden Satz von T. SZELE [3] (der übrigens ein Korollar des Wedderburn—Artinschen Struktursatzes ist).

Hilfssatz 3. *Ein Ring ohne echte Linksideale ist entweder ein Schiefkörper oder ein Zeroring von Primzahlordnung.*

Aus diesen Hilfsätzen folgt einfach unser

Satz. *Für jeden Ring R sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(*a*) *R ist die direkte Summe von zwei Schiefkörpern, oder ein Zeroring von Primzahlordnung;*
(*b*) *R ist nichtregulär und jedes echte Quasiideal*[3]) *von R ist regulär;*
(*c*) *R ist nichtregulär und jedes echte Linksideal von R ist regulär;*
(*d*) *R ist kein Schiefkörper und jedes echte Quasiideal von R ist ein Schiefkörper;*
(*e*) *R ist kein Schiefkörper und jedes echte Linksideal von R ist ein Schiefkörper;*
(*f*) *R ist nichtprim und jedes echte Quasiideal von R ist prim;*
(*g*) *R ist nichtprim und jedes echte Linksideal von R ist prim.*

Aus (*a*) folgt (*b*) unmittelbar. Da die Linksideale auch Quasiideale sind, so folgt aus (*b*) (*c*). Nehmen wir an, daß (*c*) erfüllt ist. Aus den Hilfssätzen 1 und 3 folgt (*a*) trivial.

---

1) Herr STEINFELD hat das Manuskript seiner Arbeit [2] noch vor dem Erscheinen mir zur Verfügung gestellt. Darum bin ihm zu innigem Dank verpflichtet.

2) Die Definitionen siehe in [2].

3) Ein Unterring $\mathfrak{a}$ des Ringes R ist ein Quasiideal wenn die Relation $\mathfrak{a}R \cap R\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ gültig ist.

Es ist klar, daß aus (a) die Bedingung (d) und aus (d) die Bedingung (e) folgt. Aus (e) folgt (a), das ist nämlich eben die Behauptung von Satz 2 in [4].

Offenbar folgt aus (a) auch (f) und aus (f) auch (g). Wegen der Behauptungen der Hilfssätze 2 und 3 folgt aus (g) offenbar (a).

Wir bemerken noch, daß *für einen Artinschen Ring R die Bedingungen* (a)—(g) *auch mit den folgenden Bedingungen* (i), (ii) *äquivalent sind:*

(i) *R ist nichtregulär und die sämtlichen echten Ideale von R sind regulär;*

(ii) *R ist kein Schiefkörper und die sämtlichen echten Ideale von R sind Schiefkörper.*

Auserdem sind *im Artinschen Fall* auch die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:

(i°) *R ist nichtprim und jedes echte Ideal von R ist prim;*

(ii°) *R ist die direkte Summe von zwei vollen Matrixringen über Schiefkörpern oder ein Zeroring von Primzahlordnung.*

In diesen Fällen sind nämlich die betrachteten Ringe immer Radikalfrei also auch halbeinfach. So folgen diese Behauptungen aus den Wedderburn—Artinschen Struktursätzen und aus Hilfssatz 2 unmittelbar.

Literaturverzeichnis

[1] L. Rédei, Die einstufig nichtregulären Ringe, *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 238–244.

[2] O. Steinfeld, Die einstufig nichtregulären bzw. nichtprimen Ringe, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 82–84.

[3] T. Szele, Die Ringe ohne Linksideale, *Buletin Ştiinţific Bucureşti*, **1** (1949), 783–789.

[4] R. Wiegandt, Bemerkung über die einstufig nichregulären Ringe, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 350–352.

(Eingegangen am 27. März 1961)

On the approximate limits of a real function*)

By CASPER GOFFMAN in Lafayette (Indiana, USA)

The theorem of W. H. YOUNG, [1], on the symmetric structure of an arbitrary real function f asserts that the set of right limits of f is the same as the set of left limits of f at every point x, except for points belonging to a countable set.

It has recently been shown by L. BELOWSKA, [2], that the theorem of YOUNG no longer holds if ordinary limits are replaced by approximate limits. Belowska constructs a function whose right approximate limit superior is less than its left approximate limit superior on an uncountable set. On the other hand, M. KULBACKA, [3], has shown that the set of points for which the set of right approximate limits of f differs from the set of left approximate limits of f is both of the first category and of measure zero, for an arbitrary real function f.

The purpose of this note is to give short and simple proofs of these results.

Let f be an arbitrary real function on the real line. For any x, a number y is said to be a right approximate limit of f at x if for every $\varepsilon>0$ the set $(x,\infty)\cap\cap f^{-1}((y-\varepsilon, y+\varepsilon))$ has positive upper exterior density at x; left approximate limit is defined similarly. Let $W^+(x)$ and $W^-(x)$ be the sets of right and left approximate limits at x, respectively. Let A be the set of points x for which $W^+(x)$ is not a subset of $W^-(x)$, and B the set of points x for which $W^-(x)$ is not a subset of $W^+(x)$. Then $A\cup B$ is the set for which $W^+(x)\neq W^-(x)$. It suffices to show that A is of the first category and of measure zero. It is evident that $A\subset\bigcup\limits_{r_1<r_2} A_{r_1r_2}$ where $r_1<r_2$ are rational numbers and $A_{r_1r_2}$ is the set of points x such that $(x,\infty)\cap\cap f^{-1}((r_1,r_2))$ has positive upper exterior density at x and $(-\infty,x)\cap f^{-1}((r_1,r_2))$ has zero exterior density at x. Thus, in order to show that A is of the first category and of measure zero, it suffices to show that for every set S, the set E of points x such that $(x,\infty)\cap S$ has positive upper exterior density at x and $(-\infty,x)\cap S$ has zero exterior density at x is of the first category and of measure zero.

For every pair k, r of natural numbers, let

$$E_{kr}=\left(x:\ D_x^+(S)>\frac{1}{k}\quad\text{and}\quad\frac{m(S\cap(y,x))}{x-y}<\frac{1}{k}\quad\text{if}\quad 0<x-y<\frac{1}{r}\right),$$

where $D_x^+(S)$ is the upper right exterior density of S at x. Then $E\subset\bigcup E_{kr}$. Suppose an E_{kr} is dense in an interval (a,b), where $b-a<\frac{1}{r}$. Then, for every $a\leqq y<x\leqq b$,

$$\frac{m(S\cap(y,x))}{x-y}\leqq\frac{1}{k},$$

*) Supported by NSF Grant No. 18920.

since $\dfrac{m(S\cap(y, x_n))}{x_n-y}<\dfrac{1}{k}$ for a sequence $\{x_n\}$ converging to x, and so $D_y^+(S)\leqq\dfrac{1}{k}$ for every $y\in(a, b)$. It follows that $E_{kr}\cap(a, b)$ is empty, contradicting the assumption that it is dense in (a, b). Thus E_{kr} is of the first category, so that E itself is of the first category.

That E is of measure zero is merely a form of the Lebesgue density theorem. We thus have the

Theorem (KULBACKA). *For every real function f, the set for which $W^+(x)\neq W^-(x)$, is of the first category and of measure zero.*

We now prove the

Theorem (BELOWSKA). *There is a real function f such that the set of points for which $W^+(x)\neq W^-(x)$ is uncountable; indeed, the set for which the right approximate limit superior is less than the left approximate limit superior is uncountable.*

Proof. The intervals complementary to the Cantor ternary set are of the form

$$(\underbrace{.xx\ldots x}_{n}1,\ \underbrace{.xx\ldots x}_{n}2)\qquad(n=1, 2, \ldots),$$

where $x=0$ or 2. In each of these intervals, consider the subinterval

$$(\underbrace{.xx\ldots x1}_{n},\ \underbrace{.xx\ldots x1}_{n}\ \underbrace{0\ldots01}_{n}).$$

Let S be the union of these subintervals. At every point of the Cantor set, the left metric density of S exists and is zero. However, the right metric density of S exists and is zero at some points of the Cantor set. We, accordingly, consider the subset E of the Cantor set whose points have ternary expansions of the form

$$.x0\,22\,x\,0\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,x\,0\ldots$$

where $x=0$ or 2 and after each pair $x0$ there are the same number of 2's as there are digits up to and including the pair $x0$. The set E has the power of the continuum.

Let $\xi\in E$ and let n be such that the n^{th} term in the expansion of E is the 0 of a pair $x0$. Then

$$\xi=\underbrace{.x\,0\,22\,x\,0\ldots x\,0}_{n}\ \underbrace{2\ldots2}_{n}\,x\,0\ldots.$$

Let

$$I_n=(a_n, b_n)=(\underbrace{.x\,0\,22\,x\,0\ldots x1}_{n},\ \underbrace{.x\,0\,22\,x\,0\ldots x1}_{n}\ \underbrace{0\ldots01}_{n})$$

where the first $n-1$ digits in the expansions of ξ, a_n and b_n are the same. Then $I_n\subset S$. Now, since the expansion of a_n may be written $a_n=\underbrace{.x\,0\,22\,x\,0\ldots x0}_{n}\ 22\ldots,$

we have $0 < a_n - \xi < \underbrace{.0\ldots01}_{2n}$. But $b_n - a_n = \underbrace{.0\ldots01}_{2n}$ so that $b_n - a_n > a_n - \xi$. Thus

$$\frac{b_n - a_n}{b_n - \xi} = \frac{b_n - a_n}{(b_n - a_n) + (a_n - \xi)} > \frac{b_n - a_n}{2(b_n - a_n)} = \frac{1}{2},$$

and so the upper right density of S at ξ is positive, since $\lim (b_n - \xi) = 0$.

To prove the theorem, we needed only consider the characteristic function of S.

References

[1] W. H. YOUNG, La symétrie de structure des fonctions de variables réelles, *Bull. Sci. Math.*, (2) **52** (1928), 265–280.

[2] L. BELOWSKA, Résolution d'un problème de M. Z. Zahorski sur les limites approximatives, *Fundamenta Math.*, **48** (1960), 277–286.

[3] M. KULBACKA, Sur l'ensemble des points de l'asymétrie approximative, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 90–95.

PURDUE UNIVERSITY
LAFAYETTE, INDIANA, U. S. A.

(Received February 13, 1961)

A theorem on derivates *)

By C. J. NEUGEBAUER in Lafayette (Indiana, USA)

Recently several papers have appeared dealing with a formulation of a W. H. YOUNG theorem [6] for approximate limits [3, 4, 5]. More precisely, it was proven in [4] that for an arbitrary real-valued function f the set of points at which the collection of upper right approximate limits of f differs from the collection of upper left approximate limits, is of the first category and of measure zero. A simple proof of this theorem was recently given in [3]. The purpose of the present paper is to show that this theorem is a special case of a theorem on derivates.

1. Let R be the set of real numbers and let $f\colon R\to R$ be a function. Denote by $f^+(x_0)$, $f_+(x_0)$ the upper right, lower right derivates of f at x_0, and denote by $f^-(x_0)$, $f_-(x_0)$ the corresponding left extreme derivates of f at x_0.

Theorem 1. *If $f\colon R\to R$ is continuous, then $E=\{x: f^-(x)\neq f^+(x)$ or $f_-(x)\neq\neq f_+(x)\}$ is a set of the first category.*

Proof. We will show that $A=\{x: f^-(x)<f^+(x)\}$ is of the first category. For r rational let $A_r=\{x: f^-(x)<r<f^+(x)\}$, and let

$$A_{rj}=\left\{x_0\colon x_0\in A_r \quad\text{and}\quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<r,\ x_0-\frac{1}{j}<x<x_0\right\}.$$

We observe that $A=\bigcup\limits_{r}\bigcup\limits_{j\geqq 1}A_{rj}$, and thus it suffices to show that A_{rj} is nowhere dense. If we deny this, we have an interval (α,β) in which A_{rj} is dense. We may assume that $\beta-\alpha<\dfrac{1}{j}$.

Let $\alpha<x'<x''<\beta$, and let $\{x_n\}$ be a sequence in $A_{rj}\cap(\alpha,\beta)$ such that $\{x_n\}\to x''$ and $x'<x_n$ for each n. Since $x_n-\dfrac{1}{j}<x'<x_n$ and $x_n\in A_{rj}$, we have that $\dfrac{f(x')-f(x_n)}{x'-x_n}<r$, and in view of the continuity of f,

$$\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\leqq r,\ \alpha<x',\ x''<\beta. \tag{1}$$

*) Supported by NSF Grant No. 18920.

For $x' \in A_{rj} \cap (\alpha, \beta)$ we have $f^+(x') > r$, and hence there is $x'' \in (x', \beta)$ such that $\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''} > r$, in contradiction with (1). Hence A_{rj} is nowhere dense, and the proof is complete.

Remark. The hypothesis of "continuity" in Theorem 1 cannot be omitted as the function

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rational} \\ 0, & x \text{ irrational} \end{cases}$$

shows.

Corollary. *If f: $R \to R$ is continuous and of bounded variation on every compact interval, then the set E of Theorem 1 is both of the first category and of measure zero.*

Remark. The example III in [2] shows that the hypothesis "bounded variation" cannot be omitted.

2. We will show that the theorem of M. KULBACKA [4] follows as a special case from the corollary to Theorem 1:

For a subset E of R and $x_0 \in R$, denote by $D^+(E; x_0)$, $D_+(E; x_0)$ the upper, lower right outer densities of E at x_0, and denote by $D^-(E; x_0)$, $D_-(E; x_0)$ the corresponding left extreme densities of E at x_0. Let H be a measurable cover of E. Then $D^+(H; x_0) = D^+(E; x_0)$, etc.

Lemma. *The set of points*

$$K = \{x \colon D^-(E; x) \neq D^+(E; x) \quad \text{or} \quad D_-(E; x) \neq D_+(E; x)\}$$

is both of the first category and of measure zero.

Proof. Let H be a measurable cover of E, and let $f(x) = \int_0^x \chi_H(t)\, dt$, where χ_H is the characteristic function of H. Then

$$K = \{x \colon f^-(x) \neq f^+(x) \quad \text{or} \quad f_-(x) \neq f_+(x)\},$$

and application of Theorem 1 completes the proof.

Let now f: $R \to R$. A real number y is an approximate right limit of f at x if and only if for every $\varepsilon > 0$, $D^+[f^{-1}((y-\varepsilon, y+\varepsilon)); x] > 0$; approximate left limit is defined similarly.

Theorem 2 (KULBACKA). *Let f: $R \to R$ and let $W^+(x)$, $W^-(x)$ be the set of approximate right, left limits of f at x. Then $E = \{x \colon W^+(x) \neq W^-(x)\}$ is both of the first category and of measure zero.*

Proof. Let $A = \{x \colon W^+(x) - W^-(x) \neq \emptyset\}$. For $r_1 < r_2$ rational numbers let

$$A_{r_1 r_2} = \{x \colon D^+[f^{-1}((r_1, r_2)); x] \neq D^-[f^{-1}((r_1, r_2)); x]\}.$$

Then $A \subseteqq \bigcup A_{r_1 r_2}$, and application of the lemma completes the proof.

The above proof admits of a sligthly more general theorem. For $f\colon R \to R$, let us call a real number y an *asymmetric approximate limit* of f at x if and only if there exists $\varepsilon > 0$ such that $y-\varepsilon < y' < y < y'' < y+\varepsilon$ implies

$$D^-[f^{-1}((y', y'')); x] \neq D^+[f^{-1}((y', y'')); x].$$

Theorem 3. *The set of points at which an arbitrary real-valued function possesses an asymmetric approximate limit is both of the first category and of measure zero.*

Bibliography

[1] L. Belowska, Résolution d'un problème de M. Z. Zahorski sur les limites approximatives, *Fundamenta Math.*, **48** (1960), 277–286.

[2] A. Denjoy, Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues, *Journal de Math.*, (1915), 105–240.

[3] C. Goffman, On the approximate limits of a real function, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 76–78.

[4] M. Kulbacka, Sur l'ensemble des points de l'asymétrie approximative, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 90–95.

[5] A. Matysiak, Sur les limites approximatives, *Fundamenta Math.*, **48** (1960), 363–366.

[6] W. H. Young, La symétrie de structure des fonctions des variables réelles, *Bull. Sci. Math.*, **52** (1928), 265–280.

PURDUE UNIVERSITY
LAFAYETTE, INDIANA, U. S. A.

(Received March 2, 1961)

Über die starke Summierbarkeit der Orthogonalreihen

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

Einleitung

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem und $\{c_n\} \in l^2$ [1]) eine reelle Zahlenfolge. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \tag{1}$$

ihre k-te Partialsumme bezeichnen wir mit $s_k(x)$.

G. ALEXITS [1] und K. TANDORI [1], [2] haben hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Reihe (1) fast überall *sehr stark summierbar*, d. h. die Folge der Mittel

$$\sigma_N(\{\mu\}; x) = \frac{s_{\mu_1}(x) + \ldots + s_{\mu_N}(x)}{N}$$

für jede monoton wachsende Indexfolge $\{\mu_k\}$ $(\mu_1 < \mu_2 < \ldots. < \mu_k < \ldots)$ in (a, b) fast überall konvergent sei.

K. TANDORI hat das Problem aufgeworfen, ob diese Bedingungen auch dafür hinreichend sind, daß die Folge

$$\sigma_N(\{\nu\}; x) = \frac{s_{\nu_1}(x) + \ldots + s_{\nu_N}(x)}{N}$$

für eine beliebige nicht notwendigerweise monotone Folge $\{\nu_k\}$ von verschiedenen natürlichen Zahlen fast überall konvergiert.

In dieser Note werden wir u. a. eine positive Antwort auf dieses Problem geben. Wir beweisen nämlich die folgenden Sätze:

Satz I. *Ist*

$$\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 (\log \log n)^2 < \infty, \tag{2}$$

so gibt es eine quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ derart, daß

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} [s_{\nu_n}(x) - f(x)]^2 \to 0$$

---

[1]) D. h. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$.

für jede unendliche Folge $\{\nu_n\}$ von verschiedenen natürlichen Zahlen im Intervall (a, b) fast überall gilt.

Wegen

$$\left|\frac{s_{\nu_1}(x)+\ldots+s_{\nu_N}(x)}{N}-f(x)\right| = \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]\right| \leqq \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]^2}$$

ist unter der Bedingung (2) auch die Folge $\sigma_N(\{\nu\}; x)$ in (a, b) fast überall konvergent.

Satz II. *Es sei $\{a_n\}\in l^2$ eine reelle Zahlenfolge mit*

$$na_n^2 \geqq (n+1)a_{n+1}^2 \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Ist die Orthogonalreihe (1) im Intervall (a, b) fast überall zur Funktion $f(x)$ Abelsch summierbar und

$$c_n^2 = O(a_n^2), \tag{4}$$

so besteht für jede unendliche Folge $\{\nu_n\}$ von verschiedenen natürlichen Zahlen, bei jedem $\alpha > \frac{1}{2}$ fast überall in (a, b)

$$\sum_{n=1}^{N}[\sigma_{\nu_n}^{(\alpha-1)}(x)-f(x)]^2 = o(N),$$

wobei $\sigma_m^{(\beta)}(x)$ das m-te (C, β)-Mittel der Reihe (1) bezeichnet.

Für monoton wachsende Indexfolge $\{\mu_k\}$ $(\mu_1 < \ldots < \mu_k < \ldots)$ hat K. Tandori [1], [2] diese Sätze schon bewiesen.

Aus diesen Sätzen ergeben sich unmittelbar die Folgenden:

Folgerung I. *Ist die Reihe*

$$\sum_{n=4}^{\infty}(\log\log n)^2 \sum_{i=\mu_{n-1}+1}^{\mu_n} c_i^2 \tag{5}$$

konvergent, so gibt es eine quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ derart, daß

$$\sum_{n=1}^{N}[s_{\mu_{\nu_n}}(x)-f(x)]^2 = o(N)\ .$$

für jede unendliche Folge $\{\nu_n\}$ von verschiedenen natürlichen Zahlen in (a, b) fast überall gilt.

Folgerung II. *Es sei $\{\bar{\mu}_n\}$ monoton wachsende Indexfolge mit*

$$n\sum_{i=\bar{\mu}_{n-1}+1}^{\bar{\mu}_n} c_i^2 \geqq (n+1)\sum_{i=\bar{\mu}_n+1}^{\bar{\mu}_{n+1}} c_i^2 \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Ist die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \Phi_n(x), \quad \textit{wobei} \quad \gamma_n^2 = \sum_{i=\bar{\mu}_{n-1}+1}^{\bar{\mu}_n} c_i^2 \quad \textit{und}$$

(7)
$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma_n} \sum\limits_{i=\bar{\mu}_{n-1}+1}^{\bar{\mu}_n} c_i \varphi_i(x) & \textit{für} \quad \gamma_n \neq 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\bar{\mu}_n - \bar{\mu}_{n-1}}} \sum\limits_{i=\bar{\mu}_{n-1}+1}^{\bar{\mu}_n} \varphi_i(x) & \textit{für} \quad \gamma_n = 0, \end{cases}$$

im Intervall (a, b) *fast überall zur Funktion* $f(x)$ *Abelsch summierbar, so besteht für jede unendliche Folge* $\{\nu_n\}$ *von verschiedenen natürlichen Zahlen, bei jedem* $\alpha > \frac{1}{2}$, *fast überall in* (a, b)

$$\sum_{n=1}^{N} [\sigma_{\nu_n}^{(\alpha-1)}(\{\bar{\mu}_n\}; x) - f(x)]^2 = o(N),$$

wobei $\sigma_m^{(\beta)}(\{\bar{\mu}\}; x)$ *das m-te* (C, β)*-Mittel der Reihe* (7) *bezeichnet.*

Für monoton zunehmende Indexfolge $\{s_n\}$ gilt auch der folgende

Satz III. *Ist die Reihe* (5) *konvergent, so gibt es eine quadratisch integrierbare Funktion* $f(x)$ *derart, daß*

$$\sum_{l=1}^{N} [\sigma_l^{(\alpha-1)}(\{\mu_{s_n}\}; x) - f(x)]^2 = o(N)$$

für jede monoton wachsende Indexfolge $\{s_n\}$ *bei jedem* $\alpha > \frac{1}{2}$ *in* (a, b) *fast überall gilt, wobei* $\sigma_m^{\beta}(\{\mu_{s_n}\}; x)$ *das m-te* (C, β)*-Mittel der Reihe* (7) *mit* μ_{s_n} *statt* $\bar{\mu}_n$ *ist.*

Satz IV. *Ist die orthogonale Reihe* (1) *mit* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$ *im Intervall* (a, b) *fast überall zur Funktion* $f(x)$ $(C, 1)$*-summierbar, so ist in* (a, b) *fast überall*

(8)
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{\nu_k} - f]^2; x) = 0 \qquad (0 < \alpha < 1)$$

für jede wachsende Indexfolge $\{\nu_k\}$ $(\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_k < \ldots)$, *wobei* $\sigma_n^{(\beta)}([s_{\nu_k} - f]^2; x)$ *das n-te* (C, β)*-Mittel der Folge* $\{[s_{\nu_k}(x) - f(x)]^2\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *bezeichnet.*

Für $\nu_k = k$ hat K. Tandori [3] Satz IV schon früher bewiesen.

§ 1. Beweis von Satz I

Zum Beweis des Satzes I benötigen wir den

Hilfssatz. *Es sei* $\{\psi_k(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ *ein im Intervall* (a, b) *orthogonales Funktionensystem, es sei weiterhin*

$$a_k^2 = \int_a^b \psi_k^2(x)\,dx \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Dann gibt es eine nicht-negative Funktion $\delta(x)$ *derart, daß*

$$|\psi_1(x)+\dots+\psi_l(x)|\leqq\delta(x) \qquad (l=1,\dots,p)$$

in (a,b) *überall besteht und die Abschätzung*

$$\int_a^b \delta^2(x)\,dx \leqq A\log^2 p \sum_{k=1}^{p} a_k^2$$

gilt, wo A *eine positive Konstante ist.*

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe z. B. KACZMARZ—STEINHAUS [1] S. 162.)

Nach Sätzen von KACZMARZ [1] bzw. MENCHOFF [1] und KOLMOGOROFF [1] konvergiert unter der Bedingung (2) die Folge $\{s_{2^m}(x)\}$ fast überall gegen eine quadratisch integrierbaren Funktion $f(x)$. Wir setzen

$$C_m^2=\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} c_n^2.$$

Es sei $m(\geqq 2)$ eine beliebige natürliche Zahl, für die $C_m\neq 0$ ist. Dann sei $\mu_0(m)=2^m$ und $\mu_i(m)$ $(1\leqq i\leqq N_m)$ die kleinste natürliche Zahl, für die

$$\sum_{n=\mu_{i-1}(m)+1}^{\mu_i(m)} c_n^2 \geqq \frac{C_m^2}{m} \quad \text{und} \quad \mu_i(m)\leqq 2^{m+1}.$$

bestehen. Es ist klar, daß $N_m\leqq m$ ist. Im Falle $C_m=0$ setzen wir $\mu_0(m)=2^m$ und $\mu_1(m)=2^{m+1}$. Mit Anwendung des Hilfssatzes auf die Funktionen

$$\psi_i^{(m)}(x)=s_{\mu_i(m)}(x)-s_{\mu_{i-1}(m)}(x) \qquad (1\leqq i\leqq N_m)$$

erhalten wir eine nichtnegative Funktion $\delta_m(x)$, für die

$$|s_{\mu_i(m)}(x)-s_{2^m}(x)| = \left|\sum_{j=1}^{i}\psi_j^{(m)}(x)\right| \leqq \delta_m(x) \qquad (1\leqq i\leqq N_m) \tag{1.1}$$

in (a,b) überall gilt und

$$\int_a^b \delta_m^2(x)\,dx \leqq A\log^2 m \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} c_n^2 < 4A \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} (\log\log n)^2 c_n^2$$

ist. Daraus folgt nach der Annahme, daß

$$\sum_{m=2}^{\infty}\int_a^b \delta_m^2(x)\,dx<\infty$$

ist, und so konvergiert die Reihe

$$\sum_{m=2}^{\infty}\delta_m^2(x)$$

fast überall. Daraus folgt nach (1. 1), daß für $m\to\infty$ fast überall gilt:

$$s_{\mu_i(m)}(x)-s_{2^m}(x)\to 0.$$

Also konvergiert $s_{\mu_i(m)}(x)$ $(m\to\infty)$ auch fast überall in (a, b) gegen die Funktion $f(x)$.

Um die Behauptung des Satzes I zu beweisen, definieren wir die Indexfolge $\{\mu_n\}$: für $\mu_i(m)\leqq\nu_n<\mu_{i+1}(m)$ sei $\mu_n=\mu_i(m)$ und für $\mu_{N_m}(m)\leqq\nu_n<\mu_0(m+1)$ sei $\mu_n=\mu_{N_m}(m)$. Es gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]^2\leqq\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-s_{\mu_n}(x)]^2+\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\mu_n}(x)-f(x)]^2. \tag{1.2}$$

Da nach obigen $s_{\mu_n}(x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$ fast überall gilt, so konvergiert das zweite Glied fast überall gegen 0. Mit einfacher Rechnung bekommen wir:[2])

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_a^b[s_{\nu_n}(x)-s_{\mu_n}(x)]^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=\mu_n+1}^{\nu_n}c_k^2=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\ \sum_{2^m\leqq\mu_n<2^{m+1}}^{(n)}\frac{1}{n}\sum_{k=\mu_n+1}^{\nu_n}c_k^2\leqq \tag{1.3}$$

$$\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{2^m\leqq\mu_n<2^{m+1}}^{(n)}\frac{1}{n}\right)\frac{C_m^2}{m}\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{2^m}\frac{1}{n}\right)\frac{C_m^2}{m}=O(1)\sum_{m=0}^{\infty}C_m^2<\infty.$$

Daraus folgt auf Grund des Satzes von B. Levi, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[s_{\nu_n}(x)-s_{\mu_n}(x)]^2$$

fast überall konvergiert. Mit Anwendung des Kroneckerschen Lemmas (siehe z. B. G. Alexits [2], S. 68) ergibt sich, daß

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-s_{\mu_n}(x)]^2\to 0$$

fast überall gilt. Daraus, auf Grund von (1. 2) ergibt sich unsere Behauptung.

Damit haben wir den Satz I bewiesen.

§ 2. Beweis von Satz II

Ist die Reihe (1) fast überall nach der Funktion $f(x)$ Abelsch summierbar, so folgt aus einem Satz von A. Zygmund [1], daß für $\beta>0$ fast überall $\lim_{m\to\infty}\sigma_m^{(\beta)}(x)=f(x)$ ist, somit gilt für eine beliebige Indexfolge $\{\nu_m\}$ $(\nu_m\to\infty)$

$$\sum_{m=1}^{n}[\sigma_{\nu_m}^{(\beta)}(x)-f(x)]^2=o(n)\qquad(\beta>0) \tag{2.1}$$

[2]) $\Sigma^{(n)}$ bedeutet, daß man in bezug auf n zu summieren hat.

fast überall. Also haben wir die Behauptung nur für den Fall $\frac{1}{2}<\alpha\leqq 1$ zu beweisen. Da

$$(2.2)\quad \sum_{m=1}^{n}[\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)-f(x)]^2\leqq 2\sum_{m=1}^{n}[\sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)-f(x)]^2+2\sum_{m=1}^{n}[\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)-\sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2$$

gilt, haben wir nach (2. 1) nur zu zeigen, daß die zweite Summe fast überall die Größenordnung $o(n)$ hat. Nun ist aber

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_a^b[\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)-\sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2\,dx=\frac{1}{\alpha^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(A_{\nu_m}^{(\alpha)})^2}\sum_{k=1}^{\nu_m}(A_{\nu_m-k}^{(\alpha-1)})^2k^2c_k^2$$

mit $A_m^{(\beta)}=\binom{m+\beta}{m}$. Es gibt bekanntlich von m unabhängige, positive Konstanten C_1, C_2 derart, daß $C_1(m+1)^\beta\leqq A_m^{(\beta)}\leqq C_2(m+1)^\beta$ $(\beta>-1;\ m=0, 1, \ldots)$ ist, folglich gilt wegen (4)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(A_{\nu_m}^{(\alpha)})^2}\sum_{k=1}^{\nu_m}(A_{\nu_m-k}^{(\alpha-1)})^2k^2c_k^2=O(1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{\nu_m}(\nu_m-k+1)^{2\alpha-2}k^2a_k^2.$$

Wir bezeichnen mit m_l die l-te natürliche Zahl, für die $m_l\leqq\nu_{m_l}$ besteht, und mit μ_n die n-te natürliche Zahl, für die $\mu_n>\nu_{\mu_n}$ besteht. Dann ist

$$(2.3)\quad \begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{\nu_m}(\nu_m-k+1)^{2\alpha-2}k^2a_k^2=\\&=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{m_l\nu_{m_l}^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{\nu_{m_l}}(\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2}k^2a_k^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n\nu_{\mu_n}^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{\nu_{\mu_n}}(\nu_{\mu_n}-k+1)^{2\alpha-2}k^2a_k^2.\end{aligned}$$

Wegen $\nu_{m_l}\geqq m_l$ $(l=1, 2, \ldots)$ ist die erste Summe rechts in (2. 3) kleiner als

$$(2.4)\quad O(1)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{m_l\nu_{m_l}^{2\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{m_l-1}+\sum_{k=m_l}^{\nu_{m_l}}\right)(\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2}k^2a_k^2.$$

Wegen (3) ergibt sich

$$(2.5)\quad \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{m_l\nu_{m_l}^{2\alpha}}\sum_{k=m_l}^{\nu_{m_l}}(\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2}k^2a_k^2\leqq\sum_{l=1}^{\infty}\frac{a_{m_l}^2}{\nu_{m_l}^{2\alpha}}\sum_{k=m_l}^{\nu_{m_l}}(\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2}k.$$

Da wegen $\alpha>\dfrac{1}{2}$ und $\nu_{m_l}\geqq m_l$ $(l=1, 2, \ldots)$

$$\sum_{k=m_l}^{\nu_{m_l}}(\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2}k=\sum_{p=1}^{\nu_{m_l}-m_l+1}p^{2\alpha-2}(\nu_{m_l}-p+1)=$$

$$=O(1)\left(\sum_{p=1}^{\nu_{m_l}-m_l}p^{2\alpha-1}+m_l(\nu_m-m_l)^{2\alpha-1}\right)=O(\nu_{m_l}^{2\alpha})$$

gilt, so ist nach (2. 5)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{m_l \nu_{m_l}^{2\alpha}} \sum_{k=m_l}^{\nu_{m_l}} (\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2} k^2 a_k^2 = O(1) \sum_{l=1}^{\infty} a_{m_l}^2 < \infty. \tag{2. 6}$$

Es sei l_k die kleinste natürliche Zahl, für die $m_{l_k} > k$ ist. Auf Grund der Ungleichungen $\alpha \leqq 1$ und $\nu_{m_l} \geqq m_l$ $(l=1, 2, \ldots)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{m_l \nu_{m_l}^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{m_l-1} (\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2} k^2 a_k^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 \sum_{l=l_k}^{\infty} \frac{(\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2}}{m_l \nu_{m_l}^{2\alpha}} \leqq \\ \leqq \sum_{k=1}^{\infty} k a_k^2 \sum_{l=l_k}^{\infty} \frac{(m_l-k+1)^{2\alpha-2}}{m_l^{2\alpha}} &\leqq \sum_{k=1}^{\infty} k a_k^2 \sum_{l=k}^{\infty} \frac{(l-k+1)^{2\alpha-2}}{l^{2\alpha}}. \end{aligned} \tag{2. 7}$$

Da wegen $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{(l-k+1)^{2\alpha-2}}{l^{2\alpha}} &= \left(\sum_{l=k}^{2k-1} + \sum_{l=2k}^{\infty}\right) \frac{(l-k+1)^{2\alpha-2}}{l^{2\alpha}} \leqq \\ &\leqq \frac{1}{k^{2\alpha}} \sum_{l=1}^{k} l^{2\alpha-2} + 2^{2-2\alpha} \sum_{l=2k}^{\infty} \frac{l^{2\alpha-2}}{l^{2\alpha}} = O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned} \tag{2. 8}$$

besteht, so gilt nach (2. 7) und (2. 8)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{m_l \nu_{m_l}^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{m_l-1} (\nu_{m_l}-k+1)^{2\alpha-2} k^2 a_k^2 = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty. \tag{2. 9}$$

Wegen $\mu_n > \nu_{\mu_n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n \nu_{\mu_n}^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{\nu_{\mu_n}} (\nu_{\mu_n}-k+1)^{2\alpha-2} k^2 a_k^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 \sum_{\nu_{\mu_n} \geqq k}^{(n)} \frac{(\nu_{\mu_n}-k+1)^{2\alpha-2}}{\mu_n \nu_{\mu_n}^{2\alpha}} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} k a_k^2 \sum_{l=k}^{\infty} \frac{(l-k+1)^{2\alpha-2}}{l^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Auf Grund von (2. 8) ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n \nu_{\mu_n}^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{\nu_{\mu_n}} (\nu_{\mu_n}-k+1)^{2\alpha-2} k^2 a_k^2 = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty. \tag{2. 10}$$

Auf Grund von (2. 3), (2. 4), (2. 6), (2. 9) und (2. 10) ergibt sich mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2$$

fast überall konvergiert, woraus mit Anwendung des schon erwähnten Kroneckerschen Lemmas folgt, daß fast überall

$$\sum_{m=1}^{n}[\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)-\sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2=o(n)$$

ist.

Damit haben wir den Satz II bewiesen.

Beweis der Folgerungen. Mit der Folge $\{\mu_n\}$ bzw. $\{\bar{\mu}_n\}$ bilden wir die Reihe (7), deren für Koeffizienten (2) bzw. (3) nach den Annahmen (5) bzw. (6) erfüllt, so ergeben sich mit Anwendung der obigen Sätzen die Behauptungen der Folgerungen.

§ 3. Beweis von Satz III

Herr K. Tandori hat mir mitgeteilt, wie er den publizierten Beweis seines erwähnten Satzes abkürzen könne. Mit dieser Methode werden wir den Satz III beweisen.

Zum Beweis benötigen wir den folgenden bekannten Satz (siehe z. B. G. Alexits [2], S. 102).

Ist die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\psi_n(x)$$

mit $\Sigma a_n^2<\infty$ *auf* E *fast überall* (C,α)*-summierbar für ein* $\alpha>\frac{1}{2}$, *so ist sie auch fast überall stark* (C,α)*-summierbar auf* E, *d. h. es gilt*

$$\sum_{\nu=1}^{N}[\sigma_{\nu}^{(\alpha-1)}(x)-f(x)]^2=o(N)$$

auf E *fast überall, wo* $f(x)=\lim\limits_{\nu\to\infty}\sigma_{\nu}^{(\alpha)}(x)$ *in den Konvergenzpunkten ist.*

Wir nehmen die unter (7) definierten Koeffizienten γ_n mit μ_{s_n} anstatt $\bar{\mu}_n$, und die orthonormierten Funktionen $\Phi_n(x)$. Nach der Annahme (5) gilt

$$\sum_{n=4}^{\infty}\gamma_n^2\log\log^2 n=\sum_{n=4}^{\infty}\log\log^2 n\sum_{i=\mu_{s_{n-1}}+1}^{\mu_{s_n}}c_i^2\leqq\sum_{n=4}^{\infty}\log\log^2 n\sum_{i=\mu_{n-1}+1}^{\mu_n}c_i^2<\infty$$

und daraus folgt nach einem bekannten Kaczmarz—Menchoffschen Satz, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\Phi_n(x)$$

in (a,b) fast überall $(C,1)$-summierbar ist. Mit Anwendung des obigen Satzes bekommen wir die Behauptung des Satzes III.

§ 4. Beweis von Satz IV

Wir werden zuerst die Indexfolge $\{\mu_k\}$ in folgender Weise definieren: es sei $\mu_0=\nu_0$, $\mu_1=\nu_1$ und für $2^m<k\leqq 2^{m+1}$ $(m=0, 1, \ldots)$ $\mu_k=\nu_{2^m}$, wo $\{\nu_k\}$ eine beliebige monoton wachsende Indexfolge ist. Es gilt die Ungleichung

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{\nu_k}-f]^2; x) \leqq 2\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{\nu_k}-s_{\mu_k}]^2; x)+2\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{\mu_k}-f]^2; x).$$

Auf Grund des erwähnten Kolmogoroffschen Satzes konvergiert das zweite Glied gegen Null. Ferner ist

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{\nu_k}-s_{\mu_k}]^2; x) = \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}}\sum_{k=0}^{2^n} A_{2^n-k}^{(\alpha-1)}[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2 =$$

$$=O(1)\frac{1}{2^{n\alpha}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} 2^{n(\alpha-1)}[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2+$$

$$+\frac{O(1)}{2^{n\alpha}}\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n}(2^n-k+1)^{\alpha-1}[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2=O(1)\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2+$$

$$+\frac{O(1)}{2^{n\alpha}}\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n}(2^n-k+1)^{\alpha-1}[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2=A_n(x)+B_n(x).$$

Wir behaupten, daß für $n\to\infty$ $A_n(x)$ fast überall gegen 0 strebt. Nach dem Kroneckerschen Lemma genügt es hierzu zu zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2}{k}$$

fast überall konvergiert. Dies folgt aber mit Anwendung des Satzes von B. Levi daraus, daß die integrierte Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\int_a^b\frac{[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2}{k}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}(c_{\nu_{2^n}+1}^2+\ldots+c_{\nu_k}^2)\leqq \tag{4.1}$$

$$\leqq\sum_{n=0}^{\infty}(c_{\nu_{2^n}+1}^2+\ldots+c_{\nu_{2^{n+1}}}^2)\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}\leqq\sum_{k=3}^{\infty}c_k^2<\infty.$$

Um zu beweisen, daß für $n\to\infty$ auch $B_n(x)$ fast überall gegen 0 konvergiert, zeigen wir, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n\alpha}}\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n}(2^n-k+1)^{\alpha-1}[s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2 \tag{4.2}$$

im Intervall (a, b) fast überall konvergiert. Mit einfacher Rechnung bekommen wir zunächst für die integrierte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n-k+1)^{\alpha-1} \int_a^b [s_{\nu_k}(x)-s_{\mu_k}(x)]^2\, dx =$$

$$(4.3) \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n-k+1)^{\alpha-1} (c_{\nu_{2^{n-1}+1}}^2 + \ldots + c_{\nu_k}^2) =$$

$$= O(1) \sum_{n=0}^{\infty} (c_{\nu_{2^n+1}}^2 + \ldots + c_{\nu_{2^{n+1}}}^2) < \infty.$$

Daraus ergibt sich mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe (4. 2) in (a, b) fast überall konvergiert.

Auf Grund der Obigen gilt also

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{\nu_k}-f]^2;\, x) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Damit haben wir den Satz IV bewiesen.

Bemerkung. *Ist*

$$\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty,$$

so gilt die Beziehung (8) *für eine beliebige unendliche Folge* $\{\nu_n\}$ *von verschiedenen natürlichen Zahlen in* (a, b) *fast überall.*

Der Beweis dieser Bemerkung verläuft analog zu dem des Satzes IV, nur soll man die Folge $\{\mu_k\}$ wie in Satz I definieren, weiterhin in den Abschätzungen (4. 1) und (4. 3) die bei dem Beweis des Satzes I angewandte Methode benutzen.

Schriftenverzeichnis

ALEXITS, G., [1] Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 127—129.
[2] *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen* (Budapest, 1960).

KACZMARZ, S., [1] Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 99—105.

KACZMARZ, S., und STEINHAUS, H., [1] *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935).

KOLMOGOROFF, A. N., [1] Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), 96—97.

MENCHOFF, D., [1] Sur les séries de fonctions orthogonales (Deuxième partie), *Fundamenta Math.*, **8** (1926), 56—108.

TANDORI, K., [1] Über die orthogonalen Funktionen. VI, *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 14—18;
[2] Bemerkung zu einem Satz von G. Alexits, *ebenda*, **21** (1960), 12—14;
[3] Über orthogonale Reihen, *ebenda*, **16** (1955), 74—76.

ZYGMUND, A., [1] Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356—362.

(Eingegangen am 13. Februar, ergänzt am 5. Mai 1961)

Über die Rieszsche Summation der Orthogonalreihen

Von FERENC MÓRICZ in Szeged

Es sei $\lambda=\{\lambda_n\}$ eine positive, im strengen Sinne wachsende Zahlenfolge mit $\lambda_n\to\infty$. Das n-te (R,λ)-Mittel der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ wird mit

$$\sigma_n=\sigma_n(\lambda)=\sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right)u_\nu$$

bezeichnet. Diese Reihe heißt mit der Rieszschen Methode summierbar, kurz (R,λ)-summierbar, wenn der endliche Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n$$

existiert, und $|R,\lambda|$-summierbar, wenn sogar

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_n-\sigma_{n-1}|<\infty$$

gilt [1].

Das n-te (R,λ)-Mittel der Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x) \tag{1}$$

sei mit $\sigma_n(x)$ bezeichnet. Um die Redeweise zu vereinfachen, erweitern wir die Folge $\{\lambda_n\}$ z. B. durch lineare Interpolation zu einer streng wachsenden Funktion $\lambda(x)$, die für $x=n$ den Wert $\lambda(n)=\lambda_n$ hat. Man bezeichne mit $\Lambda(x)$ die eindeutig bestimmte inverse Funktion von $\lambda(x)$. Man setze zur Abkürzung $\nu_m=[\Lambda(2^m)]$ [1]) und

$$A_m=\left\{\sum_{\nu=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}} a_\nu^2\right\}^{1/2}\qquad(m=0,1,\ldots).$$

(Im Falle $\nu_m=\nu_{m+1}$ ist $A_m=0$.) Es wird der folgende Satz bewiesen:

Satz. *Die Bedingung*

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m<\infty \tag{2}$$

---

1) $[\Lambda(2^m)]$ bezeichnet den ganzen Teil von $\Lambda(2^m)$.

ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Orthogonalreihe (1) *für jedes orthonormierte Funktionensystem* $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall* $[a, b]$ *fast überall* $|R, \lambda|$*-summierbar ist.*

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung eines Ergebnisses von K. TANDORI [2], betreffend die $|C, 1|$-Summierbarkeit der Orthogonalreihen.

Beweis des Satzes. Hinlänglichkeit. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a_0 = a_1 = 0$ und $\lambda_1 = 1$ angenommen werden. Dann ist $\nu_0 = 1$ und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_a^b |\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)|\, dx \leqq \sqrt{b-a} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \int_a^b (\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x))^2\, dx \right\}^{1/2} =$$

$$(3) \qquad = \sqrt{b-a} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \left\{ \sum_{\nu=2}^{n} \lambda_\nu^2 a_\nu^2 \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{b-a} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \left\{ \sum_{m=0}^{m_0(n)} \sum_{\nu=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}} \lambda_\nu^2 a_\nu^2 \right\}^{1/2},$$

wobei $m_0(n)$ die natürliche Zahl bedeutet, für die $\nu_{m_0(n)} < n \leqq \nu_{m_0(n)+1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ ist. Auf Grund der Monotonität der Folge $\{\lambda_n\}$ ergibt sich:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \left\{ \sum_{m=0}^{m_0(n)} \sum_{\nu=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}} \lambda_\nu^2 a_\nu^2 \right\}^{1/2} \leqq$$

$$(4) \qquad \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \sum_{m=0}^{m_0(n)} \lambda_{\nu_{m+1}} A_m =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} A_m \lambda_{\nu_{m+1}} \sum_{m_0(n) \geqq m} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right).$$

Es sei $\bar{n}$ die natürliche Zahl, für die $m_0(\bar{n}-1) < m \leqq m_0(\bar{n})$ besteht, wenn $m > m_0(2)$ und sonst $\bar{n} = 2$. Da $\lambda_{\bar{n}} \geqq \lambda_{\nu_{m_0(\bar{n})}+1} \geqq \lambda(\Lambda(2^{m_0(\bar{n})})) = 2^{m_0(\bar{n})} \geqq 2^m$ ist, so gilt

$$(5) \qquad \lambda_{\nu_{m+1}} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) = \frac{\lambda_{\nu_{m+1}}}{\lambda_{\bar{n}}} \leqq \frac{\lambda(\Lambda(2^{m+1}))}{2^m} = 2 \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Auf Grund von (2), (3), (4) und (5) ergibt sich

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_a^b |\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)|\, dx \leqq 2\sqrt{b-a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m < \infty,$$

woraus wir durch Anwendung des B. Levischen Satzes die $|R, \lambda|$-Summierbarkeit der Orthogonalreihe (1) in $[a, b]$ fast überall erhalten.

Notwendigkeit. Wir werden den folgenden Hilfssatz benützen:

Hilfssatz. *Es sei* $\{r_n(x)\}$ *das Rademachersche System* [2]). *Für jede Koeffizientenfolge* $\{a_n\}$ *und für jede Menge* $E(\subset [0, 1])$ *von positivem Maß besteht die Un-*

gleichung

$$\left\{\sum_{\nu=N}^{n} a_\nu^2\right\}^{1/2} \leqq C(E) \int_E \left| \sum_{\nu=N}^{n} a_\nu r_\nu(x) \right| dx \qquad (n \geqq N),$$

wobei $C(E)>0$ und N nur von E abhängig sind.

Dieser Hilfssatz ist bekannt [3].

Wir beweisen zuerst die folgende Behauptung. Ist die Rademachersche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(x) \tag{6}$$

$|R, \lambda|$-summierbar auf einer Menge von positivem Maß, so gilt (2).[3]) In diesem Falle gibt es nach dem Egoroffschen Satz eine Menge E vom Maß $|E|>0$ derart, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)| \leqq M \qquad (x \in E) \tag{7}$$

mit einer geeigneten positiven Konstante M gilt. Nun sei N die natürliche Zahl, die im Sinne des Hilfssatzes zu E gehört. Es gilt die Abschätzung

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| \sum_{\nu=N}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right) a_\nu r_\nu(x) - \sum_{\nu=N}^{n-1} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{\lambda_n}\right) a_\nu r_\nu(x) \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=N}^{\infty} |\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)| + \sum_{n=N}^{\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right) \lambda_\nu a_\nu r_\nu(x) \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=N}^{\infty} |\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)| + \sum_{\nu=0}^{N-1} |a_\nu|.$$

Hieraus folgt, daß man ohne Beschränkung des Allgemeinheit annehmen kann, daß $a_\nu = 0$ $(0 \leqq \nu \leqq N-1)$.

Es sein $\mu_0 < \ldots < \mu_l < \ldots$ die verschiedenen Glieder der Folge $\{\nu_m\}$. Es ist also $\mu_0 = \nu_0$ und für jedes $l (\geqq 1)$ existieren die Indizes m und m' derart, daß $\nu_{m-1} < \mu_l \equiv \nu_m = \nu_{m+1} = \ldots = \nu_{m'-1} < \mu_{l+1} \equiv \nu_{m'}$ $(m < m')$ gilt.

Durch Anwendung des Hilfssatzes ergibt sich für $\mu_{l-1} \geqq N-1$

$$\begin{aligned}
&\int_E |\sigma_{\mu_{l+1}}(x) - \sigma_{\mu_l - 1}(x)|\, dx \geqq \\
&\geqq C(E) \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_{\mu_l}} - \frac{1}{\lambda_{\mu_{l+1}+1}}\right)^2 \sum_{\nu=N+1}^{\mu_l - 1} \lambda_\nu^2 a_\nu^2 + \sum_{\nu=\mu_l}^{\mu_{l+1}} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\mu_{l+1}+1}}\right)^2 a_\nu^2 \right\}^{1/2} \geqq \\
&\geqq C(E) \left(\frac{1}{\lambda_{\mu_l}} - \frac{1}{\lambda_{\mu_{l+1}+1}}\right) \left\{ \sum_{\nu=N+1}^{\mu_l} \lambda_\nu^2 a_\nu^2 \right\}^{1/2} \geqq \\
&\geqq C(E) \left(\frac{1}{\lambda_{\mu_l}} - \frac{1}{\lambda_{\mu_{l+1}+1}}\right) \lambda_{\nu_{m-1}+1} A_{m-1}.
\end{aligned} \tag{8}$$

[2]) Es ist $r_n(x) = \operatorname{sign} \sin (2^n \pi x)$, $0 \leqq x \leqq 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

[3]) Für die $|C, 1|$-Summierbarkeit hat diese Behauptung P. Billard [4] bewiesen.

Durch eine einfache Rechnung ergibt sich:

$$\left(\frac{1}{\lambda_{\mu_l}}-\frac{1}{\lambda_{\mu_{l+1}+1}}\right)\lambda_{\nu_{m-1}+1}=\left(\frac{1}{\lambda_{\nu_m}}-\frac{1}{\lambda_{\nu_{m'}+1}}\right)\lambda_{\nu_{m-1}+1}\geqq$$

$$\geqq\left(\frac{1}{\lambda(\Lambda(2^m))}-\frac{1}{\lambda(\Lambda(2^{m'}))}\right)\lambda(\Lambda(2^{m-1}))= \tag{9}$$

$$=\left(\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^{m'}}\right)2^{m-1}\geqq\frac{1}{4}.$$

Wegen $A_m=A_{m+1}=\ldots=A_{m'-2}=0$ folgt daraus, bei Beachtung von (8) und (9)

$$\sum_{\mu_{l-1}\geqq N-1}\int_E|\sigma_{\mu_{l+1}}(x)-\sigma_{\mu_l-1}(x)|\,dx\geqq\frac{C(E)}{4}\sum_{\nu_m\geqq N-1}A_m. \tag{10}$$

Da die Folge $\{\mu_l\}$ im strengen Sinne wachsend ist, so ergibt sich auf Grund von (7):

$$2M|E|\geqq 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_E|\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)|\,dx\geqq$$

$$\geqq\sum_{l=1}^{\infty}\int_E|\sigma_{\mu_{2l+1}}(x)-\sigma_{\mu_{2l}-1}(x)|\,dx+\sum_{l=1}^{\infty}\int_E|\sigma_{\mu_{2l}}(x)-\sigma_{\mu_{2l-1}-1}(x)|\,dx= \tag{11}$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\int_E|\sigma_{\mu_{l+1}}(x)-\sigma_{\mu_l-1}(x)|\,dx.$$

Aus (10) und (11) ergibt sich endlich (2).

Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

Ich möchte dem Herrn Dozent KÁROLY TANDORI meinen aufrichtigen Dank dafür aussprechen, daß er mich bei der Fertigstellung dieser Arbeit mit wertvollen Ratschlägen unterstützt hat.

Schriftenverzeichnis

[1] A. ZYGMUND, Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales, *Bulletin Intern. Acad. Polonaise* (série A), **1927**, 293—308.
[2] K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. IX. Absolute Summation, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 292—299.
[3] W. ORLICZ, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, *Studia Math.*, **6** (1936), 20—38.
[4] P. BILLARD, Sur la sommabilité absolue des séries de fonctions orthogonales, *Bull. Sci. Math.*, **85** (1961), 29—33.

(Eingegangen am 9. Mai 1961)

The Product of Projection Operators

By ISRAEL HALPERIN in Kingston (Canada)

In memory of Maurice Audin

1. Let E_i $(i=1, \dots, r)$ denote the projection operator onto a subspace M_i of Hilbert space and let $E_1 \wedge \dots \wedge E_r$ denote the projection operator onto $\bigcap_{i=1}^{r} M_i$. We shall prove the following theorem.

Theorem 1. *Let T denote the product $T=E_1 \dots E_r$. Then T^n converges strongly to $E_1 \wedge \dots \wedge E_r$ as $n \to \infty$.*

For the case $r=2$ this theorem was discovered by J. VON NEUMANN and a short, elementary proof was given in his lectures on operator theory at Princeton during 1933—34 (see [3, Theorem 13. 7 on page 55] or [4, Lemma 22 on page 475]). The same theorem, for the case $r=2$, was found later by other authors (H. NAKANO [2, page 48], N. WIENER [7, page 101]).

VON NEUMANN's original proof (and also the others) apply to any Hermitian product $T=E_r \dots E_2 E_1 E_2 \dots E_r$ but while for $r=2$ it is easy to pass from $T=E_2E_1E_2$ to $T=E_1E_2$, such an extension is not available when $r>2$. Thus a new proof seems to be required for the case $r>2$.

2. We use the following conventions for an arbitrary Banach space B: M, N denote linear subspaces, T, T_i, P bounded linear operators; $M+N$ means $\{x+y: x\in M, y \in N\}$; $[M] \equiv$ closure of M; $M_0(T) \equiv \{x: Tx=0\}$; $M_1(T) \equiv \equiv \{x: Tx=x\} = M_0(1-T)$; $TM \equiv \{Tx: x \in M\}$ $R(T) \equiv TB$; $K(T) \equiv \sup(|||T^n|||: n=1, 2, \dots)$.

T will be called a contraction if $|||T||| \leqq 1$, idempotent if $T^2=T$. S will always denote a bounded linear operator with bounded linear inverse S^{-1}, $SS^{-1}=S^{-1}S=1$.

$\varphi(t)$ will denote any non-negative and non-decreasing function defined for $0 \leqq t < \infty$, such that $\varphi(t)>0$ for $t>0$ and $\Phi_2 \equiv \sup \left\{ \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} : 0<t<\infty \right\} < \infty$ (examples of such φ are: $\varphi(t)=t^p$, $p \geqq 1$).

For reference, we list possible properties of T:

(*) $\|Tx\| < \|x\|$ whenever $Tx \neq x$;

(**) $(T^n - T^{n+1})z \to 0$ as $n \to \infty$ for all $z \in B$;

(***) $M_1(T) + [R(1-T)] = B$;

(φ) for some k, $0<k<\infty$, and all $x \in B$,

$$\varphi(\|x-Tx\|) \leqq k\big(\varphi(\|x\|) - \varphi(\|Tx\|)\big).$$

Now we shall give an elementary proof for the following theorem.

Theorem 2. *Suppose each of the operators T_i $(i=1, \ldots, r)$ on a Hilbert space has property (φ) (with the same function φ) and let T denote the product $T_1 \ldots T_r$. Then T^n converges strongly to the projection onto $\bigcap_{i=1}^{r} M_1(T_i)$ as $n \to \infty$.*

Since all projections have property (φ) (with $\varphi(t)=t^2$ and $k=1$), Theorem 2 includes Theorem 1 for all r.

We shall actually prove a theorem for general Banach spaces from which Theorem 2 follows; if only Theorem 2 is wanted, the proof can be shortened in the obvious way.

3. We observe:

(I) *(φ) implies $(*)$ and $(**)$; $(*)$ implies T is a contraction.* In fact, (φ) implies $\varphi(\|x\|)-\varphi(\|Tx\|)>0$ if $\varphi(\|x-Tx\|)>0$, i. e. $\|x\|>\|Tx\|$ if $\|x-Tx\|\neq 0$. We have also

$$\sum_{n=0}^{N} \varphi\big(\|T^n(1-T)z\|\big)=\sum_{n=0}^{N} \varphi\big(\|T^n z - T(T^n z)\|\big) \leqq \sum_{n=0}^{N} k\big(\varphi(\|T^n z\|)-\varphi(\|T^{n+1}z\|)\big)=$$

$$=k\varphi(\|z\|)-k\varphi(\|T^{N+1}z\|)\leqq k\varphi(\|z\|) \quad \text{for all } N;$$

this implies that $\varphi\big(\|T^n(1-T)z\|\big)\to 0$ as $n\to\infty$, hence $\|T^n(1-T)z\|\to 0$, i. e., $(T^n-T^{n+1})z\to 0$ for all $z\in B$. The rest of (I) is obvious.

(II) *If B is a Hilbert space H and STS^{-1} is a contraction then $(***)$ holds; if T is a contraction then $[R(1-T)]$ is the orthogonal complement of $M_1(T)$.*

If T is a contraction, $|||T^*||| = |||T||| \leqq 1$ and as proved in [5] (see also [6, page 408]), $M_1(T)=M_1(T^*)$ (in fact, $Tx=x$ is equivalent in turn to each of: $(Tx|x)=\|x\|^2$, $(x|T^*x)=\|x\|^2$, $T^*x=x$). Also, as is well-known, $(1-T)^*x=0$ is equivalent to: $\big((1-T)^*x|y\big)=0$ for all y, i. e., to: $\big(x|(1-T)y\big)=0$, i. e. to: $x\perp R(1-T)$. So $M_1(T)=M_1(T^*)=M_0\big((1-T)^*\big)$ and is the orthogonal complement of $[R(1-T)]$, as required.

If STS^{-1} is a contraction the preceding argument shows that $M_1(STS^{-1})+[R(1-STS^{-1})]=H$. Hence $S\big(M_1(T)\big)+[SR(1-T)]=S\big(M_1(T)+[R(1-T)]\big)=H$ and so $M_1(T)+[R(1-T)]=H$, i. e. $(***)$ holds for T.

(III) *If B is a Hilbert space P is an idempotent contraction if and only if P is a projection and then P must be the projection onto $M_1(P)$.*

It is known that a projection has these properties. On the other hand, if P is an idempotent contraction then $Px=x$ for $x\in M_1(P)$ and $Px=0$ for $x\in R(1-P)$. By (II), $[R(1-P)]$ is the orthogonal complement of $M_1(P)$.

(IV) *Suppose each ST_iS^{-1} $(i=1, \ldots, r)$ has property $(*)$ and $T=T_1\ldots T_r$. Then STS^{-1} has property $(*)$ and $Tx=x$ if and only if $T_ix=x$ for all i.*

Consider first the case $S=1$. If $T_ix=x$ for all i then $Tx=T_1\ldots T_rx=x$. On the other hand if $T_ix\neq x$ for some i, let j be the largest such i; then $\|Tx\|=\|T_1\ldots T_jx\|\leqq \leqq \|T_jx\|<\|x\|$.

Hence if $Tx \neq x$ then $\|Tx\| < \|x\|$ so (*) holds for T and $Tx=x$ if and only if $T_i x = x$ for all i.

The same argument applies with ST_iS^{-1} in place of T_i since $T_ix=x$ and $Tx=x$ are respectively equivalent to $ST_iS^{-1}(Sx)=Sx$ and $STS^{-1}(Sx)=Sx$.

(V) *Suppose each* ST_iS^{-1} *has property* (φ) *with* $k=k_i$ $(i=1, \dots, r)$, *and let* $T=T_1 \dots T_r$. *Then* STS^{-1} *has property* (φ).

Since $STS^{-1}=(ST_1S^{-1})\dots(ST_rS^{-1})$ we may assume $S=1$. Now

$$\begin{aligned}
&\varphi(\|x-T_1T_2x\|) \leqq \varphi(\|x-T_2x\|+\|T_2x-T_1T_2x\|) \leqq \\
&\leqq \varphi\big(2\max(\|x-T_2x\|, \|T_2x-T_1T_2x\|)\big) \leqq \\
&\leqq \Phi_2\big(\varphi(\|x-T_2x\|)+\varphi(\|T_2x-T_1T_2x\|)\big) \leqq \\
&\leqq \Phi_2 \max(k_1, k_2)\big(\varphi(\|x\|)-\varphi(\|T_2x\|)+\varphi(\|T_2x\|)-\varphi(\|T_1T_2x\|)\big) \leqq \\
&\leqq \Phi_2 \max(k_1, k_2)\big(\varphi(\|x\|)-\varphi\|T_1T_2x\|\big),
\end{aligned}$$

so T_1T_2 has property (φ). By induction, $T_1 \dots T_r$ has property (φ), as required.

(VI) *If* $K(T)$ *is finite and* T *has property* (**) *then* $T^ny \to 0$ *as* $n \to \infty$ *for all* $y \in [R(1-T)]$.

$T^ny \to 0$ as $n \to \infty$ for $y \in R(1-T)$, i. e. for $y=(1-T)z$, by (**), hence for all $y \in [R(1-T)]$ since $K(T) < \infty$.

(VII) *If* T^n *converges strongly to a limit operator* P *then* $K(T)$ *is finite*, (**) *and* (***) *hold*, P *is idempotent*, $PT=TP=P$, $Px=x$ *if and only if* $Tx=x$, $Px=0$ *if and only if* $x \in [R(1-T)]$.

Suppose $T^n \to P$. Then $(T^n-T^{n+1}) \to (P-P)=0$ so (**) holds. Also $(\lim T^n)T = \lim T^n = T(\lim T^n)$ since T is bounded, so $PT=P=TP$. Then $PP = (\lim T^n)P = \lim(T^nP) = \lim P = P$ so P is idempotent.

Next, $Px=x$ implies $Tx=TPx=Px=x$ and $Tx=x$ implies $Px=\lim T^nx = \lim x = x$.

Next, since T^n is convergent, $K(T)$ is finite by [1, page 80, Théorème 5]. Since (**) holds, (VI) shows that $T^ny \to 0$ as $n \to \infty$ for all $y \in [R(1-T)]$, i. e. $Py=0$ for $y \in [R(1-T)]$. Now for every $y \in B$,

$$\begin{aligned}
y &= Py+(1-P)y = Py+(1-T^n)(1-P)y+T^n(1-P)y = \\
&= Py+(1-T)(1+T+\dots+T^{n-1})(1-P)y+T^n(1-P)y.
\end{aligned}$$

Since $T^n(1-P)y \to P(1-P)y=0$ as $n \to \infty$ it follows that $y \in M_1(T)+[R(1-T)]$ so (***) holds. Moreover if $Py=0$ then $y \in [R(1-T)]$. Thus $Py=0$ if and only if $y \in [R(1-T)]$. This proves all parts of (VII).

Theorem 3. (i) *T^n converges strongly to a limit P as $n \to \infty$ if and only if $K(T)$ is finite and* (**) *and* (***) *hold.*

Then P is idempotent, $PT=TP=P$, $Px=x$ if and only if $Tx=x$, $Px=0$ if and only if $x \in [R(1-T)]$.

(ii) *If* STS^{-1} *has property* (φ) *then* $K(T)$ *is finite and* (**) *holds (if* $S=1$, P *is an idempotent contraction).*

(iii) *In the case of a Hilbert space,* T^n *does converge to a limit if* (φ) *holds for some* STS^{-1} *(if* $S=1$, P *is the projection onto* $M_1(T)$*).*

Proof of Theorem 3. (i). If $K(T)$ is finite and (**) holds then $T^n(x+y)\to x$ as $n\to\infty$, for all $x\in M_1(T)$ and $y\in[R(1-T)]$, by (VI). Hence if (***) also holds, $T^n(z)$ is convergent for all $z\in B$. The rest of (i) is included in (VII).

Proof of (ii). If (φ) holds for STS^{-1} then STS^{-1} is a contraction and $(**)$ holds for STS^{-1}, by (I). It follows easily that $K(T)$ is finite and (**) holds for T. If T itself is a contraction then (from (I)), P must be a contraction.

(iii) follows from (II) and (III).

Corollary (i). *If each* ST_iS^{-1} $(i=1,\ldots,r)$ *has property* (φ) *and* $T=T_1\ldots T_r$, *then* T^n *converges to a limit* P *as* $n\to\infty$ *if and only if* (***) *holds for* T; P *is idempotent (a contraction, if* $S=1$*) and* $Px=x$ *if and only if* $T_ix=x$ *for all* i.

(ii) *In the case of a Hilbert space if each* ST_iS^{-1} *has property* (φ) *and* $T=T_1\ldots T_r$, *then as* $n\to\infty$, T^n *converges to an idempotent* P, *and we have* $Px=x$ *if and only if* $T_ix=x$ *for all* i *(if* $S=1$, P *is the projection onto* $\bigcap_{i=1}^{r} M(T_i)$*).*

Proof of (i). STS^{-1} has property (φ) by (V) and $Tx=x$ if and only if $T_ix=x$ for all i, by (IV). (i) now follows from Theorem 3 (ii).

Proof of (ii). Because of (V), (ii) follows from Theorem 3 (iii) and (IV).

Note: Corollary (ii) with $S=1$ is identical with Theorem 2.

Added in proof. Felix Browder has kindly informed me that part of the argument of this paper was used previously by S. Kakutani to obtain a weaker form of Theorem 1, namely with weak convergence (see F. E. Browder, On Some Approximation Methods for Solutions of the Dirichlet Problem for Linear Elliptic Equations of Arbitrary Order, *Journal Math. and Mech.*, 7 (1958), 69—80 for this result).

References

[1] S. Banach, *Opérations linéaires* (Warsaw, 1932).

[2] H. Nakano, *Spectral Theory in the Hilbert Space* (Tokyo, 1953).

[3] John von Neumann, *Functional Operators,* Vol. II. (Annals of Mathematics Studies No. 22), (Princeton, 1950). This is a reprint of mimeographed lecture notes first distributed in 1933.

[4] John von Neumann, On Rings of Operators. Reduction Theory, *Annals of Math.*, **50** (1949), 401—485.

[5] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math.*, **10** (1941—1943), 202—205.

[6] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis* (New York, 1955).

[7] N. Wiener, On the factorization of matrices, *Commentarii Math.*, **29** (1955), 97—111.

QUEEN'S UNIVERSITY
KINGSTON, CANADA

(*Received January 8, 1961*)

On unitary equivalence of unitary dilations of contractions in Hilbert space

By N. G. DE BRUIJN in Eindhoven (Holland)

1. Introduction

Let $\mathfrak{H}$ be a Hilbert space, and let T be a contraction of $\mathfrak{H}$ (i. e. a linear operator with norm $\leqq 1$). It was proved by B. Sz.-Nagy [2] that there exists a Hilbert space $\mathfrak{K}$ with $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{H}$, and a unitary operator U in $\mathfrak{K}$ such that (P denoting the projection onto $\mathfrak{H}$)

$$T^n P = P U^n P \qquad (n=1, 2, 3, \dots), \tag{1.1}$$

$$T^{*n} P = P U^{-n} P \qquad (n=1, 2, 3, \dots). \tag{1.2}$$

((1. 2) is, of course, a consequence of (1. 1)). If we require that $\mathfrak{K}$ is *minimal*, i. e. that $\mathfrak{K}$ is the closed linear hull of the set of all $U^n h$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots; h \in \mathfrak{H}$), then $\mathfrak{K}$ and U are uniquely determined (if we neglect isometries which leave $\mathfrak{H}$ and T invariant). This U is called the *unitary dilation* of T.

It was shown by M. Schreiber [6] (see also B. Sz.-Nagy [3]) that the unitary dilation of a proper contraction (i. e. an operator with norm $\|T\| < 1$) is always unitarily equivalent to a fixed operator U_0, depending on $\mathfrak{H}$ only. U_0 can be described as the orthogonal sum of η copies of the bilateral shift operator, where $\eta = \dim \mathfrak{H}$. This means that $\mathfrak{K}$ has a complete orthogonal system $\{\varphi_{ij}\}$ (where $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, and j runs through an index set of cardinality η) such that $U_0 \varphi_{ij} = \varphi_{i+1,j}$ for all i and j.

In this note we shall establish the unitary equivalence explicitly in matrix form, thus giving an answer to a question proposed by B. Sz.-Nagy [4], a question directly connected with J. J. Schäffer's matrix representation of the unitary dilation (see [5] and [4]). We shall moreover generalize Schreiber's result: Instead of $\|T\| < 1$, our assumption will be only $T^n \to 0$. Under that condition we shall prove that the minimal dilation is still unitarily equivalent to the orthogonal sum of a number of copies of the bilateral shift operator, but the number of copies can be less than $\dim \mathfrak{H}$. In fact it equals $\dim \mathfrak{M}_Z$ (to be defined below).

A further discussion will be postponed to section 6. Here we only remark that the results of this paper have been generalized, and proved in a more geometric way, by I. Halperin.

2. Preliminaries

Throughout the paper we assume that T is a contraction, and we put

(2.1) $$Z=(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}, \quad S=(I-TT^*)^{\frac{1}{2}};$$

Z and S are non-negative definite hermitean operators. We have (cf. [1])

(2.2) $$TZ=ST, \quad T^*S=ZT^*.$$

The spaces $\mathfrak{M}_Z$ and $\mathfrak{M}_S$ are closed subspaces of $\mathfrak{H}$, defined by

(2.3) $$\mathfrak{M}_Z=\overline{Z\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{M}_S=\overline{S\mathfrak{H}}.$$

It follows from (2.2) that

$$T\mathfrak{M}_Z=T\overline{Z\mathfrak{H}}\subset\overline{TZ\mathfrak{H}}\subset\overline{ST\mathfrak{H}}\subset\overline{S\mathfrak{H}}=\mathfrak{M}_S,$$

and a similar result for $T^*\mathfrak{M}_S$, whence

(2.4) $$T\mathfrak{M}_Z\subset\mathfrak{M}_S, \quad T^*\mathfrak{M}_S\subset\mathfrak{M}_Z.$$

3. Operators and matrices

Let $\mathfrak{R}$ denote the orthogonal sum of countably many copies of $\mathfrak{H}$. Elements of $\mathfrak{R}$ are sequences $\{h_i\}$ $(-\infty<i<\infty)$ with $h_i\in\mathfrak{H}$, $\sum_{-\infty}^{\infty}\|h_i\|^2<\infty$.

Let P_i denote the projection of $\mathfrak{R}$ onto the i-th coordinate space, and let Q_i denote the natural isometric mapping of this coordinate space onto $\mathfrak{H}$ itself (the sequence $\{h_i\}$ is mapped by P_j onto $\{\dots, 0, 0, h_j, 0, 0, \dots\}$, and this one is mapped by Q_j onto h_j).

If A is an operator in $\mathfrak{R}$, then we can define a matrix of operators in $\mathfrak{H}$ by

(3.1) $$A_{ij}=Q_iP_iAP_j^{-1}Q_j^{-1} \qquad (i,j=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

If A, B, C are bounded operators in $\mathfrak{R}$, and if $AB=C$, then it is not difficult to establish a matrix product relation

(3.2) $$\sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{ij}B_{jk}=C_{ik}.$$

It has to be noticed that this means that the partial sums of the series on the left converge to the operator on the right in the sense of operator convergence, i. e. that for every $h\in\mathfrak{H}$

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{M\to\infty}\sum_{-M}^{N} A_{ij}B_{jk}h=C_{ik}h.$$

Moreover we notice that, if A is bounded, we have $(A^*)_{ij}=(A_{ji})^*$ for the adjoints. For convenience, we shall occasionally use the same symbol A both for this operator and for the matrix (A_{ij}).

Conversely, if a matrix (A_{ij}) of operators of $\mathfrak{H}$ is given, it is sometimes (but not always) possible to find an operator A of $\mathfrak{K}$ such that A_{ij} is related to A by (3. 1). For example, if the A_{ij}'s satisfy, for all i, k,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (A_{ji})^* A_{jk} = \delta_{ik} I, \tag{3. 2}$$

and

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{ij} (A_{kj})^* = \delta_{ik} I, \tag{3. 3}$$

then there is exactly one unitary operator A of $\mathfrak{K}$ satisfying (3. 1).

4. Reduction of the Schäffer matrix

The Schäffer matrix is (see [5])

$$U_T = \begin{pmatrix} \ddots &&&&&&& \\ & I &&&&&& \\ && I &&&&& \\ &&& Z & -T^* &&& \\ &&& \boxed{T} & S &&& \\ &&&&& I && \\ &&&&&& I & \\ &&&&&&& \ddots \end{pmatrix}$$

(in order to indicate the indices of rows and columns, we have drawn a square around the central element, i. e. the element at the intersection of 0-th row and 0-th column). It is easily seen from what was said at the end of section 3, using (2. 1) and (2. 2), that U_T defines a unitary operator in $\mathfrak{N}$. And as the matrix U_T^n has as its central element T^n (if $n \geqq 0$) or $(T^*)^{-n}$ (if $n < 0$), we find that (1. 1) and (1. 2) are satisfied with $P = P_0$ (see section 3), $U = U_T$.

If T is replaced by 0, we get $Z = S = I$, $T = T^* = 0$ whence U_0 is the operator described in section 1.

We want to establish unitary equivalence of U_T and U_0. That is, we want to find a unitary operator W satisfying

$$U_T W = W U_0. \tag{4. 1}$$

We shall show that $T^n \to 0$ is a sufficient condition for the existence of such a W.

First we determine a matrix (W_{ij}) satisfying (4. 1) as a product relation. As U_T and U_0 have only a finite number of non-zero elements in each row and in each column, this is only a matter of finite sums. It turns out that we are still able to require

$$W_{ij} = \delta_{ij} \text{ if } i \text{ and } j \text{ are not both } \geqq 0. \tag{4. 2}$$

The matrix (W_{ij}) is uniquely determined by (4. 1) and (4. 2); it turns out that

$$W = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & & \\ & I & & & & & & & \\ & & I & & & & & & \\ & & & \boxed{Z} & T^*Z & T^{*2}Z & T^{*3}Z & \cdots & \\ & & & -T & SZ & ST^*Z & ST^{*2}Z & \cdots & \\ & & & & -T & SZ & ST^*Z & \cdots & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \cdots & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

i. e.

$$\begin{aligned} &W_{0j}=T^{*j}Z && \text{if } j\geqq 0,\\ &W_{ij}=0 && \text{if } i-j\geqq 2,\\ &W_{ij}=-T && \text{if } i=j+1\geqq 1,\\ &W_{ij}=S(T^*)^{j-i}Z && \text{if } j\geqq i\geqq 1. \end{aligned}$$

These values can be obtained e. g. by introducing the formal power series $w_i=\sum_{j=0}^{\infty} W_{ij}\zeta^j$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$. Relation (4. 1) implies

$$Zw_0-T^*w_1 = I$$

$$Tw_0+Sw_1 = \zeta w_0$$

and $w_2=\zeta w_1$, $w_3=\zeta w_2$, ... Using (2. 1) and (2. 2) we easily solve these equations for w_0, w_1, and find

$$w_0 = (I-\zeta T^*)^{-1}Z, \quad w_1 = -T+\zeta S(I-\zeta T^*)^{-1}Z.$$

We have to verify that the matrix W defines a unitary operator, i. e. we have to check (3. 2) and (3. 3), with A replaced by W. For $\Sigma(W_{ji})^*\, W_{jk}$ this does not involve infinite series, and the result follows by some elementary computation. It can also be remarked that $W^*W=I$ directly follows from (4. 1) and (4. 2): If we put $W^*W=J$, we have, by (4. 1), $U_0J=JU_0$, or $J_{ij}=J_{i+1,\, j+1}$; now (4. 2) shows that $J=I$.

In order to prove (3. 3) (with A replaced by W), we shall assume that $T^n\to 0$. This implies that $T^{*n}T^n\to 0$ (actually, if T is a contraction, then $T^n\to 0$, $T^{*n}T^n\to 0$ and $T^{*n}T^n\rightharpoonup 0$ are mutually equivalent), whence

$$\begin{aligned} ZZ^*+T^*Z(T^*Z)^*+T^{*2}Z(T^{*2}Z)^*+\ldots &= I-T^*T+T^*(I-T^*T)T+\ldots = \\ &= I-T^*T+(T^*T-T^{*2}T^2)+\ldots = I. \end{aligned}$$

The other relations we have to establish for proving (3. 3) easily follow from this one.

5. The unitary dilation

If T is a proper contraction then the Schäffer matrix U_T represents the unitary dilation, but if T is improper, U_T does not always satisfy the minimality condition. It was remarked by B. Sz.-Nagy [4] that the unitary dilation is still described by U_T if we only restrict ourselves to a suitable subspace of $\mathfrak{R}$, viz.

$$\mathfrak{K} = \ldots \oplus \mathfrak{M}_Z \oplus \mathfrak{M}_Z \oplus \boxed{\mathfrak{H}} \oplus \mathfrak{M}_S \oplus \mathfrak{M}_S \oplus \ldots.$$

This notation means that $\mathfrak{K}$ consists of the sequences $(\ldots, h_{-1}, h_0, h_1, \ldots)$ of $\mathfrak{R}$ for which $h_j \in \mathfrak{M}_Z$ if $j<0$, $h_j \in \mathfrak{M}_S$ if $j>0$, $h_0 \in \mathfrak{H}$. By (2. 3) and (2. 4) we have

$$U_T \mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}, \quad U_T^* \mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}, \tag{5. 1}$$

whence U_T provides a unitary operator of $\mathfrak{K}$, still satisfying (1. 1) and (1. 2), and moreover $\mathfrak{K}$ is minimal. So, when restricted to $\mathfrak{K}$, the operator U_T provides the unitary dilation of T.

Next we introduce a second subspace of $\mathfrak{R}$, viz.

$$\mathfrak{L} = \ldots \oplus \mathfrak{M}_Z \oplus \boxed{\mathfrak{M}_Z} \oplus \mathfrak{M}_Z \oplus \ldots.$$

We infer from the matrix representation of W, using (2. 3) and (2. 4), that

$$W \mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}, \quad W^* \mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}.$$

As $WW^* = W^* W = I$, we infer that W provides an isometric mapping of $\mathfrak{L}$ onto $\mathfrak{K}$. The transformed operator $W^* U_T W = U_0$ maps $\mathfrak{L}$ into itself, and we obtain

Theorem. *If the contraction T satisfies $T^n \to 0$ $(n \to \infty)$, then the unitary dilation of T is unitarily equivalent to the orthogonal sum of ω copies of the bilateral shift operator, where $\omega = \dim \mathfrak{M}_Z$.*

6. Remarks

We shall say, for a moment, that T has property (A) if the unitary dilation of T is unitarily equivalent to the orthogonal sum of a number of copies of the bilateral shift operator.

If T has property (A), then T^* has propety (A), for if U is the unitary dilation of T, then U^{-1} is the unitary dilation of T^*. With this in mind we see that our theorem has a lack of symmetry, for the conditions $T^n \to 0$ and $T^{*n} \to 0$ are not equivalent, whereas both are sufficient for T and T^* to have property (A). Meanwhile we learn that if both $T^n \to 0$ and $T^{*n} \to 0$, then $\mathfrak{M}_Z$ and $\mathfrak{M}_S$ have the same dimension.

Neither $T^n \to 0$ nor $T^{*n} \to 0$ are necessary for (A). For example, if T is itself a bilateral shift operator, then T is its own unitary dilation.

An instructive example is provided by the unilateral shift operator, defined by $T\varphi_1 = 0$, $T\varphi_2 = \varphi_1$, $T\varphi_3 = \varphi_2, \ldots$, if $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ is some complete orthogonal system. With this operator T^n tends to zero, but T^{*n} does not. $\mathfrak{M}_Z$ consists of all multiples of φ_1, but $\mathfrak{M}_S = 0$.

A simple necessary condition for (A) is that T^n tends weakly to zero, or, what is the same thing, that T^{*n} tends weakly to zero. In order to show this, we only need to remark that the powers of the bilateral shift operator tend weakly to zero.

On the other hand, this weak convergence of T^n is by no means sufficient for (A). For it is not difficult to find unitary operators whose powers tend weakly to zero but whose spectra show gaps. Because of these gaps they cannot be of the bilateral shift type.

It is easy to see that $\mathfrak{M}_Z = \mathfrak{H}$ and $\mathfrak{M}_S = \mathfrak{H}$ are equivalent; in that case the spaces $\mathfrak{N}$ and $\mathfrak{K}$ are identical. The author thinks it possible that this condition $\mathfrak{M}_Z = \mathfrak{H}$ implies (A).

References

[1] P. R. HALMOS, Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasil. Math.*, **2** (1950), 125–134.
[2] B. SZ.-NAGY, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 87–92.
[3] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 1–14.
[4] ——— On Schäffer's construction of unitary dilations, *Annales Univ. Budapest*, **3–4** (1960/61), 343–346.
[5] J. J. SCHÄFFER, On unitary dilations of contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 322.
[6] M. SCHREIBER, Unitary dilations of operators, *Duke Math. J.*, **23** (1956), 579–594.

(Received July 23, 1961)

Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V
Translations bilatérales

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Le but de la présente Note est de poursuivre l'étude de la structure des dilatations unitaires minimum des contractions de l'espace de Hilbert. On cherchera en particulier des conditions dans lesquelles la dilatation unitaire minimum est une „translation bilatérale". De cette façon, la présente Note reprend et approfondit l'étude qui a été le sujet des Notes II et IV [11, 13], du moins en ce qui concerne le cas „discret" où il s'agit d'une contraction T et ses itérées T^n. Le cas „continu", où il s'agit d'un semi-groupe à un paramètre T_s $(s \geqq 0)$, se réduit au cas discret par l'intermédiaire des cogénératrices.

Dans le paragraphe 1 on démontrera quelques faits, plus ou moins connus, appartenant à la théorie de la multiplicité spectrale.

Dans le paragraphe 2 on appliquera ces faits à l'étude de la structure des dilatations unitaires. On démontrera que sauf le cas où l'espace $\mathfrak{H}$ est séparable et $\overline{(I-T^*T)\mathfrak{H}}$, $\overline{(I-TT^*)\mathfrak{H}}$ [1]) sont de dimension finie, la dilatation unitaire minimum de la contraction complètement non-unitaire T de $\mathfrak{H}$ est une translation bilatérale. Un exemple donné à la fin du paragraphe 2 montre que dans le cas exceptionnel (qu'on se propose de rechercher ultérieurement) la dilatation unitaire minimum n'est pas nécessairement une translation bilatérale.

Cette étude est poursuivie aussi dans le paragraphe 3, mais là on se servira d'autres méthodes.

1. Quelques lemmes sur les transformations unitaires

1. Soit U une transformation unitaire dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{K}$. Pour un sous-ensemble quelconque $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{K}$ soit $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ le sous-espace sous-tendu par les éléments de la forme $U^n f$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots; f \in \mathfrak{S})$, en formule

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{S}) = \bigvee_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{S};$$

$\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ réduit U.

---

1) Pour une variété linéaire quelconque $\mathfrak{E}$, $\overline{\mathfrak{E}}$ désignera l'adhérence de $\mathfrak{E}$ (forte ou faible, ce qui revient au même).

Un sous-espace $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{K}$ sera dit *ambulant* (en anglais: „wandering”) par rapport à U si

$$U^m\mathfrak{A} \perp U^n\mathfrak{A},$$

quels que soient les entiers m, n ($m \neq n$). Pour cela il suffit d'ailleurs de supposer

$$U^n\mathfrak{A} \perp \mathfrak{A} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Pour $\mathfrak{A}$ ambulant on a

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n\mathfrak{A}.$$

Dans le cas où $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}$ on dira que l'ensemble ambulant $\mathfrak{A}$ est *complet* et U est une *translation bilatérale* engendrée par $\mathfrak{A}$.

Nous envisagerons seulement le cas d'un espace de Hilbert *complexe*. Toute translation bilatérale U admet alors la représentation suivante. Soit $\mathfrak{A}$ un sous-espace ambulant complet générateur et construisons l'espace $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$ des fonctions $u(\theta)$ ($0 \leqq \theta \leqq 2\pi$), dont les valeurs sont des éléments de $\mathfrak{A}$, et qui sont fortement mesurables et telles que

$$\|u\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|u(\theta)\|^2 d\theta < \infty.$$

On peut appliquer $\mathfrak{K}$ *sur* $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$ *isométriquement* en faisant correspondre à l'élément

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} U^n a_n \in \mathfrak{K} \qquad (a_n \in \mathfrak{A})$$

l'élément

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{in\theta} a_n \in L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi);$$

à Uf correspondra alors $e^{i\theta} f(\theta)$.

De cette façon, on représente U comme „opérateur de multiplication” dans $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$. Cette représentation est utile dans la démonstration de quelques faits fondamentaux sur les translations bilatérales.

Lemme 1. (i) *Soit U une translation bilatérale dans $\mathfrak{K}$, engendrée par le sous-espace ambulant complet $\mathfrak{A}$, et soit $\mathfrak{B}$ un sous-espace quelconque, ambulant par rapport à U. On a alors*

$$\dim \mathfrak{B} \leqq \dim \mathfrak{A}. \tag{1}$$

(ii) *Pour que deux translations bilatérales, U dans $\mathfrak{K}$ et U' dans $\mathfrak{K}'$, engendrées par les sous-espaces ambulants complets $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$, soient unitairement équivalentes, il faut et il suffit que*

$$\dim \mathfrak{A} = \dim \mathfrak{A}'.$$

Démonstration. Puisque $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}$ et

$$\dim \mathfrak{M}(\mathfrak{B}) = \aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{B}, \quad \dim \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = \aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{A},$$

on a

$$\aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{B} \leqq \aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{A}.$$

Dans le cas dim $\mathfrak{A} \geqq \aleph_0$, cela entraîne (1). Dans le cas dim $\mathfrak{A} < \aleph_0$, on voit d'abord que dim $\mathfrak{B} \leqq \aleph_0$. Faisons usage, dans ce cas, de la représentation de U comme opérateur de multiplication dans $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$. [2]) Choisissons dans $\mathfrak{B}$ un système orthonormal complet $\{u_n\}$ et soit $\{u_n(\theta)\}$ le système des fonctions correspondantes dans $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$. Puisque $\mathfrak{B}$ est un sous-espace ambulant, on a pour $k \neq 0$ et m, n arbitraires

$$0 = (U^k u_m, u_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{ik\theta} u_m(\theta), u_n(\theta))\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} (u_m(\theta), u_n(\theta))\, d\theta.$$

La fonction $(u_m(\theta), u_n(\theta))$ doit donc être constante p. p., et comme

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_m(\theta), u_n(\theta))\, d\theta = (u_m, u_n) = \delta_{m,n},$$

on a nécessairement

$$(u_m(\theta), u_n(\theta)) = \delta_{m,n} \quad \text{p. p.} \tag{2}$$

L'ensemble des couples m, n étant dénombrable, il existe certainement un point θ_0 où toutes les équations (2) sont simultanément vérifiées, c'est-à-dire que $\{u_n(\theta_0)\}$ est un système orthonormal dans $\mathfrak{A}$. Donc $\mathfrak{A}$ comprend un système orthonormal de même puissance que dim $\mathfrak{B}$ et par conséquent l'inégalité (1) subsiste dans ce cas aussi.

(ii) Supposons que dim $\mathfrak{A} =$ dim $\mathfrak{A}'$. Dans ce cas il existe une application isométrique $a \to a' = \varphi a$ de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}'$. Celle-ci engendre une application isométrique $f \to f' = \Phi f$ de $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{K}'$, notamment la suivante:

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} U^n a_n \to \sum_{-\infty}^{\infty} U'^n (\varphi a_n) = f' \qquad (a_n \in \mathfrak{A}),$$

pour laquelle

$$\Phi U f = U' \Phi f.$$

Donc U et U' sont unitairement équivalentes.

Supposons, inversement, que U et U' soient unitairement équivalentes, ou ce qui revient au même, que $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$, $U' = U$ et que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ sont deux sous-espaces de $\mathfrak{K}$, ambulants et complets par rapport à U. En vertu de (i) on a dim $\mathfrak{A}' \leqq$ dim $\mathfrak{A}$ et en même temps dim $\mathfrak{A} \leqq$ dim $\mathfrak{A}'$, donc on a bien dim $\mathfrak{A} =$ dim $\mathfrak{A}'$.

Cela achève la démonstration du lemme 1.

2. Définissons la *multiplicité* d'une translation bilatérale U comme égale à dim $\mathfrak{A}$ où $\mathfrak{A}$ est un sous-espace ambulant complet par rapport à U. En vertu du lemme 1, cette définition est univoque.

Il est manifeste que la somme orthogonale de translations bilatérales est aussi une translation bilatérale, et que les multiplicités *s'ajoutent.*

---

[2]) Nous empruntons le raisonnement suivant à HALMOS [2], Lemma 4.

(Ajouté le 19. mai 1962:) La démonstration simple suivante nous a été indiquée par M. ISRAEL HALPERIN: Soient $\{v_m\}$, $\{u_n\}$ des systèmes orthonormaux complets dans $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, selon les cas. On a alors

$$\dim \mathfrak{B} = \sum_n \|u_n\|^2 = \sum_{n,m,k} |(u_n, U^k v_m)|^2 = \sum_{n,m,k} |(U^{*k} u_n, v_m)|^2 \leqq \sum_m \|v_m\|^2 = \dim \mathfrak{A}.$$

Lemme 2. *Soit U une translation bilatérale de $\mathfrak{K}$ et supposons qu'elle admette une décomposition*

$$U = U' \oplus U''$$

où U' est une translation bilatérale de multiplicité finie N. Dans ce cas U'' est aussi une translation bilatérale.

Démonstration. Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ des sous-espaces ambulants, dont $\mathfrak{A}$ engendre U et $\mathfrak{A}'$ engendre U'. Soit $\{u_n\}$ $(n=1, \ldots, N)$ un système orthonormal complet dans $\mathfrak{A}'$. Puisque

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = \bigoplus_k U^k \mathfrak{A},$$

chacun des u_n peut être représenté sous la forme

$$u_n = \sum_k U^k a_{nk} \qquad (a_{nk} \in \mathfrak{A}).$$

Soit $\mathfrak{A}_1$ le sous-espace déterminé par les éléments

$$a_{nk} \quad (n=1, \ldots, N;\ k=0, \pm 1, \ldots)$$

et soit $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A} \ominus \mathfrak{A}_1$. $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1)$ est séparable, comprend $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}')$, et puisque $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ sont ambulants, les parties U_1 et U_2 de U dans $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1)$ et $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2)$ sont des translations bilatérales. En désignant par U_1'' la partie de U dans $\mathfrak{K}_1 \ominus \mathfrak{M}(\mathfrak{A}')$ on a donc

$$U_1 = U' \oplus U_1'' \quad \text{et} \quad U'' = U_1'' \oplus U_2.$$

Si nous montrons que U_1'' est une translation bilatérale, il s'ensuivra que U'' est aussi une translation bilatérale et le lemme sera démontré.

Il suffit donc de prouver le lemme dans l'hypothèse additionnelle que $\mathfrak{A}$ est séparable. Soit alors

$$w_1, w_2, \ldots, w_r, \ldots \tag{3}$$

une suite d'éléments de $\mathfrak{A}$, partout dense dans $\mathfrak{A}$.

Représentons U comme opérateur de multiplication dans $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$; soient

$$u_1(\theta), u_2(\theta), \ldots, u_N(\theta) \tag{4_N}$$

les fonctions qui correspondent aux éléments $u_1, u_2, \ldots, u_N$ du système orthonormal choisi dans $\mathfrak{A}'$. Pour tout point θ fixé (sauf les points d'un ensemble de mesure 0 qu'on négligera dans la suite), les valeurs des fonctions (4_N) au point θ constituent un système orthonormal dans $\mathfrak{A}$ (même conclusion que dans la démonstration du lemme 1), donc $\dim \mathfrak{A} \geqq N$.

Nous complèterons le système (4_N) par l'adjonction de certaines fonctions $u_n(\theta) \in L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$ à un système

$$\{u_n(\theta)\} \qquad (n \in \Omega) \tag{4_Ω}$$

où

$$\Omega = \{1, \ldots, M\} \quad \text{ou} \quad \Omega = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

suivant que $\dim \mathfrak{A} = M$ ou $\dim \mathfrak{A} = \aleph_0$, et cela de sorte que les valeurs de ces fonctions forment, pour tout point θ fixé, un système orthonormal *complet* dans $\mathfrak{A}$.

Si $\dim \mathfrak{A} = N$, on n'a pas besoin de compléter (4_N). Supposons que $\dim \mathfrak{A} > N$. Pour tout θ fixé il y a alors du moins un parmi les éléments (3) pour lequel

$$h_r(\theta) = w_r - \sum_{n=1}^{N} (w_r, u_n(\theta))u_n(\theta) \neq 0;$$

soit $w_{r(\theta)}$ le premier parmi les w_r ayant cette propriété. Nous définissons

$$u_{N+1}(\theta) = \|h_{r(\theta)}(\theta)\|^{-1} h_{r(\theta)}(\theta).$$

Les valeurs des fonctions

$$(4_{N+1}) \qquad u_1(\theta), \ldots, u_N(\theta), u_{N+1}(\theta)$$

en tout point θ fixé constituent alors un système orthonormal dans $\mathfrak{A}$. La fonction $u_{N+1}(\theta)$ est mesurable[3]) et bornée, $\|u_{N+1}(\theta)\| = 1$, donc appartient à $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$.

En partant du système (4_{N+1}) au lieu de (4_N) on construit de la même façon la fonction $u_{N+2}(\theta)$ et ainsi de suite. Dans le cas où $\dim \mathfrak{A}$ est finie on arrive au système cherché (4_Ω) après avoir répété ce procédé en un nombre fini de fois.

Dans le cas où $\dim \mathfrak{A}$ est infinie on peut répéter ce procédé indéfiniment et on obtient une suite infinie de fonctions $u_n(\theta) \in L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$ dont les valeurs en chaque point fixé θ_0 forment un système orthonormal dans $\mathfrak{A}$. Ce système orthonormal est complet. En effet, il s'ensuit de notre construction que pour tout $n > N$ il y a un entier positif r_n tel que

$$(5) \qquad w_{r_n} = \sum_{k=1}^{n} c_{nk} u_k(\theta_0), \qquad c_{nn} > 0,$$

et tous les w_r avec $r < r_n$ dépendent linéairement des $u_k(\theta_0)$ avec $k \leqq n-1$. De la relation (5) on déduit que $r_n \neq r_m$ pour $n \neq m$ et par conséquent $r_n \to \infty$ pour $n \to \infty$. Donc pour chaque r donné on a $r < r_n$ à partir d'un certain rang n et par conséquent w_r dépend linéairement d'un nombre fini des éléments du système $\{u_n(\theta_0)\}$. La suite $\{w_r\}$ étant dense dans $\mathfrak{A}$, ce système est donc complet.

Cela achève la démonstration de ce que le système $\{u_n(\theta)\}$ $(n \in \Omega)$ que nous venons de construire est tel que les valeurs en chaque point θ fixé forment un système orthonormal complet dans $\mathfrak{A}$. Soit u_n l'élément de $\mathfrak{K}$ qui correspond à la fonction $u_n(\theta)$ $(n \in \Omega)$. On a alors

$$(U^p u_m, U^q u_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)\theta} (u_m(\theta), u_n(\theta)) d\theta = \delta_{p,q} \cdot \delta_{m,n}$$

---

[3]) Les fonctions $u_n(\theta)$ $(n = 1, \ldots, N)$ étant mesurables, les ensembles

$$e_r = \{\theta \colon h_1(\theta) = \ldots = h_{r-1}(\theta) = 0, \; h_r(\theta) \neq 0\} \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

sont aussi mesurables. La réunion de ces ensembles est égale au segment $(0, 2\pi)$ et dans e_r on a

$$u_{N+1}(\theta) = \|h_r(\theta)\|^{-1} \, h_r(\theta)$$

donc $u_{N+1}(\theta)$ est mesurable dans e_r.

$(m, n\in\Omega;\ p, q=0, \pm 1, \ldots)$, d'où il résulte en particulier que le sous-espace $\mathfrak{A}''$ déterminé par les éléments u_n de rang $n>N$ est ambulant par rapport à U et que $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}'')$ est orthogonal à $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}')$. Soit v un élément de $\mathfrak{K}$, orthogonal à $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}')\oplus\oplus\mathfrak{M}(\mathfrak{A}'')$, ou, ce qui revient au même, à tous les éléments de la forme $U^q u_n$ $(n\in\Omega;\ q=0, \pm 1, \ldots)$. Si $v(\theta)$ est la fonction correspondante, on a

$$0=(U^q u_n, v)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iq\theta}(u_n(\theta), v(\theta))\,d\theta \qquad (n\in\Omega;\ q=0, \pm 1, \ldots),$$

donc

$$(u_n(\theta), v(\theta))=0 \quad \text{p. p.} \quad (n\in\Omega);$$

vu que le système $\{u_n(\theta)\}$ est complet dans $\mathfrak{A}$ pour tout θ fixé, il résulte que

$$v(\theta)=0 \ \text{p. p.},$$

donc $v=0$. Cela prouve que

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{A}')\oplus\mathfrak{M}(\mathfrak{A}'')=\mathfrak{K}$$

et que, par conséquent, U'' est une translation bilatérale, engendrée notamment par le sous-espace ambulant $\mathfrak{A}''$.

Cela achève la démonstration du lemme 2.

3. Soit

$$U=\int_0^{2\pi} e^{i\theta}dE_\theta$$

une transformation unitaire quelconque et soit $E(\sigma)$ la mesure spectrale correspondante; σ parcourt les ensembles boréliens sur le cercle unité

$$C_0=\{e^{i\theta}:\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi\}.\ ^{4)}$$

En désignant par $m(\sigma)$ la mesure de Lebesgue sur C_0 on dit que U a son *spectre absolument continu* si $m(\sigma)=0$ entraîne $E(\sigma)=O$.

Lemme 3. *Supposons que pour la transformation unitaire U de $\mathfrak{K}$ il y ait des sous-espaces ambulants $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_N$ tels que la somme vectorielle*

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1)+\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2)+\cdots+\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_N)$$

soit dense dans $\mathfrak{K}$. U a alors son spectre absolument continu.

Démonstration. Dans le cas où $N=1$, c'est-à-dire si U est une translation bilatérale engendrée par $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1$, on peut faire usage de la représentation de U

---

4) On a

$$E(\sigma)=\int_s dE_\theta$$

où s désigne l'ensemble dans $[0, 2\pi]$ qui correspond à l'ensemble σ dans C_0 par l'application $e^{i\theta}\rightarrow\theta$.

comme opérateur de multiplication dans $L^2_{\mathfrak{A}}(0, 2\pi)$. On voit aisément que

$$(E(\sigma)u, u) = \frac{1}{2\pi}\int_s (u(\theta), u(\theta))\, d\theta,\ ^4)$$

d'où la continuité absolue de $E(\sigma)$ est évidente.

Dans le cas général on observe que chaque $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_k)$ réduit U à une translation bilatérale et par conséquent la partie de $E(\sigma)$ dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_k)$ est absolument continue. Donc $m(\sigma)=0$ entraîne $E(\sigma)f=0$ pour $f\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_k)$ $(k=1, \ldots, N)$ et alors aussi pour $f\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1)+\cdots+\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_N)$ et par continuité pour tout $f\in\mathfrak{K}$.

Lemme 4. *Supposons que la transformation unitaire U de l'espace $\mathfrak{K}$ ait son spectre absolument continu et soit $\mathfrak{S}$ un sous-espace de $\mathfrak{K}$ tel que $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})=\mathfrak{K}$. On a alors*

$$U=\bigoplus_{\varkappa} U_\varkappa$$

où le nombre des termes est au plus égal à dim $\mathfrak{S}$, *et chaque terme est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par $e^{i\theta}$ dans un espace $L^2(M_\varkappa)$, constitué des fonctions $f(\theta)$ définies dans l'ensemble mesurable $M_\varkappa\subset(0, 2\pi)$, à valeurs complexes et de carré intégrable sur $M_\varkappa$. En formule*

$$U_\varkappa\sim U^\times(M_\varkappa).$$

Démonstration. Choisissons dans $\mathfrak{K}$ un système d'éléments $f_\omega\neq 0$ $(\omega\in\Omega)$ tel que les sous-espaces $\mathfrak{M}(f_\omega)$ soient orthogonaux deux-à-deux et

$$\mathfrak{K}=\bigoplus_{\omega}\mathfrak{M}(f_\omega). \tag{6}$$

Dans la décomposition correspondante de U,

$$U=\bigoplus_{\omega} U_\omega, \tag{7}$$

chaque terme U_ω est unitairement équivalent à un $U^\times(M_\omega)$, où M_ω est notamment l'ensemble des points $\theta\in(0, 2\pi)$ dans lesquels la fonction (non décroissante et absolument continue) $(E_\theta f_\omega, f_\omega)$ admet une dérivée $p_\omega(\theta)$, finie et $\neq 0$. En effet, l'application isométrique en question se définit d'abord pour les sommes finies de la forme $\sum_k c_k U^k f_\omega$ par

$$f=\sum_k c_k U^k f_\omega \to \sum_k c_k e^{ik\theta}\sqrt{p_\omega(\theta)}=f_\omega(\theta)$$

et s'étend ensuite par continuité à une application isométrique τ_ω de $\mathfrak{M}(f_\omega)$ *sur* $L^2(M_\omega)$; cf. [13].

Soit $\mathfrak{v}$ le nombre cardinal de l'ensemble Ω.

Si $\mathfrak{v}\leqq\dim\mathfrak{S}$, nous avons déjà la décomposition de U de type cherché. Reste à étudier le cas où $\mathfrak{v}>\dim\mathfrak{S}$.

De (6) il s'ensuit que $\dim\mathfrak{K}=\aleph_0\cdot\mathfrak{v}$, et de l'équation $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})=\mathfrak{K}$ il s'ensuit que $\aleph_0\cdot\dim\mathfrak{S}\geqq\dim\mathfrak{K}$. Par conséquent on a toujours

$$\aleph_0\cdot\dim\mathfrak{S}\geqq\aleph_0\cdot\mathfrak{v};$$

il en découle que l'inégalité $\mathfrak{d} > \dim \mathfrak{S}$ n'est possible que si

$$\dim \mathfrak{S} = N \text{ (nombre fini) et } N < \mathfrak{d} \leqq \aleph_0. \tag{8}$$

Nous démontrerons que dans le cas (8) on peut remplacer la décomposition (7) de U par une autre de même type, mais à N termes au plus.

A cette fin, nous montrons d'abord que si $\omega_1, \ldots, \omega_{N+1}$ sont $N+1$ éléments différents quelconques de Ω, l'ensemble

$$\Delta = M_{\omega_1} \cap \ldots \cap M_{\omega_{N+1}}$$

est de mesure 0.

Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ une base de $\mathfrak{S}$; puisque $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{K}$, il n'y a aucun élément $\psi \in \mathfrak{K}$, $\psi \neq 0$, qui soit orthogonal à tous les éléments $U^m \varphi_n$ ($n = 1, \ldots, N$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Passons de $\mathfrak{K}$ à l'espace

$$\mathfrak{L}^2 = \bigoplus_{\omega} L^2(M_\omega)$$

par l'application isométrique τ qui est engendrée par les applications isométriques τ_ω: $\mathfrak{M}(f_\omega) \to L^2(M_\omega)$. Pour

$$\tau\varphi_n = \bigoplus_{\omega} \varphi_{n,\omega}(\theta) \; (n = 1, \ldots, N), \qquad \tau\psi = \bigoplus_{\omega} \psi_\omega(\theta)$$

on a donc:

$$(*) \quad \begin{cases} \text{les équations } \sum\limits_{\omega} \int\limits_{M_\omega} e^{im\theta} \varphi_{n,\omega}(\theta) \overline{\psi_\omega(\theta)}\, d\theta = 0 \quad (n = 1, \ldots, N; \\ \hfill m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \\ \text{entraînent } \psi_\omega(\theta) = 0 \text{ p. p. dans } M_\omega, \text{ pour tout } \omega \in \Omega. \end{cases}$$

Or les N équations linéaires homogènes à $N+1$ inconnues

$$\sum_{k=1}^{N+1} \varphi_{n,\omega_k}(\theta) x_k = 0 \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

admettent, pour tout $\theta \in \Delta$, une solution

$$x_1 = x_1(\theta), \ldots, x_{N+1} = x_{N+1}(\theta)$$

telle que

$$\sum_{k=1}^{N+1} |x_k(\theta)|^2 = 1;$$

de plus il est facile à voir que cette solution peut être choisie en fonction mesurable de θ dans Δ. Si nous posons

$$\psi_{\omega_k}(\theta) = x_k(\theta) \text{ dans } \Delta, \quad \psi_{\omega_k}(\theta) = 0 \text{ dans } M_{\omega_k} - \Delta \qquad (k = 1, \ldots, N+1)$$

et

$$\psi_\omega(\theta) = 0 \text{ dans tout } M_\omega \text{ pour } \omega \notin \{\omega_1, \ldots, \omega_{N+1}\},$$

nous aboutissons à une contradiction à $(*)$ sauf si Δ est de mesure 0.

Donc toute intersection de type Δ est de mesure 0. On en conclut qu'il existe un système fini ou dénombrable d'ensembles mesurables $E_n \in (0, 2\pi)$, disjoints deux-à-deux, et tels que chaque M_ω est égal, à un ensemble de mesure 0 près, à la réunion de certains de ces ensembles E_n, le même ensemble E_n ne faisant partie que de N des ensembles M_ω au plus.

Soit F_r la réunion de ceux des E_n qui font partie d'au moins r des ensembles M_ω. En vertu de la relation évidente

$$\bigoplus_n U^\times(N_n) = U^\times(\bigcup_n N_n),$$

valable pour tout système dénombrable $\{N_n\}$ de sous-ensembles mesurables disjoints de $(0, 2\pi)$, on a donc:

$$\bigoplus_\omega U^\times(M_\omega) = \bigoplus_\omega \bigoplus_{E_n \subset M_\omega} U^\times(E_n) = \bigoplus_{r=1}^{N} \bigoplus_{E_n \subset F_r} U^\times(E_n) = \bigoplus_{r=1}^{N} U^\times(F_r).$$

Nous avons ainsi démontré que dans tous les cas on a

$$U \sim \bigoplus_\varkappa U^\times(M_\varkappa)$$

avec un nombre au plus égal à $\dim \mathfrak{S}$ de termes au second membre.

Cela achève la démonstration du lemme 4.

Lemme 5. a) *Supposons que pour la transformation unitaire U de $\mathfrak{R}$ il y ait deux sous-espaces ambulants, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, tels que*

(9) $$\dim \mathfrak{A} \geqq \dim \mathfrak{B}$$

et

(10) $$\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) + \mathfrak{M}(\mathfrak{B}) \text{ est dense dans } \mathfrak{R}.$$

On a alors

$$U = U' \oplus U''$$

où U' est une translation bilatérale de multiplicité égale à $\dim \mathfrak{A}$, *et U'' est unitairement équivalente à une somme orthogonale de type*

$$\bigoplus_\varkappa U^\times(M_\varkappa),$$

le nombre des termes étant au plus égal à $\dim \mathfrak{B}$. *Par conséquent U peut être prolongée à une translation bilatérale de multiplicité au plus égale à*

$$\dim \mathfrak{A} + \dim \mathfrak{B}.$$

b) *Dans la condition additionnelle:*

(11) $$\dim \mathfrak{A} \text{ est infinie,}$$

U est elle-même une translation bilatérale, de multiplicité égale à $\dim \mathfrak{A}$.

Démonstration. a) Mettons à part le cas évident $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$. Les sous-espaces

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}'' = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})^\perp$$

réduisent U; les parties correspondantes de U soient U' et U''. Si Q est l'opérateur de projection de $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{K}''$, posons

$$\mathfrak{B}'' = \overline{Q\mathfrak{B}}.$$

Q permute à U, donc on a

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{B}'') = \mathfrak{M}(\overline{Q\mathfrak{B}}) = \overline{Q\,\mathfrak{M}(\mathfrak{B})} = \overline{Q(\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) + \mathfrak{M}(\mathfrak{B}))} = \overline{Q\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}''.$$

En vertu du lemme 3, U a son spectre absolument continu, donc U'' l'a aussi. On peut alors appliquer le lemme 4: il résulte que

$$U'' = \bigoplus_{\varkappa} U''_{\varkappa} \quad \text{où} \quad U''_{\varkappa} \sim U^{\times}(M_{\varkappa}), \tag{12}$$

le nombre cardinal $\mathfrak{k}$ de l'ensemble K des indices $\varkappa$ étant au plus égal à $\dim \mathfrak{B}''$. Or, évidemment, $\dim \mathfrak{B}'' \leqq \dim \mathfrak{B}$.

$\bigoplus_{\varkappa} U^{\times}(M_{\varkappa})$ peut être prolongé de manière évidente à $\bigoplus_{\varkappa} U^{\times}(0, 2\pi)$, qui est une translation bilatérale de multiplicité $\mathfrak{k}$.

Pour démontrer b), observons d'abord que

$$\mathfrak{k} \leqq \dim \mathfrak{B} \leqq \dim \mathfrak{A}, \quad \text{donc} \quad \aleph_0 \cdot \mathfrak{k} \leqq \aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{A}.$$

Si $\dim \mathfrak{A}$ est infinie, on a $\aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{A} = \dim \mathfrak{A}$, donc $\aleph_0 \cdot \mathfrak{k} \leqq \dim \mathfrak{A}$. Par conséquent il existe un nombre cardinal $\mathfrak{r} \geqq 0$ tel que

$$\dim \mathfrak{A} = \aleph_0 \cdot \mathfrak{k} + \mathfrak{r}. \tag{13}$$

Choisissons dans $\mathfrak{A}$ un système orthonormal complet Σ. En vertu de (13) on peut arranger les éléments de Σ comme suit:

$$\Sigma = \{\varphi_{\varkappa, n} (\varkappa \in K;\ n = 1, 2, \ldots),\ \varphi_{\varrho}\ (\varrho \in R)\}$$

où l'ensemble R des indices ϱ a le nombre cardinal $\mathfrak{r}$.

Puisque $\mathfrak{A}$ est ambulant, on a

$$\mathfrak{K}' = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = [\bigoplus_{\varkappa, n} \mathfrak{M}(\varphi_{\varkappa, n})] \oplus [\bigoplus_{\varrho} \mathfrak{M}(\varphi_{\varrho})],$$

et dans la décomposition correspondante

$$U' = [\bigoplus_{\varkappa, n} U'_{\varkappa, n}] \oplus [\bigoplus_{\varrho} U'_{\varrho}] \tag{14}$$

chaque terme $U'_{\varkappa, n}$ et U'_{ϱ} est une translation bilatérale simple, donc

$$U'_{\varkappa, n} \sim U^{\times}(0, 2\pi), \quad U'_{\varrho} \sim U^{\times}(0, 2\pi).$$

En combinant (12) et (14) nous obtenons que

$$U = U' \oplus U'' = \bigoplus_{\varkappa} [U''_{\varkappa} \oplus U'_{\varkappa, 1} \oplus U'_{\varkappa, 2} \oplus \ldots] \oplus [\bigoplus_{\varrho} U'_{\varrho}]. \tag{15}$$

Soit

$$U'_{\varkappa, n} = V'_{\varkappa, n} \oplus W'_{\varkappa, n}$$

la décomposition de $U'_{\varkappa,n}$ qui correspond, par l'équivalence $U'_{\varkappa,n} \sim U^{\times}(0, 2\pi)$, à la décomposition évidente

$$U^{\times}(0, 2\pi) = U^{\times}(M_{\varkappa}) \oplus U^{\times}(CM_{\varkappa}) \quad \text{où} \quad CM_{\varkappa} = (0, 2\pi) - M_{\varkappa}.$$

On aura alors

$$U''_{\varkappa} \oplus U'_{\varkappa,1} \oplus U'_{\varkappa,2} \oplus \ldots = (U''_{\varkappa} \oplus W'_{\varkappa,1}) \oplus (V'_{\varkappa,1} \oplus W'_{\varkappa,2}) \oplus (V'_{\varkappa,2} \oplus W'_{\varkappa,3}) \oplus \ldots$$

où, dans le second membre, chaque terme entre paranthèses est unitairement équivalent à $U^{\times}(M_{\varkappa}) \oplus U^{\times}(CM_{\varkappa})$, donc à $U^{\times}(0, 2\pi)$.

De cette façon, il résulte de (15) que U est la somme orthogonale de translations bilatérales simples, en nombre total $\aleph_0 \cdot \mathfrak{k} + \mathfrak{r} = \dim \mathfrak{A}$. Donc U est une translation bilatérale de multiplicité égale à $\dim \mathfrak{A}$.

2. Contractions dont les dilatations unitaires sont des translations bilatérales

1. Dans tout ce qui suit T désignera une *contraction* de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ ($\dim \mathfrak{H} \geqq 1$) et U la *dilatation unitaire minimum* de T, U opérant dans un espace de Hilbert $\mathfrak{K}$ qui contient $\mathfrak{H}$ comme sous-espace[5]). U est donc une transformation unitaire dans $\mathfrak{K}$ telle que

$$(U^n h, h') = (T^n h, h'), \quad (U^{-n} h, h') = (T^{*n} h, h')$$

pour $h, h' \in \mathfrak{H}$ et $n = 0, 1, 2, \ldots$, et $\mathfrak{K}$ est sous-tendu par les éléments de la forme $U^n h$ ($h \in \mathfrak{H}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); en formule

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}(\mathfrak{H}).$$

Introduisons les notations

$$\mathfrak{d} = \dim \overline{(I - T^*T)\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{d}^* = \dim \overline{(I - TT^*)\mathfrak{H}}.$$

On a évidemment

$$0 \leqq \mathfrak{d}, \mathfrak{d}^* \leqq \dim \mathfrak{H};$$

$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^* = 0$ si T est unitaire et dans ce cas seulement.

Les variétés linéaires

$$\mathfrak{L}_0 = (U - T)\mathfrak{H}, \quad \mathfrak{L}_0^* = (U^* - T^*)\mathfrak{H} \quad (\subseteqq \mathfrak{K})$$

et leurs adhérences

$$\mathfrak{L} = \overline{(U - T)\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{L}^* = \overline{(U^* - T^*)\mathfrak{H}}$$

joueront un rôle essentiel dans ce qui suit.

Théorème 1. (i) $\mathfrak{L}$ *et* $\mathfrak{L}^*$ *sont des sous-espaces ambulants par rapport à* U *et on a*

$$\dim \mathfrak{L} = \mathfrak{d} \quad et \quad \dim \mathfrak{L}^* = \mathfrak{d}^*.$$

(ii) *L'espace* $\mathfrak{K}$ *se décompose en la somme orthogonale*

$$\mathfrak{K} = \ldots \oplus U^2\mathfrak{L} \oplus U\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L}^* \oplus U^*\mathfrak{L}^* \oplus U^{*2}\mathfrak{L}^* \oplus \ldots. \tag{16}$$

---

5) *Cf.* [8] ou [9].

Démonstration. (i) Pour démontrer que $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$ sont ambulants il suffit de montrer que

$$U^n\mathfrak{L}_0 \perp \mathfrak{L}_0, \quad U^{*n}\mathfrak{L}_0^* \perp \mathfrak{L}_0^* \quad \text{pour} \quad n=1, 2, \ldots;$$

par raison de symétrie il suffit même d'envisager seulement $\mathfrak{L}_0$. Or pour $h, h' \in \mathfrak{H}$ et $n=1, 2, \ldots$ on a

$$\bigl(U^n(U-T)h, (U-T)h'\bigr) = (U^nh, h') - (U^{n-1}Th, h') - (U^{n+1}h, Th') + (U^nTh, T'h) =$$
$$= (T^nh, h') - (T^{n-1}Th, h') - (T^{n+1}h, Th') + (T^nTh, Th') = 0.$$

Pour démontrer $\dim \mathfrak{L} = \mathfrak{d}$, observons d'abord que pour $h \in \mathfrak{H}$

$$\|(U-T)h\|^2 = (Uh, Uh) - (Uh, Th) - (Th, Uh) + (Th, Th) =$$
$$= (h, h) - (Th, Th) - (Th, Th) + (Th, Th) = \bigl((I-T^*T)h, h\bigr) = \|(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}h\|^2.$$

En vertu de cette relation $\mathfrak{L}_0$ peut être appliqué isométriquement sur $(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{H}$ et par conséquent $\mathfrak{L}$ sur $\overline{(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{H}}$. Or ce dernier sous-espace coïncide avec $\overline{(I-T^*T)\mathfrak{H}}$,[6]) donc on a bien $\dim \mathfrak{L} = \mathfrak{d}$.

L'égalité $\dim \mathfrak{L}^* = \mathfrak{d}^*$ se démontre de manière analogue.

(ii) Montrons que les termes du second membre de (16) sont orthogonaux. Comme nous savons déjà que $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$ sont ambulants, il faut encore montrer que

$$U^n\mathfrak{L} \perp U^{*m}\mathfrak{L}^*, \; U^n\mathfrak{L} \perp \mathfrak{H} \text{ et } U^{*m}\mathfrak{L}^* \perp \mathfrak{H} \text{ pour } m, n \geqq 0;$$

il suffit même d'envisager $\mathfrak{L}_0$ et $\mathfrak{L}_0^*$ au lieu de $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$. Or on a pour $h, h' \in \mathfrak{H}$:

$$\bigl(U^n(U-T)h, U^{*m}(U^*-T^*)h'\bigr) =$$
$$= (U^{n+m+2}h, h') - (U^{n+m+1}h, T^*h') - (U^{n+m+1}Th, h') + (U^{n+m}Th, T^*h') =$$
$$= (T^{n+m+2}h, h') - (T^{n+m+1}h, T^*h') - (T^{n+m+1}Th, h') + (T^{n+m}Th, T^*h') = 0,$$
$$\bigl(U^n(U-T)h, h'\bigr) = (U^{n+1}h, h') - (U^nTh, h') = (T^{n+1}h, h') - (T^nTh, h') = 0,$$
$$\bigl(U^{*m}(U^*-T^*)h, h'\bigr) = (U^{*m+1}h, h') - (U^{*m}T^*h, h') =$$
$$= (T^{*m+1}h, h') - (T^{*m}T^*h, h') = 0,$$

ce qui prouve notre assertion.

Désignons alors la somme orthogonale au second membre de (16) par $\mathfrak{K}_0$. On a

$$U\mathfrak{K}_0 = \ldots \oplus U^3\mathfrak{L} \oplus U^2\mathfrak{L} \oplus U\mathfrak{L} \oplus U\mathfrak{H} \oplus U\mathfrak{L}^* \oplus \mathfrak{L}^* \oplus U^*\mathfrak{L}^* \oplus \ldots = \mathfrak{K}_0$$

puisque, comme on le verra tout de suite,

(17) $$U\mathfrak{H} \oplus U\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{H}.$$

[6]) Posons $Z = (I-T^*T)^{\frac{1}{2}}$. On a $\overline{Z\mathfrak{H}} = \mathfrak{N}_Z^{\perp}$, $\overline{Z^2\mathfrak{H}} = \mathfrak{N}_{Z^2}^{\perp}$, $\mathfrak{N}_Z$ étant constitué des zéros de Z et $\mathfrak{N}_{Z^2}$ des zéros de Z^2. Or

$$Zh = 0 \Leftrightarrow Z^2h = 0$$

puisque $Z \geqq O$.

$\mathfrak{K}_0$ est donc un sous-espace de $\mathfrak{K}$, réduisant U et comprenant $\mathfrak{H}$, d'où il résulte, en vertu de la propriété de minimum de U, que

$$\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}.$$

Pour établir (17), il suffit d'envisager $\mathfrak{L}_0$ et $\mathfrak{L}_0^*$ au lieu de $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$ et de démontrer que

$$U\mathfrak{H} \oplus U(U^* - T^*)\mathfrak{H} = (U - T)\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}.$$

Or cela s'ensuit du fait que, pour un élément u de $\mathfrak{K}$, la possibilité d'une représentation sous la forme

$$u = Uh_1 + U(U^* - T^*)h_2 \qquad (h_1, h_2 \in \mathfrak{H})$$

est équivalente à la possibilité d'une représentation sous la forme

$$u = (U - T)h' + h'' \qquad (h', h'' \in \mathfrak{H}).$$

On aura notamment à poser

$$h' = h_1 - T^*h_2, \quad h'' = Th_1 + (I - TT^*)h_2$$

et réciproquement

$$h_1 = (I - T^*T)h' + T^*h'', \quad h_2 = h'' - Th'.$$

Cela achève la démonstration du théorème.

Remarque. Théorème 1, (i) est compris dans un théorème de HALPERIN [3]. La décomposition (16) peut servir aussi comme point de départ d'une construction de U, c'est ce qui a été fait par Sz.-NAGY [9] et HALPERIN [3].

Théorème 2. *Pour que l'on ait*

$$\text{(a)} \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{K} \quad \text{ou} \quad \text{(a*)} \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*) = \mathfrak{K},$$

il faut et il suffit que la condition

$$\text{(b)} \quad T^n \to O \ (n \to \infty) \quad \text{ou} \quad \text{(b*)} \quad T^{*n} \to O \ (n \to \infty)$$

soit vérifiée, selon les cas.

Donc la condition (b) *entraîne que U soit une translation bilatérale de multiplicité égale à $\mathfrak{d}$, et la condition* (b*) *entraîne que U soit une translation bilatérale de multiplicité égale à $\mathfrak{d}^*$.*

Démonstration. Pour $h \in \mathfrak{H}$ et $n = 1, 2, \ldots$ on a

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{L}) \ni \sum_{k=0}^{n-1} U^{-k-1}(U - T)T^k h = \sum_{k=0}^{n-1} (U^{-k}T^k - U^{-k-1}T^{k+1})h = h - U^{-n}T^n h,$$

et sous la condition (b)

$$h = \lim_{n \to \infty} (h - U^{-n}T^n h) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{L}).$$

Donc (b) entraîne

$$\mathfrak{H} \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{L}), \quad U^n\mathfrak{H} \subset U^n\mathfrak{M}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{L}) \qquad (n=0, \pm 1, \ldots)$$

et par conséquent

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}(\mathfrak{L}).$$

En vertu du théorème 1, U est alors une translation bilatérale engendrée par le sous-espace ambulant complet $\mathfrak{L}$.

L'implication (b*)$\Rightarrow$(a*) se démontre de manière analogue.

Démontrons les implications inverses. Supposons que

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}(\mathfrak{L}).$$

Il s'ensuit en particulier que tout $h \in \mathfrak{H}$ admet le développement orthogonal

$$h = \sum_{-\infty}^{\infty} U^k g_k$$

où

$$g_k \in \mathfrak{L}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \|g_k\|^2 = \|h\|^2.$$

On en déduit que

$$T^n h = PU^n h = P \sum_{k=-\infty}^{\infty} U^{n+k} g_k$$

où P désigne la projection orthogonale sur $\mathfrak{H}$. Or en vertu de (16) $\mathfrak{H}$ est orthogonal à $U^m\mathfrak{L}$ pour $m \geqq 0$, donc on a

$$T^n h = P \sum_{k=-\infty}^{-n-1} U^{n+k} g_k,$$

$$\|T^n h\|^2 \leqq \left\| \sum_{k=-\infty}^{-n-1} U^{n+k} g_k \right\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{-n-1} \|g_k\|^2$$

et par conséquent

$$T^n h \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

L'implication (a*)$\Rightarrow$(b*) se démontre de manière analogue.

Remarque. Le fait que les conditions (b) et (b*) entraînent que U soit une translation bilatérale, de multiplicité égale à $\mathfrak{d}$ ou à $\mathfrak{d}^*$, selon les cas, a été démontré déjà par DE BRUIJN [1] par une construction matricielle. Ce résultat comprend un théorème antérieur de SCHREIBER [7] concernant le cas

$$\|T\| < 1,$$

étudié aussi dans la Note II [11]. D'autre part, le résultat de DE BRUIJN vient d'être généralisé par Halperin [3] par une certaine combinaison des conditions (b) et (b*). [7])

Corollaire. *Si* $\mathfrak{d} = \dim \overline{(I-T^*T)\mathfrak{H}}$ *est un nombre fini et la dilatation unitaire minimum* U *de* T *est une translation bilatérale de multiplicité égale à* $\mathfrak{d}$, *on a nécessairement*

$$T^n \to O \qquad (n\to\infty).$$

De même, si $\mathfrak{d}^*$ *est un nombre fini et* U *est une translation bilatérale de multiplicité égale à* $\mathfrak{d}^*$, *on a*

$$T^{*n} \to O \qquad (n\to\infty).$$

Démonstration. Il suffit de démontrer la première assertion. Soit

$$U = U' \oplus U''$$

la décomposition de U suivant ses parties U' dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ et U'' dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^\perp$. En vertu du théorème 1, U' est une translation bilatérale, de multiplicité égale à $\mathfrak{d}$. D'après le lemme 2, U'' doit alors être aussi une translation bilatérale. La multiplicité de U est la somme des multiplicités de U' et U''. Or U et U' ont la même multiplicité finie $\mathfrak{d}$. Il s'ensuit que la multiplicité de U'' doit être égale à 0, c'est-à-dire que

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^\perp = \{0\}, \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{K},$$

et on applique alors le théorème 2.

Théorème 3. *Soit* T *une contraction complètement non-unitaire*[8]) *de l'espace* $\mathfrak{H}$, *et soit* U *sa dilatation unitaire minimum dans* $\mathfrak{K}$. *Soient*

$$\mathfrak{d} = \dim \overline{(I-T^*T)\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{d} = \dim \overline{(I-TT^*)\mathfrak{H}},$$

et

$$\mathfrak{d}_{\max} = \max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{d}^*\}, \quad \mathfrak{d}_{\min} = \min\{\mathfrak{d}, \mathfrak{d}^*\}.$$

---

[7]) Halperin suppose qu'il existe deux projections dans $\mathfrak{H}$, Q_1 et Q_2, telles que

$$Q_2Q_1 = O, \quad Q_2TQ_1 = O, \quad (I-Q_2)T(I-Q_1) = O,$$
$$(TQ_1)^n \to O \quad \text{et} \quad (T^*Q_2)^n \to O \quad (n\to\infty),$$

et démontre que U est alors une translation bilatérale ayant comme générateur le sous-espace ambulant

$$\overline{(U-T)Q_1\mathfrak{H}} \oplus (I-Q_1-Q_2)\mathfrak{H} \oplus \overline{(U^*-T^*)Q_2\mathfrak{H}} \quad (\subset\mathfrak{K}).$$

[8]) La contraction T de $\mathfrak{H}$ est dite complètement non-unitaire si elle ne comprend pas de partie unitaire, c'est-à-dire s'il n'y a aucun sous-espace $\neq\{0\}$ qui réduisse T à une transformation unitaire, ou ce qui revient au même, s'il n'y a aucun élément $h\neq 0$ pour lequel

$$\|T^n h\| = \|h\| = \|T^{*n}h\| \text{ pour tout } n > 0.$$

Toute contraction peut être décomposée univoquement en une somme orthogonale d'une transformation unitaire et d'une contraction complètement non-unitaire (une de ces composantes peut être absente, ce qui veut dire que le sous-espace correspondant peut se réduire à $\{0\}$). *Voir* [4] et [13].

a) *Si* $\mathfrak{d}_{\max}$ *est infini, U est une translation bilatérale, de multiplicité égale à* $\mathfrak{d}_{\max}$. *Le même est vrai si* $\dim \mathfrak{H}$ *est finie. Dans le cas où* $\dim \mathfrak{H} > \aleph_0$, $\mathfrak{d}_{\max}$ *est toujours infini, notamment on a* $\mathfrak{d}_{\max} = \dim \mathfrak{H} > \aleph_0$.

b) *Si* $\mathfrak{d}_{\max}$ *est fini et* $\dim \mathfrak{H}$ *infinie, on a*

$$U = U_1 \oplus U_2$$

où U_1 *est une translation bilatérale de multiplicité égale à* $\mathfrak{d}_{\max}$ *et* U_2 *est unitairement équivalente à une somme orthogonale d'opérateurs de multiplication par* $e^{i\theta}$ *dans des espaces* $L^2(M_\varkappa)$, *soit*

$$U_2 \sim \oplus U^\times(M_\varkappa),$$

où le nombre des termes est au plus égal à $\mathfrak{d}_{\min}$.

Par conséquent U a toujours son spectre absolument continu et peut être prolongée à une translation bilatérale $\tilde{U}$, *de multiplicité au plus égale à*

$$\mathfrak{d}_{\max} + \mathfrak{d}_{\min} = \mathfrak{d} + \mathfrak{d}^*;$$

$\tilde{U}$ *est une dilatation unitaire, non nécessairement minimum, de T.*[9])

Démonstration. Commençons par démontrer que si T est complètement non-unitaire, la somme vectorielle

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{L}) + \mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*)$$

est dense dans $\mathfrak{K}$.

Soit $f \in \mathfrak{K}$, orthogonal à $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ et à $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*)$, et montrons qu'alors $f = 0$. Comme f est orthogonal en particulier à $U^n\mathfrak{L}$ et $U^{*n}\mathfrak{L}^*$ pour $n = 0, 1, \ldots$, il résulte de (16) que f appartient nécessairement à $\mathfrak{H}$. Du fait que f est orthogonal à $U^{*n}\mathfrak{L}$ $(n \geqq 1)$ il s'ensuit que pour tout $h \in \mathfrak{H}$

$$0 = (f, U^{*n}(U-T)h) = (U^{n-1}f, h) - (U^n g, Th) = (T^{n-1}f, h) - (T^n f, Th);$$

en posant $h = T^{n-1}f$ il en résulte

$$\|T^{n-1}f\|^2 - \|T^n f\|^2 = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

donc

$$\|f\| = \|Tf\| = \|T^2 f\| = \ldots.$$

Du fait que f est orthogonal à $U^n\mathfrak{L}^*$ $(n \geqq 1)$ il résulte de manière analogue que

$$\|f\| = \|T^*f\| = \|T^{*2}f\| = \ldots.$$

Puisque T est complètement non-unitaire, ces équations entraînent

$$f = 0.$$

Cela prouve que $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}) + \mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*)$ est dense dans $\mathfrak{K}$.

Théorème 3 est alors une conséquence immédiate du lemme 5, sauf dans le cas où $\dim \mathfrak{H}$ est finie.

---

9) Le fait que U a son spectre absolument continu et admet comme prolongement une translation bilatérale, a été démontré déjà dans la Note IV [13], à l'aide de certains théorèmes assez profonds de la théorie des fonctions analytiques.

Si dim $\mathfrak{H}$ est finie, la contraction complètement non-unitaire T a son spectre situé entièrement dans l'intérieur du cercle unité, d'où il s'ensuit que $T^n \to O$ et $T^{*n} \to O$ pour $n \to \infty$. En vertu du théorème 2, U est alors une translation bilatérale de multiplicité égale à la fois à $\mathfrak{d}$ et à $\mathfrak{d}^*$ (donc $\mathfrak{d}_{\max} = \mathfrak{d} = \mathfrak{d}^*$).

Observons finalement que si $\dim \mathfrak{H} > \aleph_0$, $\mathfrak{d}_{\max}$ est nécessairement infini, parce que

$$\dim \mathfrak{H} \leqq \dim \mathfrak{K} \leqq \dim \mathfrak{M}(\mathfrak{L}) + \dim \mathfrak{M}(\mathfrak{L}^*) = \aleph_0 \cdot \mathfrak{d} + \aleph_0 \cdot \mathfrak{d}^* = \aleph_0 \cdot \mathfrak{d}_{\max}$$

entraîne dans ce cas

$$\dim \mathfrak{H} = \mathfrak{d}_{\max}.$$

Cela achève la démonstration du théorème 3.

Corollaire 1. *Si* $\|Th\| < \|h\|$ *pour tout* $h \neq 0$, *U est une translation bilatérale de multiplicité égale à* $\dim \mathfrak{H}$.

Démonstration. T est alors évidemment complètement non-unitaire et $(I - T^*T)h \neq 0$ pour $h \neq 0$, par conséquent $\overline{(I - T^*T)\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{d} = \dim \mathfrak{H}$. On a donc à appliquer le théorème 3, a).

Ce corollaire affirme une conjecture de DE BRUIJN, formulée à la fin de sa Note [1].

Corollaire 2. *Soit T une contraction complètement non-unitaire de* $\mathfrak{H}$, *et soit*

$$n = \mathfrak{d} + \mathfrak{d}^* < \infty.$$

Il n'y a alors pas de décomposition de $\mathfrak{H}$ *en somme orthogonale de plus de n sous-espaces* $\mathfrak{H}_i \neq \{0\}$ *dont chacun réduisse T.*

Démonstration. Soit

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_m$$

une décomposition de $\mathfrak{H}$ en somme orthogonale de sous-espaces $\mathfrak{H}_i \neq \{0\}$ dont chacun réduit T. Soit

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \oplus \mathfrak{K}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{K}_m$$

la décomposition correspondante de l'espace de la dilatation unitaire minimum U de T,

$$\mathfrak{K}_i = \mathfrak{M}(\mathfrak{H}_i).$$

La partie de U dans $\mathfrak{K}_i$, soit U_i, est alors la dilatation unitaire minimum de la partie T_i de T dans $\mathfrak{H}$. Comme T_i n'est pas unitaire, il y a dans $\mathfrak{K}_i$ un sous-espace $\mathfrak{A}_i \neq \{0\}$, ambulant par rapport à U_i (notamment on peut choisir pour $\mathfrak{A}_i$ un des sous-espaces $\mathfrak{L}_i$, $\mathfrak{L}_i^*$, correspondant à T_i en vertu du théorème 1).

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_m$$

est alors un sous-espace de $\mathfrak{K}$, ambulant par rapport à U et on a

$$\dim \mathfrak{A} \geqq m.$$

$\mathfrak{A}$ est alors ambulant aussi par rapport à la translation bilatérale $\tilde{U}$, de multiplicité $\leqq n$, qui prolonge U (*voir* le théorème 3). D'après le lemme 1 on a donc dim $\mathfrak{A} \leqq n$. Par conséquent $m \leqq n$.

Remarque. Dans le cas de la transformation

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

de l'espace l^2 on a $n=1$. En vertu du corollaire il n'y a donc pas de sous-espace réduisant T autre que ceux banaux $\{0\}$ et l^2. Ce résultat a été obtenu déjà par WERMER [14].

2. Le théorème suivant s'approche d'un autre côté du problème de la structure de la dilatation unitaire minimum U de la contraction T.

Théorème 4. *Supposons que le spectre σ_T de T ne recouvre pas le cercle unité C_0. Dans ce cas on a*

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^*$$

et $\mathfrak{K}$ peut être décomposé en somme orthogonale de deux sous-espaces réduisant U, soit

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \oplus \mathfrak{K}_2,$$

de sorte que la partie de U dans $\mathfrak{K}_1$ soit une translation bilatérale de multiplicité $\mathfrak{d}$ et la partie de U dans $\mathfrak{K}_2$ ait son spectre entièrement contenu dans

$$\sigma_T \cap C_0;$$

telle est la décomposition fournie par

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{M}(\mathfrak{L}) \quad et \quad \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{M}(\mathfrak{L})^{\perp}.$$

Démonstration. Soit z un point dans l'ensemble ouvert

$$\varrho = C_0 - \sigma_T$$

et posons

$$R = (zI - T)^{-1}.$$

Il résulte des relations évidentes

$$R(zI+T) + (zI+T)^* R^* = R[(zI+T)(zI-T)^* + (zI-T)(zI+T)^*] R^* = \\ = 2R(I-TT^*)R^*,$$

$$(zI+T)R + R^*(zI+T)^* = R^*[(zI-T)^*(zI+T) + (zI+T)^*(zI-T)]R = \\ = 2R^*(I-T^*T)R,$$

où les premiers membres sont égaux, qu'on a

$$R(I-TT^*)R^* = R^*(I-T^*T)R$$

et par conséquent

$$R(I-TT^*)\mathfrak{H} = R^*(I-T^*T)\mathfrak{H}.$$

On peut donc appliquer $\overline{(I-TT^*)\mathfrak{H}}$ sur $\overline{(I-T^*T)\mathfrak{H}}$ par la transformation linéaire biunivoque et bicontinue $R^{*-1}R = (zI-T)^*(zI-T)^{-1}$, et par conséquent $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^*$.

Soit $E(\cdot)$ la mesure spectrale de U, étalée sur C_0. Soit, comme plus haut, $\mathfrak{L}_0=(U-T)\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{L}=\overline{\mathfrak{L}_0}$, et remarquons que

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{L})=\bigvee_{-\infty}^{\infty} U^n\mathfrak{L}_0=\bigvee E(\delta)\mathfrak{L}_0$$

où δ parcourt l'ensemble des arcs de C_0.

Soit Δ un arc de C_0, situé avec ses extrémités dans l'intérieur de ϱ. Puisque $\|(zI-T)^{-1}\|$ est une fonction continue de z dans l'ensemble résolvant de T, on a pour $z\in\Delta$

$$\|(zI-T)^{-1}\|\leqq M_\Delta \quad (=\text{constante indépendante de } z).$$

Envisageons une décomposition $\mathfrak{D}$ de Δ en un nombre fini d'arcs (fermés, demi-ouverts ou ouverts) $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, deux-à-deux sans points communs, et dans chaque δ_k prenons un point z_k. Soit h un élément de $\mathfrak{H}$ et posons

$$h_{\mathfrak{D}} = \sum_{k=1}^{n} E(\delta_k)(U-T)(z_kI-T)^{-1}h;$$

$h_{\mathfrak{D}}$ appartient à

$$E(\Delta)\mathfrak{M}(\mathfrak{L})=E(\Delta)\bigvee_{\delta} E(\delta)\mathfrak{L}_0=\bigvee_{\delta\subset\Delta} E(\delta)\mathfrak{L}_0.$$

Or,

$$h_{\mathfrak{D}} = \sum_{k=1}^{n} E(\delta_k)(z_kI-T+U-z_kI)(z_kI-T)^{-1}h =$$

$$=\sum_{k=1}^{n} E(\delta_k)h+\sum_{k=1}^{n} E(\delta_k)(U-z_kI)(z_kI-T)^{-1}h = E(\Delta)h+g_{\mathfrak{D}}.$$

Comme les projections $E(\delta_k)$ sont orthogonales deux-à-deux, on a

$$\|g_{\mathfrak{D}}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|E(\delta_k)(U-z_kI)(z_kI-T)^{-1}h\|^2,$$

et comme

$$\|E(\delta_k)(U-z_kI)\| = \Big\|\int_{\delta_k}(z-z_k)dE_\theta\Big\| \leqq \max_{z\in\delta_k}|z-z_k| \leqq |\delta_k|, \text{[10]}$$

il résulte que

$$\|g_{\mathfrak{D}}\|^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} |\delta_k|^2 M_\Delta^2\|h\|^2 \leqq M_\Delta^2\|h\|^2|\Delta| \max_i |\delta_i|.$$

Faisons varier la décomposition $\mathfrak{D}$ de sorte que la longueur maximum des intervalles de décomposition tende vers 0. On aura alors $g_{\mathfrak{D}}\to 0$, $h_{\mathfrak{D}}\to E(\Delta)h$, et par conséquent $E(\Delta)h$ appartient aussi à $E(\Delta)\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$. Puisque h était un élément quelconque de $\mathfrak{H}$, cela prouve que

$$E(\Delta)\mathfrak{H}\subset E(\Delta)\mathfrak{M}(\mathfrak{L}).$$

[10]) $|\delta|$ désignera la longueur d'arc de δ.

L'ensemble ouvert ϱ est somme dénombrable de tels arcs Δ, donc on a aussi

$$E(\varrho)\mathfrak{H}\subset E(\varrho)\mathfrak{M}(\mathfrak{L}).$$

Comme U^n permute à $E(\varrho)$ et comme $U^n\mathfrak{M}(\mathfrak{L})=\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$, il en découle aussi

$$E(\varrho)U^n\mathfrak{H}\subset E(\varrho)\mathfrak{M}(\mathfrak{L}) \quad \text{pour} \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Vu que les sous-espaces $U^n\mathfrak{H}$ sous-tendent $\mathfrak{K}$ et que, d'autre part, $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ est contenu dans $\mathfrak{K}$, il en résulte que

$$E(\varrho)\mathfrak{K}=E(\varrho)\mathfrak{M}(\mathfrak{L}). \tag{18}$$

Soit Q la projection dans $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$; Q permute à U donc aussi à $E(\varrho)$ et par conséquent $E(\varrho)Q$ est aussi une projection. Par (18) on a

$$E(\varrho)Q=E(\varrho), \quad E(\varrho)(I-Q)=O. \tag{19}$$

La décomposition de $\mathfrak{K}$ par $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ et $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^{\perp}$ est de type énoncé dans le théorème. En effet, la partie de U dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ est une translation bilatérale, ayant $\mathfrak{L}$ pour sous-espace ambulant générateur. D'autre part, la mesure spectrale $E'(\cdot)$ de la partie de U dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^{\perp}$ est égale à la partie de $E(\cdot)$ dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^{\perp}$, donc, par (19), $E'(\varrho)=O$. Cela achève la démonstration.

Corollaire 1. *Si pour une contraction complètement non-unitaire T l'ensemble $\sigma_T\cap C_0$ est de mesure (linéaire) 0, on a*

$$\mathfrak{K}=\mathfrak{M}(\mathfrak{L}).$$

Donc U est alors une translation bilatérale, de multiplicité égale à $\mathfrak{d}$ $(=\mathfrak{d}^*)$.

Démonstration. En effet, la mesure spectrale $E'(\cdot)$ est alors supportée par un ensemble de mesure 0; comme d'autre part cette mesure spectrale est absolument continue, on a $E'(\sigma)=O$ pour tout σ borélien de mesure 0, donc $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^{\perp}=\{0\}$.

Corollaire 2. *Soit T une contraction quelconque telle que $\mathfrak{d}$ est un nombre fini et σ_T ne recouvre pas C_0. Si la dilatation unitaire minimum U de T est une translation bilatérale, on a nécessairement*

$$T^n\to O \quad et \quad T^{*n}\to O \ (n\to\infty).$$

Démonstration. La partie U' de U dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ étant une translation bilatérale de multiplicité finie $\mathfrak{d}$, il s'ensuit du lemme 2 que la partie U'' de U dans $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^{\perp}$ est aussi une translation bilatérale. Or, par le théorème 4, U'' a son spectre contenu dans $\sigma_T\cap C_0$, donc ce spectre ne recouvre pas C_0. Puisque le spectre d'une translation bilatérale d'un espace $\neq\{0\}$ recouvre C_0, on a nécessairement $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})^{\perp}=\{0\}$, $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})=\mathfrak{K}$. On en conclut par le théorème 2 que $T^n\to O$.

En partant de $\mathfrak{L}^*$ au lieu de $\mathfrak{L}$ $(\mathfrak{d}=\mathfrak{d}^*)$, on obtient de la même façon que $T^{*n}\to O$.

3. Un exemple. Nous montrons par un exemple qu'il *existe une contraction complètement non-unitaire dont la dilatation unitaire minimum n'est pas une translation bilatérale.*

Soit $\mathfrak{H} = L^2(0, 1)$ et pour $f \in \mathfrak{H}$ posons

$$A_0 f(x) = x f(x), \quad A f(x) = x f(x) + i \int_0^x f(t)\, dt.$$

On a alors

$$A^* f(x) = x f(x) - i \int_x^1 f(t)\, dt$$

et par conséquent

$$A = B + \frac{i}{2} P$$

où $B = \operatorname{Re} A$ et P est une projection de rang 1, notamment

$$Pf = (f, 1)1.$$

B étant une transformation autoadjointe, on a $\|(B + iI)^{-1}\| \leqq 1$,

$$\left\| (B + iI)^{-1} \frac{i}{2} P \right\| \leqq \frac{1}{2}$$

et par conséquent la transformation

$$A + iI = B + iI + \frac{i}{2} P = (B + iI)\left(I + (B + iI)^{-1} \frac{i}{2} P \right)$$

admet aussi une inverse bornée. Posons

$$T = (A - iI)(A + iI)^{-1}.$$

On obtient par un calcul simple

$$I - T^*T = 2D^*PD, \quad I - TT^* = 2DPD^*$$

où

$$D = (A + iI)^{-1}.$$

De ces relations on conclut que $I - T^*T \geqq O$, c'est-à-dire que T est une contraction, et que

$$\mathfrak{d} = \dim \overline{(I - T^*T)\mathfrak{H}} = \dim \overline{D^*P\mathfrak{H}} = 1,$$

$$\mathfrak{d}^* = \dim \overline{(I - TT^*)\mathfrak{H}} = \dim \overline{DP\mathfrak{H}} = 1.$$

D'après un théorème de SAKHNOVITCH [6] il existe une application linéaire biunivoque et bicontinue L de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}$ telle que

$$A = L A_0 L^{-1}$$

et par conséquent

$$T = L V_0 L^{-1}$$

où

$$V_0 = (A_0 - iI)(A_0 + iI)^{-1}$$

est une transformation unitaire. Le spectre de A_0 est le segment [0, 1] et le spectre de V_0 est l'image de ce segment par l'application

$$x \to \frac{x-i}{x+i}$$

de l'axe réelle sur C_0. Donc

$$\sigma_{V_0} \doteq \left\{e^{i\theta}\colon \pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi\right\}.$$

Puisque $\sigma_T = \sigma_{V_0}$, on voit que σ_T ne recouvre pas C_0.

Puisque T n'est pas unitaire, comprend une partie complètement non-unitaire $T^{(0)}$ non dégénérée, c'est-à-dire opérant dans un sous-espace $\mathfrak{H}^{(0)} \neq \{0\}$. Les quantités $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}^*$ pour $T^{(0)}$ sont les mêmes que pour T, donc égales à 1, et comme $\sigma_{T^{(0)}} \subset \sigma_T$, $\sigma_{T^{(0)}}$ ne recouvre pas C_0. Soit $U^{(0)}$ la dilatation unitaire minimum de $T^{(0)}$. Si $U^{(0)}$ était une translation bilatérale, on aurait, d'après le corollaire 2 ci-dessus, $T^{(0)n} \to O$ pour $n \to \infty$, c'est-à-dire que

$$\|T^n f\| \to 0 \quad \text{pour} \quad f \in \mathfrak{H}^{(0)}, \quad n \to \infty.$$

Or cela entraîne

$$\|f\| = \|LV_0^{-n}L^{-1}LV_0^nL^{-1}f\| = \|LV_0^{-n}L^{-1}T^nf\| \leqq \|L\|\,\|L^{-1}\|\,\|T^nf\| \to 0,$$

donc $f=0$, ce qui est impossible puisque $\mathfrak{H}^{(0)}$ comprend aussi des éléments $f \neq 0$.

Cela prouve que $U^{(0)}$ n'est pas une translation bilatérale.

3. Un théorème sur la mesure spectrale des dilatations unitaires

On a démontré dans [11] (Corollaire 2. 2) que si T n'est pas unitaire, le spectre de U recouvre le cercle unité C_0. Ce fait découle aussi des théorèmes du paragraphe précédent. En effet, si T n'est pas unitaire, on a $\mathfrak{d}_{\max} = \max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{d}^*\} \geqq 1$ et par conséquent il existe un sous-espace $\neq \{0\}$ qui réduit U à une translation bilatérale (*cf.* Théorème 1); or le spectre d'une translation bilatérale recouvre C_0.[11]) On a même plus, notamment que pour un ensemble borélien $\sigma \subset C_0$

$$m(\sigma) \neq 0 \quad \text{entraîne} \quad E(\sigma) \neq O,$$

m et E désignant la mesure de Lebesgue et la mesure spectrale attachée à U étalées sur C_0.

Nous allons préciser ce résultat comme suit:

Théorème 5. *Soit T une contraction complètement non-unitaire de l'espace $\mathfrak{H}$, et soit U sa dilatation unitaire minimum. Pour tout ensemble borélien $\sigma \subset C_0$ de mesure $m(\sigma) \neq 0$, on a $E(\sigma)h \neq 0$ pour tout $h \in \mathfrak{H}$, $h \neq 0$.*

Démonstration. Supposons que nous ayons un $\sigma \subset C_0$ et un $h \in \mathfrak{H}$ tels que

$$m(\sigma) > 0, \quad E(\sigma)h = 0, \tag{20}$$

et montrons que cela entraîne $h = 0$.

---

[11]) *Cf.* aussi Halperin [3].

Pour tout $f \in \mathfrak{K}$ la fonction $(E_\theta h, f)$ de θ est absolument continue dans $[0, 2\pi]$ (puisque E_θ l'est, *cf.* Théorème 3). De (20) il s'ensuit que la fonction

$$p(\theta) = d(E_\theta h, f)/d\theta \qquad (\in L(0, 2\pi))$$

s'annule dans un ensemble de mesure positive[12]). Ses coefficients de Fourier sont

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} p(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\,d(E_\theta h, f) = \frac{1}{2\pi}(U^{-k}h, f) = \frac{1}{2\pi}(h, U^k f)$$
$$(k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Soit en particulier f de la forme $f = (U-T)g$, $g \in \mathfrak{H}$. Dans ce cas $c_k = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots$ parce que

$$\big(h, U^k(U-T)g\big) = (h, U^{k+1}g) - (h, U^kTg) = (h, T^{k+1}g) - (h, T^kTg) = 0.$$

Or on sait que si la fonction $\varphi(\theta) \in L(0, 2\pi)$ s'annule dans un ensemble de mesure positive et ses coefficients de Fourier c_k sont égaux à 0 pour $k \geqq 0$, ils sont égaux à 0 aussi pour $k < 0$. [13])

Donc on a aussi

$$0 = \big(h, U^{-k}(U-T)g\big) = (h, U^{-k+1}g) - (h, U^{-k}Tg) = (h, T^{*k-1}g) - (h, T^{*k}Tg)$$

pour $k \geqq 1$. En posant en particulier $g = T^{k-1}h$ il en résulte

$$(h, T^{*k-1}T^{k-1}h) - (h, T^{*k}T^k h) = 0, \quad \|T^{k-1}h\| = \|T^k h\| \qquad (k \geqq 1),$$

---

[12]) Si s est l'ensemble des points du segment $(0, 2\pi)$ qui correspond à l'ensemble σ par l'application $e^{i\theta} \to \theta$, on a

$$\int_s |p(\theta)|\,d\theta = \operatorname*{var}_s (E_\theta h, f) \leqq \|E(\sigma)h\|\,\|E(\sigma)f\| = 0,$$

conséquence de ce que, pour des arcs disjoints quelconques $\delta_1, \ldots, \delta_n$ de C_0,

$$\sum_i |(E(\delta_i)h, f)| = \sum_i |(E(\delta_i)h, E(\delta_i)f)| \leqq \sum_i \|E(\delta_i)h\|\,\|E(\delta_i)f\| \leqq$$
$$\leqq [\sum_i \|E(\delta_i)h\|^2]^{\frac{1}{2}} [\sum_i \|E(\delta_i)f\|^2]^{\frac{1}{2}} = \|E(\bigcup_i \delta_i)h\|\,\|E(\bigcup_i \delta_i)f\|.$$

[13]) En effet, on a alors

$$\overline{\varphi(\theta)} \sim \sum_1^\infty \overline{c_{-k}}\, e^{ik\theta};$$

la fonction

$$\Phi(z) = \sum_1^\infty \overline{c_{-k}}\, z^k$$

appartient à la classe de Hardy H^1, et sa valeur limite

$$\lim_{r \to 1} \Phi(re^{i\theta}),$$

étant égale p. p. à $\overline{\varphi(\theta)}$, s'annule dans un ensemble de mesure positive. Cela entraîne que $\Phi(z) \equiv 0$, donc $\varphi(\theta) = 0$ p. p. (*cf.* [5]).

donc

$$\|h\|=\|Th\|=\|T^2h\|=\dots.$$

En échangeant les rôles de T et T^*, U et U^*, dans le raisonnement ci-dessus, on obtient de manière analogue

$$\|h\|=\|T^*h\|=\|T^{*2}h\|=\dots.$$

T étant complètement non-unitaire il s'ensuit que $h=0$.
Cela achève la démonstration du théorème 5.

Ouvrages cités

[1] N. G. DE BRUIJN, On unitary equivalence of unitary dilations of contractions in Hilbert space, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 100—105; annoncé au *Deuxième congrès mathématique hongrois*, Budapest, 24—31. août 1960.
[2] P. R. HALMOS, Shifts on Hilbert spaces, *J. reine angew. Math.*, **208** (1961), 102—112.
[3] I. HALPERIN, The unitary dilation of a contraction operator, *Duke Math. J.*, **28** (1961), 563—572.
[4] H. LANGER, Ein Zerspaltungssatz für Operatoren im Hilbertraum, *Acta Math. Hung.*, **12** (1961), 441—445.
[5] F. et M. RIESZ, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Quatrième congrès des mathématiciens scandinaves*, **1956**, 27—44.
[6] Л. А. Сахнович, О приведении вольтерровских операторов к простейшему виду и обратных задачах, Изв. Акад. Наук СССР, сер. матем., **21** (1957), 235—262.
[7] M. SCHREIBER, Unitary dilations of operators, *Duke Math. J.*, **23** (1956), 579—594.
[8] B. SZ.-NAGY, *Prolongements des transformations linéaires de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace.* Appendice au livre „Leçons d'analyse fonctionnelle" par F. Riesz et B. Sz.-Nagy (Budapest, 1955).
[9] ——— On Schäffer's construction of unitary dilations, *Annales Univ. Budapest*, sect. math., **3—4** (1960/61), 343—346; annoncé dans une conférence au *Deuxième congrès mathématique hongrois*, Budapest, 24—31. août 1960.
[10] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 87—92.
[11] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II, *ibidem*, **18** (1957), 1—15.
[12] ——— et C. FOIAŞ, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *ibidem*, **19** (1958), 26—45.
[13] ——————— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *ibidem*, **21** (1960), 251—259.
[14] J. WERMER, On restrictions of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 860—865.

(Reçu le 15 novembre 1961)

Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI
Calcul fonctionnel

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Le but de cette Note est de développer un calcul fonctionnel pour les contractions de l'espace de Hilbert, admettant aussi des fonctions non bornées; ainsi on continue le sujet de la Note III [17] où l'on a envisagé seulement des fonctions bornées. Moyennant la relation

$$A=(I+T)(I-T)^{-I}$$

qui relie une classe importante de transformations A à la classe des contractions T n'ayant pas la valeur propre 1, on obtient simultanément un calcul fonctionnel pour ces transformations A; on étudie en particulier les puissances d'ordre fractionnaire A^{α}.

1. Les classes A, H et H_T

Commençons par le calcul fonctionnel pour les fonctions bornées, dans une forme légèrement élargie.

1. Soit A la classe des fonctions

$$u(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|<\infty, \tag{1.1}$$

qui sont holomorphes dans le disque unité ouvert

$$D=\{z: |z|<1\}$$

et continues dans le disque unité fermé

$$\bar{D}=\{z: |z|\leqq 1\}.$$

A est une algèbre par rapport à l'addition et la multiplication usuelles des fonctions, et invariante par rapport à l'opération involutive $u\to u^*$ définie par

$$u^*(z)=\overline{u(\bar{z})}.$$

Soit T une contraction de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et faisons correspondre à la fonction (1.1) la transformation

$$u(T)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k T^k \tag{1.2}$$

de $\mathfrak{H}$, cette série convergeant en norme. Pour T fixée on obtient de cette façon une application

$$u(z) \to u(T)$$

de l'algèbre A dans l'algèbre $B(\mathfrak{H})$ des transformations linéaires bornées de l'espace $\mathfrak{H}$; cette application est un homomorphisme d'algèbre, de plus on a

$$u(T)^* = u^*(T^*). \tag{1. 3}$$

Dans le cas particulier où T est normale, cette définition de $u(T)$ est compatible avec celle par la décomposition spectrale de T, conséquence de ce que la série (1. 1) converge uniformément dans $\overline{D}$.

Soit U_T la dilatation unitaire minimum de T. Les relations

$$T^n = \text{pr } U_T^n \qquad (n=0, 1, \ldots)$$

entraînent

$$u(T) = \text{pr } u(U_T) \tag{1. 4}$$

pour toute fonction $u \in \mathsf{A}$.

2. Soit H la classe de toutes les fonctions $u(z)$, holomorphes et bornées dans D. D'après le théorème de FATOU [4] la fonction $u \in \mathfrak{H}$ admet la valeur limite

$$u(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} u(re^{i\theta})$$

en tous les points $z = e^{i\theta}$ du cercle unité

$$C = \{z: |z| = 1\}$$

sauf les points d'un ensemble (éventuellement vide) que nous désignerons par

$$C_u$$

et qui est de mesure 0 par rapport à la mesure de Lebesgue sur C:

$$m(C_u) = 0.$$

Puisque $u(rz)$ est une fonction continue de r et z pour $0 < r < 1$, $z \in C$, l'ensemble C_u est borélien et la fonction $u(e^{i\theta})$, définie dans $C - C_u$, est mesurable (B). Par conséquent l'ensemble C_u et la fonction $u(e^{i\theta})$ sont mesurables par rapport à toute mesure spectrale étalée sur C.

Faisons les définitions suivantes. Désignons par

$$E_T(\cdot)$$

la mesure spectrale correspondant à la dilatation unitaire minimum U_T de la contraction T; $E_T(\sigma)$ est définie pour tous les sous-ensembles boréliens σ de C. Soit

$$\mathsf{H}_T$$

la classe des fonctions $u \in \mathsf{H}$ pour lesquelles

$$E_T(C_u) = O.$$

H est évidemment une algèbre et, pour T fixée, H_T est une sous-algèbre de H.

On étend l'application $u(z)\to u(T)$ de la classe A à la classe plus vaste H_T de la manière suivante. Pour $0<r<1$ la fonction appartient à A, donc $u_r(T)$ se trouve déjà définie; posons alors

(1.5) $$u(T)=\lim_{r\to 1} u_r(T).^{1})$$

Cette définition est possible, la limite existant au sens *fort*. En effet, comme on a en vertu de (1.4)

$$u_r(T)=\mathrm{pr}\, u_r(U_T),$$

il suffit de montrer que $u_r(U_T)$ converge fortement lorsque $r\to 1$, notamment vers

$$u(U_T)=\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, dE_{T,\theta}.^{2})$$

Or on a pour un élément quelconque f de l'espace de dilatation $\mathfrak{K}_T$

$$\|[u(U_T)-u_r(U_T)]f\|^2=\int_0^{2\pi} |u(e^{i\theta})-u_r(e^{i\theta})|^2\, d(E_{T,\theta}f,f)\to 0,$$

en vertu du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites bornées et convergentes presque partout. La définition (1.5) revient donc à poser

(1.5′) $$u(T)=\mathrm{pr}\, u(U_T).$$

3. L'application $u(z)\to u(T)$, ainsi étendue à la classe H_T, continue d'être un homomorphisme d'algèbre, conséquence des relations évidentes

$$(cu)_r(T)=cu_r(T),\quad (u+v)_r(T)=u_r(T)+v_r(T),\quad (uv)_r(T)=u_r(T)v_r(T).$$

Comme T^* a sa dilatation unitaire minimum égale à $(U_T)^*$, on a

$$E_{T^*}(\sigma)=E_T(\sigma^*)$$

où σ^* est l'image symétrique de σ par rapport à l'axe réelle. Par conséquent $u\in\mathsf{H}_T$ entraîne $u^*\in\mathsf{H}_{T^*}$, et comme par (1.3)

$$u_r(T)^*=(u_r)^*(T^*)=(u^*)_r(T^*),$$

on obtient en passant à la limite $(r\to 1)$:

(1.6) $$u(T)^*=u^*(T^*)\quad \text{pour}\quad u\in\mathsf{H}_T.$$

---

1) Pour $u(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\in\mathsf{A}$ cette définition est compatible avec la précédente, parce que

$$\|u(T)-u_r(T)\|=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}(1-r^k)c_kT^k\right\|\leqq\sum_{k=0}^{\infty}(1-r^k)\,|c_k|\to 0 \qquad (r\to 1).$$

2) $\{E_{T,\theta}\}$ est la famille spectrale de U_T, étalée sur le segment $0<\theta\leqq 2\pi$. Donc $E_{T,\theta}=E_T(a_\theta)$ où a_θ désigne l'arc $(1, e^{i\theta}]$ de C.

En vertu de la théorie spectrale on a

$$\|u(U_T)\| \leqq \sup |u(e^{i\theta})|$$

pour toute fonction de la transformation unitaire U_T. Faisant usage de la représentation (1. 5′) on obtient l'inégalité

(1. 7) $$\|u(T)\| \leqq \sup_D |u(z)| \quad \text{pour} \quad u \in \mathsf{H}_T.$$

De cette inégalité il s'ensuit que si la suite des fonctions $u_n \in \mathsf{H}_T$ tend vers la fonction $u \in \mathsf{H}_T$ uniformément dans D, $u_n(T)$ converge vers $u(T)$ *en norme.*

Un critère pour la convergence *forte*

$$u_n(T) \to u(T) \quad (u_n, u \in \mathsf{H}_T)$$

est que les fonctions $u_n(z)$ soient bornées uniformément dans D et

$$u_n(e^{i\theta}) \to u(e^{i\theta})$$

presque partout par rapport à la mesure spectrale $E_T(\cdot)$. En effet, on a alors pour tout $h \in \mathfrak{H}$

$$\|[u_n(T) - u(T)]h\|^2 \leqq \|[u_n(U_T) - u(U_T)]h\|^2 = \int_0^{2\pi} |u_n(e^{i\theta}) - u(e^{i\theta})|^2 \, d(E_{T,\theta} h, h) \to 0$$

en vertu du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites bornées, convergentes presque partout.

4. Dans le cas particulier d'une contraction T *complètement non-unitaire,*[3]) $E_T(\cdot)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $m(\cdot)$, et par conséquent $E_T(C_u) = O$ pour toute fonction $u \in \mathsf{H}$. Donc, dans ce cas,

$$\mathsf{H}_T = \mathsf{H}.$$

Dans le cas d'une contraction de *type général,* soit

$$T = V \oplus T^{(0)}$$

la décomposition canonique de T en somme orthogonale de ses parties unitaire V et complètement non-unitaire $T^{(0)}$.[4]) On a alors

$$U_T = U_V \oplus U_{T^{(0)}} \quad \text{et} \quad E_T(\sigma) = E_V(\sigma) \oplus E_{T^{(0)}}(\sigma)$$

où $U_V = V$ parce que V est unitaire. Pour un ensemble σ de mesure $m(\sigma) = 0$ on a $E_{T^{(0)}}(\sigma) = O$, par conséquent $E_V(\sigma) = O$ entraîne, dans ce cas, $E_T(\sigma) = O$ et réciproquement. En appliquant cette relation en particulier aux ensembles C_u attachés aux fonctions $u \in \mathsf{H}$, on déduit que

(1. 8) $$\mathsf{H}_T = \mathsf{H}_V.$$

---

[3]) *Voir* [18].

[4]) *Voir* [18] ou [10].

Envisageons le cas où la contraction T est *normale*,

$$T = \int_{\bar{D}} z\, dK_z .$$

On a alors

$$u(T) = \int_{\bar{D}} u(z)\, dK_z$$

pour toute fonction $u \in \mathsf{H}_T$. Cette équation subsiste notamment pour les fonctions u_r $(0 < r < 1)$ et conserve sa validité lors du passage à la limite $(r \to 1)$. En effet, $u_r(z)$ est bornée uniformément et tend vers $u(z)$ partout dans $\bar{D}$ sauf dans l'ensemble C_u, situé sur C. L'assertion s'ensuivra par le théorème de convergence de Lebesgue si nous montrons que C_u est de mesure O par rapport à la mesure spectrale $K(\cdot)$ étalée sur $\bar{D}$, ou, ce qui revient au même, par rapport à sa restriction $K_0(\cdot)$ aux sous-ensembles boréliens de la circonférence C. Or il est manifeste que $K_0(\cdot)$ est la mesure spectrale de la partie unitaire V de T; par conséquent l'équation $K_0(C_u) = O$ dérive de l'équation $E_T(C_u) = O$.

5. Soit $w \in \mathsf{H}_T$ et $|w(z)| < 1$ dans D. En vertu de (1. 7),

$$T' = w(T) \tag{1. 8}$$

est alors une contraction.

En vue d'étudier les fonctions de T', envisageons d'abord la partie unitaire V' de T', opérant dans le sous-espace $\mathfrak{H}'$, et la mesure spectrale correspondante $E_{V'}(\cdot)$.

De (1. 8) et (1. 5') on déduit

$$\left.\begin{aligned} T'^n &= w^n(T) = \mathrm{pr}\, w^n(U_T) \\ T'^{*n} &= \mathrm{pr}\, [w^n(U_T)]^* \end{aligned}\right. \qquad (n = 0, 1, \ldots); \tag{1.9}$$

d'autre part on a

$$\|w(U_T)\| \leqq \sup |w(z)| \leqq 1. \tag{1. 10}$$

Soit $h' \in \mathfrak{H}'$. Des relations

$$\|T'^n h'\| = \|h'\| = \|T'^{*n} h'\| \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

et de (1. 9) et (1. 10) on déduit les relations

$$T'^n h' = w^n(U_T) h', \quad T'^{*n} h' = [w^n(U_T)]^* h' \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1. 11}$$

et

$$\|w^n(U_T) h'\| = \|h'\| = \|[w^n(U_T)]^* h'\| \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1. 12}$$

De (1. 12) on obtient

$$\|h'\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|w^n(U_T) h'\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |w(e^{i\theta})|^{2n}\, d(E_{T,\theta} h', h') = \|E_T(e_w) h'\|^2 \tag{1. 13}$$

où l'on a désigné par e_w l'ensemble des points $e^{i\theta}$ dans lesquels $|w(e^{i\theta})|=1$, c'est-à-dire

$$e_w = \overset{-1}{w}(C).$$

Puisque

$$E = E_T(e_w)$$

est une projection, (1.13) veut dire que

$$h' = Eh'.$$

En combinant ce résultat avec (1. 11) on obtient pour $h' \in \mathfrak{H}'$:

$$V'^n h' = \begin{Bmatrix} w^n(U_T)Eh' & (n \geqq 0) \\ [w^{|n|}(U_T)]^* Eh' & (n \leqq 0) \end{Bmatrix} = \int_{e_w} w^n(z) E_T(dz) h' \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots),$$

d'où l'on déduit que

$$V'^n h' = \int_C \zeta^n F(d\zeta) h' \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots),$$

l'intégrale étant prise par rapport à la mesure

$$F(\sigma) = E_T(\overset{-1}{w}(\sigma)),$$

définie pour les ensembles boréliens $\sigma \subset C$. Montrons que $F(\sigma)$ est réduit par $\mathfrak{H}'$. Il suffit d'envisager à cet effet le cas où σ est un arc de C. Or, soit $\{p_m(e^{i\theta})\}$ une suite bornée de polynomes trigonométriques tendant vers 1 dans les points $e^{i\theta}$ de l'arc σ et vers 0 dans les autres points de C; on a alors

$$F(\sigma)h' = \lim_{m\to\infty} \int_C p_m(\zeta) F(d\zeta) h' = \lim_{m\to\infty} p_m(V') h' \in \mathfrak{H}',$$

puisque V' transforme $\mathfrak{H}'$ en $\mathfrak{H}'$.

Il résulte de ces raisonnements que la mesure spectrale de V' est égale à la restriction de $F(\cdot)$ à $\mathfrak{H}'$, c'est-à-dire que

(1. 14) $$E_{V'}(\sigma) = E_T(\overset{-1}{w}(\sigma)) | \mathfrak{H}'$$

pour tout σ borélien, $\sigma \subset C$.

6. Envisageons alors les fonctions composées

$$u \circ w(z) = u(w(z)).$$

De (1. 9) on obtient immédiatement

$$p(T') = p \circ w(T)$$

pour tout polynome $p(z)$. Soit $u(z) \in \mathsf{A}$ et envisageons cette relation pour les sommes partielles $p_n(z)$ de la série de Taylor de $u(z)$. Lorsque $n \to \infty$, $p_n(T')$ tend vers $u(T')$ en norme, parce que $p_n(z)$ tend vers $u(z)$ uniformément dans $\bar{D}$. D'autre part, $p_n \circ w$ et $u \circ w$ appartiennent à H_T, et $p_n \circ w(e^{i\theta})$ tend vers $u \circ w(e^{i\theta})$ uniformément dans $C - C_w$; comme de plus la suite $\{p_n \circ w(z)\}$ est uniformément bornée dans D, on peut appliquer le critère de convergence donné et on obtient que $p_n \circ w(T)$ tend vers $u \circ w(T)$. Par conséquent on a

$$u(T') = u \circ w(T) \tag{1. 15}$$

pour toute fonction $u \in \mathsf{A}$.

Soit $u \in \mathsf{H}$. Puisque $u_r \in \mathsf{A}$ $(0 < r < 1)$, on a par (1. 15):

$$u_r(T') = u_r \circ w(T).$$

Essayons de passer à la limite $r \to 1$ dans l'hypothèse additionnelle que $u \circ w(z)$ appartient aussi à H_T. La fonction $u_r \circ w(z)$ est bornée dans D par une constante indépendante de r, et (lorsque $r \to 1$) $u_r \circ w(e^{i\theta})$ tend vers $u \circ w(e^{i\theta})$ partout sauf les points de l'ensemble

$$C_w \cup \overset{-1}{w}(C_u).$$

On a $E_T(C_w) = O$ puisque $w \in \mathsf{H}_T$. Si l'on suppose aussi

$$E_T(\overset{-1}{w}(C_u)) = O, \tag{1. 16}$$

l'ensemble exceptionnel sera de mesure O par rapport à $E_T(\cdot)$, et en appliquant le critère de convergence donné on peut conclure

$$u_r \circ w(T) \to u \circ w(T).$$

D'autre part on a

$$u_r(T') \to u(T')$$

parce que (1. 16) entraîne $u \in \mathsf{H}_{T'}$; en effet, par (1. 14) et (1. 16) on a $E_{V'}(C_u) = O$ et cela entraîne $E_{T'}(C_u) = O$ parce que $m(C_u) = 0$. De cette façon on obtient que (1. 15) subsiste pour toutes les fonctions $u \in \mathsf{H}$ vérifiant les conditions $u \circ w \in \mathsf{H}_T$ et (1. 16).

Résumons:

Théorème 1. (i) *L'application $u(z) \to u(T)$ définie pour les fonctions*

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

de la classe H_T par les formules (1. 2), (1. 5), *c'est-à-dire par*

$$u(T) = \lim_{r \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k T^k,$$

est un homomorphisme d'algèbre de H_T dans $B(\mathfrak{H})$ et telle que

$$\|u(T)\| \leqq \sup_D |u(z)|.$$

(ii) $u \in \mathsf{H}_T$ *entraîne* $u^* \in \mathsf{H}_{T^*}$ *et* $u(T)^* = u^*(T^*)$.

(iii) *Si la suite des fonctions $u_n \in \mathsf{H}_T$ est uniformément bornée dans D et telle que*

$$u_n(e^{i\theta}) \to u(e^{i\theta}) \qquad (n \to \infty)$$

presque partout par rapport à la mesure spectrale $E_T(\cdot)$, on a

$$u_n(T) \to u(T) \quad \text{(convergence forte).}$$

(iv) *Pour T normale cette définition de $u(T)$ est compatible avec celle moyennant la décomposition spectrale de T.*

(v) *Soit $w \in \mathsf{H}_T$, $|w(z)|<1$ dans D. Dans ce cas*

$$T' = w(T)$$

est aussi une contraction. La mesure spectrale de la partie unitaire V' de T' est égale à une restriction de $E_T(\overset{-1}{w}(\cdot))$. Pour toute fonction $u \in \mathsf{H}$ telle que

$$E_T(C_{u\circ w}) = O, \quad E_T(\overset{-1}{w}(C_u)) = O,$$

on a $u \in \mathsf{H}_{T'}$, $u \circ w \in \mathsf{H}_T$ et

$$u(T') = u \circ w(T).$$

2. Les classes E et E_T

1. Le premier pas pour étendre notre calcul fonctionnel à des fonctions non bornées sera de déterminer les fonctions $u \in \mathsf{H}$ pour lesquelles $u(T)$ admet une inverse (au sens général, c'est-à-dire sans appartenir nécessairement à $B(\mathfrak{H})$), et cela pour *toute* contraction complètement non-unitaire T.

Pour commencer nous rappelons quelques notions et faits appartenant à la théorie des fonctions analytiques, dont nous ferons usage dans la suite.

Soit H^1 la classe (de Hardy) des fonctions $u(z)$, holomorphes dans D et telles que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|\, d\theta$$

reste bornée pour $0<r<1$. Evidemment, $\mathsf{H} \subset \mathsf{H}^1$. Pour $u \in \mathsf{H}^1$ la limite

$$u(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} u(re^{i\theta})$$

existe en presque tous les points $e^{i\theta}$ du cercle unité C, de plus on a

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |u(e^{i\theta}) - u(re^{i\theta})|\, d\theta = 0; \tag{2. 1}$$

voir Fatou [4] et Riesz [13]. (2. 1) entraîne, par le théorème de Cauchy,

$$\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, d\theta = \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta = \lim_{r\to 1} 2\pi u(0) = 2\pi u(0)$$

pour toute fonction $u \in \mathsf{H}^1$. Dans le cas où $u(z) \not\equiv 0$, on a

$$\log |u(e^{i\theta})| \in L^1(0,2\pi)$$

(classe des fonctions intégrables au sens de Lebesgue); *voir* Szegő [14].

On appelle *fonction extérieure* toute fonction de la forme

$$v(z) = \varkappa \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log k(\theta)\, d\theta\right]$$

où

$$0 \leqq k(\theta) \in L^1(0,2\pi), \quad \log k(\theta) \in L^1(0,2\pi)$$

et $\varkappa$ est une constante complexe, de module 1; $v(z)$ appartient à H^1 et on a

$$|v(e^{i\theta})| = k(\theta) \text{ presque partout.}$$

Si $u \in \mathsf{H}^1$ et $u(z) \not\equiv 0$, on peut poser (en vertu du théorème de SZEGŐ) $k(\theta) = |u(e^{i\theta})|$. La fonction extérieure $u_1(z)$ qui résulte, avec $\varkappa = 1$, est appelée le *facteur extérieur* de $u(z)$, donc

$$u_1(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log |u(e^{i\theta})|\, d\theta\right].$$

La fonction $u_0(z)$ définie par l'équation

$$u(z) = u_0(z)\, u_1(z)$$

s'appelle le *facteur intérieur* de $u(z)$. On a

$$|u_0(z)| \leqq 1 \quad \text{dans } D, \quad \text{et} \quad |u_0(e^{i\theta})| = 1 \text{ p. p. sur } C;$$

voir SZEGŐ [14].

2. Après ces préliminaires formulons notre assertion:

Théorème 2. *Pour une fonction $u(z) \in \mathsf{H}$ les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(A) *$u(z)$ est une fonction extérieure.*

(B) *Les conditions*

$$(*) \qquad 0 \leqq p(\theta) \in L^1(0,2\pi), \quad \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, p(\theta)\, e^{in\theta} d\theta = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

entraînent

$$p(\theta) = 0 \quad \textit{presque partout}^{5)}.$$

(C) *$u(T)^{-1}$ existe pour toute contraction complètement non-unitaire T.*

---

5) Le fait que les propriétés (A) et (B) sont équivalentes pour $u \in \mathsf{H}$, est analogue au fait suivant, démontré par BEURLING [1]: Pour $u(z)$ appartenant à la classe de Hardy H^2, c'est-à-dire telle que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^2\, d\theta$$

reste bornée pour $0 < r < 1$, la propriété d'être une fonction extérieure est équivalente à la propriété que le système des fonctions $z^n u(z)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ soit complet dans H^2 comme espace de Hilbert, c'est-à-dire qu'il n'y ait aucune fonction $v(z) \in \mathsf{H}^2$, $v(z) \not\equiv 0$, pour laquelle

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} u(e^{i\theta}) \overline{v(e^{i\theta})}\, d\theta = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Démonstration.

(A)⇒(B). Soit $u(z)$ une fonction extérieure appartenant à H (donc bornée) et soit $p(\theta)$ une fonction vérifiant (*) sans s'annuler presque partout. Nous allons montrer que ces hypothèses entraînent une contradiction.

Envisageons la fonction

$$q(\theta)=u(e^{i\theta})\,p(\theta); \tag{2.2}$$

comme produit d'une fonction mesurable bornée et d'une fonction intégrable, $q(\theta)$ est intégrable. Comme $u(e^{i\theta})$ ne s'annule que peut-être dans un ensemble de mesure 0 ($\log|u(e^{i\theta})|$ étant intégrable) et comme $p(\theta)\neq 0$ dans un ensemble de mesure positive par hypothèse, on a aussi $q(\theta)\neq 0$ dans un ensemble de mesure positive. Soit

$$q(\theta)\sim\sum_1^\infty c_n e^{in\theta}$$

la série de Fourier de $q(\theta)$; les coefficients de rang $n\leqq 0$ sont égaux à 0 en vertu de (*). La fonction

$$Q(z)=\sum_1^\infty c_n z^n \tag{2.3}$$

appartient alors à H^1 (conséquence de la formule de Poisson) et $Q(z)\not\equiv 0$, par conséquent

$$\log|Q(e^{i\theta})|\in L^1(0,2\pi).$$

Or

$$Q(e^{i\theta})=q(\theta)\quad\text{presque partout}^{6)},$$

et comme $\log|u(e^{i\theta})|$ est aussi intégrable (parce que $u(z)$ est une fonction extérieure), il résulte que

$$\log p(\theta)=\log|q(\theta)|-\log|u(e^{i\theta})|\in L^1(0,2\pi). \tag{2.4}$$

Envisageons la fonction

$$P(z)=\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log p(\theta)\,d\theta\right]\in\mathrm{H}^1.$$

De (2.4) il s'ensuit que

$$P(z)=\varkappa\frac{Q_1(z)}{u(z)}$$

où $Q_1(z)$ est le facteur extérieur de $Q(z)$ et $\varkappa$ est une constante de module 1.[7]. Vu que le facteur intérieur $Q_0(z)$ est borné en module par 1 dans D, on a

$$|Q(z)|=|Q_0(z)\,Q_1(z)|\leqq|Q_1(z)|$$

et par conséquent

$$|P(z)|\geqq\frac{|Q(z)|}{|u(z)|}. \tag{2.5}$$

[6]) En vertu des théorèmes bien connus dans la théorie de la sommation d'Abel—Poisson des séries de Fourier.

[7]) $u(z)$ étant une fonction extérieure on a $u(z)=\varkappa\ u_1(z)$, $|\varkappa|=1$.

Vu que $P(z) \in \mathrm{H}^1$, (2. 5) entraîne

$$z^n \frac{Q(z)}{u(z)} \in \mathrm{H}^1 \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Par conséquent

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} \frac{Q(e^{i\theta})}{u(e^{i\theta})} d\theta = 2\pi \left[z^n \frac{Q(z)}{u(z)} \right]_{z=0} = 0 \qquad (n=0, 1, \ldots),$$

où l'on a fait usage de ce que $Q(0)=0$ et $u(z) \neq 0$ dans D. Or on a presque partout

$$\frac{Q(e^{i\theta})}{u(e^{i\theta})} = \frac{q(\theta)}{u(e^{i\theta})} = p(\theta),$$

donc

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} p(\theta) d\theta = 0 \qquad (n=0, 1, \ldots); \tag{2. 6}$$

$p(\theta)$ étant de valeurs réelles, (2. 6) entraîne que tous les coefficients de Fourier de $p(\theta)$ sont égaux à 0, ce qui contredit notre hypothèse que $p(\theta) \neq 0$ dans un ensemble de mesure positive.

(B)$\Rightarrow$(A). Soit $u(z) = u_0(z) u_1(z)$ la décomposition de $u(z)$ en produit de ses facteurs intérieur et extérieur. Posons

$$a(z) = 1 - \overline{u_0(0)} u_0(z).$$

Puisque

$$u_0(e^{i\theta}) \overline{u_0(e^{i\theta})} = 1 \text{ p. p.},$$

on a pour toute fonction $v(z)$ appartenant à H^1:

$$\int_0^{2\pi} v(e^{i\theta}) u_0(e^{i\theta}) \overline{a(e^{i\theta})} d\theta = \int_0^{2\pi} v(e^{i\theta}) [u_0(e^{i\theta}) - u_0(0)] d\theta =$$

$$= 2\pi [v(z) (u_0(z) - u_0(0))]_{z=0} = 0.$$ [8])

Posons en particulier

$$v(z) = z^n u_1(z) a(z) \qquad (n=0, 1, \ldots);$$ [9])

il résulte

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} u(e^{i\theta}) |a(e^{i\theta})|^2 d\theta = 0 \qquad (n=0, 1, \ldots). \tag{2. 7}$$

Supposons que $u(z)$ jouisse de la propriété (B). (2. 7) entraîne alors

$$|a(e^{i\theta})|^2 = 0 \text{ p. p.},$$

donc

$$\overline{u_0(0)} u_0(e^{i\theta}) = 1 \text{ p. p.} \tag{2. 8}$$

---

[8]) $v(z) u_0(z) \in \mathrm{H}^1$ parce que $u_0(z)$ est bornée dans D.
[9]) $v(z) \in \mathrm{H}^1$ parce que $a(z)$ est bornée dans D.

Or on a

$$|u_0(e^{i\theta})| = 1 \text{ p. p.,} \tag{2.9}$$

parce que $u_0(z)$ est un facteur intérieur. De (2. 8) et (2. 9) on conclut

$$u_0(e^{i\theta}) = \varkappa \text{ p. p.,}$$

$\varkappa$ étant une constante de module 1. Par conséquent

$$u_0(z) \equiv \varkappa,$$
$$u(z) \equiv \varkappa u_1(z)$$

dans D, c'est-à-dire que $u(z)$ est une fonction extérieure. Cela prouve que (B) entraîne (A).

(B)$\Rightarrow$(C). Soit T une contraction complètement non-unitaire d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et soit $f_0 \in \mathfrak{H}$ tel que

$$u(T)f_0 = 0.$$

La mesure spectrale $E_T(\cdot)$ étant alors absolument continue, on a pour $n \geqq 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= (T^n u(T)f_0, f_0) = (U_T^n u(U_T)f_0, f_0) = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{in\theta} u(e^{i\theta}) d(E_{T,\theta}f_0, f_0) = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} u(e^{i\theta}) p(\theta) d\theta \end{aligned} \tag{2.10}$$

où

$$0 \leqq p(\theta) = d(E_{T,\theta}f_0, f_0)/d\theta \in L^1(0, 2\pi).$$

Supposons que $u(z)$ jouisse de la propriété (B). (2. 10) entraîne alors $p(\theta) = 0$ p. p. et par conséquent

$$\|f_0\|^2 = \int_0^{2\pi} d(E_{T,\theta}f_0, f_0) = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta = 0, \quad \text{donc} \quad f_0 = 0.$$

De cette façon la propriété (B) entraîne que $u(T)^{-1}$ existe pour toute contraction complètement non-unitaire T, c'est-à-dire la propriété (C).

(C)$\Rightarrow$(B). Supposons qu'il existe une fonction $p(\theta)$ vérifiant (*), mais différente de 0 dans un ensemble de mesure positive. Nous allons construire une contraction complètement non-unitaire T dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H} \neq \{0\}$; telle que $u(T)$ n'admet pas d'inverse, voire même telle que $u(T) = O$.

Mettons à part le cas banal $u(z) \equiv 0$, où l'on a $u(T) = O$ pour n'importe quelle contraction T.

Désignons par V l'opérateur de multiplication par $e^{i\theta}$ des fonctions $f(\theta) \in L^2(0, 2\pi)$; V est unitaire et sa mesure spectrale est absolument continue, donc $u(V)$ existe: c'est notamment l'opérateur de multiplication par $u(e^{i\theta})$. Nos hypothèses s'expriment en termes de l'espace $L^2(0, 2\pi)$ de la façon suivante:

$$\big(u(V) V^n f_0, f_0\big) = 0 \quad (n \geqq 0), \qquad (f_0, f_0) > 0, \tag{2.11}$$

où

$$f_0(\theta) = \sqrt{p(\theta)}.$$

Soient $\mathfrak{M}^+$ et $\mathfrak{M}^-$ les sous-espaces de $L^2(0, 2\pi)$ sous-tendus par les éléments

$$e^{in\theta}f_0(\theta)\,(n \geqq 0) \quad \text{ou} \quad e^{-in\theta}f_0(\theta)\,(n \geqq 0),$$

selon les cas. Soit P la projection orthogonale sur $\mathfrak{M}^-$. On a évidemment

$$V\mathfrak{M}^+ \subset \mathfrak{M}^+, \quad V^{-1}\mathfrak{M}^- \subset \mathfrak{M}^-;$$

de la seconde de ces inclusions il s'ensuit

$$PV^{-1}P = V^{-1}P, \quad PVP = (PV^{-1}P)^* = (V^{-1}P)^* = PV$$

et par récurrence

$$(PV)^nP = PV^n = PV^nP \qquad (n \geqq 0). \tag{2.12}$$

Soit $\mathfrak{H}$ le sous-espace de $L^2(0, 2\pi)$ sous-tendu par les éléments PV^kf_0 $(k \geqq 0)$, donc

$$\mathfrak{H} = \overline{P\mathfrak{M}^+}.$$

Puisque f_0 appartient à $\mathfrak{M}^+$ ainsi qu'à $\mathfrak{M}^-$, il appartient aussi à $\mathfrak{H}$ et par conséquent

$$\mathfrak{H} \neq \{0\}.$$

En vertu de (2. 12) nous avons

$$(PV)^nPV^kf_0 = PV^nV^kf_0 = PV^{n+k}f_0 = PV^nPV^kf_0 \qquad (n, k \geqq 0),$$

ce qui montre que PV et ses itérées transforment $\mathfrak{H}$ en lui-même, et que si T désigne la restriction de PV à $\mathfrak{H}$, on a

$$T^ng = PV^ng \qquad (g \in \mathfrak{H};\ n \geqq 0). \tag{2.13}$$

T est une contraction de $\mathfrak{H}$ et en vertu de (2. 13) V est une dilatation unitaire de T (non nécessairement minimum). Puisque V a son spectre absolument continu, $v(V)$ et $v(T)$ existent pour toute fonction $v(z) \in \mathsf{H}$ et par (2. 13) on a

$$v(T)g = P\,v(V)g \qquad (g \in \mathfrak{H}).$$

Posons en particulier

$$v(z) = z^nu(z) \qquad (n \geqq 0)$$

où $u(z)$ est la fonction que nous avons en vue; nous obtenons

$$u(T)\,T^ng = P\,u(V)\,V^ng \qquad (g \in \mathfrak{H};\ n \geqq 0). \tag{2.14}$$

En vertu de (2. 11)

$$\big(u(V)\,V^nf_0,\ V^{-k}f_0\big) = \big(u(V)\,V^{n+k}f_0, f_0\big) = 0 \qquad (n, k \geqq 0).$$

Puisque les éléments $V^{-k}f_0$ $(k \geqq 0)$ sous-tendent $\mathfrak{M}^-$, il en résulte

$$P\,u(V)\,V^nf_0 = 0 \qquad (n \geqq 0)$$

et par (2. 14)

$$u(T)\,T^nf_0 = 0 \qquad (n \geqq 0). \tag{2.15}$$

Or les éléments $T^n f_0 = PV^n f_0$ $(n \geqq 0)$ sous-tendent $\mathfrak{H}$, donc (2. 15) entraîne

$$u(T) = 0. \tag{2. 16}$$

Reste à montrer que T est une contraction complètement non-unitaire.
Il suffit de voir à cet effet que pour un $g \in \mathfrak{H}$ les conditions

$$\|g\| = \|Tg\| = \|T^2 g\| = \cdots$$

entraînent

$$g = 0.$$

Or ces conditions, combinées avec (2. 13), entraînent

$$V^n g = T^n g \qquad (n \geqq 0),$$

d'où l'on obtient, vu aussi (2. 16),

$$u(V)g = u(T)g = 0.$$

Donc

$$u(e^{i\theta})g(\theta) = 0 \text{ presque partout.} \tag{2. 17}$$

Comme $u(z) \not\equiv 0$ par hypothèse, $u(e^{i\theta})$ ne s'annule que dans un ensemble de mesure 0 au plus, donc (2. 17) entraîne

$$g(\theta) = 0 \quad \text{presque partout,}$$

c'est-à-dire que

$$g = 0.$$

Cela achève la démonstration de l'implication $(C) \Rightarrow (B)$ et aussi celle du théorème.

3. Désignons par

$$\mathsf{E}$$

la classe des fonctions jouissant des propriétés énumérées dans le théorème 2, c'est-à-dire la classe des *fonctions extérieures, bornées dans D*. La classe E est donc constituée des fonctions $u \in \mathsf{H}$ pour lesquelles

$$u(z) = \varkappa \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|u(e^{i\theta})|\, d\theta\right], \quad |\varkappa| = 1. \tag{2. 18}$$

De cette représentation il ressort que la classe E est *multiplicative*, comprend en particulier les fonctions constantes non-nulles[10]) et comprend avec $u(z)$ aussi

[10]) Parce que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\theta = 1 \qquad (|z| < 1).$$

$u^*(z)$.[11]) Les deux premières de ces propositions résultent d'ailleurs aussi par la propriété caractéristique (C) de la classe E.

Pour une contraction donnée T de l'espace $\mathfrak{H}$ définissons

$$\mathsf{E}_T$$

comme la classe des fonctions $u \in \mathsf{E}$ pour lesquelles

$$E_T(C_u^0) = O, \tag{2.19}$$

où C_u^0 désigne l'ensemble des points $e^{i\theta} \in C$ dans lesquels la valeur limite $u(e^{i\theta})$ n'existe pas, ou bien existe mais est égale à 0, c'est-à-dire que

$$C_u^0 = C_u \cup \overset{-1}{u}(0).$$

Cet ensemble est de mesure $m(C_u^0) = 0$ pour toute fonction $u \in \mathsf{E}$, donc la condition (2.19) est automatiquement vérifiée si la mesure spectrale $\mathsf{E}_T(\cdot)$ est absolument continue. En particulier on a donc

$$\mathsf{E}_T = \mathsf{E}$$

si T est complètement non-unitaire. Dans le cas général on a

$$\mathsf{E}_T = \mathsf{E}_V$$

où V est la partie unitaire de T, ce qu'on voit tout comme la proposition analogue (1.8).

Il est manifeste que, pour T fixée, la classe E_T est *multiplicative*, comprend les fonctions constantes non-nulles, et de plus

$$u \in \mathsf{E}_T \quad \text{entraîne} \quad u^* \in \mathsf{E}_{T^*}.$$

Théorème 3. *Pour toute contraction T de l'espace $\mathfrak{H}$ et toute fonction $u \in \mathsf{E}_T$, la transformation $u(T)$ admet une inverse $u(T)^{-1}$, à domaine dense dans $\mathfrak{H}$. De plus*

$$[u(T)^{-1}]^* = [u^*(T^*)]^{-1}. \tag{2.20}$$

Démonstration. Soit

$$T = V \oplus T^{(0)}$$

la décomposition canonique de T en ses parties unitaire V et complètement non-unitaire $T^{(0)}$. Il en dérive la relation

$$u(T) = u(V) \oplus u(T^{(0)})$$

---

[11]) Vu que

$$|u(e^{i\theta})| = |\overline{u^*(e^{-i\theta})}| = |u^*(e^{-i\theta})|$$

il s'ensuit de (2.18)

$$u^*(z) = \bar{\varkappa} \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta}+z}{e^{-i\theta}-z} \log|u^*(e^{-i\theta})|\, d\theta\right] = \bar{\varkappa} \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|u^*(e^{i\theta})|\, d\theta\right]$$

par la substitution $\theta \to 2\pi - \theta$.

d'abord pour les fonctions $u \in \mathsf{A}$, puis, par l'intermédiaire des fonctions auxiliaires u_r, pour toutes les fonctions $u \in \mathsf{H}_T = \mathsf{H}_V$, en particulier pour les fonctions de la classe $\mathsf{E}_T = \mathsf{E}_V$. Or, pour $u \in \mathsf{E}_T$, $u(T^{(0)})^{-1}$ existe en vertu du théorème 2, et $u(V)^{-1}$ existe en vertu de la théorie spectrale des transformations unitaires,

$$u(V)^{-1} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{u(e^{i\theta})} dE_{V,\theta}.$$ [12]

On conclut que $u(T)^{-1}$ existe aussi,

$$u(T)^{-1} = u(V)^{-1} \oplus u(T^{(0)})^{-1}.$$

Comme $u \in \mathsf{E}_T$ entraîne $u^* \in \mathsf{E}_{T^*}$ (et réciproquement), $u^*(T^*)^{-1}$ existe par la même raison.

Soit h un élément orthogonal au domaine de $u(T)^{-1}$, c'est-à-dire à l'ensemble des valeurs de $u(T)$. On a alors

$$u(T)^* h = 0;$$

comme

$$[u(T)^*]^{-1} = [u^*(T^*)]^{-1}$$

existe, on conclut que

$$h = 0.$$

Donc le domaine de $u(T)^{-1}$ est dense dans $\mathfrak{H}$. (2. 20) est alors une conséquence du fait général que si S^{-1}, S^* et $(S^{-1})^*$ existent, on a

$$(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}.$$

Théorème 4. (i) *Soit* $w \in \mathsf{H}$ *telle que*

(2. 21) $$|w(z)| < 1 \text{ dans } D,$$

(2. 22) $$m(\overset{-1}{w}(C)) = 0.$$ [13]

Dans ce cas $u \in \mathsf{E}$ *entraîne* $u \circ w \in \mathsf{E}$.

(ii) *Soit* T *une contraction de* $\mathfrak{H}$, *soit* $w \in \mathsf{H}_T$ *et supposons que les conditions* (2. 21—22) *soient vérifiées. Pour toute fonction* $u \in \mathsf{E}$ *telle que*

(2. 23) $$E_T(\overset{-1}{w}(C_u^0)) = O, \quad E_T(C_{u\circ w}^0) = O,$$ [14]

on a $u \in \mathsf{E}_{T'}$, $u \circ w \in \mathsf{E}_T$, *et*

$$u(T') = u \circ w(T)$$

où T' *désigne la contraction* $w(T)$.

---

12) Notons que $[u(e^{i\theta})]^{-1}$ est la limite de la fonction *continue* $[u_r(e^{i\theta})]^{-1}$ partout sur C sauf les points de l'ensemble borélien C_u^0 qui est de mesure 0 par rapport à la mesure spectrale $E_V(\cdot)$.

13) Cela veut dire que $|w(e^{i\theta})| < 1$ presque partout sur C, par rapport à la mesure de Lebesgue.

14) Cela veut dire que les valeurs limite $u(w(e^{i\theta})) = \lim u(rw(e^{i\theta}))$, $u \circ w(e^{i\theta}) = \lim u(w(re^{i\theta}))$ $(r \to 1-0)$ existent et sont différentes de 0 presque partout par rapport à la mesure spectrale $E_T(\cdot)$.

Démonstration. (i) Soit T une contraction complètement non-unitaire, d'ailleurs quelconque. Grâce à (2. 21), $T' = w(T)$ est une contraction; soit V' la partie unitaire de T'. D'après théorème 1(v), $E_{V'}(C)$ est une restriction de $E_T(\overset{-1}{w}(C))$, qui est égale à O en vertu de l'hypothèse (2. 22) et parce que la mesure spectrale $E_T(\cdot)$ est absolument continue. Donc $E_{V'}(C) = O$, ce qui n'est possible que si l'espace de V' se réduit au seul élément 0, ou, en d'autres termes, si T' est elle-même une contraction complètement non-unitaire. Mais alors $u \in \mathsf{E}$ entraîne que $u(T')^{-1}$ existe. Or $u(T') = u \circ w(T)$ en vertu du théorème 1(v), parce que $u \circ w(z) \in \mathsf{H}$ et

$$E_T(\overset{-1}{w}(C_u)) \leqq E_T(\overset{-1}{w}(C)) = O, \quad E_T(\overset{-1}{w}(C_u)) = O.$$

Donc $u \circ w \in \mathsf{H}$ et $(u \circ w)(T)^{-1}$ existe pour toute contraction complètement non-unitaire T, ce qui veut dire que

$$u \circ w \in \mathsf{E}.$$

(ii) En vertu de (i) on a $u \circ w \in \mathsf{E}$; vu la seconde des conditions (2. 23) cela entraîne $u \circ w \in \mathsf{E}_T$. On a aussi $u \in \mathsf{E}_{T'} = \mathsf{E}_{V'}$ (où V' désigne la partie unitaire de la contraction T'), parce que d'une part $u \in \mathsf{E}$ par hypothèse, d'autre part

$$E_{V'}(C_u^0) = \text{restriction de } E_T(\overset{-1}{w}(C_u^0)) = O$$

en vertu du théorème 1(v) et de la première condition (2. 23).

La relation $u(T') = u \circ w(T)$ est alors une conséquence immédiate du théorème 1(v).

Cela achève la démonstration du théorème 4.

4. Dans les applications il est utile d'avoir des conditions analytiques, suffisantes sinon nécessaires, pour qu'une fonction appartienne à la classe E.

Posons la *définition* suivante: Appelons classe

$$\mathsf{E}^{\text{reg}}$$

la classe des fonctions $u \in \mathsf{H}$ telles que

a) $u(z)$ n'a aucun zéro dans D, et

b) $\left|\dfrac{u(z)}{u(rz)}\right| \leqq K$ pour $|z| < 1$, $0 < r < 1$, K étant une constante indépendante de z et r.

Théorème 5. *La classe* E^{reg} *est comprise dans la classe* E. *Elle est multiplicative et comprend en particulier*

a) *toutes les fonctions qui sont continues et différentes de* 0 *dans le disque fermé* $\bar{D}$ *et holomorphes dans son intérieur* D;

b) *les fonctions de la forme*

$$(1 - \alpha z)^{\nu}$$

où $|\alpha| \leqq 1$ *et* ν *est un nombre réel* $\geqq 0$.[15])

Démonstration. Soit $u \in \mathsf{E}^{\text{reg}}$ et soit $p(\theta)$ une fonction vérifiant les conditions (*) du théorème 2 par rapport à u. Pour r fixé, $0 < r < 1$, la fonction

15) On pourrait choisir une branche quelconque de la fonction $(1 - \alpha z)^{\nu}$ dans D, mais, pour être déterminé, nous choisissons la branche qui se réduit au point $z = 0$ à la valeur 1.

$\frac{1}{u(rz)}$ a sa série de Taylor uniformément convergente dans $\bar{D}$, soit

$$\frac{1}{u(rz)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(r)} z^n.$$

On a alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{u(e^{i\theta})}{u(re^{i\theta})} p(\theta)\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(r)} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} u(e^{i\theta}) p(\theta) d\theta = 0. \tag{2.24}$$

Lorsque $r \to 1$,

$$\frac{u(e^{i\theta})}{u(re^{i\theta})}$$

tend vers 1 presque partout, en restant bornée en module par la constante K. En vertu du théorème de convergence de Lebesgue on obtient de (2. 24) dans le cas limite

$$\int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta = 0,$$

donc

$$p(\theta) = 0 \text{ presque partout.}$$

Cela veut dire que la fonction $u(z)$ jouit de la propriété (B), caractéristique pour les éléments de la classe E. Donc $\mathsf{E}^{\text{reg}} \subset \mathsf{E}$.

Il résulte immédiatement de la définition de la classe E^{reg} que cette classe est multiplicative. Si $u(z)$ vérifie les hypothèses sous a), le quotient $\frac{u(z)}{u(rz)}$ est fonction continue des variables z et r dans l'ensemble compact $|z| \leqq 1$, $0 \leqq r \leqq 1$, par conséquent cette fonction est bornée, de même que la fonction $u(z)$ elle-même. D'autre part, il est aisé de voir que si $|\alpha| \leqq 1$ et $\nu \geqq 0$, on a

$$\left| \frac{(1-\alpha z)^\nu}{(1-\alpha r z)^\nu} \right| < 2^\nu \quad \text{pour} \quad |z| < 1, \ 0 < r < 1.$$

5. De la représentation (2. 18) il ressort que les fonctions $v \in \mathsf{E}$ ne s'annulent pas dans D. Mais cette propriété n'est pas suffisante. Par exemple, la fonction

$$u_t(z) = \exp\left(t \frac{z+1}{z-1}\right)$$

appartient, pour $t > 0$, à H, et n'a aucun zéro dans D, mais elle n'appartient pas à E. On peut aisément indiquer une contraction complètement non-unitaire T pour laquelle $u_t(T)$ n'a pas d'inverse. En effet, soit, dans l'espace $L^2(0, \infty)$ des fonctions $x(s)$ $(0 \leqq s < \infty)$,

$$(T_t x)(s) = x(s+t).$$

$\{T_t\}_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe continu de contractions de $L^2(0, \infty)$. Comme de plus

$$\|T_t x\|^2 = \int_0^\infty |x(s+t)|^2\, ds = \int_t^\infty |x(s)|^2\, ds \to 0 \text{ lorsque } t\to\infty,$$

ce semi-groupe est complètement non-unitaire dans le sens de la Note IV, et par conséquent sa cogénératrice T est une contraction complètement non-unitaire. Comme on a

$$u_t(T) = T_t \qquad (t\geqq 0)$$

en vertu de la Note III (théorème 3), il s'ensuit que $u_t(T)x=0$ pour toute fonction $x(s)$ qui s'annule en dehors de l'intervalle $0\leqq s\leqq t$, donc par exemple pour la fonction caractéristique de cet intervalle. Ainsi, pour $t>0$, $u_t(T)$ n'a pas d'inverse.

3. Les classes H/E, $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$ etc. Règles de calcul

1. Nous sommes à même de définir notre calcul fonctionnel dans la forme générale suivante.

D é f i n i t i o n s. Soit

$$\mathsf{H}/\mathsf{E}$$

la classe des fonctions $\varphi(z)$, définies dans le disque unité ouvert D, et y admettant la représentation

$$\varphi(z) = \frac{u(z)}{v(z)} \quad \text{où} \quad u(z)\in\mathsf{H}, \quad v(z)\in\mathsf{E}. \tag{3.1}$$

De même, si T est une contraction donnée de l'espace $\mathfrak{H}$, soit

$$\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$$

la classe des fonctions admettant une représentation de type (3. 1) avec $u(z)\in\mathsf{H}_T$ et $v(z)\in\mathsf{E}_T$. Pour telle fonction $\varphi(z)=\dfrac{u(z)}{v(z)}$ nous posons

$$\varphi(T) = v(T)^{-1}u(T). \tag{3.2}$$

Les classes $\mathsf{H}/\mathsf{E}^{\text{reg}}$, $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T^{\text{reg}}$, ..., où

$$\mathsf{E}_T^{\text{reg}} = \mathsf{E}_T \cap \mathsf{E}^{\text{reg}},$$

sont définies de manière analogue. Les classes H/E et $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$ sont des *algèbres*, tandis que les classes $\mathsf{H}/\mathsf{E}^{\text{reg}}$, $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T^{\text{reg}}$ sont seulement *multiplicatives*.

T h é o r è m e 6. *La définition de $\varphi(T)$ pour $\varphi\in\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$, donnée par la formule* (3. 2), *ne dépend pas du choix particulier des fonctions u, v dans la représentation* (3. 1). *$\varphi(T)$ est une transformation linéaire fermée, à domaine $\mathfrak{D}_{\varphi(T)}$ dense dans $\mathfrak{H}$. Elle permute à T et à toute transformation linéaire bornée S qui permute à T, c'est-à-dire que*

$$TS=ST \quad \textit{entraîne} \quad \varphi(T)S \supseteqq S\varphi(T);$$

en particulier on a

(3. 3) $\qquad v(T)^{-1}\, u(T) \supseteqq u(T)\, v(T)^{-1}$ *pour* $u \in \mathsf{H}_T,\ v \in \mathsf{E}_T$.

Pour T normale cette définition de $\varphi(T)$ est compatible avec celle moyennant la décomposition spectrale de T.

Les règles de calcul suivantes sont valables:

(i) $(c\varphi)(T) = c\varphi(T)$ *pour* $c \neq 0$.

(ii) $(\varphi_1 + \varphi_2)(T) \supseteqq \varphi_1(T) + \varphi_2(T)$; *il y a égalité par exemple si*

$$\mathfrak{D}_{\varphi_2(T)} \supseteqq \mathfrak{D}_{(\varphi_1+\varphi_2)(T)},$$

donc en particulier si $\varphi_2 \in \mathsf{H}_T$.

(iii) $(\varphi_1\varphi_2)(T) \supseteqq \varphi_1(T)\varphi_2(T)$; *il y a égalité par exemple si*

$$\mathfrak{D}_{\varphi_2(T)} \supseteqq \mathfrak{D}_{(\varphi_1\varphi_2)(T)},$$

donc en particulier si $\varphi_2 \in \mathsf{H}_T$. *De manière plus précise,* $\varphi_1(T)\varphi_2(T)$ *est la restriction de* $(\varphi_1\varphi_2)(T)$ *à* $\mathfrak{D}_{(\varphi_1\varphi_2)(T)} \cap \mathfrak{D}_{\varphi_2(T)}$.

(iv) *Dans le cas où* φ *et* $\dfrac{1}{\varphi}$ *appartiennent simultanément à la classe* $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$, $\varphi(T)^{-1}$ *existe et on a*

$$\varphi(T)^{-1} = \frac{1}{\varphi}(T).$$

(v) *Si* $\varphi(z)$ *appartient à* $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$, $\varphi^*(z) = \overline{\varphi(\bar{z})}$ *appartient à* $\mathsf{H}_{T^*}/\mathsf{E}_{T^*}$ *et on a*

$$\varphi(T)^* \subseteqq \varphi^*(T^*).$$

(vi) *Soient les fonctions* u, v, w *telles que*

$$w \in \mathsf{H}_T, \quad |w(z)| \leqq 1 \text{ dans } D, \quad m(\overset{-1}{w}(C)) = 0,$$

$$u \in \mathsf{H},\ E_T(C_{u\circ w}) = O,\ E_T(\overset{-1}{w}(C_u)) = O,$$

$$v \in \mathsf{E},\ E_T(C^0_{v\circ w}) = O,\ E_T(\overset{-1}{w}(C^0_v)) = O.\ ^{16})$$

Dans ce cas on a pour $\varphi(z) = \dfrac{u(z)}{v(z)}$:

$$\varphi \in \mathsf{H}_{T'}/\mathsf{E}_{T'}, \quad \varphi\circ w \in \mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T \quad \text{et} \quad \varphi(T') = \varphi\circ w(T)$$

où

$$T' = w(T) \quad (\|T'\| \leqq 1).$$

---

[16]) Donc les valeurs limite

$$\begin{matrix} u(w(e^{i\theta})) = \lim u(rw(e^{i\theta})), & u\circ w(e^{i\theta}) = \lim u(w(re^{i\theta})), \\ v(w(e^{i\theta})) = \lim v(rw(e^{i\theta})), & v\circ w(e^{i\theta}) = \lim v(w(re^{i\theta})) \end{matrix} \qquad (r \to 1-0)$$

existent et les deux dernières sont différentes de 0, presque partout par rapport à la mesure spectrale $E_T(\cdot)$.

(vii) *Pour* $\varphi \in \mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$, *le spectre de* $S=\varphi(T)$ *est compris dans* $\overline{\varphi(D)}$, *adhérence de l'ensemble des valeurs de la fonction* $\varphi(z)$ *prises dans* D. *Pour toute fonction* $u(s)$, *holomorphe dans un domaine de Cauchy*[17]) *contenant* $\overline{\varphi(D)}$ *et le point à l'infini dans son intérieur,* $u\circ\varphi(z)=u(\varphi(z))$ *appartient à* H_T *et on a*

$$u\circ\varphi(T)=u^{\mathsf{R}}(S)$$

où $u^{\mathsf{R}}(S)$ *désigne la transformation qui correspond à la transformation fermée* S *au sens du calcul fonctionnel de Riesz—Dunford—Taylor* [19].

Démonstration. Soient

$$\varphi(z)=\frac{u(z)}{v(z)},\quad \varphi(z)=\frac{u'(z)}{v'(z)}$$

deux représentations de la même fonction $\varphi(z)$, de type (3. 1), avec

$$u,u'\in\mathsf{H}_T;\quad v,v'\in\mathsf{E}_T.$$

On a alors

$$u(z)v'(z)=u'(z)v(z);$$

en vertu de la propriété multiplicative du calcul fonctionnel pour la classe H_T cela entraîne

$$u(T)v'(T)=v(T)u'(T),$$

d'où

$$v(T)^{-1}u(T)=v(T)^{-1}v'(T)^{-1}v'(T)u(T)=v'(T)^{-1}v(T)^{-1}u(T)v'(T)=$$
$$=v'(T)^{-1}v(T)^{-1}v(T)u'(T)=v'(T)^{-1}u'(T);$$

la définition donnée $\varphi(T)$ est donc univoque.

Posons pour abréger $u(T)=U$, $v(T)=V$. La transformation

$$\varphi(T)=V^{-1}U$$

est évidemment linéaire; elle est aussi fermée, parce que les hypothèses

$$h_n\in\mathfrak{D}_{\varphi(T)},\quad h_n\to h,\quad \varphi(T)h_n=V^{-1}Uh_n\to g\qquad(n\to\infty)$$

entraînent d'une part $Uh_n\to Uh$, d'autre part $Uh_n=V(V^{-1}Uh_n)\to Vg$, donc

$$Uh=Vg,$$

ce qui montre que

$$h\in\mathfrak{D}_{\varphi(T)}\quad\text{et}\quad \varphi(T)h=V^{-1}Uh=g.$$

(3. 3) s'ensuit de ce que U et V sont bornées et permutables. En effet:

$$V^{-1}U\supseteqq V^{-1}UVV^{-1}=V^{-1}VUV^{-1}=UV^{-1}.$$

Le domaine de V^{-1} est dense dans $\mathfrak{H}$ (*voir* théorème 3), donc le domaine de $\varphi(T)$ est dense aussi.

---

17) Dans le sens de A. E. Taylor [19].

Si la transformation linéaire bornée S permute à T, elle permute aux fonctions de T de la classe A et même à celles de la classe H_T, parce que ces fonctions de T proviennent des polynomes de T par des passages à la limite. Par conséquent on a

$$\varphi(T)\,S = V^{-1}US = V^{-1}SU \supseteqq V^{-1}SVV^{-1}U =$$
$$= V^{-1}VSV^{-1}U = SV^{-1}U = S\,\varphi(T),$$

c'est-à-dire que S permute aussi à $\varphi(T)$.

Dans le cas où T est une contraction normale, $T=\int z\,dK_z$, ses fonctions $u(T)$, $v(T)$ peuvent être calculées moyennant la décomposition spectrale (*voir* théorème 1(iv)), d'où

$$\varphi(T) = v(T)^{-1}\,u(T) = \left[\int v(z)\,dK_z\right]^{-1}\cdot\int u(z)\,dK_z =$$
$$= \int \frac{1}{v(z)}\,dK_z \cdot \int u(z)\,dK_z = \int \frac{u(z)}{v(z)}\,dK_z = \int \varphi(z)\,dK_z.$$

Les règles de calcul (i)—(iv) s'obtiennent aisément. (i) est manifeste. Pour obtenir (ii) et (iii) envisageons deux fonctions,

$$\varphi_i(z) = \frac{u_i(z)}{v_i(z)} \quad (i=1,2), \quad \text{avec} \quad u_i \in \mathsf{H}_T,\ v_i \in \mathsf{E}_T,$$

et posons pour abréger $U_i = u_i(T)$, $V_i = v_i(T)$. Puisque

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{u_1v_2 + u_2v_1}{v_1v_2}, \quad \varphi_1\varphi_2 = \frac{u_1u_2}{v_1v_2},$$

on a par définition

$$(\varphi_1+\varphi_2)(T) = V_1^{-1}\,V_2^{-1}\,(U_1V_2 + U_2V_1), \quad (\varphi_1\varphi_1)(T) = V_1^{-1}\,V_2^{-1}\,U_1U_2.$$

Faisant usage de (3. 3) on obtient

$$(\varphi_1+\varphi_2)(T) \supseteqq V_1^{-1}\,V_2^{-1}\,U_1V_2 + V_2^{-1}\,V_1^{-1}\,U_2V_1 \supseteqq$$
$$\supseteqq V_1^{-1}\,U_1V_2^{-1}\,V_2 + V_2^{-1}\,U_2V_1^{-1}\,V_1 = \varphi_1(T) + \varphi_2(T).$$

Par la même raison

$$\varphi_1(T) + \varphi_2(T) = [(\varphi_1+\varphi_2) - \varphi_2](T) + \varphi_2(T) \supseteqq [(\varphi_1+\varphi_2)(T) - \varphi_2(T)] + \varphi_2(T).$$

Dans le cas où $\mathfrak{D}_{\varphi_2(T)} \supseteqq \mathfrak{D}_{(\varphi_1+\varphi_2)(T)}$ il en résulte

$$\varphi_1(T) + \varphi_2(T) \supseteqq (\varphi_1+\varphi_2)(T),$$

donc, vu que l'inclusion opposée est toujours valable, on a dans ce cas

$$\varphi_1(T) + \varphi_2(T) = (\varphi_1+\varphi_2)(T).$$

De (3. 3) il s'ensuit aussi

$$(\varphi_1\varphi_2)(T) = V_1^{-1}\,V_2^{-1}\,U_1U_2 \supseteqq V_1^{-1}\,U_1V_2^{-1}\,U_2 = \varphi_1(T)\,\varphi_2(T).$$

L'inclusion

$$\mathfrak{D}_{\varphi_1(T)\varphi_2(T)} \subseteqq \mathfrak{D}_{(\varphi_1\varphi_2)(T)} \cap \mathfrak{D}_{\varphi_2(T)}$$

est alors manifeste. Pour démontrer l'assertion plus précise dans (iii) il ne reste donc qu'à prouver l'inclusion opposée, c'est-à-dire que

$$h \in \mathfrak{D}_{(\varphi_1\varphi_2)(T)} \cap \mathfrak{D}_{\varphi_2(T)} \quad \text{entraîne} \quad h \in \mathfrak{D}_{\varphi_1(T)\varphi_2(T)}.$$

Or cela découle de ce que

$$V_1 \cdot (\varphi_1\varphi_2)(T)\,h = V_1 V_1^{-1} V_2^{-1} U_1 U_2 h = V_2^{-1} U_1 U_2 h =$$
$$= V_2^{-1} U_1 V_2 \varphi_2(T)\,h = V_2^{-1} V_2 U_1 \varphi_2(T)\,h = U_1 \varphi_2(T) h;$$

en effet cette relation entraîne

$$\varphi_1(T)\,\varphi_2(T)\,h = V_1^{-1} U_1 \varphi_2(T)\,h = (\varphi_1\varphi_2)(T)\,h.$$

De cette façon on a établi (ii) et (iii).

(iv) dérive de la proposition plus précise dans (iii) si l'on l'applique au couple $\varphi, \dfrac{1}{\varphi}$ dans l'un ordre ou l'autre, en remarquant que $\left(\varphi \dfrac{1}{\varphi}\right)(T) = \left(\dfrac{1}{\varphi}\,\varphi\right)(T) = 1(T) = I$.

Ad (v): Lorsque $\varphi(z) = u(z)/v(z)$, on a évidemment $\varphi^*(z) = u^*(z)/v^*(z)$ et par conséquent

$$\varphi^*(T^*) = v^*(T^*)^{-1}\,u^*(T^*) = v(T)^{*-1}\,u(T)^* = [v(T)^{-1}]^*\,u(T)^* =$$
$$= [u(T)\,v(T)^{-1}]^* \supseteqq \varphi(T)^*,\text{[18]}$$

parce que (3. 3) entraîne

$$[u(T)\,v(T)^{-1}]^* \supseteqq [v(T)^{-1}\,u(T)]^*.$$

Ad (vi): En appliquant théorème 1(v) et théorème 4(ii) on obtient que $u \in \mathsf{H}_{T'}$, $v \in \mathsf{E}_{T'}$, $u \circ w \in \mathsf{H}_T$, $v \circ w \in \mathsf{E}_T$, et

$$u(T') = u \circ w(T), \quad v(T') = v \circ w(T).$$

Puisque

$$\varphi = \frac{u}{v}, \quad \varphi \circ w = \frac{u \circ w}{v \circ w},$$

on en déduit que $\varphi \in \mathsf{H}_{T'}/\mathsf{E}_{T'}$, $\varphi \circ w \in \mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$ et

$$\varphi(T') = v(T')^{-1}\,u(T') = [v \circ w(T)]^{-1}\,[u \circ w(T)] = \varphi \circ w(T).$$

Ad (vii): Soit ζ un point à distance positive de l'ensemble des valeurs de $\varphi(z)$ prises dans D; $\varphi(z) = \dfrac{u(z)}{v(z)}$, $u \in \mathsf{H}_T$, $v \in \mathsf{E}_T$. La fonction

$$r_\zeta(z) = \frac{1}{\zeta - \varphi(z)}$$

---

[18]) On fait usage ici de ce que pour A bornée $(AB)^* = B^*A^*$; *cf.* [15], p. 29.

est holomorphe et bornée dans D, et $r_\zeta(e^{i\theta})$ existe en tous les points où $u(e^{i\theta})$ et $v(e^{i\theta})$ existent et $v(e^{i\theta}) \neq 0$, donc presque partout par rapport à $E_T(\cdot)$. Cela veut dire que $r_\zeta(z) \in \mathsf{H}_T$. Par (iv) on a

$$r_\zeta(T) = [\zeta I - \varphi(T)]^{-1}$$

et cette transformation est bornée. Donc ζ appartient à l'ensemble résolvant de $\varphi(T)$. Le reste de la proposition peut être démontré tout comme dans le cas des fonctions $\varphi(z)$ bornées (*voir* [17], théorème 2).

2. De ces raisonnements il ressort qu'il est important de savoir dans quelles conditions y a-t-il égalité dans la relation (3. 3)? Nous allons en établir une condition suffisante.

Théorème 7. *Supposons que les fonctions $u(z)$, $v(z)$ sont définies et continues dans le disque fermé unité $\overline{D}$ et n'ont pas de zéros en commun dans $\overline{D}$. De plus soit $u \in \mathsf{H}$ et $v \in \mathsf{E}_T$.*[19])

On a alors

$$v(T)^{-1}\, u(T) = u(T)\, v(T)^{-1} \tag{3. 4}$$

et, pour $\varphi = \dfrac{u}{v}$,

$$\varphi(T)^* = \varphi^*(T^*). \tag{3. 5}$$

Démonstration. Les fonctions $u(z)$, $v(z)$ sont continues dans $\overline{D}$, holomorphes dans D, et n'ont pas de zéros en commun dans $\overline{D}$. Ces conditions entraînent qu'il existe deux fonctions, $a(z)$ et $b(z)$, continues dans $\overline{D}$ et holomorphes dans D, telles que

$$a(z)\, u(z) + b(z)\, v(z) = 1;$$

voir p. ex. Carleson [2]. En posant, pour simplifier l'écriture, $a(T) = A$, $u(T) = U$ etc., on aura alors

$$AU + BV = I.$$

Faisant usage de cette relation et de la relation

$$A\, V^{-1} \subseteqq V^{-1} A,$$

valable d'après (3. 3), on obtient

$$V^{-1} U = (AU + BV)\, V^{-1} U = UAV^{-1} U + BVV^{-1} U \subseteqq$$

$$\subseteqq UV^{-1} AU + BU = U(V^{-1} AU + B) = UV^{-1}(AU + VB) = UV^{-1},$$

ce qui, comparé à la relation

$$V^{-1} U \supseteqq U\, V^{-1},$$

valable d'après (3. 3), fournit

$$V^{-1} U = UV^{-1},$$

donc (3. 4).

[19]) Puisque $u(z)$ est continue dans $\overline{D}$, on a $u \in \mathsf{H}_T$ pour toute contraction T.

Pour obtenir (3. 5) on n'a qu'à répéter l'argument dans la démonstration de l'assertion (v) du théorème 6, faisant usage cette fois-ci de l'égalité (3. 4) au lieu de l'inclusion (3. 3).

Corollaire. *Si* $\varphi_i(z)=\frac{u_i(z)}{v_i(z)}$ $(i=1, 2)$, *où* $u_i \in \mathsf{H}_T$, $v_i \in \mathsf{E}_T$, *et le couple* u_1, v_2 *vérifie les hypothèses du théorème* 7, *on a*

$$(\varphi_1 \varphi_2)(T)=\varphi_1(T)\cdot\varphi_2(T).$$

Démonstration. Puisque $v_2(T)^{-1}u_1(T)=u_1(T)\,v_2(T)^{-1}$, on a en effet

$$(\varphi_1\varphi_2)(T)=v_1(T)^{-1}\,v_2(T)^{-1}\,u_1(T)\,u_2(T)=v_1(T)^{-1}\,u_1(T)\,v_2(T)^{-1}\,u_2(T)=$$
$$=\varphi_1(T)\cdot\varphi_2(T).$$

4. Représentation de $\varphi(T)$ comme limite de $\varphi_r(T)$

Dans le § 1 on a défini les fonctions de la contraction T pour la classe H_T à partir de la classe A, notamment par un passage à la limite forte:

$$u_r(T)\to u(T) \qquad (r\to 1).$$

Or, pour une fonction $\varphi(z)$ quelconque, holomorphe dans D, la fonction

$$\varphi_r(z)=\varphi(rz) \qquad (0<r<1)$$

appartient à la classe A, donc $\varphi_r(T)$ a un sens et on peut se demander si l'on peut arriver à $\varphi(T)$ par un passage à la limite analogue, à partir de $\varphi_r(T)$, et cela pour toutes les fonctions $\varphi(z)$ appartenant à la classe $\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$, où du moins à une sous-classe de celle-ci. C'est ce que nous allons rechercher dans ce paragraphe.

Théorème 8. (i) *Soit T une contraction de l'espace $\mathfrak{H}$ et soit* $\varphi(z)=\frac{u(z)}{v(z)}\in$ $\in \mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T$. *Supposons que pour un* $h\in\mathfrak{H}$ *on ait*

$$\sup_{0<r<1}\|\varphi_r(T)h\|<\infty. \tag{4. 1}$$

Dans ce cas h appartient à $\mathfrak{D}_{\varphi(T)}$ *et on a pour* $r\to 1$

$$\varphi_r(T)h\rightharpoonup\varphi(T)h \quad \text{(convergence faible).}$$

(ii) *Dans le cas particulier où les fonctions $u(z)$, $v(z)$ sont continues dans le disque fermé $\overline{D}$, n'ayant pas de zéros en commun dans $\overline{D}$, et si de plus* $u\in\mathsf{H}$, $v\in\mathsf{E}_T^{\text{reg}}$, *le domaine de $\varphi(T)$ est constitué précisément de ceux éléments $h\in\mathfrak{H}$ pour lesquels la condition* (4. 1) *est vérifiée, et pour ces éléments h on a même*

$$\varphi_r(T)h\to\varphi(T)h \qquad \text{(convergence forte).}$$

Démonstration. *Ad* (i): Soit $\varphi(z)=\frac{u(z)}{v(z)}$ et envisageons une suite $r_n\to 1$. Grâce à l'hypothèse (4. 1) on peut tirer de cette suite une suite partielle

$\{\varrho_n\}$ pour laquelle $g_n = \varphi_{\varrho_n}(T)h$ converge faiblement; désignons cette limite faible par g.

Montrons que

$$(4.2) \qquad v_{\varrho_n}(T)g_n \rightharpoonup v(T)g.$$

En effet, pour $f \in \mathfrak{H}$ quelconque on a

$$(v_{\varrho_n}(T)g_n - v(T)g, f) = (v(T)(g_n - g) + (v_{\varrho_n}(T) - v(T))g_n, f) =$$
$$= (g_n - g, v(T)^*f) + (g_n, v_{\varrho_n}(T)^*f - v(T)^*f) \to 0$$

parce que

$$v_{\varrho_n}(T)^* = v^*_{\varrho_n}(T^*) \to v^*(T^*) = v(T)^*.$$

D'autre part on a

$$(4.3) \qquad v_{\varrho_n}(T)g_n = v_{\varrho_n}(T)\varphi_{\varrho_n}(T)h = u_{\varrho_n}(T)h \to u(T)h;$$

comparé à (4.2) cela donne

$$v(T)g = u(T)h, \text{ donc } h \in \mathfrak{D}_{\varphi(T)}, \quad \varphi(T)h = v(T)^{-1}u(T)h = g.$$

Nous avons ainsi démontré que $h \in \mathfrak{D}_{\varphi(T)}$ et que toute suite $r_n \to 1$ contient une suite partielle $\varrho_n \to 1$ pour laquelle

$$\varphi_{\varrho_n}(T)h \rightharpoonup \varphi(T)h \qquad (n \to \infty).$$

De ce résultat il s'ensuit que

$$\varphi_r(T)h \rightharpoonup \varphi(T)h \qquad (r \to 1).$$

En effet, en cas contraire il y aurait un $f \in \mathfrak{H}$ et une suite $r_n \to 1$ tels que

$$|(\varphi_{r_n}(T)h - \varphi(T)h, f)| \geqq \varepsilon > 0.$$

Cela contredirait l'existence d'une suite partielle $\{\varrho_n\}$ de $\{r_n\}$ pour laquelle

$$\varphi_{\varrho_n}(T)h \rightharpoonup \varphi(T)h.$$

Cela achève la démonstration de (i).

Ad (ii): De l'hypothèse $v(z) \in \mathsf{E}_T^{\text{reg}}$ il s'ensuit que la fonction

$$w(r; z) = \frac{v(z)}{v(rz)}$$

appartient, pour toute valeur fixée du paramètre r $(0 < r < 1)$, à la classe H_T, de plus qu'elle est bornée par une constante indépendante de r et que $w(r; e^{i\theta}) \to 1$ en tous les points $e^{i\theta} \notin C_v^0$, c'est-à-dire presque partout par rapport à la mesure spectrale $\mathsf{E}_T(\cdot)$, lorsque $r \to 1$. Cela entraîne

$$v_r(T)^{-1}v(T) = w(r; T) \to I \quad (r \to 1),$$

en vertu du théorème 1 (iii).

D'autre part, les autres hypothèses sur les fonctions $u(z)$ et $v(z)$ entraînent, en vertu du théorème 7,

$$\varphi(T) = u(T)v(T)^{-1},$$

d'où il s'ensuit que tout élément $h \in \mathfrak{D}_{\varphi(T)}$ est de la forme

$$h = v(T)g.$$

Par conséquent on a

$$\varphi_r(T)h = v_r(T)^{-1}u_r(T)h = v_r(T)^{-1}u_r(T)v(T)g = v_r(T)^{-1}v(T)u_r(T)g = w(r;T)u_r(T)g \to$$
$$\to u(T)g = u(T)v(T)^{-1}h = \varphi(T)h$$

lorsque $r \to 1$.

Cela achève la démonstration.

5. Fonctions limitées par un secteur

En vue d'applications ultérieures nous envisagerons dans ce paragraphe des fonctions $\varphi(z)$ dont les valeurs sont comprises dans un certain secteur du plan des nombres complexes, d'ouverture au plus égale à $\frac{\pi}{2}$.

Nous commençons par des fonctions de la classe simple A.

Théorème 9. *Soit* $\varphi(z) \in \mathrm{A}$ *et telle que*

(5. 1) $$|\arg \varphi(z)| \leqq \alpha \frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad |z| \leqq 1,$$

où

$$0 \leqq \alpha \leqq 1.$$

On a alors pour toute contraction T *de l'espace* $\mathfrak{H}$ *et pour tout* $h \in \mathfrak{H}$:

(5. 2) $$|\arg(\varphi(T)h, h)| \leqq \alpha \frac{\pi}{2}.$$

Si de plus

(5. 3) $$0 \leqq \alpha < \frac{1}{2},$$

les inégalités suivantes sont valables:

(i) $\mathrm{Re}(\varphi(T)h, \varphi(T)^*h) \geqq \cos \alpha\pi \cdot \max\{\|\varphi(T)h\|^2, \|\varphi(T)^*h\|^2\}$,

(ii) $\|\varphi(T)h\| \geqq \cos \alpha\pi \cdot \|\varphi(T)^*h\|, \quad \|\varphi(T)^*h\| \geqq \cos \alpha\pi \cdot \|\varphi(T)h\|$,

(iii) $\mathrm{Re}(\varphi(T)h, [\mathrm{Re}\, \varphi(T)]h) \geqq \cos^2 \frac{\alpha\pi}{2} \cdot \|\varphi(T)h\|^2$,

(iv) $\dfrac{\cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{\cos \alpha\pi} \cdot \|\varphi(T)h\| \geqq \|[\mathrm{Re}\, \varphi(T)]h\| \geqq \cos^2 \frac{\alpha\pi}{2} \cdot \|\varphi(T)h\|$,

(v) $\|[\mathrm{Im}\, \varphi(T)]h\| \leqq \mathrm{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \cdot \|[\mathrm{Re}\, \varphi(T)]h\|$, *où*

$$\operatorname{Re}\varphi(T)=\frac{1}{2}[\varphi(T)+\varphi(T)^*], \qquad \operatorname{Im}\varphi(T)=\frac{1}{2i}[\varphi(T)-\varphi(T)^*].$$

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de (1. 4) on a

$$\varphi(T)=\mathrm{pr}\ \varphi(U_T),$$

d'où l'on obtient

$$|\arg(\varphi(T)h, h)|=|\arg(\varphi(U_T)h, h)|=\left|\arg\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})\ d(E_{T,\theta}h, h)\right|\leqq$$

$$\leqq\max_\theta|\arg\varphi(e^{i\theta})|\leqq\alpha\frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire (5. 2).

Faisons l'hypothèse (5. 3). De (5. 1) il s'ensuit

$$|\arg[\varphi(z)]^2|\leqq\alpha\pi<\frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\operatorname{Re}[\varphi(z)]^2\geqq\cos\alpha\pi\cdot|\varphi(z)|^2$$

et par conséquent

$$\operatorname{Re}(\varphi(T)h, \varphi(T)^*h)=\operatorname{Re}(\varphi(T)^2h, h)=\operatorname{Re}(\varphi(U_T)^2h, h)=$$

$$=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}[\varphi(e^{i\theta})]^2\,d(E_{T,\theta}h, h)\geqq\cos\alpha\pi\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{i\theta})|^2\,d(E_{T,\theta}h, h)=$$

$$=\begin{cases}\cos\alpha\pi\cdot\|\varphi(U_T)h\|^2\geqq\cos\alpha\pi\cdot\|\varphi(T)h\|^2,\\ \cos\alpha\pi\cdot\|\varphi(U_T)^*h\|^2\geqq\cos\alpha\pi\cdot\|\varphi(T)^*h\|^2;\end{cases}$$

on a fait usage ici des relations

$$\varphi(T)^2=\mathrm{pr}\ \varphi(U_T)^2, \quad \varphi(T)^*=\mathrm{pr}\ \varphi(U_T)^*,$$

provenant de ce que $T^n=\mathrm{pr}\ U_T^n$ $(n=0, 1, \ldots)$. Nous avons ainsi démontré (i). La constante $\cos\alpha\pi$ est la meilleure possible, ce qu'on voit par l'exemple $\varphi(z)\equiv e^{\frac{i\alpha\pi}{2}}$.

Les autres inégalités dérivent de (i) comme il suit.

(ii) s'obtient de (i) par l'inégalité de Schwarz:

$$\operatorname{Re}(\varphi(T)h, \varphi(T)^*h)\leqq\|\varphi(T)h\|\cdot\|\varphi(T)^*h\|.$$

(iii) résulte immédiatement:

$$\operatorname{Re}(\varphi(T)h, [\operatorname{Re}\varphi(T)]h)=\frac{1}{2}\|\varphi(T)h\|^2+\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\varphi(T)h, \varphi(T)^*h)\geqq$$

$$\geqq\frac{1}{2}(1+\cos\alpha\pi)\cdot\|\varphi(T)h\|^2=\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}\cdot\|\varphi(T)h\|^2.$$

La seconde inégalité (iv) découle de (iii) par l'inégalité de Schwarz. La première inégalité (iv) résulte de la première inégalité (ii):

$$\|[\operatorname{Re}\varphi(T)]h\| \leqq \frac{1}{2}[\|\varphi(T)h\| + \|\varphi(T)^*h\|] \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha\pi}\right)\cdot\|\varphi(T)h\| = \frac{\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}}{\cos\alpha\pi}\cdot\|\varphi(T)h\|.$$

Finalement, (v) dérive de (i) de la manière suivante. Par (i)

$$2\operatorname{Re}\big(\varphi(T)h, \varphi(T)^*h\big) \geqq \cos\alpha\pi\cdot[\|\varphi(T)h\|^2 + \|\varphi(T)^*h\|^2];$$

comme

$$\cos\alpha\pi = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha\pi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha\pi}{2}},$$

on obtient par un raisonnement évident

$$\|\varphi(T)h\|^2 - 2\operatorname{Re}\big(\varphi(T)h, \varphi(T)^*h\big) + \|\varphi(T)^*h\|^2 \leqq$$

$$\leqq \operatorname{tg}^2\frac{\alpha\pi}{2}[\|\varphi(T)h\|^2 + 2\operatorname{Re}\big(\varphi(T)h, \varphi(T)^*h\big) + \|\varphi(T)^*h\|^2],$$

ce qui fournit (v).

Théorème 9^{bis}. *Soit* $\varphi(z) = \dfrac{u(z)}{v(z)}$ *comme dans le théorème* 8 (ii), *c'est-à-dire que* $u(z)$ *et* $v(z)$ *soient continues dans* $\bar{D}$, *sans zéros en commun, et* $u \in \mathsf{H}$, $v \in \mathsf{E}_T^{\text{reg}}$. *Supposons de plus que*

$$|\arg\varphi(z)| \leqq \frac{\alpha\pi}{2} \quad \textit{pour} \quad |z| < 1$$

où

$$0 \leqq \alpha \leqq 1.$$

L'inégalité (5.2) *est alors valable pour* $\varphi(T)$. *Si de plus*

$$0 \leqq \alpha < \frac{1}{2},$$

les transformations $\varphi(T)$, $\varphi(T)^*$, *et par conséquent aussi les transformations*

$$\operatorname{Re}\varphi(T) = \frac{1}{2}[\varphi(T) + \varphi(T)^*] \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im}\varphi(T) = \frac{1}{2i}[\varphi(T) - \varphi(T)^*],$$

ont le même domaine $\mathfrak{D}$, *et les inégalités* (i) — (v) *du théorème* 9 *restent valables pour tout* $h \in \mathfrak{D}$. *De plus,* Re $\varphi(T)$ *est une transformation autoadjointe positive.*

Démonstration. La fonction $\varphi_r(z)=\varphi(rz)$ appartient à la classe A pour tout r fixé, $0<r<1$, donc on peut appliquer le théorème 9 à $\varphi_r(T)$. Puisque

$$\varphi(T)=\lim_{r\to 1}\varphi_r(T)$$

en vertu du théorème 8 (ii), l'inégalité (5. 2) sera valable aussi pour $\varphi(T)$ et $h\in\mathfrak{D}_{\varphi(T)}$. En vertu du même théorème 8, $\mathfrak{D}_{\varphi(T)}$ est constitué des éléments h pour lesquels

$$\sup_r\|\varphi_r(T)h\|<\infty. \tag{5. 4}$$

De même, $\mathfrak{D}_{\varphi(T)^*}$ est constitué des éléments h pour lesquels

$$\sup_r\|\varphi_r(T)^*h\|<\infty, \tag{5. 5}$$

parce que $\varphi_r(T)^*=\varphi_r^*(T^*)$ et, en vertu du théorème 7, $\varphi(T)^*=\varphi^*(T^*)$. Or les conditions (5. 4), (5. 5) sont équivalentes en vertu des inégalités

$$\|\varphi_r(T)h\|\geqq\cos\alpha\pi\cdot\|\varphi_r(T)^*h\|,\quad \|\varphi_r(T)^*h\|\geqq\cos\alpha\pi\cdot\|\varphi_r(T)h\|.$$

Donc $\mathfrak{D}_{\varphi(T)}=\mathfrak{D}_{\varphi(T)^*}$, et comme pour un élément h de ce domaine commun $\mathfrak{D}$

$$\varphi(T)h=\lim_{r\to 1}\varphi_r(T)h,$$

$$\varphi(T)^*h=\varphi^*(T^*)h=\lim_{r\to 1}\varphi_r^*(T^*)h=\lim_{r\to 1}\varphi_r(T)^*h,$$

les inégalités (i)—(v) du théorème 9 seront valables aussi dans le cas limite $r=1$.

D'après (5. 2) on a

$$\big(\operatorname{Re}\varphi(T)h,\, h\big)=\operatorname{Re}\big(\varphi(T)h,\, h\big)\geqq 0\quad \text{pour}\quad h\in\mathfrak{D},$$

donc $\operatorname{Re}\varphi(T)$ est une transformation symétrique positive. Pour démontrer qu'elle est autoadjointe il suffit donc de prouver que

$$\big(I+\operatorname{Re}\varphi(T)\big)\mathfrak{D}=\mathfrak{H}.$$[20]

Or on a par l'inégalité (v) et par la positivité de $\operatorname{Re}\varphi(T)$:

$$\|\operatorname{Im}\varphi(T)h\|\leqq c\|(I+\operatorname{Re}\varphi(T)h\|\quad \text{où}\quad c=\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}<1;$$

par conséquent il existe une transformation linéaire bornée B, qu'on peut supposer définie partout dans $\mathfrak{H}$, telle que

$$\operatorname{Im}\varphi(T)=B[I+\operatorname{Re}\varphi(T)]\quad \text{et}\quad \|B\|\leqq c.$$

Par conséquent

$$I+\varphi(T)=I+\operatorname{Re}\varphi(T)+i\operatorname{Im}\varphi(T)=(I+iB)\big(I+\operatorname{Re}\varphi(T)\big).$$

Or $\big(I+\varphi(T)\big)\mathfrak{D}=\mathfrak{H}$, parce que -1 n'appartient pas au spectre de $\varphi(T)$ (*voir* théo-

[20]) Nous empruntons un raisonnement à l'article [8] de KATO.

rème 6 (vii)), et $I+iB$ est un automorphisme de $\mathfrak{H}$ puisque $\|iB\|<1$. Il en résulte que

$$(I+\mathrm{Re}\,\varphi(T))\mathfrak{D}=(I+iB)^{-1}(I+\varphi(T))\mathfrak{D}=(I+iB)^{-1}\mathfrak{H}=\mathfrak{H},$$

ce qui achève la démonstration.

6. Calcul fonctionnel pour les transformations accrétives maximum. Puissances d'ordre fractionnaire

1. Dans ce paragraphe nous envisagerons les transformations linéaires A de l'espace $\mathfrak{H}$ qui sont reliées par les formules cayleyennes réciproques

$$A=(I-T)^{-1}(I+T), \qquad T=(A-I)(A+I)^{-1}, \tag{6. 1}$$

aux contractions T de $\mathfrak{H}$ telles que 1 n'est pas une valeur propre de T. Ces transformations A sont *fermées*, de domaine $\mathfrak{D}_A$ *dense* dans $\mathfrak{H}$, et peuvent être caractérisées par chacune des propriétés suivantes[21]):

(*a*) $-A$ est la *génératrice infinitésimale* d'un semi-groupe continu $\{T_s\}_{s\geqq 0}$ de contractions de $\mathfrak{H}$.

(*b*) A est fermée, de domaine $\mathfrak{D}_A$ dense dans $\mathfrak{H}$; A et A^* sont *accrétives.*[22])

(*c*) A est accrétive et n'admet pas de prolongement propre accrétif.

Nous ne nous reporterons pas dans la suite à ces propriétés, tout ce qui nous sera nécessaire étant la relation (6. 1) entre A et sa transformée cayleyenne T; mais en vue de leur propriété (*c*) nous appellerons ces transformations A: *accrétives maximum.*

Remarquons que si A est accrétive maximum ayant la transformée cayleyenne T, A^* est aussi accrétive maximum et sa transformée cayleyenne est égale à T^*.

Observons de plus qu'une transformation normale A (bornée ou non) est accrétive maximum si, et seulement si son spectre est situé dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, s\geqq 0$ des nombres complexes s.

Envisageons l'application

$$z\to s=\frac{1+z}{1-z}\equiv\omega(z), \qquad s\to z=\frac{s-1}{s+1},$$

du disque unité $D=\{z: |z|<1\}$ sur le demi-plan de droite

$$S=\{s: \mathrm{Re}\, s>0\}.$$

Toute fonction $f(s)$, définie et holomorphe dans le demi-plan S, engendre par cette application une fonction définie et holomorphe dans le disque D, notamment la fonction

$$f\circ\omega(z)=f\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

---

21) Pour (*a*) et (*c*) *voir* [16], [17] ou [12]: (*b*) peut être démontrée de manière analogue.

22) Une transformation linéaire A sera appelée *accrétive* si

$$\mathrm{Re}(Ah, h)\geqq 0 \text{ pour tout } h\in\mathfrak{D}_A,$$

terminologie proposée par FRIEDRICHS [6], p. 337.

Soit A une transformation accrétive maximum et soit T sa transformée cayleyenne (6. 1). Nous *définissons* les fonctions de A par la formule

$$f(A)=f\circ\omega(T), \tag{6. 2}$$

pour toute fonction $f(s)$ dans S, pour laquelle $f\circ\omega(T)$ se trouve définie, c'est-à-dire pour laquelle

$$f\circ\omega\in \mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T.$$

De cette façon, le calcul fonctionnel que nous venons de développer pour les contractions donne naissance à un calcul fonctionnel pour les transformations accrétives maximum.

T n'ayant pas la valeur propre 1, il en est de même pour sa dilatation unitaire minimum U_T (*voir* [17], théorème 1) et par conséquent $\mathsf{E}_T(\{1\})=O$. La classe H_T comprend donc toutes les fonctions $u(z)\in\mathsf{H}$ qui sont continues dans $\bar{D}-\{1\}$, et la classe E_T comprend toutes les fonctions $v(z)\in\mathsf{E}$ qui sont continues et différentes de 0 dans $\bar{D}-\{1\}$. Comme l'application en question applique $\bar{D}-\{1\}$ sur le demi-plan $\bar{S}=\{s\colon \operatorname{Re} s\geqq 0\}$ (le point $s=\infty$ non compris), on voit que la classe des fonctions admises $f(s)$ dans S comprend en particulier toutes les fonctions qui sont continues et bornées dans $\bar{S}$, et holomorphes dans S. De cette façon, notre calcul fonctionnel $f(s)\to f(A)$ embrasse ceux développés dans les articles [5] et [10] où l'on n'a envisagé que telles fonctions „régulières". Observons qu'on a en particulier

$$f(A)=cI \quad \text{pour} \quad f(s)\equiv c \quad \text{(constante)},$$

parce que $f\circ\omega(z)\equiv c$ dans D.

2. Envisageons la fonction

$$f(s)\equiv s^{\alpha} \text{ [23]}$$

où l'exposant α est réel non-négatif. On a

$$f\circ\omega(z)\equiv\omega^{\alpha}(z)=\frac{u^{\alpha}(z)}{v^{\alpha}(z)}$$

où

$$u^{\alpha}(z)\equiv(1+z)^{\alpha},\qquad v^{\alpha}(z)\equiv(1-z)^{\alpha}.$$

Ces fonctions u^{α}, v^{α} sont continues dans $\bar{D}$, holomorphes dans D, de plus v^{α} appartient à la classe E^{reg} (*voir* théorème 5) et ne s'annule qu'au point $z=1$, donc

$$\omega^{\alpha}\in\mathsf{H}_T/\mathsf{E}_T^{\text{reg}};$$

par conséquent $f(A)$ a un sens,

$$f(A)=\omega^{\alpha}(T)=v^{\alpha}(T)^{-1}u^{\alpha}(T).$$

Pour $f(A)$ on employera la notation A^{α}, ce qui sera légitimée dès que nous montrons que

$$A^0=I,\quad A^1=A,\quad A^{\alpha+\beta}=A^{\alpha}A^{\beta}\quad (\text{pour } \alpha,\beta\geqq 0).$$

[23] Pour ζ avec $\operatorname{Re}\zeta\geqq 0$ on entendra par ζ^{α} toujours la valeur $e^{\alpha\log\zeta}$ où l'on choisit pour $\log\zeta$ la détermination pour laquelle

$$|\operatorname{Im}[\log\zeta]|\leqq\frac{\pi}{2}.$$

Or $A^0=I$ parce que $\omega^0(z)=1$; puis

$$A^1=\omega^1(T)=v^1(T)^{-1}u^1(T)=(I-T)^{-1}(I+T)=A;$$

finalement

$$A^{\alpha+\beta}=\omega^{\alpha+\beta}(T)=(\omega^\alpha\cdot\omega^\beta)(T)=\omega^\alpha(T)\cdot\omega^\beta(T)=A^\alpha A^\beta$$

en vertu du corollaire au théorème 7, vu que $u^\alpha(z)$ et $v^\beta(z)$ sont continues dans $\bar{D}$, ne s'annulent pas simultanément dans $\bar{D}$, et $u^\alpha(z)\in \mathsf{H}_T$, $v^\beta(z)\in \mathsf{E}_T^{\mathrm{reg}}$.

Comme on a évidemment $(\omega^\alpha)^*=\omega^\alpha$, il s'ensuit du théorème 7 que

$$(A^\alpha)^*=[\omega^\alpha(T)]^*=\omega^\alpha(T^*)=(A^*)^\alpha.$$

On a $\operatorname{Re}\omega(z)\geqq 0$ et par conséquent

$$|\arg\omega^\alpha(z)|\leqq\frac{\alpha\pi}{2}$$

dans D, donc on peut appliquer le théorème 9$^{\text{bis}}$ à la transformation $A^\alpha=\omega^\alpha(T)$ et son adjointe $(A^\alpha)^*$.

Envisageons alors les trois fonctions

$$u^\beta(z)=(1+z)^\beta,\quad v^\beta(z)=(1-z)^\beta,\quad w_\alpha(z)=\frac{u^\alpha(z)-v^\alpha(z)}{u^\alpha(z)+v^\alpha(z)}$$

où

$$0\leqq\beta\quad\text{et}\quad 0\leqq\alpha\leqq 1;$$

et montrons que ces fonctions vérifient les hypothèses du théorème 6 (vi).

En effet, comme $u^\alpha(z), v^\alpha(z)$ ne s'annulent pas simultanément et leurs valeurs dans $\bar{D}$ sont comprises dans le secteur

$$\left\{\zeta:\ |\arg\zeta|\leqq\frac{\alpha\pi}{2}\right\},$$

il s'ensuit dans le cas $0\leqq\alpha<1$ que $u^\alpha(u)+v^\alpha(z)$ ne s'annule pas dans $\bar{D}$ et par conséquent $w_\alpha(z)$ est continue dans $\bar{D}$ et holomorphe dans D; on voit aisément aussi que

$$|w_\alpha(z)|<1\quad\text{dans}\quad\bar{D}$$

sauf le point $z=1$ où $w_\alpha(z)=1$ et le point $z=-1$ où $w_\alpha(z)=-1$. Par conséquent $m(\overset{-1}{w}(C))=m(\{\pm 1\})=0$. Les mêmes faits subsistent aussi dans le cas $\alpha=1$ puisque $w_1(z)\equiv z$. D'autre part, les ensembles

$$\overset{-1}{w}_\alpha(C_{u^\beta}),\quad C_{u^\beta\circ w_\alpha},\quad \overset{-1}{w}_\alpha(C^0_{v^\beta}),\quad C^0_{v^\beta\circ w_\alpha}$$

sont de mesure O par rapport à la mesure spectrale $E_T(\cdot)$, les deux premiers de ces ensembles étant vides et les deux autres se réduisant au seul point $z=1$.

On peut donc appliquer le théorème 6 (vi). Il résulte que

$$T_\alpha=w_\alpha(T)$$

est une contraction, $\omega^\beta(T_\alpha)$ et $\omega^\beta\circ w_\alpha(T)$ existent, et

$$\omega^\beta(T_\alpha)=\omega^\beta\circ w_\alpha(T). \tag{6. 3}$$

Or on a

$$\omega^{\beta} \circ w_{\alpha}(z) = \left(\frac{1+w_{\alpha}(z)}{1-w_{\alpha}(z)}\right)^{\beta} = \left(\frac{u^{\alpha}(z)}{v^{\alpha}(z)}\right)^{\beta} = \omega^{\alpha\beta}(z),$$

donc (6. 3) veut dire

$$\omega^{\beta}(T_{\alpha}) = A^{\alpha\beta}. \tag{6.4}$$

Pour $\beta = 1$ cette relation prend la forme

$$A^{\alpha} = \omega^{1}(T_{\alpha}) = v^{1}(T_{\alpha})^{-1} u^{1}(T_{\alpha}) = (I - T_{\alpha})^{-1}(I + T_{\alpha}),$$

ce qui montre que la transformation A^{α} est aussi accrétive maximum, sa transformée cayleyenne étant égale à T_{α}. On a alors $f(A^{\alpha}) = f \circ \omega(T_{\alpha})$ pour toutes les fonctions $f(s)$ pour lesquelles $f \circ \omega(T_{\alpha})$ a un sens, en particulier $(A^{\alpha})^{\beta} = \omega^{\beta}(T_{\alpha})$. Donc (6. 4) veut dire

$$(A^{\alpha})^{\beta} = A^{\alpha\beta} \quad (0 \leqq \alpha \leqq 1;\ \beta \geqq 0).\text{[24]} \tag{6.5}$$

Soit, pour $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $\{T_{\alpha,t}\}_{t \geqq 0}$ le semi-groupe de contractions dont la génératrice infinitésimale est $-A^{\alpha}$, donc la cogénératrice infinitésimale est $T_{\alpha} = w_{\alpha}(T)$; dans la Note III [17] on a démontré que

$$T_{\alpha,t} = u_t(T_{\alpha}) = u_t(w_{\alpha}(T))$$

où

$$u_t(z) = \exp\left(-t\,\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Cette fonction étant bornée dans D en module (par 1) et continue dans $\overline{D} - \{1\}$, on peut appliquer le théorème 6 (vi) sur les fonctions composées; il en résulte

$$T_{\alpha,t} = e_{\alpha,t}(T) \tag{6.6}$$

où

$$e_{\alpha,t}(z) = u_t \circ w_{\alpha}(z) = \exp\left(-t\,\frac{1+w_{\alpha}(z)}{1-w_{\alpha}(z)}\right) = \exp\left[-t\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}\right] = e^{-ts^{\alpha}}. \tag{6.7}$$

Lorsque $0 \leqq \alpha < 1$, le semi-groupe $\{T_{\alpha,t}\}$ peut être prolongé des valeurs réelles non-négatives du paramètre t aux valeurs complexes de t situées dans le secteur

$$\overline{S}_{1-\alpha} = \left\{t : |\arg t| \leqq (1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right\},$$

et cela de sorte que ce prolongement soit aussi un semi-groupe de contractions et de plus $T_{\alpha,t}$ dépende, pour α fixé, analytiquement de t dans le secteur ouvert

$$S_{1-\alpha} = \left\{t : |\arg t| < (1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right\}.$$

---

[24]) La restriction $\alpha \leqq 1$ est motivée par le fait que A^{α} n'est pas nécessairement une transformation accrétive maximum pour $\alpha > 1$.

En effet, comme

$$|\arg(ts^\alpha)| \leqq |\arg t| + \alpha |\arg s| \leqq \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\mathrm{Re}(ts^\alpha) \geqq 0 \quad \text{pour} \quad t \in \bar{S}_{1-\alpha}, \; s \in S = S_1,$$

la fonction $e_{\alpha,t}(z)$, définie par la même formule (6. 7) pour $t \in \bar{S}_{1-\alpha}$, $z \in D$, appartient à la classe H_T, de plus

$$|e_{\alpha,t}(z)| \leqq 1 \quad \text{dans} \quad D,$$

$$e_{\alpha,0}(z) = 1, \quad e_{\alpha,t_1+t_2}(z) = e_{\alpha,t_1}(z) \cdot e_{\alpha,t_2}(z).$$

Par conséquent, les transformations correspondantes

$$T_{\alpha,t} = e_{\alpha,t}(T)$$

sont des contractions et forment un semi-groupe:

$$T_{\alpha,0} = I, \quad T_{\alpha,t_1+t_2} = T_{\alpha,t_1} \cdot T_{\alpha,t_2} \qquad (t_1, t_2 \in \bar{S}_{1-\alpha}).$$

Pour montrer que ce semi-groupe est analytique, fixons un point $t_0 > 0$ et un autre, t, situé dans le cercle maximum autour de t_0, contenu dans le secteur $\bar{S}_{1-\alpha}$, c'est-à-dire tel que

$$|t - t_0| < \varrho_0 = t_0 \cos \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Envisageons le développement

$$e^{-ts^\alpha} = e^{-(t-t_0)s^\alpha} \cdot e^{-t_0 s^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t-t_0}{\varrho_0} \right)^n b_n(s) \quad (s \in S) \tag{6. 8}$$

où

$$b_n(s) = \frac{(-1)^n}{n!} (\varrho_0 s^\alpha)^n e^{-t_0 s^\alpha};$$

on a

$$|b_n(s)| \leqq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} |\varrho_0 s^\alpha|^m \exp(-t_0 \mathrm{Re}\, s^\alpha) = \exp[\varrho_0 |s^\alpha| - t_0 \,\mathrm{Re}\, s^\alpha] \leqq 1$$

parce que

$$\mathrm{Re}\, s^\alpha \geqq |s^\alpha| \cos \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{pour} \quad s \in \bar{S}.$$

Le développement (6. 8) est donc uniformément convergente dans $\bar{S}$, d'où l'on conclut, en passant aux transformations linéaires correspondantes,

$$T_{\alpha,t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{\varrho_0^n} B_n \tag{6. 9}$$

où

$$B_n = b_n(A) = b_n \circ \omega(T), \quad \|B_n\| \leqq 1.$$

Cela achève la démonstration du fait que $T_{\alpha,t}$ est fonction analytique de t dans $S_{1-\alpha}$.

Résumons nos résultats:

Théorème 10. *Soit A une transformation accrétive maximum de l'espace $\mathfrak{H}$ et soit $A^\alpha (\alpha \geqq 0)$ la transformation qui correspond à la fonction s^α au sens du calcul fonctionnel $f(s) \to f(A)$, défini au début de ce paragraphe. A^α est une transformation linéaire fermée, à domaine $\mathfrak{D}_\alpha$ dense dans $\mathfrak{H}$, et on a*

$$A^0 = I; \quad A^1 = A; \quad A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta \quad (\alpha, \beta \geqq 0);$$
$$(A^\alpha)^* = (A^*)^\alpha \qquad (\alpha \geqq 0).$$

Pour $0 \leqq \alpha \leqq 1$ la transformation A^α est accrétive maximum elle aussi et on a

$$(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta} \qquad (\beta \geqq 0);$$

de plus

$$|\arg(A^\alpha h, h)| \leqq \frac{\alpha\pi}{2} \quad \textit{pour} \quad h \in \mathfrak{D}_\alpha.$$

Pour $0 \leqq \alpha < 1$ le semi-groupe de contractions $\{T_{\alpha,t}\}_{t \geqq 0}$, engendré par la génératrice infinitésimale $-A^\alpha$, peut être étendu aux valeurs complexes du paramètre t situées dans le secteur $|\arg t| \leqq (1-\alpha)\frac{\pi}{2}$, de sorte que $\{T_{\alpha,t}\}$ soit un semi-groupe continu dans ce secteur, analytique dans l'intérieur du secteur.

Pour $0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}$ les transformations A^α, $A^{\alpha *}$, et par conséquent aussi

$$\operatorname{Re} A^\alpha = \frac{1}{2}(A^\alpha + A^{\alpha *}) \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im} A^\alpha = \frac{1}{2i}(A^\alpha - A^{\alpha *}),$$

ont toutes le même domaine $\mathfrak{D}_\alpha$; $\operatorname{Re} A^\alpha$ est positive autoadjointe; de plus les inégalités suivantes sont valables pour $h \in \mathfrak{D}_\alpha$:

(i) $\operatorname{Re}(A^\alpha h, A^{\alpha *} h) \geqq \cos \alpha\pi \cdot \max\{\|A^\alpha h\|^2, \|A^{\alpha *} h\|^2\}$;

(ii) $\|A^\alpha h\| \geqq \cos \alpha\pi \cdot \|A^{\alpha *} h\|, \quad \|A^{\alpha *} h\| \geqq \cos \alpha\pi \cdot \|A^\alpha h\|$;

(iii) $\operatorname{Re}\big(A^\alpha h, [\operatorname{Re} A^\alpha] h\big) \geqq \cos^2 \frac{\alpha\pi}{2} \cdot \|A^\alpha h\|^2$;

(iv) $\dfrac{\cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{\cos \alpha\pi} \|A^\alpha h\| \geqq \|[\operatorname{Re} A^\alpha] h\| \geqq \cos^2 \frac{\alpha\pi}{2} \cdot \|A^\alpha h\|$;

(v) $\|[\operatorname{Im} A^\alpha] h\| \leqq \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \cdot \|[\operatorname{Re} A^\alpha] h\|$.

3. Puissances d'ordre fractionnaire des transformations linéaires A d'un espace de Hilbert ou de Banach, telles que $-A$ soit la génératrice infinitésimale d'un semi-groupe de contractions, ont été définies par plusieurs auteurs, utilisant de différentes méthodes. La définition proposée par Bochner [2] et Phillips [11], à laquelle les autres sont équivalentes (*voir* [20] et [7]), introduit A^α $(0<\alpha<1)$ moyennant le semi-groupe à un paramètre

$$T_{\alpha,t}=e^{-tA^\alpha}\quad (t\geqq 0).^{25)}$$

Notamment, on définit

$$T_{\alpha,t}=\int_0^\infty T_\tau\, d\gamma_{\alpha,t}(\tau) \tag{6.10}$$

où

$$T_\tau=e^{-\tau A}$$

et la mesure $d\gamma_{\alpha,t}(\tau)\geqq 0$ est définie par l'intégrale de Laplace

$$e^{-ts^\alpha}=\int_0^\infty e^{-\tau s}\, d\gamma_{\alpha,t}(\tau)\qquad (t\geqq 0,\ \operatorname{Re} s\geqq 0,\ 0<\alpha<1).$$

Pour établir l'équivalence de notre définition de A^α aux précédentes, il suffit donc de montrer que le semi-groupe $\{T_{\alpha,t}\}$ tel que nous l'avons obtenu par notre calcul fonctionnel, notamment par la formule (6. 6), vérifie la formule (6. 10), du moins dans le sens faible de l'intégrale. Or la fonction $e_{\alpha,t}(z)$ (*voir* (6. 7)) appartient à H_T, par conséquent

$$T_{\alpha,t}=e_{\alpha,t}(T)=\operatorname{pr} e_{\alpha,t}(U_T),$$

d'où il s'ensuit pour $h\in\mathfrak{H}$:

$$(T_{\alpha,t}h,h)=(e_{\alpha,t}(U_T)h,h)=\int_0^{2\pi} e_{\alpha,t}(e^{i\theta})\, d(E_{T,\theta}h,h)=$$

$$=\int_0^{2\pi}\exp\left[-t\left(i\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\right]d(E_{T,\theta}h,h)=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^\infty \exp\left[-\tau\left(i\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)\right]d\gamma_{\alpha,t}(\tau)\right\}d(E_{T,\theta}h,h)=$$

$$=\int_0^\infty\left\{\int_0^{2\pi}\exp\left(-\tau\, i\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)d(E_{T,\theta}h,h)\right\}d\gamma_{\alpha,t}(\tau)=$$

$$=\int_0^\infty (e_{1,\tau}(U_T)h,h)\, d\gamma_{\alpha,t}(\tau)=\int_0^\infty (T_\tau h,h)\, d\gamma_{\alpha,t}(\tau),$$

l'inversion de l'ordre des intégrations étant permise parce que la mesure $d\gamma_{\alpha,t}(\tau)\cdot d(E_{T,\theta}h,h)$ (dans $0\leqq\tau<\infty$, $0\leqq\theta\leqq 2\pi$) est finie et la fonction $\exp\left(-i\tau\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right)$ est borélienne et bornée. Cela prouve (6. 10) et l'équivalence de notre définition de A^α aux autres, précédentes, dans le cas de l'espace de Hilbert.

[25]) Cette notation veut indiquer ici seulement que $\{T_{\alpha,t}\}$ est le semi-groupe dont la génératrice infinitésimale est égale à $-A^\alpha$.

L'analyticité de $\{T_{\alpha,t}\}$ dans un secteur a été démontrée par YOSIDA [20]; le fait que A^{α} et $A^{\alpha *}$ ont le même domaine $\mathfrak{D}_{\alpha}$ pour $0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}$ et vérifient les inégalités du théorème 10, a été démontré (partiellement avec d'autres facteurs constants) par KATO [8], [9].

Notre méthode de traiter du problème des puissances fractionnaires a l'avantage de placer ce problème dans le cadre d'un calcul fonctionnel plus général et fournit même quelques résultats plus précis, comme par exemple les formules $A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha}A^{\beta}$ et $(A^{\alpha})^{\beta} = A^{\alpha\beta}$ y compris l'égalité des domaines des transformations en question.

Ouvrages cités

[1] A. BEURLING, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, **81** (1949), 239–255.

[2] S. BOCHNER, Diffusion equations and stochastic processes, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **35** (1949), 368–370.

[3] L. CARLESON, On bounded analytic functions and closure problems, *Arkiv för Mat.*, **2** (1952), 283–291.

[4] P. FATOU, Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.*, **30** (1906), 335–400.

[5] C. FOIAŞ, On Hille's spectral theory and operational calculus for semi-groups of operators in Hilbert space, *Compositio Math.*, **14** (1959), 71–73.

[6] K. O. FRIEDRICHS, Symmetric positive linear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 333–418.

[7] T. KATO, Note on fractional powers of linear operators, *Proc. Japan Acad.*, **36** (1960), 94–96.

[8] ——— Fractional powers of dissipative operators, *J. Math. Soc. Japan*, **13** (1961), 246–274.

[9] ——— A generalization of the Heinz inequality (to be published).

[10] H. LANGER, Ein Zerspaltungssatz für Operatoren im Hilbertraum, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), 441–445.

[11] R. S. PHILLIPS, On the generation of semi-groups of linear operators, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 343–369.

[12] ——— Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959), 193–254.

[13] F. RIESZ, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Math. Zeitschr.*, **18** (1923), 87–95.

[14] G. SZEGŐ, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Math. Ann.*, **84** (1921), 232–244.

[15] B. SZ.-NAGY, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (Berlin, 1942).

[16] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 1–15.

[17] B. SZ.-NAGY et C. FOIAŞ, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 26–46.

[18] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 251–259.

[19] A. E. TAYLOR, Spectral theory of closed distributive operators, *Acta Math.*, **84** (1951), 189–224.

[20] K. YOSIDA, Fractional powers of infinitesimal generators and the analyticity of the semi-groups generated by them, *Proc. Japan Acad.*, **36** (1960), 86–89.

(Reçu le 15 novembre 1961)

Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen

Von N. ITÔ in Nagoya (Japan) und J. SZÉP in Budapest (Ungarn)

Der Begriff des Quasinormalteilers ist von O. ORE eingeführt worden. Er nennt eine Untergruppe Q der Gruppe G einen Quasinormalteiler, wenn Q mit jeder Untergruppe von G vertauschbar ist (nicht notwendig elementweise, sondern im Ganzen). Über die Quasinormalteiler sind schon viele Ergebnisse bekannt, z. B. die Gruppen, deren sämtliche Untergruppen Quasinormalteiler sind, sind wohlbekannt (IWASAWA). ORE hat bewiesen, daß jeder maximale Quasinormalteiler gleichzeitig ein Normalteiler in der gegebenen Gruppe ist. Von anderen speziellen Quasinormalteilern wissen wir aber wenig. Im folgenden werden wir einige ziemlich allgemeine Sätze für die Quasinormalteiler in endlichen Gruppen beweisen.

Satz 1. *Es sei Q $(\neq 1, G)$ ein Quasinormalteiler, aber kein Normalteiler einer endlichen Gruppe G. Bezeichnet dann N den maximalen Normalteiler von G in Q, so gilt folgendes:*

a) *Q/N $(\neq 1)$ ist nilpotent,*

b) *G enthält zu jedem Primteiler p der Ordnung von Q/N einen Normalteiler vom Index p.*

Der Spezialfall $N=1$ dieses Satzes lautet folgendermaßen:

Satz 1'. *Enthält ein Quasinormalteiler Q $(\neq 1, G)$ einer endlichen Gruppe G keinen echten Normalteiler von G, so gilt folgendes:*

a) *Q ist nilpotent,*

b) *G enthält zu jedem Primteiler p der Ordnung von Q einen Normalteiler vom Index p.*

Zuerst beweisen wir Satz 1'.

Beweis der Behauptung 1'b). Wir dürfen annehmen, daß G keine p-Gruppe ist.

Es sei die Ordnung von G und Q gleich $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0)$ bzw. $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$, wobei $p_1, p_2, \dots, p_n$ verschiedene Primzahlen sind. Man kann leicht einsehen, daß $\beta_i < \alpha_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ gilt. Ist nämlich $\beta_i = \alpha_i$ für ein i und bezeichnet $G(p_i)$ eine p_i-Sylowuntergruppe von G, so folgt aus $QG(p_i) = G(p_i)Q$ (mit Rücksicht auf die Ordnung von G) $G(p_i) \subseteqq Q$, also enthält Q alle p_i-Sylowuntergruppen von G. In diesem Fall enthält Q einen echten Normalteiler von G, was ein Widerspruch ist.

Es gilt also $\beta_i < \alpha_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Es sei $\beta_i > 0$ für ein festes i. Es sei weiterhin $G(p_k)$ eine p_k-Sylowuntergruppe von G mit $k \neq i$. Wir betrachten die Untergruppe $K = QG(p_k)$ $(= G(p_k)Q)$, in welcher Gruppe die Gruppe Q wieder ein Quasinormalteiler ist und jede p_i-Sylowuntergruppe $Q(p_i)$ von Q eine Sylowuntergruppe ist. Man kann leicht (wie oben) einsehen, daß Q sämtliche p_i-Sylowuntergruppen von K enthält, also ist die durch die p_i-Sylowuntergruppen von Q erzeugte Untergruppe $\overline{Q(p_i)}$ von Q ein Normalteiler von K. Es ist klar, daß die Gruppe $(\overline{Qp_i})$ von der Wahl von $G(p_k)$ unabhängig ist, also ist $\overline{Q(p_i)}$ $(\subseteqq Q)$ ein Normalteiler in den Untergruppen $QG(p_k)$ von G $(k=1, 2, \ldots; k \neq i)$. Betrachten wir die durch die nicht zu p_i gehörenden Sylowuntergruppen von G erzeugte Untergruppe $G[p_i]$, die ein Normalteiler in G ist. $\overline{Q(p_i)} \subseteqq Q$ ist (nach der Voraussetzung) kein Normalteiler in G, also ist $G[p_i] \subset G$ (sogar auch $QG[p_i] \subset G$). Es ist evident, daß die Faktorgruppe $G/G[p_i]$ eine p_i-Gruppe ist, also enthält die Gruppe G einen Normalteiler vom Index p_i, w. z. b. w.

Korollar. *Die Ordnung jeder maximalen Untergruppe von G ist durch jede Primzahl teilbar, die ein Teiler der Ordnung von Q und zugleich ein mehrfacher Teiler der Ordnung von G ist.*

Beweis. Würde nämlich die Ordnung der maximalen Untergruppe M die Primzahl p_i mit $\alpha_i > 1, \beta_i > 0$ nicht enthalten, so wäre M eine echte Untergruppe des obigen Normalteilers von G vom Index p_i.

Bemerkung 1. Ist Q ein minimaler Quasinormalteiler in G (man nennt einen Quasinormalteiler Q von G minimal, wenn es keinen anderen Quasinormalteiler Q' mit $Q' \subset Q$ in G gibt), der kein Normalteiler ist, so enthält Q keinen Normalteiler von G, also bezieht sich die Behauptung b) insbesondere auf die minimalen Quasinormalteiler von G.

Bemerkung 2. Wir werden den folgenden Satz mehrmals benützen, der sich aus dem obigen Beweis der Behauptung 1′ b) ergibt:

Ist $\overline{Q(p_i)}$ die durch die p_i-Sylowuntergruppen von Q erzeugte Untergruppe von Q, so enthält der Normalisator von $\overline{Q(p_i)}$ sämtliche Elemente von G, deren Ordnung eine zu p_i prime Primzahlpotenz ist.

Beweis der Behauptung 1′a). Zuerst werden wir beweisen, daß Q eine auflösbare Gruppe ist. Es sei $Q = Q^{(0)} \supseteqq Q^{(1)} \supseteqq \ldots$ die abgeleitete Reihe von Q. Es gibt eine kleinste Zahl n mit $Q^{(n)} = Q^{(n+1)} = \ldots = R$. Es sei P eine beliebige Sylowuntergruppe von G. Wir zeigen, daß R ein Normalteiler in der Gruppe $PQ (= QP)$ ist. Es sei S das Erzeugnis aller Sylowuntergruppen in PQ, die eine zur Ordnung von P relativ prime Ordnungen haben. Es gilt $S \subseteqq Q$ (Bemerkung 2), und S ist ein Normalteiler in PQ. Da die Faktorgruppe PQ/S eine p-Gruppe ist, so ist $S \supseteqq R$, also ist $S^{(n)} = R$. Dann ist R ein Normalteiler von PQ. Da P beliebig ist, ist R ein Normalteiler von G, also muß (wegen der Voraussetzung) $R = 1$ sein. Es ist also Q eine auflösbare Gruppe.

Jetzt zeigen wir, daß Q eine nilpotente Gruppe ist. Es sei $G[p]$ die durch die Elemente mit zu p relativ primen Ordnungen erzeugte Untergruppe von $G(p)$ ist eine Primzahl in der Ordnung von Q). Es gilt $G[p] \subset G$, ferner ist $G[p]$ ein Normalteiler von G (Beweis der Behauptung a)). Es sei $\overline{Q(p)}$ die in Q durch die p-Sylowuntergruppen erzeugte Untergruppe. Wir werden zeigen, daß $\overline{Q(p)}$ eine p-Sylowuntergruppe von Q ist. Da p eine beliebige Primzahl der Ordnung von Q ist, so wird hierdurch der Satz bewiesen. Nehmen wir an, daß $\overline{Q(p)}$ keine p-Sylowuntergruppe von Q ist. Da Q (also auch $\overline{Q(p)}$) auflösbar ist, gilt die Faktorisation $\overline{Q(p)}=HQ(p)$, $(|H|, |Q(p)|)=1$ (nach dem bekannten Satz von P. Hall), wo $Q(p)$ eine p-Sylowuntergruppe von Q ist. Der Normalisator von $\overline{Q(p)}$ enthält die Gruppe $G[p]$ (Bemerkung 2), also enthält Q jede bezüglich $G[p]$ Konjugierte von H. Es gilt aber $xHx^{-1}\subset Q$ für jedes Element $x\in G$ mit p-Potenzordnung. Es sei nämlich $\overline{Q[p]}$ die durch die Elemente mit zu p primer Ordnung erzeugte Untergruppe von Q. Der Normalisator von $\overline{Q[p]}$ enthält die p-Sylowuntergruppen von G (Bemerkung 2). Da $\overline{Q[p]}\supseteqq H$ ist, so enthält Q sämtliche Konjugierten von H (in G). Dann hätte Q einen echten Normalteiler von G, was ein Widerspruch ist. Damit ist der Satz 1′ bewiesen.

Korollar 1. *Jede Sylowuntergruppe von Q ist ein Quasinormalteiler von G.*

Beweis. Es genügt zu zeigen (nach der Bemerkung 2), daß für jede p-Untergruppe Z von G $ZQ(p)=Q(p)Z$ gilt. Dies folgt aus einem Satz von Wielandt [1]).

Korollar 2. *Aus Korollar 1 folgt, daß jeder minimaler Quasinormalteiler von G (der kein Normalteiler ist) eine p-Gruppe ist.*

Beweis des Satzes 1. Ist N ein maximaler Normalteiler von G, der eine echte Untergruppe von Q ist, so hat die Faktorgruppe G/N den Quasinormalteiler Q/N, der wegen der Maximalität von N keinen Normalteiler von G/N enthält. Wenden wir jetzt Satz 1′ für die Gruppe G/N mit dem Quasinormalteiler Q/N an, so gewinnen wir die Behauptungen des Satzes 1.

Korollar. *Ist der Normalisator von Q in G auflösbar, so ist auch die Gruppe G auflösbar.*

(Eingegangen am 14. April 1960)

[1]) H. Wielandt, Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen, *Math. Zeitschrift,* **55** (1951), 1–7, Satz 8.

Über im Endomorphismenringe einer abelschen Gruppe definierte unendliche Reihen und Produkte

Von I. GY. MAURER in Cluj (Rumänien)

1. Einleitung

Es sei G eine beliebige Abelsche Gruppe, $E(G)$ der volle Endomorphismenring von G. Die Elemente von G werden mit lateinischen, die Endomorphismen mit griechischen Buchstaben bezeichnet und die letzteren werden als rechtsseitige Operatoren verwendet.

Wir haben in einer früheren Arbeit [2] in dem Raum $E(G)$ eine Topologie auf Grund des folgendermaßen definierten Grenzbegriffs eingeführt:

Die unendliche Folge $\{\alpha_r\}$ von Endomorphismen $\alpha_r \in E(G)$ hat den Grenzwert $\alpha \in E(G)$, wenn für jedes Element $x \in G$ eine natürliche Zahl R_x existiert, so daß für alle $r > R_x$ die Gleichheit $x\alpha_r = x\alpha$ gilt. In diesem Falle heißt die Folge $\{\alpha_r\}$ konvergent und wir schreiben hierfür $\alpha_r \to \alpha$, sonst ist sie divergent. Der Endomorphismenring $E(G)$ ist also ein topologischer Ring bezüglich dieses Grenzbegriffs [2].

Wir bemerken, daß auch T. SZELE eine Topologie in $E(G)$ eingeführt hat [4]. Die von uns betrachtete Topologie ist „feiner" im folgenden Sinne: die abgeschlossene Hülle einer beliebigen Untermenge M von $E(G)$ in der Topologie von T. SZELE enthält als Untermenge die abgeschlossene Hülle von M in der von uns eingeführten Topologie. SZELE hat auch „unendliche Systeme" mit einer beliebigen Indexmenge statt unendlicher Folgen betrachtet und ihre Konvergenz untersucht. Im Falle der unendlichen Folgen — die spezielle „unendliche Systeme" sind — stimmt die Definition der Konvergenz von T. SZELE mit der obigen Definition der Konvergenz überein. Man kann also das folgende Ergebnis von T. SZELE gebrauchen:

Der topologische Ring $E(G)$ ist komplett. Dies bedeutet (in unserem Falle), daß wenn es für ein beliebiges Element $x \in G$ eine natürliche Zahl R_x derart gibt, daß $x(\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2}) = 0$ für alle $r_1, r_2 > R_x$ gilt, dann ist die Folge $\{\alpha_r\}$ konvergent. Es ist leicht zu sehen, daß jede konvergente Folge diesem Kriterium von CAUCHY genügt. Dieses ist also die notwendige und hinreichende Bedingung der Konvergenz der in $E(G)$ definierten Folgen.

Wir werden uns in der vorliegenden Arbeit mit unendlichen Reihen und unendlichen Produkten von Endomorphismen beschäftigen. T. SZELE hat sich auch mit der „Summabilität" der von ihm betrachteten „unendlichen Systemen" von Endomorphismen beschäftigt. Er hat ein Kriterium dafür angegeben, daß ein solches „unendliches System" summabel sei, das den Satz 1 aus dem § 2 dieser Arbeit als

Spezialfall enthält. Doch werden wir den Satz beweisen, denn im Falle der von uns betrachteten unendlichen Reihen ergibt sich das Konvergenzkriterium sehr leicht.

Ähnliche Untersuchungen haben L. ONOFRI [3] und J. GÁSPÁR [1] gemacht, die sich mit unendlichen Folgen und Produkten von unendlichen Permutationen und unendlichen monomialen Substitutionen beschäftigt haben.

2. Unendliche Reihen

Es sei die Folge $\{\sigma_r\}$ mit Hilfe der Folge $\{\alpha_r\}$ nach der Vorschrift $\sigma_r = \sigma_{r-1} + \alpha_{r-1}$ $(r=1, 2, \dots)$ gebildet, wobei $\sigma_0=0$ ist. Wir nennen die Folge $\{\sigma_r\}$ die unendliche Reihe der Endomorphismen α_r und bezeichnen sie mit $\sum\limits_{r=0}^{\infty}\alpha_r$, oder kurz mit $\Sigma\alpha_r$. Die Reihe $\Sigma\alpha_r$ heißt dann und nur dann konvergent, wenn die Folge $\{\sigma_r\}$ konvergent ist. Wenn $\sigma_r \to \sigma$ dann sagen wir, daß σ die Summe der Reihe $\Sigma\alpha_r$ ist: $\sigma = \Sigma\alpha_r$. Es gilt der folgende

Satz 1. *Die Reihe $\Sigma\alpha_r$ ist dann und nur dann konvergent, wenn $\{\alpha_r\}$ eine Nullfolge ist (also, wenn $\alpha_r \to 0$).*

Beweis. Wegen der Komplettheit des Raumes $E(G)$ ist die Reihe $\Sigma\alpha_r$ dann und nur dann konvergent, wenn für ein beliebiges $x \in G$ eine natürliche Zahl R_x existiert, so daß für $r > R_x$ und $p \geqq 0$ die Gleichheit $x(\sigma_{r+p} - \sigma_r) = 0$, also

$$x(\alpha_r + \dots + \alpha_{r+p}) = 0 \tag{1}$$

gilt.

Es sei nun die Konvergenz der Reihe $\Sigma\alpha_r$ vorausgesetzt. Setzen wir in (1) $p=0$, so ergibt sich aus der Gleichheit (1), daß $x\alpha_r=0$ für alle $r > R_x$, d. h. $\alpha_r \to 0$. Die Bedingung ist also notwendig.

Umgekehrt, die Bedingung $\alpha_r \to 0$ bedeutet, daß für ein beliebiges $x \in G$ ein R_x existiert, so daß für $r > R_x$ die Gleichheit $x\alpha_r = 0$ gilt. Also gilt für $r > R_x$ und für ein beliebiges $p \geqq 0$:

$$x\alpha_r = x\alpha_{r+1} = \dots = x\alpha_{r+p} = 0.$$

Daraus folgt (1), also die Konvergenz der Reihe $\Sigma\alpha_r$.

Man kann auf Grund dieses Satzes sehr leicht auf die folgenden Eigenschaften von konvergenten Reihen schließen:

1°. *Die Konvergenz der Reihe $\Sigma\alpha_r$ ist unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder.*

Beweis. Aus der Konvergenz der Reihe $\Sigma\alpha_r$ folgt die Existenz eines R_x so, dass die Gleichheit $x\alpha_r=0$ für $r > R_x$ mit einem beliebigen $x \in G$ gilt. Es sei $\Sigma\alpha_r'$ eine beliebige Umordnung der Reihe $\Sigma\alpha_r$, ferner seien $r_0, \dots, r_{R_x}$ die Indizes der Elemente $\alpha_0, \dots, \alpha_{R_x}$ in der umgeordneten Reihe $\Sigma\alpha_r'$ und $R_x' = \max(r_0, \dots, r_{R_x})$. Wenn $r > R_x' (\geqq R_x)$, dann $x\alpha_r' = 0$, also $\alpha_r' \to 0$. Daraus folgt die Konvergenz der Reihe $\Sigma\alpha_r'$.

2°. *Wenn $\Sigma\alpha_r$ und $\Sigma\alpha_r'$ konvergente Reihen und σ und σ' ihre Summen sind, dann ist die Reihe $\Sigma(\alpha_r + \alpha_r')$ auch konvergent und ihre Summe ist gleich $\sigma + \sigma'$.*

Beweis. Es folgt aus der Konvergenz der Reihen $\Sigma\alpha_r$ bzw. $\Sigma\alpha'_r$, daß ein R_x bzw. R'_x existiert, so daß die Gleichheiten $x\alpha_r=0$ bzw. $x\alpha'_r=0$ $(x\in G)$ für $r>R_x$ bzw. $r>R'_x$ gelten. Es sei $r>\max(R_x, R'_x)=\overline{R}_x$. Dann gelten die Gleichheiten $x\alpha_r=0$ und $x\alpha'_r=0$ gleichzeitig. Daraus folgt $x(\alpha_r+\alpha'_r)=0$, also $\alpha_r+\alpha'_r\to 0$, d. h. die Konvergenz der Reihe $\Sigma(\alpha_r+\alpha'_r)$. Wenn wir nun die Gleichheiten

$$x(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{\overline{R}_x})=x\sigma,$$

$$x(\alpha'_0+\alpha'_1+\ldots+\alpha'_{\overline{R}_x})=x\sigma$$

addieren, so ergibt sich

$$x[(\alpha_0+\alpha'_0)+(\alpha_1+\alpha'_1)+\ldots+(\alpha_{\overline{R}_x}+\alpha'_{\overline{R}_x})]=x(\sigma+\sigma').$$

Daraus folgt der zweite Teil der Behauptung.

3°. *Wenn $\Sigma\alpha_r$ eine konvergente, $\Sigma\alpha'_r$ eine beliebige Reihe ist, dann ist $\Sigma\alpha_r\alpha'_r$ eine konvergente Reihe.*

Beweis. Nach der Annahme ist $\alpha_r\to 0$, also existiert für jedes $x\in G$ ein R_r mit $x\alpha_r=0$ für alle $r>R_x$. Dann gilt für $r>R_x$:

$$x\alpha_r\alpha'_r=(x\alpha_r)\alpha'_r=0\alpha'_r=0.$$

Es folgt $\alpha_r\alpha'_r\to 0$, also die Konvergenz der Reihe $\Sigma\alpha_r\alpha'_r$.

Wir bemerken, daß diese Eigenschaft auch in der zitierten Arbeit [4] von T. Szele enthalten ist.

Auf Grund des Satzes 1 ist die Bedingung, daß „das allgemeine Glied der Reihe gegen Null strebt", nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung der Konvergenz der Reihen. Es ist wohlbekannt, daß diese Eigenschaft z. B. in dem Körper der reellen Zahlen nicht gilt. Es scheint uns die folgende Frage interessant zu sein: welche sind diejenigen topologischen Eigenschaften eines Ringes, von denen die obige Eigenschaft der Reihen abhängt?

3. Unendliche Produkte

Es sei die Folge $\{\sigma_r\}$ mit Hilfe der Folge $\{\alpha_r\}$ nach der Vorschrift $\sigma_r=\sigma_{r-1}\cdot\alpha_{r-1}$ $(r=1, 2, \ldots)$ gebildet, wobei $\sigma_0=\varepsilon$ das Einheitselement des Ringes $E(G)$ bezeichnet. Das (unendliche) Produkt $\prod_{r=1}^{\infty}\alpha_r$ heißt dann und nur dann konvergent, wenn die Folge $\{\sigma_r\}$ konvergent ist. Wenn ferner $\sigma_r\to\sigma$, dann sagen wir, daß σ der Wert dieses Produktes ist: $\sigma=\Pi\alpha_r$.

Wir werden hier eine notwendige und hinreichende Bedingung der Konvergenz des Produktes geben.

Satz 2. *Das Produkt $\Pi\alpha_r$ ist dann und nur dann konvergent, wenn für ein beliebiges Element $x\in G$ eine natürliche Zahl R_x existiert, so daß für $r>R_x$ die folgende Gleichheit gilt:*

$$(x\sigma_{R_x})\alpha_r=x\sigma_{R_x}.$$

Beweis. Aus der Definition der Konvergenz des Produktes $\Pi\alpha_r$ — wegen der Komplettheit von $E(G)$ — folgt, daß das Produkt $\Pi\alpha_r$ dann und nur dann konvergent ist, wenn für ein beliebiges $x \in G$ eine natürliche Zahl R_x existiert, so daß für $r_1, r_2 \geqq R_x$ die Gleichheit $x(\sigma_{r_1} - \sigma_{r_2}) = 0$, d. h.

(2) $$x\sigma_{r_1} = x\sigma_{r_2}$$

gilt.

Es sei die Konvergenz des Produktes $\Pi\alpha_r$ vorausgesetzt. Wenn man r_1 und r_2 in (2) nacheinander durch $r_1 = R_x + 1$, $r_2 = R_x$; $r_1 = R_x + 2$, $r_2 = R_x + 1$; ... ersetzt und noch

$$\sigma_{R_x+p} = \sigma_{R_x+p-1} \cdot \alpha_{R_x+p} \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

beachtet, so erhält man die folgenden Gleichheiten:

$$\begin{aligned} x\sigma_{R_x+1} &= (x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+1} &&= x\sigma_{R_x}, \\ x\sigma_{R_x+2} &= (x\sigma_{R_x+1})\alpha_{R_x+2} &&= x\sigma_{R_x+1}, \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

Aus diesen ergeben sich leicht die folgenden:

$$\begin{aligned} (x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+1} &= x\sigma_{R_x} \\ (x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+2} &= x\sigma_{R_x} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Also gilt für ein beliebiges $r > R_x$ die Gleichheit $(x\sigma_{R_x})\alpha_r = \sigma_{R_x}$. Die Bedingung ist also notwendig.

Sie ist auch hinreichend. Denn seien r_1 und r_2 mit $r_1, r_2 \geqq R_x$ gegeben. Dann ist r_1 von der Gestalt $r_1 = R_x + p$ und es ist leicht zu sehen, daß

$$\begin{aligned} x\sigma_{r_1} &= (x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+1}\alpha_{R_x+2}\ldots\alpha_{R_x+p} = \\ &= [(x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+1}]\alpha_{R_x+2}\ldots\alpha_{R_x+p} = \\ &= (x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+2}\alpha_{R_x+3}\ldots\alpha_{R_x+p} = \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= [(x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+p-1}]\alpha_{R_x+p} = (x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+p} = x\sigma_{R_x}, \end{aligned}$$

d. h.

$$x\sigma_{r_1} = x\sigma_{R_x}.$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich

$$x\sigma_{r_2} = x\sigma_{R_x}.$$

Aus diesen zwei Gleichheiten folgt

$$x(\sigma_{r_1} - \sigma_{r_2}) = x\sigma_{r_1} - x\sigma_{r_2} = x\sigma_{R_x} - x\sigma_{R_x} = (x - x)\sigma_{R_x} = 0\sigma_{R_x} = 0$$

und daraus die Konvergenz des Produktes $\Pi\alpha_r$.

Literatur

[1] J. GÁSPÁR, Über unendliche Produkte gewisser verallgemeinerter unendlicher Permutationsmatrizen, *Acta Bolyaiana*, 2 (1948), 1–6.
[2] I. GY. MAURER, Despre topologizarea inelelor (Sur la topologisation des anneaux), *Studii şi Cerc. de Mat. Acad. R. P. R., fil. Cluj*, 8 (1957), 177–180.
[3] L. ONOFRI, Teoria delle sostituzioni che operano su una infinita numerabile di elementi, *Annali di Mat.*, 4 (1927), 73–106.
[4] T. SZELE, On a topology in endomorphism rings of abelian groups, *Publicationes Math. Debrecen*, 5 (1957), 1–4.

(Eingegangen am 10. Mai 1960, umgearbeitet am 12. Mai 1961)

Errata

O. STEINFELD, Verbandstheoretische Betrachtung gewisser idealtheoretischer Fragen, *Acta Sci. Math.*, 22 (1961), 136–149.

	statt:	*richtig:*
S. 136, Zeile 1	Teilringe	Linksideale
S. 139, Zeile 1	Teilringe	Linksideale
S. 139, Zeile 10	Teilgruppen mit Nullelement	Linksideale
S. 139, Zeile 6 (von unten)	wo a_ω und b Absorbenten eines gegebenen Elementes von L sind.	wo b ein Absorbent eines gegebenen Elementes von L ist und die a_ω Absorbenten von b sind.

Bibliographie

G. ALEXITS, **Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen**, p. 307, Budapest, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, *1960.*

G. ALEXITS, **Convergence Problems of Orthogonal Series**, Translated by I. FÖLDES, p. IX + 350, Budapest, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, 1961.

Over the course of the recent 50 years there has been accumulated a lot of material concerning convergence and divergence problems of particular and general orthogonal series.

The first more exhaustive account on the subject is in the book „Theorie der Orthogonalreihen" of S. KACZMARZ and H. STEINHAUS which appeared 25 years ago, and therefore does not include a series of important newer contributions, mostly by Hungarian and Russian mathematicians.

It may be found therefore a fortunate event that G. ALEXITS, a distinguished specialist in this field, has published a monographic tract on this subject. ALEXITS' monograph was published in German (1960) and in English version (1961), the latter differring only slightly from the former one. Therefore, when speaking of its contents, we may consider only the English edition.

Chapter I starts from an exposition of the fundamental facts concerning orthonormal systems such as the Riesz—Fischer theorem, completeness etc., but the main stress is laid on presenting a series of important examples of orthonormal systems, more or less to the same extent as given in the book of KACZMARZ and STEINHAUS. Some sections deal with the Haar and Rademacher systems which rightly can be considered as the most interesting among the non-classical orthonormal systems. Relatively not much room has been reserved for the Walsh system, but the reader can find a series of remarks concerning it in the following chapters. It seems, besides, that the Walsh system which shows striking analogies to the trigonometric system, would deserve in the future a separate monographic tract. The author gives a particularly detailed account on the systems of orthogonal polynomials attached to a distribution $d\mu \geqq 0$, in particular to an absolutely continuous one: $d\mu = \varrho(x)dx$. Attention should be called to the local tests for convergence of expansions corresponding to polynomial systems and to the important theorem of G. FREUD giving an estimation of the sum $p_1^2(x) + p_2^2(x) + \ldots + p_n^2(x)$, where $\{p_n(x)\}$ is the polynomial system belonging to a density function $\varrho(x)$ satisfying some rather general assumptions.

Chapter II deals with almost everywhere convergence and summability of an orthogonal series

$$(*) \qquad \sum_1^\infty c_n \varphi_n(x),$$

$\{\varphi_n(x)\}$ being an orthonormal system of general type, and

$$(**) \qquad \sum_1^\infty c_n^2 < \infty,$$

by imposing on the coefficients c_n several additional conditions. Typical is the use of conditions with factors $\gamma(n)$, i. e. replacing $(**)$ by the stronger condition

$$\sum_{n=1}^\infty c_n^2 \gamma(n) < \infty.$$

It is known e.g. that the above condition with $\gamma(n)=\log^2 n$ guarantees almost everywhere convergence (theorem of RADEMACHER and MENCHOFF) and with $\gamma(n)=(\log\log n)^2$ it guarantees almost everywhere summability $(C, 1)$ of $(*)$ (theorem of MENCHOFF and KACZMARZ). Assumption that the coefficients c_n vanish for certain n's leads to the investigation of the convergence of lacunary series for which the author presents a number of his own results.

It is evident that, when formulating sufficient conditions for convergence, we ought possibly investigate whether they are in fact indispensible or not. Attempts to answer the question to what degree the use of factors as e. g. $\gamma(n)=\log^2 n$ in the Rademacher—Menchoff theorem (or similarly in the Menchoff—Kaczmarz theorem) is essential, lead to the construction of certain orthonormal systems which serve as counterexamples. These constructions are very intricate. The author has successfully got through with the difficulties by limiting himself to the most interesting things, such as the recent counterexamples of K. TANDORI which are much stronger than the older results of MENCHOFF, partly contained already in the Kaczmarz—Steinhaus monography. Let us quote one of TANDORI's results whose full proof has been inserted in Chapter II: If $c_n \downarrow 0$ and $\sum c_n^2 \log n=\infty$, then there exists an orthonormal system in (a, b) such that the series $(*)$ divegres everywhere. Among the other convergence questions dealt with in Chapter II, we mention the problem concerning the almost everywhere convergence of the series $(*)$, in an arbitrary arrangement of its terms („essential" commutative convergence). The author gives, apart from theorems about the „essential" commutative convergence which go back to MENCHOFF and ORLICZ, and can be found also in a number of other monographs, some of his own results generalizing those of MENCHOFF.

I could hardly forbear at this point from quoting an extremely interesting result which has been obtained in 1961 by ULIANOFF and OLEVSKI and which could not have been included in ALEXITS' monograph. Any complete orthonormal system of functions can be arranged in such a way that there exists a square-integrable function whose series expansion with respect to the rearranged system be divergent almost everywhere. This seems to be the most general results presently known among the theorems concerning divergence. In the case of the trigonometric system this theorem was announced without proof by KOLMOGOROFF in 1927, and ZAHORSKI gave in the *Comptes Rendus Paris*, **251** (1960), 501—503, a sketch of its proof; it seems to me that this paper ought to be included in the Bibliography of ALEXITS' monograph.

In Chapter III the investigations on convergence and summability almost everywhere are continued by making use of the order of growth of Lebesgue functions. In case of the ordinary convergence the n-th Lebesgue function is defined as

$$L_n(x)=\int_a^b |K_n(x, t)|\, d\mu(t), \text{ where } K_n(x, t)=\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\varphi_k(t).$$

The known integral representation of partial sums of an orthogonal expansion by means of the kernels $K_n(x, t)$ explains the rôle of Lebesgue functions in the investigation of pointwise convergence. This leads in fact to the study of sequences of singular integrals, which is the subject of the last chapter of the book. It has been shown, however, in the paper of KOLMOGOROFF—SELIVERSTOFF—PLESSNER from 1925—26 that the order of increase of the sequence of Lebesgue functions yields an information on the order of increase almost everywhere of the partial sums of expansions of arbitrary square-integrable functions. Ideas contained in the papers by these authors have been developed in those by other mathematicians (as KACZMARZ, ALEXITS, SZ.-NAGY) and applied also to questions of Cesàro and Riesz summability. All fundamental results belonging to these problems are to be found in Chapter III. The possibility of applying general theorems depends upon information about the order of growth of the sequence of Lebesgue functions corresponding to several special orthonormal systems. The author gives attention to this problem and presents in his monograph some of the post-war results of the Hungarian mathematicians (G. ALEXITS, G. FREUD, K. TANDORI). They actually concern orthogonal systems of polynomials with a density function $\varrho(x)$, this being subject to some very general assumptions. ALEXITS' monograph presents still more general classes of systems, the so-called polynomial-like, introduced by him. Interesting applications of the method of estimation of the Lebesgue functions can be found in sections dealing with the so-called multiplicatively orthogonal systems (generalizing the Rademacher system and W-systems (generalizing the Walsh system). These sections give also results of the author published here for the first time.

The subject of Chapter IV are problems of convergence and summability considered from the classical point of view (pointwise resp. uniform convergence). One of the classical methods of investigation depends upon application of general convergence theorems for singular integrals.

The author presents some fundamental facts from the theory of Banach spaces and formulates in terms of singular integrals theorems on convergence and summability of orthogonal polynomial expansions for some typical classes of functions (it seems, by the way, that the Bibliography should quote also, apart from the fundamental paper by LEBESGUE from 1909, the important paper by H. HAHN). Next, in § 3, the author deals with convergence and $(C, 1)$-summability of orthogonal expansions at points of continuity for polynomial and polynomial-like systems, proving among others some generalizations of the theorem of FEJÉR due to ALEXITS and FREUD.

§ 4 is concerned with the phenomena of convergence at Lebesgue-points. Application is made of the theorem on „humpbacked majorant" due to FADDEIEFF. One of the classical methods of dealing with problems of convergence of Fourier series depends upon using approximation theorems in appropriate classes of functions. A good part of these investigations can be performed not only for the trigonometric system. A presentation of the newer results in this respect can be found in §§ 5, 6; applications are made to polynomial and polynomial-like systems. Among theorems which have been included here, and which are not being found in monographs concerning the constructive theory of functions, I would mention e. g. the theorem by B. SZ.-NAGY which supplies a lower estimation of the order of approximation by linear combinations of functions of an orthonormal system in case of typical classes of functions. The last § of this chapter deals with absolute convergence of orthogonal expansions; as well-known, this is also related to approximation problems. We find there also theorems concerning absolute convergence of multiplicatively orthogonal series.

The monograph has been written in a very clear and suggestive way; one reads it with pleasure. In every chapter numerous passages can be found which supply information on theorems not included. In several places interesting, sofar unsolved questions have been raised. Maybe remarks concerning the possibility of generalizations of some theorems to the case of more variables would be desirable.

ALEXITS' book will prove presumably a fundamental monograph for the specialists in convergence problems of orthogonal series. It will also contribute to a further development of the theory which, judging from the recent publications by the Hungarian, Russian, and Polish mathematicians, does not stop to be attractive. To the ever-widening circle of mathematicians it will provide once again a convincing illustration of the power of the Lebesgue integral. The reader will enjoy the extensive Bibliography at the end of the book. Graphic make-up of both editions is of a very high standard.

W. Orlicz (Poznań)

L. HOLZER, **Zahlentheorie.** Teil I—II (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek, 13/14), 202+126 Seiten, Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1958—1959.

Band I beginnt mit den Grundbegriffen der Zahlentheorie. Man beweist hier u. a. die Sätze von FERMAT und WILSON, die Lösbarkeit von quadratischen Kongruenzen, die Darstellbarkeit der Zahlen durch gewisse quadratische Formen usw.

Dann wird die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von vier Qadraten betrachtet und ein eleganter Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes mit Hilfe der Gaußschen Summen gegeben. (Die genauere Analyse dieser Summen folgt im Band II.)

Es folgt eine Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, der kanonischen Körperbasen und der Körperdiskriminanten. Hier finden wir den Minkowskischen Diskriminantensatz, den Begriff der Idealen, die Primidealzerlegung, die Modulbasis der Ideale und die Normen der Ideale. Am Ende des ersten Bandes befindet sich ein Beweis der Endlichkeit der Klassenzahl mit den sogenannten nichttrivialen Gitterpunkten.

Der zweite Band führt die Zahlenkörpertheorie weiter. Der erste Abschnitt bringt den modernen Existenzbeweis der Dirichletschen Grundeinheiten und die Grundbegriffe der Theorie der Relativkörper. Die Hilbertsche Theorie der Galoisschen Körper wird mit ausgiebigen Beispielen (mit dem Aufbau der Kreisteilungskörper und der relativ-zyklischen Körper) erschlossen.

Die folgenden Kapitel bringen die Bestimmung der Klassenzahl durch den Regulator; hier finden wir die Abschließung der im Teil I angekündigten Vorzeichenbestimmung der Gaußschen Summen. Danach werden die Begriffe der unendlichen Primstellen, das Einheitenhauptgeschlecht der relativ-zyklischen Körper mit der Anwendung des Reduktionsprinzips und des Isomorphiesatzes von RELLA beschrieben. (Dieser schöne Satz wird hier zum ersten Male veröffentlicht.) So gelangt man durch den Satz von MORIYA zur Herstellung der Anzahl der ambigen Idealklassen, wodurch der Satz von POLLACZEK (über regulären Primzahlen) auf sehr elegante Weise gewonnen wird.

I. Seres (Budapest)

GUSTAV DOETSCH, Introduction à l'utilisation pratique de la transformation de Laplace. Traduit de l'allemand par M. PARODI. Avec un appendice: Table de correspondences par R. HERSCHEL. VIII+198 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1959.

This book is the French translation of the German original, "Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation", and is mainly devoted to physicists, electrical engineers, who are interested in practical applications of this transformation, as an effective, though rather simple method to solve several differential equations. The book is based upon the numerous works of the author concerning the subject, but, according to the above-mentioned purpose, is somewhat different, as, in most cases, omits proofs and though the theory is explained very carefully, the treatment is, however, mainly subjected to the needs of practical applications.

Chapter 1 treats with the general definitions and some properties of the integral of Laplace:

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt.$$

Chapter 2 deals with the rules of calculations considering the above integral as a transformation. The applications of the transformation to solve ordinary differential equations, difference equations and partial differential equations, as well as integral equations, are treated in Chapters 3, 4, 5, and 6, respectively, elucidating the general problems by examples. In Chapter 7 the methods, such as the contour integration and expansion in series, are described to find the inversion function, $F(t)$, in the knowledge of $f(s)$. The asymptotic behaviour of both $f(s)$ and $F(t)$ can be found in Chapter 8, together with the application of these properties to the problem of the stability of the physical system considered. The Appendix, compiled by R. HERSCHELL, is a useful collection of the rules of operation and contains numerous pairs $(f(s), F(t))$, where the $F(t)$ are functions of different types. Some of the newly calculated pairs when $F(t)$ is a step function, or piecewise linear function, are of special interest in impulse-technics. The table also contains the solutions of some linear differential equations of order $\leqq 3$ with constant coefficients.

J. Gyulai (Szeged)

J. W. C. CASSELS, An introduction to the geometry of numbers (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 99), VIII+344 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1959.

The aim of this book is twofold. First to give an introduction to the geometry of numbers, and, on the other hand, to show the new methods and problems of the theory.

In the Prologue the author gives a brief summary of the concepts and typical problems which play a leading role in the sequel.

One of the most important concepts of the geometry of numbers, the concept of lattice, is introduced in Chapter I. A lattice is the set of all points of an n-dimensional real euclidean space which may be written in the form $x=u_1a_1+u_2a_2+\ldots+u_na_n$, where $a_1, a_2, \ldots, a$ are linearly independent vectors of the space and $u_1, u_2, \ldots u_n$ are integers. Chapter II deals with the method of reduction of an algebraic form in the sense of MINKOWSKI. We find the important convex body theorem of MINKOWSKI and its generalizations in Chapter III. Some important concepts are also introduced in this chapter (lattice constant, critical lattice, star body). The next chapter contains results on the existence of critical lattice of bounded convex sets and star bodies, besides it contains MAHLER's compactness theorem and its application to diophantine approximation. Chapter VI is devoted to the Minkowski—Hlawka theorem to estimate the lattice constant of a set, and its generalizations. The problem to estimate the number of linearly independent points of a set in common with a lattice is discussed in Chapter VIII. Previously in Chapter VII the concept of the quotient space is introduced, which plays an important role in Chapters VIII and XI, in the latter the inhomogeneous problems are discussed. Chapter IX is related with Chapter III. It deals with several necessary and sufficient conditions that a lattice be admissible for a set with special properties. In Chapter X the author defines the concept of the automorph of a point set (or a lattice) and gives several applications of this concept. An automorph is a homogeneous linear transformation w with the property $wS=S$ (or $w\Lambda=\Lambda$), where S is a point set (Λ is a lattice.)

There is a detailed bibliography at the end of the book.

Z. Papp (Szeged)

I. W. **BUSBRIDGE, The Mathematics of Radiative Transfer** (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No 50), XII+143 pages, Cambridge, University Press, 1960.

Originally, transfer theory was concerned with the transfer of radiation through the atmosphere of a star. Nowadays, its equations occur in many fields of physics, too. The first systematic treatment of it has been given in the Cambridge Tract of E. HOPF: *Mathematical Problems of Radiative Equilibrium* (1934). The subject having grown since then, a new survey became needed: this is the purpose of this book. It gives an account of some mathematical results of transfer theory, incorporating the most lasting parts of HOPF's tract. — Everywhere, language and notation of astrophysics are used, thus the starting point, the equation of transfer has not been derived rigorously; it is accepted as in astrophysics. Probabilistic tools have been avoided.

Part I (Auxiliary mathematics) begins with the introduction of the transfer equation, however, only some special types of this (of astrophysical background) are considered. They lead to integral equations such as

$$\text{(I)} \qquad I(\tau)-\frac{\omega_0}{2}\int_0^{\tau_1} I(t)E_1(|t-\tau|)\,dt=B(\tau)$$

with given function $B(\tau)$, constants ω_0, $\tau_1(0<\omega_0<\infty;\ 0<\tau_1\leqq\infty)$, and

$$E_1(t)=\int_1^\infty x^{-1}e^{-tx}dx$$

("Milne-equations"). Then tools like the "H-functions" $H(\mu)$, introduced by V. A. AMBARTSUMIAN and S. CHANDRASEKHAR, are dealt with; they are solutions of $\frac{1}{H(\mu)}=1-\mu\int_0^1\frac{\Psi(x)H(x)}{\mu+x}dx$ with given function $\Psi(x)$, $\Psi(x)\geqq 0$, $\int_0^1\Psi(x)dx\leqq\frac{1}{2}$. Instead of the equations (I) one studies as well the "generalized Milne-equations"

$$\text{(I*)} \qquad I(\tau)-\int_0^{\tau_1} I(\tau)K_1(|t-\tau|)dt=B(\tau)$$

with

$$K_1(t)=\int_1^\infty \Psi(x^{-1})x^{-1}e^{-xt}dx.$$

Part II (Milne-equations) begins with problems related in astrophysics to semi-infinite atmospheres and isotropic scattering. A chapter on iterative solutions of (I*, $\tau_1=\infty$) by the Neumann series ("N-series") opens this part. If this series converges to a solution, it will be called the N-solution of (I*, $\tau_1=\infty$). Most of this chapter — based on the book of E. HOPF — is concerned with N-solutions.

In the sequel, first a modification of the Wiener—Hopf method of solution of homogeneous equations such as the classical Milne-equation

$$F(\tau)=J(\tau)-\int_{-\infty}^{\infty} J(t)K_1(|t-\tau|)\,dt,$$

$J(\tau)=0$ for $\tau<0$, and $F(\tau)=0$ for $\tau>0$) is treated. Then the used technique is applied to the Milne-equations occurring in the book (applying H-functions). Further a technique introduced in 1942 by V. A. AMBARTSUMIAN is discussed, which differs from that of N. WIENER and E. HOPF; this consists of reducing the solution of Milne equations to that of "auxiliary equations of type (I) and (I*) where $B(\tau)$ has been replaced by $e^{-\sigma\tau}$ ($\sigma\geqq 1$). These auxiliary equations lead to those of the H-functions. This powerful technique combined with the theory of N-solutions can be applied to solve non-homogeneous Milne-equations with general $B(\tau)$. — The last chapters deal with finite atmosphere problems in case of isotropic scattering. Here the H-functions must be replaced by two functions $X(\mu)$ and $Y(\mu)$ (introduced first by S. CHANDRASEKHAR) satisfying some integral equations. Finally, problems concerning the axially symmetric case of a semi-infinite atmosphere (at an anisotropic scattering) are considered. An Appendix sums up some unsolved or incompletely solved problems. — Due to its rigorous treatment, the book will be useful also for mathematicians interested in discussing some special integral (or integro-differential) equations.

P. Medgyessy (Budapest)

HERBERT MESCHKOWSKI, **Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie,** VIII + 168 Seiten, Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1960.

Das Buch zerfällt in zwölf Kapitel. In Kapitel I sind jene zehn Probleme aufgezählt, um welche sich die Themen der weiteren Kapitel gruppieren. Es werden (meistens als Einleitung) auch viele gelöste Probleme betrachtet, der Schwerpunkt liegt jedoch an gewissen ungelösten Problemen und an solchen, die lange Zeit hindurch vergeblich bestürmt wurden, über welche es aber heute schon bekannt ist, daß sie im ursprünglichem Sinne „unlösbar" sind.

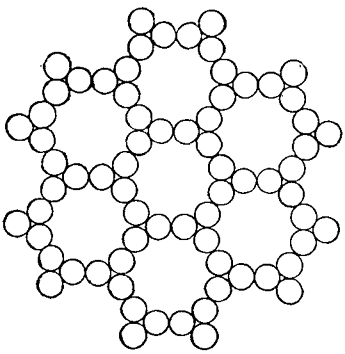

Abb. 1

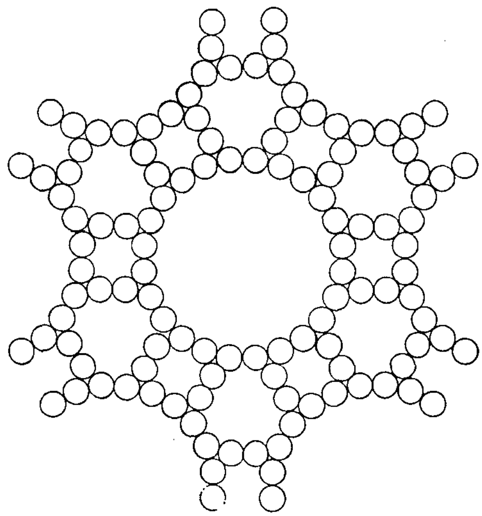

Abb. 2

Kapitel II—IV beschäftigen sich mit sogenannten Lagerungsproblemen. Hier werden Ergebnisse und Vermutungen bezüglich der dichtesten Ausfüllung bzw. dünnsten Überdeckung der Ebene und der Kugel mit kongruenten Kreisen bzw. Kugelkappen, sowie andere verwandte Probleme betrachtet. Als weiteres Problem ist die Bestimmung der dünnsten *festen* Lagerung von kongruenten Kreisen erwähnt, wo eine Lagerung von einander nicht überdeckenden Kreisen in der Ebene fest heißt, wenn jeder Kreis von mindestens drei anderen Kreisen so berührt wird, daß die Berührungspunkte auf keinem der Kreise einen abgeschlossenen Halbkreis frei lassen. Als Vermutung ist hier irrtümlicherweise ausgesprochen, daß die Lösung durch die in Abb. 1 dargestellte Konfiguration geliefert wird. In Abb. 2 geben wir eine „bessere" Lagerung, und wir halten es sogar nicht für unmöglich, daß dieses Problem in dieser Form unter die „unlösbaren" einzuteilen ist, in dem Sinne, daß es keine *dünnste* feste Lagerung gibt. — In demselben Teil befinden sich auch die analogen Probleme für den Raum.

Kapitel V enthält die Bearbeitung des noch ungelösten Lebegueschen Tafelproblems: Es ist jene ebene Figur vom kleinstmöglichen Inhalt gesucht, mit welcher man jede ebene Punktmenge vom Durchmesser 1 bedecken kann. Hier ist auch die verwandte Borsuksche Vermutung erwähnt: Jede beschränkte Punktmenge des n-dimensionalen euklidischen Raumes läßt sich in $n+1$ Teile von kleineren Durchmessern zerlegen.

In Kapitel VI behandelt der Verf. die Zerlegungsgleichheit von Polyedern auf Grund des berühmten Dehnschen Satzes.

Die Grundfrage von Kapitel VII lautet folgendermaßen: Welches ist die kleinste Anzahl inkongruenter Quadrate, in die man ein gegebenes Qadrat zerlegen kann?

Im nächsten Kapitel liest man über das „Nadel-Problem" von KAKEYA: Welcher ist der Bereich vom kleinstmöglichen Inhalt mit der Eigenschaft, daß eine Strecke der Länge 1 innerhalb dieses Bereiches so bewegt werden kann, daß ihr Richtungswinkel sich dabei um 2π ändert? Dieses Problem erwies sich „unlösbar". BESIKOWITSCH hat nämlich gezeigt, daß es Bereiche von beliebig kleinem Flächeninhalt gibt, in denen die verlangte Bewegung der „Nadel" möglich ist. Hier findet man auch interessante Probleme bezüglich Punktmengen mit ganzzahliger Entfernung.

In Kapitel IX und X werden Probleme über Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in der Ebene bzw. auf der Kugel behandelt.

Kapitel XI ist mengengeometrischen Problemen und Paradoxen der Zerlegungsgleichheit gewidmet. Von diesen erwähnen wir als typisch den folgenden Satz: Jede Kugel des dreidimensionalen Raumes ist zu zwei punktfremden Kugeln vom gleichen Radius endlich äquivalent.

Das letzte Kapitel behandelt die „methodische Bedeutung" der „unlösbaren" Probleme.

A. Heppes (Budapest)

Proceedings of symposia in applied mathematics, Volume XII. **Structure of language and its mathematical aspects.** Edited by ROMAN JAKOBSON, VI+279 pages, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1961.

Linguistic expression is a linar sequence of linguistic elements and, insofar, subject to the laws which govern linear arrangements in general. The linguist who wishes for certain reasons to make use of that property of language must again acquaint himself with the laws governing such arrangements. Hence the present work is of primary interest for linguists. But it is addressed to mathematicians with at most an amateur interest in linguistics too. The papers are written by philosophers, mathematical logicians and linguists well versed in mathematics. They show that linguists are attracted by the most various mathematical disciplines as mathematical logic, the theory of recursive functions and automata, the theory of communication and probabilistic models, the topological, algebraic and quantitative facets of mathematics. R. JAKOBSON writes about the coincidences and convergences between the latest stages of linguistic analysis and the approach to language in the mathematical theory of communication. J. LAMBEK is searching for an effective rule for distinguishing sentences from nonsentences, in which not only linguists but also mathematical logicians may be interested. N. CHOMSKY gives in his paper "Rule of Grammar" a precise formulation of the notion "structural description of a sentence", and a precise account of the manner in which structural descriptions are assigned to sentences by "grammatical rules", which has a theoretical value for modern linguistics. The paper of HASKELL B. CURRY is dealing with the formal properties of grammars revealing the close connection between mathematical logic and language referring to grammatical structure. The other papers, written by W. V. QUINE, H. PUTMAN, H. HIŻ, N. GOODMAN, Y. R. CHAO, M. EDEN, M. HALLE, R. ABERNATHY, H. G. HERZBERGER, A. G. OETTINGER, V. H. YNGVE, G. E. PETERSON, F. HARARY, H. A. GLEASON, B. MANDELBROT, CH. F. HOCKETT, and R. WELLS may all be read with great interest both by mathematicians and linguists. Their results are not only indispensable for the further development of applied linguistics such as machine translation of languages, but contribute to stating more precise notions in linguistics independent from the semantical meaning and valid for all languages.

F. Kiefer (Budapest)

KIYOSHI OKA, **Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables,** VI+234 pages, Tokyo, Iwanami Shoten, 1961.

This book performs the welcome service of making accessible the fundamental researches of the author on the subject of several complex variables. It consists of nine papers which were published during the years from 1936 to 1953. Although much of the material has been incorporated into the theory of analytic spaces and is now available in several standard treatments of the subject, much remains that cannot be found elsewhere. Even those parts of the book which have been thoroughly reworked by other investigators are worth reading for the insights they afford. The book will of course be a valuable reference; it can also serve as a good place to begin the study of the theory of several complex variables. There is naturally not space in the following short review of the contents of these nine articles to do more than indicate the variety of material which they contain.

The first paper, "Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles", gives the solution to the first Cousin problem — the problem of finding a meromorphic function with given principal parts — for rationally convex domains in the space C^n of several complex variables. The solution employs the basic technique of realizing the given domain as an analytic surface in a higher-dimensional space. In the second paper, "Domaines d'holomorphie", the same technique is used to extend the solution to domains which are holomorphically convex. An example is given in a later paper, "Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes", of a domain in C^2 which is holomorphically convex but not rationally convex.

The third paper, "Deuxième problème de Cousin", contains in essence the demonstration that COUSIN's second problem — the problem of finding a holomorphic function with given zeros — can be solved for a holomorphically convex domain whose second cohomology group with integral coefficients vanishes. Necessary and sufficient conditions are given for a solution to exist when the cohomology group in question does not vanish. An example is given for which COUSIN's second problem has no solution.

After a preparatory paper which extends the Weil integral to holomorphically convex domains, the author undertakes the investigation of those domains spread over C^n which satisfy a pseudo-convexity condition at each boundary point. It is shown that such domains are holomorphically convex, thereby giving a characterization of holomorphic convexity in terms of local properties of the boundary. This is accomplished in the sixth paper, „Domaines pseudoconvexes", for univalent domains in C^2. It is not until the last paper, „Domaines finis sans point critique intérieur", that the general case is treated. The proof makes strong use of properties of the class of pseudoconvex functions (called plurisubharmonic functions in the recent literature) introduced by the author for the study of pseudoconvex domains.

The seventh paper, "Sur quelques notions aritmétiques", contains the proof of the fundamental result that (in current terminology) the sheaf of relations of finitely many holomorphic functions is a coherent analytic sheaf. The eighth paper, "Lemme fondamental", proves the equally basic result that the sheaf of normal-holomorphic functions on an analytic variety is a coherent analytic sheaf. This is equivalent to the existence of the normalization of the variety.

Errett Bishop (Princeton, N. J.)

ROBERT SCHATTEN, **Norm ideals of completely continuous operators** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 27), VI+81 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1960.

Completely continuous operators on a Hilbert space or Banach space have received considerable attention since HILBERT's papers on integral equations and completely continuous quadratic forms of infinitely many variables. E. SCHMIDT's and F. RIESZ' classical work in this field is well-known. However, interest in *spaces* of completely continuous operators is comparatively new. Some results of this type may be found implicit in the early work of E. SCHMIDT, other ones are "generally known" and cannot be found explicitly in print. Therefore, it was a quite actual task to present a unifying theory of the spaces of completely continuous operators on a Hilbert space, and that is what the author has accomplished in the present survey.

This book contains the major part of the author's previous book, *A theory of cross spaces* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1950) and some closely related theorems due to other authors wich were not included in the first book.

The setting of the discussion is a complex Hilbert space $\mathfrak{H}$. $\mathbf{A}$ denotes the full algebra of bounded linear operators on $\mathfrak{H}$, and $\mathbf{C}$ and $\mathbf{R}$ denote the subalgebras of $\mathbf{A}$ consisting of all completely continuous or finite-rank operators on $\mathfrak{H}$, respectively. The bound of an operator $A\,(\in \mathbf{A})$ will be denoted by $||A||$.

Chapter I contains fundamental theorems on the spectrum of completely continuous operators, further, theorems on the ideals of such operators, such as the theorem of CALKIN on the characteristic sets of ideals of $\mathbf{C}$ and a theorem of KAPLANSKY on uniformly closed left ideals of $\mathbf{C}$. Chapter II and III are devoted to the operators of the Schmidt-class and the Schmidt-norm, and to the operators of the trace-class and the trace-norm, respectively. In chapter IV, the author describes the successive conjugate spaces of $\mathbf{C}$, the latter being considered as a Banach space with $||A||$ as its norm. It is also shown that, in the case of an infinite-dimensional Hilbert space, **C** is not the conjugate space of any Banach space. Chapter V constitutes the main part of the work. It is concerned with the crossnorms and norm ideals. A norm α on an ideal **T** of **A** is a *crossnorm* if it possesses the "cross-property", i. e. $\alpha(A)=||A||$ for all operators A of rank 1. α is termed *unitarily invariant* if $\alpha(UAV^*=\alpha(A)$ for $A\in\mathbf{T}$ and any pair of unitary operators U, $V\in\mathbf{A}$; α is termed *uniform* if $\alpha(XAY)\leqq||X||\,||Y||\alpha(A)$ for $A\in\mathbf{T}$ and any pair X, $Y\in\mathbf{A}$. An ideal $\mathbf{T}\subset\mathbf{A}$ is called a *norm ideal* if on it there is defined a uniform crossnorm with respect to which **T** is also complete. A norm ideal is *minimal* if none of its proper subspace is also a norm ideal. In the first part of chapter V, the author develops the direct connection between the unitarily invariant crossnorms on **R** and the symmetric gauge functions on the linear space of all infinite sequences of real numbers having only finite number of non-zero terms, and shows that the class of unitarily invariant crossnorms on **R** coincides with that of uniform crossnorms. In the second part of this chapter, the author determines all minimal norm ideals and characterizes their conjugate spaces which again may be interpreted as norm ideals of operators.

The proofs are concise, but very clearly written, and the book is very readable. It will without any doubt induce many new workers in this field.

I. Kovács (Szeged)

INDEX — TARTALOM

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM
SZEGED (HUNGARIA), ARADI VÉRTANÚK TERE 1

Prix d'abonnement pour l'étranger \$ 8.50. On peut s'abonner à l'entreprise de commerce des livres et journaux „Kultúra" (Budapest, I., Fő-útca 32).

62-675 Szegedi Nyomda Vállalat
Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felel: Vágvölgyi Tibor igazgató

Felelős szerkesztő: Szőkefalvi-Nagy Béla
Műszaki vezető: Gortvai Tivadar
Műszaki szerkesztő: Vízkelety József
A kézirat nyomdába érkezett: 1962. február 8

Megjelenés: 1962. június.
Példányszám: 790. Terjedelem: 16 (A/5) ív
Készült monószedéssel, íves magasnyomással az MSZ 5601-54 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint

Azonossági szám: 69103