ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

TOMUS XXII

FASC. 3—4

SZEGED, 1961

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY

KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

22. KÖTET

3—4. FÜZET

SZEGED, 1961. NOVEMBER HÓ

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

TOMUS XXII

1961

SZEGED, 1961

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY

KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

22. KÖTET

1961

SZEGED, 1961. NOVEMBER HÓ

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

INDEX—TARTALOM

TOMUS XXII — 1961 — 22. KÖTET

BIBLIOGRAPHIE

Über affine Finslerräume von skalarer Krümmung

Von ARTHUR MOÓR in Szeged

Inhalt

Einleitung

Ein Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ ist eine metrische Mannigfaltigkeit der Linienelemente (x^i, v^i), in der die Metrik durch einen metrischen Grundtensor von der Form

$$g_{ik} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\partial^2_{v^i v^k} F^2, \qquad \partial_{v^i} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial v^i} \tag{0. 1}$$

festgelegt ist, wobei die Grundfunktion $F(x, v)$ den folgenden, in der Theorie der Finslerräume gewöhnlichen Bedingungen genügt:

1. $F(x, v)$ ist in den v^i positiv homogen von erster Ordnung;
2. es ist $F(x, v) > 0$, falls mindestens eine der v^i von Null verschieden ist;
3. die quadratische Form

$$\partial^2_{v^i v^j} F^2 \xi^i \xi^j$$

ist in den Veränderlichen ξ^i positiv definit.

Die Bogenlänge einer Kurve $x^i = x^i(t)$ wird durch die Formel bestimmt:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), \dot{x}(t))dt, \qquad \dot{x}^i \overset{\text{def}}{=} \frac{dx^i}{dt}. \tag{0. 2}$$

Nach der Cartanschen Theorie der parallelen Vektorübertragung sind die Übertragungsparameter $\Gamma_{i\ k}^{*j}(x,v)$ und $C_{i\ k}^{\ j}(x,v)$ von dem Grundtensor $g_{ik}(x,v)$ ableitbar (vgl. [2] Formeln (IV) und (XII)).

Das invariante Differential eines kontravarianten Vektors $\xi^i(x,v)$ ist durch

$$(0.3)\qquad D\xi^i = d\xi^i + \omega^i_{\ k}(d)\xi^k,\quad \omega^i_{\ k}(d) \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{k\ j}^{*i} dx^j + A_{k\ j}^{\ i}\omega^j(d),\quad A_{k\ j}^{\ i} \overset{\text{def}}{=} FC_{k\ j}^{\ i}$$

festgelegt, wo

$$(0.4)\qquad \omega^k(d) \overset{\text{def}}{=} dl^k + \Gamma_{o\ j}^{*k} dx^j$$ [1]

das invariante Differential des Einheitsvektors l^i ist. Neben dem invarianten Differential benötigen wir noch im folgenden die kovariante Ableitung ∇_k, die z. B. für den kontravarianten Vektor ξ^i die Form:

$$(0.5)\qquad \nabla_k \xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_k \xi^i - \xi^i\|_r \Gamma_{o\ k}^{*r} + \Gamma_{j\ k}^{*i}\xi^j,\quad \|_r \overset{\text{def}}{=} F\partial_{v^r}$$

hat. Für die Entwicklung der vollständigen Theorie der Cartanschen Übertragung in $\mathfrak{F}_n$ verweisen wir auf [2].

Auf Grund dieser Fundamentalformeln der Finslerräume sind wir schon imstande, die Grundideen unserer nachfolgenden Untersuchungen zu formulieren.

In den ersten und zweiten Paragraphen verallgemeinern wir die Übertragungsparameter $\Gamma_{i\ k}^{*j}$ und $C_{i\ k}^{\ j}$ dadurch, daß wir zu diesen Größen gewisse Tensoren $\Lambda_{i\ k}^{\ j}$ und $\mu_{i\ k}^{\ j}$ addieren. Dadurch erhält man eine affine Erweiterung des Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$. Für die affine Übertragungstheorie und für die affinen Krümmungstensoren existieren zwei verschiedenartige Möglichkeiten. Entweder bestimmt man die neuen affinen Übertragungsparameter in der Form:

$$(0.6)\qquad L_{i\ k}^{*j} \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{i\ k}^{*j} + \Lambda_{i\ k}^{\ j},$$

$$(0.7)\qquad \frac{1}{F} M_{i\ k}^{*j} \overset{\text{def}}{=} C_{i\ k}^{\ j} + \frac{1}{F}\mu_{i\ k}^{\ j},\quad C_{i\ k}^{\ j} \equiv \frac{1}{F} A_{i\ k}^{\ j},$$

$$(0.7a)\qquad \mu_{o\ k}^{\ i} \equiv \mu_{i\ k}^{\ o} \equiv \mu_{i\ o}^{\ k} \equiv 0,$$

und somit bekommt man eine affine Übertragungstheorie im Sinne von O. Varga (vgl. [11]), oder benützt man statt (0.6) die Berwaldschen affinen Übertragungsparameter

$$(0.8)\qquad G_{i\ k}^{*j} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\partial^2_{v^i v^k}(L_{t\ s}^{*i} v^t v^s)$$

(vgl. [1] § 1 und § 3), bzw. die Berwaldsche affine Übertragungstheorie.

---

[1]) Der Index o bedeutet — wie gewöhnlich — die Kontraktion mit dem Einheitsvektor

$$l^i \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{F} v^i.$$

Der Raum, in dem die Übertragungstheorie durch (0. 6) und (0. 7), bzw. durch (0. 8) festgelegt ist, ist trotzdem nicht eine Vargasche bzw. Berwaldsche affinzusammenhängende Mannigfaltigkeit der Linienelemente, da neben diesen affinen Übertragungsparametern im Raume ein metrischer Grundtensor von der Form (0. 1) existiert, mit dem man die Indizes herauf bzw. herabziehen kann, d. h. die kovarianten bzw. kontravarianten Vektoren können ineinander übergeführt werden. Die Parallelübertragung der Vektoren kann dabei metrisch oder auch nicht-metrisch sein, je nachdem das invariante Differential von $g_{ik}(x, v)$ Null, oder von Null verschieden ist.

Unser Raum hat also neben dem metrischen Grundtensor g_{ik} noch die Tensoren $A_{i\ k}^{\ j}$ und $\mu_{i\ k}^{\ j}$ als Grundgrößen. Eine derartige Erweiterung des metrischen Raumes $\mathfrak{F}_n$ begründen in erster Reihe die verschiedenen physikalischen Feldtheorien, in denen sehr oft metrische Räume mit affinen Übertragungen auftreten[2]; wir glauben aber, daß auch vom Standpunkt der reinen Geometrie die Entwicklung der Theorie dieser „metrisch-affinen Räume" wesentlich ist. Die exakte Definition dieser Räume ist das folgende:

D e f i n i t i o n 1. *Ein affiner Finslerraum* $\mathfrak{A}_n$ *ist die Mannigfaltigkeit der Linienelemente* (x^i, v^i) *in der eine Metrik durch den metrischen Grundtensor* (0. 1), *und eine Parallelübertragung der Vektoren durch das invariante Differential:*

$$\overset{*}{D}\xi^i \overset{\text{def}}{=} d\xi^i + \overset{*}{\omega}{}^i_{\ k}(d)\xi^k, \qquad \overset{*}{\omega}{}^i_{\ k}(d) \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{L}{}_{k\ j}^{\ i} dx^j + \overset{*}{M}{}_{k\ j}^{\ i}\overset{*}{\omega}{}^j(d) \tag{0. 9}$$

$$\overset{*}{\omega}{}^j(d) \overset{\text{def}}{=} dl^j + \overset{*}{L}{}_{o\ t}^{\ j} dx^t \equiv \overset{*}{D}l^j \tag{0. 10}$$

festgelegt ist, wo die Übertragungsparameter durch (0. 6) *und* (0. 7) *bestimmt sind.*

D e f i n i t i o n 2. *Ein metrisch-affiner Raum* $\mathfrak{B}_n$ *ist eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente* (x^i, v^i), *in der die Metrik durch den metrischen Grundtensor* (0. 1) *festgelegt ist, und im Raume eine kovariante Ableitung der Vektoren von der Form*

$$\xi^i_{\ ,k} \overset{\text{def}}{=} \partial_k\xi^i - \xi^i\|_t \overset{*}{G}{}_{o\ k}^{\ t} + \overset{*}{G}{}_{j\ k}^{\ i}\xi^j \tag{0. 11}$$

existiert, wo $\overset{*}{G}{}_{j\ k}^{\ i}$ *durch* (0. 8) *angegeben ist.*

Wir werden in den Paragraphen 3 und 4 den Begriff der Räume skalarer Krümmung auf diese Räume dadurch übertragen, daß wir für den Krümmungstensor $\overset{*}{R}{}_{o\ jk}^{\ i}$ bzw: $\overset{*}{K}{}^i_{\ j}$ eine bestimmte Form bedingen. In § 5 und

[2]) Vgl. z. B. die in der Literatur von [8] zitierten Arbeiten von L. P. Eisenhart und J. I. Horváth.

§ 6 untersuchen wir die geometrischen Eigenschaften der Räume von skalarer Krümmung. Im § 7 werden wir die Grundzüge der Theorie der Unterräume angeben, und dann wird es schon in § 8 möglich sein, den Begriff der Räume skalarer Krümmung auch mit Hilfe der autoparallelen Hyperflächen zu definieren. Es wird sich zeigen, daß in gewissen Typen der Räume skalarer Krümmung, die wir durch die spezielle Form des Krümmungstensors in § 3 definieren werden (vgl. Gleichungen (3. 1)—(3. 3)), in jedem Linienelemente eine autoparallele Hyperfläche gelegt werden kann. Endlich werden wir in § 9 den Zusammenhang unserer Untersuchungen mit anderen ähnlichen Untersuchungen angeben und aus unserer allgemeinen Theorie die der Punkträume entwickeln.

§ 1. Die Vargasche affine Erweiterung des Finslerraumes

O. Varga entwickelte in seiner Arbeit [11] die affine Theorie der Linienelementmannigfaltigkeiten. Unser durch Definition 1 bestimmter affiner Finslerraum $\mathfrak{A}_n$ ist in Bezug auf die Vektorübertragung im Wesentlichen — wie wir das schon bemerkt haben — ein affiner Linienelementraum, doch werden jetzt die entsprechenden Formeln und die Krümmugsgrößen von denen die in [11] entwickelten etwas verschieden sein, da mit Hilfe der Grundfunktion F des zum Basis gewählten Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$, alle Größen in den v^i auf nullter Dimension homogeneisiert werden können. Das kommt schon in den Formeln (0. 9) und (0. 10) zum Ausdruck, da in diesen Formeln der normierte Einheitsvektor l^i an die Stelle von v^i der allgemeinen affinen Übertragung getreten ist. (Vgl. (1, 9) und (1, 10) von [11]).

Auf Grud der Homogenität nullter Dimension in den v^i von ξ^i folgt auf Grund von (0. 10) für das invariante Differential nach (0. 9) die Formel:

$$\overset{*}{D}\xi^i \equiv \overset{*}{\nabla}_k \xi^i dx^k + \overset{*}{\nabla}_{v^k} \xi^i \overset{*}{\omega}{}^k(d), \tag{1. 1}$$

wo

$$\overset{*}{\nabla}_k \xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_k \xi^i - \xi^i \|_t \overset{*}{L}{}_o{}^t{}_k + \overset{*}{L}{}_j{}^i{}_k \xi^j, \tag{1. 2}$$

$$\overset{*}{\nabla}_{v^k} \xi^i \overset{\text{def}}{=} \xi^i \|_k + \overset{*}{M}{}_j{}^i{}_k \xi^j \tag{1. 3}$$

die beiden fundamentalen kovarianten Ableitungen des $\mathfrak{A}_n$-Raumes sind. Bezeichnen wir die Cartanschen kovarianten Ableitungen des Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$ mit ∇_k und ∇_{v^k}[3]), so hängen sie mit den entsprechenden kovarianten

[3]) Wir werden bei den Operationen im Raume $\mathfrak{F}_n$ den Stern immer weglassen.

Ableitungen des $\mathfrak{A}_n$-Raumes nach (0. 5), (0. 6) und (0. 7) durch die Formeln:

(1. 4) $$\overset{*}{\nabla}_k \xi^i = \nabla_k \xi^i - \xi^i\|_t A_o{}^t{}_k + A_j{}^i{}_k \xi^j,$$

(1. 5) $$\overset{*}{\nabla}_{v^k} \xi^i = \nabla_{v^k} \xi^i + \mu_j{}^i{}_k \xi^j$$

zusammen, wo

(1. 5a) $$\nabla_{v^k} \xi^i \overset{\text{def}}{=} \xi^i\|_k + A_j{}^i{}_k \xi^j$$

bedeutet.

Im folgenden benötigen wir noch einige Formeln für den Einheitsvektor l^i. Ebenso wie im Finslerraum ist

(1. 6) (a) $l^i\|_k = \delta^i_k - l^i l_k,$ (b) $l_i\|_k = g_{ik} - l_i l_k.$

Aus (0. 10) folgt im Hinblick auf (0. 4) und (0. 6) die Relation:

(1. 7) $$\overset{*}{\omega}{}^k(d) = \omega^k(d) + A_o{}^k{}_t dx^t.$$

Da l^i ein Einheitsvektor ist, und für die durch (0. 3) definierte Übertragung

$$Dg_{ik} = 0$$

gilt, hat man $\omega^o(d) = 0$. Aus (1. 7) folgt somit nach einer Kontraktion mit l_k

(1. 8) $$l_k \overset{*}{\omega}{}^k(d) \equiv \overset{*}{\omega}{}^o(d) = A_o{}^o{}_t dx^t.$$

Die Cartansche kovariante Ableitung — die durch (0. 5) bestimmt ist — gibt für l^i den Nulltensor, d. h. $\nabla_k l^i \equiv 0$. Die allgemeine kovariante Ableitung des $\mathfrak{A}_n$-Raumes, die durch (1. 2) definiert ist, gibt somit nach (1. 4) und (1. 6) (a):

(1. 9) $$\overset{*}{\nabla}_k l^i = A_o{}^o{}_k l^i.$$

Benützt man die kovariante Ableitung des $\mathfrak{A}_n$-Raumes in der Form (1. 2), so bekommt man auf Grund von (1. 2) und (1. 9) die mit (1. 9) äquivalente Formel:

(1. 9a) $$\partial_k l^i = -(\overset{*}{L}{}_o{}^o{}_k - A_o{}^o{}_k) l^i.$$

Die Übertragung des $\mathfrak{A}_n$-Raumes ist im allgemeinen nicht-metrisch, d. h. es ist $\overset{*}{D} g_{ik}$ im allgemeinen von Null verschieden. Der metrische Fall ist in [6] ausführlich behandelt, wir wollen aber die wichtigsten Formeln für eine metrische Übertragung auch in unserem $\mathfrak{A}_n$-Raum angeben, umso mehr, da jetzt g_{ik} durch (0. 1) bestimmt ist und das gibt mit den Bedingungen (0. 7a) einfachere Formeln als der allgemeine metrische Grundtensor in unserer Arbeit [6].

Ist $\overset{*}{D} g_{ik} \equiv 0$, so hat man nach (1. 1)

$$\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} \equiv 0, \qquad \overset{*}{\nabla}_{\cdot k} g_{ij} \equiv 0.$$

Das sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Übertragung metrisch sei. Da die Cartanschen kovarianten Ableitungen ∇_k und $\nabla_{\cdot k}$ metrisch sind, wird nach (1. 4) und (1. 5)

$$A_{ijt} A_{o\ k}^{\ t} + A_{(ij)k} = 0, \tag{1. 10a}$$

$$-\mu_{(ij)k} \equiv A_{ijk} - \overset{*}{M}_{(ij)k} = 0 \tag{1. 10b}$$

bestehen. Die Formel (1. 10b) zeigt unmittelbar, daß der Tensor μ_{ijk} im Falle einer metrischen Übertragung in i, j schiefsymmetrisch sein muß. Bestimmen wir nun A_{ijk} in der Form

$$A_{ijk} = A_{(ij)k} + \sigma_{ijk}, \qquad \sigma_{ijk} \overset{\text{def}}{=} A_{[ij]k},$$

so wird auf Grund von (1. 10a) $A_{o\ k}^{\ i} = \sigma_{o\ k}^{\ i}$, und somit im Falle $\overset{*}{D} g_{ij} = 0$:

$$A_{i\ k}^{\ j} = -A_{i\ t}^{\ j} \sigma_{o\ k}^{\ t} + \sigma_{i\ k}^{\ j}, \tag{1. 11}$$

wo der Tensor σ_{ijk} in i, j schiefsymmetrisch sein muß.

Die Torsions- und Krümmungsgrößen des $\mathfrak{A}_n$-Raumes können nach der Cartanschen Methode leicht bestimmt werden. Wir müssen ebenso verfahren, wie im Paragraphen 7 unserer Arbeit [6], doch müssen wir jetzt für $\overset{*}{\omega}{}^o(d)$ die Relation (1. 8) in Betracht nehmen. Es ist nach (1. 11) in Hinsicht auf die schiefe Symmetrie von σ_{ijk} in i, j, immer $\overset{*}{\omega}{}^o(d) = 0$.

Die Torsion des $\mathfrak{A}_n$-Raumes bekommt man durch die Berechnung der Pfaffschen Form:

$$\Omega^i(d, \delta) \overset{\text{def}}{=} (\overset{*}{\varDelta} \overset{*}{D} - \overset{*}{D} \overset{*}{\varDelta}) x^i, \qquad \overset{*}{D} x^i \equiv dx^i,$$

wo $\overset{*}{\varDelta}$ und $\overset{*}{D}$ die zu den — miteinander vertauschbaren — Differentiationssymbolen δ und d gehörigen invarianten Differentiale bezeichnen. Auf Grund von (0. 9) bekommt man:

$$\Omega^i(d, \delta) \equiv [dx^j \overset{*}{\omega}{}^i_j(d)] = \overset{*}{\Omega}{}_j{}^i{}_k [dx^j dx^k] + \overset{*}{M}{}_j{}^i{}_k [dx^j \overset{*}{\omega}{}^k(d)], \tag{1. 12}$$

wo

$$\overset{*}{\Omega}{}_j{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{L}{}_{[j}{}^i{}_{k]} \equiv A_{[j}{}^i{}_{k]}$$

den Tensor der Übertragungstorsion bzw. $\overset{*}{M}{}_j{}^i{}_k$ den Tensor der Raumtorsion bedeutet.

Die Krümmungstensoren erhält man durch die Berechnung der Formel:

$$(\overset{*}{\varDelta} \overset{*}{D} - \overset{*}{D} \overset{*}{\varDelta}) \xi^i = \Omega^i_{\ j}(d, \delta) \xi^j,$$

wo die Pfaffsche Form:

$$\Omega^i_j(d,\delta) \overset{\text{def}}{=} [\overset{*}{\omega}{}^t_j(d)\overset{*}{\omega}{}^i_t(d)] - (\overset{*}{\omega}{}^i_j(d))' \tag{1.13}$$

ist[4]) und $(\overset{*}{\omega}{}^i_j)'$ die äußere Ableitung der Pfaffschen Form $\overset{*}{\omega}{}^i_j$ bedeutet. Im Hinblick auf (1. 8), (1. 6) (a) und (0. 7a) wird:

$$\Omega^i_j \equiv \tfrac{1}{2} R^{*i}_{j\ kl}[dx^k dx^l] + P^{*i}_{j\ kl}[dx^k \overset{*}{\omega}{}^l] + \tfrac{1}{2} S^{*i}_{j\ kl}[\overset{*}{\omega}{}^k \overset{*}{\omega}{}^l], \tag{1.14}$$

wo die einzelnen Krümmungstensoren die folgende explizite Form haben:

$$R^{*i}_{j\ kl} \overset{\text{def}}{=} \overline{R}^{*i}_{j\ kl} + M^{*i}_{j\ t}\overline{R}^{*t}_{o\ kl}, \tag{1.15}$$

$$\overline{R}^{*i}_{j\ kl} \overset{\text{def}}{=} 2(\partial_{[l} L^{*\ i}_{|j|\ k]} - L^{*i}_{j\ [k||t} L^{*\ t}_{o|\ l]} + L^{*t}_{j\ [k} L^{*i}_{|t|\ l]}), \tag{1.15a}$$

$$P^{*i}_{j\ kl} \overset{\text{def}}{=} L^{*i}_{j\ k}\|_l - \overset{*}{\nabla}_k M^{*i}_{j\ l} + M^{*i}_{j\ t} L^{*\ t}_{m\ k}\|_l\, l^m, \tag{1.16}$$

$$S^{*i}_{j\ kl} \overset{\text{def}}{=} 2(M^{*i}_{j\ [k}\|_{l]} + M^{*t}_{j\ [k} M^{*\ i}_{|t|\ l]}). \tag{1.17}$$

Bemerkung. Die Zerlegung (1. 14)—(1. 17) ist nicht vollständig analog mit der der Vargaschen affinen Räume (vgl. § 3 von [11]). Statt des Vektors $\overset{*}{\omega}{}^k(d) \equiv \overset{*}{D}l^k$ steht nämlich in [11] $\pi^j(d) = Dv^j$. Zweitens sind unsere Tensoren in den v^j homogen von nullter Dimension; das ist eine Folge der Existenz einer Grundfunktion $F(x,v)$ die bei O. VARGA in [11] nicht bedingt wurde.

Für die späteren Untersuchungen benötigen wir den Zusammenhang des Hauptkrümmungstensor $\overline{R}^{*i}_{j\ kl}$ mit dem Hauptkrümmungstensor $\overline{R}^{\ i}_{j\ kl}$ des zum Grunde gelegten Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$. Nach der Formel (1. 15a) wird:

$$\overline{R}^{*i}_{j\ kl} = \overline{R}^{\ i}_{j\ kl} + \Phi^{\ i}_{j\ kl}, \tag{1.18}$$

wo

$$\Phi^{\ i}_{j\ kl} \overset{\text{def}}{=} 2(\nabla_{[l} A_{|j|\ k]}^{\ i} - L^{*i}_{j\ [k||t} A_{o|\ l]}^{\ t} + A^{\ t}_{j\ [k} A_{|t|\ l]}^{\ i}) \tag{1.18a}$$

bedeutet.

Bilden wir die äußere Ableitung von (1. 12) und (1. 13), so wird:

$$(\Omega^i)' - [dx^t \Omega^i_t] + [\overset{*}{\omega}{}^i_t \Omega^t] = 0, \tag{1.19}$$

bzw.

$$(\Omega^i_j)' + [\overset{*}{\omega}{}^i_t \Omega^t_j] - [\overset{*}{\omega}{}^t_j \Omega^i_t] = 0. \tag{1.20}$$

Die Relationen (1. 19) und (1. 20) bestimmen eine Reihe von Identitäten für

4) Die Formel (1. 13) sollte selbstverständlich mit der Formel (7. 4) von [6] übereinstimmen, in (7. 4) von [6] ist aber ein Druckfehler!, die richtige Formel ist (1. 13).

die Krümmungs- und Torsionstensoren des $\mathfrak{A}_n$-Raumes. Von diesen Identitäten wollen wir in expliziter Form nur diejenigen angeben, die sich auf den vollständigen Krümmungstensor (1. 15) beziehen. Für $\overset{*}{\omega}{}^k(d)=0$ bekommt man aus der Formeln (1. 19) und (1. 20):

$$\frac{1}{2}(R^{*}_{[j}{}^{i}{}_{kl]}-M^{*}_{[j}{}^{i}{}_{|t}R^{*}_{o|}{}^{t}{}_{kl]})-\overset{*}{\nabla}_{[l}\Omega^{*i}_{j}{}_{k]}+2\Omega^{*i}_{t}{}_{[l}\Omega^{*t}_{j}{}_{k]}=0, \tag{1.21}$$

$$\overset{*}{\nabla}_{[r}R^{*}_{|j|}{}^{i}{}_{kl]}+P^{*i}_{j}{}_{[k|t}R^{*}_{o|}{}^{t}{}_{lr]}+2R^{*i}_{j}{}_{[k|t|}\Omega^{*t}_{l}{}_{r]}=0. \tag{1.22}$$

Beachten wir jetzt (1. 9), (0. 7a), (1. 15) und (1. 16), so bekommt man aus (1. 22) nach einer Kontraktion mit l^j die Formel $(R^{*i}_{o}{}_{kl}\equiv\overline{R}^{*i}_{o}{}_{kl})$:

$$\overset{*}{\nabla}_{[r}\overline{R}^{*}_{|o|}{}^{i}{}_{kl]}-\overline{R}^{*i}_{o}{}_{[kl}A_{|o|}{}^{o}{}_{r]}+l^{s}L^{*i}_{s}{}_{[k||t}\overline{R}^{*}_{o|}{}^{t}{}_{lr]}+2\overline{R}^{*i}_{o}{}_{[k|t|}\Omega^{*t}_{l}{}_{r]}=0, \tag{1.23}$$

die bei der Verallgemeinerung des Schurschen Satzes von großer Bedeutung ist. Die Identität (1. 22) bzw. (1. 23) ist die Bianchische Identität des vollständigen, bzw. des kontrahierten Hauptkrümmungstensors.

Zum Schluß dieses Paragraphen geben wir noch für den Abweichungstensor $\Phi_{j}{}^{i}{}_{kl}$ eine Formel, die $\Phi_{j}{}^{i}{}_{kl}$ mit Hilfe der durch (1. 2) angegebenen kovarianten Ableitung ausdrückt. Nach den Formeln (1. 4) und (0. 6) bekommt man aus (1. 18a)

$$\Phi_{j}{}^{i}{}_{kl}=2(\overset{*}{\nabla}_{[l}A_{|j|}{}^{i}{}_{k]}-\Gamma^{*i}_{j}{}_{[k||t}A_{o|}{}^{t}{}_{l]}+A^{t}_{j}{}_{[l}A_{|t|}{}^{i}{}_{k]}+A_{j}{}^{i}{}_{t}\Omega^{*t}_{k}{}_{l}). \tag{1.24}$$

§ 2. Die Berwaldsche affine Erweiterung des Finslerraumes

L. Berwald bestimmte in seiner Arbeit [1] eine von der Vargaschen affinen Verallgemeinerung des Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$ verschiedene affine Erweiterung von $\mathfrak{F}_n$ dadurch, daß er durch Gleichungen von der Form

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+2G^i(x,\dot{x})=0, \qquad \dot{x}^i\overset{\text{def}}{=}\frac{dx^i}{dt} \tag{2.1}$$

in einem Linienelementraum gewisse Kurven, die sog. *Bahnen des Raumes* ausgezeichnet hatte, und von den Funktionen $G^i(x,\dot{x})$ eine kovariante Ableitung ableitete. Wählen wir für G^i die Funktionen

$$G^i(x,v)\overset{\text{def}}{=}\tfrac{1}{2}\Gamma^{*i}_{j}{}_{k}(x,v)v^jv^k, \tag{2.2}$$

so bekommen wir auf diese Weise die Berwaldsche affine Theorie des Finslerraumes.

Nehmen wir statt (2. 2) die Funktionen

$$G^{*i}(x,v)\overset{\text{def}}{=}\tfrac{1}{2}L^{*i}_{j}{}_{k}(x,v)v^jv^k, \tag{2.3}$$

so bekommt man auch jetzt einen Berwaldschen affinen Raum, in dem wir aber noch die Existenz des metrischen Grundtensors (0. 1) bedingen wollen. Diesen Raum bezeichneten wir einen $\mathfrak{B}_n$-Raum (vgl. die Einleitung), wenn noch im Raume die kovariante Ableitung durch (0. 11) bestimmt war. Die Bahnen des $\mathfrak{B}_n$-Raumes sind durch (2. 1) bestimmt, wenn darin statt G^i die durch (2. 3) bestimmten Funktionen G^{*i} ersetzt werden. Der Parameter t ist jetzt ein von der Bogenlänge verschiedener affiner Parameter.

Für die $\mathfrak{B}_n$-Räume wollen wir im folgenden immer annehmen, daß der Tensor $A_j{}^i{}_k$ in j, k symmetrisch ist, da in den Grundgrößen (2. 3) in trivialer Weise nur der symmetrische Teil des Tensors $A_j{}^i{}_k$ vorkommen kann. Die durch (0. 8) bestimmten Übertragungsparameter $G_j^{*}{}^i{}_k$ sind jedenfalls in den Indizes j, k symmetrisch.

Die Krümmungstensoren des $\mathfrak{B}_n$-Raumes sind nach den entsprechenden Berwaldschen Formeln (vgl. [1] Formeln (2. 6), (2. 9), und (2. 10))

$$(2.4)\qquad K^{*i}{}_j \overset{\text{def}}{=} 2\partial_j G^{*i} - \partial_t G^{*i}{}_j v^t + 2 G_j^{*}{}^i{}_t G^{*t} - G^{*i}{}_t G^{*t}{}_j,$$

$$(2.5)\qquad K_j^{*}{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} \tfrac{2}{3}\,\partial_{v[j} K^{*i}{}_{k]} \equiv 2(\partial_{[k} G^{*i}{}_{j]} + G^{*t}{}_{[j} G_{k]}^{*}{}^i{}_t),$$

$$(2.6)\qquad K_h^{*}{}^i{}_{jk} \overset{\text{def}}{=} \tfrac{2}{3}\,\partial^2_{v^h v[j} K^{*i}{}_{k]} \equiv \partial_{v^h} K_j^{*}{}^i{}_k,$$

wo

$$G^{*i}{}_j \overset{\text{def}}{=} \partial_{v^j} G^{*i} \equiv G_t^{*}{}^i{}_j v^t,$$

und $G_j^{*}{}^i{}_k$ bzw. G^{*i} durch (0. 8) bzw. (2. 3) bestimmt ist.

Wir bezeichnen mit $K^i{}_j$ denjenigen Tensor, der die Form (2. 4) hat, statt G^{*i} steht aber in seiner Formel die durch (2. 2) bestimmte Größe G^i. $K^i{}_j$ ist also der entsprechende Berwaldsche affine Krümmungstensor des Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß der Tensor $K^{*i}{}_j$ mit $K^i{}_j$ durch die Formel

$$(2.7)\qquad K^{*i}{}_j = K^i{}_j + 2A^i{}_{;j} - (\partial_{v^j} A^i)_{;t} v^t + 2A^t \partial^2_{v^t v^j} A^i - \partial_{v^t} A^i \partial_{v^j} A^t$$

zusammenhängt, wo das Semikolon die Berwaldsche kovariante Ableitung bezeichnet. Diese kovariante Ableitung stimmt formal mit (0. 11) überein, nur steht statt $G_j^{*}{}^i{}_k$ der Berwaldsche Übertragungparameter $G_j{}^i{}_k$ (vgl. [1] § 3).

Im folgenden benötigen wir noch die Bianchischen Identitäten des Krümmungstensors $K_j^{*}{}^i{}_k$. Es ist (vgl. [1] Formel (3. 5), S. 761):

$$(2.8)\qquad K^{*i}{}_{j,k} - K^{*i}{}_{k,j} + K_j^{*}{}^i{}_{k,r} v^r = 0, \qquad K^{*i}{}_k \equiv K_j^{*}{}^i{}_k v^j,$$

wo das Komma die durch (0. 11) angegebene kovariante Ableitung bedeutet.

§ 3. Definition der affinen Finslerräume von skalarer Krümmung. Beispiele

Die Definition der $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung wollen wir durch solche Formeln festlegen, daß die Forderung, daß sie als Spezialfälle die Finslerschen und die Riemannschen Räume von skalarer Krümmung (vgl. [1] § 13 und [14] Chap. V. insb. § 8, Formel (11)), ferner die in unserem Aufsatz [8] entwickelten Räume in sich enthalte, erfüllt sei. Wir geben die folgende

Definition 3. *Ein affiner Finslerraum $\mathfrak{A}_n$ ist ein $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung erster, zweiter, bzw. dritter Art, falls sein Krümmungstensor R^*_{oijk} die Form:*

$$R^*_{oijk} = 2R^*\gamma_{i[k}\gamma_{|o|j]} + \tfrac{2}{3}R^*\|_{[j}(\gamma_{|i|k]}\gamma_{oo} - \gamma_{|io}\gamma_{o|k]}), \tag{3.1}$$

$$R_{oijk} = 2R^*\gamma_{i[k}l_{j]} + \tfrac{2}{3}R^*\|_{[j}(\gamma_{|i|k]} - \gamma_{|io|}l_{k]}), \tag{3.2a}$$

$$R^*_{oijk} = 2R^*g_{i[k}\gamma_{|o|j]} + \tfrac{2}{3}R^*\|_{[j}(g_{|i|k]}\gamma_{oo} - l_{|i}\gamma_{o|k]}^{\;i}), \tag{3.2b}$$

bzw.

$$R^*_{oijk} = 2R^*g_{i[k}l_{j]} + \tfrac{2}{3}R^*\|_{[j}(g_{|i|k]} - l_{|i|}l_{k]}) \tag{3.3}$$

hat, wo γ_{ij} einen aus g_{ij}, A^j_{ik} und aus den partiellen Ableitungen dieser Grundtensoren gebildeten rein kovarianten Tensor bedeutet.

Die Type (3. 2a) und (3. 2b) nennen wir $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung zweiter Art, da in den Gliedern des Krümmungstensors bei diesen Typen immer ein g_{ik}- und ein γ_{ik}-Faktor vorkommt. (Es ist nämlich in (3. 2a) $l_j = g_{oj}$, $g_{oo} = 1$.) Die Krümmungstensoren haben bei diesen Typen gleichartigen Charakter.

Es kann leicht verifiziert werden, daß diese Definition der $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung unseren Forderungen genügt. Für

$$A^j_{ik} = 0, \qquad \gamma_{ij} = g_{ij} \tag{3.4}$$

geht jeder Typ in einen $\mathfrak{F}_n$-Raum von skalarer Krümmung über (vgl. [1] Formel (13.5), S. 774[5]) und unsere Formeln (0. 6), und (1. 18)). Nehmen wir jetzt an, daß der zu Grunde gelegte Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ ein Riemannscher Raum $\mathfrak{R}_n$ ist, d. h. g_{ij} nur von dem Orte x^i abhängt, von der Richtung v^i aber unabhängig ist, so bekommt man nach den Formeln (0. 6), (1. 18), (3. 4) und

[5]) In der zitierten Formel befindet sich ein Druckfehler. Im letzten Glied soll statt l^j_m bzw. l^j_i : δ^j_m bzw. δ^j_i gesetzt werden.

nach $R^*\|_j = 0$ von jedem der Type (3. 1)—(3. 3):

(3. 5) $$R_{oijk} = 2R^*(x) g_{h[j} g_{k]i} l^h$$

da offenbar $l_j \equiv g_{oj} \equiv g_{jo}$ immer in jeden metrischen Räumen gültig ist. Beachten wir jetzt, daß sowohl R_{hijk}, wie g_{ij} von den v^i unabhängig sind, so bekommt man aus (3. 5) eben die charakteristische Relation des Krümmungstensors des $\mathfrak{R}_n$-Raumes von skalarer Krümmung. Bedingen wir jetzt statt (3. 4) nur die Unabhängigkeit der Grundtensoren $A_{j\ k}^{\ i}$ und g_{ij} von den v^i, so geht unser $\mathfrak{A}_n$-Raum in einen in unserem Aufsatz [8] behandelten $\mathfrak{R}_n^*$-Raum über, und die Typen (3. 1)—(3. 3) bestimmen die R_n^*-Räume von skalarer Krümmung erster, zweiter, bzw. dritter Gattung, da jetzt offenbar wieder $R^*\|_j = 0$ ist, und auch R^*_{hijk} von der Richtung unabhängig ist. (Vgl. die Formeln (2. 1)—(2. 3) von [8].)

Wir wollen jetzt durch Beispiele die Existenz der $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung beweisen. Auf Grund von (1. 18) ist

(3. 6) $$R^*_{oikl} \equiv \overline{R}^*_{oikl} = \overline{R}_{oikl} + \Phi_{oikl}.$$

Um die explizite Formel von Φ_{oikl} zu bekommen, beachten wir die im Finslerraum gültige Relation:

(3. 7) $$\Gamma^{*i}_{j\ k}\|_t l^j = \nabla_o A_{k\ t}^{\ i}$$

(vgl. [2] Formel (44)), somit bekommt man von (1. 18a) nach einer Kontraktion mit l^j im Hinblick auf (0. 6) und nach Herunterziehen des Indexes i

(3. 8) $$\Phi_{oikl} = 2\nabla_{[l} A_{|oi|k]} - 2(\nabla_o A_{ti[k} + A_{ri[k}\|_{|t|} l^r + A_{ti[k}) A_{|o|\ l]}^{\ t}.$$

Beispiel A. Nehmen wir an, daß der Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ ein Raum von konstanter Krümmung ist, d. h. der Krümmungstensor die Form

(3. 9) $$R_{oikl} = 2Rg_{i[l} l_{k]}, \qquad R = \text{Konst.}$$

hat, und für $A_{j\ k}^{\ i}$

(3. 9a) $$A_{jik} = p_i g_{jk}$$

besteht, wo p_i einen kovarianten Vektor bedeutet. Mit der Bezeichnung

$$\gamma_{il} \overset{\text{def}}{=} \nabla_l p_i + \nabla_o A_{lit} p^t + p_i p_l + Rg_{il}$$

bekommt man nach den Formeln (3. 6), (3. 8) und (3. 9) eben den Typ (3. 2a) mit $R^* \equiv 1$. Ist der Vektor p_i allein von dem Orte x^i abhängig und von der Richtung v^i unabhängig, so ist γ_{il} ein symmetrischer Tensor.

Beispiel B. Es sei jetzt p_i eint kovarianter Vektor und

$$A_{ijk} = p_i g_{jk}.$$

Nehmen wir wieder an, daß der Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ ein Raum von konstanter Krümmung ist. Setzen wir jetzt

$$(3.10) \qquad \gamma_{ik} \overset{\text{def}}{=} p_i p_k + p_i p_r \|_k l^r - \nabla_k p_i + R l_i l_k ,$$

so bekommen wir auf Grund der Formeln (3.6), (3.8) und (3.9) den Typ (3.2b) mit $R^* \equiv 1$.

Ist in diesem Beispiel $R=0$ und $p_o=0$, so ist nach (3.10) und nach der Identität $\nabla_k l_i = 0$ der Vektor γ_{ok} der Nullvektor, und somit ist nach (3.2b) $R^*_{oijk}=0$. Die geometrische Bedeutung dieser Relation ist die Existenz des absoluten Parallelismus der Linienelemente l^i im $\mathfrak{A}_n$-Raum, da die Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungssystems $\overset{*}{\omega}{}^i(d)=0$, d. h. die Formeln:

$$(\overset{*}{\omega}{}^i)' \equiv [\overset{*}{\omega}{}^k \overset{*}{\omega}{}^i{}_k] - P^{*i}_{o\ jk}[dx^j \overset{*}{\omega}{}^k] - R^{*i}_{o\ jk}[dx^j dx^k] = 0$$

(vgl. [2] § 42, S. 38), in diesem Falle erfüllt sind.

Der Hauptkrümmugnstensor (1.15a) ist aber bei diesem Beispiel im allgemeinen von Null verschieden, auch in dem Falle, in dem der Hauptkrümmungstensor $\bar{R}_j{}^i{}_{kl}$ des Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$ Null ist. Auf Grund der Relation $p_o=0$ ist nämlich nach (1.18a) in diesem Falle

$$\Phi_j{}^i{}_{kl} = 2\delta^i_{[l}(p_{k]}p_j - \nabla_{k]}p_j)$$

und nach (1.18) beweist das unsere Behauptung. Ein absoluter Parallelismus der Vektoren existiert also im $\mathfrak{A}_n$-Raum auch dann nicht, wenn das im $\mathfrak{F}_n$-Raum gültig war. (Vgl. [2] § 43.)

B e i s p i e l C. Nehmen wir an, daß $A_{oik}=0$ ist, so wird nach den Formeln (3.6) und (3.8) $\bar{R}^*_{oikl} = \bar{R}_{oikl}$ bestehen. Wenn also (3.9) gültig war, so ist auch der $\mathfrak{A}_n$-Raum ein Raum von skalarer Krümmung dritter Art. Wenn wir für A_{ijk} die Form

$$(3.11) \qquad A_{ijk} = g_{ij} p_k \qquad p_k = \partial_k p(x)$$

nehmen (p_k ist ein nur vom Orte x^i abhängiger Gradientvektor), so bekommt man nach (1.18a) $\Phi_j{}^i{}_{kl}=0$, d. h. es stimmen nach (1.18) sogar die Hauptkrümmungstensoren der $\mathfrak{A}_n$- und $\mathfrak{F}_n$-Räume überein. Bedingen wir noch die Relation $\mu_i{}^j{}_k=0$, so wird nach (0.7)

$$(3.11a) \qquad M^{*i}_{j\ k} = A_j{}^i{}_k$$

gültig sein, und auf Grund der Formeln (1.15) und (1.17) werden außer den Krümmungstensoren $\bar{R}^{*j}_{i\ kl}$ und $R^{*j}_{i\ kl}$ auch die Krümmungstensoren $S^{*j}_{i\ kl}$ des $\mathfrak{A}_n$- und $\mathfrak{F}_n$-Raumes übereinstimmen. Das können wir im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 1. *Bestehen die Relationen* (3. 11) *und* (3. 11a), *so sind die Krümmungstensoren* (1. 15), (1. 15a) *und* (1. 17) *des* $\mathfrak{A}_n$*-Raumes mit den entsprechenden Krümmungstensoren des Finslerraumes* $\mathfrak{F}_n$ *identisch.*

§ 4. Definition der affin-skalaren Räume. Beispiele

In diesem Paragraphen wollen wir die metrisch-affinen Räume $\mathfrak{B}_n$ (vgl. die Definition 2 in der Einleitung) von skalarer Krümmung definieren. Wir wollen diese Definition in der Weise festlegen, daß die metrisch-affinen Räume $\mathfrak{B}_n$ von skalarer Krümmung, die wir kurz als affin-skalare Räume bezeichnen wollen, eben die Finslerräume $\mathfrak{F}_n$ von skalarer Krümmung bestimmen, falls $A_i{}^j{}_k=0$ ist. Die Definition bestimmen wir mit Hilfe des Tensors $K^{*i}{}_j$, da daraus die übrigen Krümmungstensoren auf Grund der Formeln (2. 5) und (2. 6) schon bestimmbar sind.

Definition 4. *Ein metrisch-affiner Raum* $\mathfrak{B}_n$ *soll ein affin-skalarer Raum* $\mathfrak{B}_n$ *von erster, zweiter, bzw. dritter Art genannt werden, falls* K^{*i} *die Form:*

$$K^{*i}{}_j = K^* F^2(\gamma^i{}_j \gamma_{oo} - \gamma^i{}_o \gamma_{oj}), \tag{4. 1}$$

$$\text{(a)}\quad K^{*i}{}_j = K^* F^2(\gamma^i{}_j - \gamma^i{}_o l_j), \qquad \text{(b)}\quad K^{*i} = K^* F^2(\delta^i_j \gamma_{oo} - l^i \gamma_{oj}), \tag{4. 2}$$

bzw.

$$K^{*i}{}_j = K^* F^2(\delta^i_j - l^i l_j) \tag{4. 3}$$

hat. (Für die Bedeutung von γ_{ik} bzw. für die Benennung „skalarer Raum zweiter Art" vgl. unsere Definition 3, und die nachfolgenden Zeilen.)

Offenbar entsteht (4. 2) von der Formel (4. 1) dadurch, daß wir in den beiden Gliedern von (4. 1) je ein γ_{ij} durch den metrischen Grundtensor g_{ij} ersetzen. Ist nun $A_i{}^j{}_k=0$, und $\gamma_{ik}=g_{ik}$, so bestimmt jeder der Type (4. 1)—(4. 3) einen Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ von skalarer Krümmung (vgl. [1], § 13, insb. Gleichung (13. 3)). Die Existenz dieser Typen wollen wir wieder durch Beispiele zeigen.

Vor allem bemerken wir, daß ein $\mathfrak{B}_n$-Raum auf Grund von (0. 6) und (2. 3) — abgesehen von dem metrischen Grundtensor g_{ik} — allein durch die Angabe von

$$A^i \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2} A_j{}^i{}_k v^j v^k \tag{4. 4}$$

bestimmt werden kann, während nach den Formeln (2. 3) und (0. 8) $A_i{}^j{}_k$ überhaupt nicht in expliziter Form bekannt sein muß.

Zweitens bemerken wir, daß der Krümmungsskalar K^* in den Räumen vom Typ (4. 1) und (4. 2) in manchen Fällen mit dem Tensor γ^i_j vereinigt werden könnte, d. h. man könnte in (4. 1) im Falle $K^*>0$ statt γ_{ik} den Tensor $\overset{*}{\gamma}_{ik}\overset{\text{def}}{=}\sqrt{K^*}\gamma_{ik}$ bzw. im Falle (4. 2) $\overset{*}{\gamma}_{ik}\overset{\text{def}}{=}K^*\gamma_{ik}$ einführen. Die Formeln (4. 1) und (4. 2), ausgedrückt mit γ^*_{ik}, würden dann eine einfachere Struktur haben. Befriedigt aber γ_{ij} eine charakteristische Relation (wie z. B. $\overset{*}{\nabla}_k\gamma_{ij}=0$ ist), die für γ^*_{ij} schon nicht gültig ist, so ist es zweckmäßig den Krümmungstensor $K^{*i}_{\ \ j}$ des affin-skalaren Raumes in der Form (4. 1) bzw. (4. 2) zu bestimmen.

Drittens bemerken wir die im folgenden wichtigen Relationen

$$l^i_{\ ;j}=0, \qquad F_{;j}=0, \tag{4.5}$$

wo das Semikolon die schon im Paragraphen 2 benützte Berwaldsche kovariante Ableitung bedeutet.

Beispiel A'. Nehmen wir an, daß $A^i=\frac{1}{2}F^2p^i$ ist, wo p^i einen kontravarianten Vektor bedeutet. Z. B. führt der durch (3. 9a) angegebene Tensor A^j_{ik} zu diesem Vektor. Beachten wir jetzt die Formeln (2. 7) und (4. 5), und nehmen wir noch an, daß der zu Grunde gelegte Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ ein Raum von skalarer Krümmung ist, d. h.

$$K^i_j=F^2K(\delta^i_j-l^il_j) \tag{4.6}$$

besteht, so wird nach der Bezeichnung:

$$\gamma^i_j\overset{\text{def}}{=}p^i_{\ ;j}-\tfrac{1}{2}p^i\|_{j;o}+p^ip_j+\tfrac{1}{2}F^2(\partial^2_{\dot v^t\dot v^j}p^i)p^t- \tag{4.7}$$
$$-\tfrac{1}{2}p^t\|_j l_t p^i+p^i\|_j p_o-\tfrac{1}{4}p^i\|_t p^t\|_j+K\delta^i_j$$

der Krümmungstensor $K^{*i}_{\ \ j}$ die Form (4. 2a) haben, der $\mathfrak{B}_n$-Raum ist also ein affin-skalarer Raum von zweiter Art. Der Krümmungsskalar ist jetzt $K^*\equiv1$.

Beispiel B'. Nehmen wir an, daß im Beispiel A' $p^i=l^i$ ist. Nach (4. 5), (1. 6) (a) bekommt man von der Formel (4. 7):

$$\gamma^i_j=(\tfrac{1}{4}+K)\delta^i_j+\tfrac{3}{4}l^il_j. \tag{4.8}$$

Da im Beispiel A' der Tensor $K^{*i}_{\ \ j}$ die Form (4. 2a) hatte, wird jetzt nach (4. 8) und wegen $K^*=1$ (vgl. Beispiel A'):

$$K^{*i}_{\ \ j}=F^2(\tfrac{1}{4}+K)(\delta^i_j-l^il_j), \tag{4.9}$$

der $\mathfrak{B}_n$-*R*aum ist also ein affin-skalarer Raum von dritter Art mit dem Krümmungsskalar $(\frac{1}{4}+K)$. Wir haben also von einem Raume $\mathfrak{F}_n$ von skalarer Krümmung (vgl. Formel (4. 6)) wieder einen Raum von skalarer Krümmung bekommen, der Krümmungstensor hat sich aber dabei verändert, während in Satz 1 eben der Krümmungstensor sich nicht veränderte. Nach den Formeln (4.6) und (4.9) können wir das im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 2. *Ist* $\mathfrak{F}_n$ *ein Finslerraum von skalarer Krümmung, in dem also* (4.6) *gültig ist, und ist*

$$A^i = \tfrac{1}{2} F^2 l^i,$$

so ist der zugehörige $\mathfrak{B}_n$*-Raum ein affin-skalarer Raum von dritter Art, dessen Krümmungstensor* $K^{*i}_{\ j}$ *sich von* $K^i_{\ j}$ *nur um einen skalaren Faktor unterscheiden kann. Es ist:*

$$K^{*i}_{\ j} = \frac{4K+1}{4K} K^i_{\ j}.$$

Beispiel C′. Nehmen wir an, daß (4.6) besteht und

$$A^i = v^i p_r v^r, \qquad p_r = p_r(x^1, \ldots, x^n)$$

ist. Beachten wir jetzt, daß neben (4.5) auch $v^i_{\ ;j} = 0$ besteht, so bekommt man aus der Formel (2.7) den Typ (4.2b), mit

$$\gamma_{oj} = K l_j + p_o p_j - 2 p_{o\,;\,j} + p_{j\,;\,o}.$$

Für γ_{ij} kann in diesem Falle

$$\gamma_{ij} = K l_i l_j + p_i p_j - 2 p_{i\,;\,j} + p_{j\,;\,i}$$

gesetzt werden.

§ 5. Parallelübertragung des Linienelementes in den verschiedenen skalaren Räumen

Zu Grunde gelegt sei wieder ein $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung. Nehmen wir an, daß die Übertragungsparameter (0.6) in i, k symmetrisch sind; in diesem Falle existieren infinitesimale Parallelogramme im $\mathfrak{A}_n$-Raum. Die Parallelübertragung des normierten Llnienelementes ist durch

$$\overset{*}{\omega}{}^i(d) = 0 \tag{5.1}$$

charakterisiert. Führt man in einem $\mathfrak{A}_n$-Raum mit symmetrischen Übertragungsparametern den Vektor l^i parallel um ein infinitesimales Parallelogramm herum, so bekommt man nach (5.1) und (0.10) für die Veränderung von l^i:

$$(\delta d - d\delta) l^i = R^{*i}_{o\ jk} \delta x^j dx^k. \tag{5.2}$$

Bezüglich der Parallelübertragung des Vektors l^i in den Finslerräumen um ein infinitesimales Parallelogramm besteht der folgende

Satz von Berwald. „1) Führt man in einem Finslerschen Raum skalarer nicht konstanter Krümmung R ein beliebiges normiertes Linienelement parallel um ein willkürliches infinitesimales Parallelogramm herum, so unterscheiden sich seine Anfangs- und Endlage um einen Vektor, der (von Größen höherer als zweiter Ordnung abgesehen) der 3-Richtung bezw. 2-Richtung angehört, die durch das Linienelement und die 2-Richtung des Parallelogramms aufgespannt wird. Wenn insbesondere die 2-Richtung des Parallelogramms senkrecht zu einem der Vektoren mit den kovarianten Komponenten l_i oder $R_{\|i}$-ist, so gehört der Differenzvektor (bis auf Größen mindestens dritter Ordnung) der 2-Richtung des Parallelogramms an. Ist die 2-Richtung des Parallelogramms zu beiden Vektoren l_i und $R_{\|i}$ senkrecht, so stimmen Anfangs- und Endlage des Linienelements in zweiter Ordnung überein.

2) Führt man in einem Finslerschen Raum konstanter Krümmung ein beliebiges normiertes Linienelement parallel um ein willkürliches infinitesimales Parallelogramm herum, so unterscheiden sich seine Anfangs- und Endlage um einen Vektor, der (von Größen höherer als zweiter Ordnung abgesehen) der 2-Richtung des Parallelogramms angehört. Wenn insbesondere die Krümmung Null ist oder wenn die 2-Richtung des Parallelogramms zum Linienelement senkrecht ist, so stimmen Anfangs- und Endlage in zweiter Ordnung überein." (Vgl. [1] § 14, S. 775.)

Im folgenden werden wir das Analogon dieses Berwaldschen Satzes in unseren $\mathfrak{A}_n$- und $\mathfrak{B}_n$-Räumen formulieren.

Satz 3. *Der Berwaldsche Satz über die Parallelübertragung von l^i um ein infinitesimales Parallelogramm in den Finslerräumen von skalarer Krümmung ist in den $\mathfrak{A}_n$-Räumen von skalarer Krümmung dritter Art gültig. Auch für den Typ* (3. 2a) *ist der Berwaldsche Satz gültig, die Veränderung von l^i wird aber in den verschiedenen Fällen nicht von der drei- bzw. Zweirichtung $(l^i, dx^i, \delta x^i)$ bzw. $(dx^i, \delta x^i)$ sondern von der durch die Vektoren*

$$\gamma^{io}, \quad \lambda^i \overset{\text{def}}{=} \gamma^i_{\,k} dx^k, \quad \mu^i \overset{\text{def}}{=} \gamma^i_{\,k} \delta x^k \tag{5.3}$$

bestimmten drei- bzw. Zweirichtung (λ^i, μ^i) abhängig sein.

Beweis. Nach (3. 2a) und (5. 2) ist:

$$\begin{aligned}(\delta d - d\delta) l^i = &\left(\tfrac{1}{3} R^*\|_j \delta x^j + R^* l_j \delta x^j\right)\lambda^i - \\ &-\left(\tfrac{1}{3} R^*\|_k dx^k + R^* l_k dx^k\right)\mu^i + \tfrac{2}{3}\gamma^{io} R^*\|_{[k} l_{j]} \delta x^j dx^k.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Für den Typ (3. 3) ist in (5. 4) nach den Definitionsformeln (5. 3): $\gamma^i_{\,k} = \delta^i_k$, $\lambda^i = dx^i$, $\mu^i = \delta x^i$. Die Formel (5. 4) entspricht der Formel (14. 1) von [1]. Der Vergleich dieser beiden Formeln ergibt unmittelbar die Richtigkeit unseres Satzes 3.

Der Berwaldsche Satz (vgl. [1] § 14) über die Parallelübertragung der normierten Linienelemente in Finslerräumen skalarer Krümmung um ein infinitesimales Parallelogramm ist in den $\mathfrak{A}_n$-Räumen vom Typ (3. 1) und (3. 2b) nicht gültig falls der Krümmungsskalar R^* auch von den v^i abhängig ist. Ist aber der Krümmungsskalar von v^i unabhängig, so kann das Analogon des Berwaldschen Satzes für jede Art der $\mathfrak{A}_n$-Räume skalarer Krümmung bestimmt werden. Für die Typen (3. 2a) und (3. 3) wurde das schon in unserem Satz 3 gezeigt. Wir brauchen also nur die Typen (3. 1) und (3. 2b) untersuchen. Es besteht der

Satz 4. *Ist der $\mathfrak{A}_n$-Raum ein Raum von skalarer Krümmung erster Art, und ist der Krümmungsskalar nur vom Orte x^i unabhängig, so gilt der Berwaldsche Satz über die Parallelübertragung von l^i in den $\mathfrak{F}_n$-Räumen von konstanter Krümmung* (vgl. [1] § 14, 2), S. 775) *auch in diesen Räumen, statt der Zweirichtung $(dx^i, \delta x^i)$ steht aber jetzt der Zweirichtung (λ^i, μ^i)* (vgl. (5. 3)) *und statt l_i steht γ_{0i}. Ist der $\mathfrak{A}_n$-Raum vom Typ* (3. 2b), *so ist $\lambda^i = dx^i$, $\mu^i = \delta x^i$ und im Berwaldschen Satz soll nur l_i mit γ_{0i} vertauscht werden.*

Bemerkung. In den entsprechenden Berwaldschen Untersuchungen kommen Finslerräume konstanter Krümmung vor, während wir von dem Krümmungsskalar R^* nur die Unabhängigkeit von den v^i bedingt haben. Im Finslerschen Fall folgt aber nach dem Schurschen Satz [1], § 16, daß der Krümmungsskalar eine Konstante ist, falls sie von den v^i nicht abhängt.

Beweis des Satzes 4. Auf Grund von (5. 2) und (3. 1) ist

$$(\delta d - d\delta) l^i = R^*[(\gamma_{0j}\delta x^j)\lambda^i - (\gamma_{0k} dx^k)\mu^i]. \tag{5. 5}$$

(5. 5) entspricht der Gleichung (14. 3) von [1]. Vergleichen wir diese beiden Formeln, so folgt unmittelbar der Satz 4.

Wir wollen nun die Parallelübertragung des Linienelementes v^i um ein infinitesimales Parallelogramm in einem affin-skalaren Raum $\mathfrak{B}_n$ untersuchen. In einem Berwaldschen affinen Raum $\mathfrak{B}_n$ ist die Veränderung des Linienelementes v^i nach einer Parallelübertragung um ein infinitesimales Parallelogramm

$$(\delta d - d\delta) v^i = K^{*i}_{j\ k} \delta x^j dx^k \tag{5. 6}$$

(vgl. [1] Gleichung (7. 16)). Um die Lösung unseres Problems zu bekommen, müssen wir also von den Formeln (4. 1)—(4. 3) immer den Krümmungstensor $K^{*i}_{j\ k}$ bestimmen.

Für den Typ (4. 3) bekommt man nach (2. 5) für $K^{*i}_{j\ k}$ die Form:

$$K^{*i}_{j\ k} = 2FK^*\delta^i_{[k} l_{j]} + \tfrac{2}{3} FK^*\|_{[j}(\delta^i_{k]} - l^i l_{k]}), \tag{5. 7}$$

die abgesehen vom Faktor F — mit dem Typ (3. 3) identisch ist, die auch einen Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ von skalarer Krümmung charakterisiert. Auf Grund von (5. 6) und (5. 7) besteht also der folgende

Satz 5. *Für die Parallelübertragung des Linienelementes v^i um ein infinitesimales Parallelogramm besteht in einem affin-skalaren Raum dritter Art der Berwaldsche Satz* (vgl. [1] § 14), *wenn darin statt l^i das Linienelement v^i gesetzt wird.*

Für die anderen Typen der affin-skalaren Räume könnten auf Grund von (5. 6) und (4. 1)—(4. 2b) leicht ähnliche Sätze bestimmt werden. Z. B. für den Typ (4. 1) ist

$$K_j^{*i}{}_k = F\{\tfrac{4}{3} l_{[j}(\gamma^i{}_{k]}\gamma_{oo} - \gamma^i{}_{|o}\gamma_{o|k]}) +$$

$$+ \tfrac{2}{3} K^* \|_{[j}(\gamma^i{}_{k]}\gamma_{oo} - \gamma^i{}_{|o}\gamma_{o|k]}) + \tfrac{2}{3} K^* [(\gamma^i{}_{[k}\gamma_{|oo|})\|_{j]} - (\gamma^i{}_o\gamma_{o[k})\|_{j]}]\}$$

und somit besteht nach (5. 6) der

Satz 6. *In einem affin-skalaren Raum von erster Art verändert sich das Linienelement v^i bei einer Parallelübertragung um ein infinitesimales Parallelogramm um einen Vektor, der eine lineare Kombination der Vektoren* (5. 3), *und*

$$\varrho^i \overset{\text{def}}{=} \gamma^i{}_{[k}\|_{j]}\delta x^j dx^k, \quad \sigma^i \overset{\text{def}}{=} (\gamma^i{}_o\gamma_{o[k})\|_{j]}\delta x^j dx^k.$$

ist.

O. Varga gab in seinem Aufsatz [12] eine andere Charakterisierung der Finslerräume skalarer und konstanter Krümmung. Er führte das normierte Linienelement l^i um eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve. Die Analoga dieser Untersuchungen können in erster Reihe in unseren affinskalaren $\mathfrak{B}_n$-Räumen bestimmt werden, da diese die Ausdrückbarkeit von $K_j^{*i}{}_k$ durch $K^{*i}{}_k$ wesentlich benützen, während in den $\mathfrak{A}_n$-Räumen $R_o^{*i}{}_{jk}$ im allgemeinen durch $R_o^{*i}{}_{ok}$ nicht unmittelbar ausdrückbar ist, wie im Finslerschen Raum (vgl. [1] Formeln (13. 3) und (13. 5)). Wir werden im folgenden zeigen, daß *die Vargasche Charakterisierung der $\mathfrak{B}_n$-Räume von skalarer Krümmung für die affinskalaren $\mathfrak{B}_n$-Räume zweiter Art und vom Typ* (4. 2b) *gültig ist* (vgl. [12] Satz 2).

Die Parallelübertragung längs einer Kurve $x^i = x^i(t)$ des normierten Linienelementes l^i in einem metrisch-affinen $\mathfrak{B}_n$-Raum ist durch

$$\frac{dl^i}{dt} = -G^{*i}{}_k(x, l)\frac{dx^k}{dt} \tag{5. 8}$$

festgelegt. Ist C eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve, die auf der zweidimensionalen Fläche:

$$x^i = x^i(u, v)$$

liegt, d. h. die Gleichungen

$$C: \quad x^i = x^i(u(t), v(t))$$

hat, so ist zwischen Anfangs- und Endlage von l^i nach einer Parallelverschiebung längs C der Differenzvektor

$$\Delta l^i = \frac{1}{2F} \underset{(0)\,(0)}{K_j^{*i}{}_k(x, v)} \left(\frac{\partial (x^k, x^j)}{\partial (u, v)} \right)_{t=t_0} \Delta \bar{S} + O^i(\varepsilon^3), \tag{5.9}$$

wo $\Delta \bar{S}$ den von der Kurve C eingeschlossenen (euklidisch gemessenen) Flächeninhalt bedeutet. Die Relation (5. 9) kann dem Finslerschen Fall vollständig analog abgeleitet werden (Vgl. [12] (1, 23)—(1, 32).)[6]), da die Gleichung (5. 8) mit der entsprechenden Relation des Finslerraumes (vgl. [12] Gleichung (1, 19)) vollständig analog ist.

Nach der Bezeichnung

$$\frac{\partial x^i}{\partial u} \Delta \bar{S} = p^i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial v} \Delta \bar{S} = q^i$$

bekommt man bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in ε von der Gleichung (5. 9) die folgende Formel:

$$\Delta l^i = \frac{1}{F} K_j^{*i}{}_k p^j q^k. \tag{5.10}$$

Berechnen wir nun $K_j^{*i}{}_k$ mittels (4. 2b) unter Beachtung von (1. 6) (a) von der Definitionsformel (2. 5), so bekommt man nach (5. 10) für Δl^i die Formel

$$\Delta l^i = A p^i + B q^i + C l^i,$$

wo A, B und C skalare Größen sind; wenn wir diese Formel wieder mit (5. 10) vergleichen, so wird:

$$\frac{1}{F} K_j^{*i}{}_k p^j q^k = A p^i + B q^i + C l^i \text{ }^{7)}. \tag{5.11}$$

Wegen der schiefen Symmetrie von $K_j^{*i}{}_k$ in j, k, und wegen der Willkürlichkeit von p^i, q^i bekommt man von der Gleichung (5. 11), daß $\frac{1}{F} K_j^{*i}{}_k$ die Form:

$$\frac{1}{F} K_j^{*i}{}_k = 2 \delta^i_{[j} A_{k]} + B_{jk} l^i \tag{5.12}$$

hat, wo B_{jk} einen schiefsymmetrischen Tensor bedeutet. Wir beweisen jetzt den folgenden

Satz 7. *Die Formel* (5. 12) *ist für die affin-skalaren Räume zweiter Art und vom Typ* (4. 2b) *charakteristisch.*

---

6) $K_j^{*i}{}_k$ entspricht im Finslerraum $FR_o{}^i{}_{jk}$. Im [12] ist statt $R_o{}^i{}_{jk}$ die Bezeichnung $R_{kj}^{\cdot\cdot i}$ benützt. Auch die Bedeutung von $O^i(\varepsilon^3)$ befindet sich in [12], S. 148.

7) Diese Gleichung ist mit der Gleichung (2, 30) von [12] analog.

Beweis. Wir haben schon gezeigt, daß in den affin-skalaren Räumen vom Typ (4. 2b) die Relation (5. 12) gültig ist. Nehmen wir jetzt an, daß (5. 12) besteht, wir müssen zeigen, daß $K_{j\ k}^{*i}$ die Form (4. 2b) hat. Nach einer Kontraktion von (5. 12) mit l^j wird:

$$K^{*i}_{\ k} \equiv K_{j\ k}^{*i} l^j = F^2(l^i A_k - \delta^i_k A_o + B_{ok} l^i).$$

Nach der Bezeichnung

$$\gamma_{ok} \overset{\text{def}}{=} -A_k - B_{ok}$$

wird $K^{*i}_{\ k}$ die Form (4. 2b) haben, da B_{oo} wegen der schiefen Symmetrie von B_{ij} verschwindet, und somit $\gamma_{oo} = -A_o$ ist. Das beweist unsere Behauptung.

Der Typ (5. 12) charakterisiert auch die affin-skalaren Räume von dritter Art, wenn noch die Relation

$$A_k + B_{ok} = -K^* l_k$$

gültig ist. Das kann nach einer Kontraktion von (5. 12) mit l^j im Hinblick auf (4. 3) unmittelbar verifiziert werden.

Sind die Übertragungsparameter $L_{i\ k}^{*j}$ in i, k nicht symmetrisch, so bilden die Punkte:

$$P(x),\ Q(x+dx),\ R(x+\delta x),\ S(x+dx+\delta x+\delta dx),\ T(x+\delta x+dx+d\delta x)$$

ein infinitesimales Fünfeck. Da

$$\Delta x^i \overset{\text{def}}{=} (\delta d - d\delta)x^i = -\Omega_{k\ l}^{*i}[dx^k dx^l] \tag{5. 13}$$

besteht, falls dx^i parallel längs des infinitesimalen Fünfecks umgeführt wird, bekommt man auf Grund von (5. 1), (0. 10) und (1. 15) nach einer Parallelübertragung von l^i um das infinitesimales Fünfeck ebenso wie z. B. im Riemannschen Raum (vgl. [14], Chap. IV. § 8):

$$(\delta d - d\delta) l^i = -\tfrac{1}{2} R_{o\ jk}^{*i}[dx^j dx^k] + L_{o\ t}^{*i} \Delta x^t.$$

Ist also der $\mathfrak{A}_n$-Raum ein Raum von skalarer Krümmung, so kommt nach unserer letzten Formel zu den infinitesimalen Vektoren von den Sätzen 3 und 4 noch der durch (5. 13) *definierte Vektor Δx^i hinzu.*

§ 6. Relationen für den Krümmungsskalar. Der Schursche Satz

In den Räumen von skalarer Krümmung muß die kovariante Ableitung des Krümmungsskalars immer gewisse Relationen befriedigen, die aus den Bianchischen Identitäten d. h. in unserem Falle von den Gleichungen (1.23) und (2. 8) entstehen. Ist der Krümmungsskalar allein vom Orte x^i abhängig, so bekommt man aus diesen Identitäten im Finslerschen Fall den Schurschen

Satz, nach dem *der Krümmungsskalar eine Konstante ist, falls sie von den x^i unabhängig und die Dimension $n>2$ ist.* (Vgl. [1] § 16.)

In unseren $\mathfrak{A}_n$-Räumen von skalarer Krümmung und in unseren affinskalaren Räumen ist zwar der Schursche Satz nicht gültig, wir wollen aber kurz zeigen, wie die charakteristische Relation für den Krümmungsskalar ableitbar ist.

Im Falle der $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung müssen wir in die Gleichung (1. 23) die entsprechende Form von $R^{*i}_{o\,kl}$ von den Gleichungen (3. 1)—(3. 3) einsetzen, dann mit l^k eine Kontraktion und auf i, l eine Verjüngung durchführen. Wir bekommen auf diese Weise für den Krümmungsskalar R^* eine Gleichung von der Form:

$$\overset{*}{\nabla}_j R \varphi^j_k + \overset{*}{\nabla}_j R^* \|_r \chi^{rj}_{\ \ k} + R^* \psi_k = 0 \tag{6. 1}$$

wo φ^j_k, $\chi^{rj}_{\ \ k}$ und ψ_k durch $A^j_{i\,k}$ und g_{ij} bestimmt sind.

Aus dieser Formel folgt leicht der folgende

Satz 8. *Ist* $\psi_k \equiv 0$ *und* $\det(\varphi^j_k) \neq 0$, *so folgt aus der Unabhängigkeit des Krümmungsskalars* R^* *von* v^i, *daß* $R^* =$ konst. *ist. Bestehen die Relationen*

$$\varphi^j_k = \delta^j_k - l^j l_k, \quad \psi_k = 0, \tag{6. 2}$$

so ist die Behauptung bezüglich R^* *wieder gültig.*

Beweis. Aus $\psi_k = 0$ und $R^* \|_k = 0$ folgt nach (6. 1):

$$\varphi^j_k \partial_j R^* = 0, \tag{6. 3}$$

da für einen Skalar: $\overset{*}{\nabla}_j = \partial_j$ ist, falls der Skalar von den v^i unabhängig ist. Aus der Annahme: $\det(\varphi^j_k) \neq 0$ folgt somit nach (6. 3): $\partial_j R^* = 0$, und mit $R^* \|_k = 0$ zusammen beweist das die erste Hälfte des Satzes 8.

Die zweite Hälfte kann ebenso bewiesen werden, wie im Finslerschen Fall (vgl. [1] (16. 7) und die nachfolgenden Zeilen). Nach (6. 2) und nach der Bedingung $R^* \|_j = 0$ wird aus (6. 1):

$$\partial_j R^* (\delta^j_k - l^j l_k) = 0, \tag{6. 4}$$

woraus nach der Operation: $\|_m g^{km}$ die Relation $\partial_o R^* = 0$ folgt und das beweist nach (6. 4) die zweite Behauptung des Satzes 8.

Für die affin-skalaren Räume bekommen wir aus (2. 8) und aus den entsprechenden Formeln (4. 1)—(4. 3) in ähnlicher Weise eine zur (6. 1) analoge Relation für den Krümmungsskalar K^*. *Der Satz 8 wird dann auch für die affin-skalaren Räume gültig sein.*

§ 7. Grundzüge der Theorie der Hyperflächen. Theorie von Davies und Wegener

Eine Hyperfläche

$$\mathfrak{H}_{n-1}:\quad x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1})$$

kann in einem metrischen Linienelementraum in zwei Besichtspunkten behandelt werden. Erstens kann man $\mathfrak{H}_{n-1}$ als eine Mannigfaltigkeit der tangenten Linienelemente, zweitens als die Transversalfläche einer durch die Punkte von $\mathfrak{H}_{n-1}$ hindurchgehenden Schar von autoparallelen Linien betrachten. Für die Finslerräume hat die erste Auffassung E. T. DAVIES in seiner Arbeit [3], die zweite J. M. WEGENER in der Arbeit [15] ausführlich behandelt. Wir werden im folgenden die Bezeichnungen von E. T. DAVIES benützen mit dem Unterschied daß wir die Raumkomponenten der Tensoren durch lateinische, die Flächenkomponenten aber durch griechische Indizes bezeichnen werden. Dementsprechend bedeuten

$$B^i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \partial_\alpha x^i, \quad \partial_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$$

die Tangentenvektoren[8]) und C^i den Einheitsnormalenvektor der Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$.

Die Grundgrößen g_{ij} und $A_{ij}^{\ \ k}$ induzieren eine Flächenübertragung der Vektoren auf $\mathfrak{H}_{n-1}$, wir benötigen aber nur das induzierte invariante Differential des normierten Linienelementes l^α. Das invariante Differential eines Flächenvektors ξ^α könnte ebenso, wie im Finslerraum bestimmt werden (vgl. [3] und [5]).

Betrachten wir erstens die Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ als die Mannigfaltigkeit der tangenten Linienelemente, dann ist:

$$\mathfrak{H}_{n-1}:\quad x^i = x^i(u), \quad v^i = B^i_\alpha \dot{u}^\alpha,$$

wenn $(u^\varrho, \dot{u}^\varrho)$ die Linienelemente der Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ bedeuten. Die zum Linienelement $(u^\alpha, \dot{u}^\alpha)$ gehörige Einheitsnormale C^i ist jetzt aus den Gleichungen

$$g_{ij}(x^k(u), B^k_\alpha \dot{u}^\alpha) B^i_\varrho C^j = 0, \qquad (\varrho = 1, \ldots, n-1)$$

zu bestimmen. Nach der Formel (0. 10) bekommt man auf Grund der Identität (vgl. [3], Gleichungen (12) (e), (f), (g), oder [13] § 2, insbesondere Gleichung (2. 8))

$$B^i_\gamma B^\gamma_r + C^i C_r = \delta^i_r$$

die Relation:

$$\text{(7. 1)} \qquad \overset{*}{\omega}{}^i(d) = B^i_\gamma dl^\gamma + (B^i_\gamma B^\gamma_r + C^i C_r)(B^r_{\alpha\beta} + \overset{*}{L}{}^{\ r}_{j\ k} B^j_\alpha B^k_\beta) l^\alpha du^\beta,$$

---

8) Im folgenden werden die griechischen Indizes immer die Zahlen $1, \ldots, n-1$ durchlaufen, während die lateinischen Indizes, wie vorher, die Zahlen $1, \ldots, n$ bedeuten.

wo

$$B^{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \partial^2_{\alpha\beta} x^{\gamma}, \quad \partial^2_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$$

bedeutet. Nach den Bezeichnungen

$$\overset{*}{\omega}{}^{\gamma}(d) \overset{\text{def}}{=} dl^{\gamma} + B^{\gamma}_{r}(B^{r}_{\alpha\beta} + \overset{*}{L}{}^{r}_{j\,k} B^{j}_{\alpha} B^{k}_{\beta}) l^{\alpha} du^{\beta} \tag{7.2}$$

$$b_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} C_r(B^{r}_{\alpha\beta} + \overset{*}{L}{}^{r}_{j\,k} B^{j}_{\alpha} B^{k}_{\beta})\,^{9)} \tag{7.3}$$

wird aus (7. 1)

$$\omega^{*i}(d) = B^{i}_{\gamma} \overset{*}{\omega}{}^{\gamma}(d) + C^{i} b_{o\beta} du^{\beta}. \tag{7.4}$$

(7. 4) stimmt formal mit der Formel (2. 15) von [5] überein, die benützten Übertragungsparameter sind aber von den unsrigen selbstverständlich verschieden, da KIKUCHI in seiner Arbeit [5] nur den Finslerschen Fall behandelt hat.

Wir wollen nun in den Punkten einer Hyperfläche $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ diejenigen Linienelemente auszeichnen, die auf $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ normal stehen. Wenn wir zu diesen Linienelementen als Anfangselemente die autoparallelen Kurven konstruieren, so bekommen wir $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ als die Transversalfläche einer Schar von autoparallelen Kurven. Dieser Wegenerschen Auffassung entsprechend, wollen wir auch in diesem Falle das induzierte invariante Differential $\overset{*}{\omega}{}^{\alpha}$ von l^{α} bestimmen. Die Hyperflächen in dieser Auffassung werden wir immer durch einen Stern kennzeichnen.

Es ist jetzt $C^{i} = l^{i}$. Wir wollen die Zerlegung des Vektors $\overset{*}{\omega}{}^{i}$ nach dem n-Bein B^{i}_{ϱ}, l^{i} bestimmen. Diese Zerlegung hat die Form:

$$\overset{*}{\omega}{}^{i}(d) = -\pi^{\varrho} B^{i}_{\varrho} + \pi l^{i} \tag{7.5}$$

(vgl. [14] Gleichung (10)), wo π^{ϱ} und π die Formen

$$\pi^{\varrho} \overset{\text{def}}{=} c^{\varrho}{}_{\sigma} du^{\sigma} \tag{7.6a}$$

$$\pi \overset{\text{def}}{=} c_{\sigma} du^{\sigma} \tag{7.6b}$$

bedeuten. Da nach der Wegenerschen Auffassung B^{i}_{ϱ} und l^{i} zueinander orthogonal sind, bekommt man aus der Gleichung (7. 5) nach einer Kontraktion mit l_i auf Grund der Identität (1. 8)

$$\pi = A_{oot} dx^{t} = A_{oot} B^{t}_{\sigma} du^{\sigma},$$

d. h. nach (7. 6b):

$$c_{\varrho} = A_{oot} B^{t}_{\varrho}.$$

---

9) Unsere $b_{\alpha\beta}$ ist nicht direkt die zweite Grundform der Fläche (vgl. z. B. [9] (2. 9)). Doch sind schon $b_{o\beta}$ mit den entsprechenden Größen identisch, da die Abweichung unserer $b_{\alpha\beta}$ von der zweiten Grundform von $M^{*\beta}_{\alpha\ \gamma}$ abhängig ist, und $M^{*\beta}_{o\ \gamma} = 0$ besteht.

Für die Berechnung der expliziten Formel der $c^{\varrho}{}_{\sigma}$ beachten wir, daß wegen $l_j B^j_\varrho = 0$ die Relation

$$-B^j_\varrho \overset{*}{D} l_j = l_j \overset{*}{D} B^j_\varrho$$

besteht. Aus (7. 5) bekommt man somit nach einer Kontraktion mit B^σ_i:

(7. 8) $$\pi_\varrho \overset{\text{def}}{=} a_{\varrho\tau}\pi^\tau = -B^j_\varrho g_{ij} \overset{*}{D} l^i = l_j \overset{*}{D} B^j_\varrho + l^i(\overset{*}{D} g_{ij}) B^j_\varrho$$

wo

$$B^\varrho_i \overset{\text{def}}{=} a^{\varrho\beta} g_{ij} B^j_\beta, \qquad a_{\varrho\beta} \overset{\text{def}}{=} g_{ij} B^i_\varrho B^j_\beta$$

bedeuten und die $a^{\varrho\beta}$ die kontravarianten Komponenten des metrischen Grundtensors $a_{\alpha\beta}$ von $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ sind. Der Unterschied vom Finslerschen Falle besteht darin, daß in den $\mathfrak{A}_n$-Räumen im allgemeinen $\overset{*}{D} g_{ij} \neq 0$ ist. Nach (1. 1), (1. 4) und (1. 5) ist

$$\overset{*}{D} g_{ij} = -2(A_{ij|l} A^l_{0\,k} + A_{(ij)k}) dx^k - 2\mu_{(ij)k} \overset{*}{\omega}^k(d).$$

Mit Hilfe dieser Formel bekommen wir von den Formeln (7. 8) und (7. 6a) im Hinblick auf (0. 7a):

(7. 9) $$c_{\varrho\sigma} = a_{\varrho\tau} c^\tau{}_\varrho = l_j(\partial^2_{\varrho\sigma} x^j + L^{*j}_{i\ k} B^i_\varrho B^k_\sigma) - 2A_{(0j)k} B^j_\varrho B^k_\sigma.$$

Im folgenden benötigen wir noch die Zerlegung von $\overset{*}{D} B^i_\varrho$ nach dem n-Bein B^i_ϱ, l^i. Der Vektor $\overset{*}{D} B^i_\varrho$ hat die Form:

(7. 10) $$\overset{*}{D} B^i_\varrho = \pi^\tau{}_\varrho B^i_\tau + \varphi_\varrho l^i.$$

Nach einer Kontraktion mit l_i bekommt man für φ_ϱ:

(7. 11) $$\varphi_\varrho = l_j \overset{*}{D} B^j_\varrho = l_j(\partial^2_{\varrho\sigma} x^j + L^{*j}_{i\ k} B^i_\varrho B^k_\sigma) du^\sigma$$

und nach einer Kontraktion der Gleichung (7. 10) mit B^σ_i wird im Hinblick auf (7. 5) und (7. 6a):

(7. 12) $$\pi^\sigma{}_\varrho \overset{\text{def}}{=} B^\sigma_i \overset{*}{D} B^i_\varrho = \gamma_\varrho{}^\sigma{}_\tau du^\tau$$

mit

(7. 12a) $$\gamma_\varrho{}^\sigma{}_\tau \overset{\text{def}}{=} B^\sigma_i(\partial^2_{\varrho\tau} x^i + L^{*i}_{j\ k} B^j_\varrho B^k_\tau) - M^{*\sigma}_{\varrho\ \varkappa} c^\varkappa{}_\tau,$$

wo $M^{*\sigma}_{\varrho\ \varkappa}$ selbstverständlich die Projektion des Tensors $M^{*j}_{i\ k}$ auf $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ ist.

Jetzt werden wir die Hyperfläche $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ durch zwei Differentialgleichungssysteme charakterisieren. Ein Vergleich der Formeln (7. 11) und (7. 9) gibt:

(7. 13) $$\varphi_\varrho = (c_{\varrho\sigma} + 2A_{(0j)k} B^j_\varrho B^k_\sigma) du^\sigma.$$

Beachten wir jetzt, daß l^i von den $u^1, \dots, u^{n-1}$ abhängig ist, so bekommt man die beiden charakteristischen Differentialgleichungssysteme der Hyperflächen durch Gleichsetzen der Koeffizienten von du^α von (7. 5), (7. 6a) und (7. 6b) einerseits, und von (7. 10), (7. 12) und (7. 13) anderseits. Es wird:

$$\partial_\sigma l^i + \overset{*}{L}{}^i_{o\,k} B^k_\sigma = -c^\varrho{}_\sigma B^i_\varrho + c_\sigma l^i, \tag{7. 14}$$

$$\partial^2_{\varrho\sigma} x^i + \overset{*}{L}{}^i_{j\,k} B^j_\varrho B^k_\sigma = (\gamma_\varrho{}^\iota{}_\sigma + \overset{*}{M}{}_\varrho{}^\iota{}_\varkappa c^\varkappa{}_\sigma) B^i_\iota + l^i (c_{\varrho\sigma} + 2 A_{(oj)k} B^j_\varrho B^k_\sigma). \tag{7. 15}$$

Diese beiden Formeln entsprechen den Gleichungen (13) von [15].

Mit der Bestimmung der charakteristischen Gleichungen (7. 14) und (7. 15) haben wir die Grundgleichungen der Hyperflächen auch in der Wegenerschen Auffassung festgelegt. Diesen zwei Auffassungen entsprechend können in den $\mathfrak{A}_n$-Räumen zwei verschiedene Type der autoparallelen Hyperflächen — die im Finslerschen Fall eben die Hyperebenen sind — bestimmt werden. Für die autoparallelen Hyperflächen geben wir die folgende

Definition 5. *Ist eine Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ die Mannigfaltigkeit der tangenten-Linienelemente (Daviessche Auffassung) und sind die autoparallelen Linien von $\mathfrak{H}_{n-1}$ auch im Sinne der Übertragung des $\mathfrak{A}_n$-Raumes autoparallel, so ist $\mathfrak{H}_{n-1}$ eine autoparallele Hyperfläche A_{n-1} erster Art.*

Ist die Hyperfläche $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ die Mannigfaltigkeit der normalen Linienelemente (Wegenersche Auffassung), und sind diese Linienelemente entlang der Hyperfläche parallel, so ist $\mathfrak{H}^*_{n-1}$ eine autoparallele Hyperfläche A^*_{n-1} zweiter Art.

Wir geben jetzt die analytische Kennzeichnung der autoparallelen Hyperflächen erster und zweiter Art. Die autoparallelen Linien einer Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ sind durch die Differentialgleichungen

$$\overset{*}{\omega}{}^\alpha(d) = 0, \qquad l^\alpha = \frac{1}{F}\,\frac{du^\alpha}{dt} \tag{7. 16}$$

bestimmt. Im Falle einer autoparallelen Hyperfläche A_{n-1} folgt aber aus $\overset{*}{\omega}{}^\alpha = 0$ die Relation $\overset{*}{\omega}{}^i = 0$, da die autoparallelen Linien von A_{n-1} auch in Bezug auf die Übertragung des $\mathfrak{A}_n$-Raumes autoparallel sind. Nach der Gleichung (7. 4) wird aber dann

$$b_{oo} = 0 \tag{7. 17}$$

bestehen, wo $b_{\alpha\beta}$ durch (7. 3) bestimmt ist. Umgekehrt, es folgt aus (7. 17) nach (7. 16) auf Grund der Gleichung (7. 4) die Relation $\overset{*}{\omega}{}^i = 0$. Wir können also behaupten:

Die Gleichung (7. 17) *ist die charakteristische Relation der autoparallelen Hyperflächen A_{n-1} erster Art.*

Für eine autoparallele Hyperfläche zweiter Art ist $\overset{*}{\omega}{}^i = 0$, falls die Kurve $x^i = x^i(t)$ auf der Hyperfläche A^*_{n-1} liegt, d. h. $x^i = x^i(u^\alpha(t))$ besteht. Es wird nach (0. 10)

$$\partial_\sigma l^i + L^{*i}_{o\ k} B^k_\sigma = 0. \tag{7. 18}$$

Nach (7. 14) bekommt man aber auf Grund dieser Gleichung $c^\varrho_\sigma = 0$ und $c_\sigma = 0$ und somit wird aus (7. 15)

$$\partial^2_{\varrho\sigma} x^i + L^{*\,i}_{j\ k} B^j_\varrho B^k_\sigma = \gamma_\varrho{}^\tau{}_\sigma B^i_\tau + 2 l^i A_{(oj)k} B^j_\varrho B^k_\sigma. \tag{7. 19}$$

Wir können somit wieder behaupten:

Die Differentialgleichungen (7. 18) *und* (7. 19) *charakterisieren die autoparallelen Hyperflächen* A^*_{n-1} *zweiter Art.*

Wir bemerken noch, daß für die A^*_{n-1}-Räume wegen $c_\sigma = 0$ immer

$$A_{ook} B^k_\sigma = 0 \tag{7. 20}$$

gültig ist, was wir im folgenden noch benützen werden. Wir verweisen noch darauf, daß aus der Definition 5 noch nicht gefolgert werden kann, daß A_{n-1}- bzw. A^*_{n-1}-Flächen in jedem Raume existieren. Wir werden sehen, daß die Existenz dieser Fläche die Form der Krümmungstensoren bestimmt.

Im Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ charakterisierte J. M. Wegener die Hyperebenen auch durch die Eigenschaft, daß die Hyperebenen jeden in ihr gelegenen Vektor bei Parallelverschiebung dauernd enthalten (vgl. [15] § 3). Für die A^*_{n-1}-Flächen ist diese Eigenschaft nur dann gültig, falls die Übertragung metrisch, d. h. $\overset{*}{D} g_{ik} = 0$ ist. In diesem Falle ist nämlich für einen Vektor ξ^i

$$g_{ik} \xi^i \overset{*}{\omega}{}^k + g_{ik} l^i \overset{*}{D} \xi^k = 0, \tag{7. 21}$$

wenn für ξ^i

$$g_{ik} l^i \xi^k = 0$$

besteht. Ist nun

$$g_{ik} l^i \overset{*}{D} \xi^k = 0,$$

d. h.: erfolgt die Änderung des Vektors in der Tangentenrichtung von A^*_{n-1}, so bekommt man aus (7. 21) die Relation:

$$g_{ik} \xi^i \overset{*}{\omega}{}^k (d) = 0. \tag{7. 22}$$

Da im Falle einer metrischen Übertragung $l_k \overset{*}{\omega}{}^k = 0$, folgt aus (7. 22) $\overset{*}{\omega}{}^k = 0$, da ξ^i einen beliebigen Vektor von A^*_{n-1} bedeuten kann.

§ 8. Charakterisierung der Räume von skalarer Krümmung mit Hilfe der autoparallelen Hyperflächen

Bekanntlich können die Riemannschen Räume von skalarer Krümmung auch dadurch charakterisiert werden, daß in diesen Räumen in jedem Punkte eine Hyperebene gelegt werden kann, deren Normalenvektor eine vorgegebene

Richtung hat. Diese Eigenschaft kann auch in den Erweiterungen der Riemannschen Räume von skalarer Krümmung übertragen werden, nur muß man statt der Hyperebenen die autoparallelen Hyperflächen in Betracht ziehen. In unserem Aufsatz [8] haben wir die Räume von skalarer Krümmung vierter Gattung eben durch diese Eigenschaft charakterisiert (vgl. [8] letzte Definition im Paragraphen 2). Auch in den Finslerraumen ist das gültig, d. h. der $\mathfrak{F}_n$-Raum ist ein Raum von skalarer Krümmung, falls zu jedem Linienelement (x^i, v^i) eine Hyperebene gelegt werden kann (vgl. der Hauptsatz I von [9], S. 12), wo v^i die Richtung des Normalenvektors ist.

Durch die Existenz der autoparallelen Hyperflächen bekommen wir einen neuen Typ der Räume von skalarer Krümmung. Wir definieren diese Räume durch die folgende

Definition 6. *Der $\mathfrak{A}_n$-Raum ist ein Raum von skalarer Krümmung vierter Art, falls in jedem Punkte eine autoparallele Hyperfläche erster Art A_{n-1} existiert, deren Normalenvektor C_i eine beliebig vorgegebene Richtung hat.*

Da für eine A_{n-1}-Fläche (7. 17) immer gültig ist, muß in einem $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung vierter Art die Gleichung (7. 17) vollständig integrabel sein. Auf Grund der Definitionsformel (7. 3) bekommt man aus (7. 17):

$$C_r(B^r_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta + L^{*r}_{o\ o}) = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit C^i, beachten wir dann die Relation

$$C^i C_r = \delta^i_r - B^i_\gamma B^\gamma_r$$

so bekommen wir:

$$B^i_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta - 2 B^i_\alpha G^{*\alpha}(u, \dot{u}) + 2 G^{*i}(x, v) = 0, \tag{8. 1}$$

wo G^{*i} durch (2. 3) und $G^{*\alpha}$ durch die Formeln

$$G^{*\alpha} \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2} B^\alpha_r (B^r_{\beta\gamma} \dot{u}^\beta \dot{u}^\gamma + L^{*r}_{i\ j}(x, v) v^i v^j)$$

bestimmt sind und $v^i = B^i_\varrho \dot{u}^\varrho$ gültig ist. Nach zweimaliger Ableitung nach $\dot{u}^\varrho$ folgt aus (8. 1)

$$B^i_{\varrho\sigma} - B^i_\alpha G^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma}(u, \dot{u}) + G^{*i}_{j\ k} B^j_\varrho B^k_\sigma = 0, \tag{8. 2}$$

wo

$$G^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma} \overset{\text{def}}{=} \partial^2_{\dot{u}^\varrho \dot{u}^\sigma} G^{*\alpha}, \qquad \partial^2_{\dot{u}^\varrho \dot{u}^\sigma} = \frac{\partial^2}{\partial \dot{u}^\varrho \, \partial \dot{u}^\sigma}$$

bedeutet.

Die Integrabilitätsbedingungen von (8. 2) bekommt man ebenso, wie im Finslerraum durch partielle Ableitungen von (8. 1) und darauffolgende Vertauschung der Indizes (vgl. z. B. [9] Formeln (3. 7), oder [5], Formeln (5. 6)):

$$(8.3a)\qquad B^j_\varrho B^k_\sigma B^l_\tau G^{*i}_{j\ kl}(x, v) = B^i_\alpha G^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma\tau}(u, \dot u), \qquad v^i = B^i_\beta \dot u^\beta,$$

$$(8.3b)\qquad C_i B^j_\varrho B^k_\sigma B^l_\tau G^{*i}_{j\ kl}(x, v) = 0,$$

$$(8.3c)\qquad B^j_\varrho B^k_\sigma B^l_\tau K^{*i}_{j\ kl}(x, v) = B^i_\alpha K^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma\tau}(u, \dot u), \qquad v^i = B^i_\beta \dot u^\beta,$$

$$(8.3d)\qquad C_i B^j_\varrho B^k_\sigma B^l_\tau K^{*i}_{j\ kl}(x, v) = 0,$$

wo

$$G^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma\tau} \overset{\text{def}}{=} \partial_{\dot u^\tau} G^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma}, \qquad G^{*i}_{j\ kl} \overset{\text{def}}{=} \partial_{v^l} G^{*i}_{j\ k}$$

bedeuten und $K^{*i}_{j\ kl}$ durch (2. 6) angegeben ist; $K^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma\tau}$ ist der aus $G^{*\alpha}$ gebildete entsprechende Berwaldsche Krümmungstensor. Die Gleichungen (8. 3b) bzw. (8. 3d) bestimmen je eine Forderung für die Raumtensoren $G^{*i}_{j\ kl}$ bzw. $K^{*i}_{j\ kl}$.

Es ist der folgende Satz gültig:

S a t z 9. *Notwendig und hinreichend dafür, daß der Raum ein $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung vierter Art sei, ist das Bestehen der Relationen* (8. 3) *für jedes n-Bein C^i, B^i_ϱ, in dem C^i auf dem Vektor l^i immer senkrecht steht.*

B e w e i s. Da in einem $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung vierter Art die charakteristischen Gleichungen (7. 17) der autoparallelen Hyperflächen, bzw. die mit (7. 17) gleichwertigen Gleichungen (8. 2) vollständig integrierbar sein müssen, sind die Gleichungen (8. 3) notwendig.

Nehmen wir jetzt an, daß die Relationen (8. 3) bestehen. Die Gleichungen (8. 2) sind dann vollständig integrierbar. Nehmen wir noch zu (8. 2) die Differentialgleichungen

$$\partial_\varrho x^i = B^i_\varrho$$

hinzu, so ist auch dieses erweiterte System vollständig integrierbar, da nach (8. 2)

$$\partial^2_{[\varrho\sigma]} x^i = 0$$

bestehen wird. Es existiert somit eine Hyperfläche

$$(8.4)\qquad \mathfrak{H}_{n-1}:\quad x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}), \qquad v^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} \dot u^\varrho,$$

die im Punkte $\overset{(0)}{x^i}$ die beliebig vorgegebenen Tangentenvektoren $\overset{(0)}{B^i_\varrho}$ hat. Das beweist eben den Satz 9, da diese Hyperfläche dann notwendig eine A_{n-1}-Fläche ist.

Bezüglich der Form des Tensors $G^{*i}_{j\ kl}$ können ähnliche Untersuchungen durchgeführt werden, wie im Finslerschen Fall (vgl. [9], § 3). Der Krümmungstensor $K^{*i}_{o\ kl}$ wird aber eine andere Form haben, da die speziellen Eigenschaften dieses Tensors anders sind, wie im Finslerraum $\mathfrak{F}_n$.

Nach einer Kontraktion von (8. 3d) mit l^ϱ und mit l^σ wird:

(8. 5) $$K_{o\ ok}^{*i} C_i B_\tau^k = 0$$

Nach einem Lemma von A. RAPCSÁK (vgl. [9] Formel (3. 8), Seite 9) hat dann $K_{o\ ok}^{*i}$ die Form

(8. 6) $$K_{o\ ok}^{*i} = A_k l^i + \delta_k^i B,$$

wo A_k einen kovarianten Vektor, bzw. B einen Skalar bedeutet. Eine Überschiebung von (8. 6) mit l^k gibt wegen $K_{o\ oo}^{*i} = 0$

(8. 7) $$B = -A_o.$$

Führen wir jetzt die Bezeichnung

(8. 8) $$\gamma_{ok} \overset{\text{def}}{=} -A_k, \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{ik} \overset{\text{def}}{=} -l_i A_k$$

ein, so wird nach (8. 7)

$$\gamma_{oo} = -A_o = B$$

bestehen, und (8. 6) geht in der Form (4. 2b) über.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

S a t z 10. *Ein $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung vierter Art ist immer ein affin-skalarer Raum vom Typ* (4. 2b).

Jetzt wollen wir diejenigen $\mathfrak{A}_n$-Räume betrachten, in denen autoparallele Hyperflächen zweiter Art (vgl. die Definition 5) existieren. Wir geben die folgende

D e f i n i t i o n 7. *Ein $\mathfrak{A}_n$-Raum ist von skalarer Krümmung fünfter Art, wenn in jedem Punkte P_0 eine autoparallele Hyperfläche A_{n-1}^* zweiter Art existiert, und die Normale von A_{n-1}^* in P_0 eine beliebig vorgegebene Richtung hat.*

Die autoparallelen Hyperflächen zweiter Art sind durch (7. 18) und (7. 19) charakterisiert. In einem $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung fünfter Art sind diese Differentialgleichungssysteme vollständig integrierbar, und die Integrabilitätsbedingungen von (7. 18) bestimmen die Form des Krümmungstensors $R_{o\ jk}^{*i}$.

Diese Integrabilitätsbedingungen können im Hinblick auf (7. 20) in der Form

(8. 9) $$R_{o\ kl}^{*i} B_\varrho^k B_\sigma^l = 0,$$

bestimmt werden. Da

$$\delta_m^i = B_\varkappa^i B_m^\varkappa + l^i l_m$$

besteht, folgt aus (8. 9) die Relation

(8. 10) $$R_{o\ \varrho\sigma}^{*\tau} B_\tau^i + R_{o\ \varrho\sigma}^{*o} l^i = 0$$

wo

$$R^{*\kappa}_{o\ \varrho\sigma} \overset{\text{def}}{=} R^{*i}_{o\ kl} B^{\kappa}_{i} B^{k}_{\varrho} B^{l}_{\sigma}, \qquad R^{*o}_{o\ \varrho\sigma} \overset{\text{def}}{=} R^{*o}_{o\ kl} B^{k}_{\varrho} B^{l}_{\sigma}$$

bedeuten. Eine Kontraktion von (8. 10) mit l_i bzw. mit $B^{\varkappa}_{i}$ gibt

$$R^{*o}_{o\ \varrho\sigma} = 0, \qquad R^{*\varkappa}_{o\ \varrho\sigma} = 0. \tag{8. 11}$$

Aus (8. 9) und (8. 11) wollen wir nun die Form von $R^{*i}_{o\ kl}$ bestimmen. Die Beindarstellung von $R^{*o}_{o\ ij}$ nach dem n-Bein B^{i}_{ϱ}, l^{i} (bezüglich der Methode vgl. [15], § 1) ist

$$R^{*o}_{o\ ij} = R^{*o}_{o\ o\varrho}(B^{\varrho}_{j} l_i - B^{\varrho}_{i} l_j). \tag{8. 12}$$

B e m e r k u n g. Unsere nachfolgende Methode ist im Wesentlichen mit der von A. RAPCSÁK benützten Methode (vgl. [10] § 3) identisch, nur müssen wir auch $R^{*o}_{o\ oj}$ bestimmen, da dieser Tensor im $\mathfrak{A}_n$-Raum im allgemeinen nicht verschwindet.

Eine Kontraktion mit l^{i} von (8. 12) gibt

$$R^{*o}_{o\ oj} = R^{*o}_{o\ o\varrho} B^{\varrho}_{j}. \tag{8. 13}$$

In ähnlicher Weise bekommt man für $R^{*i}_{o\ jk}$ unter Beachtung von (8. 11) und der schiefen Symmetrie von $R^{*i}_{o\ jk}$ in j, k:

$$R^{*i}_{o\ jk} = 2R^{*\varrho}_{o\ o\sigma} B^{i}_{\varrho} B^{\sigma}_{[k} l_{j]} + 2l^{i} R^{*o}_{o\ o\varrho} B^{\varrho}_{[k} l_{j]}. \tag{8. 14}$$

Eine Kontraktion mit l^{j} gibt auf Grund von (8. 13):

$$R^{*\varrho}_{o\ o\sigma} B^{i}_{\varrho} B^{\sigma}_{k} = R^{*i}_{o\ ok} - R^{*o}_{o\ ok} l^{i}.$$

Setzen wir diese Werte in (8. 14), so wird wegen (8. 13):

$$R^{*i}_{o\ jk} = 2R^{*i}_{o\ o[k} l_{j]}. \tag{8. 15}$$

In den $\mathfrak{A}_n$-Räumen von skalarer Krümmung fünfter Art ist der folgende Satz gültig:

S a t z 11. *Die Relation* (8. 15) *charakterisiert die $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung fünfter Art.*

B e m e r k u n g. Es kann leicht verifiziert werden, daß die Type (3. 2a) und (3. 3) für $R^* = konst.$ die charakteristische Gleichung (8. 15) befriedigen.

B e w e i s d e s S a t z e s 11. Die Notwendigkeit von (8.15) folgt daraus, daß (8. 15) die Integrabilitätsbedingungen von (7. 18) sind. Aus (7. 18) und (7. 14) folgt schon $c^{\varrho}_{\sigma} = 0$, $c_{\varrho} = 0$, die für die Hyperebenen zweiter Art charakteristisch sind. Die Integrabilitätsbedingungen von (7. 19) bestimmen keine weitere Bedingungen für den $\mathfrak{A}_n$-Raum. Das bedeutet, daß die Bedingung (8. 15) hinreichend ist, da aus (7. 18) und (0. 10) längs der Hyperfläche immer $\overset{*}{\omega}{}^i(d)=0$ folgt (vgl. [15] § 3).

§ 9. Zusammenhang mit anderen Untersuchungen

Wir wollen zunächst den Zusammenhang unserer $\mathfrak{A}_n$- und $\mathfrak{B}_n$-Räume von skalarer Krümmung mit den entsprechenden Punkträumen untersuchen. Nehmen wir an, daß

$$(9.\ 1)\qquad A_i{}^j{}_k(x,v) \overset{\text{def}}{=} L_i{}^j{}_k(x) - \Gamma_i^{*j}{}_k(x,v), \qquad M_j^{*i}{}_k = 0$$

ist, d. h. $L_i{}^j{}_k$ soll von den v^i unabhängig sein. Der $\mathfrak{A}_n$-Raum ist bezüglich der Übertragung nach der Formel (1. 1) ein Punktraum. Nehmen wir noch an, daß auch der durch (0. 1) definierte metrische Grundtensor von den v^i unabhängig ist, so bekommen wir die in unserem Aufsatz [8] behandelten affinen Erweiterungen des Riemmannschen Raumes.

Bestimmen wir nun aus den Formeln (0. 8) und (9. 1) die Übertragungsparameter $G_j^{*i}{}_k$, so wird:

$$G_j^{*i}{}_k = L_{(j}{}^i{}_{k)} \equiv L_j{}^i{}_k - \Omega_j{}^i{}_k, \quad \Omega_j{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} L_{[j}{}^i{}_{k]}\,.$$

Die Berechnung von $K_j^{*i}{}_{kl}$ gibt aus (2. 5) und (2. 6) im Hinblick auf (1. 15a)

$$(9.\ 2)\qquad K_j^{*i}{}_{kl} = R_j^{*i}{}_{kl} + 2\overset{*}{\nabla}_{[l}\Omega_{k]}{}^i{}_j - 2\Omega_j{}^t{}_{[k}\Omega_{l]}{}^i{}_t - 2\Omega_k{}^t{}_l\Omega_j{}^i{}_t\,.$$

Ist der Raum ein $\mathfrak{A}_n$-Raum von skalarer Krümmung vierter Art, so besteht die charakteristische Gleichung (8. 3d), wo jetzt die Funktionen alle allein von x^i abhängig sind. In diesem Falle muß aber $C_iK_j^{*i}{}_{kl}$ die Form:

$$C_iK_j^{*i}{}_{kl} = C_jA_{kl} + C_k\beta_{jl} + C_l\gamma_{jk}$$

haben (vgl. [4] Gleichung (17. 7)). Beachten wir jetzt die schiefe Symmetrie von $K_j^{*i}{}_{kl}$ in k, l, so folgt, daß

$$A_{(kl)} = 0, \qquad \gamma_{jl} = -\beta_{jl}$$

bestehen. Wegen der Willkürlichkeit von C_i wird dann $K_j^{*i}{}_{kl}$ die Form

$$(9.\ 3)\qquad K_j^{*i}{}_{kl} = 2\gamma_{j[k}\delta^i_{l]} + \delta^i_jA_{kl}, \qquad A_{(kl)} = 0$$

haben. Für $R_j^{*i}{}_{kl}$ bekommen wir aus (9. 2) die Formel:

$$(9.\ 4)\qquad \tfrac{1}{2}R_j^{*i}{}_{kl} = \gamma_{j[k}\delta^i_{l]} + \tfrac{1}{2}\delta^i_jA_{kl} - \overset{*}{\nabla}_{[l}\Omega_{k]}{}^i{}_j + \Omega_j{}^t{}_{[k}\Omega_{l]}{}^i{}_t + \Omega_k{}^t{}_l\Omega_j{}^i{}_t\,.$$

Diese Formel ist mit dem Formel (4. 1) von [8] identisch, wenn $A_{kl}=0$ gesetzt wird. γ_{jk} und A_{kl} sind durch die Forderung, daß der $\mathfrak{A}_n$-Raum ein

Raum von skalarer Krümmung vierter Art sei, nicht eindeutig bestimmt. Eben deshalb war in [8] möglich, außer (4. 1) noch die weitere Forderung (4. 2) zu stellen. Ist also dieser $\mathfrak{A}_n$-Raum ein Punktraum, so werden wir ihn, nach der in [8] verwendeten Terminologie, einen $\mathfrak{R}_n^*$-Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung nennen. Statt Satz 9 besteht jetzt der

Satz 12. *Notwendig und hinreichend dafür, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung sei, ist das Bestehen der Relationen* (9. 4) *und* (8. 3c).

Beweis. In einem Punktraum sind die Bedingungen (8. 3a) und (8. 3b) immer identisch erfüllt, da hier $G_{j\ kl}^{*i}=0$ ist. Aus (9. 4) folgt auf Grund von (9. 2) die Relation (9. 3), und aus der Formel (9. 3) folgt die Gültigkeit von (8. 3d). Nach Satz 9 folgt dann die Richtigkeit des Satzes 12.

Zuletzt wollen wir noch den Zusammenhang der $\mathfrak{A}_n$-Räume von skalarer Krümmung mit unseren früheren Untersuchungen [7] bestimmen. Unser Basisraum war ein Finslerraum, die durch (0. 6) bestimmte Übertragung enthält aber wegen der Willkürlichkeit von $A_{i\ k}^{j}$ auch die in [6] und [7] benützten Übertragungen. Ziehen wir in unserer Formel (3. 2b) den Index i herauf, so kann unmittelbar verifiziert werden, daß der $\mathfrak{A}_n$-Raum in den in unserem Aufsatz [7] als $\mathfrak{L}_n$-Raum skalarer Krümmung von erster Gattung bezeichneten Raum übergeht, wo γ_{0j} jetzt den Vektor l_j des $\mathfrak{L}_n$-Raumes bedeuten wird. Der Vektor l_j des $\mathfrak{L}_n$-Raumes ist aber im allgemeinen vom entsprechenden Vektor $\partial_{\dot{v}j}F$ des $\mathfrak{F}_n$-Raumes verschieden.

Literatur

[1] L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie. IV, *Annals of Math.*, **48** (1947), 755 - 781.

[2] E. Cartan, Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles*, **79** (Paris, 1934).

[3] E. T. Davies, Subspaces of a Finsler space, *Proc. London Math. Soc.*, **49** (1947), 19—39.

[4] L. P. Eisenhart, Non Riemannian Geometry, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, VIII (New York, 1927).

[5] S. Kikuchi, On the theory of subspaces in a Finsler space, *Tensor* (new series), **2** (1952), 67—79.

[6] A. Moór, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 85—120.

[7] A. Moór, Über den Schurschen Satz in allgemeinen metrischen Linienelementräumen, *Proc. Acad. Amsterdam* (series A), **60** (1957), 290—301.

[8] A. Moór, Erweiterung des Begriffs der Räume skalarer und konstanter Krümmung, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 53—77.

[9] A. Rapcsák, Eine neue Charakterisierung Finslerscher Räume skalarer und konstanter Krümmung und projektiv-ebene Räume, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), 1—18.

[10] A. Rapcsák, Metrische Charakterisierung der Finslerschen Räume mit verschwindender projektiver Krümmung, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 192—204.

[11] O. Varga, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math. Debrecen*, **1** (1949), 7—17.

[12] O. Varga, Eine geometrische Charakterisierung der Finslerschen Räume skalarer und konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), 143—156.

[13] O. Varga, Die Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen, *Deutsche Math.*, **6** (1941), 192 212.

[14] G. Vrănceanu, *Leçons de Géométrie différentielle.* Vol. I (Bucarest, 1957).

[15] J. M. Wegener, Hyperflächen in Finslerschen Räumen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **44** (1936), 115—130.

(Eingegangen am 26. Mai 1960)

Ein elementarer Beweis der Kreisaxiome der hyperbolischen Geometrie

Von J. STROMMER in Budapest

1. Unter Kreisaxiomen verstehen wir die folgenden beiden Axiome der elementaren ebenen Geometrie:

K. *Wenn A, B, C nicht in einer Geraden gelegene Punkte sind und D ein Punkt der Geraden AB ist, der zwischen A und B liegt, so gibt es einen Punkt B' der Geraden CD, so daß $AB \equiv AB'$ ist.*[1])

K'. *Es seien A, B, C Punkte auf der Geraden a und A, B', C' Punkte auf derselben oder einer anderen Geraden a', so daß C zwischen A und B liegt und B' zwischen A und C' und $AB \equiv AB'$ ist; wenn dann D ein Punkt ist, so daß $CD \equiv DC'$ wird, so gibt es stets einen Punkt E, so daß $AB \equiv AE$ und $CD \equiv DE$ ist.*[2])

Es ist bekannt, daß sich das erste der obigen beiden Axiome auf Grund der Axiome der Verknüpfung, der Anordnung und der Kongruenz für die Ebene aus dem zweiten ableiten läßt.[3])

Schon F. SCHUR hat mit projektiven Methoden bewiesen[4]), daß das Axiom K eine Folge der Axiome I—IV ist, die HILBERT zur Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie angenommen hat[5]), außerdem hat J. C. H. GERRETSEN[6]) und neuerlich P. SZÁSZ[7]) mittels der auf die „Endrechnung" von HILBERT gegründeten Trigonometrie bzw. analytischen Geometrie bewiesen, daß auch das Axiom K' eine Folge der erwähnten Axiome ist.

In dieser Arbeit geben wir auf Grund der Axiome I—IV einen vollständig elementaren, unmittelbaren Beweis beider Axiome.

---

[1]) Wenn ein Punkt einer Geraden im Inneren eines Kreises liegt, so hat die Gerade einen Punkt mit dem Kreise gemein.

[2]) Wenn ein Kreis einen Punkt im Inneren und einen Punkt im Äußeren eines anderen Kreises hat, so haben die beiden Kreise einen Punkt gemein.

[3]) S. z. B. KERÉKJÁRTÓ [5], S. 168—169, oder auch FORDER [1], S. 135.

[4]) SCHUR [8], S. 319—320.

[5]) HILBERT [3], S. 137—140, oder auch HILBERT [4], S. 159—164.

[6]) GERRETSEN [2], S. 565—566.

[7]) P. SZÁSZ [9], S. 436—437 und P. SZÁSZ [10].

2. Der Beweis beruht auf einer gewissen Zuordnung zwischen den rechtwinkligen Dreiecken und den Vierecken mit drei rechten Winkeln (und einem spitzen), die schon LOBATSCHEFSKY gefunden hat.[8])

Im folgenden werden wir, der Übersichtlichkeit halber, die zu den Lotstrecken $a, b, \ldots$ gehörigen Parallelwinkel stets mit dem entsprechenden kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen, d. h. es ist

$$\alpha = \Pi(a), \quad \beta = \Pi(b), \ldots,$$

und wir verstehen unter den Strecken $a', b', \ldots$ die Strecken, deren Parallelwinkel die Parallelwinkel von $a, b, \ldots$ je zu einem rechten Winkel ergänzen[9]); es wird also

$$\Pi(a) + \Pi(a') = \frac{1}{2}\pi \text{ usw.}$$

Nunmehr hat H. LIEBMANN auf Grund der Axiome I—IV folgenden Satz bewiesen[10]):

Satz I. *Zu jedem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c, den Katheten a und b und den diesen gegenüberliegenden Winkeln λ bzw. μ gibt es ein Viereck mit drei rechten Winkeln und den Seiten c, m', a, l in dieser Reihenfolge, bei dem die Seiten c und l den Winkel β einschließen, und umgekehrt.*

Wenn in dem obigen Viereck mit drei rechten Winkeln sowohl die Rolle der Seiten c und l als auch die der Seiten m' und a gleichzeitig vertauscht wird, so gibt es nach Satz I auch ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse l, den Katheten m' und b und den diesen gegenüberliegenden Winkeln γ bzw. $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Wenn wir in dem obigen Satze statt $a, b, c; \lambda, \mu$ der Reihe nach $b, m', l; \frac{\pi}{2} - \alpha, \gamma$ setzen, so folgt, daß es auch ein Viereck mit drei rechten Winkeln gibt, dessen Seiten der Reihe nach l, c', b, a' sind und in dem die Seiten l und a' den Winkel $\frac{\pi}{2} - \mu$ einschließen; hieraus folgt nach der obigen Überlegung, daß es auch ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse a', den Katheten c' und m' und den diesen gegenüberliegenden Winkeln λ bzw. $\frac{\pi}{2} - \beta$ gibt.

---

8) Betreffend die Entstehung dieser Zuordnung und die Literatur darüber sowie die unten erwähnte Abbildung verweisen wir auf die Arbeiten [6] und [7] von H. LIEBMANN.

9) Die Existenz der zu dem Parallelwinkel $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$ gehörigen Lotstrecke p hat schon HILBERT ohne Stetigkeitsbetrachtungen bewiesen. (Vgl. HILBERT [3], S. 142—144; s. auch HILBERT [4], S. 165—168).

10) LIEBMANN [6], S. 186—189, oder auch LIEBMANN [7], S. 32—35.

Aus den obigen Entwicklungen schließen wir leicht auf den folgenden, von F. ENGEL stammenden

Satz II. *Es sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c, den Katheten a und b und den diesen gegenüberliegenden Winkeln* λ *bzw.* μ *gegeben, und es seien* $a_1', l_1, c_1, m_1, b_1'$ *beliebige Strecken. Wir ordnen die Strecken* $a_1', l_1, c_1, m_1, b_1'$ *umkehrbar eindeutig den Strecken* a', l, c, m, b' *zu derart, daß die Strecken, die den Strecken* $a_1', l_1, c_1, m_1, b_1'$ *(in dieser Reihenfolge) entsprechen, in der zyklischen Reihenfolge* a', l, c, m, b' *oder in der entgegengesetzten Reihenfolge aufeinander folgen. Wenn dann jede der Strecken* $a_1', l_1, c_1, m_1, b_1'$ *mit der nach der obigen Vorschrift ihr eindeutig entsprechenden Strecke gleich ist, so gibt es stets ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse* c_1*, den Katheten* a_1 *und* b_1 *und den diesen gegenüberliegenden Winkeln* λ_1 *bzw.* μ_1.

In dem folgenden Beweise benützen wir auch die Abbildung der hyperbolischen Halbebene auf sich selbst durch komplementäre Ordinaten, die wir auf folgende Weise definieren. Es seien O und X zwei beliebige Punkte der Ebene und F der Fußpunkt des von einem beliebigen außerhalb der Geraden OX gelegenen Punkte P auf die Gerade OX gefällten Lotes; wir bezeichnen mit P' den Punkt des Halbstrahls FP, für welchen die zu der Strecke $FP = y$ und $FP' = y'$ gehörigen Parallelwinkel komplementär sind, so daß

$$\Pi(y) + \Pi(y') = \frac{1}{2}\pi$$

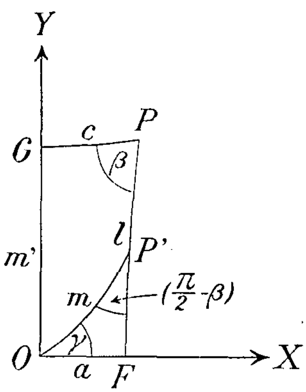

Abb. 1

wird (Abb. 1). Wir ordnen jedem Punkte P einer durch die Gerade OX bestimmten Halbebene den nach der obigen Vorschrift eindeutig bestimmten Punkt P' zu.

Die so erklärte Abbildung der durch die Gerade OX bestimmten Halbebene ist eineindeutig und involutorisch.

Aus der obigen Definition folgt sofort, daß *jedem Punkte einer von einem Punkte der Geraden OX ausgehenden Halbgeraden, die auf der Geraden OX senkrecht steht, ein Punkt derselben Halbgeraden entspricht.*

Es sei Y ein von O verschiedener Punkt der in dem Punkte O auf der Geraden OX errichteten Senkrechten und P ein beliebiger Punkt außerhalb der beiden Geraden OX, OY, ferner G der Fußpunkt des von dem Punkte P auf die Gerade OY gefällten Lotes; wenn dann

$$PF = l, \quad OF = a, \quad OG = m', \quad PG = c \quad \text{und} \quad \sphericalangle FPG = \beta$$

ist, so gibt es nach den Sätzen I und II ein rechtwinkliges Dreieck, mit der

Hypotenuse m, den Katheten a und l' und den diesen gegenüberliegenden Winkeln $\frac{\pi}{2}-\beta$ bzw. γ, d. h., es ist $OP' = m$. Hieraus folgt sofort, daß *jedem Punkt, der auf dem Kreise mit dem Mittelpunkt O durch den Punkt P' und auf derselben Seite der Geraden OX wie der Punkt P liegt, ein und nur ein Punkt der Geraden PG entspricht, und umgekehrt.*

Wenn A ein Punkt der Geraden OX ist, so daß $OA = m$ ist, so wird die im Punkte A auf der Geraden OX errichtete Senkrechte zu der Geraden PG parallel, da nach Definition

$$\Pi(m) + \Pi(m') = \frac{1}{2}\pi$$

ist, und so ist die Halbgerade von O aus, die zu der Halbgeraden GP parallel ist, auch zu der Geraden parallel, die im Punkte A auf der Geraden OX senkrecht steht (Abb. 2).

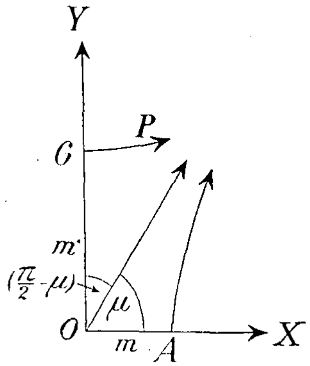

Abb. 2

3. Auf Grund des Obigen läßt sich nun das Axiom K leicht als Satz beweisen. Zu diesem Zwecke sei F der Fußpunkt des von dem Mittelpunkt O des Kreises k auf die beliebige Gerade l gefällten Lotes (Abb. 1). Wenn es einen Punkt der Geraden l im Inneren des Kreises k gibt, so können wir leicht nachweisen, daß auch der Punkt F im Inneren des Kreises k liegt, d. h. wenn wir den Halbmesser des Kreises mit m bezeichnen, so ist $OF < m$. Es sei G ein Punkt der im Punkte O auf der Geraden OF errichteten Senkrechten, so daß $OG = m'$ ist; dann entspricht nach dem Obigen bei der Abbildung der durch die Gerade OF bestimmten und den Punkt G enthaltenden Halbebene durch komplementäre Ordinaten auf sich selbst jedem Punkte des Kreises, welcher derselben Halbebene angehört, ein Punkt der in G auf der Geraden OG errichteten Senkrechten und umgekehrt; ferner entspricht jedem Punkte der Geraden l, welcher dieser Halbebene angehört, ein auf derselben Halbebene liegender Punkt der Geraden l. Die Gerade l und die im Punkte G auf der Geraden OG errichtete Senkrechte haben einen Punkt P gemein; im entgegengesetzten Falle wäre, falls die Strecke OF mit a bezeichnet wird,

$$\Pi(a) + \Pi(m') \leqq \frac{1}{2}\pi$$

im Gegensatz zu unserer Voraussetzung, daß $a < m$ ist. Dem Punkte P entspricht nach dem Obigen ein Punkt P' der Geraden l derart, daß $OP' = m$ ist, d. h., es ist P' ein gemeinsamer Punkt des Kreises k und der Geraden l, w. z. b. w.

Es seien nun k und k_1 zwei Kreise mit dem Mittelpunkten O bzw. O_1; wir setzen voraus, daß der Kreis k_1 einen Punkt im Inneren und einen anderen im Äußeren des Kreises k hat. Es seien weiterhin A, A' zwei Punkte des Kreises k und B, B' zwei Punkte des Kreises k_1, die auf der Geraden OO_1 liegen; nach unserer Voraussetzung lassen sich diese Punkte stets in der Weise bezeichnen, daß der Punkt A zwischen B und B' und auch zwischen A' und B' und ferner der Punkt B zwischen A' und B' und auch zwischen A und A' liegt.

Wir betrachten eine der beiden durch die Gerade AB bestimmten Halbebenen und bezeichnen mit k und k_1 auch die durch die Punkte A, A' und B, B' bestimmten Halbkreise der Kreise k bzw. k_1, deren sämtliche Punkte dieser Halbebene angehören. Bei der Abbildung dieser Halbebene durch komplementäre Ordinaten auf sich selbst entspricht den Halbkreisen k und k_1 je eine Gerade, die zufolge der Eineindeutigkeit der Abbildung voneinander verschieden sind. Die in den Punkten B und A auf der Geraden AB errichteten Senkrechten schneiden die den Halbkreisen k und k_1 entsprechenden Geraden in den Punkten F bzw. G; wir bezeichnen mit f eine Halbgerade der ersten Geraden von dem Punkt F aus, die auf derselben Seite der Geraden BF wie der Punkt A liegt, und mit g eine Halbgerade der zweiten Geraden von G aus, die auf derselben Seite der Geraden AG wie der Punkt B liegt (Abb. 3).

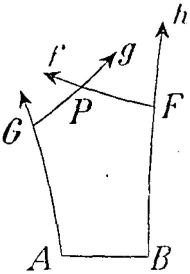

Abb. 3

Nach unserer obigen Überlegung ist die Halbgerade f zu der Halbgeraden AG parallel; da ferner alle Punkte der Halbgeraden f auf ein und derselben Seite der Geraden AB liegen, so schneidet die Halbgerade f die Gerade AB nicht; somit folgt nach Axiom II 4, daß die Halbgerade f mit der Strecke BG keinen Punkt gemein hat, und somit liegt f außerhalb des Winkels BFG. Hieraus ergibt sich, daß die Halbgerade f und der Punkt A auf verschiedenen Seiten der Geraden FG liegen, da sie sich auf ein und derselben Seite der durch den anderen Schenkel des Winkels BFG bestimmten Geraden BF befinden. Auf ähnliche Art schließen wir, daß die Halbgerade g auf derselben Seite der Geraden FG liegt wie die Halbgerade f. Die Gerade BF zerfällt in zwei vom Punkte F ausgehende Halbgeraden; wenn wir diejenige dieser Halbgeraden mit h bezeichnen, die auf derselben Seite der Geraden FG liegt wie die Halbgerade f, so ist nach dem Obigen die Halbgerade g zu der Halbgeraden h parallel. Hieraus folgt, daß die Halbgeraden f und g einen Punkt P gemein haben. Wenn dann Q der Fußpunkt des von dem Punkte P auf die Gerade AB gefällten Lotes ist und P' ein solcher Punkt des Halbstrahls QP ist, daß die zu den Strecken $QP = y$ und $QP' = y'$ gehörigen Parallelwinkel einander zu einem rechten Winkel ergänzen, d. h.

$$\Pi(y)+\Pi(y')=\frac{1}{2}\pi$$

wird, so ist P' ein gemeinsamer Punkt der Kreise k und k_1, w. z. b. w.

Literaturverzeichnis

[1] H. G. Forder, *The foundations of euclidean geometry* (Cambridge, 1927).

[2] J. C. H. Gerretsen, Die Begründung der Trigonometrie in der hyperbolischen Ebene, *Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam*, **45** (1942), 360—366, 479—483, 559—566.

[3] D. Hilbert, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, *Math. Annalen*, **57** (1903), 137—150.

[4] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 8. Aufl. (Stuttgart, 1956), Anhang III, 159—177.

[5] B. Kerékjártó, *Les fondements de la géométrie*. I (Budapest, 1955).

[6] H. Liebmann, Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und neue Begründung der trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie, *Math. Annalen*, **61** (1905), 185—199.

[7] H. Liebmann, *Nichteuklidische Geometrie*, 3. Aufl. (Berlin und Leipzig, 1923).

[8] F. Schur, Zur Bolyai—Lobatschefskijschen Geometrie, *Math. Annalen*, **59** (1904), 314—320.

[9] P. Szász, A hiperbolikus sik analitikus geometriájának independens elemi felépitése a Hilbert-féle „végkalkulus" alapján, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **6** (1956), 423—438.

[10] P. Szász, New proof of the circle axiom for two circles in the hyperbolic plane by means of the end-calculus of Hilbert, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, **1** (1958), 97 - 100.

(Eingegangen am 20. Mai 1960)

Die Ringe mit lauter isomorphen nichttrivialen endlich erzeugbaren Unterringen

Von F. SZÁSZ in Budapest

Professor L. Rédei zum 60. Geburtstag gewidmet

Ein Ring A wird ein Ω-Ring genannt, wenn die nichttrivialen (d. h. von A und von O verschiedenen) endlich erzeugbaren Unterringe von A untereinander isomorph sind. Unser Zweck ist die sämtlichen Ω-Ringe zu bestimmen. Die Ringe A ohne nichttriviale Unterringe, also die Ringe A mit $|A|=p$ oder 1 sind ebenfalls als Ω-Ringe anzusehen, wobei $|A|$ die Mächtigkeit von A und p eine Primzahl bezeichnet. I bezeichnet den Ring der ganzen rationalen Zahlen. Bezüglich der nötigen Grundbegriffe der Algebra verweisen wir auf die Lehrbücher [1], [2] und [3].

RÉDEI und SZELE [4] haben die Ringe mit torsionsfreier additiver Gruppe ersten Ranges bestimmt. Insbesondere werden wir gewinnen, daß die unendlichen Ω-Ringe mit den torsionsfreien Zeroringen ersten Ranges übereinstimmen.

Wir werden später die folgenden drei elementaren Vorbemerkungen oft berücksichtigen:

1. Jeder Unterring eines Ω-Ringes ist ebenfalls ein Ω-Ring.

2. Jedes Element a von der (additiven) Ordnung $O(a)=n(\in I, \geqq 0)$ eines Ω-Ringes A ist die Wurzel eines Polynoms:

$$f(x)\,(\in x(I/(n))[x], \neq 0),$$

denn im entgegengesetzten Fall wären die endlich erzeugten nichttrivialen Unterringe $\{a^2\}$ und $\{a^2, a^3\}$ untereinander nichtisomorph, sogar könnte der zweite nicht durch ein Element erzeugt werden.

3. Jeder endliche nichtnilpotente Ω-Ring A mit der Bedingung $pA=0$ ist halbeinfach, denn ein solcher Ring A besitzt einen Unterring $\{e\}$ mit $e^2=e\neq 0$, woraus folgt, daß A überhaupt keine nilpotenten Elemente $(\neq 0)$ haben kann. Hierbei bezeichnet $\{\ldots, x_\alpha, \ldots\}$ den durch die eingeklammerten Elemente erzeugten Unterring von A.

Es gilt der

Satz. *Jeder Ω-Ring ist zu einem der folgenden Ringe isomorph:*

1. *die Zeroringe mit torsionsfreier additiver Gruppe ersten Ranges;*
2. *die Ringe mit zyklischer additiver Gruppe von der Ordnung p^2 oder p;*
3. *die direkten Summen $K_p \oplus K_p$ von zwei isomorphen endlichen Primkörpern;*
4. *die endlichen Körper von der Ordnung p^q (p und q sind beliebige Primzahlen);*
5. *die Ringe A mit $A^2 = pA = 0$ und $|A| = p^2$;*
6. *die Ringe $A = \{a\}$ mit den definierenden Gleichungen $pa = a^3 = 0$.*

Beweis. Da alle im Satz erwähnten Ringe offenbar Ω-Ringe sind, genügt es zu beweisen, dass jeder Ω-Ring tatsächlich zu einem der erwähnten Ringe isomorph ist. Es sei also A ein beliebiger Ω-Ring.

Wir beweisen, daß die additive Gruppe A^+ eines Ω-Ringes A entweder torsionsfrei oder periodisch ist. Im engegengesetzten Fall gibt es nämlich in A Elemente a und b mit

$$a \neq 0, \ b \neq 0, \ O(a) = n(\neq 0, \in I), \ O(b) = 0,$$

und es gelten $\{mb\} = \{b\} = A$ für jede Zahl m $(\neq 0, \in I)$, da $\{a\}$ und $\{b\}$ nichtisomorph sind. Hiernach ist aber A^+ wegen

$$mA = m\{b\} \supseteq \{mb\} = A \supseteq mA$$

offenbar eine vollständige („divisible") Abelsche Gruppe. Also enthält A^+ wegen $O(a) \neq 0$ eine Untergruppe $Z(p^\infty)$. Da jede Untergruppe von $Z(p^\infty)$ auch ein Unterring von A ist, besitzt ein Ω-Ring A gewiß keine Untergruppe $Z(p^\infty)$. Dieser Widerspruch zeigt, daß A^+ entweder torsionsfrei, oder periodisch ist.

Es wird jetzt bewiesen, daß jeder Ω-Ring A mit einer torsionsfreien additiven Gruppe A^+ Nullteiler enthalten soll. Aus der Voraussetzung, daß ein Ω-Ring mit torsionsfreier additiver Gruppe A^+ nullteilerfrei ist, kann nämlich ein Widerspruch folgenderweise abgeleitet werden.

Ist $a \neq 0$ ein beliebiges Element des nullteilerfreien Ω-Ringes A mit einer torsionsfreien additiven Gruppe A^+, so gelten für jedes Minimalpolynom

$$f(x) = n_1 x + n_2 x^2 + \cdots + n_s x^s \qquad (n_i \in I)$$

von a, das wegen der Vorbemerkung 2 gewiß existiert, offenbar $n_1 x \neq 0$ und $n_s x^s \neq 0$, denn A ist jetzt nullteilerfrei. Mit einer Zahl $n_0(\neq 0, \in I)$ erhält man

$$n_0\{n_s a\} \neq 0, \quad n_0\{n_s a\} \neq \{n_s a\},$$

wobei die Gruppe $\{n_s a\}^+$ wegen

$$(n_s a)^s + n_{s-1}(n_s a)^{s-1} + \cdots + n_s^{s-2} n_1 (n_s a) = 0$$

eine endlich erzeugbare Abelsche Gruppe ist.

Es sei jetzt $b = n_0 n_s a (\neq 0)$ mit einem Minimalpolynom

$$g(x) = m_1 x + \cdots + m_t x^t (m_j \in I,\ m_1 x \neq 0,\ m_t x^t \neq 0).$$

Bezeichnet φ einen Isomorphismus von dem nichttrivialen Unterring $\{b\}$ auf den nichttrivialen Unterring $\{m_1 b\}$ von A, so existiert ein Paar von Polynomen

$$h(x),\ h_1(x) (\in x \cdot I[x],\ \neq 0)$$

mit den Bedingungen

$$b\varphi = h(m_1 b) (\in \{m_1 b\}),\ h(m_1 x) = m_1 h_1(x).$$

Ist ferner $b_1 = h_1(b) (\in \{b\})$, so erhält man offenbar

$$g(m_1 b_1) = g(m_1 h_1(b)) = g(h(m_1 b)) =$$
$$= g(b\varphi) = g(b)\varphi = 0\varphi = 0.$$

Kürzt man aber durch m_1^2 $(\neq 0)$ in der (explizit aufgeschriebenen) Gleichung $g(m_1 b_1) = 0$ ab, was wegen der vorausgesetzten Torsionsfreiheit von A^+ erlaubt ist, so ergibt sich wegen

$$g(x) = m_1 x + \cdots + m_t x^t$$

sofort $b_1 = e b_1 (\neq 0)$ mit der Bezeichnung

$$e = -(m_2 b_1 + m_3 m_1 b_1^2 + \cdots + m_t m_1^{t-2} b_1^{t-1}).$$

Da aber A nach der Voraussetzung nullteilerfrei ist, so ist e wegen $b_1 = e b_1 \neq 0$ das Einselement von A. Dann gilt auch $\{e\} \cong I$, was wegen Vorbemerkung 1 einen Widerspruch bedeutet, denn I ist offenbar kein Ω-Ring.

Also besitzt jeder Ω-Ring A mit einer torsionsfreien additiven Gruppe A^+ Elemente $y_1 \neq 0$ und $y_2 \neq 0$ mit $y_1 y_2 = 0$. Es wird jetzt $A^2 = 0$ folgenderweise bewiesen. Sind $\{y_1\}$ und $\{y_2\}$ nicht beide nichttriviale Unterringe von A, so können wir von diesen Elementen y_1 und y_2 auf weitere Elemente $z_1 \neq 0$ und $z_2 \neq 0$ mit $z_1 z_2 = 0$ übergehen, mit denen beide Unterringe $\{z_1\}$ und $\{z_2\}$ von A nichttrivial sind. Die Unterringe $\{k y_i\}$ sind nämlich mit einer geeigneten natürlichen Zahl k gewiß nichttrivial. Dann können die additiven Gruppen der Ringe $\{z_i\}$ $(i = 1, 2)$ durch gewisse endliche Systeme von Elementen

$$z_i,\ z_i^2,\ z_i^3, \ldots,\ z_i^{k_i}$$

erzeugt werden. Daher sind aber wegen $z_1 z_2 = 0$ die endlich vielen Elemente

$$\begin{array}{llllll} & z_1, & z_1^2, & z_1^3, \ldots, & z_1^{k_1} \\ z_2, & z_2 z_1, & z_2 z_1^2, & z_2 z_1^3, \ldots, & z_2 z_1^{k_1} \\ z_2^2, & z_2^2 z_1, & z_2^2 z_1^2, & z_2^2 z_1^3, \ldots, & z_2^2 z_1^{k_1} \\ z_2^3, & z_2^3 z_1, & z_2^3 z_1^2, & z_2^3 z_1^3, \ldots, & z_2^3 z_1^{k_1} \\ \vdots & & & & \\ z_2^{k_2}, & z_2^{k_2} z_1, & z_2^{k_2} z_1^2, & z_2^{k_2} z_1^3, \ldots, & z_2^{k_2} z_1^{k_1} \end{array}$$

die additiven Erzeugenden der Gruppe $\{z_1, z_2\}^+$, die hiernach die direkte Summe von endlich vielen zyklischen Gruppen ist. Wir werden jetzt auf weitere Elemente $v_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$ mit $\{v_1, v_2\} \neq A$ und $v_1 v_2 = 0$ übergehen. Ist $\{z_1, z_2\} = A$, so ist A^+ die direkte Summe von endlich vielen zyklischen Gruppen, woraus die Existenz einer Zahl $k_0 (\neq 0, \in I)$ mit $k_0 A^+ \neq A^+$ folgt. Dann seien $v_1 = k_0 \cdot z_1$ und $v_2 = k_0 \cdot z_2$. Ist aber $\{z_1, z_2\} \neq A$, so seien $v_1 = z_1$ und $v_2 = z_2$. In beiden Fällen erhält man $\{v_1, v_2\} \neq A$ mit $v_1 \cdot v_2 = 0$, und es wird jetzt $\{v_1, v_2\}^2 = 0$ folgenderweise bewiesen.

Da im Ω-Ring A die additiven Untergruppen $\{v_1^+\}$ von $\{v_1\}$ und $\{v_2\}^+$ von $\{v_2\}$ denselben endlichen (torsionsfreien) Rang besitzen, liegt ein Vielfaches $l v_2 \neq 0 (l \in I)$ von v_2 im Unterring $\{v_1\}$. Hiernach existiert ein Polynom

$$w(x) (\neq 0, \in x \cdot I[x])$$

mit $w(v_1) = l v_2$, woraus wegen $v_1 v_2 = 0$ und $w(v_1) v_2 = 0$ gewiß $l v_2^2 = 0$ folgt. Wegen der Torsionsfreiheit von A^+ und $l \neq 0$ gilt auch $v_2^2 = 0$. Also ist $\{v_2\}^+$ ein Zeroring mit einer unendlichen zyklischen additiven Gruppe. Da hiernach jeder endlich erzeugbare echte Unterring U von A ein zyklischer Zeroring ist, kann man $A^2 = 0$ und Rang $A^+ = 1$ beweisen.

$\{l_0 x\}$ ist nämlich für jedes $x \in A$ mit einer geeigneten Zahl $l_0 (\neq 0, \in I)$ ein echter Unterring von A, und aus $(l_0 x)^2 = 0$ folgt $x^2 = 0$ für jedes x, denn A^+ ist torsionsfrei. Ferner gewinnen wir aus $(x+y)^2 = 0$ gewiß $yx = -xy$ für beliebige $x, y \in A$, woraus folgt, daß $\{x, y\}^+$ die direkte Summe von endlich vielen zyklischen Gruppen ist. Dann existiert eine Zahl $m_0 (\neq 0, \in I)$ mit $\{m_0 x, m_0 y\} \neq A$. Da $\{m_0 x, m_0 y\}$ nach den vorigen ein zyklischer Zeroring ist, erhält man wegen der Torsionsfreiheit tatsächlich $A^2 = 0$ und auch Rang $A^+ = 1$. Also ist A ein Zeroring ersten Ranges.

Nach den vorigen ist die additive Gruppe eines Ω-Ringes A, der ein Element $a \neq 0$ von der additiven Ordnung $O(a) \neq 0$ hat, periodisch. Ist die Ordnung $O(a_0)$ eines Elementes $a_0 \in A$ eine Primzahl p, so ist gewiß $p^2 A = 0$, denn im Falle der Existenz eines Elementes $a_1 \in A$ mit $O(a_1) = p^3$ wären $\{a_0\}$ und $\{p a_1\}$ echte nichtisomorphe Unterringe von A. Also ist A^+ wegen der Definition des Ω-Ringes eine p^2-beschränkte Abelsche p-Gruppe.

Es sei jetzt $A[p]=[x; px=0, x\in A]$. Dann ist $A[p]$ ein Ideal von A, und $\{b\}$ ist wegen Vorbemerkung 2 für jedes $b\in A[p]$ ein endlicher Unterring von A. Da $A[p]$ im Fall $A\neq 0$, $p^2A=0$ von Null verschieden ist, und der Unterring

$$\{b\}(\neq 0, A[p])$$

minimale Unterringe ($\neq 0$) enthält, die entweder Körper, oder Zeroringe, alle von Primzahlordnung sind, so hat jeder endlich erzeugbare nichttriviale Unterring von A im Falle $p^2A=0$ gewiß die Ordnung p.

Wir beweisen, daß jeder Ω-Ring mit $p^2A=0$ endlich ist. Gilt $pA\neq 0$, so ist Rang $(A[p])=1$, denn die endlich erzeugbaren Unterringe S von $A[p]$ sind, wie es in vorigen gezeigt wurde, von der Ordnung p. Dann gilt aber auch Rang $A^+=1$, woraus

$$A=\{a\},\ p^2a=0,\ a^2=da(d\in I)$$

folgen. Also ist A^+ zyklisch. Gilt nun $pA=0$, d. h. $A[p]=A$, so ist A im Fall $A=\{a\}$ wegen Vorbemerkung 2 endlich, denn eine Potenz von a kann durch die niedrigeren Potenzen von a ausgedrückt werden. Gelten aber $pA=0$ und $A\neq\{a\}$ für jedes a, so folgt aus der Existenz von minimalen Unterringen ($\neq 0$) in $\{a\}$ sofort $|\{a\}|=p$. Es gibt also zu jedem Paar von Elementen $a\neq 0$, $b\neq 0$ mit $b\notin\{a\}$ ganze rationale Zahlen n_1, n_2, n_3 derart, daß

$$(a+b)^2=n_1(a+b),\ a^2=n_2a,\ b^2=n_3b$$

bestehen. Die Endlichkeit von $\{a, b\}$ folgt nun aus

$$ba=(n_1-n_2)a+(n_1-n_3)b-ab.$$

Da aber im Falle $\{a, b\}\neq A$ die Unterringe $\{a, b\}$ und $\{a\}$ beide von Primzahlordnung wären, was wegen $b\notin\{a\}$ unmöglich ist, gilt gewiß $\{a, b\}=A$. Also ist A endlich. Unser Satz in [5] bestimmt ganz explizit alle Ringe, deren alle echte Unterringe zyklische additive Gruppen besitzen. Da die additive Gruppe von jedem echten Unterringe des endlichen Ω-Ringes A nach den vorigen die Ordnung p hat, so kann der Satz in [5] angewendet werden. Hiernach hat jeder Ω-Ring $A(\neq 0)$ mit $pA=0$ die Mächtigkeit $|A|=p^q, p^2$ oder p. (Hierbei sind p und q beliebige Primzahlen.)

Im Fall $|A|=p$ ist A^+ offenbar zyklisch.

In weiteren genügt es nur den Fall $pA=0$ unterzusuchen, denn im Fall $pA\neq 0$, $p^2A=0$ ist A^+ zyklisch.

Ist der endliche Ω-Ring $A(\neq 0)$ mit $pA=0$ und $|A|\neq p$ halbeinfach, so folgt aus dem Wedderburn—Artinschen Struktursatz und der Definition des Ω-Ringes entweder $A\cong K_p\oplus K_p$ mit einem endlichen Primkörper K_p, oder $A\cong K$ mit einem endlichen Körper K von der Ordnung p^q, wobei p und q beliebige Primzahlen sind.

Ist zum Schluß der endliche Ω-Ring A mit $pA=0$ und $|A|\neq p$ kein halbeinfacher Ring, so ist A wegen Vorbemerkung 3 gewiß nilpotent, und nach [5] folgt sofort $|A|=p^2$. Wir unterscheiden wiederum zwei Fälle.

Kann A mit $pA=0$, $|A|=p^2$, $A^n=0$ durch ein Element nicht erzeugt werden, so gilt $A=\{a,b\}$ mit

$$a^2=pa=b^2=pb=\{a\}\cap\{b\}=0.$$

Hiernach ergibt sich $ab=l_1a+l_2b(l_i\in I)$, woraus auch

$$0=ab^2=l_1ab=l_1^2a+l_1l_2b,\quad l_1^2a=-l_1l_2b_2\in\{a\}\cap\{b\}$$

folgen. Daher ist $p|l_1$ und ganz ähnlich auch $p|l_2$. Also gilt $ab=0$. Ähnlich gewinnen wir auch $ba=0$, folglich $A^2=0$.

Läßt sich aber A durch ein Element $a\in A$ erzeugen, gelten ferner $A=\{a\}$, $|A|=p^2$, $pa=a^n=0$ $(a^{n-1}\neq 0,\ n\geqq 2,\ n\in I)$, so erhält man $a^3=$ $=m_1a+m_2a^2$ mit $m_i\in I$. Unser Zweck ist nun $a^3=0$ zu beweisen. Im Fall $a^3=0$ ist wegen $|A|=p^2$ gewiß $a^2\neq 0$.

Wäre $(p,m_1)=1$, so gäbe es eine Zahl n_1 mit

$$m_1n_1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)\quad (n_1\in I),$$

woraus man mit der Bezeichnung

$$b=n_1(a^2-m_2a)\quad (\in\{a\})$$

eine Gleichung $a=ab$ erhält. Daher gilt aber auch

$$a=ab=ab^2=\cdots=ab^{n-1}\in\{a\}^n=A^n=0,$$

was wegen $a\neq 0$ unmöglich ist. Also ergibt sich $p|m_1$ und $a^3=m_2a^2$.

Im Fall $(p,m_2)=1$ kann auch die Kongruenz

$$m_2\cdot n_2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)\quad (n_2\in I)$$

gelöst werden. Dann ist $a^2=a^2(n_2a)$, woraus wegen $a^n=0$ offenbar $a^2=\cdots$ $\cdots=a^2(n_2a)^n=0$ folgt, was der Voraussetzung $|A|=p^2$ widerspricht.

Also ist im Fall $A=\{a\}$, $|A|=p^2$, $pa=a^n=0$ $(a^{n-1}\neq 0)$ gewiß $a^3=0$, w. z. b. w. Damit haben wir den Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] L. Fuchs, *Abelian groups* (Budapest, 1958).
[2] N. Jacobson, *Structure of rings* (Providence, 1956).
[3] L. Rédei, *Algebra I* (Leipzig, 1959).
[4] L. Rédei—T. Szele, Die Ringe ersten Ranges, *Acta Sci. Math.*, **12** (1960), 18—29.
[5] F. Szász, Les anneaux ne contenant que des sous-anneaux propres cycliques, *Czechoslovak Math. J.*, 7 (**82**) (1957), 21—25.

(Eingegangen am 26. Mai 1960)

Subrings of Algebraic Number Fields

By R. A. BEAUMONT and R. S. PIERCE[1]) in Seattle (Washington, U. S. A.)

1. Introduction. This paper is a continuation of the authors' work ([1] and [5]) on torsion-free rings. We are concerned here with subrings of algebraic number fields. Throughout the paper, K will denote a fixed algebraic number field and J will denote the ring of algebraic integers in K. We will restrict our attention to subrings of K whose quotient field is all of K. Since K can be arbitrary, this is not really and additional restriction. If A is any subring of K, then QA (where Q is the field of rational numbers) is a subfield of K. Thus if the quotient field of A is K, then A is *full* in K in the sense that for any $x \in K$, there is a non-zero integer n such that $nx \in A$.

The paper is mainly devoted to the problem of classifying the subrings of K. In the first section we classify the (full) subrings of K up to the equivalence relation quasi-equality. Two subrings A and B of K are called *quasi-equal* (symbolically, $A \doteq B$) if $A \cap B$ has finite index in both A and B. Because of the finiteness of rank, this is equivalent to the existence of a non-zero integer n such that $nA \subseteq B$ and $nB \subseteq A$. The basic result of Section 2 is that each quasi-equality class of full subrings of K contains a unique integrally closed ring which is the largest ring in the quasi-equality class. It follows that the various quasi-equality classes of subrings of K are in one-to-one correspondence with sets of prime ideals of J. In Section 3 we take up the classification of the rings belonging to a given quasi-equality class. The results of Section 2 make this equivalent to finding all subrings of finite index in an integrally closed subring of K. We show that if J_{Π} is the integrally closed subring of of K associated with the set Π of prime ideals of J, then there is a one-to-one correspondence between the subrings of finite index in J_{Π} and the open subrings of the compact topological ring $\sum_{P \in \Pi}^{*} J(P)$, where $J(P)$ is the P-adic completion of J with the metric topology and the product topology is imposed on the complete direct sum.

1) This work was supported by the National Science Foundation Research Grant NSF — G 11098.

Using this result, it is possible to characterize those sets Π such that J_Π contains no proper subring of finite index having an identity element. In Section 4, we characterize in strictly group theoretical terms those torsion free abelian groups which are isomorphic to the additive group of a subring of an algebraic number field.

Generally speaking, in this paper the notation and terminology of [1] and [5] is used. Exceptions are the use of Q to denote the field of rationals and $Z(p)$ and $Q(p)$ to denote the p-adic completions of Z (the ring of integers) and Q respectively. If P is any prime ideal of the ring J, let $J_P=\{x/y|x,\ y\in J,\ y\notin P\}$. Also, if Π is a set of prime ideals in J, define

$$J_\Pi = \bigcap_{P\in\Pi} J_P.$$

Note that $J_\emptyset=K$. Denote by v_P the valuation of K associated with the prime ideal P of J. It is not necessary to normalize v_P. Thus v_P can be defined on J by letting $v_P(0)=0$ and for $x\neq 0$, $v_P(x)=p^{-k}$, where p is the unique rational prime in P and P^k is the highest power of P dividing the principal ideal (x). Then v_P is extended multiplicatively to K. It is also convenient to extend v_P to the non-zero ideals of J, defining $v_P(I)=p^{-k}$, where P^k is the highest power of P dividing I. Then v_P satisfies the inequality

$$v_P(x-y)\leqq \max\{v_P(x),\ v_P(y)\},\quad x, y\in K,$$

and if $v_P(x)\neq v_P(y)$, then equality holds. Moreover, it is easy to show that for any $x\in K$, $v_P(x)\leqq 1$ if and only if $x\in J_P$. Denote by $J(P)$ and $K(P)$ the completions of J and K with respect to v_P. Then $J(P)$ and $K(P)$ are metric topological rings (containing J and K respectively) with a metric which extends v_P. The extended metric can be denoted by v_P without confusion. As a topological space, $J(P)$ is compact. It is well known that the identical mapping of J into $J(P)$ can be extended to an isomorphism Δ_P of J_P into $J(P)$. Note that $v_P(\Delta_P x)=v_P(x)$.

2. Classification of quasi-equality classes. The proof of the main theorem of this section is based on the results of [1]. To make this proof intelligible, it is necessary to explain some of the concepts introduced there. Define a ring q. d. invariant of K to be a function δ which assigns to each rational prime p an ideal δ_p in the ring $Q(p)\otimes K$. The ring q. d. invariants are ordered by defining $\delta\leqq\delta'$ if $\delta_p\subseteq\delta'_p$ for all p. With this ordering, the ring q. d. invariants form a complete lattice (actually, a complete, atomic Boolean algebra). There is also a natural way to order the quasi-equality classes of full subrings of K. This is obtained by defining the class of the ring A to be less than or equal to the class of the ring B if $nA\subseteq B$ for some non-zero integer n.

Lemma 2.1. *There is a one-to-one order preserving correspondence between the quasi-equality classes of full subrings of K and the ring q. d. invariants of K. This correspondence is induced by the mapping which associates with the full subring A the q. d. invariant $\delta(A)$, where $\delta_p(A)$ is the maximal divisible subgroup of $Z(p)\otimes A$ (considered as a subgroup of $Q(p)\otimes K$).*

Proof. See [1, Corollary 4.9 and Theorem 1.10].

It follows from this result alone that there is a one-to-one correspondence between the quasi-equality classes of full subrings of K and the subsets of the prime ideals of J. Indeed, it is a classical result (due essentially to Hensel) that

$$Q(p)\otimes K \cong K(P_1) \dotplus \cdots \dotplus K(P_g), \tag{1}$$

where $P_1, \dots, P_g$ are the distinct prime ideal divisors of the principal ideal (p) (see [3, pp. 96—98]). The ideals of the ring $K(P_1)\dotplus\cdots\dotplus K(P_g)$ are precisely the partial sums $K(P_{i_1})\dotplus\cdots\dotplus K(P_{i_r})$, where $1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq g$. Thus, the ring q. d. invariants can be determined by specifying the set $P_{i_1}, \dots, P_{i_r}$ of prime ideals corresponding to each rational prime p. For future reference, we note that the projections $\pi_i: Q(p)\otimes K\to K(P_i)$ corresponding to the isomorphism (1) are obtained by mapping

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=-n}^{\infty} a_{jk}\, p^k\right)\otimes x_j \to \sum_{k=-n}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} p^k x_j\right), \quad a_{jk}\in Z, \tag{2}$$

where the infinite sum on the left is taken in the p-adic topology of $Q(p)$ and the infinite sum on the right side is taken in the topology of the metric v_{P_i} on $K(P_i)$.

Our first objective in this section is to determine the q. d. invariants associated with the various rings J_P. It is convenient to obtain these indirectly.

If A is a subring of K, then we say that $x\in K$ is integral over A, if x is integral (in the usual sense) over the ring $\{A, 1\}$ where 1 is the identity of K. By the integral closure of A, we mean the ring of all elements of K which are integral over A. It is easy to show (see [4]) that the integral closure of A is the intersection of all valuation rings J_P containing A, since $J_P\supseteq A$ if and only if $J_P\supseteq\{A, 1\}$.

Lemma 2.2. *If A is a proper full subring of K, then $A\subseteq J_P$ for some proper prime ideal P of J.*

Proof. By the above remarks, it is sufficient to show that the integral closure of A is a proper subring of K. Since A is a full subring of K, there is an integer $n\neq 0$ such that $n\cdot 1\in A$. Thus $\{A, 1\}/A$ has bounded order.

Since A is a proper subring of K, K/A is a non-trivial divisible group. Hence $\{A, 1\} \neq K$, that is, $\{A, 1\}$ is a proper subring of K. Thus, there is a rational prime p such that $1/p \notin \{A, 1\}$. Then $1/p$ is not integral over A, because $(1/p)^n + a_1(1/p)^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, $a_i \in \{A, 1\}$ implies that $1/p = -(a_1 + \cdots + p^{n-1}a_n) \in \{A, 1\}$.

Lemma 2.3. *If A is a subring of K, P is a prime ideal of J, and if $nA \subseteq J_P$ for some non-zero integer n, then $A \subseteq J_P$.*

Proof. Let $x \in A$. Then $x^k \in A$ for all exponents $k \geqq 1$. Hence $v_P(n) v_P(x)^k = v_P(nx^k) \leqq 1$. Since k can be arbitrarily large, this implies that $v_P(x) \leqq 1$. Therefore $x \in J_P$.

Corollary 2.4. *If P is a prime ideal of J, then $\delta(J_P)$ is a maximal ring q. d. invariant.*

Proof. By Lemmas 2. 2 and 2. 3, and the fact that there are no inclusion relations between distinct valuation rings, the quasi-equality classes of the rings J_P are maximal. Hence, the corollary follows from Lemma 2. 1.

Lemma 2. 5. *Let P be a prime ideal of J. Let p be the rational prime belonging to P. Then if $q \neq p$, $\delta_q(J_P) = Q(q) \otimes K$. Under the isomorphism (1), $\delta_p(J_P)$ corresponds to $K(P_1) \dotplus \cdots \dotplus K(P_{i-1}) \dotplus K(P_{i+1}) \dotplus \cdots \dotplus K(P_g)$, where $P_i = P$.*

Proof. Since $\delta_p(J_P)$ is an ideal, $\pi_i(\delta_p(J_P)) = K(P_i)$ or 0. If $\pi_i(\delta_p(J_P)) = K(P_i)$, then $\pi_i(Z(p) \otimes J_P) = K(P_i)$. But this is impossible since $v_{P_i}(x) \leqq 1$ for all $x \in J_P = J_{P_i}$ and it follows readily from (2) that $v_{P_i}(z) \leqq 1$ for all $z \in \pi_i(Z(p) \otimes J_P)$. The lemma now follows from Corollary 2. 4.

Lemma 2. 6. *Let Π be a set of prime ideats of J. Then $\delta(J_\Pi) = \text{g. l. b.} \{\delta(J_P) | P \in \Pi\}$.*

Proof. Since $J_\Pi \subseteq J_P$ for all $P \in \Pi$, $\delta(J_\Pi) \leqq \text{g. l. b.} \{\delta(J_P) | P \in \Pi\}$. By Lemma 2. 1, there is a ring A such that $\delta(A) = \text{g. l. b.} \{\delta(J_P) | P \in \Pi\}$. Thus $\delta(A) \leqq \delta(J_P)$ for all $P \in \Pi$. Hence, by Lemmas 2. 1 and 2. 3, $A \subseteq J_P$ for all $P \in \Pi$. Consequently, $A \subseteq \bigcap_{P \in \Pi} J_P = J_\Pi$. This implies that

$$\text{g. l. b.} \{\delta(J_P) | P \in \Pi\} = \delta(A) \leqq \delta(J_\Pi).$$

Theorem 2. 7. *In each quasi-equality class of full subrings of K, there is one and only one integrally closed ring. This ring is the integral closure of every ring in the class.*

Proof. By Lemmas 2. 5 and 2. 6, $\delta_p(J_\Pi)$ is isomorphic to the ring direct sum of all $K(P)$ with $p \in P \in \Pi^c$. Thus, by Lemma 2. 1, if $\Pi_1 \neq \Pi_2$, then J_{Π_1} is not quasi-equal to J_{Π_2}, and every quasi-equality class contains one of the rings J_Π. Since J_Π is an intersection of valuation rings, it is integrally closed. Suppose $A \doteq J_\Pi$. If $P \in \Pi$, then $nA \subseteq J_P$ for some non-zero integer n. Thus, by Lemma 2. 3, $A \subseteq J_P$. Consequently, $A \subseteq J_{\Pi'} \subseteq J_\Pi$, where $\Pi' = \{P | J_P \supseteq A\}$ and $J_{\Pi'}$ is the integral closure of A. This implies that $J_{\Pi'} \doteq J_\Pi$ and therefore $\Pi' = \Pi$.

Remarks. It follows from Theorem 2. 7 that the conductor of the integral closure of any subring of an algebraic number field is a non-zero ideal. Thus it is possible to reduce a large part of the ideal theory of such a ring to that of its integral closure (see [4, pp. 91—92]). Moreover, if A is any full subring of K, then every non-zero ideal I of A contains a non-zero integer (since $0 \neq x \in I$ and $nx^{-1} \in A$ implies $n \in I$) and therefore A/I is a group of finite rank and bounded order. Thus, A/I must be finite. This observation has the consequences that A is Noetherian and its prime ideals are maximal. If A is also integrally closed, then it is a Dedekind ring. It is easy to see that the prime ideals of J_Π are precisely the ideals PJ_Π, where $P \in \Pi$.

Although the quasi-equality classes of full subrings of K are completely specified by designating a set of prime ideals of J, it is convenient for some purposes to label these classes in a different way.

Definition 2. 8. Let Π be a set of prime ideals of J. For each rational prime p, let

$$I_p(\Pi) = P_1^{e_1} \dots P_k^{e_k},$$

where $P_1, \dots, P_k$ are the distinct prime ideals in Π which contain p, and e_i is the highest power of P_i dividing (p) (that is, e_i is the ramification index of P_i in (p)). If no prime ideal in Π contains p, let $I_p(\Pi) = J$.

If $\{I_p\}$ is a system of ideals of J (one for each rational prime p), then there is a set Π of prime ideals of J such that $I_p = I_p(\Pi)$ for all p if and only if for each p, $(p) = I_p I_p'$ with I_p and I_p' relatively prime. Moreover the set Π is uniquely determined as the set of all prime ideals P such that P divides one of the ideals I_p.

Proposition 2. 9. *Let F be a subfield of K and denote by J_0 the ring of integers in F. Let Π_0 be a set of prime ideals of J_0 and define* $\Pi = \{P$, prime ideal of $J | P \supseteq P_0$ for some $P_0 \in \Pi_0\}$. *For any $P_0 \in \Pi_0$, let J_{0P_0} be the valuation ring of F associated with P_0 and let $J_{0\Pi_0} = \bigcap_{P_0 \in \Pi_0} J_{0P_0}$. Then*

(i) *J_Π is the integral closure of $J_{0\Pi_0}$ in K;*

(ii) *there is a basis $\{x_1, \dots, x_m\}$ of K over F such that*

$$J_\Pi \doteq J_{0\Pi_0} x_1 + \dots + J_{0\Pi_0} x_m;$$

(iii) $J_{0\Pi_0}=J_\Pi \cap F$;

(iv) $I_p(\Pi)=I_p(\Pi_0)\cdot J$ *for all* p.

Proof. By definition, J_Π is the intersection of all valuation rings of K which contain $J_{0\Pi_0}$. Thus, J_Π is the integral closure of $J_{0\Pi_0}$. To prove (ii), note that there is a basis $\{x_1, \ldots, x_m\}$ of K over F such that $J_\Pi \subseteq J_{0\Pi_0}x_1 + \cdots + J_{0\Pi_0}x_m$ (see [6, p. 264]). If n is a non-zero integer such that $nx_i \in J_\Pi$ for $i=1, \ldots, m$, then $n(J_{0\Pi_0}x_1+\cdots+J_{0\Pi_0}x_m) \subseteq J_\Pi$. Thus, these two groups are quasi-equal. The property (iii) follows from the observations that $J_\Pi \cap F \supseteq J_{0\Pi_0}$ and every element of $J_\Pi \cap F$ is integral over the integrally closed ring $J_{0\Pi_0}$. The statement (iv) is clear from the definitions of $I_p(\Pi)$ and $I_p(\Pi_0)$ because of the unique factorization of ideals in J.

The notion of *field of definition* of a subring of a simple algebra was introduced in [1] and [5]. For full subrings of K, this concept can be stated as follows: a field $F \subseteq K$ is a field of definition of A if $A \doteq (A\cap F)x_1 + \cdots + (A \cap F)x_m$ for some (or equivalently, any) basis $\{x_1, \ldots, x_m\}$ of K over F. It is easy to see that if two rings are quasi-equal, then they have the same fields of definition. Proposition 2.9 leads to a useful characterization of the fields of definition of the ring J_Π.

Theorem 2.10. *Let Π be a set of prime ideals of J. Then a field F in K is a field of definition of J_Π if and only if each of the ideals $I_p(\Pi)$ is generated by elements of F.*

Proof. Suppose that F is a field of definition of J_Π. Let J_0 be the ring of integers in F. Since $J_\Pi \cap F$ is integrally closed in F, there is a set Π_0 of prime ideals of J_0 such that $J_\Pi \cap F = J_{0\Pi_0}$. Since F is a field of definition of J_Π, it follows that $J_\Pi \doteq J_{0\Pi_0}x_1+\cdots+J_{0\Pi_0}x_m$, where $\{x_1, \ldots, x_m\}$ is a basis of K over F. Then by Proposition 2.9, $J_\Pi \doteq J_{\Pi'}$, where Π' consists of all prime ideals of J which contain a prime ideal of Π_0. By Theorem 2.7, this implies that $\Pi'=\Pi$ and therefore by Proposition 2.9, $I_p(\Pi)=I_p(\Pi_0)J$. In particular, $I_p(\Pi)$ is generated by elements of F. Conversely, suppose that each $I_p(\Pi)$ is generated by elements of F. Let Π_0 be the totality of prime ideals of J_0 which divide some $I_p(\Pi)\cap F$. Let Π' be all prime ideals of J which contain some ideal of Π_0. If $P \in \Pi$, then $P_0 = P\cap F \supseteq I_p(\Pi)\cap F$ for some p. Hence $P_0 \in \Pi_0$ and therefore $P \in \Pi'$. Conversely, if $P \in \Pi'$, then $P \supseteq P_0 \supseteq I_p(\Pi)\cap F$, where $P_0 \in \Pi_0$. Consequently, $P = P\cdot J \supseteq (I_p(\Pi)\cap F)\cdot J = I_p(\Pi)$. Thus, $P \in \Pi$. This shows that $J_\Pi = J_{\Pi'}$, so by Proposition 2.9, F is a field of definition of J_Π.

Corollary 2.11. *If Π is a set of prime ideals of J, then the following conditions are equivalent:*

(i) *If F is a proper subfield of K, there is a rational prime p such that $I_p(\Pi)$ is* not *generated by the elements of F;*

(ii) *K is the smallest field of definition of J_Π;*

(iii) *As a group, J_Π is strongly indecomposable (that is, J_Π is not quasi-equal to any proper direct sum).*

Proof. The conditions (i) and (ii) are equivalent by Theorem 2. 10. The equivalence of (ii) and (iii) was proved in [5].

Corollary 2. 12. *Let Π be a set of prime ideals of J such that for some rational prime p, there is precisely one $P \in \Pi$ with $p \in P$, and such that this prime ideal is unramified and has degree one. Then K is the smallest field of definition of J_Π.*

Proof. Le F be a field of definition of J_Π. Then by Theorem 2. 10, $P = (P \cap F) \cdot J$. Thus $[K:F] =$ degree of $P = 1$ (see [6, p. 287]). Consequently, K is the smallest field of definition of J_Π.

This corollary provides a method of constructing full subrings of K whose smallest field of definition is K. Indeed, if $\Pi = \{P\}$ where P is unramified of degree one (and such prime ideals exist in abundance), then J_Π is such a ring.

3. The quasi-isomorphism classes. Our objective in this section is to survey all full subrings belonging to a fixed quasi-isomorphism class. By the results of Section 2, this is equivalent to the problem of classifying the subrings of finite index in a ring J_Π. A fairly obvious method of constructing subrings of finite index in J_Π is to take the preimage in J_Π of subrings of finite rings J_Π/I, where I is a non-zero ideal of J_Π. It is evident that every subring of finite index in J_Π can be obtained in this way. Unfortunately, the same ring may be captured many times, using different ideals of J_Π. In order to secure uniqueness, one is led to examine the subrings of finite index in the inverse limit of the system of rings $\{J_\Pi/I\}$ (defined in the obvious way). It is then natural to look at the structure of this inverse limit. It turns out to be a complete direct sum of the rings $J(P)$, $P \in \Pi$. However, the proof of this fact is somewhat intricate. It is easier to relate directly the subrings of finite index in J_Π to the subrings of finite index in this complete direct sum. The main purpose of the present section is to establish this correspondence.

If Π is any set of prime ideals of J, define

$$J(\Pi) = \sum_{P \in \Pi}^{*} J(P),$$

the complete direct sum with the cartesian product topology. The elements of $J(\Pi)$ will be denoted $[\xi_P]$. Since $J_\Pi \subseteq J_P$ for all $P \in \Pi$, there is a uniquely defined injection

$$\Delta: J_\Pi \to J(\Pi),$$

obtained by letting $\Delta(x) = [\Delta_P x]$. For any non-zero ideal I of J, define

$$V(I) = \{[\xi_P] \in J(\Pi) \,|\, v_P(\xi_P) \leqq v_P(I) \quad \text{for all} \quad P \in \Pi\}.$$

Lemma 3.1. (i) *$J(\Pi)$ is a compact topological ring.* (ii) *The sets $V(I)$ are open and constitute a complete system of neighborhoods of zero in $J(\Pi)$.* (iii) *$\Delta(J)$ is dense in $J(\Pi)$.*

Proof. Of these assertions, only the last requires comment. Let $[\xi_P] \in J(\Pi)$ and let I be a non-zero ideal of J. Since $\Delta_P(J)$ is dense in $J(P)$, there exist $x_P \in J$ such that $v_P(\Delta_P(x_P) - \xi_P) \leqq v_P(I)$ for all $P \in \Pi$. By the generalized Chinese remainder theorem, there is an $x \in J$ such that $v_P(x - x_P) \leqq \leqq v_P(I)$ for all $P \in \Pi$ satisfying $v_P(I) < 1$. Consequently, $\Delta(x) - [\xi_P] \in V(I)$. By (ii) it follows that $\Delta(J)$ is dense in $J(\Pi)$.

Lemma 3.2. *If I_1 and I_2 are non-zero ideals of J with $I_1 \subseteq I_2$, then $V(I_1) \subseteq V(I_2) \subseteq \Delta(I_2) + V(I_1)$.*

Proof. If $I_1 \subseteq I_2$, then $v_P(I_1) \leqq v_P(I_2)$ for all P, so that $V(I_1) \subseteq V(I_2)$. Suppose $[\xi_P] \in V(I_2)$. By Lemma 3.1, there exists $x \in J$ such that $\Delta(x) - [\xi_P] \in \in V(I_1)$. But then $v_P(x) \leqq v_P(I_2)$ for all $P \in \Pi$. By the generalized Chinese remainder theorem, there is an element $y \in J$ such that $v_P(x - y) \leqq v_P(I_1)$ for all $P \in \Pi$ with $v_P(I_1) < 1$, and $v_P(y) \leqq v_P(I_2)$ for all $P \in \Pi^c$ with $v_P(I_2) < 1$. It follows that $\Delta(y) - [\xi_P] \in V(I_1)$ and that $v_P(y) \leqq v_P(I_2)$ for all P. Hence, $y \in I_2$ and $[\xi_P] \in \Delta(I_2) + V(I_1)$.

Lemma 3.3. *Let A be a subgroup of J_Π which contains the ideal I_0 of J. Then the closure of $\Delta(A)$ in $J(\Pi)$ is $\Delta(A) + V(I_0)$.*

Proof. As in any commutative topological group, the closure of $\Delta(A)$ is the intersection $\bigcap_N (\Delta(A) + N)$, where N ranges over any complete system of neighborhoods of zero. Thus, by Lemmas 3.1 and 3.2 this closure is $\bigcap_{I \subseteq I_0} (\Delta(A) + V(I)) = \Delta(A) + V(I_0)$. Indeed, $\Delta(A) + V(I) = \Delta(A) + \Delta(I_0) + V(I) \supseteq \supseteq \Delta(A) + V(I_0)$ for $I \subseteq I_0$.

Lemma 3.4. *If I is a non-zero ideal of J, then $\Delta^{-1}(V(I)) = IJ_\Pi$.*

Proof. By definition, $u \in \Delta^{-1}(V(I))$ if and only if $v_P(u) \leqq v_P(I)$ for all $P \in \Pi$. By definition of v_P, this implies that $(u) = uJ = II'(I'')^{-1}$, where I' and I'' are (integral) ideals and I'' is a product to prime ideals which are not in Π. Thus, $z \in (I'')^{-1}$ implies $zI'' \subseteq J$ and therefore $v_P(z) \leqq 1$ for all P

not dividing I''. In particular, $v_P(z) \leqq 1$ for all $P \in \Pi$. Thus, $z \in J_\Pi$. It follows that $I'(I'')^{-1} \subseteq J_\Pi$ and therefore $u \in IJ_\Pi$. Conversely, if $u = x_1 w_1 + \cdots + x_k w_k$, $x_i \in I$, $w_i \in J_\Pi$, then for any $P \in \Pi$,

$$v_P(u) \leqq \max\{v_P(x_1) v_P(w_1), \ldots, v_P(x_k) v_P(w_k)\} \leqq v_P(I).$$

Hence, $u \in \Delta^{-1}(V(I))$.

Lemma 3.5. *The following conditions are equivalent for subgroups L of $J(\Pi)$:*

(i) *L has finite index in $J(\Pi)$;*

(ii) *$J(\Pi)/L$ has bounded order;*

(iii) *$V(I) \subseteq L$ for some non-zero ideal I of J;*

(iv) *L is open.*

Proof. Clearly (i) implies (ii). Property (ii) implies property (iii), since if n is a non-zero integer such that $nJ(\Pi) \subseteq L$, then $V((n)) = nJ(\Pi) \subseteq L$. If (iii) is satisfied, then $L = \cup\{x + V(I) \mid x \in L\}$ is a union of open sets, hence open. Finally (iv) implies (i) since $J(\Pi)$ is a disjoint union of the cosets of L and by the compactness of $J(\Pi)$, this union must be finite.

For $A \subseteq J_\Pi$, let $\Delta(A)^-$ denote the closure of $\Delta(A)$ in $J(\Pi)$.

Theorem 3.6. *The mappings*

$$A \to \Delta(A)^-, \quad L \to \Delta^{-1}(L)$$

are inverse, one-to-one correspondences between the subgroups A of finite index in J_Π and the open subgroups L of $J(\Pi)$. These correspondences send subrings into subrings, subrings with identity into subrings with identity, and ideals into ideals.

Proof. If A has finite index in J_Π, then A contains a non-zero ideal of J and therefore by Lemmas 3.3 and 3.5, $\Delta(A)^-$ is an open subgroup of $J(\Pi)$. Let I be a non-zero ideal of J such that $IJ_\Pi \subseteq A$. (For example, if $nJ_\Pi \subseteq A$, let $I = (n)$.) Necessarily $I \subseteq A$. Thus, by Lemmas 3.3 and 3.4, $\Delta^{-1}(\Delta(A)^-) = \Delta^{-1}(\Delta(A) + V(I)) = A + \Delta^{-1}(V(I)) = A + IJ_\Pi = A$. By Lemma 3.5, if L is an open subgroup of $J(\Pi)$, there is a non-zero ideal I in J such that $V(I) \subseteq L$. Consequently, by Lemma 3.4, $\Delta^{-1}(L) \supseteq IJ_\Pi \supseteq nJ_\Pi$, where n is any non-zero integer in I. It follows that $\Delta^{-1}(L)$ has finite index in J_Π. To prove that $\Delta(\Delta^{-1}(L))^- = L$, we have only to note that L is an open and therefore closed subgroup of $J(\Pi)$, that $\Delta(\Delta^{-1}(L)) = \Delta(J_\Pi) \cap L$, and finally that $\Delta(J_\Pi)$ is dense in $J(\Pi)$ (by Lemma 3.1). The last statements of the theorem are consequences of the facts that the closure of a subring of a topological ring is itself a subring, and that the closure of an ideal of a dense subring is an ideal of the ring.

By virtue of Theorem 3.6, the problem of finding subrings of finite index in a ring is transferred from J_{Π} to $J(\Pi)$. In many respects, this is a simplification. For example, one has the following result.

Proposition 3.7. *Let L be an open subgroup in $J(\Pi)$. Then $L=\sum_p^* L^p$, where $L^p = L \cap \Big(\sum_{p\in P\in\Pi} J(P)\Big)$ and $L^p = \sum_{p\in P\in\Pi} J(P)$ for almost all p.*

Proof. By Lemma 3.5, $L \supseteq V((n))$, where n is some non-zero rational integer. Let $\Pi' = \{P\in\Pi \mid n\notin P\}$. Then $\Pi-\Pi'$ is finite and, by definition, $V((n))$ contains $J(\Pi')=\sum_{p\in\Pi'}^* J(P)$. In particular, $V((n))$ contains the identity e of $J(\Pi')$. Hence $eV((n))\subseteq eL\subseteq eJ(\Pi)=eV((n))$. Thus

$$L=(1-e)L\oplus eL=(1-e)L\oplus\sum_{P\in\Pi'}^* J(P)=(1-e)L+\sum_{(p,n)=1}^* L^p,$$

since $(p,n)=1$ implies $L\cap\sum_{p\in P\in\Pi} J(P)=V((n))\cap\sum_{p\in P\in\Pi} J(P)=\sum_{p\in P\in\Pi} J(P)$. Now let $n=p^k n'$, where $(p,n')=1$. Then

$$n'(1-e)L=L\cap\Big(\sum_{p\in P\in\Pi} J(P)\Big)+(1-e)V((n)).$$

Hence, $(1-e)L=\sum_{p\mid n}(L\cap\sum_{p\in P\in\Pi} J(P))+(1-e)V((n))=\sum_{p\mid n} L^p$, and this last sum is direct. Therefore, finally $L=\sum_p^* L^p$.

As an application of these results, we will "count" the subrings of finite index in J_{Π} which contain the identity element of K. It turns out that J_{Π} either has no proper subrings containing 1, or it has infinitely many such subrings. To prove this fact, it suffices by Proposition 3.7 to examine the subrings of $J(\Pi_p)$, where $\Pi_p=\{P\in\Pi \mid p\in P\}$.

Lemma 3.8. *Let A be a torsion free group such that A/pA has rank at least two. Let x be any element of A. Define $B_k=\{x, p^k A\}$. Then $A = B_0\supset B_1\supset B_2\supset\cdots$.*

Proof. Clearly $A=B_0\supseteq B_1\supseteq B_2\supseteq\cdots$. We must prove that the inclusions are strict. Since A is torsion free, the mapping $p: p^{k-1}A\to p^k A$ is an isomorphism which sends $p^k A$ onto $p^{k+1}A$. Hence $p^k A/p^{k+1}A\cong A/pA$ has rank at least two. From the exactness of the sequence

$$0\to(p^k A\cap\{x\})/(p^{k+1}A\cap\{x\})\to p^k A/p^{k+1}A\to B_k/B_{k+1}\to 0,$$

it follows that $B_{k+1}\subset B_k$.

Corollary 3.9. *Let p be a rational prime. Then the ring $J(\Pi_p)=\sum_{p\in P\in\Pi} J(P)$ contains infinitely many distinct open subrings with identity un-*

less either $\Pi_p = \emptyset$, or $\Pi_p = \{P\}$, where P is unramified over p and the degree of P is one.

Proof. Let $A = J(\Pi_p)$. We can assume that $A \neq 0$. If Π_p contains more than one prime ideal, than A/pA has rank at least two, because p is not a unit of $J(P)$ if $p \in P$. Suppose that $A = J(P)$. If P is ramified over p, then A/pA is an algebra (over Z_p) whose radical is neither zero nor the whole algebra. Thus again A/pA has rank larger than one. Finally, if P is unramified, then $A/pA \cong J/P$ has rank equal to the degree of P. Therefore, unless $\Pi_p = \{P\}$ where P is unramified of degree one, Lemma 3. 8 is applicable and by taking x to be the identity element 1 of K, the corresponding subgroups B_k are actually subrings containing 1. These are open by Lemma 3. 5.

Lemma 3. 10. *Let P be an unramified prime ideal in J which is of degree one. Then the open subgroups of $J(P)$ are precisely those of the form $p^n J(P)$, $n \geqq 0$, where p is the rational prime belonging to P. In particular, there is no proper open subgroup of $J(P)$ containing* 1.

Proof. Since P is unramified and of degree one, $J(P)/pJ(P) \cong J/P \cong Z_p$ (the integers modulo p). Thus, for any k, $J(P)/p^k J(P)$ is a cyclic group of order p^k. Suppose L is an open subgroup of $J(P)$. Then by Lemma 3. 5, $L \supseteq p^k J(P)$ for some k. Consequently $L/p^k J(P)$ is a subgroup of $J(P)/p^k J(P)$. Since $J(P)/p^k J(P)$ is cyclic of order p^k, there is an integer $n \leqq k$ such that $L/p^k J(P) = p^n (J(P)/p^k J(P))$. Thus, $L = p^n J(P)$.

For convenience, we will say that the set Π of prime ideals of J *satisfies condition U* if

(i) for any rational prime p, $\Pi_p = \{P \in \Pi \mid p \in P\}$ contains at most one prime ideal, and

(ii) if $P \in \Pi$, then P is unramified and of degree one.

Theorem 3. 11. *Let Π be a set of prime ideals of J. If Π satisfies condition U, then every subgroup of finite index in J_Π is of the form nJ_Π, where n is a rational integer. In particular, every ideal of J_Π is generated by a rational integer. Moreover, there is no proper subring of finite index in J_Π which contains the identity element. If Π fails to satisfy condition U, then there is a countable infinity of proper subrings of finite index in J_Π, each of which contains the identity.*

Proof. Suppose that Π satisfies condition U. Then by Proposition 3. 7 and Lemma 3. 10, every open subgroup L of $J(\Pi)$ is of the form $\sum_p^* L^p$, where $L^p = 0$ if $\Pi_p = \emptyset$ and $L^p = p^{k(p)} J(P)$ if $\Pi_p = \{P\}$ with $k(p) = 0$ for almost all such p. Moreover if $1 \in L$, then $k(p) = 0$ for every prime p such that $\Pi_p \neq \emptyset$. Let n be the product of all $p^{k(p)}$. Then $L = nJ(\Pi)$. We conclude from Theorem 3.6 that each subgroup of finite index in J_Π is of the form nJ_Π, with $n=1$ for subgroups containing the identity of K. If Π does not satisfy condition U, then by Corollary 3.9, Proposition 3.7 and Theorem 3.6, J_Π contains infinitely many subrings of finite index, each of which contains the identity. Since J_Π/mJ_Π is finite for any non-zero integer m, there can be at most a countable number of subrings (or even subgroups) of finite index in J_Π.

Corollary 3.12. *Let Π be a set of prime ideals of J such that K is the smallest field of definition of J_Π* (see Corollary 2.11). *Suppose that Π does not satisfy condition U. Then the quasi-equality class of J_Π contains infinitely many rings with identity no two of which are group isomorphic.*

Proof. It is sufficient to show that if A and B are full subrings of J_Π containing the identity, and if A and B are group isomorphic, then $A=B$. Let φ be an isomorphism of A onto B. By the results of [5], there is a non-zero element $z\in K$ such that $\varphi(x)=z\cdot x$ for all $x\in A$. Thus $z=z\cdot 1=\varphi(1)\in B$. Since B is a ring, $z^2\in B$. Since φ is onto, there is an $x\in A$ such that $z^2=\varphi(x)=zx$, that is $z\in A$. Therefore, $B=zA\subseteq A$. By symmetry, $A=B$.

If K is not the smallest field of definition of J_Π, then Π cannot satisfy condition U unless $\Pi=\emptyset$ (by Corollary 2.12). However, Π can satisfy condition U relative to the smallest field of definition of J_Π, in the sense of the following result.

Corollary 3.13. *Suppose that F is the smallest field of definition of J_Π and that $\Pi_0=\{P\cap F \mid P\in\Pi\}$ satisfies condition U (relative to the ring of integers in F). Let A be a subring of K such that $A\doteq J_\Pi$. Then A is group isomorphic to the direct sum $B_1\oplus\cdots\oplus B_k$, where $B_i\cong J_{\Pi_0}\cong A\cap F$ and $k=[K:F]$.*

Proof. Let $C=\{x\in F \mid xA\subseteq A\}$. Then $1\in C$ and $A\cap F\subseteq C$. If $n\neq 0$ is such that $n\cdot 1\in A$, then $nx=x(n\cdot 1)\in A$ for every $x\in C$. Thus, $nC\subseteq A\cap F$. Consequently, C is a full subring of F which belongs to the quasi-equality class of $A\cap F$. By theorem 2.10, this is the same as the quasi-equality class of J_{Π_0}. Thus by Theorem 3.11 and the assumption that Π_0 satisfies condition U, we conclude that $C=J_{\Pi_0}$. In particular, C is a principal ideal domain. Since F is a field of definition of A, there is a basis $\{x_1,\ldots,x_k\}$ of K over F such that $A\doteq(A\cap F)x_1+\cdots+(A\cap F)x_k\doteq Cx_1+\cdots+Cx_k$. Thus if m is a non-zero integer such that $mx_i\in A$ for $i=1,\ldots,k$, then $A/(C(mx_1)+\cdots+C(mx_k))$ is a group of finite rank and bounded order — hence finite. Consequently, A is a finitely generated C-module. From the structure theory of modules over a principal ideal domain (see [6, p. 247]), we conclude that there is a basis $\{y_1,\ldots,y_k\}$ of K over F such that $A=Cy_1+\cdots+Cy_k$. By

Theorem 3. 11, $C = J_{\Pi_0} \cong A \cap F$ (as groups). This completes the proof, but we remark that if $1 \in A$, then $A \cap F = J_{\Pi_0}$ and A is a free $A \cap F$-module.

If the smallest field of definition of J_Π is Q, then Π_0 is a set of rational primes (or the principal ideals which they generate) and Π_0 automatically satisfies condition U. Thus any full subring of K whose smallest field of definition is Q is group isomorphic to a direct sum of copies of a rank one group. This fact was proved in [1] by a different method.

4. Additive groups of subrings of algebraic number fields. A torsion free group A is called a *quotient divisible group* (or q. d. group) if A contains a full free subgroup F such that A/F is divisible. This concept was introduced in [1], where it was shown that the additive group of a full subring of a semi-simple rational algebra (finite dimensional) is always a q. d. group. This result provides a necessary condition on a torsion free group in order that it be isomorphic to the additive group of a subring of an algebraic number field. Another necessary condition is obtained from the following theorem which is proved in [5]. Let $E(A)$ denote the ring of endomorphisms of the group A. If A is (the additive group of) a full subring of the algebraic number field K, then $Q \otimes E(A)$ is isomorphic (as a rational algebra) to the full matrix ring $M_m(F)$, where F is the smallest field of definition of A and $m = [K:F]$.

For a torsion free group A, the rational algebra $Q \otimes E(A)$ is an invariant of considerable interest. On the one hand, $Q \otimes E(A)$ usually has simpler structure than A. On the other hand, $Q \otimes E(A)$ reflects many interesting properties of A. It is often possible to determine $Q \otimes E(A)$ explicitly. For example, if A is a rank one group, then $Q \otimes E(A)$ is always isomorphic to Q. For rank two groups, the algebras $Q \otimes E(A)$ have also been calculated (see [2]). Finally, as we noted above, the algebras $Q \otimes E(A)$ are known if A is the additive group of a full subring of an algebraic number field (or more generally, a simple Q-algebra).

If A is a full subgroup of the rational vector space V, it is possible to identify $Q \otimes E(A)$ with a subalgebra of the ring $E(V)$ of all linear transformations of V, namely

$$QE(A) = \{\varphi \in E(V) \mid n\varphi(A) \subseteq A \quad \text{for some} \quad n \neq 0\}.$$

Notationally, $QE(A)$ is easier to work with than $Q \otimes E(A)$.

The purpose of this section is to prove the following:

Theorem 4. 1. *Let A be a torsion free group of rank n. Let K be an algebraic number field. Then A is isomorphic to the additive group of a full subring of K if and only if $[K:Q] = n$, A is a q. d. group, and $Q \otimes E(A)$ is isomorphic to $M_m(F)$ where F is a subfield of K such that $[K:F] = m$.*

The condition $[K:Q]=n$ is clearly necessary and the necessity of the other conditions has been established in the papers mentioned above. The proof that these conditions are sufficient will be accomplished in several steps. We may assume throughout that A is a full q. d. subgroup of the n dimensional rational space V and that $QE(A)\cong M_m(F)$, where F is a subfield of K such that $[K:F]=m$.

(4. 2) If $A\doteq B$ and B is isomorphic to a full subring of K, then A is isomorphic to a full subring of K.

This was proved in [1, Corollary 2. 7].

(4. 3) It suffices to prove the theorem in the case $m=1$.

Suppose that the theorem is true for $m=1$. Let φ_{ij} denote the mappings corresponding to the matrix units under the isomorphism $QE(A)\cong M_m(F)$. In particular, the set $\{\varphi_{11},\ldots,\varphi_{mm}\}$ is a family of orthogonal projections whose sum is the identity map. Moreover $\varphi_{ii}QE(A)\varphi_{ii}\cong F$. Let $A_i=\varphi_{ii}(A)$. Since $\varphi_{ij}\in QE(A)$, there is an integer $k\neq 0$ such that $k\varphi_{ij}(A)\subseteq A$ for all i and j. Then $kA_i=k\varphi_{ii}(A)=\varphi_{ij}(k\varphi_{ji}(A))\subseteq\varphi_{ij}(A)$ and $k\varphi_{ij}(A)=\varphi_{ii}(k\varphi_{ij}(A))\subseteq$ $\subseteq\varphi_{ii}(A)=A_i$. Since φ_{ij} maps A_j isomorphically onto $\varphi_{ij}(A)$, we therefore have $A_i\doteq\varphi_{ij}(A)\cong A_j$. Moreover $k(A_1+\cdots+A_m)\subseteq A=(\varphi_{11}+\cdots+\varphi_{mm})A\subseteq$ $\subseteq A_1+\cdots+A_m$, so that $A\doteq A_1\oplus\cdots\oplus A_m$. Now the hypotheses of Theorem 4. 1 are satisfied for the case $m=1$, since rank $A_i=(1/m)$ rank $A=$ $=[K:Q]/[K:F]=[F:Q]$, each A_i is a q. d. group ([1, Corollary 5. 8], and $QE(A_i)\cong\varphi_{ii}QE(A)\varphi_{ii}\cong F$. Hence $A_i\cong B_i$ where B_i is a full subring of F, and $B_1\doteq\cdots\doteq B_m$. Let $B=B_1\cap\cdots\cap B_m$. Then K contains a full subring C which is group isomorphic to a direct sum of m copies of B. Thus, C is isomorphic to a subgroup of finite index in $A_1\oplus\cdots\oplus A_m$. Consequently, by (4. 2) A is isomorphic to a full subring of K.

We suppose henceforth that $m=1$, that is, $QE(A)\cong K$. Choose any $a\neq 0$ in A and define $\theta\colon QE(A)\to V$ by $\theta(\varphi)=\varphi(a)$. Clearly, θ is a Q-space homomorphism. Since $QE(A)$ is a field and the kernel of θ is an ideal (and θ is not the zero map), it follows that θ is one-to-one. Since both $QE(A)$ and V have dimension equal to n, the mapping θ is onto. Therefore θ induces a multiplication on V satisfying $\theta(\varphi)\theta(\psi)=\theta(\varphi\psi)$. That is, with respect to this multiplication, θ is a ring isomorphism of $QE(A)$ on V. Hence V is a ring which is isomorphic to K. Note that for any $x\in V$ and $\varphi\in QE(A)$,

(4. 4) $\varphi(a)\cdot x=\varphi(x)$.

Indeed, we can write $x=\theta(\psi)$ for some $\psi\in QE(A)$, and $\varphi(a)\cdot x=\theta(\varphi)\theta(\psi)=$ $=\theta(\varphi\psi)=\varphi(\psi(a))=\varphi(x)$.

(4. 5) A is quasi-equal to a subring of V.

This result, together with (4. 2), will complete the proof of Theorem 4. 1. The proof of (4. 5) is based on a criterion established in [1] (Theorem 1. 10): a q. d. subgroup A of the finite dimensional rational algebra V is quasi-equal to a subring of V if, for each prime p, the $Q(p)$-space

$$\delta_p(A) = d(Z(p) \otimes A)$$

(the maximal divisible subgroup of $Z(p) \otimes A$, considered as a subgroup of $Q(p) \otimes V$) is an ideal of $Q(p) \otimes V$.

Suppose $z \in V$. Write $z = \varphi(a)$, $\varphi \in QE(A)$. If $w \in Q(p) \otimes V$, say $w = \Sigma \alpha_i \otimes x_i$ ($\alpha_i \in Q(p)$, $x_i \in V$), then by (4. 4), $(1 \otimes z)w = \Sigma \alpha_i \otimes z x_i = \Sigma \alpha_i \otimes \varphi(x_i) = (1 \otimes \varphi)w$. In particular, $(1 \otimes z)\delta_p(A) = (1 \otimes \varphi)\delta_p(A)$. If $z \neq 0$, then φ is a non-singular transformation of V and in this case it is clear that $(1 \otimes \varphi)\delta_p(A) = \delta_p(\varphi A)$. Moreover, $k\varphi(A) \subseteq A$ for some non-zero integer k since $\varphi \in QE(A)$. Thus, $\delta_p(\varphi A) = k\delta_p(\varphi A) = \delta_p(k\varphi(A)) \subseteq \delta_p(A)$. Combining these observations gives $(1 \otimes z)\delta_p(A) \subseteq \delta_p(A)$ for all $z \neq 0$ in V. Since the elements of the form $1 \otimes z$ span $Q(p) \otimes V$ over $Q(p)$, and since $\delta_p(A)$ is a $Q(p)$-subspace of $Q(p) \otimes V$, it follows that $\delta_p(A)$ is an ideal of $Q(p) \otimes V$. This is the result which was needed to complete the proof of (4. 5).

Corollary 4. 6. *Let A be a torsion free group of finite rank. Then A is isomorphic to the additive group of a full subring of a semi-simple rational algebra if and only if A is a q. d. group and A is quasi-equal to a direct sum $B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$ of strongly indecomposable groups such that each of the rings $Q \otimes E(B_i)$ is an algebraic number field whose dimension over Q is the rank of B_i.*

Proof. Suppose first that A satisfies these conditions. Then each B^i is a q. d. group (by [1, Corollary 5. 8]) and therefore by Theorem 4. 1 each B_i is isomorphic to the additive group of a full subring of an algebraic number field. It follows, using (4. 2), that A is isomorphic to a full subring of a direct sum of fields. The necessity of these conditions is obtained from the results of [1] and [5].

References

[1] R. A. Beaumont and R. S. Pierce, Torsion-free rings, *Illinois J. Math.*, 5 (1961), 61—98.
[2] R. A. Beaumont and R. S. Pierce, Torsion free groups of rank two, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 38 (1961).
[3] M. Deuring, *Algebren* (Berlin, 1935).
[4] W. Krull, *Idealtheorie* (Berlin, 1935).
[5] R. S. Pierce, Subrings of simple algebras, *Michigan Math. J.*, 7 (1960), 241—243.
[6] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, vol. 1, (Princeton, 1958).

UNIVERSITY OF WASHINGTON

(Received October 11, 1960)

Generalized ideals in semigroups

By SÁNDOR LAJOS in Budapest

Introduction

A semigroup is a non-empty set in which an associative binary multiplication is defined. A semigroup S is commutative, if $ab = ba$ for all $a, b \in S$. Let A, B be arbitrary non-empty subsets of a semigroup S, then the product AB means the set of all elements ab ($a \in A, b \in B$). A subsemigroup of S is a non-empty subset T of S, which forms a semigroup under the same operation as S. A subset T is a subsemigroup if and only if $TT \subseteq T$ holds. A left (right) ideal L (R) of S is a non-empty subset of S such that $SL \subseteq L$ ($RS \subseteq R$) holds. A two-sided ideal or ideal of S is a subset which is both a left and a right ideal of S. The smallest left (right, two-sided) ideal of S containing the subset A is called the left (right, two-sided) ideal of S generated by A. If an ideal is generated by a single element, it is termed principal.

In this paper we introduce the following generalizations of the concepts of ideals in semigroups: the notion of (m, n)-ideal, which is a generalization of one-sided (left or right) ideals, and as a special case it contains the notion of biideal, due to R. A. GOOD and D. R. HUGHES [1]; the concept of (m, n)-quasiideal, which is a generalization of the concept of quasiideal, due to O. STEINFELD [5]; the concept of k-ideal, which is a generalization of the concept of two-sided ideal.

We note that these notions can be introduced in an arbitrary algebraic system, in which at least one associative operation is defined.

§ 1. (m, n)-ideals

Definition 1.1. We call the subsemigroup A of an arbitrary semigroup S an *(m, n)-ideal*, if A satisfies the relation

(1) $$A^m S A^n \subseteq A,$$

where m, n are non-negative integers. (A^0 let be defined as an operator element, so that $A^0 S = S A^0 = S$.)

R. A. Good and D. R. Hughes [1] have introduced the notion of (1, 1)-ideal under the name „biideal".

It is easy to prove the following properties of (m, n)-ideals:

a) The intersection of two (m, n)-ideals of a semigroup S is the empty set, or else an (m, n)-ideal of S.

b) A group has no proper (m, n)-ideal.

c) Let k be a positive integer; the k-th power of an (m, n)-ideal is also an (m, n)-ideal.

d) Let A be a subset of a semigroup S. The smallest (m, n)-ideal of S containing A is called the (m, n)-ideal of S generated by A and denoted by $\{A\}_{(m,n)}$. It is clear that

$$\{A\}_{(m,n)} = A \cup A^2 \cup \cdots \cup A^{m+n} \cup A^m S A^n.$$

e) If A is a subsemigroup of S, then

$$\{A\}_{(m,n)} = A \cup A^m S A^n.$$

f) The principal (m, n)-ideal of S generated by element a of S is

$$a \cup a^2 \cup \cdots \cup a^{m+n} \cup a^m S a^n.$$

g) The principal (m, n)-ideal of S generated by an idempotent element e is eSe.

Definition 1.2. A subsemigroup S_n of a semigroup S will be called *attainable*, if there exist subsemigroups $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ of S such that

$$S_n \subseteq S_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq S_1 \subseteq S_0 = S \tag{2}$$

holds, where S_i is a one-sided (left or right) ideal of S_{i-1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

With every such chain (2) of subsemigroups we can associate a product π of the letters l and r in which the i-th factor is l or r according to whether S_i $(i = 1, \ldots, n)$ is contained in S_{i-1} as a left or right ideal, respectively. (If S_i is a two-sided ideal in S_{i-1}, then either of l and of r can be chosen.) A subsemigroup A of S is called a *π-ideal*, if it is attainable by a subsemigroup chain with which the product π is associated.

In the product π let m and n be the numbers of the factors l and r, respectively.

We are going to prove the following

Theorem 1.3. *The following three statements concerning to a subset A of an arbitrary semigroup S are equivalent:*

(i) *A is an lr-ideal of S,*

(ii) *A is an rl-ideal of S,*

(iii) *A is an $(1, 1)$-ideal of S.*

Proof. Let A be an lr-ideal of a semigroup S. Then for some subsemigroup L of S we have $A \subseteq L \subseteq S$, $AL \subseteq A$ and $SL \subseteq L$. Hence it follows that

$$ASA \subseteq ASL \subseteq AL \subseteq A,$$

that is, A is an $(1, 1)$-ideal of S.

Conversely, let A be $(1, 1)$-ideal of a semigroup S, i. e. $ASA \subseteq A$. Then by

$$A(A \cup SA) = AA \cup ASA \subseteq A \cup A = A$$

it follows that A is a right ideal of the left ideal of S generated by A, i. e. A is an lr-ideal of S.

The proof of the dual statement is similar.

Corollary 1.4. *A subset A of a semigroup S is a π-ideal of S if and only if A is an $r^m l^n$-ideal of S.*

Now we can prove the

Theorem 1.5. *A subset A of a semigroup S is a π-ideal of S if and only if A is an (m, n)-ideal of S.*

Proof. By the preceding corollary it suffices to show the theorem for $r^m l^n$-ideals instead of π-ideals. Let A be an $r^m l^n$-ideal of a semigroup S. Then — A being an attainable subsemigroup — there exist subsemigroups $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$, and $R_1, R_2, \ldots, R_m$ of S such that the following relations hold:

$$(3)\quad \begin{cases} A = L_n \subseteq L_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq L_1 \subseteq R_m \subseteq \cdots \subseteq R_1 \subseteq R_0 = S, \\ R_i R_{i-1} \subseteq R_i \ (i = 1, \ldots, m), \quad R_m L_1 \subseteq L_1, \quad L_{j-1} L_j \subseteq L_j \ (j = 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Hence it follows that

$$\begin{aligned} A^m S A^n = L_n^m S L_n^n \subseteq L_n^{m-1}(R_1 S) L_n^n \subseteq L_n^{m-1} R_1 L_n^n \subseteq \cdots \subseteq (L_n R_{m-1}) L_n^n \subseteq \\ \subseteq (R_m R_{m-1}) L_n^n \subseteq (R_m L_1) L_n^{n-1} \subseteq L_1 (L_2 L_n^{n-2}) \subseteq \cdots \subseteq L_n = A, \end{aligned}$$

therefore A is indeed an (m, n)-ideal of S.

Conversely, let us suppose that A is an (m, n)-ideal of the semigroup S. By the property $e)$ the (m, n)-ideal of S generated by A is $A \cup A^m S A^n$. It is easy to see that $\{A\}_{(m,k)}$ is a left ideal of $\{A\}_{(m,k-1)}$ $(k = 1, \ldots, n)$, and $\{A\}_{(i,n)}$ is a right ideal in $\{A\}_{(i-1,n)}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Hence the subsemigroups $L_n = A$, $L_{n-1} = \{A\}_{(m,n-1)}, \ldots, L_1 = \{A\}_{(m,1)}$, $R_m = \{A\}_{(m,0)}$, $R_{m-1} = \{A\}_{(m-1,0)}, \ldots$ $\ldots, R_1 = \{A\}_{(1,0)}$ satisfy the conditions (3). Thus A is an $r^m l^n$-ideal of S. This completes the proof of Theorem 1.5.

Definition 1.6. A two-sided ideal of a two-sided ideal of a semigroup S we shall call an i^2-ideal. By an *i^k-ideal* we mean a two-sided ideal of an arbitrary i^{k-1}-ideal of S, where k is a positive integer $(k \geqq 2)$.

Definition 1.7. By a *k-ideal* of a semigroup S we mean a subset A which is an (m, n)-ideal of S, for every m, n such that $m+n=k$.

It is clear that the subset A of a commutative semigroup S is a k-ideal if and only if $A^k S \subseteq A$. We remark that the concept of k-ideal is a generalization of the concept of two-sided ideal.

Corollary 1.8. *The subset A of a commutative semigroup S is an i^k-ideal if and only if it is a k-ideal.*

Proof. This follows at once from Theorem 1.5.

Remark 1.9. More generally the Corollary 1.8 holds for two-sided semigroups too. By a two-sided (or duo) semigroup we mean a semigroup every one-sided ideal in which is a two-sided ideal (see: [4]).

§ 2. (m, n)-quasiideals

Definition 2.1. A subsemigroup A of a semigroup S we shall call an *(m, n)-quasiideal*, if

$$A^m S \cap S A^n \subseteq A \tag{4}$$

holds, where m, n are non-negative integers (A^0 is an operator element not contained in S, and $A^0 S = S A^0 = S$).

It is easy to prove the following properties of (m, n)-quasiideals:

a) The intersection of a set of (m, n)-quasiideals of a semigroup S, if it is not empty, is an (m, n)-quasiideal of S.

b) A group has no proper (m, n)-quasiideal.

c) Let A be a subset of a semigroup S. The (m, n)-quasiideal of S generated by A, i. e. the smallest (m, n)-quasiideal of S containing A is

$$A \cup A^2 \cup \cdots \cup A^k \cup (A^m S \cap S A^n),$$

where $k = \min(m, n)$.

d) If A is a subsemigroup of S, then the (m, n)-quasiideal of S generated by A is

$$A \cup (A^m S \cap S A^n).$$

e) The principal (m, n)-quasiideal generated by a is

$$a \cup a^2 \cup \cdots \cup a^k \cup (a^m S \cap S a^n),$$

where $k = \min(m, n)$.

f) The principal (m, n)-quasiideal generated by an idempotent element e is $eS \cap Se$.

The concept of (1, 1)-quasiideal was introduced by O. STEINFELD [5] under the name „quasiideal", and he showed that a subset of a semigroup S is a quasiideal, if and only if it is an intersection of a left and a right ideal of S. This result is generalized by the

Theorem 2.2. *A subset of an arbitrary semigroup S is an (m, n)-quasiideal of S if and only if it is the intersection of an $(m, 0)$-ideal and a $(0, n)$-ideal of S.*

Proof. Let S be an arbitrary semigroup, let A and B be an $(m, 0)$-ideal and a $(0, n)$-ideal of S, respectively. Then $A^m S \subseteq A$, and $SB^n \subseteq B$, which implies

$$(A \cap B)^m S \cap S(A \cap B)^n \subseteq A \cap B,$$

and since the common part of subsemigroups is likewise a subsemigroup, we obtain that $A \cap B$ is an (m, n)-quasiideal of S.

Conversely, let A be an (m, n)-quasiideal of the semigroup S, i. e. $A^m S \cap SA^n \subseteq A$. We prove that

$$A = \{A\}_{(m, 0)} \cap \{A\}_{(0, n)}.$$

By property *e)* of § 1 $\{A\}_{(m, 0)} = A \cup A^m S$, $\{A\}_{(0, n)} = A \cup SA^n$. By distributivity this implies

$$(A \cup A^m S) \cap (A \cup SA^n) = A \cup (A^m S \cap SA^n) = A,$$

as we stated.

Theorem 2.3. *Every (m, n)-quasiideal is an (m, n)-ideal.*

Proof. Let S be a semigroup, and let A be an (m, n)-quasiideal of S. Since $A^m SA^n \subseteq A^m S$ and $A^m SA^n \subseteq SA^n$ we obtain

$$A^m SA^n \subseteq A^m S \cap SA^n \subseteq A,$$

that is A is an (m, n)-ideal of S.

§ 3. The case of regular semigroups

Definition 3.1. A semigroup S is *regular* if to every element a of S there exists an element x in S so that $axa = a$.

Theorem 3.2. *In a regular semigroup every (m, n)-ideal is an (m, n)-quasiideal and conversely.*

Proof. Let S be a regular semigroup. We show that

$$A^m SA^n = A^m S \cap SA^n, \tag{5}$$

for every non-empty subset A of S. In proof of Theorem 2.3 we proved that $A^m SA^n \subseteq A^m S \cap SA^n$. Conversely, let x be an element of $A^m S \cap SA^n$. Then

$\left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right) s = x = s' \cdot \prod_{j=1}^{n} a'_j$. Since S is regular, there exists an element y such that $xyx = x$. Thus $x = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right) s \cdot y \cdot s' \cdot \prod_{j=1}^{n} a'_j \in A^m S A^n$, therefore

$$A^m S \cap S A^n \subseteq A^m S A^n,$$

i. e. holds (5), from which the theorem follows.

Corollary 3.3. *In a regular semigroup every biideal is a quasiideal, and conversely.*

Theorem 2.2 and Theorem 3.2 imply

Theorem 3.4. *A subset of a regular semigroup S is an (m, n)-ideal if and only if it is an intersection of an $(m, 0)$-ideal and a $(0, n)$-ideal of S.*

Now we prove the following

Lemma 3.5. *Let S be an arbitrary semigroup, and let M be an i^2-ideal of S. Denote $\overline{M}$ the two-sided ideal of S generated by M. Then $\overline{M}^3 \subseteq M$.*

Proof. Let M' be a two-sided ideal of S, containing M as two-sided ideal. Then

$$\overline{M}^3 \subseteq M' \overline{M} M' = M'(M \cup MS \cup SM \cup SMS)M' \subseteq M$$

because $\overline{M} = M \cup MS \cup SM \cup SMS$.

Theorem 3.6. *In a regular semigroup every i^k-ideal is a two-sided ideal (k is a positive integer).*

Proof. It is sufficient to prove that every i^2-ideal is a two-sided ideal. Let M be an i^2-ideal of a regular semigroup S, and let $\overline{M}$ be the two-sided ideal of S generated by M. From the Kovács—Iséki criteria of regularity (see [3] and [2]) it follows that $\overline{M}^2 = \overline{M}$. This and Lemma 3.5 imply $\overline{M} \subseteq M$, that is $\overline{M} = M$. Therefore M is a two-sided ideal of S, as we stated.

Remark 3.7. From the proof of Theorem 3.6 it can be seen that this theorem holds for every semigroup every two-sided ideal of which is idempotent.

References

[1] R. A. Good—D. R. Hughes, Associated groups for a semigroup, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 624—625. Abstract 575.

[2] K. Iséki, A characterisation of regular semigroup, *Proc. Japan Acad.*, **32** (1956), 676—677.

[3] L. Kovács, A note on regular rings, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 465—468.

[4] Št. Schwarz, О максимальных идеалах в теории полугрупп, *Czechoslovak Math. J.*, **3** (**78**), (1953), 139—153.

[5] O. Steinfeld, Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 262—275.

(Received May 20, 1960, in revised form Dec. 24, 1960)

Some sets of integers related to the k-free integers

By ECKFORD COHEN in Knoxville (Tennessee, U.S.A.)

1. Introduction

In this paper e, n, r and k will denote natural numbers, *with k assumed* >1 *throughout*. Suppose that $p_1, \ldots, p_t$ are the distinct prime divisors of n and write

$$(1.1) \qquad n = p_1^{e_1} \ldots p_t^{e_t},$$

with the convention that $t=0$ in case $n=1$. We shall say that n is *unitarily k-free,* or simply *k-skew,* if $e_i \not\equiv 0 \pmod{k}$ for each exponent e_i $(1 \leqq i \leqq t)$ appearing in the factorization (1.1). Further, we shall say that n is *e-skew of rank r* if $e_i \neq je$ for all i $(1 \leqq i \leqq t)$ and all j $(1 \leqq j \leqq r)$.

Before proceeding further, it is convenient to introduce the following terminology. The *characteristic function* $\chi_S(n)$ of a set S is defined by $\chi_S(n) = 1$ or 0 according as $n \in S$ or $n \notin S$. If x is real and $\geqq 1$, the *enumerative function* of S is defined to be the number $S(x)$ of integers $\leqq x$ contained in S. The *asymptotic density* $\delta(S)$ of S is the limit, $\lim\limits_{x \to \infty} S(x)/x$, whenever this limit exists. Finally, the generating function $f_S(s)$ is defined by the Dirichlet series,

$$f_S(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_S(n)}{n^s}.$$

Let now Q_k, Q_k^*, and $Q_{e,r}^*$ denote respectively the sets of the k-free integers, the k-skew integers, and the e-skew integers of rank r. As to the relation between these sets, it is evident that $Q_k \subset Q_{k,r}^* \subset Q_k^*$ for all r. Moreover, the set Q_k^* is the limiting case, as $r \to \infty$, of the sets $Q_{k,r}^*$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Finally, we note a striking structural analogy between Q_k and Q_k^*. In particular, define d to be a *unitary* divisor of n if $d>0, d\delta = n$, and $(d, \delta) = 1$; a k-skew integer may be defined than as *an integer whose largest unitary k-th power divisor is* 1.

The principal aim of this paper is to determine the simplest asymptotic properties of the k-skew integers. In place of considering Q_k^* directly, we investigate the sets $Q^*_{k,r}$, and from the properties obtained, we deduce, in the limiting case of r, corresponding properties for Q^*_k. One will note in particular the following corollary of Theorem 3. 2.

Corollary. *The asymptotic density* $\delta(Q^*_k)$ *of* Q^*_k *satisfies*

$$\frac{1}{\zeta(k)} < \delta(Q^*_k) = \alpha_k < 1, \tag{1.2}$$

where $\zeta(s)$ *denotes the Riemann zeta function.*

Denote by $Q_k(x)$, $Q^*_k(x)$, and $Q^*_{e,r}(x)$, $x \geqq 1$, the enumerative functions of Q_k, Q^*_k, and $Q^*_{e,r}$, respectively. We shall use two different methods in treating $Q^*_{k,r}(x)$. In the first method (§ 3) we proceed in a manner parallel to the classical treatment of $Q_k(x)$. Sums over ordinary divisors are now replaced, however, by unitary divisors. This method is elementary to the extent that it is not even necessary to introduce generating functions in the argument. By introducing such functions in § 4, we are able to refine the estimates proved in § 3. In the method of § 4, however, in place of proceeding by analogy with the k-free integers, we express $Q^*_{k,r}(x)$ *directly* in terms of $Q_k(x)$, effectively reducing the problem under consideration to one whose solution is well known (cf. § 2).

The final results obtained by the second method are contained in Theorems 4. 1 and 4. 2. In particular, the remainder terms in the estimates for $Q^*_{k,r}(x)$ and $Q^*_k(x)$ proved in § 3 are diminished by a logarithmic factor.

Regarding previous work, we mention that the case $k=2$ of the estimate for $Q^*_k(x)$ proved in Theorem 3. 2 was obtained in [3, § 6] by the same method used to treat $Q^*_{k,r}(x)$ in § 3 of the present paper. As for $Q^*_{e,r}(x)$, the case $e=1$ (excluded in this paper) was treated by Erdős and Szekeres [4] by an elementary method, and recently, using more advanced methods, by Bateman and Grosswald [1].

2. Preliminaries concerning Q_k

The material of this section is classical and is included for purposes of comparison and reference. Let $q_k(n)$ denote the characteristic function of Q_k. The generating function of Q_k is $\zeta(s)/\zeta(ks)$; that is [6, Theorem 303, p. 255],

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_k(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}, \quad s>1. \tag{2.1}$$

From (2. 1) we obtain the following representation of $q_k(n)$ as an arithmetical integral,

$$q_k(n)=\sum_{d\delta=n}\mu^{(k)}(d),\quad \mu^{(1)}(n)=\mu(n), \tag{2.2}$$

where $\mu(n)$ is the Möbius function, and

$$\mu^{(k)}(n)=\begin{cases}\mu(m) & \text{if}\quad n=m^k,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{2.3}$$

We recall that $1/\zeta(s)$ is the generating function of $\mu(n)$.

The principal elementary result for $Q_k(x)$ is contained in the following

Lemma. 2.1 ([5, p. 47], also cf. [6, § 18.6, $k=2$]). *If* $x\geqq 1$, *then*

$$Q_k(x)=\frac{x}{\zeta(k)}+O(\sqrt[k]{x}). \tag{2.4}$$

Proof. By (2.2) one obtains

$$Q_k(x)=\sum_{d\delta\leqq x}\mu^{(k)}(d)=\sum_{n^k\delta\leqq x}\mu(n)=\sum_{n\leqq\sqrt[k]{x}}\mu(n)\left[\frac{x}{n^k}\right]. \tag{2.5}$$

Hence by the boundedness of $\mu(n)$,

$$Q_k(x)=\sum_{n\leqq\sqrt[k]{x}}\mu(n)\left(\frac{x}{n^k}+O(1)\right)=x\sum_{n\leqq\sqrt[k]{x}}\frac{\mu(n)}{n^k}+O(\sqrt[k]{x})$$

$$=\frac{x}{\zeta(k)}+O\left(x\sum_{n>x^{1/k}}\frac{1}{n^k}\right)+O(\sqrt[k]{x}),$$

and (2.4) results, because the O-sum is $O\left(\dfrac{1}{x^{1-\frac{1}{k}}}\right)$.

Corollary 2.1. *The asymptotic density of* Q_k *is* $\delta(Q_k)=1/\zeta(k)$.

3. Initial estimates

We first introduce some notation. Let $\mu_r(n)$ denote the unique multiplicative function of n defined as follows for $n=p_e$, p prime, $e>0$, $(\mu_r(1)=1)$,

$$\mu_r(p^e)=\begin{cases}-1 & (1\leqq e\leqq r)\\ 0 & (e>r).\end{cases} \tag{3.1}$$

Note that $\mu_1(n)=\mu(n)$. The function defined by $\mu_r(n)$ as $r\to\infty$ will be denoted $\mu^*(n)$; that is, $\mu^*(n)=(-1)^{\omega(n)}$, where $\omega(n)$ denotes the number of (distinct) prime divisors of n. Generalizing (2. 3), we define

$$\mu_r^{(k)}(n)=\begin{cases}\mu_r(m) & \text{if } n=m^k\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{3. 2}$$

The Legendre totient, defined to be the number of positive integers $\leqq x$ that are prime to n, will be denoted $\varphi(x, n)$. We also write $\varphi(n)=\varphi(n, n)$, and define $\theta(n)$ to be the number of unitary divisors of n.

As in [3], the *unitary product* (or convolution) of two arithmetical functions $a_1(n), a_2(n)$, is the function $a_3(n)$ defined by

$$a_3(n)=\sum_{\substack{d\delta=n\\(d,\delta)=1}} a_1(d)a_2(\delta), \tag{3. 3}$$

where the summation is over all unitary divisors d of n. We recall three lemmas proved in [3].

Lemma 3. 1 ([2, Lemma 6. 1]). *If $a_1(n)$ and $a_2(n)$ are multiplicative, then the unitary product* (3. 3) *of $a_1(n)$ and $a_2(n)$ is also multiplicative.*

The next lemma is the "unitary" analogue of the Möbius inversion formula.

Lemma. 3. 2 ([3, Theorem 2. 3]).

$$a_1(n)=\sum_{\substack{d\delta=n\\(d,\delta)=1}} a_2(d) \rightleftarrows a_2(n)=\sum_{\substack{d\delta=n\\(d,\delta)=1}} \mu^*(d)a_1(\delta). \tag{3. 4}$$

Lemma 3. 3 ([2, (1)], [3, Lemma 3. 4]).

$$\varphi(x, n)=\frac{x\varphi(n)}{n}+O(\theta(n)), \tag{3. 5}$$

uniformly in x.

Finally, we mention the following simple property of $\theta(n)$:

$$R(x)\equiv\sum_{n\leqq x}\theta(n)=O(x\log x), \qquad x\geqq 2. \tag{3. 6}$$

Let $q_{k,r}^*(n)$ and $q_k^*(n)$ represent the characteristic functions of $Q_{k,r}^*$ and Q_k^*, respectively. We prove first the following analogue of (2. 2).

Lemma 3. 4.

$$\sum_{\substack{d\delta=n\\(d,\delta)=1}} \mu_r^{(k)}(d)=q_{k,r}^*(n). \tag{3. 7}$$

Proof. By Lemma 3. 2 there exists a uniquely defined function $b(n)$ such that

$$q_{k,r}^*(n)=\sum_{\substack{d\delta=n\\(d,\delta)=1}} b(d), \tag{3. 8}$$

and in fact,

$$b(n)=\sum_{\substack{d\delta=n\\(d,\delta)=1}}\mu^*(d)q^*_{k,r}(\delta). \tag{3.9}$$

Evidently, $\mu^*(n)$ and $q^*_{k,r}(n)$ are multiplicative in n; hence by (3.9) and Lemma 3.1, $b(n)$ is also multiplicative. It therefore suffices to evaluate $b(n)$ in case $n=p^e$. By (3.9) it is easily verified that $b(p^e)=-1$ when $e=k$, $2k,\dots,rk$, otherwise $b(p^e)=0$; that is, $b(p^e)=\mu_r^{(k)}(p^e)$, which completes the proof.

Define

$$S_{k,r}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_r(n)\varphi(n)}{n^{k+1}}; \tag{3.10}$$

that the series is absolutely convergent is a consequence of the boundedness of $\mu_r(n)$ and the fact that $\varphi(n)\leqq n$.

Lemma 3.5.

$$S_{k,r}=\alpha_{k,r}\equiv\zeta(k)\prod_p\left(1-\frac{2}{p^k}+\frac{1}{p^{k+1}}+\frac{1}{p^{kr+k}}-\frac{1}{p^{kr+k+1}}\right), \tag{3.11}$$

where the (absolutely convergent) product extends over the primes p.

Proof. By (3.10), the multiplicativity of $\varphi(n)$ and $\mu_r(n)$, and the familiar fact, $\varphi(p^e)=p^{e-1}(p-1)$, one obtains (cf. [6, § 17.4])

$$S_{k,r}=\prod_p\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mu_r(p^j)\varphi(p^j)}{p^{j(k+1)}}\right)=\prod_p\left\{1-\left(\frac{p-1}{p}\right)\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{p^{jk}}\right\},$$

so that on summing a progression,

$$S_{k,r}=\prod_p\left\{2-\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1-\dfrac{1}{p^{k(r+1)}}}{1-\dfrac{1}{p^k}}\right)\right\}.$$

Factoring out $\zeta(k)=\prod(1-p^{-k})^{-1}$ yields (3.11).

Remark 3.1. In case $r=1$, (3.11) simplifies to give

$$\alpha_k^*\equiv\alpha_{k,1}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k}+\frac{1}{p^{k+1}}\right). \tag{3.12}$$

We now prove the following estimate for $Q^*_{k,r}(x)$.

Theorem 3.1. *If $x\geqq 2$, then*

$$Q^*_{k,r}(x)=\alpha_{k,r}x+O(\sqrt[k]{x}\log x) \tag{3.13}$$

uniformly in r, $\alpha_{k,r}$ being defined by (3.11).

Proof. The proof is analogous to that of Lemma 2. 1 and [3, Theorem 6. 1]. By (3. 7) and (3. 1),

$$Q^*_{k,r}(x) = \sum_{\substack{d^k\delta \leqq x \\ (\delta, d)=1}} \mu_r(d) = \sum_{n \leqq \sqrt[k]{x}} \mu_r(n)\varphi\left(\frac{x}{n^k}, n\right). \tag{3. 14}$$

Application of (3. 5) and (3. 6) yields, since $|\mu_r(n)| \leqq 1$ for all r,

$$Q^*_{k,r}(x) = x \sum_{n \leqq \sqrt[k]{x}} \frac{\mu_r(n)\varphi(n)}{n^{k+1}} + O(R(\sqrt[k]{x}))$$

$$= S_{k,r}x + O\left(x \sum_{n > x^{1/k}} \frac{1}{n^k}\right) + O(\sqrt[k]{x}\log x),$$

uniformly in r. The theorem results by Lemma 3. 5.

Corollary 3. 1. 1. *The asymptotic density of $Q^*_{k,r}$ is*

$$\delta(Q^*_{k,r}) = \alpha_{k,r}; \tag{3. 15}$$

in particular, $\delta(Q^*_{k,1}) = \alpha^*_k$.

An estimate for $Q^*_k(x)$ can now be deduced on the basis of Theorem 3. 1 and the observation

$$Q^*_k(x) = \lim_{r\to\infty} Q^*_{k,r}(x). \tag{3. 16}$$

Theorem 3. 2. *If $x \geqq 2$, then*

$$Q^*_k(x) = \alpha_k x + O(\sqrt[k]{x}\log x), \tag{3. 17}$$

where

$$\alpha_k = \zeta(k)\prod_p\left(1 - \frac{2}{p^k} + \frac{1}{p^{k+1}}\right). \tag{3. 18}$$

Proof. Denote the general factor of the product in (3. 11) by $1 + L_p(k, r)$. We have for all r,

$$|L_p(k,r)| \leqq \frac{2}{p^k} + \frac{1}{p^{k+1}} + \frac{1}{p^{kr+k}} + \frac{1}{p^{kr+k+1}} < \frac{5}{p^k}.$$

Therefore, the series $\Sigma_p L_p(k, r)$ and hence the product in (3. 11) converge uniformly with respect to r. It follows then that

$$\lim_{r\to\infty} \alpha_{k,r} = \zeta(k)\prod_p \left\{\lim_{r\to\infty}(1 + L_p(k,r))\right\} = \alpha_k. \tag{3. 19}$$

The theorem now results by (3. 16) and the fact that the remainder term in (3. 13) is uniform in r.

Remark 3.2. We observe finally that the corollary stated in the Introduction follows from Theorem 3.2 by a simple computation similar to that in the case $k=2$ [3, Lemma 3.6].

4. Improved estimates

First we shall express the generating function $f_{k,r}(s)$ of $Q^*_{k,r}$ in terms of the generating function $\zeta(s)/\zeta(ks)$ of Q_k. To this purpose, put

$$(4.1) \qquad f_{k,r}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^*_{k,r}(n)}{n^s}, \quad h_{k,r}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_{k,r}(n)}{n^s},$$

where

$$(4.2) \qquad h_{k,r}(s)\equiv f_{k,r}(s)\left(\frac{\zeta(ks)}{\zeta(s)}\right), \qquad s>1.$$

Remark 4.1. In the interest of clarity, we note that $h_{k,r}(s)$ is defined for $s>1$ by (4.2) and for possibly smaller values of s by the sum of the Dirichlet series for $h_{k,r}(s)$, whose coefficients, denoted $g_{k,r}(n)$, are obtained from (4.2) by Dirichlet multiplication.

Remark 4.2. On the basis of (4.1) and (4.2) and the multiplicativity of $q^*_{k,r}(n)$, it follows that $g_{k,r}(n)$ is a multiplicative function of n.

Lemma 4.1. (a) *The series expansion* (4.1) *of* $h_{k,r}(s)$ *converges absolutely for* $s>1/(k+1)$; (b) *for* $s>1/k$,

$$(4.3) \qquad h_{k,r}(s)=\zeta^2(ks)\prod_p\left(1-\frac{2}{p^{ks}}+\frac{1}{p^{s(k+1)}}+\frac{1}{p^{ks(r+1)}}-\frac{1}{p^{s(kr+k+1)}}\right);$$

(c) *for* $s>1/(k+1)$, $h_{k,r}(s)$ *is represented in the form,*

$$(4.4) \qquad h_{k,r}(s)=\zeta(2ks)\eta_{k,r}(s), \quad \eta_{k,r}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{k,r}(n)}{n^s},$$

the series being absolutely convergent for $s>1/(k+1)$. *The function* $\eta_{k,r}(s)$ *is determined by* (4.6).

Proof. For $s>1$,

$$f_{k,r}(s)=\prod_p\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{p^{js}}-\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{p^{jks}}\right)$$

$$=\prod_p\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}-\frac{1}{p^{ks}}-\frac{1}{p^{2ks}}-\dots-\frac{1}{p^{rks}}\right),$$

so that, on dividing out $\zeta(s)=\Pi(1-p^{-s})^{-1}$, one obtains

$$h_{k,r}(s)=\zeta(ks)\prod_p\left\{1-\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(\frac{1}{p^{ks}}+\cdots+\frac{1}{p^{rks}}\right)\right\}. \tag{4.5}$$

By an easy computation, (4. 3) follows from (4. 5).

Now the product on the right of (4. 3) converges absolutely for $s>1/k$. Hence the Dirichlet series with product representation (4. 3) must also converge absolutely for $s>1/k$. By the uniqueness theorem for Dirichlet series [6, p. 245], the coefficients are therefore furnished by $g_{k,r}(n)$, which proves Part (b).

Another simple computation based on (4. 5) yields the relation on the left of (4. 4), where

$$\begin{aligned}\eta_{k,r}(s)\equiv\prod_p\Big\{1+\frac{1}{p^{s(k+1)}}-\Big(\frac{2}{p^{2ks}}-\frac{2}{p^{(2k+1)s}}+\cdots\\ \cdots+\frac{2}{p^{rks}}-\frac{2}{p^{(rk+1)s}}\Big)-\frac{1}{p^{(r+1)ks}}+\frac{1}{p^{(rk+k+1)s}}\Big\}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Parts (c) and (a) result by the same type of argument used in the proof of Part (b).

By Lemma 4. 1 (b) and (3. 11), it follows that

Lemma 4. 2.

$$h_{k,r}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_{k,r}(n)}{n}=\alpha_{k,r}\zeta(k). \tag{4.7}$$

Lemma 4. 3.

$$q^*_{k,r}(n)=\sum_{d\delta=n}q_k(d)g_{k,r}(\delta), \tag{4.8}$$

$$g_{k,r}(n)=\sum_{d\delta^{2k}=n}a_{k,r}(d). \tag{4.9}$$

Proof. By virtue of (2. 1) and the rule for Dirichlet multiplication, (4. 8) is a consequence of (4. 1) and (4. 2); (4. 9) follows from (4. 4).

Lemma 4. 4. *If $s>1/(k+1)$, then there exists a quantity $A_k(s)$, independent of r, such that*

$$T_{k,r}(s)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|g_{k,r}(n)|}{n^s}\leqq A_k(s),\qquad r\geqq 1. \tag{4.10}$$

Proof. By Lemma 4. 1 (a), the series in (4. 10) converges for $s>1/(k+1)$. By (4. 6), the factors in the infinite product representation of $\zeta(2ks)\eta_{k,r}(s)$ will contain, except for an initial 1, only terms of the form b_jp^{-js} where $j\geqq k+1$ and $|b_j|\leqq 2(j+1)$ for all occurring j. Hence, by the multiplicativity of $|g_{k,r}(n)|$, (Remark 4. 2),

$$T_{k,r}(s)=\prod_p\left(1+\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{|b_j|}{p^{js}}\right)\leqq\prod_p\left(1+\frac{2}{p^{s(k+1)}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i+k+1}{p^{is}}\right)$$

$$\leqq\prod_p\left(1+\frac{2}{p^{s(k+1)}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i+k+1}{2^{is}}\right)=\prod_p\left(1+\frac{2c_k}{p^{s(k+1)}}\right),$$

where c_k is independent of p and r. The convergence of the final product proves the theorem.

Lemma 4. 5. *If* $s>1/(k+1)$, *then for all* r

$$T^*_{k,r}(s)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_{k,r}(n)|}{n^s}\leqq A^*_k(s),$$

where $A^*_k(s)$ *is independent of* r.

The proof is similar to that of the preceding lemma except that the details are simpler.

Lemma 4. 6. *If* $\beta>1/(k+1)$, *then*

$$G^*_{k,r}(x)\equiv\sum_{n\leqq x}|g_{k,r}(n)|\leqq A^*_k(\beta)x^\beta, \tag{4.11}$$

where $A^*_k(\beta)$ *is independent of* r *and* x.

Proof. By (4. 9) and Lemma 4. 5,

$$G^*_{k,r}(x)\leqq\sum_{d\delta^{2k}\leqq x}|a_{k,r}(d)|=\sum_{n\leqq x}|a_{k,r}(n)|\left[\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2k}}\right]$$

$$\leqq\sum_{n\leqq x}|a_{k,r}(n)|\left[\left(\frac{x}{n}\right)^{\beta}\right]\leqq x^\beta\sum_{n\leqq x}\frac{|a_{k,r}(n)|}{n^\beta}\leqq A^*_k(\beta)x^\beta.$$

The proof is complete.

It is convenient to define

$$\Delta_k(x)=Q_k(x)-\frac{x}{\zeta(k)}. \tag{4.12}$$

We are now in a position to prove

Theorem 4. 1.

$$Q^*_{k,r}(x)=\alpha_{k,r}x+O(\sqrt[k]{x}) \tag{4.13}$$

uniformly with respect to r.

Proof. By (4. 8),

$$Q^*_{k,r}(x) = \sum_{d\delta \leqq x} q_k(d) g_{k,r}(\delta) = \sum_{n \leqq x} g_{k,r}(n) Q_k\left(\frac{x}{n}\right),$$

and hence by (4. 12),

$$Q^*_{k,r}(x) = \frac{x}{\zeta(k)} \sum_{n \leqq x} \frac{g_{k,r}(n)}{n} + V_{k,r}(x, n), \tag{4. 14}$$

where

$$V_{k,r}(x, n) = \sum_{n \leqq x} g_{k,r}(n) \Delta_k\left(\frac{x}{n}\right). \tag{4. 15}$$

Application of Lemma 4. 2 gives

$$\sum_{n \leqq x} \frac{g_{k,r}(n)}{n} = \alpha_{k,r} \zeta(k) + \sum_{n > x} \frac{g_{k,r}(n)}{n}. \tag{4. 16}$$

Let $G_{k,r}(x)$ denote the summatory function of $g_{k,r}(n)$; that is, $G_{k,r}(x) = \Sigma g_{k,r}(n)$ summed over $n \leqq x$. Then, by partial summation and Lemma 4. 6 with $\beta = 1/k$, one deduces

$$\left| \sum_{n > x} \frac{g_{k,r}(n)}{n} \right| = \left| \sum_{n > x} \frac{G_{k,r}(n)}{n(n+1)} - \frac{G_{k,r}(x)}{[x]+1} \right| \leqq \sum_{n > x} \frac{G^*_{k,r}(n)}{n^2} + \frac{G^*_{k,r}(x)}{x}$$

$$\leqq A^*_k(1/k) \left(\sum_{n > x} \frac{1}{n^{2-1/k}} + \frac{1}{x^{1-1/k}} \right).$$

Hence

$$\sum_{n > x} \frac{g_{k,r}(n)}{n} = O\left(\frac{1}{x^{1-1/k}}\right) \quad \text{uniformly in } r. \tag{4. 17}$$

We turn now to $V_{k,r}(x, n)$ in (4. 15). By Lemma 2. 1, there exists a constant $b_k > 0$, depending at most upon k, such that $|\Delta_k(x)| \leqq b_k \sqrt[k]{x}$. Hence by Lemma 4. 4,

$$|V_{k,r}(x, n)| \leqq b_k \sqrt[k]{x} \sum_{n \leqq x} \frac{|g_{k,r}(n)|}{n^{1/k}} \leqq b_k A_k(1/k) \sqrt[k]{x}.$$

That is,

$$V_{k,r}(x, n) = O(\sqrt[k]{x}) \quad \text{uniformly in } r. \tag{4. 18}$$

The theorem results on collecting (4. 14), (4. 16), (4. 17) and (4. 18).

Theorem 4. 2.

$$Q^*_k(x) = \alpha_k x + O(\sqrt[k]{x}). \tag{4. 19}$$

Proof. The theorem results from the application of (3. 16) and (3. 19) to (4. 13), in conjunction with the fact that the latter estimate is uniform in r.

Bibliography

[1] Paul T. Bateman and Emil Grosswald, On a theorem of Erdős and Szekeres, *Illinois J. Math.*, **2** (1958), 88—98.

[2] S. D. Chowla, On a certain limit connected with pairs of integers, *J. Indian Math. Soc.*, **19** (1928), 13—15.

[3] Eckford Cohen, Arithmetical functions associated with the unitary divisors of an integer, *Math. Zeitschrift*, **74** (1960), 66—80.

[4] P. Erdős and G. Szekeres, Über die Anzahl der abelschen Gruppen gegebener Ordnung und über ein verwandtes zahlentheoretisches Problem, *Acta Sci. Math.*, **7** (1934), 95—102.

[5] Leopold Gegenbauer, Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, *Denkschriften der Akademie der Wissenschaften zu Wien*, **49** (1885), 37—80.

[6] G. H. Hardy and E. M. Wright, *Introduction to the Theory of Numbers*, 3rd edition (Oxford, 1954).

THE UNIVERSITY OF TENNESSEE

(Received June 5, 1960)

Sur certains automorphismes des algèbres hilbertiennes

Par I. KOVÁCS à Szeged

Introduction

Soit $\mathbf{R}$ une algèbre hilbertienne[1]), c'est-à-dire une $*$-algèbre[2]) sur le corps des nombres complexes, munie d'un produit scalaire hermitien positif $(x|y)$, vérifiant les axiomes suivants:

(i) $(x|y)=(y^*|x^*)$ pour $x, y \in \mathbf{R}$.

(ii) $(xy|z)=(y|x^*z)$ pour $x, y, z \in \mathbf{R}$.

(iii) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'application $y \to yx$ est continue.

(iv) L'ensemble des éléments de la forme xy, où $x, y \in \mathbf{R}$, est partout dense dans $\mathbf{R}$.

Soit $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ l'espace hilbertien complété de $\mathbf{R}$. Les axiomes (i) et (iii) entraînent que les applications $y \to xy$, $y \to yx$ se prolongent de manière unique en opérateurs bornés U_x, V_x définis sur $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. On a immédiatement:

$$U_{\lambda x+\mu y}=\lambda U_x+\mu U_y \quad U_{xy}=U_x U_y \quad (U_x)^*=U_{x^*}$$

$$V_{\lambda x+\mu y}=\lambda V_x+\mu V_y \quad V_{xy}=V_y V_x \quad (V_x)^*=V_{x^*}.$$

Désignons par $\mathfrak{U}(\mathbf{R})$ [resp. $\mathfrak{V}(\mathbf{R})$] l'$*$-algèbre des opérateurs U_x (resp. V_x). L'adhérence forte de $\mathfrak{U}(\mathbf{R})$ [resp. $\mathfrak{V}(\mathbf{R})$] est une algèbre de von Neumann qui sera désignée par $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$). On appelle $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$) *l'algèbre de von Neumann associée à gauche* (resp. *à droite*) à $\mathbf{R}$. L'ensemble $(\mathbf{R}^g)'$ des opérateurs bornés définis sur $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ permutables aux éléments de $\mathbf{R}^g$ est identique à $\mathbf{R}^d$: $(\mathbf{R}^g)'=\mathbf{R}^d$. Par suite, $\mathbf{R}^g \cap \mathbf{R}^d$ est le centre commun de $\mathbf{R}^g$ et

---

[1]) Dans tout le travail, nous utiliserons la terminologie de [2]. Pour les propriétés élémentaires des algèbres hilbertiennes, cf. [2], chap. I, § 5.

[2]) On appelle *$*$-algèbre* sur le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ une algèbre associative $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{C}$, munie d'une application biunivoque $x \to x^*$ de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{A}$ telle que $(\lambda x+\mu y)^*=\bar{\lambda} x^*+\bar{\mu} y^*$, $(xy)^*=y^* x^*$, $x^{**}=x$ $(x, y \in \mathbf{A}; \lambda, \mu \in \mathbf{C})$.

$\mathbf{R}^d$. Si $\mathbf{R}^g \cap \mathbf{R}^d$ se réduit aux opérateurs scalaires, c'est-à-dire si $\mathbf{R}^g$ et $\mathbf{R}^d$ sont des facteurs, $\mathbf{R}$ sera dite *irréductible.*

Un élément $a \in \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ est dit *borné à gauche* (resp. *à droite*) s'il existe un opérateur borné U_a (resp. V_a) défini sur $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ tel que $U_a x = V_x a$ (resp. $V_a x = U_x a$) pour $x \in \mathbf{R}$. (Les éléments de $\mathbf{R}$ sont bornés à gauche et à droite et les notations U_a, V_a sont cohérentes avec les notations U_x, V_x antérieures lorsque $x \in \mathbf{R}$.) L'ensemble $\mathbf{B}_g$ des éléments bornés à gauche est identique à l'ensemble $\mathbf{B}_d$ des éléments bornés à droite. Les éléments de l'ensemble $\mathbf{B} = \mathbf{B}_g = \mathbf{B}_d$ sont dits simplement *bornés*. Les U_a (resp. V_a), a borné, forment un idéal bilatère de $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$). On dit que $\mathbf{R}$ est *achevée* si tout élément borné de $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ appartient à $\mathbf{R}$.

Pour $S \in (\mathbf{R}^g)^+$ [3]) [resp. $S \in (\mathbf{R}^d)^+$], posons:

$$\varphi(S) = (a|a) \text{ si } S^{\frac{1}{2}} = U_a \text{ (resp. } S^{\frac{1}{2}} = V_a) \text{ pour un } a \in \mathfrak{H}_{\mathbf{R}} \text{ borné;}$$
$$\varphi(S) = +\infty \text{ dans le cas contraire.}$$

Alors, φ est une trace[4]) normale, fidèle et semi-finie sur $(\mathbf{R}^g)^+$ [resp. $(\mathbf{R}^d)^+$]. L'idéal bilatère des $T \in \mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$) qui peuvent se mettre sous la forme U_a (resp. V_a) avec un a borné est identique à l'idéal bilatère des $T \in \mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$) tels que $\varphi(T^* T) < +\infty$. Si a et b sont des éléments bornés, on a $\dot{\varphi}(U_b^* U_a) = (a|b)$ [resp. $\dot{\varphi}(V_b^* V_a) = (a|b)$] (cf. [2], chap. I, § 6, th. 1). On appelle φ la *trace naturelle* sur $(\mathbf{R}^g)^+$ [resp. $(\mathbf{R}^d)^+$].

Soit M un $*$-automorphisme[5]) quelconque de $\mathbf{R}$. Par la relation $\Phi_M(U_x) = U_{Mx}$ [resp. $\Psi_M(V_x) = V_{Mx}$] $(x \in \mathbf{R})$, M définit un $*$-automorphisme Φ_M (resp. Ψ_M) de $\mathfrak{U}(\mathbf{R})$ [resp. $\mathfrak{V}(\mathbf{R})$], comme on le voit aisément. Nous convenons de dire qu'un $*$-automorphisme M de $\mathbf{R}$ est *induisant à gauche* (resp. *à droite*) si M „induit" un $*$-automorphisme de $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$)

---

[3]) Pour un ensemble $\mathfrak{M}$ d'opérateurs bornés définis sur un espace hilbertien, $\mathfrak{M}^+$ désigne l'ensemble des éléments hermitiens $\geqq 0$ de $\mathfrak{M}$. On appelle $\mathfrak{M}^+$ la *partie positive* de $\mathfrak{M}$.

[4]) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann. On appelle *trace* sur $\mathcal{A}^+$ une fonction φ définie sur $\mathcal{A}^+$, à valeurs $\geqq 0$, telle que $\varphi(S+T) = \varphi(S) + \varphi(T)$, $\varphi(\lambda S) = \lambda\varphi(S)$, $\varphi(USU^{-1}) = \varphi(S)$ pour $S, T \in \mathcal{A}^+$, $\lambda \geqq 0$, et pour tout élément unitaire U de $\mathcal{A}$. On dit que *a*) φ est *fidèle* si les conditions $S \in \mathcal{A}^+$, $\varphi(S) = 0$ entraînent $S = 0$; *b*) φ est *normale* si, pour tout ensemble filtrant croissant $\mathfrak{F} \subset \mathcal{A}^+$ de borne supérieure $S \in \mathcal{A}^+$, $\varphi(S)$ est la borne supérieure de $\varphi(\mathfrak{F})$; *c*) φ est semi-finie si, pour tout T non nul de $\mathcal{A}^+$, il existe un S non nul de $\mathcal{A}^+$ majoré par T tel que $\varphi(S) < +\infty$ (cf. [2], chap. I, § 6, déf. 1).

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann, φ une trace sur $\mathcal{A}^+$. L'ensemble des $T \in \mathcal{A}^+$ tels que $\varphi(T) < +\infty$ est la partie positive d'un idéal bilatère $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{A}$. Il existe une forme linéaire $\dot{\varphi}$ et une seule sur $\mathfrak{m}$ coincidant avec φ sur $\mathfrak{m}^+$ (cf. [2], chap. I, § 6, prop. 1).

[5]) Etant donné une $*$-algèbre $\mathbf{A}$, on appelle $*$-*automorphisme* de $\mathbf{A}$ tout automorphisme M de l'algèbre $\mathbf{A}$, vérifiant $(Mx)^* = Mx^*$ $(x \in \mathbf{A})$.

au sens suivant: Φ_M (resp. Ψ_M) peut être prolongé en un $*$-automorphisme de $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$) [6]).

Dans la première partie du présent travail, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un $*$-automorphisme d'une algèbre hilbertienne soit induisant à gauche (resp. à droite) (cf. **1.**, théorème). Il en résulte que pour qu'un $*$-automorphisme d'une algèbre hilbertienne soit induisant à gauche it faut et il suffit qu'il soit induisant à droite (cf. **1.**, théorème, corol. 1). On peut donc parler simplement *d'$*$-automorphismes induisants* (cf. **1.**, définition). Le corollaire 2 du théorème du paragraphe **1** fournit une déscription des $*$-automorphismes induisants d'une algèbre hilbertienne irréductible. Les recherches de la deuxième partie du travail, liées à celles de la première, se rapportent au cas d'une algèbre hilbertienne munie sur un groupe localement compact unimodulaire (cf. **2.**).

1.

Théorème. *Soient $\mathbf{R}$ une algèbre hilbertienne, M un $*$-automorphisme de $\mathbf{R}$. Pour que M soit induisant à gauche (resp. à droite) (cf. Introduction), il faut et il suffit que M et son inverse M^{-1} comme des opérateurs linéaires admettent des prolongements linéaires fermés dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$.*

Démonstration. Supposons que la condition du théorème soit remplie. Nous allons démontrer que Φ_M peut être prolongé en un $*$-automorphisme de $\mathbf{R}^g$ (pour les notation, cf. Introduction). Désignons par $\overline{M}$ (resp. $\overline{M^{-1}}$) le plus petit prolongement linéaire fermé de M (resp. M^{-1}). $\overline{M}$ (resp. $\overline{M^{-1}}$) est identique à M^{**} [resp. $(M^{-1})^{**}$] [7]). L'existence de M^* et $(M^{-1})^*$ entraîne l'existence de $(M^*)^{-1}$, et on a $(M^*)^{-1}=(M^{-1})^*$. En appliquant ce raisonnement à l'opérateur M^*, on voit que $(M^{**})^{-1}$ existe et $(M^{**})^{-1}=((M^*)^{-1})^*$, d'où $(M^{**})^{-1}=(M^{-1})^{**}$, c'est-à-dire

$$\overline{M^{-1}}=\overline{M}^{-1}. \tag{1}$$

Soit maintenant x un élément quelconque de $\mathbf{R}$. Pour tout $y\in\mathbf{R}$, on a $MU_xy=M(U_xy)=M(xy)=MxMy=U_{Mx}My=\Phi_M(U_x)My$. Ceci veut dire

---

6) *L'* $*$-automorphisme Φ_M (resp. Ψ_M) définit uniquement son prolongement sur $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$). En effet, tout $*$-automorphisme d'une algèbre de von Neumann est continu dans la topologie ultraforte (cf. [2], chap. I, § 4, th. 2, corol. 1), et l' $*$-algèbre d'opérateurs $\mathfrak{U}(\mathbf{R})$ [resp. $\mathfrak{V}(\mathbf{R})$] est ultrafortement partout dense dans l'algèbre de von Neumann $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$) (cf. [2], chap. I, § 3, th. 2).

7) Pour la théorie des opérateurs linéaires de l'espace hilbertien, nous renvoyons le lecteur à [4].

que $\Phi_M(U_x)M \subseteq MU_x$, d'où $[\Phi_M(U_x)]^{**}M^{**} \subseteq M^{**}U_x^{**}$. Donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Phi_M(U_x)\overline{M} \subseteq \overline{M}U_x. \tag{2}$$

Par suite, $U_x\overline{M}^* \subseteq \overline{M}^*\Phi_M(U_x)$ $(x \in \mathbf{R})$. En multipliant à droite par $\overline{M}$, on obtient

$$U_x\overline{M}^*\overline{M} \subseteq \overline{M}^*\Phi_M(U_x)\overline{M} \qquad (x \in \mathbf{R}). \tag{3}$$

Soit a un élément quelconque de $\mathfrak{D}_{\overline{M}^*\overline{M}}$. Alors, d'après (2), $U_x a \in \mathfrak{D}_{\overline{M}}$ et $\Phi_M(U_x)\overline{M}a = \overline{M}U_x a$ $(x \in \mathbf{R})$. D'après (3), $\Phi_M(U_x)\overline{M}a \in \mathfrak{D}_{\overline{M}^*}$ et $U_x\overline{M}^*\overline{M}a = \overline{M}^*\Phi_M(U_x)\overline{M}a$. Donc

$$U_x\overline{M}^*\overline{M} \subseteq \overline{M}^*\overline{M}U_x \tag{4}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$. On en déduit

$$U_x|\overline{M}| \subseteq |\overline{M}|U_x \qquad (x \in \mathbf{R}), \tag{5}$$

où $|\overline{M}| = (\overline{M}^*\overline{M})^{\frac{1}{2}}$.

Prouvons maintenant que l'opérateur $|\overline{M}|$ admet un inverse, c'est-à-dire que les conditions $a \in \mathfrak{D}_{|\overline{M}|}$, $|\overline{M}|a = 0$ entraînent $a = 0$. Soit donc $a \in \mathfrak{D}_{|\overline{M}|}$ tel que $|\overline{M}|a = 0$. Alors, pour tout $b \in \mathfrak{D}_{\overline{M}^*\overline{M}} \subseteq \mathfrak{D}_{|\overline{M}|}$, on a $(|\overline{M}|a\,|\,|\overline{M}|b) = (a\,|\,|\overline{M}|^2 b) = (a\,|\,\overline{M}^*\overline{M}b) = 0$. Pour prouver que $a = 0$, il suffit de prouver que les éléments $\overline{M}^*\overline{M}b$ $(b \in \mathfrak{D}_{\overline{M}^*\overline{M}})$ sont partout dense dans $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$, ou ce qui revient au même, que l'opérateur $\overline{M}^*\overline{M}$ admet un inverse à dense domaine dans $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$. Comme l'inverse de l'opérateur autoadjoint $\overline{M}^*\overline{M}$, s'il existe, est autoadjoint, donc à dense domaine dans $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$, il ne reste qu'à prouver l'existence de $(\overline{M}^*\overline{M})^{-1}$. Soit donc $b \in \mathfrak{D}_{\overline{M}^*\overline{M}}$ tel que $\overline{M}^*\overline{M}b = 0$. Alors, pour tout $c \in \mathfrak{D}_{\overline{M}}$, on a $(\overline{M}^*\overline{M}b|c) = (\overline{M}b|\overline{M}c) = 0$. Comme l'ensemble des éléments de la forme $\overline{M}c$ $(c \in \mathfrak{D}_{\overline{M}})$ est partout dense dans $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$, $\overline{M}b = 0$, d'où $b = 0$ (cf. (1)), ce qui veut dire que l'inverse de $\overline{M}^*\overline{M}$ existe. Il en résulte l'existence de $|\overline{M}|^{-1}$. Tenant compte de (5), on a

$$U_x|\overline{M}|^{-1} \subseteq |\overline{M}|^{-1}U_x \qquad (x \in \mathbf{R}). \tag{6}$$

Considérons maintenant la décomposition polaire de $\overline{M}$, c'est-à-dire la décomposition $\overline{M} = U|\overline{M}|$, où U est un opérateur partiellement isométrique admettant pour sous-espace initial l'adhérence de $|\overline{M}|\mathfrak{H}_\mathbf{R}$ et pour sous-espace final l'adhérence de $\overline{M}\mathfrak{H}_\mathbf{R}$. Comme les opérateurs $\overline{M}$ et $|\overline{M}|$ admettent des inverses à dense domaine dans $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$, U est unitaire.

En multipliant maintenant (2) par $\overline{M}^{-1} = |\overline{M}|^{-1}U^{-1}$ à droite, nous obtenons, d'après (6),

$$\Phi_M(U_x) \subseteq \overline{M}U_x\overline{M}^{-1} = U|\overline{M}|U_x|\overline{M}|^{-1}U^{-1} = U|\overline{M}||\overline{M}|^{-1}U_xU^{-1} = UU_xU^{-1}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\Phi_M(U_x) = UU_xU^{-1}$. En posant $\Phi(T) = UTU^{-1}$ pour tout $T \in \mathbf{R}^g$, on définit un $*$-automorphisme Φ de $\mathbf{R}^g$ prolongeant Φ_M, donc M est induisant à gauche.

En partant de la relation

$$MV_xy = M(yx) = MyMx = V_{Mx}My = \Psi_M(V_x)My \qquad (x, y \in \mathbf{R}),$$

on voit que $\Psi_M(V_x) = UV_xU^{-1}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Ainsi Ψ_M peut être prolongé en un $*$-automorphisme de $\mathbf{R}^d$, c'est-à-dire M est aussi induisant à droite, ce qui veut dire que la condition du théorème est suffisante.

Prouvons maintenant que la condition est nécessaire. Supposons donc que M soit induisant à gauche[8]. Désignons par Φ l'$*$-automorphisme de $\mathbf{R}^g$ prolongeant Φ_M.

Soit φ la trace naturelle sur $(\mathbf{R}^g)^+$. Posant $\varphi_1(T) = \varphi(\Phi(T))$ pour $T \in (\mathbf{R}^g)^+$, on obtient une trace normale fidèle et semi-finie φ_1 sur $(\mathbf{R}^g)^+$ (cf. note 4). Soit $\mathbf{R}_1$ une algèbre hilbertienne achevée partout dense dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ telle que $\mathbf{R}^g = \mathbf{R}_1^g$ et telle que φ_1 soit la trace naturelle correspondante (cf. [2], chap. I, § 6, lemme 1). Soient $\Omega: x \to U_x$, et $\Omega_1: y \to U'_y$ les applications canoniques de $\mathbf{R}$ et de $\mathbf{R}_1$ dans $\mathbf{R}^g$. Alors, $\Omega_1^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ \Omega$ est un isomorphisme de l'algèbre hilbertienne $\mathbf{R}$ sur l'algèbre hilbertienne $\mathbf{R}_1$ qui se prolonge en un opérateur unitaire W de $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Pour tout $T \in \mathbf{R}^g$, on a $\Phi(T) = W^{-1}TW$ (cf. [2], chap. I, § 6, th. 4). D'après la construction de W, on a $U'_{Wx} = \Phi^{-1}(U_x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Il en résulte que, pour $y \in \mathbf{R}_1$, $\Phi(U'_y) \in \mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)$.

$\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)$, muni du produit scalaire $(U'_{y_1} | U'_{y_2})_1 = \varphi_1(U'^*_{y_2} U'_{y_1})$, est un espace préhilbertien séparé dont nous désignerons le complété abstrait par $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)}$. Soit $(a_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'éléments de $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ telle que $\varphi_1(T) = \sum_{\iota \in I} (Ta_\iota | a_\iota)$ pour $T \in (\mathbf{R}^g)^+$ (cf. [2], chap. I, § 6, prop. 2, corol.). Ainsi, pour tout $y \in \mathbf{R}_1$, on a $\| U'_y \|_1^2 = \varphi_1(U'^*_y U'_y) = \sum_{\iota \in I} (U'^*_y U'_y a_\iota | a_\iota) = \sum_{\iota \in I} \| U'_y a_\iota \|^2$. Donc, l'application $U'_y \to (U'_y a_\iota)_{\iota \in I}$ est une application isométrique de l'espace préhilbertien $\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)$ dans $\mathfrak{H} = \sum_{\iota \in I}^{\oplus} \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}^\iota$, où $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}^\iota$ est identique à $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ pour $\iota \in I$. Cette application se prolonge en une application isométrique θ de $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)}$ dans $\mathfrak{H}$.

Nous prouvons que l'application $y \to \Phi(U'_y)$ de $\mathbf{R}_1$ dans $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)}$ admet un prolongement linéaire fermé. Soit donc $y_1, y_2, \dots$ une suite d'éléments de $\mathbf{R}_1$ telle que $y_n \to 0$, et telle que $\Phi(U'_{y_n})$ ait une limite $u \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)}$ au sens de la structure hilbertienne de $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U}(\mathbf{R}_1)}$. Alors, il faut prouver que $u = 0$.

Soit $\theta(u) = (u_\iota)_{\iota \in I} \in \mathfrak{H}$. L'égalité $\| \theta(\Phi(U'_{y_n}) - u) \|^2 = \sum_{\iota \in I} \| \Phi(U'_{y_n}) a_\iota - u_\iota \|^2$

[8]) Nous considérons uniquement le cas quand M est induisant à gauche. Dans l'autre cas, quand M est induisant à droite, on peut raisonner de manière analogue.

montre que $\Phi(U'_{y_n})a_\iota$ tend vers u_ι dans $\mathfrak{H}'_{\mathbf{R}}$ pour tout $\iota \in I$. Or, si $x \in \mathbf{R}$,

$$|(\Phi(U'_{y_n})a_\iota|x)| = |(a_\iota|\Phi(U'_{y_n^*})x)| = |(a_\iota|W^{-1}U'_{y_n^*}Wx)| =$$
$$= |(Wa_\iota|V'_{Wx}y_n^*)| \leqq \|a_\iota\|\,\|V'_{Wx}\|\,\|y_n^*\| = \|a_\iota\|\,\|V'_{Wx}\|\,\|y_n\| \to 0,$$

donc $(u_\iota|x) = \lim\limits_{n\to\infty}(\Phi(U'_{y_n})a_\iota|x) = 0$ pour tout $\iota \in I$. Ainsi $\theta(u) = 0$, c'est-à-dire $u = 0$.

Prouvons maintenant que M admet un prolongement linéaire fermé dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Soit donc $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite d'éléments de $\mathbf{R}$ telle que $x_n \to 0$, et telle que la suite $\{Mx_n\}_{n=1}^{\infty}$ est convergeante dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Il faut prouver que $\|Mx_n\| \to 0$.

Comme W est unitaire, $\{y_n = Wx_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{R}_1$ convergeant vers zéro. La relation

$$\|\Phi(U'_{y_m}) - \Phi(U'_{y_n})\|_1^2 = \varphi_1(\Phi(U'^*_{y_m-y_n}U'_{y_m-y_n})) =$$
$$= \varphi_1(U^*_{W^{-1}y_m-W^{-1}y_n}U_{W^{-1}y_m-W^{-1}y_n}) = \varphi_1(U^*_{x_m-x_n}U_{x_m-x_n}) =$$
$$= \varphi(\Phi(U^*_{x_m-x_n}U_{x_m-x_n})) = \varphi(U^*_{Mx_m-Mx_n}U_{Mx_m-Mx_n}) = \|Mx_m - Mx_n\|^2$$

montre que la suite $\{\Phi(U'_{y_n})\}_{n=1}^{\infty}$ est fondamentale dans la métrique de $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}(\mathbf{R}_1)}$. D'après ce qui précède, $\Phi(U'_{y_n}) \to 0$. Ainsi,

$$\|Mx_n\|^2 = \varphi(U^*_{Mx_n}U_{Mx_n}) = \varphi(\Phi(U^*_{x_n}U_{x_n})) = \varphi_1(U^*_{x_n}U_{x_n}) =$$
$$= \varphi_1(\Phi(U'^*_{Wx_n}U'_{Wx_n})) = \varphi_1(\Phi(U'^*_{y_n}U'_{y_n})) = \|\Phi(U'_{y_n})\|_1^2 \to 0.$$

En raisonnant de manière analogue, on voit que l'opérateur M^{-1} admet aussi un prolongement linéaire fermé dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

R e m a r q u e. La suffisance de la condition du théorème est une conséquence du lemme de Schur généralisé (cf. [3], p. 258, th. 1) concernant aux représentations des $*$-algèbres. La démonstration directe, dont l'idée est analogue à celle de la démonstration du lemme cité, était donnée pour la convenance du lecteur. Pour le raisonnement utilisé dans la deuxième partie de la démonstration du théorème, cf. [1], lemme 14.

C o r o l l a i r e 1. *Soit M un $*$-automorphisme d'une algèbre hilbertienne. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) *M est induisant à gauche.*

b) *M est induisant à droite.*

D é m o n s t r a t i o n. Ceci résulte aussitôt du théorème.

Avant que nous formulions le corollaire 2, nous convenons d'une

Définition. Un $*$-automorphisme d'une algèbre hilbertienne possédant les propriétés du corollaire 1 est dit *induisant*.

Corollaire 2. *Soit* $\mathbf{R}$ *une algèbre hilbertienne irréductible. Pour qu'un* $*$*-automorphisme* M *de* $\mathbf{R}$ *soit induisant, il faut et il suffit que* M *soit la restriction sur* $\mathbf{R}$ *d'un opérateur de la forme* λU, *où* U *est unitaire dans* $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ *et où* $\lambda>0$.

Démonstration. La condition est suffisante. En effet, soient U un opérateur unitaire dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ et $\lambda>0$ tels que la restriction de λU sur $\mathbf{R}$ est identique à M. Alors, M^{-1} est la restriction de $\lambda^{-1}U^{-1}$ sur $\mathbf{R}$. Ainsi, M satisfait à la condition du théorème, donc, d'après le corollaire 1, M est induisant.

Réciproquement, supposons que M soit induisant. D'après le théorème, ceci veut dire que M et M^{-1} admettent des prolongements linéaires fermés dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Soit $\overline{M}=U(\overline{M}^*\overline{M})^{\frac{1}{2}}=U|\overline{M}|$ la décomposition polaire de $\overline{M}$ ($\overline{M}$ désigne le plus petit prolongement fermé de M dans $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$). En raisonnant comme dans la démonstration du théorème, on voit que U est unitaire et, pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a $U_x|\overline{M}|\subseteqq|\overline{M}|U_x$, $V_x|\overline{M}|\subseteqq|\overline{M}|V_x$. D'après $(\mathbf{R}^g)'=\mathbf{R}^d$ et la théorie spectrale, ces relations impliquent que les projecteurs de la famille spectrale de $|\overline{M}|$ appartiennent à $\mathbf{R}^g\cap\mathbf{R}^d$. En étant $\mathbf{R}$ irréductible, il en résulte que la famille spectrale de $|\overline{M}|$ ne se compose que de O et I, c'est-à-dire que $|\overline{M}|=\lambda I$, $\lambda>0$ (I désigne l'opérateur identique de $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$). Ainsi $\overline{M}=\lambda U$, ce qui établit la démonstration du corollaire 2.

2.

Soient G un groupe localement compact unimodulaire, dx l'élément de la mesure de Haar, $\mathbf{L}$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur G. Pour $f\in\mathbf{L}$, posons $f^*(x)=\overline{f(x^{-1})}$. Muni de l'involution ainsi définie, du produit de composition $f*g(x)=\int f(y)g(y^{-1}x)dy$, et du produit scalaire $(f|g)=$ $=\int f(x)\overline{g(x)}dx$, $\mathbf{L}$ est une algèbre hilbertienne, comme on le voit aisément.

Soit T un homéomorphisme de G sur G. Par $f(x)\to f_T(x)=f(Tx)$, T définit une application linéaire biunivoque de $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{L}$. Supposons que la mesure de Haar sur G soit invariante par T (ainsi par T^{-1} aussi), c'est-à-dire que l'on ait $\int f(Tx)dx=\int f(x)dx$ pour tout $f\in\mathbf{L}$. Nous allons démontrer la

Proposition 1. *Pour que l'application* $f(x)\to f_T(x)$ *de* $\mathbf{L}$ *sur* $\mathbf{L}$ *soit un* $*$*-automorphisme de l'algèbre hilbertienne* $\mathbf{L}$, *il faut et il suffit que* T *soit un automorphisme de* G.

Démonstration. Supposons que T soit un automorphisme de G. Alors, pour $f \in \mathbf{L}$, on a

$$(f_T(x))^* = (f(Tx))^* = \overline{f((Tx)^{-1})} = \overline{f(Tx^{-1})} = (f^*(x))_T.$$

Pour $f, g \in \mathbf{L}$, on a

$$(f*g)_T(x) = \int f(y) g(y^{-1}Tx)dy = \int f((Tx)y)g(y^{-1})dy =$$
$$= \int f((Tx)(Ty))g((Ty)^{-1})dy = \int f(T(xy))g(Ty^{-1})dy,$$
$$f_T*g_T(x) = \int f_T(xy)g_T(y^{-1})dy = \int f(T(xy))g(Ty^{-1})dy,$$

d'où

$$f_T*g_T = (f*g)_T.$$

$f \to f_T$ est donc un $*$-automorphisme de l'algèbre hilbertienne $\mathbf{L}$.

Réciproquement, supposons que $f \to f_T$ soit un $*$-automorphisme de l'algèbre hilbertienne $\mathbf{L}$. Alors, $f \to f_{T^{-1}}$ est aussi un $*$-automorphisme de $\mathbf{L}$. Ainsi, pour tout $f \in \mathbf{L}$, on a

$$\overline{f((T^{-1}x)^{-1})} = (f_{T^{-1}}(x))^* = (f^*(x))_{T^{-1}} = \overline{f(T^{-1}x^{-1})}.$$

Il est connu que les éléments de $\mathbf{L}$ „séparent" les points de G, c'est-à-dire pour $x, y \in G$, $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathbf{L}$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Il en résulte que

$$(T^{-1}x)^{-1} = T^{-1}x^{-1} \qquad (x \in G).$$

D'autre part, pour tout $f, g \in \mathbf{L}$, on a

$$\int f((Tx)y)g(y^{-1})dy = (f*g)_T(x) = f_T*g_T(x) = \int f(T(xy))g(Ty^{-1})dy.$$

Posons $y \to T^{-1}y$. Alors, on a

$$\int f(T(xy))g(Ty^{-1})dy = \int f(T(xT^{-1}y))g(T(T^{-1}y)^{-1})dy =$$
$$= \int f(T(xT^{-1}y))g(TT^{-1}y^{-1})dy = \int f(T(xT^{-1}y))g(y^{-1})dy.$$

Donc, pour tout $f, g \in \mathbf{L}$, on a

$$\int [f((Tx)y) - f(T(xT^{-1}y))]g(y^{-1})dy = 0.$$

On en conclut que, pour tout $x \in G$,

$$f((Tx)y) - f(T(xT^{-1}y)) = 0 \qquad (y \in G)$$

pour tout $f \in \mathbf{L}$. Comme les éléments de $\mathbf{L}$ séparent les points de G, on a $(Tx)y = T(xT^{-1}y)$ pour tout $x, y \in G$. En posant $y = Tz$, on a

$$(Tx)(Tz) = T(xz),$$

ce qui achéve la démonstration de la proposition 1.

Proposition 2. *Soit T un automorphisme topologique de G par lequel la mesure de Haar sur G est invariante. Alors, l'applications $f \rightarrow f_T$ de* $\mathbf{L}$ *sur* $\mathbf{L}$ *est un $*$-automorphisme induisant de* $\mathbf{L}$.

Démonstration. D'après la proposition 1, l'application $f \rightarrow f_T$ est un $*$-automorphisme de $\mathbf{L}$ dont l'inverse est identique à l'application $f \rightarrow f_{T^{-1}}$. L'invariance de la mesure de Haar par T implique que ces applications sont isométriques. Alors, notre assertion résulte du théorème du paragraphe 1.

Corollaire. *Pour tout élément a fixé de G, l'application $f(x) \rightarrow \rightarrow f(axa^{-1})$ de* $\mathbf{L}$ *sur* $\mathbf{L}$ *est un $*$-automorphisme induisant de* $\mathbf{L}$.

Démonstration. En tenant compte de la proposition 2, ceci résulte de ce fait que la mesure de Haar est invariante par les automorphismes intérieurs de G.

Bibliographie

[1] J. Dixmier, Algèbres quasi-unitaires, *Comment. Math. Helv.*, **26** (1952), 275—322.
[2] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann)* (Paris, 1957).
[3] М. А. Наймарк, Нормированные кольца (Москва, 1956).
[4] B. Sz.-Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (Berlin, 1942).

(Reçu le 26 juillet 1960)

Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

Einleitung

Es sei $\{a_\nu\}$ $(\nu=0,1,\ldots)$ eine reelle Zahlenfolge und $\{\varphi_\nu(x)\}$ $(\nu=0,1,\ldots)$ ein im Intervall $(0,1)$ orthonormiertes Funktionensystem. Das n-te (C,α)-Mittel $(\alpha>-1)$ der orthogonalen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x) \tag{1}$$

wird mit $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ bezeichnet, d. h. es ist

$$\sigma_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{A_n^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\alpha)} a_\nu \varphi_\nu(x) \qquad (n=0,1,\ldots)$$

mit

$$A_m^{(\alpha)}=\binom{m+\alpha}{m}.$$

Die Orthogonalreihe (1) heißt im Intervall $(0,1)$ fast überall $|C,\alpha|$-summierbar, wenn im Intervall $(0,1)$ fast überall

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|<\infty$$

gilt.

K. TANDORI [4] hat den folgenden Satz bewiesen:

Damit die Reihe (1) *für jedes Orthonormalsystem* $\{\varphi_\nu(x)\}$ *im Intervall* $(0,1)$ *fast überall* $|C,1|$*-summierbar sei, ist die Bedingung*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} a_\nu^2\right\}^{1/2}<\infty \tag{2}$$

notwendig und hinreichend.

In § 1 dieser Arbeit wird bewiesen, daß die Bedingung (2) auch für $\alpha>\frac{1}{2}$ die notwendige und hinreichende Bedingung der $|C,\alpha|$-Summierbarkeit der Reihe (1) ist. Wir werden ferner hinreichende Bedingungen für $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ und für $\alpha=\frac{1}{2}$ angeben, die im allgemeinen nicht geschwächt werden können und die für positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolgen $\{a_\nu\}$ auch notwendige Bedingungen der $|C,\alpha|$-Summierbarkeit bzw. $\left|C,\frac{1}{2}\right|$-Summierbarkeit sind.

In § 2 wird gezeigt, daß die in den Divergenzbehauptungen der Sätze des § 1 angeführten orthonormierten Funktionensysteme auch als orthonormierte Polynomsysteme gewählt werden können.

Ein im Intervall (0, 1) orthonormiertes Funktionensystem $\{\chi_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots)$ heißt ein System vom Haarschen Typ — kurz: H-Typ —, wenn für jedes $x\in(0,1)$

$$\chi_n(x)\chi_m(x)=0 \quad (2^k<n, m\leqq 2^{k+1}, n\neq m;\ k=0,1,\ldots)$$

gilt. In § 3 werden wir folgendes beweisen: Ist die Reihe (1) für ein System vom H-Typ $|C,\alpha|$-summierbar mit $\alpha>0$, so ist sie auch fast überall absolut konvergent.

Endlich werden wir in § 4 beweisen, daß die Bedingung

$$\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}a_n^2\right\}^{1/2}<\infty \tag{3}$$

mit keiner positiven, monoton nichtabnehmenden, ins Unendliche strebenden Zahlenfolge $\{\lambda_m\}$ eine notwendige Bedingung der $|C,\alpha|$-Summierbarkeit mit $0\leqq\alpha\leqq\frac{1}{2}$ sein kann.

Ich möchte dem Herrn Dozent KÁROLY TANDORI, von dem diese Probleme stammen und der mich in der Fertigstellung dieser Arbeit mit wertvollen Ratschlägen unterstützt hat, meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

§ 1. Die absolute Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen

In diesem Paragraphen werden wir drei Sätze beweisen.

Satz I. *Es sei $\alpha>\frac{1}{2}$. Damit die Reihe* (1) *für jedes orthonormierte Funktionensystem im Intervall* (0, 1) *fast überall $|C,\alpha|$-summierbar sei, ist die Bedingung* (2) *notwendig und hinreichend.*

Beweis von Satz I. Zum Beweis des Satzes benötigen wir die folgenden bekannten Tatsachen:

$$c_1(\alpha)\leqq\frac{A_m^{(\alpha)}}{m^\alpha}\leqq c_2(\alpha) \qquad (m>0, \alpha>-1), \tag{1.1}$$

wobei $c_1(\alpha)$ und $c_2(\alpha)$ nur von α abhängige positive Zahlen sind, ferner gelten die Relationen

$$A_m^{(\alpha)}>0 \qquad (m\geqq 0,\ \alpha>-1),$$

$$A_{m+1}^{(\alpha)}>A_m^{(\alpha)} \qquad (m\geqq 0,\ \alpha>0),$$

(siehe z. B. A. ZYGMUND [5], S. 77).

Mit einfacher Rechnung ergibt sich

$$L_{n,\nu}^{(\alpha)}=\frac{A_{n+1-\nu}^{(\alpha)}}{A_{n+1}^{(\alpha)}}-\frac{A_{n-\nu}^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}}=\frac{A_{n-\nu}^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}}\,\frac{\nu\alpha}{(n+1-\nu)(n+1+\alpha)}.$$

Aus (1.1) folgt die Abschätzung

$$(1.2)\qquad d_1(\alpha)\frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}\nu}{n^{\alpha+1}}\leqq|L_{n,\nu}^{(\alpha)}|\leqq d_2(\alpha)\frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}\nu}{n^{\alpha+1}}$$

$$(n=1,2,\ldots;\ \nu=0,1,\ldots,n;\ \alpha>-1,\ \alpha\neq 0),$$

wobei $d_1(\alpha)$ und $d_2(\alpha)$ nur von α abhängige positive Zahlen sind. Offensichtlich ist $L_{n,\nu}^{(\alpha)}>0$ für $\alpha>0$, $L_{n,\nu}^{(\alpha)}=0$ für $\alpha=0$ und $L_{n,\nu}^{(\alpha)}<0$ für $-1<\alpha<0$.

Hinlänglichkeit. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a_0=a_1=0$ angenommen werden. Durch Anwendung der Cauchyschen Ungleichung erhält man für $\alpha>-1$ auf Grund von (1.1) und (1.2)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^1|\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\int_0^1|\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx\leqq\sum_{m=0}^{\infty}2^{m/2}\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\int_0^1(\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x))^2dx\right\}^{1/2}\leqq$$

$$(1.3)\qquad \leqq\sum_{m=0}^{\infty}2^{m/2}\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\left[\sum_{\nu=0}^{n}(L_{n,\nu}^{(\alpha)})^2a_\nu^2+\frac{1}{(A_{n+1}^{(\alpha)})^2}a_{n+1}^2\right]\right\}^{1/2}=$$

$$=O(1)\sum_{m=0}^{\infty}2^{m/2}\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+1-\nu)^{2\alpha-2}\nu^2}{n^{2\alpha+2}}a_\nu^2\right\}^{1/2}+$$

$$+O(1)\sum_{m=0}^{\infty}2^{m/2}\left[\left\{\sum_{n=2^m+2}^{2^{m+1}}\frac{1}{n^{2\alpha}}a_n^2\right\}^{1/2}+\frac{a_{2^{m+1}+1}}{(2^{m+1}+1)^{\alpha}}\right].$$

Ist $\alpha > \frac{1}{2}$, so kann man die Abschätzung (1.3) auf Grund von (2) fortsetzen:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \int_0^1 |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx =$$

$$= O(1) \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left\{ 2^{-m(1+2\alpha)} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=2^l+1}^{\min(2^{l+1},n)} (n+1-\nu)^{2\alpha-2} \nu^2 a_\nu^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} a_n^2 \right\}^{1/2} \right] =$$

$$= O(1) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ 2^{-m(1+2\alpha)} \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} \nu^2 a_\nu^2 \sum_{n=\max(2^m+1,\nu)}^{2^{m+1}} (n+1-\nu)^{2\alpha-2} \right\}^{1/2} + 1 \right] =$$

$$= O(1) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ 2^{-m(1+2\alpha)} \cdot 2^{m(2\alpha-1)} \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} \nu^2 a_\nu^2 \right\}^{1/2} + 1 \right] =$$

$$= O(1) \left[\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \sum_{l=0}^{m} 2^l \left\{ \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} a_\nu^2 \right\}^{1/2} + 1 \right] =$$

$$= O(1) \left[\sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} a_\nu^2 \right\}^{1/2} \cdot 2^l \sum_{m=l}^{\infty} 2^{-m} + 1 \right] < \infty.$$

Daraus folgt durch Anwendung des Satzes von B. LEVI, daß die Reihe (1) im Intervall (0, 1) fast überall $|C, \alpha|$-summierbar ist.

Zum Beweis der Notwendigkeit von (2) benötigen wir den folgenden

Hilfssatz I. *Es sei* $\{R_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ *ein im Intervall* (0, 1) *definiertes Treppenfunktionensystem.*[1]) *Wir bezeichnen mit* $J_s(n)$ $(n=1, 2, \ldots;$ $s=1, 2, \ldots, s_n)$ *die Konstanzintervalle von* $R_n(x)$. *Gilt für jedes* $m > n$ *die Beziehung*

(A) $$\int_{J_s(n)} \operatorname{sign} R_m(x)\,dx = 0 \qquad (s=1, 2, \ldots, s_n),$$

so gibt es zu jeder reellen Zahlenfolge $d_1, \ldots, d_N$ *eine einfache Menge*[2]) E_k *derart, daß für* $x \in E_k$

$$\left| \sum_{l=1}^{N} d_l R_l(x) \right| \geqq |d_{N-k} R_{N-k}(x)| \qquad (k=0, 1, \ldots, N-1)$$

[1]) Eine Funktion in (0, 1) heißt Treppenfunktion, wenn (0, 1) in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden kann derart, daß die Funktion in jedem Teilintervall konstant ist.

[2]) D. h. E_k ist die Summe endlich vieler Intervalle.

besteht und

$$\mu(E_k \cap J_s(N-k-1)) = \frac{\mu(J_s(N-k-1))}{2^{k+1}} \text{ [3]}$$

$$(k=0, 1, \ldots, N-1;\ s=1, 2, \ldots, s_{N-k-1};\ J_1(0)=(0, 1))$$

ist.

Beweis des Hilfssatzes I. Nach der Eigenschaft (A) von $R_{N-k}(x)$ gibt es offenbar für jedes $k(<N)$ eine einfache Menge E'_k derart, daß

$$\left|\sum_{l=1}^{N-k} d_l R_l(x)\right| \geqq |d_{N-k} R_{N-k}(x)| \qquad (x \in E'_k)$$

besteht und

$$\mu(E'_k \cap J_s(N-k-1)) = \frac{\mu(J_s(N-k-1))}{2} \qquad (s=1, 2, \ldots, s_{N-k-1})$$

gilt. Weiterhin ist E'_k die Vereinigung gewisser $J_s(N-k)$. Ist $k=0$, dann ist die Behauptung bewiesen. Ist $k \geqq 1$, dann folgt nach der Eigenschaft (A) von $R_{N-k+1}(x)$, daß es eine einfache Menge $E''_k(\subseteqq E'_k)$ derart gibt, daß für jedes $x \in E''_k$

$$\left|\sum_{l=1}^{N-k+1} d_l R_l(x)\right| \geqq \left|\sum_{l=1}^{N-k} d_l R_l(x)\right| \geqq |d_{N-k} R_{N-k}(x)|$$

besteht und

$$\mu(E''_k \cap J_s(N-k-1)) = \frac{\mu(J_s(N-k-1))}{2^2} \qquad (s=1, 2, \ldots, s_{N-k-1})$$

gilt, wo E''_k die Vereinigung gewisser $J_s(N-k+1)$ ist. Somit ergibt sich mit vollständiger Induktion die Behauptung.

Notwendigkeit. Im folgenden wird ein spezielles orthonormiertes System $\{\chi_n(x)\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ definiert. Es seien

$$\chi_n(x) = r_n(x) \text{ [4]} \qquad (n=0, 1, 2).$$

Die Funktionen $\chi_n(x)$ $(n=0, 1, 2)$ sind Treppenfunktionen.

Es sei $s(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\chi_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots, 2^s)$ schon so definiert sind, daß sie ein System vom H-Typ bilden.

Dann kann das Intervall $(0, 1)$ in endlich viele Teilintervalle $J_\varrho(1 \leqq \varrho \leqq \varrho_s)$ derart zerlegt werden, daß in jedem J_ϱ die Funktionen $\chi_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots, 2^s)$ konstant sind.

---

[3]) Mit $\mu(H)$ wird das Lebesguesche Maß der Menge H bezeichnet.

[4]) $r_k(x)$ bezeichnet die k-te Rademachersche Funktion:

$$r_k(x) = \text{sign} \sin 2^k \pi x \qquad (k=0, 1, \ldots).$$

Wir setzen

$$\varrho_0(m)=0 \quad \text{und} \quad \varrho_k(m)=\sum_{n=1}^{k}\frac{a_{2^m+n}^2}{A_m^2} \quad \left(A_m=\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} a_n^2\right\}^{1/2};\right.$$

$$\left. k=1,\ldots,2^m;\ m=0,1,\ldots\right).$$

Für ein endliches Intervall $I=(u,v)$ wird

$$I_k(m,I)=(u+\mu(I)\varrho_{k-1}(m),\, u+\mu(I)\varrho_k(m)) \quad (k=1,2,\ldots,2^m;\ m=0,1,\ldots)$$

gesetzt.

Wir teilen jedes $J_\varrho=(u_\varrho, v_\varrho)$ in 2^s Teilintervalle ein,

$$I_k(s;J_\varrho)=(u_\varrho+\mu(J_\varrho)\varrho_{k-1}(s),\, u_\varrho+\mu(J_\varrho)\varrho_k(s)) \qquad (k=1,2,\ldots,2^s),$$

und setzen

$$\chi_{2^s+k}(x)=\frac{A_s}{a_{2^s+k}}\sum_{\varrho=1}^{\varrho_s} r_s(x;\, I_k(s,J_\varrho))\ ^{5)} \qquad (k=1,2,\ldots,2^s).$$

Die Funktionen $\chi_n(x)$ $(2^s+1\leqq n\leqq 2^{s+1})$ sind Treppenfunktionen. Sie sind normiert:

$$\int_0^1 \chi_{2^s+k}^2(x)dx=\frac{A_s^2}{a_{2^s+k}^2}\sum_{\varrho=1}^{\varrho_s}\int_0^1 r_s^2(x, I_k(s;J_\varrho))dx=$$

$$=\frac{A_s^2}{a_{2^s+k}^2}\sum_{\varrho=1}^{\varrho_s}\mu(I_k(s;J_\varrho))\int_0^1 r_s^2(x)dx=\frac{A_s^2}{a_{2^s+k}^2}\sum_{\varrho=1}^{\varrho_s}\mu(J_\varrho)\frac{a_{2^s+k}^2}{A_s^2}=\sum_{\varrho=1}^{\varrho_s}\mu(J_\varrho)=1.$$

Nach der Definition ist es klar, daß das Funktionensystem $\{\chi_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots,2^{s+1})$ auch orthogonal und für jedes $x\in(0,1)$ sogar

$$\chi_n(x)\chi_m(x)=0 \qquad (2^l<n,m\leqq 2^{l+1};\ 0\leqq l\leqq s)$$

ist, also bilden die $\chi_n(x)$ ein System vom H-Typ.

---

5) Ist $I=(u;v)$ ein endliches Intervall und $h(x)$ eine in $(0,1)$ definierte Funktion, so wird

$$h(x;I)=\begin{cases} h\left(\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u<x<v \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

gesetzt. Offensichtlich ist

$$\int_u^v h(x;\ I)dx=\mu(I)\int_0^1 h(x)dx.$$

Mit vollständiger Induktion ergibt sich sodam ein unendliches System vom H-Typ.

Das n-te (C,α)-Mittel der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

wird mit $\bar{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)$ bezeichnet. Wir nehmen an, daß die Reihe (1) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall $|C,\alpha|$-summierbar $\left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$ ist. Dann gilt auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\bar{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \bar{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| < \infty$$

im Intervall $(0, 1)$ fast überall.

Es sei $\varepsilon = 2^{-(18+2\alpha)} d_1^2(\alpha) d_2^{-2}(\alpha)$, wo $d_1(\alpha)$ und $d_2(\alpha)$ die unter (1.2) angeführten Konstanten sind. Nach dem Egoroffschen Satz gibt es dann eine meßbare Menge E mit $\mu(E) \geqq 1-\varepsilon$ und eine positive Konstante K derart, daß für jedes $x \in E$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \bar{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| < K$$

ist, woraus folgt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_E |\bar{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \bar{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| \, dx \leqq K\mu(E). \tag{1.4}$$

Es seien m und n natürliche Zahlen, $2^m < n \leqq 2^{m+1}$. Wir setzen

$$R_l(x;\, m, n) = \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \qquad (l = 0, 1, \ldots, m-1),$$

$$R_m(x;\, m, n) = \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x)$$

und

$$R_{m+1}(x;\, m, n) = \frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} a_{n+1} \chi_{n+1}(x).$$

Aus der Definition von $\chi_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ ist klar, daß die Funktionen $R_l(x;\, m, n)$ $(l = 0, 1, \ldots, m+1)$ die Bedingungen des Hilfssatzes I erfüllen.

Wir wenden auf die Funktionen $R_l(x;\, n, m)$ $(l = 0, 1, \ldots, m+1)$ den Hilfssatz I mit $N = m+1$, $k = 3$ an; die entsprechende Menge wird mit $E_3(m, n)$ bezeichnet. So ergibt sich auf Grund von (1.2) und der Definition der Funktionen $\chi_\nu(x)$ $(\nu=0,1,\ldots)$:

$$\sum_{n=2^3+1}^{\infty}\int_E |\bar\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\bar\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx=\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\int_E\left|\sum_{\nu=0}^{n}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\chi_{n+1}(x)\right|dx\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\int_{E_3(m,n)\cap E}\left|\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x)\right|dx\geqq$$

$$\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\left(\int_{E_3(m,n)}-\int_{E_3(m,n)-E_3(m,n)\cap E}\right)\left|\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x)\right|dx\geqq$$

$$\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\left(\int_{E_3(m,n)}\left|\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x)\right|dx-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\varepsilon}\cdot\left\{\int_0^1\left|\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x)\right|^2dx\right\}^{1/2}\right)\geqq$$

$$\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\left(2^{-4}\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}a_\nu\frac{a_\nu}{A_{m-2}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}-\sqrt{\varepsilon}\,d_2(\alpha)\,2^{-(\alpha+m)}A_{m-2}\right)\geqq$$

$$\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\left(2^{-7}d_1(\alpha)\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}\frac{a_\nu^2}{A_{m-2}}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}}{n^\alpha}-2^{-(9+2\alpha)}d_1(\alpha)A_{m-2}\right)\geqq$$

$$\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\left(2^{-(8+2\alpha)}d_1(\alpha)A_{m-2}-2^{-(9+2\alpha)}d_1(\alpha)A_{m-2}\right)\geqq 2^{-(9+2\alpha)}d_1(\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}A_m,$$

woraus (2) wegen (1.4) folgt.

Damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingung (2) und den Satz I bewiesen, und auch die folgende Divergenzbehauptung erhalten:

Es sei $\alpha>\frac{1}{2}$. Ist die Bedingung (2) *nicht erfüllt, so gibt es ein in* $(0,1)$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\{\varphi_n(x)\}$ *derart, daß die Reihe* (1) *nicht fast überall* $|C,\alpha|$*-summierbar ist.*

Wir werden jetzt die folgende Divergenzbehauptung beweisen:

Bezeichne $\{\varphi_n(x)\}$ *ein Orthonormalsystem von Treppenfunktionen. Ist die Orthogonalreihe* (1) *in einer Menge* $H(\subseteqq(0,1))$ *mit* $\mu(H)=2\delta$ $(0<2\delta<1)$ *nicht* $|C,\alpha|$*-summierbar für ein* $\alpha>-1$*, so kann ein orthonormiertes System* *von Treppenfunktionen* $\{\psi_n(x)\}$ *angegeben werden derart, daß die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x) \tag{1.5}$$

in $(0, 1)$ *fast überall nicht* $|C, \alpha|$*-summierbar ist.*

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a_0 = a_1 = 0$ angenommen werden. Zum Beweis dieser Behauptung werden wir ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\psi_n(x)\}$, eine Indexfolge $\{N_m\}$ $(0 = N_0 < N_1 < \ldots < N_m < \ldots)$, eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge $\{\lambda_m\}$ und eine Folge von einfachen Mengen $\{H_m\}$ $(H_m \subseteq (0, 1))$ konstruieren, welche die folgenden Bedingungen erfüllen.

Die Mengen H_m sind stochastisch unabhängig[6]) und haben das Maß

$$\mu(H_m) = \delta \qquad (m = 1, 2, \ldots); \tag{1.6}$$

für jedes n gilt

$$\max_{0<x<1} |\psi_n(x)| \leqq \max_{0<x<1} |\varphi_n(x)|; \tag{1.7}$$

für $x \in H_{m+1}$ bestehen die Abschätzungen

$$\sum_{n=N_m}^{N_{m+1}-1} \left| \sum_{\nu=N_m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \psi_\nu(x) + \frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} a_{n+1} \psi_{n+1}(x) \right| \geqq 4\lambda_{m+1} \tag{1.8}$$

und

$$\sum_{n=N_m}^{N_{m+1}-1} \left| \sum_{\nu=0}^{N_m} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \psi_\nu(x) \right| \leqq \lambda_{m+1}. \tag{1.9}$$

Wir setzen $\psi_0(x) = \varphi_0(x)$. Es sei $m_0 (\geqq 0)$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots, N_{m_0})$, die Zahlen $N_0 < N_1 < \ldots < N_{m_0}$, $(0 <) \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_{m_0}$ und die einfachen Mengen $H_1, \ldots, H_{m_0}$ schon definiert sind derart, daß diese Funktionen in $(0, 1)$ orthonormiert sind, diese Mengen stochastisch unabhängig sind, (1.7) für $n \leqq N_{m_0}$ und (1.6), (1.8), (1.9) für $m = 0, 1, \ldots, m_0$ erfüllt sind.

Durch einfache Rechnung ergibt sich für $\alpha > -1$ und für ein beliebiges s

$$\sum_{n=s}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{s} |L_{n,\nu}^{(\alpha)}| < \infty.$$

Es sei

$$\lambda_{m_0+1} = \sum_{n=N_{m_0}}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{N_{m_0}} |L_{n,\nu}^{(\alpha)}| \cdot \max_{\substack{0 \leqq \mu \leqq N_{m_0} \\ 0<x<1}} |a_\mu \varphi_\mu(x)|.$$

[6]) D. h. für jede endlich Indexfolge $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ gilt
$\mu(H_{k_1} \cap H_{k_2} \cap \ldots \cap H_{k_n}) = \mu(H_{k_1}) \mu(H_{k_2}) \ldots \mu(H_{k_n})$.

Aus unseren Annahmen folgt, daß es einen Index N_{m_0+1} $(>N_{m_0})$ und eine einfache Menge $H'_{m_0+1}(\subseteq(0,1))$ mit $\mu(H'_{m_0+1})=\delta$ gibt, derart, daß für $x\in H'_{m_0+1}$

$$\sum_{n=N_{m_0}}^{N_{m_0+1}-1}\left|\sum_{\nu=0}^{n}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\varphi_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)\right|\geqq 5\lambda_{m_0+1}$$

besteht. Daraus folgt nach der Definition von λ_{m_0+1}

$$\sum_{n=N_{m_0}}^{N_{m_0+1}-1}\left|\sum_{\nu=N_{m_0}+1}^{n}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\varphi_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)\right|\geqq$$

$$(1.10)\qquad \geqq\sum_{n=N_{m_0}}^{N_{m_0+1}-1}\left|\sum_{\nu=0}^{n}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\varphi_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)\right|-$$

$$-\sum_{n=N_{m_0}}^{N_{m_0+1}-1}\left|\sum_{\nu=0}^{N_{m_0}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\varphi_\nu(x)\right|\geqq 4\lambda_{m_0+1}$$

für $x\in H'_{m_0+1}$.

Dann kann das Intervall $(0,1)$ in endlich viele Teilintervalle I_l $(1\leqq l\leqq l_{m_0})$ derart zerlegt werden, daß in jedem I_l die Funktionen $\psi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq N_{m_0})$ konstant sind und jede Menge H_m $(m=1,2,\dots,m_0)$ die Vereinigung einiger I_l ist. Die zwei Hälften des Intervalls I_l bezeichnen wir mit I_l' bzw. I_l''. Es sei

$$\psi_n(x)=\sum_{l=1}^{l_{m_0}}(\varphi_n(x;I_l')-\varphi_n(x;I_l''))\qquad (N_{m_0}<n\leqq N_{m_0+1})$$

und

$$H_{m_0+1}=\bigcup_{l=1}^{l_{m_0}}(H'_{m_0+1}(I_l')\cup H'_{m_0+1}(I_l'')).^{7)}$$

Offensichtlich sind diese Funktionen Treppenfunktionen, die Menge H_{m_0+1} ist einfach, die Funktionen $\psi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq N_{m_0+1})$ bilden in $(0,1)$ ein orthonormiertes System, (1.7) besteht für $n\leqq N_{m_0+1}$ und (1.6) für $m=m_0+1$, die Mengen $H_0,\dots,H_{m_0+1}$ sind stochastisch unabhängig, ferner folgt auf Grund der Definition von H_{m_0+1}, λ_{m_0+1}, N_{m_0+1} und (1.10), daß (1.8) und (1.9) auch für $m=m_0+1$ bestehen.

Mit vollständiger Induktion erhalten wir das System $\{\psi_n(x)\}$ und die Folgen $\{H_m\}$, $\{N_m\}$, $\{\lambda_m\}$ mit erwähnten Eigenschaften.

Aus (1.8) und (1.9) folgt, daß für $x\in H_m$

$$\sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1}\left|\sum_{\nu=0}^{n}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\psi_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\psi_{n+1}(x)\right|\geqq 3\lambda_m$$

---

[7]) Mit $H(I)$ wird die Bildmenge von H bei der das Intervall $(0,1)$ in I abbildenden linearen Transformation bezeichnet.

besteht. Ist $x \in \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} H_m$, so gilt diese Abschätzung für unendlich viele m, also ist die Reihe (1.5) in diesem Punkt nicht $|C, \alpha|$-summierbar. Aus der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen H_m und aus (1.6) folgt durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas (siehe z. B. W. FELLER [1], S. 155), daß $\mu(\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} H_m)=1$ ist. Also ist die Reihe (1.5) fast überall nicht $|C, \alpha|$-summierbar. — Hiermit haben wir unsere letzte Behauptung bewiesen.

Satz II. *Damit die Reihe* (1) *für jedes orthonormierte Funktionensystem im Intervall* $(0, 1)$ *fast überall* $|C, \alpha|$*-summierbar sei, ist im Falle* $\alpha=\frac{1}{2}$ *die Bedingung*

$$(1.11) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m}\, A_m < \infty \qquad \left(A_m = \left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} a_n^2\right\}^{1/2}\right)$$

und im Falle $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ *die Bedingung*

$$(1.12) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} A_m < \infty$$

hinreichend; für monotone Koeffizientenfolgen sind diese Bedingungen aber auch notwendig, falls diese Summierbarkeit für alle Orthonormalsysteme $\{\varphi_n(x)\}$ *gefordert ist.*

Beweis des Satzes II. Wir nehmen auch jetzt $a_0=a_1=0$ an und beweisen zunächst, daß die Bedingungen (1.11) bzw. (1.12) für die $\left|C, \frac{1}{2}\right|$- bzw. $|C, \alpha|$-Summierbarkeit fast überall mit $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ hinreichend sind. Durch Anwendung der Abschätzung (1.3) erhält man auf Grund von (1.11) und (1.12), daß für $\alpha=\frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 |\sigma_{n+1}^{(\frac{1}{2})}(x)-\sigma_n^{(\frac{1}{2})}(x)|\, dx=$$

$$=O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left\{2^{-2m}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\sum_{l=0}^{m}\sum_{\nu=2^l+1}^{\min(2^{l+1},n)}(n+1-\nu)^{-1}\nu^2 a_\nu^2\right\}^{1/2}+\sum_{m=0}^{\infty}A_m\right)=$$

$$=O(1)\left[\sum_{m=0}^{\infty}\left(\left\{2^{-2m}\sum_{l=0}^{m-2}\sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}}\nu^2 a_\nu^2\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}(n+1-\nu)^{-1}\right\}^{1/2}+\right.\right.$$

$$+\left\{2^{-2m}\sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m}\nu^2 a_\nu^2\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}(n+1-\nu)^{-1}\right\}^{1/2}+$$

$$+\left\{2^{-2m}\sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}}\nu^2 a_\nu^2\sum_{n=\nu}^{2^{m+1}}(n+1-\nu)^{-1}\right\}^{1/2}\Bigg)+1\Bigg]=$$

$$=O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m}\sum_{l=0}^{m-2}2^l A_l+\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{m}\,A_{m-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{m}\,A_m+1\right)=$$

$$=O(1)\left(\sum_{l=0}^{\infty}A_l 2^l\sum_{m=l}^{\infty}2^{-m}+1\right)<\infty$$

besteht, während für $-1<\alpha<\dfrac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1|\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx=$$

$$=O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left\{2^{-m(1+2\alpha)}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\sum_{l=0}^{m}\sum_{\nu=2^l+1}^{\min(2^{l+1},n)}(n+1-\nu)^{2\alpha-2}\nu^2 a_\nu^2\right\}^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)}A_m\right)=$$

$$=O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left\{2^{-m(1+2\alpha)}\sum_{l=0}^{m}\sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}}\nu^2 a_\nu^2\sum_{n=\max\{2^m+1,\,\nu\}}^{2^{m+1}}(n+1-\nu)^{2\alpha-2}\right\}^{1/2}+1\right)=$$

$$=O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left\{2^{-m(1+2\alpha)}\Bigg[2^{2m}A_m^2+2^{2m}A_{m-1}^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{l=0}^{m-2}2^{2l}A_l^2\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}(n+1-2^{l+1})^{2\alpha-2}\Bigg]\right\}^{1/2}+1\right)=$$

$$=O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)}A_m+\sum_{m=0}^{\infty}\left\{2^{-m(1+2\alpha)}\sum_{l=0}^{m-2}2^{2l}A_l^2 2^{m(2\alpha-1)}\right\}^{1/2}+1\right)=$$

$$=O(1)\left(\sum_{l=0}^{\infty}A_l 2^l\sum_{m=l}^{\infty}2^{-m}+1\right)<\infty$$

gilt. Daraus ergibt sich durch Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe (1) fast überall $\left|C,\dfrac{1}{2}\right|$- bzw. $|C,\alpha|$-summierbar mit $-1<\alpha<\dfrac{1}{2}$ ist.

Zum Beweis des Satzes II haben wir noch zu zeigen, daß (1. 11) bzw. (1. 12) für jede monotone Koeffizientenfolge notwendige Bedingungen der

$\left|C, \frac{1}{2}\right|$- bzw. $|C, \alpha|$-Summierbarkeit fast überall mit $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ sind, falls diese Summierbarkeit für alle Orthonormalsysteme $\{\varphi_n(x)\}$ gefordert wird.

Es sei $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, wobei $a_0=a_1=0$ angenommen werden kann. Das n-te (C, α)-Mittel der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(x) \tag{1.13}$$

bezeichnen wir mit $\sigma_n^{*(\alpha)}(x)$.

Wir benötigen den

Hilfssatz II. *Ist $\Sigma\varrho_\nu^2<\infty$, dann ist*

$$A\{\Sigma\varrho_\nu^2\}^{1/2} \leqq \int_0^1 |\mathfrak{h}(x)|\,dx \leqq B\{\Sigma\varrho_\nu^2\}^{1/2}$$

erfüllt, wobei A und B positive, von der Folge $\{\varrho_\nu\}$ unabhängige Konstanten sind und $\mathfrak{h}(x)$ die Summenfunktion der Reihe

$$\Sigma\varrho_\nu r_\nu(x)$$

bezeichnet.

Dieser Satz ist bekannt. (Siehe z. B. A. ZYGMUND [5], S. 213.)

Ist die Reihe (1) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ in $(0, 1)$ fast überall $\left|C, \frac{1}{2}\right|$-summierbar, dann ist es auch die Reihe (1.13). Es sei $\varepsilon=4^{-1}A^2$. Nach dem Satz von EGOROFF gibt es eine Konstante M und eine meßbare Menge $G(\subset(0, 1))$ mit $\mu(G)>1-\varepsilon$, so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{*(\frac{1}{2})}(x)-\sigma_n^{*(\frac{1}{2})}(x)|<M \qquad (x\in G) \tag{1.14}$$

besteht. Die Menge $(0, 1)-G$ wird mit CG bezeichnet. Durch Anwendung des Hilfssatzes II ergibt sich auf Grund von (1.2) und (1.14)

$$M\mu(G) \geqq \sum_{n=0}^{\infty} \int_G |\sigma_{n+1}^{*(\frac{1}{2})}(x)-\sigma_n^{*(\frac{1}{2})}(x)|\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 - \int_{CG}\right)|\sigma_{n+1}^{*(\frac{1}{2})}(x)-\sigma_n^{*(\frac{1}{2})}(x)|\,dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 |\sigma_{n+1}^{*(\frac{1}{2})}(x)-\sigma_n^{*(\frac{1}{2})}(x)|\,dx - \sqrt{\mu(CG)}\left\{\int_0^1 (\sigma_{n+1}^{*(\frac{1}{2})}(x)-\sigma_n^{*(\frac{1}{2})}(x))^2\,dx\right\}^{1/2}\right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{n=0}^{\infty}(A-\sqrt{\varepsilon})\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\left(L_{n,\nu}^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^2 a_\nu^2 + \frac{a_{n+1}^2}{\left(A_{n+1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^2}\right\}^{1/2} \geqq$$

$$\geqq \frac{A}{2} d_1(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+1-\nu)^{-1}\nu^2 a_\nu^2}{n^3}\right\}^{1/2} \geqq$$

$$\geqq \frac{A}{2} d_1(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\left\{\sum_{\nu=2^m+1}^{n}\frac{(n+1-\nu)^{-1}\nu^2 a_\nu^2}{n^3}\right\}^{1/2} \geqq$$

$$\geqq \frac{A}{2^2} d_1(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{2^{m+1}}}{2^{\frac{m+1}{2}}}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\left\{\sum_{\nu=2^m+1}^{n}(n+1-\nu)^{-1}\right\}^{1/2} \geqq$$

$$\geqq \frac{A}{2^5} d_1(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m+1}{2}}\sqrt{m+1}\, a_{2^{m+1}} \geqq$$

$$\geqq \frac{A}{2^5} d_1(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{m}\, A_m .$$

Also (1. 11) ist erfüllt.

Damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingung (1. 11) für monotone Koeffizientenfolgen gezeigt.

Nehmen wir an, daß die Reihe (1. 13) in $(0, 1)$ fast überall $|C, \alpha|$-summierbar ist für ein beliebiges α zwischen -1 und $\frac{1}{2}$. Es sei $\varepsilon = 4^{-1}A^2$. Nach dem Egoroffschen Satz gibt es eine meßbare Menge G_1, mit $\mu(CG_1) \leqq \varepsilon$ und eine Konstante M_1 derart, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\sigma_{n+1}^{*(\alpha)}(x)-\sigma_n^{*(\alpha)}(x)| < M_1 \qquad (x \in G_1). \tag{1. 15}$$

Durch Anwendung des Hilfssatzes II folgt auf Grund von (1. 1) und (1. 15)

$$M_1 \geqq \sum_{n=0}^{\infty}\int_{G_1}|\sigma_{n+1}^{*(\alpha)}(x)-\sigma_n^{*(\alpha)}(x)|\,dx \geqq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 - \int_{CG_1}\right)|\sigma_{n+1}^{*(\alpha)}(x)-\sigma_n^{*(\alpha)}(x)|\,dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{n=0}^{\infty}(A-\sqrt{\varepsilon})\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(L_{n,\nu}^{(\alpha)})^2 a_\nu^2 + \frac{a_{n+1}^2}{(A_{n+1}^{(\alpha)})^2}\right\}^{1/2} \geqq \frac{A}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{A_n^{(\alpha)}} \geqq$$

$$\geqq \frac{A}{2c_2(\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha} = \frac{A}{2c_2(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{a_n}{n^\alpha} \geqq \frac{A}{2c_2(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}2^{-(m+1)\alpha}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}a_n \geqq$$

$$\geqq \frac{A}{4c_2(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}2^{-(m+1)\alpha}\,2^{\frac{m+1}{2}}A_{m+1} = \frac{A}{4c_2(\alpha)}\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)}A_m ,$$

also ist (1. 12) erfüllt.

Wir haben hiermit die folgende Divergenzbehauptung bewiesen:

Es sei $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge. Sind

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m}\, A_m = \infty \quad bzw. \quad \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1-2\alpha)} A_m = \infty \quad \left(\textit{für ein } \alpha,\ -1<\alpha<\frac{1}{2}\right),$$

so gibt es orthonormierte Systeme von Treppenfunktionen $\{\Phi_n(x)\}$ bzw. $\{\psi_n(x)\}$ derart, daß die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x)$ in $(0,1)$ nicht fast überall $\left|C, \frac{1}{2}\right|$- bzw. $|C,\alpha|$-summierbar sind.

Mit der obigen Methode kann gezeigt werden, daß diese Systeme von Treppenfunktionen $\{\Phi_n,(x)\}$ bzw. $\{\psi_n(x)\}$ auch so gewählt werden können, daß die entsprechenden Reihen in $(0,1)$ *fast überall nicht* $\left|C, \frac{1}{2}\right|$*- bzw.* $|C,\alpha|$*-summierbar sind.* — Damit haben wir den Satz II vollständig bewiesen.

Wir werden noch den folgenden Divergenzsatz beweisen:

Satz III. *Es seien $\{p_m\}$ bzw. $\{q_m\}$ positive Zahlenfolgen mit*

$$p_m = o(\sqrt{m}) \quad bzw. \quad q_m = o\left(2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)}\right) \quad für \quad -1<\alpha<\frac{1}{2}. \tag{1.16}$$

Dann gibt es orthonormierte Systeme von Treppenfunktionen $\{\Phi_n(x)\}$ bzw. $\{\psi_n(x)\}$ und Koeffizientenfolgen $\{b_n\}$ bzw. $\{c_n\}$ derart, daß die Beziehungen

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m B_m < \infty \quad bzw. \quad \sum_{m=0}^{\infty} q_m C_m < \infty \tag{1.17}$$

gelten, wo

$$B_m = \left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} b_n^2\right\}^{1/2} \quad bzw. \quad C_m = \left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} c_n^2\right\}^{1/2}$$

bedeuten, die Orthogonalreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \Phi_n(x) \quad bzw. \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) \tag{1.18}$$

aber im Intervall $(0,1)$ fast überall nicht $\left|C, \frac{1}{2}\right|$- bzw. $|C,\alpha|$-summierbar sind.

Beweis von Satz III. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß

$$\frac{p_m}{\sqrt{m}} \leqq 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{q_m}{2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)}} \leqq 1$$

für jedes $m \geqq 1$ gilt. Es sei $\{u_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu = \infty.$$

Dann kann nach (1.16) eine Indexfolge $\{N_k\}$ $(N_0 = 1)$ bestimmt werden, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(1.19)\qquad p_m m^{-\frac{1}{2}} \leqq k^{-2} \quad \text{bzw.} \quad q_m 2^{-\frac{m}{2}(1-2\alpha)} \leqq k^{-2} \quad \text{für} \quad m \geqq N_{k-1} \quad (k=1,2,\ldots)$$

und

$$(1.20)\qquad \sum_{\nu=N_{k-1}}^{N_k-1} u_\nu \leqq \sum_{\nu=N_k}^{N_{k+1}-1} u_\nu \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Es sei

$$(1.21)\qquad u(n) = \sum_{\nu=N_{k-1}}^{N_k-1} u_\nu \quad \text{für} \quad N_{k-1} \leqq n < N_k \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Die so definierte Zahlenfolge $\{u(n)\}$ ist positiv und nach (1.20) monoton nichtabnehmend. Nach (1.19) und (1.21) sind

$$(1.22)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m u_m}{\sqrt{m}\, u(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=N_{k-1}}^{N_k-1} \frac{p_m u_m}{\sqrt{m}\, u(m)} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

bzw.

$$(1.23)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m u_m}{2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} u(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=N_{k-1}}^{N_k-1} \frac{q_m u_m}{2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} u(m)} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Nach (1.21) ist

$$(1.24)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_m}{u(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=N_{k-1}}^{N_k-1} \frac{u_m}{u(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Es seien nun

$$b_n = \left(2^{\frac{m}{2}} \sqrt{m}\, u(m) u_m^{-1}\right)^{-1} \quad \text{bzw.} \quad c_n = \left(2^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} u(m) u_m^{-1}\right)^{-1}$$
$$\text{für} \quad 2^m < n \leqq 2^{m+1}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

So sind

$$B_m = \frac{u_m}{\sqrt{m}\, u(m)} \quad \text{bzw.} \quad C_m = \frac{u_m}{2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} u(m)} \qquad (m=1,2,\ldots).$$

Daraus ergibt sich auf Grund von (1.22), (1.23) und (1.24), daß (1.17) erfüllt ist, wogegen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m}\, B_m = \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{m=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} C_m = \infty$$

ist. Auf Grund unserer nach dem Beweis des Satzes II erwähnten Behauptung gibt es daher orthonormierte Funktionensysteme $\{\Phi_n(x)\}$ bzw. $\{\psi_n(x)\}$, für welche die Orthogonalreihen (1.18) im Intervall $(0, 1)$ fast überall nicht $\left|C, \frac{1}{2}\right|$- bzw. $|C, \alpha|$-summierbar $\left(-1<\alpha<\frac{1}{2}\right)$ sind.

Damit haben wir den Satz III bewiesen.

§ 2. Divergenzbehauptungen für Reihen, welche nach orthonormierten Polynomsystemen fortschreiten

In diesem Paragraphen werden wir den folgenden Satz beweisen:

Satz IV. *Man kann die in den Divergenzbehauptungen des § 1 angeführten orthonormierten Funktionensysteme auch als orthonormierte Polynomsysteme wählen.*

Beweis des Satzes IV. Zum Beweis des Satzes benötigen wir den folgenden Approximationssatz. (Siehe L. LEINDLER [3], 20—37.)

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ *ein im Grundintervall* $(0, 1)$ *orthonormiertes Funktionensystem. Dann kann zu jeder positiven Zahlenfolge* $\{\varepsilon_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ *und zu jeder Indexfolge* $\{N_i\}$ $(0=N_0<N_1<\ldots<N_i<\ldots)$ *ein in* $(0, 1)$ *orthonormiertes Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ *und eine Folge von meßbaren Mengen* $G_i(\subseteq(0, 1))$ $(i=0, 1, \ldots)$ *angegeben werden, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Für* $x \in CG_i$ *und für jedes* n *mit* $N_i<n\leqq N_{i+1}$ *gilt*

$$|\varphi_n(x)-(-1)^{j_i(x)} P_n(x)| \leqq \varepsilon_i \qquad (j_i(x)=0 \text{ oder } 1)$$

und

$$\mu(G_i) \leqq \varepsilon_i .$$

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ ein im Intervall $(0, 1)$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen (die in den Divergenzbehauptungen des § 1 vorkommenden orthonormierten Funktionensysteme bestehen immer aus Treppenfunktionen) und $\{a_n\}$ $(n=0, 1, \ldots)$, $(a_0=a_1=0)$ eine nichtnegative Zahlenfolge. Wir nehmen an, daß für dieses System

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)| = \infty \qquad (\text{für ein } \alpha, \alpha>-1)$$

fast überall gilt. Dann können, wie es in § 1 bewiesen wurde, eine Indexfolge $\{N_i\}$ $(0=N_0<N_1<\ldots<N_i<\ldots)$, eine stochastisch unabhängige, meßbare Mengenfolge $\{H_i\}$ $(\subseteqq(0,1))$ $(i=0,1,\ldots)$ mit $\mu(H_i)=\delta>0$ und eine positive, zunehmende Zahlenfolge $\{\lambda_i\}$ $(i=0,1,\ldots)$ $(\lambda_1\geqq 2)$ angegeben werden derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Für jedes $x\in H_i$ $(i=0,1,\ldots)$ ist

$$\sum_{n=N_i}^{N_{i+1}-1}\left|\sum_{\nu=N_i+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \varphi_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)\right|\geqq 4\lambda_i \tag{2. 1}$$

und

$$\sum_{n=N_i}^{N_{i+1}-1}\left|\sum_{\nu=0}^{N_i} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \varphi_\nu(x)\right|\leqq \lambda_i. \tag{2. 2}$$

Nach unserer Annahme ergibt sich auf Grund des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas

$$\mu(\overline{\lim_{i\to\infty}} H_i)=1. \tag{2. 3}$$

Wir wählen die Zahlenfolge $\{\varepsilon_i\}$ $(i=0,1,\ldots)$ so, daß

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon_i<\infty \tag{2. 4}$$

und

$$\varepsilon_i\cdot\sum_{n=N_i}^{N_{i+1}-1}\left(\sum_{\nu=0}^{n}|L_{n,\nu}^{(\alpha)}|\, a_\nu+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} a_{n+1}\right)<\lambda_i. \tag{2. 5}$$

Wir wenden auf das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ mit der obigen Indexfolge $\{N_i\}$ und der Zahlenfolge $\{\varepsilon_i\}$ den erwähnten Approximationssatz an. Dann ergibt sich aus (2. 1), (2. 2) und (2. 5) durch einfache Rechnung, daß es ein in (0, 1) orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ und eine Folge von meßbaren Mengen $G_i(\subseteqq(0,1))$ $(i=0,1,\ldots)$ gibt, derart, daß für jedes $x\in H_i-G_i$ $(i=1,2,\ldots)$

$$\sum_{n=N_i}^{N_{i+1}-1}\left|\sum_{\nu=N_i+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu P_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} a_{n+1}P_{n+1}(x)\right|\geqq 3\lambda_i$$

und

$$\sum_{n=N_i}^{N_{i+1}-1}\left|\sum_{\nu=0}^{N_i} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu P_\nu(x)\right|\leqq 2\lambda_i$$

ist. Daraus folgt, daß für jedes $x\in H_i-G_i$ $(i=0,1,\ldots)$

$$\sum_{n=N_i}^{N_{i+1}-1}|\tilde{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\tilde{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)|\geqq\lambda_i \tag{2. 6}$$

besteht, wobei $\tilde{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)$ das (C, α)-Mittel der Orthogonalreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) \tag{2.7}$$

bezeichnet.

Offensichtlich ist

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, G_i \subseteq \bigcup_{i=i_0}^{\infty} G_i$$

für jedes i_0. Somit ist

$$\mu(\overline{\lim_{i\to\infty}}\, G_i) \leqq \sum_{i=i_0}^{\infty} \mu(G_i) \leqq \sum_{i=i_0}^{\infty} \varepsilon_i$$

für jedes i_0, woraus nach (2.4) $\mu(\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\, G_i) = 0$ folgt.

Daraus und aus (2.3) ergibt sich $\mu(\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\,(H_i - G_i)) = 1$, woraus nach (2.6) folgt, daß die Reihe (2.7) fast überall nicht $|C, \alpha|$-summierbar ist.

Damit haben wir den Satz IV bewiesen.

§ 3. Über die Systeme vom Haarschen Typ

In diesem Paragraphen wird folgendes gezeigt: Ist die Reihe (1) für ein System vom H-Typ fast überall $|C, \alpha|$-summierbar mit einem $\alpha > 0$, so ist sie auch fast überall absolut konvergent. Wir können sogar mehr zeigen; es gilt nämlich der folgende

Satz V. *Damit die Reihe* (1) *für jedes System* $\{\varphi_n(x)\}$ *vom H-Typ im Intervall* (0, 1) *fast überall* $|C, \alpha|$*-summierbar sei, sind die Bedingungen*

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m\alpha} A_m < \infty \tag{3.1}$$

bzw.

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m < \infty \tag{3.2}$$

für $-1 < \alpha < 0$ *bzw. für* $\alpha \geqq 0$ *notwendig und hinreichend.*

Zum Beweis des Satzes benötigen wir den folgenden

Hilfssatz III. *Ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n$ $|C, \alpha|$*-summierbar* $(\alpha > -1)$, *so ist sie für jedes* $\beta > 0$ *auch* $|C, \alpha + \beta|$*-summierbar.*

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe E. Kogbetliantz [2], 237—239.)

Beweis des Satzes V. Zuerst werden wir die Hinlänglichkeit der Bedingungen (3. 1) und (3. 2) beweisen. Es sei $-1<\alpha\leqq 0$. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1|\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx\leqq$$

$$\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\sum_{l=0}^{m}\int_0^1\left|\sum_{\nu=2^l+1}^{\min(2^{l+1},n)}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\varphi_\nu(x)\right|dx+\right. \tag{3. 3}$$

$$\left.+\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{A_n^{(\alpha)}}|a_n|\int_0^1|\varphi_n(x)|\,dx\right).$$

Das zweite Glied ist kleiner als

$$O(1)\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m\alpha}A_m\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\left(\int_0^1|\varphi_n(x)|\,dx\right)^2\right\}^{1/2}=$$

$$=O(1)\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m\alpha}A_m\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}I_n\right\}^{1/2}=O(1)\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m\alpha}A_m<\infty,$$

wobei I_n $(2^m<n\leqq 2^{m+1})$ die Teilmenge von $(0,1)$ bezeichnet, auf welcher $\varphi_n(x)\neq 0$ ist. Ist $\alpha=0$, dann tritt nur dieses Glied auf. Damit ist die Hinlänglichkeit der Bedingung (3. 2) für $\alpha=0$ bewiesen. Durch Anwendung des Hilfssatzes III folgt hieraus die Hinlänglichkeit der Bedingung (3. 2) auch für $\alpha>0$.

Das erste Glied von (3. 3) ist kleiner als

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\sum_{l=0}^{m}\sum_{\nu=2^l+1}^{\min(2^{l+1},n)}|L_{n,\nu}^{(\alpha)}|\,|a_\nu|\int_0^1|\varphi_\nu(x)|\,dx=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}\sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}}|a_\nu|\int_0^1|\varphi_\nu(x)|\,dx\sum_{n=\max\{2^m+1,\nu\}}^{2^{m+1}}|L_{n,\nu}^{(\alpha)}|\leqq \tag{3. 4}$$

$$\leqq O(1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}A_l\left\{\sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}}\left(\int_0^1|\varphi_\nu(x)|\,dx\right)^2\right\}^{1/2}\sum_{n=\max\{2^m+1,\nu\}}^{2^{m+1}}|L_{n,\nu}^{(\alpha)}|.$$

Für $2^l < \nu \leqq 2^{l+1}$ $(l = 0, 1, \ldots, m-2)$ gibt nach (1.2) $(-1 < \alpha < 0)$

$$
(3.5)\qquad \begin{aligned}
\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} |L_{n,\nu}^{(\alpha)}| &= O(1) \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}\nu}{(n+1)^{\alpha+1}} = \\
&= O(1) 2^l \cdot 2^{-m(\alpha+1)} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} (n+1-\nu)^{\alpha-1} = O(1) 2^{l-m},
\end{aligned}
$$

für $2^{m-1} < \nu \leqq n$ ist

$$
(3.6)\qquad \sum_{n=\max\{2^m+1,\,\nu\}}^{2^{m+1}} |L_{n,\nu}^{(\alpha)}| = O(1) 2^{-m\alpha} \sum_{n=\max\{2^m+1,\,\nu\}}^{2^{m+1}} (n+1-\nu)^{\alpha-1} = O(1) 2^{-\alpha m}.
$$

Aus (3.4), (3.5) und (3.6) ergibt sich, daß das erste Glied von (3.3) kleiner ist als

$$
O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{m-2} 2^{l-m} A_l \left\{ \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} I_\nu \right\}^{1/2} + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-\alpha m} A_m \left\{ \sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} I_\nu \right\}^{1/2} \right) =
$$

$$
= O(1) \left(\sum_{l=0}^{\infty} A_l 2^l \sum_{m=l}^{\infty} 2^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-\alpha m} A_m \right) < \infty.
$$

Durch Addition dieser Abschätzungen ergibt sich die Hinlänglichkeit der Bedingung (3.1).

N o t w e n d i g k e i t. Es seien $\chi_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ die im Beweis des Satzes I definierten Funktionen. Das Funktionensystem $\{\chi_n(x)\}$ ist ein System vom H-Typ. Bei Benützung der Bezeichnungen des § 1 nehmen wir an, daß

$$
\sum_{n=0}^{\infty} |\overline{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \overline{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| < \infty
$$

für ein α $(-1 < \alpha < 0)$ im Intervall $(0, 1)$ fast überall gilt. Es sei $\varepsilon = 2^{-10} d_2^{-2}(\alpha) d_1^2(\alpha)$. Nach dem Egoroffschen Satz gibt es eine meßbare Menge $E (\subseteqq (0, 1))$ mit $\mu(E) \geqq 1 - \varepsilon$ und eine Konstante M derart, daß

$$
\sum_{n=0}^{\infty} |\overline{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \overline{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| < M \qquad (x \in E)
$$

ist, woraus folgt:

$$
(3.7)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \int_E |\overline{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \overline{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| \, dx \leqq M \mu(E).
$$

Es sei m beliebige natürliche Zahl und $2^m < n \leqq 2^{m+1}$. Es wird

$$R_l(x) = \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \qquad (l = 0, \ldots, m-1),$$

$$R_m(x) = \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x)$$

und

$$R_{m+1}(x) = \frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} a_{n+1} \chi_{n+1}(x)$$

gesetzt. Wir wenden den Hilfssatz I für die $R_l(x)$ mit $N = m+1$ und $k = 1$ an; die entsprechende Menge wird mit $E_1(n, m)$ bezeichnet. So ergibt sich auf Grund von (1.2):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_E |\bar{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \bar{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| \, dx =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \int_E \left| \sum_{\nu=0}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) + \frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} a_{n+1} \chi_{n+1}(x) \right| dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \int_{E_1(n,m) \cap E} \left| \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right| dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(\int_{E_1(n,m)} - \int_{E_1(n,m) - E_1(n,m) \cap E} \right) \left| \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right| dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(\int_{E_1(n,m)} \left| \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right| dx - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\varepsilon} \left\{ \int_0^1 \left| \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right|^2 dx \right\}^{1/2} \right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(2^{-2} \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \frac{a_\nu}{A_m} - \sqrt{\varepsilon}\, d_2(\alpha) 2^{|\alpha| m} A_m \right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=0}^{\infty} \left(2^{-3} d_1(\alpha) \sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{a_\nu^2}{A_m} \sum_{n=\nu}^{2^{m+1}} \frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}}{n^\alpha} - 2^{-5} d_1(\alpha) 2^{|\alpha| m} A_m \right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=0}^{\infty} (2^{-4} d_1(\alpha) 2^{|\alpha| m} A_m - 2^{-5} d_1(\alpha) 2^{|\alpha| m} A_m) \geqq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-5} d_1(\alpha) 2^{-\alpha m} A_m .$$

Nach (3.7) ergibt sich daraus die Notwendigkeit der Bedingung von (3.1).

Die Notwendigkeit der Bedingung (3.2) folgt für $\alpha > \frac{1}{2}$ aus dem Satz I, weil wir dort bewiesen haben: ist die Bedingung (2) (d. h. (3.2)) nicht erfüllt, so gibt es ein System vom H-Typ $\{\chi_n(x)\}$, für welche die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ nicht fast überall $|C, \alpha|$-summierbar mit $\alpha > \frac{1}{2}$ ist.

Daraus ergibt sich leicht die Notwendigkeit der Bedingung (3.2) auch für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$. Ist nämlich die Reihe (1) für alle Systeme vom H-Typ fast überall $|C, \alpha|$-summierbar mit $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$, so ist sie nach dem Hilfssatz III auch $|C, \alpha+\beta|$-summierbar mit $\alpha+\beta > \frac{1}{2}$, woraus $\sum_{m=0}^{\infty} A_m < \infty$ folgt, d. h. die Bedingung (3.2) ist auch für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$ notwendig.

Damit ist der Satz V in allen Teilen bewiesen.

§ 4. Bemerkung zu den notwendigen Bedingungen

In diesem Paragraphen wird bewiesen, daß die Bedingung (3) keine notwendige Bedingung der $|C, \alpha|$-Summierbarkeit mit $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$ ist. Es gilt nämlich der folgende

Satz VI. *Es sei $\{\lambda_m\}$ $(m = 0, 1, \ldots)$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge und α eine reelle Zahl mit $0 \leqq \alpha$. Dann gibt es eine nichtnegative Koeffizientenfolge $\{d_n\}$ derart, daß*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m D_m = \infty \qquad \left(D_m = \left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} d_n^2\right\}^{1/2}\right)$$

gilt, die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \varphi_n(x)$$

aber trotzdem für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall $|C, \alpha|$-summierbar ist.

Beweis des Satzes VI. Eine Indexfolge $(1 \leqq) n_0 < n_1 < \ldots < n_s < \ldots$ kann angegeben werden, derart, daß

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n_s}} < \infty$$

gilt. Dann definieren wir mittels des Zahlenfolge $\{\lambda_{n_s}\}$ die Koeffizientenfolge $\{d_\nu\}$ $(\nu=0,1,\ldots)$ folgenderweise:

$$d_\nu=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_{n_s}} & \text{für} \quad \nu=2^{n_s}+1,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Aus der Definition ist es klar, daß

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_m=\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu<\infty$$

und

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m D_m=\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{n_s} \frac{1}{\lambda_{n_s}}=\infty$$

erfüllt sind. Daraus folgt durch Anwendung von (1. 1) und (1. 2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left|\sum_{\nu=0}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} d_\nu \varphi_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} d_{n+1}\varphi_{n+1}(x)\right| dx \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} d_\nu \int_0^1 |\varphi_\nu(x)|\,dx+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{A_n^{(\alpha)}} \int_0^1 |\varphi_n(x)|\,dx \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} L_{n,\nu}^{(\alpha)}+O(1) \leqq O(1) \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu+O(1)<\infty$$

für jedes Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$. Aus dem Satz von B. LEVI ergibt sich dann, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \varphi_\nu(x)$$

für jedes Orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ im Intervall $(0, 1)$ fast überall $|C, \alpha|$-summierbar ist.

Damit haben wir den Satz VI. bewiesen.

B e m e r k u n g. Nach dem bekannten Satz von MENCHOFF und RADEMACHER ist die Bedingung $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n<\infty$ hinreichend dafür, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert. KACZMARZ und MENCHOFF haben ferner bewiesen, daß die Bedingung $\sum_{n=4}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2<\infty$ hinreichend dafür ist, daß die obige Reihe für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall $(C, 1)$-summierbar sei. Sie haben auch gezeigt, daß diese Bedingungen im allgemeinen nicht geschwächt werden kann.

Wir beweisen nun, daß im allgemeinen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 l_n < \infty$ mit keiner positiven, monoton nichtabnehmenden, ins Unendliche strebenen Zahlenfolge $\{l_n\}$ für die (C, α)-Summierbarkeit jeder Reihe (1) mit beliebigem $\alpha \geqq 0$ notwendig sein kann. Es gilt nämlich die folgende Behauptung:

Es sei $\{l_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge. Dann gibt es eine nichtnegative Koeffizientenfolge $\{a_n^*\}$ derart, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{*2} l_n = \infty$$

gilt, die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \varphi_n(x)$$

aber trotzdem für jedes orthonormierte Funktionensystem fast überall absolut konvergent ist.

Beweis. Es sei $\{l_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge. Dann kann eine Indexfolge $k_0 < k_1 < \ldots < k_s < \ldots$ angegeben werden derart, daß

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{l_{k_s}}} < \infty$$

gilt. Wir definieren mittels der Zahlenfolge $\{l_{k_s}\}$ die Koeffizientenfolge $\{a_n^*\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ folgenderweise:

$$a_n^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{l_{k_s}}} & \text{für} \quad n = k_s, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus der Definition ist es klar, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* < \infty \tag{4.1}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{*2} l_n = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{l_{k_s}} l_{k_s} = \infty$$

ist. Daraus folgt nach (4.1) mit Anwendung der Schwarzschen Ungleichung, daß für jedes Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \int_0^1 |\varphi_n(x)|\,dx \leqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \left(\int_0^1 \varphi_n^2(x)\,dx\right)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* < \infty$$

ist. Somit ergibt sich durch Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* |\varphi_n(x)|$$

im Intervall (0, 1) fast überall konvergiert, wie behauptet.

Schriftenverzeichnis

[1] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. I (New York, 1950).

[2] E. Kogbetliantz, Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques, *Bulletin des Sciences Math.*, **49** (1925), 234—256.

[3] L. Leindler, Über die orthogonalen Polynomsysteme, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 19—46.

[4] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. IX (Absolute Summation), *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 292—299.

[5] A. Zygmund, *Trigonometric series* (Cambridge, 1959).

(Eingegangen am 1. Juli 1960)

Sur certains théorèmes d'interpolation

Par C. FOIAŞ à Bucarest et J. L. LIONS à Nancy

Introduction

Soient A_0 et A_1 (resp. B_0 et B_1) deux espaces normés contenus algébriquement et topologiquement dans un espace vectoriel topologique localement convexe $\mathfrak{E}$ (resp. $\mathfrak{F}$). On suppose, pour simplifier, que $A_0 \cap A_1$ est dense dans A_0 et dans A_1 (resp. que $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et B_1). Soit X (resp. Y) un troisième espace de Banach également contenu dans $\mathfrak{E}$ (resp. $\mathfrak{F}$) tel que $A_0 \cap A_1 \cap X$ (resp. $B_0 \cap B_1 \cap Y$) soit dense dans A_0, A_1 et X (resp. dans B_0, B_1 et Y). On dit que $\{X, Y\}$ est *un couple d'espaces d'interpolation pour* $\{A_i, B_i\}$ $(i=0,1)$ si toute application linéaire de $A_0 \cap A_1$ dans $B_0 \cap B_1$, continue de A_i dans B_i $(i=0,1)$, est automatiquement continue de X dans Y (de façon plus précise: peut se prolonger en une application linéaire continue de X dans Y). Dans le cas où $A_i = B_i$ $(i=0,1)$ et $X=Y$ on dit que X *est un espace d'interpolation pour* A_i $(i=0,1)$.

Par exemple, soit T un espace localement compact et soit $\mu \geqq 0$ une mesure sur T, $A_0 = B_0 = L^p_\mu(T)$ (espace des fonctions complexes de puissance p-ième μ-intégrable) et $A_1 = B_1 = L^q_\mu(T)$, avec $1 \leqq p < q < \infty$; alors d'après le théorème de M. RIESZ [12], $L^r_\mu(T)\,(p<r<q)$ est un espace d'interpolation pour $L^p_\mu(T)$ et $L^q_\mu(T)$.

Autre exemple: Soient M_0 et M_1 deux fonctions positives localement μ-intégrables sur T, soit $M_i \cdot \mu$ la mesure $g \to \int g M_i d\mu$ et $A_i = B_i = L^p_{M_i \cdot \mu}(T)$ $(i=1,2)$; dans ces conditions, d'après [13] et [14], $L^p_{M_0^\theta M_1^{1-\theta} \cdot \mu}(T)$ $(0<\theta<1)$ est un espace d'interpolation pour $L^p_{M_i \cdot \mu}(T)$ $(i=0,1)$.

On peut poser le problème de trouver "tous" les espaces d'interpolation, notamment pour les espaces $L^p_{M_i \cdot \mu}(T)$ $(i=1,2)$.

On va, dans une certaine mesure, répondre à cette question. On donnera un résultat, contenant à la fois un théorème d'interpolation de E. M. STEIN (cf. [13]), un théorème de E. HEINZ [6] (pour le cas des fonctions non bornées) et un théorème d'interpolation donné par l'un de nous dans le cas des espaces de Hilbert séparables [9] (résultat retrouvé indépendamment par S. G. KREIN [8]; les méthodes de [9], [8] et la présente sont toutes différentes; pour le cas hilbertien, on consultera également N. ARONSZAJN [1]).

Dans le n° 1 nous introduisons la notion de mesure spectrale de type p.

Dans le n° 2 nous donnons le théorème général, et dans le n° 3 des applications et des variantes de ce théorème, ainsi qu'une liste de problèmes non résolus.

1. Mesures spectrales de type p

Soit $\mathfrak{B}$ un clan borélien de sous-ensembles d'un ensemble T, $\mathfrak{X}$ un espace de Banach (complexe), $\mathfrak{X}'$ son dual, $\langle x, x'\rangle$ la dualité entre $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$, $|x|$ et $|x'|$ les normes sur $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$, enfin $E=\{E(\sigma)\}_{\sigma\in\mathfrak{B}}$ une mesure spectrale[1]) dans $\mathfrak{X}$. Par définition, E est de type p $(1<p<\infty)$ si pour toute partition finie $\{\sigma_i\}\subset\mathfrak{B}$ de T et pour tout $x\in\mathfrak{X}$ on a

$$\sum_i |E(\sigma_i)x|^p = |x|^p. \tag{1.1}$$

Nous allons donner quelques faits, concernant les mesures spectrales de type p, qui sont analogues à quelques-uns bien connus dans le cas des mesures spectrales dans l'espace de Hilbert $(p=2)$. Comme leurs démonstrations sont des simples transpositions au cas général des démonstrations usuelles du cas particulier mentionné, nous les omettons.

Dans ce qui suit, E sera toujours supposé de type p $(1<p<\infty)$. Alors $E'=\{E(\sigma)'\}_{\sigma\in\mathfrak{B}}$ est de type p', où $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ et pour tout $x\in\mathfrak{X}$, $\sigma\to|E(\sigma)x|^p$ est une mesure (bornée $\geqq 0$) sur T. Soit $M(t)$ $(t\in T)$ une fonction numérique $\mathfrak{B}$-mesurable. Il existe un opérateur U_M (dans $\mathfrak{X}$) linéaire fermé à domaine $D(U_M)$ dense, tel que

$$D(U_M)=\{x\colon\ x\in\mathfrak{X},\ M\in L^p_{|E(\cdot)x|^p}(T)\} \tag{1.2}$$

$$\langle U_M x, x'\rangle = \int_T M(t)\, d\langle E(t)x, x'\rangle, \qquad x\in D(U_M), \qquad x'\in\mathfrak{X}', \tag{1.3}$$

$$|U_M x|^p = \int_T |M(t)|^p d|E(t)x|^p, \qquad x\in D(U_M). \tag{1.4}$$

---

[1]) C'est-à-dire une application $\sigma\to E(\sigma)$ de $\mathfrak{B}$ dans l'algèbre $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ des opérateurs linéaires bornés de $\mathfrak{X}$, telle que (i) $E(\sigma_1\cap\sigma_2)=E(\sigma_1)E(\sigma_2)$, $\sigma_1, \sigma_2\in\mathfrak{B}$, (ii) $E(\emptyset)=0$, $E(T)=I$, (iii) $\sup\limits_\sigma|E(\sigma)|<\infty$ et (iv) $E(\sigma)x$ est dénombrablement additive (dans $\mathfrak{X}$) quel que soit $x\in\mathfrak{X}$. En ce qui concerne ces notions voir par exemple l'article d'exposition de DUNFORD [4].

De plus, on a

(1.5) $$|U_M| = \text{vrai max } |M(t)|$$

où le vrai maximum est pris par rapport à toutes les mesures $|E(\cdot)x|^p$, $x \in \mathfrak{X}$. On peut vérifier aussi que l'application $M \to U_M$ correspond au calcul fonctionnel de BADE [2][2]) qui généralise les propriétés du calcul fonctionnel de l'espace de Hilbert (aujourd'hui classique) de v. NEUMANN, comme par exemple $U_1 = I$, $U_0 = 0$ et

(1.6) $$U_{M_1} U_{M_2} = U_{M_1 M_2} \supseteq U_{M_2} U_{M_1}$$

(1.7) $$U_{M_1+M_2} = U_{M_1} + U_{M_2}$$

dès que la fonction M_2 est essentiellement[3]) bornée.

Pour $M(t)$ $\mathfrak{B}$-mesurable et essentiellement positive, posons $\mathfrak{D}_M^E = D\left(U_{M^{\frac{1}{p}}}\right)$ muni par la norme $|x|_M = \left|U_{M^{\frac{1}{p}}} x\right|$ et soit $\hat{\mathfrak{D}}_M^E$ l'espace de Banach complété pour cette norme. Il est utile de remarquer ici que si $M_0, M_1, \ldots, M_n$ sont telles fonctions, alors $\mathfrak{D}_{M_0}^E \cap \mathfrak{D}_{M_1}^E \cap \ldots \cap \mathfrak{D}_{M_n}^E$ est dense dans $\mathfrak{X}$ et dans chaque $\hat{\mathfrak{D}}_{M}^E$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Exemple. Soit T un espace localement compact, $\mu \geqq 0$ une mesure sur T, $\mathfrak{B}_\mu$ le clan borélien des ensembles μ-mesurables de T, et soit $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_\mu$ un autre can borélien.

Posons $\mathfrak{X} = L_\mu^p(T)$ $(1 < p < \infty)$ et $E(\sigma)x = \chi_\sigma x$ $(x \in \mathfrak{X}, \sigma \in \mathfrak{B}$, χ_σ fonction caractéristique de $\sigma)$. On vérifie sans peine que $E = \{E(\sigma)\}_{\sigma \in \mathfrak{B}}$ est une mesure spectrale de type p. De plus, si $M(t)$ est une fonction $\mathfrak{B}$-mesurable localement μ-intégrable et μ-essentiellement positive, alors

(1.8) $$\hat{\mathfrak{D}}_M^E = L_{M \cdot \mu}^p(T).$$

2. Théorème d'interpolation

Soit $F = \{F(\sigma)\}_{\sigma \in \mathfrak{B}}$ une (autre) mesure spectrale de type p dans un espace de Banach $\mathfrak{Y}$[4]). Soient M_0 et M_1 deux fonctions $\mathfrak{B}$-mesurables essentiellement[5]) positives.

---

[2]) Voir aussi [4].

[3]) Le terme "essentiellement" se réfère toujours à toutes les mesures $|E(\cdot)x|^p, x \in \mathfrak{X}$.

[4]) Dual $\mathfrak{Y}'$, dualité $\langle y, y' \rangle$, normes $|y|$, $|y'|$.

[5]) Par rapport à E et à F [voir la remarque[3])].

On appelle *fonction d'interpolation d'ordre p,* une fonction $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)>0$ définie et continue sur $(0, \infty)\times(0, \infty)$[6]) telle que $\{\hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(M_0, M_1)}, \hat{\mathfrak{D}}^F_{\Phi(M_0, M_1)}\}$ soit un couple d'espaces d'interpolation pour $\{\mathfrak{D}^E_{M_i}, \mathfrak{D}^F_{M_i}\}$ $(i=0, 1)$, quels que soient M_0, M_1, E et F.

Notre problème est alors la recherche des fonctions d'interpolation d'ordre p. Pour cela, introduisons les classes $\mathfrak{J}_\alpha$ $(0<\alpha<\infty)$ des fonctions positives $\varphi(\lambda)$ $(0<\lambda<\infty)$ telles que

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)^\alpha}=\int_0^\infty \frac{d\nu(s)}{(1+\lambda s)^\alpha}, \tag{2.1}$$

où ν est une mesure $\geqq 0$ sur $(0, \infty)$ dépendant de φ, telle que

$$\int_0^\infty \frac{d\nu(s)}{(1+s)^\alpha}<\infty. \tag{2.1'}$$

Théorème. *Toute fonction $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ homogène de degré 1, telle que $\Phi(1, \lambda)\in\mathfrak{J}_{\frac{1}{p-1}}$, est une fonction d'interpolation d'ordre p.*

Démonstration. 1) Soit $W^E_\nu(M_0, M_1)$ l'espace des fonctions $s\to u(s)$ définies sur $(0, \infty)$ à valeurs dans $\mathfrak{D}^E_{M_0}\cap\mathfrak{D}^E_{M_1}$ telles que $u(s)\in L^p_\nu(0, \infty; \hat{\mathfrak{D}}^E_{M_0})$ et $s^{\frac{1}{p}}u(s)\in L^p_\nu(0, \infty; \hat{\mathfrak{D}}^E_{M_1})$, muni par la norme

$$|u|_W=\left[\int_0^\infty (|u(s)|_{M_0})^p d\nu(s)+\int_0^\infty s(|u(s)|_{M_1})^p d\nu(s)\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

Il est utile de noter qu'en vertu de (1.4) et des définitions des espaces $\mathfrak{D}^E_M$, on a $u(s)\in\mathfrak{D}^E_{M_0+sM_1}$ $(0<s<\infty, \nu\text{-pp})$ et

$$|u|_W=\left[\int_0^\infty (|u(s)|_{M_0+sM_1})^p d\nu(s)\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3}$$

Inversement, si une fonction $s\to u(s)\in\mathfrak{X}$ vérifie ces dernières relations avec $|u|_W<\infty$ dans (2.3), alors $u\in W^E_\nu(M_0, M_1)$. Soit $\overline{W^E_\nu}(M_0, M_1)$ l'espace de Banach complété de $W^E_\nu(M_0, M_1)$ et soit π une application linéaire de $\mathfrak{D}^E_{M_0}\cap\mathfrak{D}^E_{M_1}$ dans $\mathfrak{D}^F_{M_0}\cap\mathfrak{D}^F_{M_1}$ appartenant à $\mathfrak{L}(\hat{\mathfrak{D}}^E_{M_i}; \hat{\mathfrak{D}}^F_{M_i})$[7]) $(i=0, 1)$. Evidemment

---

[6]) Par conséquent, $\Phi(M_0, M_1)$ est aussi $\mathfrak{B}$-mesurable et essentiellement positive.

[7]) $\mathfrak{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ désigne l'espace des applications linéaires et continues de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$, etc. Comme $\mathfrak{D}^E_{M_0}\cap\mathfrak{D}^E_{M_1}$ est dense dans $\hat{\mathfrak{D}}^E_{M_j}$ $(j=1, 2)$, π détermine de façon unique (par continuité) un élément de $\mathfrak{L}(\hat{\mathfrak{D}}^E_{M_j}, \hat{\mathfrak{D}}^F_{M_j})$.

[voir (2.2)]

$$\overline{\pi} \in \mathfrak{L}(\overline{W}_\nu^E(M_0, M_1); \overline{W}_\nu^F(M_0, M_1)) \tag{2.4}$$

où $\overline{\pi}$ est définie sur $W_\nu^E(M_0, M_1)$ par $u(s) \to \pi u(s)$.

2) Pour $u \in C_0(0, \infty; \mathfrak{D}_{M_0}^E \cap \mathfrak{D}_{M_1}^E)$ [espace des fonctions continues à support compact dans $(0, \infty)$ et à valeurs dans $\mathfrak{D}_{M_0}^E \cap \mathfrak{D}_{M_1}^E$ muni par $|x|_{M_0} + |x|_{M_1}$, posons

$$Ju = \int_0^\infty u(s)\,d\nu(s). \tag{2.5}$$

Soit

$$\sigma_n(k_0, k_1) = \left\{ t\colon \frac{k_i}{2^n} \leqq M_i(t) < \frac{k_i+1}{2^n}, \quad i = 0, 1 \right\} \tag{2.6}$$

où $1 \leqq n, k_i < \infty$ sont des entiers et soit $\Phi_n(t)$ définie par $\Phi\left(\frac{k_0}{2^n}, \frac{k_1}{2^n}\right)$ si $t \in \sigma_n(k_0, k_1)$, $k_i = 1, 2, \ldots$. Alors $\{\Phi_n(t)\}$ est une suite non-décroissante tendant vers $\Phi(M_0(t), M_1(t))$. En utilisant successivement ce fait, les propriétés (1.6), (1.5) du calcul fonctionnel et les relations (2.1), (1.1), (2.3), on obtient:

$$(|Ju|_{\Phi(M_0, M_1)})^p = \int_T \Phi(M_0(t), M_1(t))\,d|E(t)Ju|^p =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_T \Phi_n(t)\,d|E(t)Ju|^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{k_0, k_1=1}^\infty \Phi\left(\frac{k_0}{2^n}, \frac{k_1}{2^n}\right) |E(\sigma_n(k_0, k_1))Ju|^p =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k_0, k_1=1}^\infty \Phi\left(\frac{k_0}{2^n}, \frac{k_1}{2^n}\right) \left| \int_0^\infty U_{\chi_{\sigma_n(k_0,k_1)}(M_0+sM_1)^{-\frac{1}{p}}} E(\sigma_n(k_0, k_1))\, U_{(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}} u(s)\,d\nu(s) \right|^p \leqq$$

$$\leqq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k_0, k_1=1}^\infty \Phi\left(\frac{k_0}{2^n}, \frac{k_1}{2^n}\right) \left[\int_0^\infty \operatorname*{vrai\,max}_{\sigma_n(k_0,k_1)} \frac{1}{[M_0(t) + sM_1(t)]^{\frac{1}{p-1}}}\,d\nu(s) \right]^{\frac{p}{p'}} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty |E(\sigma_n(k_0, k_1))\, U_{(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}} u(s)|^p\,d\nu(s) \leqq$$

$$\leqq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k_0, k_1=1}^\infty \int_0^\infty |E(\sigma_n(k_0, k_1))\, U_{(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}} u(s)|^p\,d\nu(s) =$$

$$= \int_0^\infty |U_{(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}} u(s)|^p\,d\nu(s) = (|u|_W)^p,$$

d'où

$$|Ju|_{\Phi(M_0,M_1)} \leqq |u|_W. \tag{2.7}$$

En vertu de cette relation (qui montre que $Ju \in \mathfrak{D}^E_{\Phi(M_0,M_1)}$), (2.5) se prolonge par continuité en une contraction (linéaire) de $\overline{W}^E_\nu(M_0, M_1)$ dans $\hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(M_0,M_1)}$ [8]).

3) Soit

$$K_s(t) = [M_0(t) + sM_1(t)]^{-\frac{1}{p-1}} \Phi(M_0(t), M_1(t))^{\frac{1}{p-1}}.$$

Alors $K_s(t)$ (s fixé) est une fonction essentiellement bornée sur T. En vertu de (1.7), $U_{K_s} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$. De plus de

$$|U_{K_{s'}}x - U_{K_{s''}}x|^p = \int_T |K_{s'}(t) - K_{s''}(t)|^p d|E(t)x|^p$$

il résulte que $s \to U_{K_s}$ est une fonction continue dans la topologie de la convergence simple. Posons K^E: $x \to U_{K_s}x$ pour $x \in \mathfrak{D}^E_{\Phi(M_0,M_1)}$; alors

$$(|K^E x|_W)^p = \int_0^\infty |U_{(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}} U_{K_s}x|^p d\nu(s) =$$

$$= \int_0^\infty \int_T [M_0(t) + sM_1(t)]^{-\frac{1}{p-1}} \Phi(M_0(t), M_1(t))^{\frac{p}{p-1}} d|E(t)x|^p d\nu(s) =$$

$$= \int_T \Phi(M_0(t), M_1(t))^{\frac{p}{p-1}} \left(\int_0^\infty \frac{d\nu(s)}{[M_0(t) + sM_1(t)]^{\frac{1}{p-1}}} \right) d|E(t)x|^p =$$

$$= \int_T \Phi(M_0(t), M_1(t)) d|E(t)x|^p = (|x|_{\Phi(M_0,M_1)})^p$$

et par suite

$$|K^E x|_W = |x|_{\Phi(M_0,M_1)}, \tag{2.8}$$

ce qui permet de prolonger K^E en une isométrie (linéaire) de $\hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(M_0,M_1)}$ dans $\overline{W}^E_\nu(M_0, M_1)$, car en vertu de la continuité simple de U_{K_s}, de (2.8) il résulte que $K^E x \in W^E_\nu(M_0, M_1)$ dès que $x \in \mathfrak{D}^E_{\Phi(M_0,M_1)}$.

Il est évident que $u_\varepsilon(s) = \chi_{\left[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right]} K^E x$ vérifie les conditions de la remarque [8]) si $x \in \mathfrak{D}^E_{\Phi(M_0,M_1)} \cap \mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1}$ et que dans ce cas $u_\varepsilon(s) \to K^E x$ (dans

[8]) Remarquons que si $u(s)$ est une fonction continue dans $\left[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right]$ ($\varepsilon > 0$) à valeurs dans $\mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1}$, nulle en dehors de cet intervalle, alors Ju est donné aussi par l'intégrale $\int_0^\infty u(s) d\nu(s)$.

$\overline{W}^E_\nu(M_0, M_1))$ pour $\varepsilon \to 0$. Par conséquent, dans $\hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(M_0, M_1)}$ nous avons

$$JK^E x = \lim_{\varepsilon\to 0} Ju_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} U_{K_s} x d\nu(s) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} U_{\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} K_s d\nu(s)} x = U_{\int_0^\infty K_s d\nu(s)} x = U_1 x = x$$

d'où, par continuité, pour tout $x \in \hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(M_0, M_1)}$

(2. 9) $$JK^E x = x.$$

4) On va maintenant démontrer le théorème par une méthode indiquée dans [10].

Soit $x \in \mathfrak{D}^E_{\Phi(M_0, M_1)} \cap \mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1}$. Alors $K^E x$ est une fonction continue à valeurs dans $\mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1}$. Soit $u_\varepsilon = \chi_{\left[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right]} K^E x$. Alors $Ju_\varepsilon \in \mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1}$ et [voir la remarque[8])] nous avons $J\overline{\pi} u_\varepsilon = \pi J u_\varepsilon$, d'où, en utilisant (2. 9), on déduit par continuité

(2. 10) $$\pi x = J\overline{\pi} K^E x, \quad x \in \mathfrak{D}^E_{\Phi(M_0, M_1)} \cap \mathfrak{D}^E_{M_0} \cap \mathfrak{D}^E_{M_1},$$

où cette dernière fois $\overline{\pi}$ est considéré dans $\mathfrak{L}(\overline{W}^E_\nu(M_0, M_1); \overline{W}^F_\nu(M_0, M_1))$, ce qui achève la démonstration du théorème.

3. Remarques diverses

3. 1. Désignons par $|\pi|_M$ la norme de π dans $\mathfrak{L}(\hat{\mathfrak{D}}^E_M; \hat{\mathfrak{D}}^F_M)$. Alors, en vertu du fait que dans $\mathfrak{L}(\overline{W}^E_\nu(M_0, M_1); \overline{W}^F_\nu(M_0, M_1))$ la norme de $\overline{\pi}$ est $\leqq \sup(|\pi|_{M_0}, |\pi|_{M_1})$, on déduit de (2. 10) l'inégalité suivante

(3. 1) $$|\pi|_{\Phi(M_0, M_1)} \leqq \sup(|\pi|_{M_0}, |\pi|_{M_1}).$$

3. 2. Soit $\nu \geqq 0$ une (autre) mesure sur T et soit $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\mu \cap \mathfrak{B}_\nu$ (voir l'exemple du n°1). Soit $M_i(t)$ $(i = 0, 1)$ une fonction mesurable, essentiellement positive et localement intégrable par rapport aux mesures μ et ν. Alors en vertu de (1. 8) on déduit $\mathfrak{D}^E_{M_i} = L^p_\mu(T) \cap L^p_{M_i \cdot \mu}(T)$ et par suite d'après notre théorème on a:

Pour toute fonction $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ homogène de degré 1 telle que $\Phi(1, \lambda) \in \mathfrak{F}_{\frac{1}{p-1}}$,

$$\{L^p_{\Phi(M_0, M_1)\cdot\mu}(T), L^p_{\Phi(M_0, M_1)\cdot\nu}(T)\}^{9)}$$

[9]) On a $\Phi(\lambda_0, \lambda_1) \leqq c(\lambda_0 + \lambda_1)$ où c est une constante; par conséquent $\Phi(M_0, M_1)$ est localement μ- et ν- intégrable donc $\hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(M_0, M_1)}$ et $\hat{\mathfrak{D}}^F_{\Phi(M_0, M_1)}$ s'identifient à $L^p_{\Phi(M_0, M_1)\cdot\mu}(T)$, resp. $L^p_{\Phi(M_0, M_1)\cdot\nu}(T)$.

est un couple d'espaces d'interpolation pour $\{L^p_\mu(T)\cap L^p_{M_i\cdot\mu}(T),\ L^p_\nu(T)\cap L^p_{M_i\cdot\nu}(T)\}$ $(i=0,1)$.

Comme $\Phi(\lambda_0,\lambda_1)=\lambda_0^{1-\theta}\lambda_1^\theta$ $(0<\theta<1)$ est une pareille fonction $\left[\text{en fait } d\nu(s)=cs^{\frac{\theta}{p-1}-1}ds,\ \text{où } \frac{1}{c}=\int_0^\infty (1+s)^{-\frac{1}{p-1}}s^{\frac{\theta}{p-1}-1}ds\right]$, le résultat ci-dessus généralise certains théorèmes d'interpolation de STEIN [13] et STEIN—WEISS [14].

3.3. Notons d'abord ceci: si $\varphi\in\mathfrak{I}_\alpha$, alors

$$0\leqq\frac{\lambda\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}\leqq 1.$$

En effet on déduit de (2. 1) que

$$\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)^{1+\alpha}}=\int_0^\infty\frac{s}{(1+s\lambda)^{\alpha+1}}d\nu(s)$$

d'où

$$\frac{\lambda\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}=\varphi(\lambda)^\alpha\int_0^\infty\frac{\lambda s}{1+\lambda s}\cdot\frac{1}{(1+\lambda s)^\alpha}d\nu(s)\leqq 1.$$

Il résulte de là que pour une fonction $\Phi(\lambda_0,\lambda_1)$ homogène de degré 1 telle que $\Phi(1,\lambda)\in\mathfrak{I}_\alpha$ on a

$$0\leqq\lambda_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_0}\right)\Phi^{-1}\leqq 1,\quad 0\leqq\lambda_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1}\right)\Phi^{-1}\leqq 1$$

car $\Phi(\lambda_0,\lambda_1)=\lambda_0\Phi\left(1,\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)$.

Ceci posé, considérons sur un ouvert Ω de R^n, deux fonctions M_0 et $M_1>0$, localement sommables avec $(D_iM_j)M_j^{-1}\in L^\infty(\Omega)$, où $D_i=\partial/\partial x_i$ $(i=1,2,\dots,n;\ j=1,2)$, les dérivées étant prises au sens des distributions sur Ω. On désigne par $H^{1,p}_{M_j}(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions u telles que $M_j^{\frac{1}{p}}u$, $D_i(M_j^{\frac{1}{p}}u)$ $(i=1,2,\dots,n)$ soient dans $L^p(\Omega)$; il est équivalent de supposer que $M_j^{\frac{1}{p}}u$ et $M_j^{\frac{1}{p}}D_iu\in L^p(\Omega)$; on munit cet espace de la norme

$$\|u\|_{H^{1,p}_{M_j}(\Omega)}=\left[\int_\Omega M_j\left(|u|^p+\sum_{i=1}^n|D_iu|^p\right)dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

qui le rend un espace de Banach.

La fonction $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ étant définie comme ci-dessus, la fonction $x \to \Phi\cdot(M_0(x), M_1(x))$, que nous désignerons pour un instant par Φ, est localement sommable dans Ω, et

$$(D_i \Phi)\Phi^{-1} = (M_0^{-1} D_i M_0) M_0 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_0} \Phi(M_0, M_1)\right) \Phi^{-1} +$$

$$+ (M_1^{-1} D_i M_1) M_1 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \Phi(M_0, M_1)\right) \Phi^{-1} \in L^\infty(\Omega).$$

On définit donc $H^{1,p}_{\Phi(M_0, M_1)}(\Omega)$ comme on a défini $H^{1,p}_{M_j}(\Omega)$.

On peut maintenant énoncer le résultat suivant:

Les fonctions M_j et $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ étant données comme ci-dessus, avec $\alpha = \dfrac{1}{p-1}$, et π étant donnée, linéaire de $H^{1,p}_{M_0}(\Phi) \cap H^{1,p}_{M_1}(\Omega)$ dans $L^p_{M_0}(\Omega) \cap L^p_{M_1}(\Omega)$, avec

$$\|\pi f\|_{L^p_{M_j}(\Omega)} \leqq \omega_j \|f\|_{H^{1,p}_{M_j}(\Omega)} \qquad (j = 0, 1),$$

on a

$$\|\pi f\|_{L^p_{\Phi(M_0, M_1)}(\Omega)} \leqq \omega \|f\|_{H^{1,p}_{\Phi(M_0, M_1)}(\Omega)},$$

où ω est une constante dépendant de ω_0, ω_1 et des maxima essentiels de $M_j^{-1}(D_i M_j)$ $(j = 0, 1; i = 1, 2, \ldots, n)$.

En effet, soit f donnée dans $H^{1,p}_{M_0}(\Omega) \cap H^{1,p}_{M_1}(\Omega)$, et soit

$$Kf(x, s) = u(x, s) = f(x)[M_0(x) + s M_1(x)]^{-\frac{1}{p-1}} \Phi(M_0(x), M_0(x))^{\frac{1}{p-1}}.$$

D'après la démonstration du théorème, tout revient à vérifier que u est dans l'espace W^1 des fonctions telle que

$$(M_0 + s M_1)^{\frac{1}{p}} u \in L^p_\nu(0, \infty; H^{1,p}(\Omega)),$$

où $H^{1,p}(\Omega)$ est défini comme $H^{1,p}_M(\Omega)$, avec $M = 1$, et que

$$\|Kf\|_{W^1} \leqq c_1 \|f\|_{H^{1,p}_{\Phi(M_0, M_1)}(\Omega)}.$$

Il faut donc vérifier que $v_i = D_i((M_0 + s M_1)^{\frac{1}{p}} u)$ est dans $L^p_\nu(0, \infty; L^p(\Omega))$, de norme bornée dans cet espace par $c_2 \|f\|_{H^{1,p}_{\Phi(M_0, M_1)}(\Omega)}$. Or v_i est somme de la fonction

$$\frac{1}{p}\left(\frac{D_i M_0 + s D_i M_1}{M_0 + s M_1}\right)(M_0 + s M_1)^{\frac{1}{p}} u$$

qui est majorée en module par $(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}|u|$ (d'où le résultat pour cette fonction d'après la démonstration du théorème) et de la fonction $(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}D_iu$.

Si donc W désigne l'espace des fonctions v telles que

$$(M_0+sM_1)^{\frac{1}{p}}v\in L^p_\nu(0,\infty;L^p(\Omega)),$$

il faut vérifier que $D_iu\in W$ et que sa norme dans W est majorée par $c_3\|f\|_{H^{1,p}_{\Phi(M_0,M_1)}(\Omega)}$. Or D_iu est somme de quatre fonctions:

(i) $$(D_if)(M_0+sM_1)^{-\frac{1}{p-1}}\Phi(M_0,M_1)^{\frac{1}{p-1}}$$

qui a la propriété voulue, d'après la démonstration du théorème;

(ii) $$\left(-\frac{1}{p-1}\right)\frac{D_iM_0+sD_iM_1}{M_0+sM_1}(M_0+sM_1)^{-\frac{1}{p-1}}f\Phi(M_0,M_1)^{\frac{1}{p-1}}$$

ce qui se ramène au (i), puisque $(D_iM_0+sD_iM_1)(M_0+sM_1)^{-1}$ est dans $L^\infty(\Omega)$;

(iii) $$\frac{1}{p-1}\left(M_0\frac{\partial\Phi(M_0,M_1)}{\partial\lambda_0}\Phi^{-1}\right)(M_0+sM_1)^{-\frac{1}{p-1}}f\Phi(M_0,M_1)^{\frac{1}{p-1}};$$

(iv) $$\frac{1}{p-1}\left(M_1\frac{\partial\Phi(M_0,M_1)}{\partial\lambda_1}\Phi^{-1}\right)(M_0+sM_1)^{-\frac{1}{p-1}}f\Phi(M_0,M_1)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Or les fonctions (iii) et (iv) se ramènent à (i) en utilisant les remarques du début relatives à $\lambda_j\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_j}\Phi^{-1}$ $(j=0,1)$. D'où le résultat.

3.4. Supposons que $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ soient des espaces de Hilbert et soient A_0, A_1 (resp. B_0, B_1) deux opérateurs autoadjoints >0 dans $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$), permutables entre eux. Soit E (resp. F) la mesure spectrale simultanée de A_0 et A_1 (resp. B_0 et B_1). Evidemment E (resp. F) est de type 2 et pour toute fonction continue $\Phi(\lambda_0,\lambda_1)>0$ $(0<\lambda_0,\lambda_1<\infty)$ on a $\hat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(\lambda_0,\lambda_1)}=$ $=\mathfrak{D}^E_{\Phi(\lambda_0,\lambda_1)}=\mathfrak{D}_{\Phi(A_0,A_1)^{\frac{1}{2}}}$ [resp. $\hat{\mathfrak{D}}^F_{\Phi(\lambda_0,\lambda_1)}=\mathfrak{D}^F_{\Phi(\lambda_0,\lambda_1)}=\mathfrak{D}_{\Phi(B_0,B_1)^{\frac{1}{2}}}$]. En particulier on a $\hat{\mathfrak{D}}^E_{\lambda_j}=\mathfrak{D}_{A_j^{\frac{1}{2}}}$ (resp. $\hat{\mathfrak{D}}^F_{\lambda_j}=\mathfrak{D}_{B_j^{\frac{1}{2}}}$) $(j=0,1)$. Par conséquent on a le corollaire suivant:

Pour toute fonction $\Phi(\lambda_0,\lambda_1)$ homogène de degré 1 telle que $\Phi(1,\lambda)\in\mathfrak{I}_1$, $\{\mathfrak{D}_{\Phi(A_0,A_1)^{\frac{1}{2}}},\mathfrak{D}_{\Phi(B_0,B_1)^{\frac{1}{2}}}\}$ est un couple d'espaces d'interpolation pour $\{\mathfrak{D}_{A_i^{\frac{1}{2}}},\mathfrak{D}_{B_i^{\frac{1}{2}}}\}$ $(i=0,1)$.

Dans le cas où $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont séparables et $\Phi(\lambda_0,\lambda_1)=\lambda_0^{1-\theta}\lambda_1^{\theta}$ $(0<\theta<1)$, ce résultat est donné dans [10].

3. 5. Appliquons le résultat précédent au cas suivant: $A_0 = B_0 = I$ (opérateur identique), $A_1 = A$, $B_1 = B$ et $\pi = I$. Alors en tenant aussi compte de (3. 1), on obtient le fait suivant:

Si $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}} \subseteq \mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}$ *et* $|B^{\frac{1}{2}}x| \leqq |A^{\frac{1}{2}}x|$ *pour tout* $x \in \mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$, *alors* $\mathfrak{D}_{\varphi(A)^{\frac{1}{2}}} \subseteq \mathfrak{D}_{\varphi(B)^{\frac{1}{2}}}$ *et* $|\varphi(B)^{\frac{1}{2}}x| \leqq |\varphi(A)^{\frac{1}{2}}x|$ *pour tout* $x \in \mathfrak{D}_{\varphi(A)^{\frac{1}{2}}}$, *quelle que soit* $\varphi \in \mathfrak{F}_1$.

Ceci correspond à un théorème de HEINZ [6] sur les fonctions „monotones" d'opérateurs autoadjoints. En effet, E. HEINZ a montré que le fait ci-dessus est vrai quelle que soit la fonction $\varphi > 0$ définie sur $(0, \infty)$ qui se prolonge analytiquement sur tout le plan coupé par $(-\infty, 0)$ de manière que $\operatorname{Im} \varphi(\lambda) > 0$ pour $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Il est évident que toute fonction de $\mathfrak{F}_1$ (de plus, même de $\mathfrak{F}_\alpha$) jouit de cette propriété, mais on a aussi une implication inverse, notamment:

Toute fonction non-bornée $\varphi(\lambda)$ *définie sur* $(0, \infty)$ *qui se prolonge analytiquement sur tout le plan coupé par* $(-\infty, 0)$ *de manière que* $\operatorname{Im} \varphi(\lambda) > 0$ *pour* $\operatorname{Im} \lambda > 0$, *appartient à* $\mathfrak{F}_1$.

Posons $\psi(\xi) = [\varphi((1-\xi)(1+\xi)^{-1})]^{-1}$; alors $\psi(\xi)$ est définie sur $(-1, +1)$ et se prolonge analytiquement dans tout le plan coupé par $(-\infty, -1)$ et $(1, +\infty)$ de manière que $\operatorname{Im} \psi(\xi) > 0$ pour $\operatorname{Im} \xi > 0$. En vertu du théorème de représentation[10]) de ces fonctions, il existe une mesure positive μ sur $(-1, +1)$ telle que

$$\psi(\xi) = \psi(0) + \int_{-1}^{+1} \frac{\xi}{1-t\xi} \, d\mu(t) \qquad (-1 < \xi < 1).$$

Comme $\varphi(\lambda) \to \infty$ pour $\lambda \to \infty$, nous obtenons

$$\psi(0) = \lim_{\xi \to -1} \int_{-1}^{+1} \frac{-\xi}{1-t\xi} \, d\mu(t) = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{1+t} \, d\mu(t),$$

d'où

$$\psi(\xi) = \int_{-1}^{+1} \frac{\xi+1}{(1-t\xi)(1+t)} \, d\mu(t) \qquad (-1 < \xi < 1). \tag{3.2}$$

Soit $s(t) = (1+t)(1-t)^{-1}$ et

$$\nu(\sigma) = \int_{s^{-1}(\sigma)} \frac{2}{(1-t)(1+t)} \, d\mu(t) \qquad (\sigma \subset (0, \infty) \text{ borélien}).$$

On vérifie sans peine que ν est une mesure borélienne sur $(0, \infty)$ satisfaisant

[10]) Pour une démonstration simple de cette représentation, voir [7].

(2. 1′) avec $\alpha=1$, et puis en vertu de (3. 2) et de la définition de $\psi(\xi)$, que $\varphi(\lambda)$ vérifie (2. 1) avec $\alpha=1$, donc $\varphi\in\mathfrak{J}_1$.

Par conséquent notre thèorème a comme corollaire le théorème de HEINZ sur les fonctions „monotones” d'opérateurs dans le cas des fonctions non bornées.

3. 6. Il est utile de noter que si A et B sont bornés, la remarque précédente peut être énoncée aussi comme il suit:

$$A\leqq B \textit{ entraîne } \varphi(A)\leqq\varphi(B).$$

Cela justifie la terminologie utilisée auparavant.

En vertu des résultats de LÖWNER ([11], voir aussi [3]) sur les fonctions „monotones” de matrices, toute fonction φ vérifiant la relation ci-dessus, se prolonge en une fonction analytique dans tout le plan coupé par $(-\infty, 0)$, telle que $\operatorname{Im}\varphi(\lambda)>0$ pour $\operatorname{Im}\lambda>0$. D'après toute la discussion antérieure (voir 3. 5) il résulte que parmi les fonctions homogènes de degré 1 non bornées en λ_1, la classe de celles $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ telles que $\Phi(1,\lambda)\in\mathfrak{J}_1$ est la plus large classe de fonctions d'interpolation d'ordre 2 vérifiant (3. 1). De plus, on a un résultat plus précis, notamment:

La classe des fonctions d'interpolation d'ordre 2 *qui sont non bornées en* λ_1 *et vérifient* (3. 1), *coïncide avec celle des fonctions* $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ *homogènes de degré* 1 *telles que* $\Phi(1,\lambda)\in\mathfrak{J}_1$.

Ceci est une conséquence immédiate de la remarque qui suit.

3. 7. *Toute fonction d'interpolation d'ordre p vérifiant* (3. 1) *est homogène de degré* 1.

Démontrons d'abord que si $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ est une fonction d'interpolation d'ordre p vérifiant (3. 1), alors $\Phi(\lambda,\lambda)=\lambda\Phi(1,1)$.

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que $\Phi(1,1)=1$. Soit $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=C^2$ normé par $[|c_0|^p+|c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$ et soit $E(\sigma)$ $(\sigma\subset(0,\infty))$ défini de la manière suivante:

$$E(\{1\})(c_0, c_1)=(c_0, 0),\quad E(\{t_1\})(c_0, c_1)=(0, c_1)$$

(où $(c_0, c_1)\in C^2$ et $0<t_1$ fixé $\neq 1$), $E(\sigma)=0$ pour $\sigma\cap\{t_1, 1\}=\emptyset$, et par suite d'une manière évidente. On vérifie sans peine que $\{E(\sigma)\}$ est une mesure spectrale de type p. Posons $M_0(t)=M_1(t)=t$, $t\in(0,\infty)$. Alors $\hat{\mathfrak{H}}_t^E=\mathfrak{D}_t^E=C^2$ muni de la norme $|c|_t=[|c_0|^p+t_1|c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$ et $\hat{\mathfrak{H}}^E_{\Phi(t,t)}=\mathfrak{D}^E_{\Phi(t,t)}=C^2$ muni de la norme $|c|_{\Phi(t,t)}=[|c_0|^p+\Phi(t_1, t_1)|c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$. En vertu de l'hypothèse faite pour toute transformation linéaire π de C^2 on a $|\pi|_t\geqq|\pi|_{\Phi(t,t)}$. Or ceci

entraîne que $\Phi(t_1, t_1) = t_1$, en vertu du lemme suivant. *Soient* $|c|_a = [|c_0|^p + a|c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$ *et* $|c|_b = [|c_0|^p + b|c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$ *deux normes sur* C^2 *où* $a, b > 0$, *telles que pour toute transformation linéaire* π *de* C^2 *on ait* $|\pi|_b \leqq |\pi|_a$. *Alors* $a = b$. En effet soit $\xi = (\xi_0, \xi_1)$ fixé, mais arbitraire et soit $\pi(c_0, c_1) = (c_0\xi_0, c_0\xi_1)$. Alors $|\pi|_a = |\xi|_a$ et $|\pi|_b = |\xi|_b$ donc $|\xi|_b \leqq |\xi|_a$ d'où $b \leqq a$. Il est évident que pour les normes $|c|'_a = [a^{-1}|c_0|^p + |c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$ et $|c|'_b = [b^{-1}|c_0|^p + |c_1|^p]^{\frac{1}{p}}$ on a $|\pi|_a = |\pi|'_a, |\pi|_b = |\pi|'_b$, et par conséquent on déduit $|\pi|'_b \leqq |\pi|'_a$, d'où résulte [en prenant $\pi(c_0, c_1) = (c_1\xi_0, c_1\xi_1)$] $b^{-1} \leqq a^{-1}$ donc $a \leqq b$ ce qui achève la démonstration du lemme.

Par conséquent $\Phi(\lambda, \lambda) = \lambda\Phi(1, 1)$. En tenant compte du fait que pour $a_0, a_1 > 0$ fixés, $\Phi(a_0\lambda_0, a_1\lambda_1)$ est aussi une fonction d'interpolation d'ordre p, vérifiant (3.1), on obtient d'après ce que nous avons déjà montré $\Phi(\lambda a_0, \lambda a_1) = \lambda\Phi(a_0, a_1)$ ce qui achève la démonstration de notre assertion.

3.8. En conservant les notations des N^os^ 1 et 2, on a aussi le fait suivant (dont la démonstration est analogue à celle du théorème):

Si π *est un opérateur linéaire de* $\bigcap_{j=0}^{k} \mathfrak{D}_{M_j}^{E}$ *dans* $\bigcap_{j=0}^{k} \mathfrak{D}_{M_j}^{F}$ *continu de* $\hat{\mathfrak{D}}_{M_j}^{E}$ *dans* $\hat{\mathfrak{D}}_{M_j}^{F}$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$, *alors* π *est également un opérateur linéaire continu de* $\hat{\mathfrak{D}}_{\Phi(M_0, M_1, \ldots, M_k)}^{E}$ *dans* $\hat{\mathfrak{D}}_{\Phi(M_0, M_1, \ldots, M_k)}^{F}$ *pour* Φ *vérifiant*

$$\frac{1}{\Phi(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)^\alpha} = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{d\nu(s_1, \ldots, s_k)}{(\lambda_0 + \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_k s_k)^\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{p-1}.$$

3.9. Problèmes

a) L'ensemble des fonctions d'interpolation d'ordre p dépend-t-il de p?

b) Dans les conditions de l'énoncé du point 3.3, considérons la classe de toutes les fonctions Φ, telles que

$$\lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_0} \Phi^{-1}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} \Phi^{-1}$$

soient bornées, et telles que le théorème d'interpolation correspondant soit vrai. Retrouve-t-on ainsi la classe des fonctions d'interpolation d'ordre p?

c) Les espaces d'interpolation construits d'après notre théorème sont-ils des „espaces intermédiaires" au sens de [5]?

d) Notre théorème est-il encore vrai (au moins pour certaines fonctions Φ) lorsque E et F *ne sont pas* de type p?

Ouvrages cités

[1] N. Aronszajn, Associated spaces, interpolation theorems and the regularity of solutions of differential problems. (A paraître.)

[2] W. G. Bade, Unbounded spectral operators, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 373—392.

[3] J. Bendat—S. Sherman, Monotone and convex operator functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 58—71.

[4] N. Dunford, A survey of the theory of spectral operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **64** (1958), 217—274.

[5] E. Gagliardo, Interpolation d'espaces de Banach et application. II—III, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 3388—3390 et 3517—3518.

[6] E. Heinz, Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, *Math. Annalen*, **123** (1951), 415—438.

[7] A. Korányi, Note on the theory of monotone operator functions, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 241—245.

[8] S. G. Krein, An interpolation theorem in the theory of operators, *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, **130** (1960), 491—494.

[9] J. L. Lions, Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine*, **2** (1958), 419—432.

[10] J. L. Lions, Sur certains théorèmes d'interpolation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **250** (1960), 2104—2106.

[11] K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Zeitschrift*, **38** (1934), 177—216.

[12] M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, *Acta Math.*, **49** (1926), 465—497.

[13] E. M. Stein, Interpolation of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 482—492.

[14] E. M. Stein—G. Weiss, Interpolations of operators with change of measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 159—172.

(Reçu le 18 août 1960)

Zur Existenz und Homogenität des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen

Von HANNS JOACHIM WEINERT in Potsdam (Deutschland)

Im ersten Teil dieser Note wird ein eigenartiges Verhalten des größten gemeinsamen Linksteilers $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_l^*$ bzw. des kleinsten gemeinsamen Linksvielfachen $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]_l^*$ in einem nullteilerfreien Ring R mit Einselement 1 behandelt; der Verfasser ist darauf durch ein Versehen in dem Lehrbuch „Algebra" von L. RÉDEI (1. Teil, deutsche Ausg., Leipzig, 1959) aufmerksam geworden und kommt mit der Veröffentlichung einem Wunsche von Herrn Professor RÉDEI nach. Im Zusammenhang damit steht ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die eindeutige Zerlegung in irreduzible Faktoren in einem Integritätsbereich, welches Gegenstand des zweiten Teiles ist.

Existiert in R der größte gemeinsame Linksteiler $\delta' = (\varrho\alpha_1, \ldots, \varrho\alpha_n)_l^*$ der Elemente $\varrho\alpha_1, \ldots, \varrho\alpha_n$, so zeigt man leicht, daß $\delta' = \varrho\delta$ gilt und der Komplementärteiler δ größter gemeinsamer Linksteiler der Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ist, also

$$\varrho(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_l^* = (\varrho\alpha_1, \ldots, \varrho\alpha_n)_l^* \tag{1}$$

erfüllt ist. Dagegen kann man nicht umgekehrt von der Existenz von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_l^*$ auf die von $(\varrho\alpha_1, \ldots, \varrho\alpha_n)_l^*$ und damit auf (1) schließen (vgl. a. a. O. S. 312, Formel (20)), eine Feststellung, die auch für kommutative Ringe zutrifft. So existiert z. B. in $R = \mathfrak{J}[\sqrt{-5}]$ zu den beiden nichtassoziierten irreduziblen[1]) Elementen 3 und $2+\sqrt{-5}$ trivialer Weise der größte gemeinsame Teiler $(3, 2+\sqrt{-5})^* = 1$, während $3 \cdot 3$ und $3 \cdot (2+\sqrt{-5})$ keinen größten gemeinsamen Teiler besitzen (vgl. etwa a. a. O. S. 318).

Für das kleinste gemeinsame Linksvielfache zieht jedoch gemäß

$$\varrho[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]_l^* = [\varrho\alpha_1, \ldots, \varrho\alpha_n]_l^* \tag{2}$$

die Existenz von $[\varrho\alpha_1, \ldots, \varrho\alpha_n]_l^*$ die von $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]_l^*$ und auch umgekehrt die Existenz von $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]_l^*$ die von $[\varrho\alpha_1, \ldots, \varrho\alpha_n]_l^*$ nach sich.

---

[1]) Wie RÉDEI nennen wir Nichteinheiten ($\neq 0$) ohne echte Faktorzerlegung irreduzibel.

Dieses unterschiedliche Verhalten wirkt sich nun auch auf die a. a. O. auf S. 313 angegebene Regel

(3) $\qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^* [\beta_1, \ldots, \beta_n]^* = \gamma \quad \text{mit} \quad \alpha_1\beta_1 = \cdots = \alpha_n\beta_n = \gamma \neq 0$

aus, die nur für einen Integritätsbereich R diskutierbar ist. Hier kann unter Verwendung der zweiten Existenzsaussage zu (2) gezeigt werden, daß mit $[\beta_1, \ldots, \beta_n]^*$ auch $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^*$ existiert und dann (3) erfüllt ist. Die Umkehrung ist dagegen falsch; wählt man nämlich wieder in $R = \mathfrak{J}[\sqrt{-5}]$

$$\alpha_1 = \beta_1 = 3, \quad \alpha_2 = 2 + \sqrt{-5}, \quad \beta_2 = 2 - \sqrt{-5},$$

so gilt $\gamma = \alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 = 9$ und der größte gemeinsame Teiler $(\alpha_1, \alpha_2)^* = 1$ existiert, während es kein kleinstes gemeinsames Vielfaches von β_1 und β_2 gibt. In der Tat verwendet auch der a. a. O. angegebene Beweis die Existenz von $(\varrho\alpha_1, \ldots, \varrho\alpha_n)$, die nach der obigen Feststellung bei (1) eben nicht aus der Existenz von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^*$ gefolgert werden kann.

Liegt freilich ein Ring R mit größtem gemeinsamen Linksteiler vor, in dem also zu je zwei und damit zu je endlich vielen Elementen der größte gemeinsame Linksteiler existiert, so gelten die Homogenitätsregel (1) und im kommutativen Falle auch die Regel (3) stets. Letztere zeigt, daß ein Integritätsbereich mit größtem gemeinsamen Teiler auch ein Intergritätsbereich mit kleinstem gemeinsamen Vielfachen ist und umgekehrt, wobei dies wiederum (gerade vermöge (1)) die Eindeutigkeit irreduzibler Faktorzerlegungen nach sich zieht, wie wir im Rahmen des folgenden Kriteriums beweisen werden.

Ein Integritätsbereich R mit Einselement ist genau dann ein Ring mit eindeutiger irreduzibler Faktorzerlegung, d. h. ein Ring, in dem jedes Element $\alpha \neq 0$ bis auf assoziierte Elemente eindeutig als Produkt

(4) $$\alpha = \varepsilon\omega_1 \ldots \omega_k$$

einer Einheit ε und irreduzibler Elemente ω_i geschrieben werden kann, wenn gilt:

A) *In R ist jede Kette echter Teiler*

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \quad (\alpha_{i+1} \textit{ jeweils echter Teiler von } \alpha_i)$$

endlich.

B) *R ist ein Ring mit größtem gemeinsamen Teiler.*

In der Tat sind beide Aussagen in einem Ring mit eindeutiger irreduzibler Faktorzerlegung erfüllt, da dann alle Teiler eines Elementes α Teilprodukte von (4) sind, und der größte gemeinsame Teiler in bekannter Weise aus den Elementzerlegungen konstruiert werden kann. Für die Umkehrung stellen wir sogleich fest, daß sogar unabhängig voneinander A) die Existenz einer irreduziblen Faktorzerlegung für jedes $\alpha \in R$, B) die Eindeutigkeit irreduzibler Faktorzerlegungen (soweit diese existieren) nach sich zieht. Das erste ergibt sich sofort aus den üblichen Existenzbeweisen (etwa für Hauptidealringe oder Euklidische Ringe), die gerade auf dem Abbrechen echter Teilerketten beruhen. Für das zweite genügt es bekanntlich nachzuweisen, daß mit B) die folgende Eigenschaft irreduzibler Elemente ω gilt:

$$\textit{Aus} \quad \omega \mid \sigma\tau \quad \textit{folgt} \quad \omega \mid \sigma \quad \textit{oder} \quad \omega \mid \tau.$$

Dazu verwenden wir die in Ringen mit größtem gemeinsamen Teiler erfüllte Homogenitätsregel (1). Nach ihr folgt aus $\omega \nmid \sigma$ und $\omega \nmid \tau$, also $(\omega, \sigma)^* = (\omega, \tau)^* = 1$, nämlich

$$1 = (\omega, \sigma)^* \cdot (\omega, \tau)^* = \big((\omega, \sigma)^* \cdot \omega,\ (\omega, \sigma)^* \cdot \tau\big)^* = (1 \cdot \omega, \omega \cdot \tau, \sigma \cdot \tau)^*$$

und damit $(\omega, \sigma\tau)^* = 1$, im Widerspruch zu $\omega \mid \sigma\tau$.

Abschließend sei bemerkt, daß sich dieses Kriterium bereits für kommutative, reguläre Halbgruppen mit Einselement aussprechen läßt. Ist etwa H die multiplikative Halbgruppe der Ideale eines Ringes R, so laufen Teilerkettensatz (für Ideale) und Faktorsatz (aus $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$) gerade auf die Aussagen A) und B) für H hinaus, woraus sich sofort die eindeutige Zerlegung jedes Ideals $(\neq (0), \neq R)$ in ein Produkt multiplikativ irreduzibler (Prim-) Ideale ergibt.

(Eingegangen am 27. Dezember 1960)

On unitary dilations of bounded operators

By HIDEGORO NAKANO in Kingston (Canada)

SZ.-NAGY's theorem on the unitary dilation of a linear operator T on Hilbert space with $\|T\| \leqq 1$ may be generalized so as that it applies simultaneously to any product of such operators. This was observed by SZ.-NAGY himself, as a consequence of the matrix construction, due to SCHÄFFER, of the unitary dilations[1]). We state this theorem in an equivalent form and give an alternative proof which does not make use of square roots of positive operators.

Theorem. *Let H be a Hilbert space of infinite dimension and P a projection operator on H such that the dimension of $(1-P)H$ is not less than that of PH. Corresponding to every bounded linear operator T on PH with $\|T\| \leqq 1$, we can find a unitary operator U_T on H such that*

$$T_1 T_2 \dots T_n P = P U_{T_1} U_{T_2} \dots U_{T_n} P$$

for every finite number of operators $T_1, T_2, \dots, T_n$ on PH with $\|T_\nu\| \leqq 1$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$.

Proof. We can find easily projection operators P_1, P_2, P_3 on H such that $P + P_1 + P_2 + P_3 = 1$, the dimension of $P_1 H$ is the same as that of PH, and $P_2 H$ and $P_3 H$ have each the dimension infinite and not less than that of PH. Let T be a linear operator on PH with $\|T\| \leqq 1$, and z_λ $(\lambda \in \Lambda)$ a complete orthonormal system in PH. Then we can find a system of elements $y_\lambda \in P_1 H$ $(\lambda \in \Lambda)$ such that $Tz_\lambda + y_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ constitutes an orthonormal system, i. e.

$$(Tz_\lambda + y_\lambda,\ Tz_\varrho + y_\varrho) = \delta_{\lambda,\varrho} \qquad (\lambda, \varrho \in \Lambda)$$

with the Kronecker $\delta_{\lambda,\varrho}$. Because, putting

$$\alpha_{\lambda,\varrho} = \delta_{\lambda,\varrho} - (Tz_\lambda, Tz_\varrho) \qquad (\lambda, \varrho \in \Lambda),$$

[1]) See F. RIESZ—B. SZ.-NAGY, *Vorlesungen über Funktionalanalysis* (Berlin, 1956), Nachtrag (p. 460).

we see easily that $\sum_{\lambda,\varrho}\xi_\lambda\bar{\xi}_\varrho\alpha_{\lambda,\varrho}\geqq 0$ for every finite number of complex numbers ξ_λ, and hence putting

$$((\xi_\lambda),\ (\eta_\lambda))=\sum_{\lambda,\varrho}\xi_\lambda\bar{\eta}_\varrho\,\alpha_{\lambda,\varrho},$$

we can introduce an inner product, not always proper, into the linear space of vectors $(\xi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$: $\xi_\lambda=0$ except for a finite number of λ. As the dimension of P_1H is not less than the cardinal number of Λ we can find $y_\lambda\in P_1H$ such that $(y_\lambda, y_\varrho)=\alpha_{\lambda,\varrho}$ $(\lambda,\varrho\in\Lambda)$ and hence, $Tz_\lambda+y_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$ is an orthonormal system. Then, putting $U_Tz_\lambda=Tz_\lambda+y_\lambda$, we obtain an isometric operator U_T from PH into $(P+P_1)H$, and we have obviously $TP=PU_TP$. Now we extend U_T as follows. As the dimension of $(P_1+P_2)H$ coincides with that of P_2H, we can extend U_T such that U_T is an isometric operator from $(P_1+P_2)H$ onto P_2H. Denoting by Q the projection operator of U_TPH, the dimension of P_3H coincides with that of $(P+P_1-Q+P_3)H$, and hence we can extend U_T such that U_T is an isometric operator from P_3H onto $(P+P_1-Q+P_3)H$. Then U_T becomes a unitary operator on H and we have obviously

$$U_T(P+P_1+P_2)=(P+P_1+P_2)U_T(P+P_1+P_2),$$
$$PU_T(P_1+P_2)=0,$$
$$TP=PU_TP.$$

For every finite number of linear operators T_ν with $\|T_\nu\|\leqq 1$ $(\nu=1,2,\dots,n)$, we have then

$$A=PU_{T_1}, U_{T_2}\dots U_{T_n}P=PU_{T_1}(P+P_1+P_2)U_{T_2}(P+P_1+P_2)\dots$$
$$\dots(P+P_1+P_2)U_{T_n}P$$

because $(P+P_1+P_2)P=P$,

$$A=PU_{T_1}PU_{T_2}P\cdots PU_{T_n}P$$

because $PU_T(P+P_1+P_2)=PU_TP+PU_T(P_1+P_2)=PU_TP$, and, finally

$$A=T_1T_2\dots T_nP$$

because $TP=PU_TP$.

Remark. When the dimension of H is finite and not less than n times that of PH, then we can find projection operators P_ν $(\nu=1,2,\dots,n)$ such that

$$P+\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu=1$$

and the dimension of each $P_\nu H$ for $\nu \leqq n-1$ coincides with that of PH. Then, for any linear operator T on PH with $\|T\| \leqq 1$, we can find an isometric U_T from PH into $(P+P_1)H$ by the same way as above. If we extend U_T so that U_T is an isometric operator from $P_\nu H$ onto $P_{\nu+1} H$ for $\nu \leqq n-2$, from $P_{n-1} H$ onto $(P+P_1-Q)H$, and from $P_n H$ onto $P_n H$, then we see easily that

$$T_1 T_2 \ldots T_\nu P = P U_{T_1} U_{T_2} \ldots U_{T_\nu} P \text{ for } \nu \leqq n-1.$$

(Received November 29, 1960)

Über transfinite Funktionen. II

Von G. FODOR in Szeged

Sei S eine Menge mit der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ und $cf(\alpha)>0$ (d. h. ω_α sei nicht mit ω konfinal).

Sei M eine Teilmenge von S und nehmen wir an, daß $f(x)$ eine Funktion in M mit Werten aus S und $\delta(x)$ eine Funktion in S mit Werten aus $W(\omega_\alpha)$ ist, so daß $\delta(f(x))<\delta(x)$ für alle $x\in M$ mit $\delta(x)>0$ [und $\delta(f(x))=$ $=\delta(x)$ für $\delta(x)=0$] und $\delta(S)\subseteq W(\omega_\alpha)$ gilt.

Wir wollen uns mit den folgenden zwei Problemen befassen:

Problem 1. *Wenn $\delta(f(x))<\delta(x)$ $(x\in M, \delta(x)>0)$ gilt und $\delta(M)$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist, gibt es dann immer eine Teilmenge E von M derart, daß $\delta(f(E))<\delta(E)$ ist und $\delta(E)$ eine stationäre Teilmenge von $\delta(S)$ bildet?*

Problem 2. *Wenn $\delta(f(x))<\delta(x)$ $(x\in M, \delta(x)>0)$ ist, ferner S, M und $\delta(M)$ stationäre Teilmengen von $W(\omega_\alpha)$ sind, gibt es dann immer eine stationäre Teilmenge E von M derart, daß $\delta(f(E))<\delta(E)$ gilt und $\delta(E)$ eine stationäre Teilmenge von $\delta(M)$ ist?*

Bei den Bedingungen des Problems 1 gilt der folgende Satz:

Satz A. *Es gibt eine Teilmenge E von M, so daß $\delta(f(E))<\delta(E)$ gilt und $\delta(E)$ eine stationäre Teilmenge von $\delta(M)$ ist.*

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des folgenden Satzes des Verfassers ([2]), welcher sich aus Satz A mit $\delta(x)=x$ für $x\in S$ ergibt: Wenn M eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist, so existiert zu jeder in M definierten Funktion $f(x)$ mit $f(x)<x$ für $x\in M$, $x>0$ (und $f(0)=0$ für $0\in M$) eine stationäre Teilmenge E von M, so daß $f(E)<E$ ist.

Ist $\aleph_\alpha$ regulär, $S\subseteq W(\omega_\alpha)$ und $\delta(x)$ eine bestimmt divergente Funktion, so gilt bei den Bedingungen des Problems 1 der folgende Satz:

Es gibt ein Element y_0 von S, so daß $\delta(y_0)<\delta(f^{-1}(y_0))$ gilt und $\delta(f^{-1}y_0)$ eine stationäre Teilmenge von $\delta(M)$ ist, wo $f^{-1}y_0=\{x\in S: f(x)=y_0\}$ ist.

Es folgt aus A:

S a t z B. *Sei* $\aleph_\alpha$ *regulär und* S *eine zusammengehörige Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$. *Wenn*

a) $\delta(M)$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *ist und*

b) $f(x)$ *und* $\delta(x)$ *bestimmt divergent sind,*

so gibt es eine Teilmenge E *von* M, *so daß*

c) $\delta(E)$ *eine stationäre Teilmenge von* $\delta(M)$ *und*

d) *für alle* $x \in E$, $\delta(f(x)) \geqq \delta(x)$ *ist.*

Dieser Satz ist (für reguläre $\aleph_\alpha$) eine Verallgemeinerung des folgenden Satzes von W. NEUMER ([3]), welcher sich aus B mit $\delta(x)=x$ für $x \in S$ ergibt: Sei M eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ und sei in M eine bestimmt divergente Funktion $f(x)$ mit Werten aus $W(\omega_\alpha)$ definiert. Dann gibt es eine stationäre Teilmenge E von M, so daß für alle $x \in E$, $f(x) \geqq x$ ist.

Der Satz B gilt für singuläre $\aleph_\alpha$ nicht. Man kann nämlich in diesem Fall solche bestimmt divergente Funktionen $f(x)$ und $\delta(x)$ in M bzw. in S definieren, daß $\delta(S) \subseteqq W(\omega_\alpha)$, $\delta(M)$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist und für jede $x \in M$, $\delta(f(x)) < \delta(x)$ mit $\delta(x) > 0$ gilt.

Die Antwort auf Problem 2 ist im allgemeinen negativ. Man kann nämlich in $W(\omega_\alpha)$ solche Funktionen $f(x)$ und $\delta(x)$ definieren und dann $W(\omega_\alpha)$ in zwei fremde Mengen M und N zerlegen, daß M bzw. $\delta(N)$ stationär und N bzw. $\delta(M)$ nicht stationär sind, ferner $\delta(f(N)) < \delta(N)$ gilt und für alle, mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörige Teilmenge M' von M die Menge $\delta(f(M'))$ mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig ist.

Es erhebt sich noch die Frage: Bei den Bedingungen von B gibt es auch eine stationäre Teilmenge E von M, so daß $\delta(f(x)) \geqq \delta(x)$ für alle $x \in E$ und $\delta(E)$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist (wenn nur M auch eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist)? Die Antwort ist negativ.

Wir brauchen folgende Definitionen und Bezeichnungen (vgl. z. B. [4]). Ist Δ eine Ordnungszahl, so bedeute $W(\Delta)$ die Menge aller Zahlen ξ, für die $\xi < \Delta$ ist. Sind M und N zwei Teilmengen von $W(\Delta)$ ohne Maximum, so heißen M und N zusammengehörig, wenn es zu jeder Ordnungszahl jeder der beiden Mengen eine größere Ordnungszahl in der anderen Menge gibt. Sind μ und ν zwei Limeszahlen, so heißt μ konfinal mit ν, wenn μ der Limes einer wachsenden Folge vom Typ ν ist. Ist α eine Limeszahl, so bedeute $cf(\alpha)$ den Index γ der kleinsten Ordnungszahl ω_γ, mit der α konfinal ist. Eine Teilmenge M von $W(\Delta)$ heißt in $W(\Delta)$ abgeschlossen, wenn sie zu jeder Fundamentalfolge von Zahlen aus ihr auch deren Limes enthält, sofern dieser $< \Delta$ ist. Eine in $W(\Delta)$ abgeschlossene, mit $W(\Delta)$ zusammengehörige Teilmenge M von $W(\Delta)$ heißt ein Band von $W(\Delta)$. Eine Teilmenge M von

$W(\Lambda)$ heißt stationär, wenn $W(\Lambda)-M$ kein Band von $W(\Lambda)$ enthält. Eine auf einer Teilmenge M von $W(\Lambda)$ definierte Funktion φ heißt regressiv, wenn $\varphi(\xi)<\xi$ ist für alle Argumente $\xi\in M$ mit $\xi\geqq 1$ (und $\varphi(0)=0$ im Fall, daß $0\in M$). Eine auf einer mit $W(\Lambda)$ zumammengehörigen Teilmenge M von $W(\Lambda)$ definierte Funktion $f(\xi)$ mit Werten aus $W(\Lambda)$ heißt bestimmt divergent, wenn es zu jedem $\beta<\Lambda$ ein α gibt, so daß $f(\xi)>\beta$ für $\xi\geqq\alpha$ gilt.

Wir brauchen die folgenden Sätze:

Satz C. *Sei Λ eine Limeszahl mit $cf(\Lambda)>0$ (d. h. Λ ist nicht mit ω konfinal), $\{K_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ $(\tau\leqq\omega_{cf(\Lambda)})$ eine Folge von Typ τ vom nichtleeren und paarweise disjunkten nicht-stationären Teilmengen von $W(\Lambda)$ und x_α das erste Element von $K_\alpha(\alpha<\tau)$, und wir nehmen an, daß die Menge $U=\{x_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ schon nach Größe geordnet ist (d. h. $x_\alpha<x_\beta$ für $\alpha<\beta$). Ist U nicht-stationär und im Falle $\tau=\omega_{cf(\Lambda)}$ mit $W(\Lambda)$ zusammengehörig, so ist die Menge $\bigcup_{\alpha<\tau}K_\alpha$ nicht-stationär* (Vgl. [2]).

Satz D. *Wenn M nicht-stationär ist, so läßt sich auf M eine bestimmt divergente Funktion φ definieren* (vgl. [4], § 9, Satz 2).

Wir beweisen nun den

Satz 1. *Sei S eine Menge mit der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, $M\subseteq S$, $f(x)$ eine Funktion in M mit $f(M)\subseteq S$, und $\delta(x)$ eine Funktion in S mit $\delta(S)\subseteqq W(\omega_\alpha)$. Wenn*

1. *$cf(\alpha)>0$ (d. h. ω_α nicht mit ω konfinal ist),*
2. *$\delta(f(x))<\delta(x)$ mit $\delta(x)>0$ (und $\delta(f(x))=0$ für $\delta(x)=0$), und*
3. *$\delta(M)$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist,*

so gibt es eine Teilmenge E von M derart, daß

4. *$\delta(E)$ eine stationäre Teilmenge von $\delta(M)$ ist, und*
5. *$\delta(f(E))<\delta(E)$ gilt.*

Wir führen zwei Beweise an:

Beweis 1. Sei $B=\{\beta_\nu\}_{\nu<\omega_{cf(\alpha)}}$ ein Band vom Typ $\omega_{cf(\alpha)}$ in $W(\omega_\alpha)$, wobei $\beta_0=0$ ist. Wir bezeichnen mit H_ν die Menge aller $x\in M$, für die $\beta_\nu\leqq\delta(f(x))<\beta_{\nu+1}$: $H_\nu=\{x\in M:\beta_\nu\leqq\delta(f(x))<\beta_{\nu+1}\}$. Offenbar ist $H_\eta\cap H_\tau=0$ für $\eta\neq\tau$. Da B ein Band ist, d. h. $\lim_{\nu<\lambda}\beta_\nu=\beta_\lambda$ für jede Limeszahl $\lambda<\omega_{cf(\alpha)}$ und $\lim_{\nu<\omega_{cf(\alpha)}}\beta_\nu=\omega_\alpha$ ist, so ergibt sich hieraus nach der Definition von H_ν, dass

$$M=\bigcup_{\nu<\omega_{cf(\alpha)}}H_\nu.$$

Sei nun $\{H_{\nu_\xi}\}_{\xi<\tau}$ $(\tau\leqq\omega_{cf(\alpha)})$ die Teilfolge der nicht-leeren Mengen H_ν. Sei Ferner $\delta(H_{\nu_\xi})=H'_{\nu_\xi}$. Offenbar ist

$$\delta(M)=\bigcup_{\xi<\tau}H'_{\nu_\xi}.$$

Sei nun $H''_{\nu_\xi} = H'_{\nu_\xi} - \bigcup_{\zeta<\xi} H'_{\nu_\zeta}$ $(\xi<\tau)$. Man kann offenbar annehmen, daß $H''_{\nu_\xi} \neq 0$ $(\xi<\tau)$. Wenn $\eta \in H''_{\nu_\xi}$ ist, so ist $\eta > \beta_{\nu_\xi}$; es gibt nämlich wegen $H''_{\nu_\xi} \subseteq H'_{\nu_\xi} = \delta(H_{\nu_\xi})$ ein Element $x \in H_{\nu_\xi}$, für das $\delta(x) = \eta$ gilt, folglich ist $\eta = \delta(x) > \delta(f(x)) \geqq \beta_{\nu_\xi}$. Es sei y_{ν_ξ} das erste Element von H''_{ν_ξ} für alle $\xi<\tau$. Wir definieren nun auf der Menge $Y = \{y_{\nu_\xi}\}_{\xi<\tau}$ $(\tau \leqq \omega_{cf(\alpha)})$ eine regressive Funktion ψ:

$$\psi(y_{\nu_\xi}) = \beta_{\nu_\xi}.$$

Man sieht sofort, daß $\psi(\eta) \neq \psi(\nu)$, wenn η und ν zwei verschiedene Elemente von Y sind. So ergibt sich hieraus auf Grund von Satz D, daß die Menge Y nicht-stationär ist. Da $\delta(M)$ stationär ist und

$$\delta(M) = \bigcup_{\xi<\tau} H''_{\nu_\xi} \qquad (\tau \leqq \omega_{cf(\alpha)})$$

ist, so existiert nach dem Satz C ein $\xi_0 < \tau$, für das $H''_{\nu_{\xi_0}}$ stationär ist. Folglich ist auch $H'_{\nu_\xi} = \delta(H_{\nu_\xi})$ stationär. Damit ist der Satz 1 bewiesen.

Beweis 2. Sei $U = \{y_\beta\}_{\beta<\omega_{cf(\alpha)}}$ eine stationäre Teilmenge von $\delta(M)$ vom Typ $\omega_{cf(\alpha)}$ und

$$M_\beta = \{x \in M : \delta(x) = y_\beta \in U\} \qquad (\beta < \omega_{cf(\alpha)}).$$

Offenbar ist $M_\beta \neq 0$ $(\beta<\omega_{cf(\alpha)})$ und $M_\eta \cap M_\nu = 0$ $(\eta \neq \nu)$. Sei m_β ein beliebiges Element von M_β und $M' = \{m_\beta\}_{\beta<\omega_{cf(\alpha)}}$. Die Abbildung $\psi(m_\beta) = \delta(m_\beta) = y_\beta$ ist offenbar eine eineindeutige Abbildung von M' auf U. Wir definieren nun auf der Menge U eine Funktion φ mit der Gleichung

$$\varphi(y_\beta) = \delta(f(m_\beta)).$$

Die Funktion φ ist regressiv, weil $\delta(m_\beta) = y_\beta > \delta(f(m_\beta)) = \varphi(y_\beta)$. Nach dem Satz 2 in [2] gibt es eine stationäre Teilmenge N von U, für die

$$\varphi(N) < N$$

ist. Wir bezeichnen mit E die Menge $\psi^{-1}(N)$. So ergibt sich nach der Definition der Funktion $\varphi(y_\beta) = \varphi(\delta(m_\beta)) = \delta(f(m_\beta))$, daß

$$\varphi(N) = \varphi(\delta(E)) = \delta(f(E));$$

folglich ist

$$\delta(f(E)) < \delta(E).$$

Damit ist der Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *Sei S eine zusammengehörige Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$, $M \subseteq S$, $f(x)$ eine Funktion in M mit $f(M) \subseteq S$, und $\delta(x)$ eine Funktion in S mit $\delta(S) \subseteq W(\omega_\alpha)$. Wenn*

1. ω_α *regulär* $(\alpha > 0)$,
2. $\delta(f(x)) < \delta(x)$ *mit* $\delta(x) > 0$ [*und* $\delta(f(x)) = 0$ *für* $\delta(x) = 0$],
3. $\delta(x)$ *bestimmt divergent, und*
4. $\delta(M)$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *ist*,

so gibt es ein Element y_0 *von* M, *so daß*

5. $\delta(y_0) < \delta(f^{-1}y_0)$ *und*
6. $\delta(f^{-1}y_0)$ *eine stationäre Teilmenge von* $\delta(M)$ *ist.*

Beweis. Nach dem Satz 1 existiert eine Teilmenge E von M, für die $\delta(E)$ stationär ist und $\delta(f(E)) < \delta(E)$ gilt. Da $\delta(x)$ bestimmt divergent ist, so ergibt sich aus $\overline{\overline{\delta(f(E))}} < \aleph_\alpha$, daß $\overline{\overline{f(E)}} < \aleph_\alpha$. Offenbar ist

$$E \subseteqq \bigcup_{x \in f(E)} f^{-1}x$$

und

$$\delta(E) \subseteqq \bigcup_{x \in f(E)} \delta(f^{-1}x).$$

Da $\delta(E)$ stationär ist, ergibt sich wegen $\overline{\overline{f(E)}} < \aleph_\alpha$, daß es ein Element y_0 von $f(E)$ existiert, für die $\delta(f^{-1}y_0)$ stationär ist. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Aus dem Satz 1 folgt es unmittelbar der folgende

Satz 3. *Sei* S *eine zusammengehörige Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$, $M \subseteqq S$, $f(x)$ *eine Funktion in* M *mit* $f(M) \subseteqq S$, *und* $\delta(x)$ *eine Funktion in* S *mit* $\delta(S) \subseteqq W(\omega_\alpha)$. *Wenn*

1. $\aleph_\alpha (\alpha > 0)$ *regulär*,
2. $\delta(M)$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *ist und*
3. $f(x)$ *und* $\delta(x)$ *bestimmt divergent sind,*

so gibt es eine Teilmenge E *von* M, *so daß*

4. $\delta(E)$ *eine stationäre Teilmenge von* $\delta(M)$ *und*
5. *für alle* $x \in E$, $\delta(f(x)) \geqq \delta(x)$ *ist.*

Beweis. Seien $M_1 = \{x \in M : \delta(f(x)) < \delta(x)\}$ und $M_2 = \{x \in M : \delta(f(x)) \geqq \delta(x)\}$. Offenbar ist $\delta(M) = \delta(M_1) \cup \delta(M_2)$. Nehmen wir nun an, daß der Satz 3 falsch ist. Dann ergibt sich, da $\delta(M)$ stationär ist, daß $\delta(M_1)$ stationär ist. Da $\aleph_\alpha$ regulär ist, so ist M_1 mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig. Nach dem Satz 1 existiert eine mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörige Teilmenge M_1' von M_1, so daß $\delta(M_1')$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist und $\delta(f(M_1')) < \delta(M_1')$ gilt. Da $f(x)$ und $\delta(x)$ bestimmt divergent sind, so ergibt sich, daß M_1' nicht mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig ist, im Widerspruch dazu, daß M_1' mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig ist.

Für singuläre $\aleph_\alpha$ gilt der Satz 3 nicht. Seien nämlich A, B und C drei abgeschlossene Teilmengen vom Typ $\omega_{cf(\alpha)}$ von $W(\omega_\alpha)$, so daß $C < B < A$ gilt und

A mit $W(\omega_\alpha)$ konfinal ist, und seien $\{a_\xi\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$, $\{b_\xi\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$ und $\{c_\xi\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$ die zu A, B und C gehörige wachsenden Funktionen, ferner sei $A'=\{a_{\omega\cdot\xi}\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$ und $A''=\{a_{\omega\cdot\xi+1}\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$. Wir definieren nun zwei Funktionen $\delta(x)$ und $f(x)$ in $S=A'\cup A''\cup B\cup C$ bzw. in $M=A'\cup B\cup C$ wie folgt. Es sei $\delta(a_{\omega\cdot\xi})=$ $=a_{\omega(\xi+1)}$, $\delta(a_{\omega\cdot\xi+1})=a_{\omega\cdot\xi}$, $\delta(b_\xi)=a_{\omega\cdot\xi}$, $\delta(c_\xi)=b_\xi$, $f(a_{\omega\cdot\xi})=a_{\omega\cdot\xi+1}$, $f(b_\xi)=c_\xi$ und $f(c_\xi)=c_0$. Offenbar ist $\delta(M)=A'\cup B$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ und $f(M)=A''\cup C$. Man kann leicht einsehen, daß $\delta(x)$ und $f(x)$ bestimmt divergent sind und für alle $x\in M$, $\delta(f(x))<\delta(x)$ gilt.

Wir beweisen nun den

Satz 4. *Es gibt zwei in $W(\omega_\alpha)$ definierte Funktionen $f(x)$ und $\delta(x)$ mit Werten aus $W(\omega_\alpha)$, so daß*

1. $\delta(f(x))<\delta(x)$, *mit* $\delta(x)>0$,
2. $\delta(W(\omega_\alpha))$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *und*
3. *für alle stationäre Teilmenge M von $W(\omega_\alpha)$ die Menge $\delta(M)$ nichtstationär ist.*

Beweis. Zu zwei beliebigen Ordnungszahlen γ und β mit $\beta\geqq 1$ existieren zwei eindeutig definierte Zahlen η und ξ derart, daß

$$\gamma=\beta\eta+\xi, \quad \text{wobei} \quad 0\leqq\eta\leqq\alpha,\ 0\leqq\xi<\beta.$$

Sei nun $\beta=5$ und $\gamma\in W(\omega_\alpha)$. Wir definieren die Funktionen $f(x)$ und $\delta(x)$ in der folgenden Weise. Sei

$$\begin{aligned}
&\delta(5\eta)=5\eta+4, && f(5\eta)=5\eta+2,\\
&\delta(5\eta+1)=5\eta, && f(5\eta+1)=0,\\
&\delta(5\eta+2)=5\eta+3, && f(5\eta+2)=0, \qquad (\eta<\omega_\alpha)\\
&\delta(5\eta+3)=5\eta+3, && f(5\eta+3)=5\eta+1,\\
&\delta(5\eta+4)=5\eta+4, && f(5\eta+4)=5\eta+2,
\end{aligned}$$

für alle $\eta\in W(\omega_\alpha)$. Offenbar ist

$$\begin{aligned}
&\delta(f(5\eta))=\delta(5\eta+2)=5\eta+3<\delta(5\eta)=5\eta+4,\\
&\delta(f(5\eta+1))=\delta(0)=4<\delta(5\eta+1)=5\eta,\\
&\delta(f(5\eta+2))=\delta(0)=4<\delta(5\eta+2)=5\eta+3, \qquad (\eta>0)\\
&\delta(f(5\eta+3))=\delta(5\eta+1)=5\eta<\delta(5\eta+3)=5\eta+3,\\
&\delta(f(5\eta+4))=\delta(5\eta+2)=5\eta+3<\delta(5\eta+4)=5\eta+4.
\end{aligned}$$

Daraus folgt leicht der Satz 4.

Satz 5. *Es gibt zwei in* $W(\omega_\alpha)$ *definierte Funktionen* $f(x)$ *und* $\delta(x)$ *mit Werten aus* $W(\omega_\alpha)$, *so daß*

1. $f(x)$ *und* $\delta(x)$ *bestimmt divergent,*
2. $\delta(W(\omega_\alpha))$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *ist und*
3. *ist* M *eine Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *und* $\delta(f(x)) \geqq \delta(x)$, *für alle* $x \in M$, *so ist* M *nicht stationär.*

Beweis. Sei

$$\begin{array}{ll} \delta(5\eta) = 5\eta+4, & f(5\eta) = 5\eta+3, \\ \delta(5\eta+1) = 5\eta+3, & f(5\eta+1) = 5\eta, \\ \delta(5\eta+2) = 5\eta+1, & f(5\eta+2) = 5\eta, \qquad (\eta<\omega_\alpha) \\ \delta(5\eta+3) = 5\eta+2, & f(5\eta+3) = 5\eta, \\ \delta(5\eta+4) = 5\eta, & f(5\eta+4) = 5(\eta+1). \end{array}$$

Offenbar ist

$$\delta(f(5\eta)) = \delta(5\eta+3) = 5\eta+2 < \delta(5\eta) = 5\eta+4,$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta(f(5\eta+1)) \\ \delta(f(5\eta+2)) \\ \delta(f(5\eta+3)) \end{array}\right\} = \delta(5\eta) = 5\eta+4 > \left\{\begin{array}{l} \delta(5\eta+1) = 5\eta+3, \\ \delta(5\eta+2) = 5\eta+1, \\ \delta(5\eta+3) = 5\eta+2, \end{array}\right.$$

$$\delta(f(5\eta+4)) = \delta(5(\eta+1)) = 5(\eta+1)+4 > \delta(5\eta+4) = 5\eta.$$

Daraus folgt leicht der Satz 5.

Literatur

[1] G. Kurepa, On regressing functions, *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, **4** (1958), 148—156.

[2] G. Fodor, Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen, *Acta Sci. Math.*, **18** (1956), 139—142.

[3] W. Neumer, Kritische Zahlen und bestimmt divergente transfinite Funktionen, *Math. Zeitschrift*, **70** (1958), 190—192.

[4] H. Bachmann, *Transfinite Zahlen* (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 1, Berlin—Heidelberg—Göttingen, 1955).

(Eingegangen am 6. Juni 1960)

Über transfinite Funktionen. III

Von G. FODOR in Szeged

Sei S eine zusammengehörige Teilmenge von $W(\omega_\alpha)=\{\beta;\beta<\omega_\alpha\}$ und $cf(\alpha)>0$ (d. h. ω_α sei nicht mit ω konfinal). In S seien zwei Funktionen $f(x)$ und $\delta(x)$ mit Werten aus S bzw. $W(\omega_\alpha)$ definiert, so daß $\delta(S)$ eine zusammengehörige Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ mit $0\in\delta(S)$ ist. Seien A, B, C und D, E die folgenden Bedingungen:

A: $\delta(x)$ ist bestimmt divergent,

B: Für alle $x\in S$ mit $\delta(x)>0$, gilt $\delta(f(x))<\delta(x)$,

C: $f(x)$ ist bestimmt divergent,

D: Für alle $\gamma\in\delta(S)$, die Mächtigkeit der Menge $\{x\in S:\delta(x)=\gamma\}$ ist kleiner als $\aleph_{cf(\alpha)}$,

E: Für alle $x\in S$, die Mächtigkeit der Menge $\{y\in S:f(y)=x\}$ ist kleiner als $\aleph_{cf(\alpha)}$.

In [1] wurde der folgende Satz bewiesen:

1. *Wenn $cf(\alpha)>0$ gilt, so folgt aus jeder zwei der Bedingungen* A, B *und* C (*oder* D, B *und* E), *die Negation der dritten.*

Sei nun M eine zusammengehörige Teilmenge von S und sei ferner in M eine Funktion $f(x)$ mit $f(M)\subseteq S$ und in S eine Funktion $\delta(x)$ mit $\delta(S)\subseteq W(\omega_\alpha)$ definiert, so daß für alle $x\in M$, $\delta(f(x))<\delta(x)$ mit $\delta(x)>0$ gilt. Wir nehmen an, daß $\delta(M)$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist; dann gilt der folgende Satz ([2]).

2. *Wenn ω_α $(\alpha>0)$ regulär ist, so folgt aus jeder zwei der Bedingungen* A, B *(für $x\in M$) und* C [*oder* D, B *(für $x\in M$) und* E], *die Negation der dritten.*

Ist ω_α singulär, so gilt dieser Satz in allgemeinen nicht mehr.

Wir betrachten nun die folgenden Bedingungen:

A′: $\delta(x)$ ist fast-monoton,

B′ $\equiv$ B (für $x\in M$ statt $x\in S$),

C′: $f(x)$ ist fast-monoton.

Dann gilt der folgende Satz:

I. *Wenn $cf(\alpha)>0$ ist, so folgt aus jeder zwei der Bedingungen* A′, B′ *und* C′ *die Negation der dritten.*

Wir werden noch den folgenden Satz beweisen:

II. *Wenn*

1. $cf(\alpha)>0$,
2. $\delta(M)$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *ist und*
3. $f(x)$ *und* $\delta(x)$ *fast-monoton sind,*

so gibt es eine Teilmenge E von M, so daß

4. $\delta(E)$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *ist und*
5. *für alle* $x\in E$, $\delta(f(x))\geqq\delta(x)$ *gilt.*

Bei dem Beweis dieses Satzes wenden wir den folgenden Satz an ([2]):

III. *Wenn $cf(\alpha)>0$ und* B′ *gültig sind und $\delta(M)$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist, so existiert eine Teilmenge E von M, so daß*

a) $\delta(E)$ *eine stationäre Teilmenge von* $\delta(M)$ *ist und*

b) $\delta(f(E))<\delta(E)$ *gilt.*

Wir brauchen folgende Definitionen und Bezeichnungen (vgl. z. B. [3]). Ist $\varDelta$ eine Ordnungszahl, so bedeute $W(\varDelta)$ die Menge aller Zahlen ξ, für die $\xi<\varDelta$ ist. Sind M und N zwei Teilmengen von $W(\omega_\alpha)$ ohne Maximum, so heißen M und N zusammengehörig, wenn es zu jeder Ordnungszahl jeder der beiden Mengen eine größere Ordnungszahl in der anderen Menge gibt. Sind μ und ν zwei Limeszahlen, so heißt μ konfinal mit ν, wenn μ der Limes einer wachsenden Folge vom Typ ν ist. Ist α eine Limeszahl, so bedeute $cf(\alpha)$ den Index γ der kleinsten Ordnungszahl ω_γ, mit der α konfinal ist. Eine Teilmenge M von $W(\varDelta)$ heißt in $W(\varDelta)$ abgeschlossen, wenn sie zu jeder Fundamentalfolge von Zahlen aus ihr auch deren Limes enthält, sofern dieser $<\varDelta$ ist. Eine in $W(\varDelta)$ abgeschlossene, mit $W(\varDelta)$ zusammengehörige Teilmenge M von $W(\varDelta)$ heißt ein Band von $W(\varDelta)$. Eine Teilmenge M von $W(\varDelta)$ heißt stationär, wenn $W(\varDelta)-M$ kein Band von $W(\varDelta)$ enthält. Eine auf einer mit $W(\varDelta)$ zusammengehörigen Teilmenge M von $W(\varDelta)$ definierte Funktion $\varphi(\xi)$ mit Werten aus $W(\varDelta)$ heißt bestimmt divergent, wenn es zu jedem $\alpha<\varDelta$ eine β gibt, so daß $\varphi(\xi)>\beta$ für $\xi\geqq\alpha$ gilt. Eine auf einer mit $W(\varDelta)$ zusammengehörige Teilmenge M von $W(\varDelta)$ definierte Funktion $\psi(\xi)$ mit Werten aus $W(\varDelta)$ heißt fast-monoton, wenn sie bestimmt divergent und für jedem $\beta<\varDelta$, $\psi(W(\beta)\cap M)$ beschränkt ist.

B e w e i s d e s S a t z e s I. Es sei $\{\delta(f(x))\}_{x\in M}\cap(\delta(S)-\delta(M))=D$. Betrachten wir für jedes $x\in M$ die Folge

$$(1)\qquad f^0(x)=x,\quad f^1(x)=f(x),\quad f^2(x),\dots,f^n(x),\dots,$$

wo $f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$ $(n>0)$ ist, wenn $f^{n-1}(x)\in M$ gilt.

(i) Seien $m<n$ zwei nicht-negative Zahlen, für die $f^n(x)$ und $f^n(x)$ existieren. Wenn eine Zahl l mit $m \leqq l < n$ existiert, für die $\delta(f^l(x)) \neq 0$ ist, so gilt

$$f^n(x) \neq f^m(x).$$

Wäre die Behauptung falsch, so ergäbe sich aus der Bedingung B', daß einerseits

$$\delta(f^m(x)) \geqq \delta(f^{m+1}(x)) \geqq \cdots \geqq \delta(f^l(x)) > \delta(f^{l+1}(x)) \geqq \cdots \geqq \delta(f^n(x)),$$

andererseits

$$\delta(f^n(x)) = \delta(f^m(x))$$

gilt, was unmöglich ist.

Daraus folgt, daß für jedes $x \in M$ eine nicht-negative Zahl n existiert, so daß $\delta(f^n(x)) \in D \cup \{0\}$ ist. Wäre die Behauptung falsch, dann ergäbe sich aus B' und (i), daß die Elemente der Folge (1) verschieden sind und

$$\delta(x) > \delta(f(x)) > \delta(f^2(x)) > \cdots > \delta(f^n(x)) > \cdots$$

besteht. Das wäre aber eine Unmöglichkeit, weil jede absteigende Folge von Ordnungszahlen nur endlich viele Glieder enthält. Für jedes $x \in M$ bezeichnen wir mit $n(x)$ die kleinste Zahl l, für die $\delta(f^l(x)) \in D \cup \{0\}$.

Es sei E eine zusammengehörige Teilmenge von Typ $\omega_{cf(\alpha)}$ von M. Jedem Element x von E entspricht also eine nicht-negative ganze Zahl $n(x)$. Es sei n eine solche Zahl und

$$E_n = \{x \in E : \delta(f^n(x)) \in D \cup \{0\}\}.$$

Da $cf(\alpha) > 0$ und E eine zusammengehörige Teilmenge vom $\omega_{cf(\alpha)}$ von ist, so existiert ein Index n_0, so daß E_{n_0} eine zusammengehörige Teilmenge von E ist.

Aus A′ und C′ folgt, daß die Mengen $f^n(E_{n_0})(0 < n \leqq n_0)$ und $\delta(f^{n_0}(E_{n_0}))$ mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig sind.

Nach der Bedingung A′ gibt es zu jedem $\gamma \in W(\omega_\alpha)$ zwei kleinste Zahlen $\varphi(\gamma) = y_\gamma$ und $\psi(\gamma) = z_\gamma$ mit $\varphi(\gamma) > \gamma$ und $\psi(\gamma) > \gamma$, so daß $\delta(\xi) > \delta(\gamma)$, $\delta(\xi) > \gamma$ für $\xi \in S$ mit $\xi > \varphi(\gamma)$ bzw. $\delta(\xi) < \psi(\gamma)$ für $\xi \in S$ mit $\xi < \gamma$ gilt. Nach der Bedingung C′ gibt es zu jedem $\gamma \in W(\omega_\alpha)$ zwei kleinste Zahlen $\tau(\gamma) = u_\gamma$ und $\varrho(\gamma) = v_\gamma \in W(\omega_\alpha)$ mit $\tau(\gamma) > \gamma$ und $\varrho(\gamma) > \gamma$, so daß $f(\xi) > f(\gamma)$, $f(\xi) > \gamma$ für $\xi \in M$ mit $\xi > \tau(\gamma)$ bzw. $f(\xi) < \varrho(\gamma)$ für $\xi \in M$ mit $\xi < \gamma$ gilt.

Mit Hilfe transfiniter Induktion bestimmen wir beginnend mit irgendeinem $\gamma_0 \in f^{n_0-1}(E_{n_0})$ eine mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörige Fundamentalfolge $\gamma_\eta \in f^{n_0-1}(E_{n_0})$ wie folgt. Nehmen wir an, daß wir alle γ_η mit $\eta < \nu$ gefunden haben, so daß

$$\min\{\gamma_\eta, f(\gamma_\eta), \delta(\gamma_\eta), \delta(f(\gamma_\eta))> \pi_\gamma =$$

$$= \sup\{\{\gamma_\xi\}_{\xi<\eta} \cup \{f(\gamma_\xi)\}_{\xi<\eta} \cup \{\delta(\gamma_\xi)\}_{\xi<\eta} \cup \{\delta(f(\gamma_\xi))\}_{\xi<\eta}\}$$

für alle $\eta<\nu$ gilt. Wenn die Mengen $\{\gamma_\eta\}_{\eta<\nu}, \{f(\gamma_\eta)\}_{\eta<\nu}, \{\delta(\gamma_\eta)\}_{\eta<\nu}$ und $\{\delta(f(\gamma_\eta))\}_{\eta<\nu}$ nicht zu $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig sind, so sei μ_ν die kleinste Zahl $\in S$ mit $\pi_\eta<\mu_\nu$. Sei ferner

$$\max\{z_{\mu_\nu}, v_{\mu_\nu}\} = \mu'_\nu \quad \text{und} \quad \tau(y_{\mu'_\nu}) = \mu''_\nu.$$

Wir definieren γ_ν als die kleinste Zahl $\gamma\in f^{n_0-1}(E_{n_0})$, für die $\mu''_\nu<\gamma$ gilt. Durch diesen Prozeß ergibt sich eine Fundamentalfolge $H=\{\gamma_\eta\}_{\eta<\sigma}\subseteq f^{n_0-1}(E_{n_0})$, die mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig ist — σ ist eine Limeszahl — und für die

$$\min\{\gamma_\xi, f(\gamma_\xi), \delta(\gamma_\xi), \delta(f(\gamma_\xi))\} > \pi_\eta$$

für alle $\eta<\xi$ gilt.

Da $W(\omega_\alpha)-\delta(M)$ keine abgeschlossene und mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörige Teilmenge enthält und $\delta(f^{n_0}(E_{n_0}))\subseteq W(\omega_\alpha)-\delta(M)$ gilt, so gibt es eine Limeszahl k und eine Teilfolge $\{\gamma_{\eta_\xi}\}_{\xi<k}$ von H, so daß

$$\lim_{\xi<k}\delta(f(\gamma_{\eta_\xi})) = \gamma^*\in\delta(M).$$

Aus $\gamma^*\in\delta(M)$ folgt, daß eine Zahl $\beta^*\in M$ existiert, für die $\delta(\beta^*)=\gamma^*$. Da $\delta(f(\beta^*))<\delta(\beta^*)$ gilt, so gibt es eine Zahl ξ_0, so daß

$$\delta(f(\beta^*))<\gamma_{\xi_0}.$$

Offenbar ist

$$\mu''_{\xi_0+2}<\delta(\beta^*)=\gamma^*.$$

Daraus folgt, daß $\mu_{\xi_0+2}<\beta^*$ gilt, d. h. $f(\beta^*)>y_{\mu'_{\xi_0+1}}$, d. h. $\delta(f(\beta^*))>\gamma_{\xi_0}$. Dies steht im Widerspruch zu $\delta(f(\beta^*))<\gamma_{\xi_0}$. Damit ist der Satz bewiesen.

B e w e i s d e s S a t z e s II. Seien $M_1=\{x\in M:\delta(f(x))<\delta(x)\}$ und $M_2=\{x\in M:\delta(f(x))\geqq\delta(x)\}$. Es ist offenbar, daß $\delta(M)=\delta(M_1)\cup\delta(M_2)$. Nehmen wir an, daß der Satz II falsch ist. Dann ergibt sich, da $\delta(M)$ stationär ist, daß $\delta(M_1)$ stationär ist. Da $\delta(x)$ fast-monoton ist, so ist M_1 mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig. Nach dem Satz III existiert eine mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörige Teilmenge M'_1 von M_1, so daß $\delta(M'_1)$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist und $\delta(f(M'_1))<\delta(M'_1)$. Da $\delta(x)$ fast-monoton ist, so ist M'_1 eine mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörige Teilmenge von M_1. Dies steht im Widerspruch zur Ungleichung $\delta(f(M'_1))<\delta(M'_1)$, weil $f(x)$ auch eine fast-monotone Funktion ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir beweisen nun, daß der Satz 2 für singuläre $\aleph_\alpha$ im allgemeinen nicht mehr gilt. Seien nämlich X, Y und Z drei abgeschlossene Teilmengen vom Typ $\omega_{cf(\alpha)}$ von $W(\omega_\alpha)$, so daß $X<Y<Z$ gilt und Z mit $W(\omega_\alpha)$ konfinal ist. Seien ferner $\{x_\xi\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$, $\{y_\xi\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$ und $\{z_\xi\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$, die zu X, Y und Z gehörige wachsende Funktionen und $Z'=\{z_{\omega\cdot\xi}\}_{\xi<\xi_{cf(\alpha)}}$, $Z''=\{z_{\omega.\xi+1}\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$, $Y'=\{y_{\omega\cdot\xi}\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$, $X'=\{x_{\omega\cdot\xi}\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$, $X''=\{x_{\omega\cdot\xi+1}\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$. Wir definieren zwei Funktionen $\delta(x)$ und $f(x)$ in $S=Z'\cup Z''\cup Y\cup X'\cup X''$ bzw. in $M=Z'\cup Y\cup X'$ wie folgt. Es sei $\delta(z_{\omega\cdot\xi})=z_{\omega(\xi+1)}$, $\delta(z_{\omega\cdot\xi+1})=z_{\omega\cdot\xi}$, $\delta(y_\xi)=z_{\omega\cdot\xi}$, $\delta(x_{\omega\cdot\xi})= =y_{\omega\cdot(\xi+1)}$, $\delta(x_{\omega\cdot\xi+1})=y_{\omega\cdot\xi}$, $f(z_{\omega\cdot\xi})=z_{\omega\cdot\xi+1}$, $f(y_\xi)=x_{\omega\cdot\xi+1}$ und $f(x_{\omega\cdot\xi})=x_{\omega\cdot\xi+1}$. Offenbar ist $\delta(M)=Z'\cup Y'$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ und $f(M)=Z''\cup X''$. Man kann leicht einsehen, daß die Funktionen die Bedingungen A, B, C, D und E erfüllen.

Literatur

[1] G. Fodor, Über transfinite Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 343—345.
[2] G. Fodor, Über transfinite Funktionen. II, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 289 - 295.

(Eingegangen am 19. September 1960)

Integration with respect to operator-valued functions

By GREGERS L. KRABBE in Lafayette (Indiana, U. S. A.)

1. Introduction

1.1. Our basic problem is to integrate scalar-valued functions with respect to operator-valued functions that are not of bounded variation.

Given a fixed measure space (R, μ), let $\mathfrak{E}_r$ denote the Banach space of endomorphisms of $L_r(R, \mu)$ (see [4, p. 51][1])). Let J be a fixed compact subinterval of $]-\infty, \infty[$. Suppose that E_r is a function on J which assumes its values in $\mathfrak{E}_r$; this article is chiefly concerned with the convergence in $\mathfrak{E}_r$ of the integral

$$\int_J f(\lambda) \cdot dE_r(\lambda), \tag{1}$$

where f belongs to the class $\mathfrak{D}(J)$ of all simply-discontinuous, complex-valued functions. The integrator E_r need not be of bounded variation in the sense of HILLE [4, p. 59]; see for example 10.7. Part III of this article deals with applications to the theory of multipliers of Fourier series.

Suppose for a moment that E_r is a resolution of the identity in $L_2(R, \mu)$ (in the sense of [17, p. 174]). The integral (1) need not converge in $\mathfrak{E}_2$ for all f in $\mathfrak{D}(J)$. This situation is remedied by interpreting (1) in the *modified* Pollard—Moore—Stieltjes sense [3, p. 273]; the integral shall then be symbolized by either of the following two notations:

$$\mathbf{E}_r(f) = (\mathfrak{E}_r) \oint f \cdot dE_r. \tag{2}$$

1.2. The Wiener—Young class $\mathfrak{W}_p(J)$ consists of all complex-valued functions f such that $V_p(f) \neq \infty$, where

$$V_p(f) = \sup \Big(\sum_k |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|^p\Big)^{1/p}$$

over every choice of a finite number of non-overlapping subintervals $[\alpha_k, \beta_k]$

[1]) The topology of $\mathfrak{E}_r$ is also called the uniform operator-topology.

of J (WIENER [18], YOUNG [19], and 4.2). Let $L^0 = L^0(R, \mu)$ be the class of all (R, μ)-simple functions. If $T \in \mathfrak{C}_2$, then we define:

(3) $$|T|_r = \sup \{\|Tx\|_r : x \in L^0 \text{ and } \|x\|_r \leqq 1\};$$

it is clear that the eventuality $|T|_r \neq \infty$ implies that $T_r \in \mathfrak{C}_r$, where T_r denotes the continuous extension of T from L^0 to $L_r(R, \mu)$.

1.3. Suppose that E is a resolution of the identity in $L_2(R, \mu)$ such that

(v) $$\infty \neq \sup_{\lambda \in J} |E(\lambda)|_s \textit{ whenever } 1 < s < \infty.$$

The integrator E_r is now defined for all λ in J by the relation $E_r(\lambda) = E(\lambda)_r$ (as in 1.2, $E(\lambda)_r$ is the continuous extension to $L_r(R, \mu)$). It will be proved that, if $1 \leqq p < \infty$, then there exists an interval $I(p)$ such that the integral (2) converges in $\mathfrak{C}_r$ for each r in $I(p)$ whenever $f \in \mathfrak{W}_p(J)$. It turns out that the mapping $f \to \mathbf{E}_r(f)$ is a continuous linear transformation of the Banach space $\mathfrak{W}_p(J)$ into $\mathfrak{C}_r$. If $p > q$ then:

$$\mathfrak{D}(J) \supset \mathfrak{W}_p(J) \supset \mathfrak{W}_q \supset \mathfrak{W}_1(J) = \{\text{bounded variation}\}$$
$$2 \in I(p) \subset I(q) \subset I(1) =]1, \infty[.$$

1.4. Motivation. Suppose $1 < r < \infty$, $r \neq 2$. Let f be the function defined by $f(\lambda) = \lambda$ for each λ in J. There are some integrators E_r with the following property: there exists no spectral measure M such that

$$\int \lambda \cdot M(d\lambda) = (\mathfrak{C}_r) \oint f \cdot dE_r,$$

although the integral on the right-hand side converges. More details are given in 6.1 and 10.7.

2. Two applications to the theory of multiplier transformations

2.1. Consider a complete orthonormal system $\{\Phi_n : n \in R\} \subset \mathfrak{D}(J)$, where R is now a subset of the integers. In this case, the measure space (R, μ) is so chosen that $L_r(R, \mu)$ becomes the sequence space usually denoted l_r. If $x \in l_1$, let $\hat{x}$ be the function defined as follows:

$$\hat{x}(\lambda) = \sum_{\nu \in R} x_\nu \cdot \Phi_\nu(\lambda) \qquad (\lambda \in J).$$

If $f \in \mathfrak{D}(J)$, then $f \# x$ is defined as the sequence of Fourier coefficients of the function $\lambda \to f(\lambda) \cdot \hat{x}(\lambda)$. Let $f_\#$ denote the mapping $x \to f \# x$ defined on l_1; HIRSCHMAN[2]) calls $f_\#$ a "*multiplier transformation*".

---

[2]) The writer is indebted to Professors HIRSCHMAN, GOFFMAN, and HENRIKSEN for valuable suggestions.

An important problem in the theory of multiplier transformations is to find conditions on f which will insure that $|f_{\#}|_r \neq \infty$; this in turn implies that the continuous extension $f_{\# r}$ belongs to $\mathfrak{E}_r$. In § 10 we examine two systems $\{\Phi_n : n \in R\}$ that give rise to a resolution of the identity E; condition 1.3 (v) is satisfied in both cases, and it results from our theory that

(i) *if* $f \in \mathfrak{W}_p(J)$ *and* $r \in I(p)$, *then* $|f_{\#}|_r \neq \infty$.

In fact, it will be proved that

(ii) *if* $f \in \mathfrak{W}_p(J)$ *and* $r \in I(p)$, *then* $f_{\# r} = \mathbf{E}_r(f) \in \mathfrak{E}_r$.

The first system $\{\Phi_n : n \in R\}$ is the system of normalized Legendre polynomials (see 10.5); the proof of (i)—(ii) depends in this case on an article by HIRSCHMAN [7]. Property (i) was discovered by HIRSCHMAN [5] in the case where $\{\Phi_n : n \in R\}$ is the trigonometric system; for this second system we derive (i)—(ii) directly from two properties of the Hilbert transformation on l_p (see 10.6).

3. Hölder-type inequalities and the variation-norm

3.1. We now return to the general setting described in 1.3. Suppose that $(x, y) \in L^0 \times L^0$; the relation

$$E_{x,y}(\lambda) = \int_R y \cdot E(\lambda) x \cdot d\mu \qquad (\lambda \in J)$$

defines a complex-valued function $E_{x,y}$. We write

$$U_r = \{(x, y) \in L^0 \times L^0 : \|x\|_r \leqq 1 \text{ and } \|y\|_{r'} \leqq 1\}, \tag{1}$$

where $r' = r/(r-1)$. The variation-norm is defined as follows:

$$V_q(E)_r = \sup \{V_q(E_{x,y}) : (x, y) \in U_r\}.$$

When $f \in \mathfrak{D}(J)$ it is easy to verify the familiar inequalities

$$\left|(\mathfrak{E}_2) \oint f \cdot dE_2\right|_2 \leqq V_1(E)_2 \cdot \mathfrak{N}(f; J)_\infty < \infty, \tag{iii}$$

where $\mathfrak{N}(f; J)_\infty = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in J\}$. The norm $W(f)_p = \mathfrak{N}(f; J)_\infty + V_p(f)$ makes $\mathfrak{W}_p(J)$ into a Banach space.

Suppose $1 < p < \infty$ and $r \in I(p)$. Our approach involves establishing the existence of a number $q > 1$ such that $q^{-1} + p^{-1} > 1$ and

$$\left|(\mathfrak{E}_r) \oint f \cdot dE_r\right|_r \leqq B(r, p) \cdot V_q(E)_r \cdot W(f)_p < \infty \tag{iii*}$$

(where $B(r, p)$ is independent of f and E), for all f in $\mathfrak{W}_p(J)$. This is closely related to a theorem obtained for scalar-valued integrators by LOVE and YOUNG [15]; in fact, their results originate from the same inequality[3]) that we use to prove (iii*). A suitable definition of $V_\infty(E)_r$ conserves the inequality (iii*) in the case $p=1$ (see 9.7).

PART I

4. Preliminaries

4.1. A closed interval J is kept fixed throughout. Let $\mathfrak{J}$ be the family of all half-open intervals $]\alpha, \beta]$ with end-points α, β in J. Let Π be the class of all finite families of disjoint members of $\mathfrak{J}$. In other words, if $\pi \in \Pi$, then π is a disjoint family of intervals $i =]\alpha, \beta] \subset J$.

4.2. Suppose that F is a vector-valued function on J. In case $i \in \mathfrak{J}$ we write

(1) $$\Delta F(i) = F(\beta) - F(\alpha) \text{ whenever } i =]\alpha, \beta].$$

The relation (1) defines on $\mathfrak{J}$ the function ΔF. If a is a subset of $]-\infty, \infty[$, then $\mathfrak{F}(a)$ will denote the class of all complex-valued functions on a. If $\varphi \in \mathfrak{F}(a)$, we shall write

$$\mathfrak{N}(\varphi; a)_p = \Big(\sum_{i \in a} |\varphi(i)|^p\Big)^{1/p},$$

and

$$\mathfrak{N}(\varphi; a)_\infty = \sup\{|\varphi(i)| : i \in a\}.$$

In case $F \in \mathfrak{F}(J)$ and $1 \leqq p \leqq \infty$, then we write

(2) $$V_p(F) = \sup_{\pi \in \Pi} \mathfrak{N}(\Delta F; \pi)_p.$$

5. The variation-norm

5.1. Besides the interval J, we hold fixed a measure space (R, μ). Let $L^0 = L^0(R, \mu)$ be the corresponding class of (R, μ)-simple functions. The spaces $L_r = L_r(R, \mu)$ are subjected to the usual norm $\|x\|_r$. Let $\mathfrak{L}(L_r, L_r)$ denote the class of all linear mappings of L_r into itself.

If $T \in \mathfrak{L}(L_2, L_2)$ and $(x, y) \in L^0 \times L^0$, then we may write

$$T_{x,y} = \int_R y \cdot Tx \cdot d\mu.$$

[3]) Due to L. C. YOUNG [19].

Note that

(1) $$|T|_r = \sup\{|T_{x,y}| : (x, y) \in U_r\};$$

$|T|_r$ was defined in 1.2 (3) and U_r in 3.1 (1).

Unless otherwise specified, E will consistently denote a function on J which assumes its values in $\mathfrak{L}(L_2, L_2)$. If $(x, y) \in L^0 \times L^0$ and $\lambda \in J$, then $E(\lambda)$ is some member T of $\mathfrak{L}(L_2, L_2)$, so that $E(\lambda)_{x,y} = T_{x,y}$ is a scalar; the function $E_{x,y}$ is defined by the relation

(2) $$E_{x,y}(\lambda) = E(\lambda)_{x,y} \qquad (\lambda \in J).$$

In case $1 \leqq r, q \leqq \infty$ we define

(3) $$V_q(E)_r = \sup\{V_q(E_{x,y}) : (x, y) \in U_r\}.$$

5.2. Theorem. *If $M(\alpha, \beta) = V_{1/\beta}(E)_{1/\alpha}$, then $\log M(\alpha, \beta)$ is a convex function of (α, β) in the rectangle $0 \leqq \alpha, \beta \leqq 1$.*

5.3. Remark. Let $P_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ and $P_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ be any two points in the rectangle $[0, 1] \times [0, 1]$. Theorem 5.2 is clearly equivalent to the following assertion: if $0 \leqq t \leqq 1$ and

(4) $$(\alpha, \beta) = tP_0 + (1-t)P_1,$$

then

(5) $$M(\alpha, \beta) \leqq M(P_0)^t \cdot M(P_1)^{1-t}.$$

Proof of 5.2. Take $(x, y) \in L^0 \times L^0$ and $\pi \in \Pi$; set $T(x, y) = \Delta E_{x,y}$ (see 4.2 (1)). Note that $T(x, y) \in \mathfrak{F}(\pi)$. In view of (5), 5.1 (3), and 4.2 (2), it will clearly suffice to show that

(6) $$\mathfrak{N}(T(x, y); \pi)_{1/\beta} \leqq M(P_0)^t \cdot M(P_1)^{1-t} \cdot \|x\|_r \cdot \|y\|_{r'},$$

where $r' = r/(r-1)$ and $r = 1/\alpha$. Counting-measure μ_0 makes (π, μ_0) into a measure space such that the norm of $L_r(\pi, \mu_0)$ coincides with the norm $\{\varphi \to \mathfrak{N}(\varphi; \pi)_r\}$ (see 4.2). It is easily checked that $\{(x, y) \to T(x, y)\}$ is a multilinear mapping into the class of μ_0-measurable functions on the set π; the conclusion (6) is now a direct consequence of the Riesz—Thorin theorem [20, p. 106].

6. The type of integrator that will be used

6.1. Let M be a spectral measure which assumes its values in the space $\mathfrak{E}_r$ (see 1.1). By definition, M is weakly countably-additive and satisfies the relation

(v*) $$\infty \neq \sup_{\sigma \in \mathfrak{B}} |M(\sigma)|_r,$$

where $\mathfrak{B}$ is the ring of Borel subsets of J (see [1, p. 324]). Consequently, the integral

$$\int_J f(\lambda)\cdot M(d\lambda)$$

can be defined when $f \in \mathfrak{D}(J)$ (see [1, p. 340]). It will be shown in 10.7 that this type of integration is too restrictive for our purposes. Let $\mathfrak{C}(J)$ be the class of all complex-valued, continuous functions on J, and suppose that E_r assumes its values in $\mathfrak{E}_r$. If $\infty \neq V_1(E_r)_r$, then the Stieltjes integral

$$\int_J f(\lambda)\cdot dE_r(\lambda) \qquad (\text{where } f \in \mathfrak{C}(J)), \tag{1}$$

is easily seen to converge in $\mathfrak{E}_r$. General results concerning the case $\infty = V_1(E_r)_r$ have apparently not yet been published. In 10.7 will be displayed an integrator E_r with $\infty = V_1(E_r)_r$ when $r \neq 2$, $1 < r < \infty$, although the integral (1) converges in $\mathfrak{E}_r$. Let M be the extension to the Borel ring $\mathfrak{B}$ of the set-function ΔE_r (defined by 4.2 (1)); in view of 5.1 (1) it is easily verified that

$$\sup_{\pi \in \Pi} \Big|\sum_{i \in \pi} \Delta E_r(i)\Big|_r \leqq V_1(E_r)_r \leqq 4 \sup_{\sigma \in \mathfrak{B}} |M(\sigma)|_r, \tag{2}$$

where the second inequality comes from [2, p. 97], 5.1 (2) and 5.1 (1). Consequently, from (2) and [4, p. 60] it follows that $\infty \neq V_1(E_r)_r$ iff E_r is of "*bounded variation*" as defined in [4, p. 59].[5])

6.2. Remark. If M is a spectral resolution, or if $E = E_r$ is a resolution of the identity in $L_2(R, \mu)$ (cf. [17, p. 174]), then the relation

$$\infty \neq V_1(E)_2 \tag{iv}$$

follows easily from 6.1 (2).

6.3. Definitions. Set $L_2 = L_2(R, \mu)$. We will say that E is a $V(R, \mu)$-type integrator iff E is a function on J that assumes its values in $\mathfrak{L}(L_2, L_2)$, and which simultaneously satisfies (iv) and

$$\infty \neq \sup_{\lambda \in J} |E(\lambda)|_s \quad \textit{whenever} \quad 1 < s < \infty. \tag{v}$$

If $1 \leqq p < \infty$, then

$$I(p) = \left\{\lambda : \frac{2p}{p+1} < \lambda < \frac{2p}{p-1}\right\},$$

and $I(\infty)$ will denote the limit (as $p \to \infty$) of the closure of $I(p)$.

---

[5]) 'iff' stands for 'if and only if'.

6.4. Remark. Note that $I(\infty)$ is the set whose only element is 2. let I be the region obtained by adding the vertex $P_0=(1/2, 1)$ and the open base segment $OB=]0,1[$ to the open triangle OBP_0 (see Fig. 1 below). If $0\leqq\beta<1$ it is immediately verified that

(3) $$(\alpha,\beta)\in I \quad \text{iff} \quad \frac{1}{2}\beta<\alpha<1-\frac{1}{2}\beta.$$

Consequently, if $1\leqq p<\infty$, then

(4) $r\in I(p)$ iff $(1/r, 1/p')\in I$,

where $p'=p/(p-1)$.

6.5. Lemma. *Suppose* $1<p<\infty$ *and* $r\in I(p)$. *There exists a number* q *such that* $(r^{-1}, q^{-1})\in I$ *and* $1<q^{-1}+p^{-1}$.

Proof. From (4) and (3) it follows readily that

$$m'=\frac{1}{2}\frac{1}{p'}<m''=$$
$$=\min\left\{\frac{1}{r}, 1-\frac{1}{r}\right\}.$$

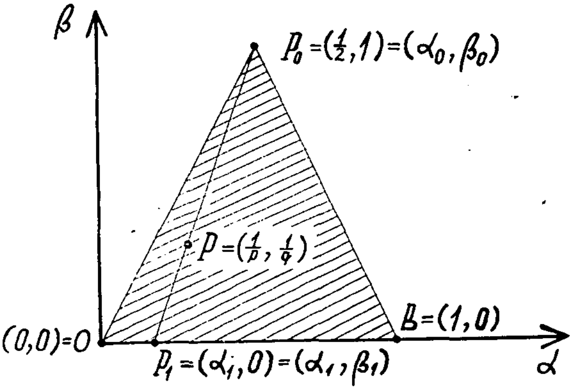

Fig. 1

Choose q such that $m'<(2q)^{-1}<m''$. From $(2q)^{-1}>m'$ follows $q^{-1}+p^{-1}>1$, and the relation $(r^{-1}, q^{-1})\in I$ comes from $(2q)^{-1}<m''$ and 6.4 (3).

6.6. In case $1<p<\infty$ and $r\in I(p)$, we define

$$E(r,p)=V_q(E)_r,$$

where q is the number that was mentioned in 6.5. It will be convenient to write $E(2,\infty)=V_1(E)_2$ and $E(r,1)=2\sup\{|E(\lambda)|_r:\lambda\in J\}$.

6.7. Theorem. *Let E be a $V(R,\mu)$-type integrator. If* $1\leqq p\leqq\infty$ *and* $r\in I(p)$, *there exists a number t in* $[0,1]$ *and a number s such that* $1<s<\infty$ *and*

(5) $$E(r,p)\leqq E(2,\infty)^t\cdot E(s,1)^{1-t}<\infty.$$

Proof. Note first that $t=1$, 0 when $p=\infty$, 1, respectively. Next, suppose $1<p<\infty$. From 6.5 we see that the point $P=(r^{-1}, q^{-1})$ lies in the open triangle I; since $P_0=(\alpha_0,\beta_0)$ is the vertex of I, it follows that the line from P_0 to the point P meets the open basis-segment $OB=]0,1[$ at a point $P_1=(\alpha_1,\beta_1)=(\alpha_1, 0)$ (see Fig. 1). Therefore $P=(\alpha,\beta)=(r^{-1}, q^{-1})$ lies on the open segment $]P_0, P_1[$, and there exists a number $t \in]0, 1[$ satisfying 5.3 (4). But the convexity theorem 5.2—5.3 shows that 5.3 (4) implies 5.3 (5), and $M(\alpha, \beta) = V_{1/\beta}(E)_{1/\alpha} = E(r, p)$; a similar reformulation of $M(P_0)$ and $M(P_1)$ yields the conclusion.

7. Inequalities for Riemann sums

7.1. Until further notice, E will be a $V(R, \mu)$-type integrator (see Definition 6.3). The variation $V(f)_p$ was defined by 4.2 (2) in the case $f \in \mathfrak{F}(J)$; now set

$$\mathfrak{W}_p(J) = \{f \in \mathfrak{F}(J);\ \infty \neq V_p(f)\},$$

and

$$W(f)_p = V_p(f) + \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in J\}.$$

Let λ' and λ'' be the end-points of the interval J; we have $J = [\lambda', \lambda'']$ and $-\infty < \lambda' < \lambda'' < \infty$. A member π of the class Π (defined in 4.1) will be called a *partition for J* if π is a cover[4]) of $]\lambda', \lambda'']$. In other words: π is a partition for J iff π is a finite, disjoint family of intervals $]\alpha, \beta] \subset J$ such that

$$]\lambda', \lambda''] = \bigcup \{i : i \in \pi\}.$$

7.2. Definition. The domain of a function z will be denoted $[z]$. The class $\mathfrak{Z}$ will consist of all functions z such that $[z]$ is a partition for J, while

$$z_i \in \operatorname{int}(i) \textit{ for each } i \textit{ in } [z];$$

$(\operatorname{int}(i) =$ the interior of $i)$.

7.3. Remarks. Suppose $z \in \mathfrak{Z}$. The members of the partition $[z]$ can be arranged in such a way that we can write $[z] = \{i(k) : 1 \leqq k \leqq n\}$, where $i(k) =]d_{k-1}, d_k]$ and $\lambda' = d_0 < d_1 < \ldots < d_n = \lambda''$ (recall that $[\lambda', \lambda''] = J$); if $c_k = z_{i(k)}$, then $d_{k-1} < c_k < d_k$. We write

$$(1) \qquad S(f;\, z) = \sum_{i \in [z]} f(z_i) \cdot \Delta E(i) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(E(d_k) - E(d_{k-1})).$$

7.4. Lemma. *If $f \in \mathfrak{W}_1(J)$ and $z \in \mathfrak{Z}$, then*

$$|S(f;\, z)|_r \leqq E(r, 1) \cdot W(f)_1.$$

Proof. An application to 7.3 (1) of ABEL's partial summation formula shows that

$$S(f;\, z) = \sum_{k=2}^{n} (f(c_{k-1}) - f(c_k)) E(d_{k-1}) - f(c_1) E(d_0) + f(c_n) E(d_n);$$

the conclusion now comes from the definition (given in 6.6) of $E(r, 1)$.

---

[4]) In the sense of [10, p. 49].

7.5. Lemma. *Suppose $p^{-1}+q^{-1}>1$ and $z \in \mathfrak{Z}$. If $f \in \mathfrak{F}(J)$ and $g \in \mathfrak{F}(J)$, then*

$$\Big|\sum_{i\in[z]} f(z_i)\cdot \Delta g(i)\Big| \leqq A(p,q)\cdot V_q(g)\cdot W(f)_p,$$

where $A(p,q)$ is the number defined as follows:

$$A(p,q)=1+\sum_{n=1}^{\infty} n^{-t} \qquad (t=p^{-1}+q^{-1}).$$

This lemma is due to L. C. YOUNG; its proof is sketched in the appendix.

7.6. Theorem. *Suppose $1\leqq p\leqq\infty$ and $r\in I(p)$. There exists a number $B(r,p)$ with the following property: if $f\in \mathfrak{W}_p(J)$ and $z\in\mathfrak{Z}$, then*

$$|S(f;z)|_r \leqq B(r,p)\cdot E(r,p)\cdot W(f)_p. \tag{2}$$

Proof. We define B as follows. If p is an end-point of the interval $[1,\infty]$ and $r\in I(p)$, then $B(r,p)=1$; if $p\in\,]1,\infty[$ and $r\in I(p)$, then $B(r,p)=A(p,q)$, where q is the number that was introduced in 6.5. If $p=1$, then (2) is a re-statement of 7.4. Now for the case $1<p<\infty$. Suppose that $(x,y)\in U_r$ (as in 3.1 (1)), and let g be the function $E_{x,y}$ that was defined in 5.1 (2): from 7.5 we therefore see that

$$\Big|\sum_{i\in[z]} f(z_i)\cdot \Delta E_{x,y}(i)\Big| \leqq B(r,p)\cdot V_q(E_{x,y})\cdot W(f)_p. \tag{3}$$

From 5.1 (3) and 6.6 follows that $V_q(E_{x,y})\leqq V_q(E)_r = E(r,p)$. Set $T=S(f;z)$ and observe that

$$T_{x,y}=\sum_{i\in[z]} f(z_i)\cdot\Delta E_{x,y}(i).$$

From (3) we accordingly obtain that

$$|T_{x,y}|\leqq B(r,p)\cdot E(r,p)\cdot W(f)_p,$$

and a glance at 5.1 (1) now yields the conclusion (2). In the remaining case $p=\infty$ then $r=2$, and the proof of (2) is exactly the same as above, except that $q=1$; in this case, relation (3) is easily obtained directly.

8. Simply-discontinuous functions

8.1. As before, $\mathfrak{F}(J)$ is the class of all complex-valued functions on J. Let $\mathfrak{D}(J)$ be the class of all f in $\mathfrak{F}(J)$ such that the limits $f(\lambda\pm 0)$ exist for each λ in the interior of J. N. WIENER has proved that $\mathfrak{D}(J)\supset\mathfrak{W}_p(J)$ whenever $1\leqq p\leqq\infty$ (see [18] and [19, p. 261]).

8.2. Lemma. *Suppose $f \in \mathfrak{D}(J)$ and $\varepsilon > 0$. The discontinuities of f on J form a denumerable set N, and there exists a member z^ε of $\mathfrak{Z}$ such that*

$$\Omega(f; \operatorname{int}(i)) \leqq \varepsilon \text{ for each } i \text{ in } [z^\varepsilon], \tag{1}$$

where $\operatorname{int}(i) =$ *interior of* i, *and*

$$\Omega(f; A) = \sup\{|f(\theta) - f(\lambda)| : (\theta, \lambda) \in A \times A\}. \tag{2}$$

This important lemma was first proved by LEBESGUE [13]; see also [9, top of p. 705].

8.3. Remark. If $A \subset J$, let χA denote the characteristic function of the set A. If $\lambda \in J$ we write $e(\lambda) = \chi[\lambda', \lambda]$. In other words:

$$e(\lambda)(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \theta \leqq \lambda \\ 0 & \text{if } \theta > \lambda \end{cases} \qquad (\theta \in J). \tag{3}$$

Note that, if $i =]\alpha, \beta]$, then $\Delta e(i) = e(\beta) - e(\alpha) = \chi i$. Consider the function defined by the equation

$$f^\varepsilon = \sum_i f(z_i^\varepsilon) \cdot \Delta e(i) \qquad (i \in [z^\varepsilon]); \tag{4}$$

this step-function plays an important role in the articles [14, 9]. It is easily seen that, if $f \in \mathfrak{D}(J)$, then

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup\{|f(\lambda) - f^\varepsilon(\lambda)| : \lambda \notin N \text{ and } \lambda \in J\}; \tag{5}$$

in other words: $f = \lim f^\varepsilon$ (as $\varepsilon \to 0+$) uniformly in the complement of the denumerable set N that was introduced in 8.2.

8.4. Definition. The set $\mathfrak{Z}$ can be partially ordered as follows: $z \geqq s$ iff z is a *refinement of* s, in the sense that every member of $[z]$ is a subset of some member of $[s]$.

8.5. Remark. Suppose that z and z' belong to $\mathfrak{Z}$, and let $[z \vee z']$ denote the set $\{(i, i') \in [z] \times [z'] : \emptyset \neq i \cap i'\}$. Let s be a member of $\mathfrak{Z}$ such that $[s]$ is the set $\{i \cap i' : (i, i') \in [z \vee z']\}$. Clearly $s \geqq z$ and $s \geqq z'$. The relation '$\geqq$' directs the set $\mathfrak{Z}$ (see [10, p. 65 and p. 79]).

8.6. Theorem. *Suppose $f \in \mathfrak{D}(J)$ and $\varepsilon > 0$. Let z^ε be as in 8.2. If z and z' are refinements of z^ε which belong to $\mathfrak{Z}$, then*

$$|S(f; z) - S(f; z')|_2 < \varepsilon^* = \varepsilon \cdot E(2, \infty).$$

Proof. Note that

$$S(f; z) = \sum \{f(z_i) \cdot \Delta E(i \cap i') : (i, i') \in [z \vee z']\}.$$

Consequently, if $T=S(f;z)-S(f;z')$ and $(x,y)\in U_2$ (as in 3.1 (1)), then

(6) $$T_{x,y}=\sum\{(f(z_i)-f(z'_{i'}))\cdot(\varDelta E(i\cap i'))_{x,y}:(i,i')\in[z\vee z']\}.$$

Let s be as in 8.5; by transitivity it follows that $s\geqq z^{\varepsilon}$. This says that $i\cap i'\subset j$ for some j in $[z^{\varepsilon}]$. On the other hand, $\emptyset\neq i\cap i'\subset j$, whence both i and i' are included in j. By hypothesis, $z_i\in\operatorname{int}(i)$ and $z'_{i'}\in\operatorname{int}(i')$, so that z_i and $z'_{i'}$ both belong to $\operatorname{int}(j)$. Thus, by 8.2 (1), $|f(z_i)-f(z'_{i'})|\leqq\varepsilon$. Note that $(\varDelta E(s_n))_{x,y}=\varDelta E_{x,y}(s_n)$. Accordingly, from (6) it can be inferred that

$$|T_{x,y}|\leqq\varepsilon\cdot\sum_{n\in[s]}|\varDelta E_{x,y}(s_n)|\leqq\varepsilon\cdot V_1(E)_2.$$

The conclusion now comes from 5.1 (1) and 6.6.

9. The modified Stieltjes integral

9.1. Let $\mathfrak{E}_r$ be the Banach algebra of all bounded linear transformations of $L_r(R,\mu)$ into itself; the topology of $\mathfrak{E}_r$ is the norm-topology (the norm $\{T\to|T|_r\}$ is defined by 1.2 (3)).

Suppose that $f\in\mathfrak{D}(J)$, and let E_r be a function on J which assumes its values in a Banach space $\mathfrak{B}$. We write

(1) $$S(f;z)_r=\sum_{i\in[z]}f(z_i)\cdot\varDelta E_r(i).$$

It is easily seen that the partial ordering '$\geqq$' (defined in 8.4) directs the set $\mathfrak{Z}$; consequently $\{S(f;z)_r, z\in\mathfrak{Z},\geqq\}$ forms a net $(S,\geqq)$ (see [10. p. 65]). If $(S,\geqq)$ converges in the topology of $\mathfrak{B}$, then we will say that f *is* $\mathfrak{B}$-*integrable with respect to* E_r, and denote by

$$(\mathfrak{B})\oint f\cdot dE_r$$

the limit in $\mathfrak{B}$ of the net $(S,\geqq)$.

9.2. Remark. This is a straightforward generalization of what T. H. Hildebrandt calls the "modified Stieltjes σ-integral" (see [3, p. 273] and [9]). Our main theorem (given in 9.5 below) involves the norm-topology of $\mathfrak{E}_r$; the choice of this topology has motivated our choice of the type of integral described in 9.1 (see, however, 9.8). For the sake of brevity, $\mathfrak{E}_r$ will not be subjected to other topologies in this article. Nevertheless, it may be of interest to mention that our main results apply equally well to the ordinary Riemann—Stieltjes integral 1.1 (1) when the latter is interpreted in the strong operator-topology of $\mathfrak{E}_r$.

9.3. The class of step-functions is the linear span of the set $\{e(\lambda) : \lambda \in J\}$ (see 8.3 (3)). It is easily checked that, if $z \in \mathfrak{Z}$ and if g is the step-function $\sum f(z_i) \cdot \Delta e(i)$ (where $i \in [z]$), then

(1) $$(\mathfrak{B}) \oint g \cdot dE_r = \sum_{i \in [z]} f(z_i) \cdot \Delta E_r(i) = S(f;\, z)_r .$$

9.4. Theorem. *Suppose that E_r is a function on J which is of bounded variation in $\mathfrak{C}_r$; then all members of $\mathfrak{D}(J)$ are $\mathfrak{C}_r$-integrable with respect to E_r.*

Proof. Bounded variation is equivalent to the property $\infty \neq V_1(E_r)_r$. Observe that the conclusion of 8.6 is not restricted to the case $r = 2$.

9.5. Main theorem. *Let E be a $V(R, \mu)$-type integrator, as defined in* 6.3. *Set* $1 \leqq p \leqq \infty$ *and* $r \in I(p)$. *If* $f \in \mathfrak{W}_p(J)$ *then* f *is* $\mathfrak{C}_r$*-integrable with respect to* E_r. *Moreover*

(vi) $$(\mathfrak{C}_r) \oint f \cdot dE_r = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\mathfrak{C}_r) \oint f^{\varepsilon} \cdot dE_r ,$$

where f^{ε} is the step-function that was introduced in 8.3 (4).

9.6. We here recall some of the notation that was defined in 1.2. Suppose $\lambda \in J$, and let $E(\lambda)_r^0$ denote the restriction of $E(\lambda)$ to the set $L^0(R, \mu)$ of simple functions. Let $E(\lambda)_r$ be the continuous extension of $E(\lambda)_r^0$ to $L_r(R, \mu)$; note that $|E(\lambda)_r|_r = |E(\lambda)|_r \neq \infty$ (see 1.2 (3) and 6.3 (v)). The integrator E_r is defined by the equality: $E_r(\lambda) = E(\lambda)_r$. Note that $|S(f;\, z)|_r = |S(f;\, z)_r|_r$, where $S(f;\, z)$ and $S(f;\, z)_r$ are the expressions defined in 7.3 (1) and 9.1 (1), respectively; this type of property justifies our using $S(f;\, z)$ instead of $S(f;\, z)_r$ in the following proof.

Proof of 9.5. In the case $r = 2$, the conclusion follows from 9.4, the hypothesis 6.2 (iv), and from the fact (mentioned in 8.1) that $\mathfrak{W}_p(J) \subset \subset \mathfrak{D}(J)$. Now for the case $r \neq 2$. Note that $r \neq 2$ implies the inequalities $1 \leqq p < \infty$, whence $I(p)$ is an open interval containing the point 2. Consequently, $r \in I(p)$ implies the existence of a number u in $I(p)$ such that r lies between u and 2; this in turn implies the existence of a number m such that

(2) $$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} m + \frac{1}{u} (1 - m) \quad \text{and} \quad 0 < m < 1.$$

Set $M = B(u, p) \cdot E(u, p) \cdot W(f)_p$ ($< \infty$ since 6.7). From 7.6 we see that

(3) $$|S(f;\, z) - S(f;\, z')|_u \leqq 2M \qquad (z, z' \in \mathfrak{Z}).$$

Take any $\varepsilon > 0$ and let z^{ε} be as in 8.2. Take any two refinements z, z' of z^{ε}.

In order to prove the $\mathfrak{C}_r$-integrability of f, it will suffice to show that $T = S(f; z) - S(f; z')$ satisfies the relation

$$|T|_r \leqq \varepsilon^m \cdot E(2, \infty)^m \cdot (2M)^{1-m}. \tag{4}$$

But from (2) and the Riesz—Thorin convexity theorem [20, p. 95] we have

$$|T|_r \leqq |T|_2^m |T|_u^{1-m} \leqq |S(f; z) - S(f; z')|_2^m \cdot (2M)^{1-m}; \tag{5}$$

where the second inequality comes from (3). The conclusion (4) now comes from (5) and 8.6. The $\mathfrak{C}_r$-integrability of f having now been established, we turn to the proof of (vi). From 8.3 (4) and 9.3 (1) we see that

$$(\mathfrak{C}_r) \oint f^\varepsilon \cdot dE_r = S(f; z^\varepsilon)_r. \tag{6}$$

On the other hand, by replacing z' by z^ε in the preceding part of this proof, we obtain that $T = S(f; z) - S(f; z^\varepsilon)$ satisfies (4), so that (6) gives the conclusion (vi).

PART II

9.7. Suppose that E is a $V(R, \mu)$-type integrator (see 6.3). Set $1 \leqq p \leqq \infty$ and $r \in I(p)$. Note that

$$\left| (\mathfrak{C}_r) \oint f \cdot dE_r \right|_r \leqq B(r, p) \cdot E(r, p) \cdot W(f)_p; \tag{iii*}$$

the existence of the integral was proved in 9.5, and the three numbers on the right-hand side were defined in 7.6, 6.6, 7.1, respectively. The norm $\{f \to W(f)_p\}$ makes $\mathfrak{W}_p(J)$ into a Banach space, and from (iii*) it follows that the transformation $\mathbf{E}_r$ that is defined for each f in $\mathfrak{W}_p(J)$ by the equation

$$\mathbf{E}_r(f) = (\mathfrak{C}_r) \oint f \cdot dE_r$$

is a continuous mapping of $\mathfrak{W}_p(J)$ into $\mathfrak{C}_r$. Recall that the eventuality $p = \infty$ corresponds to the Hilbert space case $r = 2$. As p decreases to 1, the space $\mathfrak{W}_p(J) = \mathfrak{W}_p$ contracts while the range of r expands:

$$\mathfrak{W}_\infty \supset \mathfrak{W}_p \supset \mathfrak{W}_1 = \{\text{all functions of bounded variation}\},$$
$$\{2\} = I(\infty) \subset I(p) \subset I(1) =]1, \infty[.$$

9.8. In case the integrand f is continuous, then the conclusions of our Main Theorem (9.5) apply to the *ordinary* Riemann—Stieltjes integral. This can be seen as follows. Let us suppose for a moment that the letter f stands for a continuous function throughout this article; moreover, let us change the meaning of the symbolism 'int(i)' (that occurs only in 7.2 and 8.2) to mean 'the closure of i'. Under these circumstances, it is easily seen that the results in § 7—§ 9 remain unchanged, while the integral that was defined in 9.1 becomes the Pollard—Moore—Stieltjes integral [3, p. 269]; the latter is in turn easily shown to coincide with the ordinary Riemann—Stieltjes integral [3, p. 269].

PART III

10. Two applications to the theory of multipliers

10.1. The forthcoming applications involve two orthonormal systems; in either case, the system is a denumerable family $\{\Phi_n : n \in a\}$ of complex-valued, continuous functions on a compact interval J. In order to apply the results of Part I, we specialize the measure space (R, μ_0) by taking $R = a$ and $\mu_0 =$ counting measure; $L^0 = L^0(a, \mu_0)$ is henceforth to be interpreted as the class of all functions in $\mathfrak{F}(a)$ that vanish off finite subsets of a (the notation $\mathfrak{F}(a)$ is defined in 4.2). Note that $L_r(a, \mu_0)$ is now the space usually denoted l_r.

10.2. Definitions. If $f \in \mathfrak{D}(J)$ and $x \in L^0$, then $f \# x$ is the sequence y defined by

(1) $$(f \# x)_n = y_n = \sum_{r \in a} x_r \cdot \int_J f \cdot \Phi_r \cdot \Phi_n^- \qquad (n \in a),$$

where Φ_n^- is the function whose value at λ is the complex conjugate of $\Phi_n(\lambda)$. Let $f_\#$ denote the mapping $\{x \to f \# x\}$ defined on L^0. We write

$$\mathfrak{M}(r) = \{f \in \mathfrak{D}(J) : \infty \neq |f_\#|_r\}.$$

10.3. Remarks. Hirschman [5, 6] calls $f_\#$ a *"multiplier transformation"*. If $f \in \mathfrak{M}(r)$, we denote by $f_{\#r}$ the continuous extension of $f_\#$ to l_r (this is consistent with our previous notation, since the domain L^0 of $f_\#$ is dense in l_r).

Each of the forthcoming applications involve a $V(a, \mu_0)$-type integrator E such that

(vii) $$E(\lambda) = e(\lambda)_{\#2} \qquad \textit{for each } \lambda \textit{ in } J,$$

where $e(\lambda)$ is the step-function defined by 8.3 (3).

10.4. Theorem. *Set* $1 \leqq p \leqq \infty$. *If* E *is a* $V(a, \mu_0)$*-type integrator that satisfies* (vii), *then*

(i*) $$\mathfrak{W}_p(J) \subset \bigcap \{\mathfrak{M}(r) : r \in I(p)\};$$

more precisely:

(ii) *if* $f \in \mathfrak{W}_p(J)$ *and* $r \in I(p)$, *then* $f_{\#r} = \mathbf{E}_r(f) \in \mathfrak{C}_r$.

Proof. Take $z \in \mathfrak{Z}$; from (vii) follows that $\Delta E(i) = (\Delta e(i))_{\#}$ (see 4.2 (1)), whence

(2) $$\Big(\sum_{i \in [z]} f(z_i) \cdot \Delta e(i)\Big)_{\# r} = \sum_{i \in [z]} f(z_i) \cdot \Delta E_r(i) = S(f; z)_r .$$

Consequently, if $z = z^{\varepsilon}$ (as in 8.2), then 8.3 (4) and (2) show that $f^{\varepsilon}_{\# r} = S(f; z^{\varepsilon})_r$. But, from 9.3 (1) and 8.3 (4) we see that $S(f; z^{\varepsilon})_r = \mathbf{E}_r(f^{\varepsilon})$, so that $f^{\varepsilon}_{\# r} = \mathbf{E}_r(f^{\varepsilon})$. In view of 9.5 (vi) therefore:

(3) $$\mathbf{E}_r(f) = \lim_{\varepsilon \to 0+} f^{\varepsilon}_{\# r} \qquad \text{(convergence in } \mathfrak{E}_r\text{)}.$$

Take $x \in L^0$ and $n \in a$. Consider the relation

(4) $$(f \# x)_n = \lim_{\varepsilon \to 0+} (f^{\varepsilon} \# x)_n = (\mathbf{E}_r(f) x)_n ;$$

the first equality is an easy consequence of 8.3 (5) and of the definition 10.2 (1), while the second equality comes from (3) by observing that convergence in $\mathfrak{E}_r$ implies pointwise convergence (which in turn comes from the fact that the norm $\|x\|_r$ coincides with the norm $\mathfrak{N}(x; a)_r \geqq x_n$ that was defined in 4.2). Both conclusions (i*)—(ii) follow immediately from (4) and 9.5.

10.5. *First application*. Set $J = [-1, 1]$ and let $\{\Phi_n : n \in a\}$ be the system of normalized Legendre polynomials; $a = \{0, 1, 2, \ldots\}$. In this setting, HIRSCHMAN defines an operator Γ_λ by means of the equation $\Gamma_\lambda = e(\lambda)_{\#}$ (compare formula (5) in [7] with 10.2 (1)). Thus, if $E(\lambda)$ is another notation for Γ_λ, then E satisfies 10.3 (vii) by definition. HIRSCHMAN points out that E is a resolution of the identity; the rest of the article [7] is devoted to the task of proving that E satisfies 6.3 (v).

Consequently, the hypotheses of 10.4 follow from 6.2—6.3: this establishes 10.4 (i*)—2.1 (i) and 10.4 (ii).

10.6. *Second application*. Here $\Phi_n(\lambda) = \exp(2\pi i n \lambda)$ for each λ in $J = [0, 1]$ and $n \in a = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$. If $f \in \mathfrak{D}(J)$, let φ denote the sequence of Fourier coefficients of f. If $x \in L^0$ it is easy to show that

$$(f \# x)_n = (\varphi * x)_n = \sum_{\nu \in a} \varphi_{n-\nu} \cdot x_\nu \qquad \text{(all } n \text{ in } a).$$

The article [8] contains an interesting study of the operator $f_{\#}$ in the present setting. If $x \in l_2$, then $H^{(\lambda)} x$ will denote the function y defined for all n in a by the following equality:

$$(H^{(\lambda)} x)_n = y_n = e^{-2\pi i \lambda n} \sum_{\nu \in a} e^{2\pi i \lambda \nu} x_\nu \frac{i}{2\pi \cdot (n - \nu)}$$

where $\nu \neq n$. Let E be defined by the relation 10.3 (vii). It is easily seen that E is the resolution of the identity pertaining to the self-adjoint operator $H^{(0)}=\{x\rightarrow H^{(0)}x\}$. Take $x\in L^0$ and $\lambda\in J$. From 10.3 (vii) and 10.2 (1) it immediately follows that $E(\lambda)x=H^{(\lambda)}x-H^{(0)}x+\lambda x$. Consequently, $|E(\lambda)|_r\leqq\leqq|\lambda|+|H^{(\lambda)}|_r+|H^{(0)}|_r\leqq 1+2\cdot|H^{(0)}|_r<\infty$ (this last inequality has been proved by M. RIESZ [16]). Accordingly, E satisfies 6.3 (v), and from 6.2 we conclude that E is a $V(a,\mu_0)$-type integrator that satisfies 10.3 (vii). The properties 10.4 (i*)—2.1 (i) and 10.4 (ii) are now a consequence of 10.4.

Property 10.4 (i*)—2.1 (i) has been proved by STEČKIN in the case $p=1$; HIRSCHMAN [5] discovered it in its present generality, and based his proof on STEČKIN's result.

10.7. *Counter-examples.* Let E and l_r be as in 10.6; as usual, E_r denotes the extension to l_r of the restriction of E to L^0. Suppose $1\leqq p\leqq\infty$, $r\in I(p)$, and $r\neq 2$. In [12, p. 461] it has been established that E_r is not of bounded variation: from 6.1 (2) it therefore follows that $\infty=V_1(E_r)_r$. On the other hand, 10.6 and 10.4 (ii) imply the convergence of the integral

$$f_{\#r}=(\mathfrak{C}_r)\oint f\cdot dE_r \qquad (\text{where } f\in\mathfrak{W}_p(J)),$$

and from 9.8 we see that the ordinary Riemann—Stieltjes integral

$$f_{\#r}=\int_0^1 f(\lambda)\cdot dE_r(\lambda)$$

converges in $\mathfrak{C}_r$ whenever f is a continuous member of $\mathfrak{W}_p(J)$. In particular,

$$T_r=\int_0^1 e^{-2\pi i\lambda}\cdot dE_r(\lambda),$$

where T_r is the unitary shift operator defined by the relation $T_r x=\{n\rightarrow x_{n+1}\}$ for all x in l_r (see [12, p. 461]).

It has been shown in [11] that there exists no spectral measure M (see 6.1) such that

$$\int_0^1 f(\lambda)\cdot dE_r(\lambda)=\int_J f(\lambda)\cdot M(d\lambda),$$

where $f(\lambda)=\lambda$ for $\lambda\in J=[0,1]$ and $r\neq 2$.

APPENDIX

10.8. Lemma 7.5 can be inferred indirectly by observing that the inequality (6.2) of [19, p. 256] is based on calculations which remain valid in our slightly more general setting. The purpose of this appendix is to sketch a direct verification of 7.5 based on the pivotal lemma of [19]. We suppose

$1 < p, q < \infty$ and $t = p^{-1} + q^{-1} > 1$ throughout. The letters k, m, n, ν consistently shall stand for non-negative integers. The letters a and b are subsequently reserved for functions whose domain are denoted $[a]$ and $[b]$, respectively.

10.9. Lemma. *If* $[a] = [b] = \{\nu : 0 < \nu \leqq n+1\}$, *then there exists a number* $k \leqq n$ *such that* $k > 0$ *and*

$$|a_{k+1} b_k| \leqq n^{-t} \cdot \mathfrak{N}(a; [a])_p \cdot \mathfrak{N}(b; [b])_q.$$

Proof. See [19, p. 251] and the notation in 4.2.

10.10. If $[a] = \{\nu : 0 < \nu \leqq n+1\}$ and $k > 0$, then we define $T_k a$ as follows:

$$(T_k a)_m = \begin{cases} a_m & \text{if } 0 < m \leqq k \\ a_m + a_{m+1} & \text{if } m = k \\ a_{m+1} & \text{if } k < m \leqq n. \end{cases}$$

10.11. If $[a] = [b] = \{\nu : 0 < \nu \leqq n+1\}$, then

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} b_\nu \sum_{m=1}^{\nu} a_m - \sum_{\nu=1}^{n} (T_k b)_\nu \sum_{m=1}^{\nu} (T_k a)_m = -a_{k+1} b_k;$$

this routine calculation is performed in [19, p. 255].

10.12. Let $\mathfrak{S}(n)$ be the class of all sequences c with range $\{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}\} \subset J$ such that $c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_{n+1}$. We define $(I_0 c)_m =]c_{m-1}, c_m]$ and

$$(I_k c)_m = \begin{cases} (I_0 c)_m & \text{if } 0 < m < k \\ (I_0 c)_m \cup (I_0 c)_{m+1} & \text{if } m = k \\ (I_0 c)_{m+1} & \text{if } k < m \leqq n. \end{cases}$$

10.13. If $F \in \mathfrak{F}(J)$ (as in 4.2), then clearly

$$\mathfrak{N}(\Delta F \circ I_0 c; [c])_p \leqq V_p(F), \tag{5}$$

where $[c] = \{1, 2, 3, \ldots, n+1\}$ and $(\Delta F \circ I_0 c)_m = \Delta F((I_0 c)_m) = F(c_m) - F(c_{m-1})$ (see 4.2). Note further that $I_k c \in \mathfrak{S}(n-1)$ and $T_k(\Delta F \circ I_0 c) = (\Delta F \circ I_k c)$.

10.14. If $c, d \in \mathfrak{S}(n)$ we set

$$Q(c, d) = \sum_{\nu=1}^{n+1} (\Delta g \circ I_0 d)_\nu \sum_{m=1}^{\nu} (\Delta f \circ I_0 c)_m.$$

Here f and g are as in 7.5. Note that

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} f(c_\nu) \cdot (\Delta g \circ I_0 d)_\nu = Q(c, d) + f(c_0)(g(d_{n+1}) - g(d_0)). \tag{6}$$

10.15. If $c, d \in \mathfrak{S}(n)$, then there exist c^* and d^* in $\mathfrak{S}(n-1)$ such that

$$|Q(c, d)| \leqq n^{-t} \cdot V_p(f) \cdot V_q(g) + |Q(c^*, d^*)|.$$

Proof. Set $b = \Delta g \circ I_0 d$ and $a = \Delta f \circ I_0 c$; from 10.9 and 10.13 (5) there exists therefore a number $k \leqq n$ such that

$$|a_{k+1} b_k| \leqq n^{-t} \cdot V_p(f) \cdot V_q(g),$$

and the conclusion now follows from 10.11 and the remarks made in 10.13.

10.16. Lemma. Let $\psi(0)=1$ and $\psi(\nu)=\nu$. If $c, d \in \mathfrak{S}(n)$, then

$$|Q(c,d)| \leqq V_p(f) \cdot V_q(g) \cdot \sum_{\nu=0}^{n} (\psi(\nu))^{-t};$$

the proof is a simple induction argument based on 10.15.

10.17. Let $A(p,q)$ be the number that was introduced in 7.5. It follows from 10.16 that $|Q(c,d)| \leqq V_p(f) \cdot V_q(g) \cdot A(p,q)$. The conclusion 7.5 is now an easy consequence of 10.14 (6). Compare with the notation of 7.3 (1).

References

[1] N. Dunford, Spectral operators, *Pacific J. Math.*, 4 (1954), 321—354.

[2] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators. Part I: General theory* (New York, 1958).

[3] T. H. Hildebrandt, Definitions of Stieltjes integrals of the Riemann type, *Amer. Math. Monthly*, 45 (1938), 265—278.

[4] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, rev. ed. (Providence, 1957).

[5] I. I. Hirschman, Jr., On multiplier transformations, *Duke Math. J.*, 26 (1959), 221—242.

[6] —— Weighted quadratic norms and Legendre polynomials, *Canadian J. Math.*, 7 (1955), 462—482.

[7] —— Projections associated with Jacobi polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 286—290.

[8] I. I. Hirschman, Jr. and A. Devinatz, The spectra of multiplier transforms on l^p, *Amer. J. Math*, 80 (1958), 829—842.

[9] H. S. Kaltenborn, Linear functional operations on functions having discontinuities of the first kind, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 40 (1934), 702—708.

[10] J. L. Kelley, *General topology* (New York, 1955).

[11] G. L. Krabbe, Convolution operators which are not of scalar type, *Math. Zeitschr.*, 69 (1958), 346—350.

[12] —— Convolution operators that satisfy the spectral theorem, *Math. Zeitschr.*, 70 (1959), 446—462.

[13] H. Lebesgue, Sur les intégrales singulières, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, (3) 1 (1909), 25—117. Especially p. 60.

[14] E. R. Love and L. C. Young, On fractional integration by parts, *Proc. London Math. Soc.*, 44 (1938), 1—35.

[15] E. R. Love and L. C. Young, Sur une classe de fonctionnelles linéaires, *Fundamenta Math.*, 28 (1937), 243—257.

[16] M. Riesz, Sur les fonctions conjuguées, *Math. Zeitschr.*, **27** (1928), 218—244. Especially pp. 241—242.

[17] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis* (New York, 1932).

[18] N. Wiener, The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, *J. Math. Phys. Massachusetts Inst. of Techn.*, **3** (1924), 72—94.

[19] L. C. Young, An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration, *Acta Math.*, **67** (1936), 251—282.

[20] Zygmund, *Trigonometric series*, vol. 2 (Cambridge, 1959).

(Received August 8, 1960)

Errata

G. ZAPPA, *Sull'esistenza di sottogruppi normali di Hall in un gruppo finito* (*Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 223—227).

	Errata	*Corrige*
Da pag. 227, riga 36, a pag. 228, riga 3, dappertutto	C	LC
pag. 228, riga 8	$(C \cap H)$	$(LC \cap H)$
pag. 228, riga 8	$(r^{-1}Cr)$	$(r^{-1}LCr)$
pag. 228, riga 8	$C \cap H^*$	$LC \cap H^*$
pag. 228, riga 9	C	LC
pag. 228, riga 11	$C = BD$	$LC = BD$

Questi errori sono stati segnalati all'autore da Z. Janko (Lištica, Iugoslavia).

Bibliographie

János Surányi, Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe, 216 Seiten, Budapest und Berlin, Akadémiai Kiadó und VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.

Die Theorie des Entscheidungsproblems besteht aus zwei großen Zweigen. Der eine Teil der Untersuchungen strebt danach, für eine je umfassendere Klasse der Ausdrücke ein allgemein-rekursives Verfahren anzugeben, das entscheidet, ob ein Ausdruck erfüllbar ist oder nicht. Andere Forschungen haben den Zweck, das allgemeine Problem auf eine je engere Klasse von Ausdrücken durch ein allgemein-rekursives Verfahren zurückzuführen. Der berühmte Satz von CHURCH besagt, daß diese beiden „gegeneinander schreitenden" Forschungsrichtungen nie zusammentreffen können.

Die Ergebnisse des ersten Zweiges wurden vor einigen Jahren durch ACKERMANN zusammengefaßt.[1]) Das Buch von SURÁNYI ergänzt das Werk von ACKERMANN, indem es den ersten systematischen Überblick der gegenseitigen Untersuchungen: der Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems gibt.

Obwohl das Buch hauptsächlich schon in Artikeln publizierte Resultate darstellt, enthält es auch einige früher nicht veröffentlichte Sätze von H. THIELE und dem Verfasser.

In Kap. I (Aufbau des Prädikatenkalküls der ersten Stufe) werden der Begriff des Ausdrucks (im engeren und weiteren Sinne) des betrachteten Kalküls sowie die Begriffe der Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit eines Ausdrucks eingeführt. Es wird bewiesen, daß jeder Ausdruck in einen äquivalenten pränexen Ausdruck umformt werden kann. (In den ferneren Reduktionssätzen werden meistens derartige Reduktionstypen (s. unten) vorkommen, die entweder nur pränexe Ausdrücke, oder solche und aus zwei pränexen Ausdrücken gebildete Konjunktionen enthalten.)

Kap. II (Das Entscheidungsproblem) formuliert zuerst das Entscheidungsproblem, das darin besteht, daß ein Verfahren angegeben werden soll, mit dessen Hilfe man für jeden Ausdruck entscheiden kann, ob dieser erfüllbar ist oder nicht, und ob er allgemeingültig ist oder nicht. Da ein Ausdruck genau dann erfüllt werden kann, wenn seine Negation nicht allgemeingültig ist, reicht es hin, nur die Erfüllbarkeit zu untersuchen. Eine Klasse **K** von Ausdrücken heißt ein *Reduktionstypus,* wenn es ein Verfahren gibt, welches einen beliebigen Ausdruck in ein Element von **K** umformt, so daß die beiden Ausdrücke für die Erfüllbarkeit gleichwertig sind. Es wird ferner festgesetzt, daß die Erfüllbarkeit eines Ausdrucks über einen Individuenbereich nur von der Mächtigkeit des Bereiches abhängt.

In Kap. III (Eliminationssätze) sind verschiedene einfach charakterisierbare Reduktionstypen angegeben.

In Kap. IV (Weitere Vereinfachungen des Präfixes) wird — neben einem naheliegenden Satz — ein (vorher unveröffentlicher) Satz des Verfassers bewiesen, laut dessen die Aus-

---

[1]) W. ACKERMANN, *Solvable cases of the decision problem* (Amsterdam, 1954).

drücke der Form

$$\forall x_1 x_2 x_3 \mathbf{M}_1 \wedge \forall y_1 y_2 \exists y_3 \mathbf{M}_2$$

einen Reduktionstypus bilden. ($\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ haben hier eine im Satze beschriebene spezielle Form, sie sind u. a. quantorenfrei, und können — eventuell mit der Ausnahme einer zweistelligen — nur einstellige Prädikatenvariablen enthalten.)

Kap. V (Erfüllung in einem abzählbaren Individuenbereich) stellt zuerst den Satz von Löwenheim und Skolem dar, der besagt, daß ein erfüllbarer Ausdruck ohne Gleichheitszeichen schon in einem abzählbaren Bereich erfüllt werden kann. Nach einigen Verschärfungen dieses Satzes werden Reduktionstypen mit gegebenem speziellem Präfix, mit begrenzter Stellen-Anzahl der Prädikatenvariablen bestimmt.

In Kap. VI und VII (Reduktionstypen mit einer einzigen Prädikatenvariablen) sind Reduktionstypen mit einer einzigen, und zwar zweistelligen Prädikatenvariablen angegeben. Die Form des Präfixes kann in diesen Typen nicht so genau vorgeschrieben werden, wie in den Sätzen des Kapitels V.[1])

Kap. VIII (Reduktion des Entscheidungsproblems auf den Fall beliebiger endlicher Bereiche. Die rekursive Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems) enthält den Satz von Kalmár, laut dessen zu jedem Ausdruck $\mathfrak{A}$ ein Ausdruck $\mathfrak{B}$ sich derart konstruieren läßt, daß $\mathfrak{A}$ genau dann nicht erfüllbar ist, wenn $\mathfrak{B}$ in irgendeinem endlichen Bereich erfüllt werden kann; ferner den schon erwähnten Churchschen Satz über die Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems mit einem allgemein-rekursiven Verfahren. (Auch der letztgenannte Satz wird durch eine von Kalmár stammende Methode bewiesen.)

Unter den im Anhang betrachteten Hilfsmitteln ist insbesondere der Skolem—Herbrandsche Satz zu erwähnen, der die Erfüllbarkeit eines Ausdrucks auf die Widerspruchsfreiheit eines geeigneten axiomatischen Systems zurückführt.

Die offenen Probleme, die im Buche an verschiedenen Stellen erwähnt sind, werden unter dem Titel „Nachbemerkungen" zusammenfassend wieder aufgezählt. Das Buch schließt sich mit einem 50 Angaben enthaltenden Literaturverzeichnis.

A. Ádám (Szeged)

Ákos Császár, Fondements de la topologie générale, 229 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1960.

Il y a quelques années M. Császár a introduit un nouveau type d'espaces dans la Topologie générale qui généralise simultanément les espaces topologiques, uniformes et de proximité (voir *Revue Math. Pures Appl.*, **2** (1957), 399—407). Dans le présent ouvrage, il se propose de développer la théorie de ces espaces, dits espaces syntopogènes[2]) en vue de les appliquer aux fondements des espaces topologiques, uniformes et de proximité. Non seulement les fondements de ces derniers espaces se déduisent de la théorie des espaces st simplement par spécialisation, mais encore les relations qui les relient entre eux deviennent plus claires et se prêtent à un traitement systématique lorsqu'on les étudie dans le cadre des espaces st. Le domaine d'application des espaces st s'étend approximativement sur les deux premiers chapitres de la „Topologie générale" de Bourbaki ainsi que sur le mémoire de Yu. M. Smirnov sur les espaces de proximité (voir *Mat. Sbornik*, **31 (73)** (1952), 543–574).

---

[1]) $\exists\forall\exists\forall^2$, $\exists^n\forall^3\exists$ und $\exists^n\forall\exists^a\forall$ sind typische Beispiele für die Form der Präfixe, die in den Ergebnissen der Kapitel V, VI und VII (der Reihe nach) auftreten. (a und n sind nichtnegative Zahlen, a ist dabei universell beschränkt.)

[2]) Pour abréger nous écrirons dans la suite „st" pour „syntopogène (*s*)" et „str" pour „structure (*s*)".

Les §§ 1 à 7 donnent les fondements de la théorie. E étant un ensemble quelconque (ensemble fondamental), on entend par *„ordre topogène sur E"* une relation binaire $<$ entre les parties de E qui vérifie les axiomes suivants:

$$0<0;\ E<E;$$
$$A<B \text{ implique } A\subset B;\ A\subset A'<B'\subset B \text{ implique } A<B;$$
$$A<B \text{ et } A'<B' \text{ impliquent } A\cap A'<B\cap B' \text{ et } A\cup A'<B\cup B'.$$

L'ordre topogène $<$ est dit *symétrique* lorsque $A<B$ entraîne toujours $E-B<E-A$. Il est *parfait* si les relations $A_\gamma<B_\gamma$ $(\gamma\in\Gamma)$ entraînent toujours $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma<\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma$. Si les mêmes relations entraînent $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma<\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma$ et $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma<\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma$, on dit que $<$ est *biparfait.*

Une *str st* $\mathcal{S}$ sur E est une classe non vide d'ordres topogènes sur E qui satisfait aux axiomes suivants:

A deux éléments quelconques $<_1$ et $<_2$ de $\mathcal{S}$ il correspond un $<_3\in\mathcal{S}$ tel qu'on ait $A<_3B$ toutes les fois qu'on a $A<_1B$ ou $A<_2B$.

A tout $<\in\mathcal{S}$ il correspond un $<'\in\mathcal{S}$ tel que $A<B$ entraîne l'existence d'un ensemble C qui satisfait à la relation $A<'C<'B$.

Un *espace st* est un couple $[E,\mathcal{S}]$ ou $\mathcal{S}$ est une str st sur E.

$\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ étant deux str st sur E, on dit que $\mathcal{S}_1$ *est plus fin que* $\mathcal{S}_2$ lorsque à chaque $<_2\in\mathcal{S}_2$ il correspond un $<_1\in\mathcal{S}_1$ tel que $A<_2B$ entraîne $A<_1B$. Lorsque $\mathcal{S}_1$ est plus fin que $\mathcal{S}_2$ et inversement, on dit que ces deux str st sont *équivalentes.*

Lorsque tous les éléments d'une str st sont symétriques, resp. parfaits, resp. biparfaits, on dit qu'elle est *symétrique,* resp. *parfaite,* resp. *biparfaite.* Les str st, formées d'un seul ordre topogène, sont dites *simples.*

Les str topologiques, uniformes et de proximité peuvent être identifiées à certaines str st de la façon suivante.

A toute str st simple et parfaite $\mathcal{S}=\{<\}$ sur E on fait correspondre une topologie sur E, en considérant un ensemble A ouvert lorsque $A<A$. Inversement, toute topologie sur E correspond de cette façon à une str st simple et parfaite sur E et à une seule.

$\mathcal{S}=\{<\}$ étant une str st simple et symétrique sur E, on lui fait correspondre une str de proximité δ sur E, en posant $A\delta B$ si et seulement si $A<E-B$ n'a pas lieu. Inversement, toute str de proximité sur E correspond de cette façon à une str st simple et symétrique sur E et à une seule.

$\mathcal{S}$ étant une str st symétrique et biparfaite sur E, les ensembles $\mathbf{U}_<=\{(x,y)\colon \text{non } \{x\}<E-\{y\}\}$ forment un système fondamental d'entourages d'une str uniforme sur E qu'on fait correspondre à $\mathcal{S}$. Inversement, toute str uniforme sur E peut être déduite, suivant cette formule, d'une str st symétrique et biparfaite sur E et, à équivalence près, d'une seule.

Le § 8 est consacré à l'étude de certaines opérations sur les str st. $\{\mathcal{S}^\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$ étant une famille de str st sur E, on définit une str st $\mathcal{S}=\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{S}^\lambda$ sur E qui est plus fine que chacune des $\mathcal{S}^\lambda$ mais moins fine que toute str st ayant la même propriété. $\mathcal{S}$ étant une str st sur E, on définit de façon explicite quatre str st $\mathcal{S}^s$, $\mathcal{S}^p$, $\mathcal{S}^b$ et $\mathcal{S}^t$ sur E, plus fines que $\mathcal{S}$ dont $\mathcal{S}^s$ est symétrique, $\mathcal{S}^p$ est parfait, $\mathcal{S}^b$ est biparfait et $\mathcal{S}^t$ est simple et qui sont minimales dans le sens que toute str st, plus fine que $\mathcal{S}$, est aussi plus fine que $\mathcal{S}^s$ ou $\mathcal{S}^p$ ou $\mathcal{S}^b$ ou $\mathcal{S}^t$, suivant qu'elle est symétrique, parfaite, biparfaite ou simple.

Si $\mathcal{S}$ est une str st biparfaite et symétrique, c'est-à-dire qu'il correspond à une str uniforme $\mathfrak{U}$, alors $\mathcal{S}^t$, resp. $\mathcal{S}^{tp}$ correspond à la str de proximité, resp. à la topologie déduite de $\mathfrak{U}$.

Les opérateurs ${}^{s}, {}^{p}, {}^{b}, {}^{t}$ obéissent à certaines régles de calcul, on a p. e. $\mathfrak{S}^{sb} = \mathfrak{S}^{bsp}$, $\mathfrak{S}^{tp} = \mathfrak{S}^{tp}$. Le calcul sur ces opérateurs fournit un outil très efficace et très maniable pour déduire certaines propriétés des str topologiques, uniformes et de proximité et pour établir les liens qui existent entre ces structures.

Les §§ 9 à 11 se groupent autour des notions suivantes: image réciproque d'une str st (par une application dans l'ensemble fondamental de cette str), sous-espaces d'un espace st, application continue d'un espace st dans un autre, produit d'espaces st.

Les deux premières de ces notions se réduisent à leurs significations habituelles lorsqu'on envisage des str st correspondant à une topologie ou à une str uniforme ou à une str de proximité.

Les applications continues d'une espace st $[E, \mathfrak{S}]$ dans un espace st $[E', \mathfrak{S}']$ coïncident avec les applications continues (dans le sens usuel), resp. uniformes, resp. δ-continues de E dans E', suivant que $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ correspondent chacune à une topologie ou á une str uniforme ou à une str de proximité.

Le produit $[\underset{\lambda\in\Lambda}{\times} E^{\lambda}, \underset{\lambda\in\Lambda}{\times} \mathfrak{S}^{\lambda}]$ d'une famille $\{[E^{\lambda}, \mathfrak{S}^{\lambda}] \colon \lambda \in \Lambda\}$ d'espaces st est défini de telle sorte qu'au cas où les $\mathfrak{S}^{\lambda}$ correspondent chacune à une topologie, resp. à une str uniforme, le produit de ces topologies, resp. str uniformes correspond à $(\underset{\lambda\in\Lambda}{\times} \mathfrak{S}^{\lambda})^{tp}$, resp. $(\underset{\lambda\in\Lambda}{\times} \mathfrak{S}^{\lambda})^{b}$. Lorsque chacune des $\mathfrak{S}^{\lambda}$ correspond à une str de proximité δ^{λ}, la str de proximité correspondant à $(\underset{\lambda\in\Lambda}{\times} \mathfrak{S}^{\lambda})^{t}$ sert de définition pour le produit des δ^{λ}.

Toute str st sur E peut être construite, à équivalence près, à l'aide de certaines familles, convenablement choisies, de fonctions réelles, définies sur E (§ 12). Les théorèmes générales sur la construction des str st (établis avec la collaboration du rapporteur) permettent de déduire de façon élégante des théorèmes sur la représentation des str uniformes et de proximité à l'aide de fonctions réelles, en particulier le théorème sur la génération des str uniformes par un système d'écarts (§ 13).

Les derniers §§ sont consacrés aux notions d'espace st compact et complet. La première de ces notions est définie de façon analogue comme on définit l'espace uniforme complet à l'aide de filtres et équivaut à celle-ci lorsqu'il s'agit d'une str st symétrique et biparfaite. La compacité d'un espace st $\mathfrak{S}$ équivaut à la compacité de la topologie associée à $\mathfrak{S}^{tp}$. Tout espace st peut être plongé dans un espace st complet, de plus on peut assurer que les propriétés „symétrique", „parfait" et „biparfait" soient conservées lors de la complétion. Il s'ensuit que tout espace uniforme peut être plongé dans un espace uniforme complet. Par un raisonnement subtil, l'Auteur ramène la compactification des espaces st à str simple à la complétion des espaces st à str biparfaite et parvient au résultat que tout espace st à structure simple peut être plongé dans un espace compact du même type. Il conclut avec le théorème de Smirnov sur les compactifications hausdorffiennes des espaces topologiques complètement réguliers.

A côté des str uniformes, l'Auteur considère aussi une str analogue mais plus générale, dite str quasi-uniforme qu'on obtient des str uniformes essentiellement en supprimant l'axiome qui exige l'existence d'un système fondamental d'entourages symétriques. (Ces str furent introduites par L. Nachbin sous le nom de str semi-uniformes; voir *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **226** (1948), 774—775.) Les str quasi-uniformes ont maintes propriétés analogues à celles des str uniformes; ces deux str sont étudiées parallèlement dans l'ovrage.

Le style et l'exposé de l'ouvrage sont à tout point exemplaires. Le langage clair et précis, les démonstrations soigneusement élaborées, la terminologie et les notations rigoureusement conséquentes rendent la lecture facile et agréable.

En terminant cette analyse, il convient d'observer qu'en général une str st n'est ni simple, ni parfait, ni symétrique, elle ne se laisse donc identifiée ni à une topologie, ni à une str quasi-uniforme, ni à une str de proximité. L'ouvrage ne fournit pas d'exemples aux applications de ces str st générales. Toutefois nous espérons que les str st générales ne tarderont pas à trouver des applications dans l'Analyse.

J. Czipszer (Budapest)

H. Lebesgue, Notices d'Histoire des Mathématiques (Monographies de L'Enseignement Mathématique, No. 4), 116 pages, Genève, L'Enseignement Mathématique, 1958.

Après une introduction écrite par M^{lle} L. Félix, le livre reproduit 6 notices de H. Lebesgue: Commentaires sur l'oeuvre de F. Viète; L'oeuvre mathématique de Vandermonde; Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan; Notice sur René-Louis Baire; Un travail mathématique de André-Marie Ampère; Les professeurs mathématiques du Collège de France: Humbert, et Jordan, Roberval et Ramus; enfin on y trouve des extraits de la correspondance de H. Lebesgue. Dans l'une des lettres il exprime sa confession sur ses principes en historien: "l'histoire de l'acquisition d'un fait mathématique... est toujours l'histoire d'un lent et long travail collectif.... Un renseignement historique se compose d'un nom, d'un titre de Mémoire... et c'est tout,... comme si la vérité sortait de l'onde dans sa claire beauté. Mais non, la vérité ne brille qu'aux yeux qui l'ont cherchée assez longtemps pour avoir mérité de la voir.... On peut, dans les anciens écrits, suivre les travaux d'approche, voir les succès, les défaites.... Essayer de faire cela pour une notion primordiale serait, je crois, essayer de faire de la vraie histoire des sciences..."

T. Bakos (Budapest)

J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, 331 Seiten, Berlin—Basel—Stuttgart, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften—Birkhäuser Verlag, 1961.

Obwohl die Funktionalgleichungen seit lange Gegenstand verschiedener Untersuchungen waren, fehlte bis zu den letzten Zeiten eine „Theorie" dieser Gleichungen im strengen Sinne des Wortes, d. h. Klassifikationsprinzipe sowie allgemeine Lösungsmethoden. Es fehlte ja sogar eine strenge Definition, durch die die „echten" Funktionalgleichungen von den Differentialgleichungen, Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen unterschieden werden könnten. Erst in der letzten Zeit ist die Theorie der Funktionalgleichungen in ein solches Stadium getreten, daß man sich um eine wahre Theorie bewerben mochte. Das Hauptverdienst dieser Tatsache gebührt eben dem Verfasser der vorliegenden Monographie, der durch eine lange Reihe von originellen Arbeiten in diesem Gebiete selbst den Boden zur Entstehung einer Monographie vorbereitet hatte. Der Verfasser hat vor kurzem zwei größere Berichte über diesen Gegenstand veröffentlicht, sein vorliegendes Buch, das nach den Worten des Verfassers selbst ein Zwischenglied zwischen Lehrbuch, Monographie und Nachschlagewerk ist, bringt eine fast vollkommene Synthese des bisherigen Materials in dieser Richtung. Das Buch enthält eine Bibliographie mit über ein Tausend Titel.

Der Verfasser fängt mit einer Definition der Funktionalgleichungen im engen Sinne des Wortes an. Es werden dann der Reihe nach die Funktionalgleichungen für Funktionen von einer Veränderlichen und für Funktionen mehrerer Veränderlichen betrachtet. Die Funktionalgleichungen der Stufe 1 wurden in dieser Monographie im allgemeinen außer acht gelassen. Innerhalb dieser zwei Teile besteht die Einteilung nach verschiedenen Ordnungsprinzipen, wie z. B. nach der Anzahl der Gleichungen (eines Systems von Gleichungen), nach der Anzahl der gesuchten Funktionen u. s. w. Das Problem einer endgültigen Einteilung der Funktionalgleichungen nach verschiedenen Typen ist bis heute eine offene Frage. Der Text enthält nicht nur die Ergebnisse, sondern meistens auch die Beweise. Charakteristisch für das ganze Buch ist das Bestreben, in allen Fällen, womöglich mit geringsten Regularitätsannahmen oder sogar ohne irgendwelche solche Annahmen, zu den Lösungen zu gelangen. Das Buch gibt außerdem eine große Menge von verschiedenen Anwendungen und zwar nicht nur in verschiedenen Zweigen der Mathematik (wie Geometrie, Gruppentheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung), aber auch in der Mechanik und Physik.

Man kann behaupten, daß die bisherige Lücke durch diese Monographie ausgefüllt wurde und sogar in einer ausgezeichneten Weise. Nichtdestoweniger kann man vermuten, daß nach einigen Jahren infolge einer schnellen Entwicklung dieser Disziplin eine neue vervollständigte Herausgabe dieser Monographie notwendig sein wird.

S. Gołąb (Kraków)

W. Meyer-Eppler, Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie (Kommunikation und Kybernetik in Einzeldarstellungen, Herausgeben von W. Meyer-Eppler, Band 1), XVII + 446 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1959.

Seit dem Erscheinen der grundlegenden Arbeiten von Shannon wird der Informationstheorie ein immer stärkeres Interesse entgegengebracht, womit sich ein gesteigerter Anspruch auf Literatur über bisherige Ergebnisse, sowie neueren Probleme und Anwendungsmöglichkeiten der Informationstheorie meldet. Diesem Anspruch wünscht das Buch von Meyer-Eppler umfassend zu entsprechen, indem er Lesern der verschiedensten Interessengebiete und Vorkenntnisse in die Fragen der Informationstheorie Einsicht verschafft.

Verfasser stand vor einer nicht leichten Aufgabe, als er in seinem Buche einerseits den Inhalt des Wortes „Information" im ursprünglichen Sprachgebrauch berücksichtigen, anderseits jedoch jeden mit der Information zusammenhängenden Begriff in mathematischer Form behandeln wollte.

Obwohl das Buch in seinen Betrachtungen sich in großem Maße auf die Mathematik, in erster Linie auf die wichtigsten Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie anlehnt, werden die Leser durch lange Beweisführungen nicht in Anspruch genommen, und es ist auch jenen verständlich, die in den entsprechenden Gebieten der Mathematik nicht über vertiefte Kenntnisse verfügen. — Die Orientierung zwischen den eingeführten neuen Begriffen wird durch praktische — in erster Linie sprachliche — Beispiele, welche gleichzeitig auch auf die Anwendungsmöglichkeiten hinweisen, in großem Maße erleichtert.

Das Buch gliedert sich in 11 Kapitel. Verf. selbst faßt den Inhalt des Buches kurz folgendermaßen zusammen: „Zentrales anliegen aller Betrachtungen ist die menschliche Kommunikationskette (Kap. 1) und der in ihr stattfindende Zeichenverkehr, der von Signalen getragen wird, die den Sinnesorganen zugänglich sind. Die meßbaren Eigenschaften dieser Signale bilden die Grundlage für alle weiteren Untersuchungen (Kap. 2), wie etwa für die Frage nach den zur Signalübermittlung geeigneten Übertragungssystemen (Kap. 3), die Statistik der hierbei verwendeten stereotypen Signalformen („Symbole") (Kap. 4) und den Einfluß von Störungen auf die Signalübermittlung (Kap. 5) sowie die mögliche Sicherung gegen Übertragungsfehler (Kap. 6). In Kap. 7 tritt der informationsempfangende Kommunikationspartner mit seinen Sinnesorganen in Erscheinung, zunächst als Empfänger von Signalen und von Kap. 8 ab als Empfänger von Zeichen. Als die wichtigsten Zeichenträger werden in Kap. 9 die akustischen und optischen Valenzklassen behandelt. Von hier aus ergibt sich ein unmittelbarer Zugang zur höchsten Stufe menschlicher Kommunikation, zur sprachlichen

Kommunikation. Im Anschluß an die Probleme und Methoden der strukturellen Linguistik (Kap. 10) ist das letzte Kapitel der realen Sprachübermittlung gewidmet, d. h. dem Schicksal der Sprachzeichen in einem zwischen dem sende- und dem empfangsseitigen Kommunikationspartner etablierten gestörten Übertragungskanal." *Katalin Bognár* (Budapest)

Lothar Heffter, Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen, zweite, wesentlich verbesserte Auflage, VIII + 64 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1960.

Der Inhalt der ersten Auflage wurde im Wesentlichen beibehalten; die in der Besprechung derselben (*Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 275—276) bemängelten Einzelheiten wurden berichtigt. *Ákos Császár* (Budapest)

Th. Schneider, Introduction aux nombres transcendants. Traduit par Pierre Eymard. VIII + 152 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1959.

Traduction de l'original allemand, publié en 1957 aux éditions Springer.*) — Espérons que l'ouvrage excellent, qui attirait l'attention sur les méthodes générales récentes dans la théorie des nombres transcendants, animera par sa version française des nouveaux recherches dans ce beau domaine des mathématiques. *M. Mikolás* (Budapest)

W. J. Trjitzinsky, Théorie métrique dans les espaces où il y a une mesure (Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 143), 120 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1960.

Dans la théorie classique de l'intégrale de Lebesgue, une des plus importantes et en même temps plus difficiles questions est l'étude des liaisons entre les opérations d'intégration et de dérivation, c'est-à-dire de la dérivation des intégrales indéfinies et, plus généralement, des fonctions additives d'ensemble. Les propriétés particulières des espaces euclidiens et de la mesure de Lebesgue jouent un rôle tellement essentiel dans les démonstrations des résultats qui s'y rattachent que la possibilité d'une généralisation de cette théorie pour des mesures abstraites paraît surprenante à première vue. Tout de même, plusieures théories abstraites de la dérivation des fonctions d'ensemble ont été créées, parmi lesquelles celle due à A. Denjoy (*Amer. J. Math.*, **73** (1951), 314—356), fondée sur une extension du théorème de recouvrement de Vitali. L'auteur du présent ouvrage a pour but d'aller plus loin et d'affaiblir, d'une part, les hypothèses admises par A. Denjoy, de l'autre de trouver des extènsions analogues d'autres résultats concernant la dérivation des fonctions d'ensemble.

Soit $(E, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré complet et désignons, pour une famille $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, par $\Delta(\mathfrak{T})$ l'ensemble des $x \in E$ contenus dans des ensembles $T \in \mathfrak{T}$ de mesure $\mu(T)$ aussi petite que l'on veut, et par $\mu_e(X) = \inf\{\mu(S) : S \in \mathfrak{S}, S \supset X\}$ la mesure extérieure associée à μ. Une famille $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}$ est dite *régulière* si $0 < \mu(G) < +\infty$ pour $G \in \mathfrak{G}$, $\mu_e(D) < +\infty$ pour $D = \cup \mathfrak{G}$, $\mu_e(\varrho(G)) \leqq \alpha(\mu(G))$ pour $G \in \mathfrak{G}$ et $\varrho(G) = \Delta(\{G' : G' \in \mathfrak{G}, G' \cap G \neq 0\})$, où $\alpha(u)$ est une fonction positive croissante de $u > 0$, tendant vers 0 pour $u \to +0$ et telle qu'on puisse choisir, pour un $\varepsilon > 0$ donné, une suite $\eta_n \to 0$ $(\eta_n > 0)$ de sorte que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(u_{in}) < \varepsilon \text{ dès que } 0 < u_{in} < \eta_n, \ \sum_{i=1}^{\infty} u_{in} \leqq u_e(D)$$

(par exemple $\alpha(u) = u^c$ satisfait pour $c > 1$ à ces conditions), enfin s'il existe des nombres a et b tels que $1 < a < b$ et $\mu_e(\cup\{G' : G' \in \mathfrak{G}, G' \cap G \neq 0, \mu(G') < a\mu(G)\}) < b\mu(G)$. (Dans

*) Cf. *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 97—98.

l'ouvrage cité d'A. Denjoy, on suppose $\alpha(u)\equiv 0$.) Dans ces hypothèses, l'auteur démontre que si $\mathcal{G}$ est une famille régulière, alors $\Delta(\mathcal{G})\in\mathfrak{S}$ et, $\varepsilon>0$ étant donné, il existe une suite $\{G_i\}$ d'ensembles $G_i\in\mathcal{G}$ disjoints telle que $\mu\left(\Delta(\mathcal{G})-\bigcup_1^\infty G_i\right)<\varepsilon$, $\left|\mu\left(\bigcup_1^\infty G_i\right)-\mu(\Delta(\mathcal{G}))\right|<\varepsilon$. Il montre que presque tous les résultats du mémoire cité d'A. Denjoy restent valables en généralisant de cette manière la définition de famille régulière. Il appelle ensuite *simplement régulière* une famille $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{S}$ si $0<\mu(F)<+\infty$ pour $F\in\mathfrak{F}$ et si $\mathfrak{F}=\bigcup_1^\infty\mathfrak{F}_n$, $\mathfrak{F}_n\subset\mathfrak{F}_{n+1}$, enfin, pour $\mathfrak{F}'\subset\mathfrak{F}_n$ $(n=1,2,\ldots)$, $\bigcup\mathfrak{F}'\in\mathfrak{S}$ et $\mu(\bigcup\mathfrak{F}')<+\infty$. Pour des familles simplement régulières, l'auteur donne plusieurs extensions des résultats de H. Busemann et W. Feller (*Fundamenta Math.*, **22** (1934), 226—261) sur le théorème de densité. Il examine en particulier le cas important, généralisation immédiate du cas classique de la mesure de Lebesgue, où $\mathfrak{F}$ est invariante par rapport à un groupe de transformations. Il donne ensuite, pour des familles simplement régulières, une extension abstraite du théorème d'A. Zygmund (*Fundamenta Math.*, **23** (1934), 143—149) sur la dérivabilité forte des intégrales indéfinies de fonctions $f\in L^p$ $(p>1)$, en remarquant que les résultats plus précis de B. Jessen, J. Marcinkiewicz et A. Zygmund (*Fundamenta Math.*, **25** (1935), 217—234) paraissent à être liés très étroitement aux espaces euclidiens. Il présente ensuite une sorte d'extension du théorème de Lusin sur la continuité des fonctions mesurables, ainsi qu'une généralisation des théorèmes intéressants d'A. J. Ward (*Fundamenta Math.*, **26** (1936), 167—182; **28** (1937), 265—279) sur les nombres dérivés des fonctions additives d'intervalle.

Á. Császár (Budapest)

Proceedings of symposia in applied mathematics, Volume X. **Combinatorial analysis.** Edited by Richard Bellman and Marshall Hall, Jr., VI + 311 pages, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1960.

In the last years the interest of mathematicians toward combinatorial analysis is in steady growing. One of the reasons of recent development in the field is the availability of fast electronic computers with the aid of which exact numerical solutions can be attained in a series of problems. It seems, however, that the only common characteristic of the problems of combinatorial analysis is that they involve finite sets, but otherwise they are of very different nature. Thus one meets on this field problems of practical as well as theoretical aspects which in very many cases could hardly be separated.

The present volume contains four papers dealing with finite projective geometry which has also a great practical importance in the design of experiments.

In another group of papers extremal problems are considered which can be called integer or discrete programming. Techniques for the solution are given, based on the theory of linear inequalities and functional equations. The reader also finds algorithms for constructing optimal networks, solving large scale transportation problems and enumerating the feasible solutions for special combinatorial problems. There are papers dealing with minimax theorems related to the graph-theoretical theorem of D. König.

In a paper a brief account is made for the permanents (sums of diagonal products) of doubly stochastic matrices.

There are some papers included in the volume on number theory and algebra as well as on the numerical analysis of special discrete problems.

The reader finds a list of well-known names among the authors of the volume which contributes a great deal to the progress of this branch of mathematics.

András Prékopa (Budapest)

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION

M. Barner, Differential- und Integralrechnung. I (Sammlung Göschen, Bd. 86/86a), 176 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1961. — DM 3,60

R. R. Goldberg, Fourier Transform (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 52), VIII+76 pages, Cambridge, University Press, 1961. — 21 s.

K. Jacobs, Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 29), VI+214 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1960. — DM 49,80

A. Kratzer—W. Franz, Transzendente Funktionen (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 28), XIII+375 Seiten, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1960. — DM 39,—

O. Perron, Irrationalzahlen (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Reine und angewandte Mathematik, Bd. 1), VIII+202 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1960. — DM 28.—

Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Providence, American Mathematical Society, 1961.

Vol. 11. **Nuclear Reactor Theory.** Edited by **G. Birkhoff** and **E. P. Wigner,** VI+339 pages, — $ 8,60

Vol. 12. **Structure of Language and its Mathematical Aspects.** Edited by **R. Jakobson,** VI+279 pages. — $ 7,80

Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Providence, American Mathematical Society, 1961.

Vol. 2. **Lattice Theory.** Edited by **R. P. Dilworth,** VIII+208 pages. — $ 6,30

Vol. 3. **Differential Geometry.** Edited by **C. B. Allendoerfer,** VIII+200 pages. — $ 7,60

W. Rinow, Die innere Geometrie der metrischen Räume (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 105), XVI+520 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1961. — DM 83,—

R. Schatten, Norm Ideals of Completely Continuous Operators (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 27), VIII+81 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1960. — DM 23,60

B. Segre, Lectures on Modern Geometry (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monografie Matematiche, 7), XV+479 pages, Roma, Edizioni Cremonese, 1961.

S. Valentiner, Vektoren und Matrizen (Sammlung Göschen, Bd. 354/354a), 2. Aufl., 202 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1960. — DM 5,80

Mémorial des sciences mathématiques, fascicules 144—146, 148—149, Paris, Gauthier-Villars, 1960—61.

144. M. J. L. Walsh, Approximation by bounded analytic functions, IV+66 pages.

145. G. Belardinelli, Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébriques générales, IV+74 pages.

146. P. Jaffard, Théorie de la dimension dans les anneaux de polynomes, 79 pages.

148. H. Delavault, Les transformations intégrales à plusieurs variables et leurs applications, 95 pages.

149. A. Dinghas, Minkowskische Summen und Integrale. Superadditive Mengenfunktionale. Isoperimetrische Ungleichungen, 101 pages.

INDEX — TARTALOM

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

SZEGED (HUNGARIA), ARADI VÉRTANÚK TERE 1

Prix d'abonnement pour l'étranger $ 8.50. On peut s'abonner à l'entreprise de commerce des livres et journaux „Kultúra" (Budapest, I., Fő-utca 32).

61-3141 Szegedi Nyomda Vállalat

Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felel: Vágvölgyi Tibor igazgató
Felelős szerkesztő: Szőkefalvi-Nagy Béla
Műszaki vezető: Gortvai Tivadar
Műszaki szerkesztő: Vízkelety József
A kézirat nyomdába érkezett: 1961. július. Megjelenés: 1961. november.
Példányszám 750. Terjedelem 15 (A/5) ív
Készült kéziszedéssel, íves magasnyomással az MSZ 5601-54 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint