ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

TOMUS XXI

FASC. 1—2

SZEGED, 1960

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY

KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

21. KÖTET

1—2. FÜZET

SZEGED, 1960. MÁJUS HÓ

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

TOMUS XXI

1960

SZEGED, 1960

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY

KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

21. KÖTET

1960

SZEGED, 1960. NOVEMBER HÓ

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

INDEX — TARTALOM

TOMUS XXI — 1960 — 21. KÖTET

BIBLIOGRAPHIE

Über die quadratischen Zahlkörper mit Primzerlegung

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged

Die Zahlen -4, ± 8 und $\pm p$ ($\equiv 1 \pmod 4$), p rationale Primzahl) nennen wir *Stammdiskriminanten.* Offenbar zerlegt sich die Diskriminante D eines (absolut) quadratischen Zahlkörpers eindeutig in ein Produkt von Stammdiskriminanten, die wir deshalb die *Stammdiskriminantenfaktoren* von D nennen dürfen. Es gilt der

Satz. *Die Diskriminante D eines quadratischen Zahlkörpers Q mit Primzerlegung ist entweder eine Stammdiskriminante oder das Produkt von zwei negativen Stammdiskriminanten.*

In etwas weniger scharfen Form war dieser Satz bekannt und spielt in der Erforschung des Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern eine Rolle. Vier Beweise liegen für ihn schon vor, und zwar ein klassenkörpertheoretischer (BEHRBOHM und RÉDEI [1]), ein idealtheoretischer (INKERI [2]), ferner ein elementarer, aber etwas mühsamer, und ein sehr kurzer, auf dem Satz von DIRICHLET fußender (ENNOLA [3]). Der dritte dieser Beweise hat uns zu einem weiteren, ebenfalls elementaren und sehr leichten Beweis angeleitet, der zugleich obige Verschärfung hergab.

Mit R werde der Ring der ganzen Elemente von Q bezeichnet. Die Voraussetzung hat zur Folge, daß irgend zwei Elemente α, β von R einen (bis auf Assoziierte bestimmten) größten gemeinsamen Teiler in R haben, den wir mit (α, β) bezeichnen.

$\alpha \sim \beta$ bezeichnet, daß α, β assoziierte Elemente von R sind.

E und E^2 bezeichnen die Gruppe der Einheiten bzw. der Einheitenquadraten von R. Im Fall $D>0$ bezeichnet ε die Grundeinheit (>1) von R.

N bezeichnet die Norm der Elemente von Q.

Für ein Element α von Q bezeichnet α' das Konjugierte von α. Also besteht $N(\alpha) = \alpha\alpha'$.

Lateinische Minuskeln bezeichnen ganze rationale Zahlen. Insbesondere bezeichnen p, q verschiedene (positive) Primzahlen, ferner bezeichnet m den quadratfreien Kern von D. Dies bedeutet $D=m$ für $2\nmid D$ und $D=4m$ für $2|D$. Stets ist also sowohl $\sqrt{D}$ als auch $\sqrt{m}$ ein erzeugendes Element von Q.

Beim Beweis dürfen wir uns auf die D beschränken, die keine Stammdiskriminanten sind. Zu beweisen ist dann, daß D das Produkt von zwei negativen Stammdiskriminanten ist.

Hilfssatz. *Wenn $p|D$ ist, so gibt es ein $\eta(\in E)$ mit $\sqrt{p\eta}\in Q$.*

Um dies zu beweisen unterscheiden wir die zwei Fälle

$$p|m \quad \text{bzw.} \quad p\nmid m \,(\text{also } p=2,\, m\equiv -1 \pmod 4).$$

Entsprechend setzen wir

$$\alpha=(p,\sqrt{m}) \quad \text{bzw.} \quad \alpha=(2,1+\sqrt{m}).$$

Dann ist

$$\alpha^2=(p^2,m) \quad \text{bzw.} \quad \alpha^2=(4,1+m+2\sqrt{m})=(4,2\sqrt{m}),$$

also in beiden Fällen $\alpha^2\sim p$, d. h. $\alpha^2=p\eta$ mit einem $\eta(\in E)$. Wegen $\alpha\in Q$ gilt dabei auch $\sqrt{p\eta}\in Q$. Somit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wenn nun $D<0$ ist, so muß, da D keine Stammdiskriminante ist, sogar $D<-4$ gelten. Folglich besteht E aus 1 und -1. Da aber Q imaginär ist, kommt im Hilfssatz nur $\eta=-1$ in Frage. Hiernach sollte Q alle $\sqrt{-p}$ $(p|D)$ enthalten. Da dies falsch ist, ist der Fall $D<0$ gar nicht möglich.

Es ist nur noch der Fall $D>0$ übrig. Im Hilfssatz muß jetzt $\eta>0$ gelten. Da ferner η nur mod ε^2 in Frage kommt, so darf $\eta=1$ oder $\eta=\varepsilon$ angenommen werden.

Wenn dabei für ein p der Fall $\eta=1$ zutrifft, so folgt $\sqrt{p}\in Q, m=p$, $D=4p, p\neq 2$. Hiernach gilt jetzt die Stammdiskriminantenzerlegung $D=-4\cdot$ $-p$. Somit ist der Satz für diesen Fall bewiesen.

Zu betrachten ist nur noch der Fall, daß im Hilfssatz stets $\eta=\varepsilon$ gilt, d. h. alle $\sqrt{p\varepsilon}\,(p|D)$ in Q liegen. Dies zunächst nur für ein p berücksichtigend, ergibt sich hierfür $\sqrt{p\varepsilon'}\in Q, \varepsilon'>0$, also

$$N(\varepsilon)=1.$$

Gelten ferner $p|D$ und $q|D$, so folgt $\sqrt{p\varepsilon}\,\sqrt{q\varepsilon}\in Q, \sqrt{pq}\in Q$,

$$m=pq.$$

Da hierdurch p und q (bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmt sind, so kann D außer p und q überhaupt keine weiteren Primteiler haben. Das bedeutet, daß D nur zwei Stammdiskriminantenfaktoren hat. Diese sind (wegen $D>0$) von gleichem Vorzeichen. Wir nehmen an, daß sie positiv sind; durch einen hieraus abzuleitenden Widerspruch wird der Satz bewiesen sein.

Wegen der Annahme ist jedes von p und q entweder kongruent 1 mod 4 oder gleich 2. Also besteht eine Gleichung

$$pq = a^2 + b^2 \qquad (2 \nmid a).$$

Man setze

$$\varrho = b + \sqrt{pq}, \quad \omega = (a, \varrho).$$

Dann gelten

$$\varrho\varrho' = -a^2, \quad (\varrho, 2) \sim 1, \quad (\varrho, \varrho') \sim 1,$$

also

$$\omega^2 = (a^2, \varrho^2) = (\varrho\varrho', \varrho^2) \sim \varrho.$$

Hiernach ist $\omega^2\varrho^{-1}$ ein Element von E mit negativer Norm. Dies ist aber wegen $N(\varepsilon) = 1$ unmöglich. Durch diesen Widerspruch ist der Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] H. Behrbohm und L. Rédei, Der Euklidische Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern *J. reine angew. Math.*, **174** (1936), 192—205.

[2] K. Inkeri, Neue Beweise für einige Sätze zum Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern, *Ann. Univ. Turkensis*, A IX, **1** (1948).

[3] V. Ennola, Two elementary proofs concerning simple quadratic fields, *Nordisk mat Tidskrift*, **6** (1958), 114 - 117.

(Eingegangen am 27. September 1959)

Über das Rédeische schiefe Produkt vom Typ $G \odot \Gamma$

Von ZVONIMIR JANKO in Lištica (Jugoslavien)

Es sei $G \odot \Gamma$ das schiefe Produkt (vgl. **[1]** § 13) zweier Gruppen G, Γ mit den Elementen (a, α) $(a \in G, \alpha \in \Gamma)$ erklärt durch

(1) $$(a, \alpha)(b, \beta) = (a^{\beta} b^{\alpha}, \alpha^{b} \beta^{a}) \cdot \qquad (a^{\beta}, b^{\alpha} \in G; \alpha^{b}, \beta^{a} \in \Gamma).$$

F. RÜHS hat (in **[2]**) die Gruppe $G \odot \Gamma$ untersucht und gezeigt, daß diese Gruppe zum direkten Produkt $G \times \Gamma$ isomorph ist, jedoch ist sein Beweis unvollständig[1]), obwohl seine Behauptung richtig ist, wie es sich aus Folgendem erhellt.

Wir beweisen zunächst:

Satz 1. *Jede Gruppe $G \odot \Gamma$ ist zu einer solchen Gruppe $G \odot \Gamma$ isomorph, die (e, ε) zum Einselement hat, wo e, ε die Einselemente von G bzw. Γ sind.*

Beweis. Wenn (u, λ) das Einselement aus $G \odot \Gamma$ ist, dann ist nach (1)

$$(a, \alpha)(u, \lambda) = (a^{\lambda} u^{\alpha}, \alpha^{u} \lambda^{a}) = (u, \lambda)(a, \alpha) = (u^{\alpha} a^{\lambda}, \lambda^{a} \alpha^{u}) = (a, \alpha).$$

Daraus folgt

(2) $$a^{\lambda} u^{\alpha} = u^{\alpha} a^{\lambda} = a,$$

(3) $$\alpha^{u} \lambda^{a} = \lambda^{a} \alpha^{u} = \alpha$$

für alle $a \in G, \alpha \in \Gamma$.

Wir wenden (2) mit $a = u$ und (3) mit $\alpha = \lambda$ an. So folgt

(4) $$u^{\alpha} = r, \qquad \lambda^{a} = \varrho$$

für alle $\alpha \in \Gamma$ bzw. $a \in G$, wobei r und ϱ feste Elemente aus G bzw. Γ sind.

(2), (3) und (4) zeigen auch, daß r, ϱ Zentrumselemente aus G bzw. Γ sind, da a^{λ}, α^{u} alle Elemente von G bzw. Γ durchlaufen.

---

1) Die Unvollständigkeit des Beweises in der erwähnten Arbeit besteht darin, daß an zwei Stellen gewisse „Transformationen" von (1) verwendet werden, die aber unzulässig sind, da sie das Auftreten von vier Funktionen bewirken, wogegen in (1) nur zwei Funktionen figurieren.

Aus $(u,\lambda)(u,\lambda)=(r^2,\varrho^2)=(u,\lambda)$ folgen die Beziehungen

(5) $$u=r^2, \qquad \lambda=\varrho^2.$$

Wir betrachten die Permutation Π und ihre Inverse Π^{-1}, definiert durch

$$\Pi(a,\alpha)=(u^{-1}a,\lambda^{-1}\alpha), \qquad \Pi^{-1}(a,\alpha)=(ua,\lambda\alpha).$$

Man definiere nach RÉDEI ([1] § 2) in der Menge der Paare (a,α) eine neue Multiplikation durch

$$(a,\alpha)\times(b,\beta)=\Pi(\Pi^{-1}(a,\alpha)\,\Pi^{-1}(b,\beta))=$$
$$=(u^{-1}(ua)^{\lambda\beta}(ub)^{\lambda\alpha},\ \lambda^{-1}(\lambda\alpha)^{ub}(\lambda\beta)^{ua}),$$

wodurch eine zu $G\odot\Gamma$ isomorphe Gruppe entsteht. Es folgt nach (5) unter Beachtung, daß r,ϱ Zentrumselemente sind:

(6) $$(a,\alpha)\times(b,\beta)=(r^{-1}(ua)^{\lambda\beta}r^{-1}(ub)^{\lambda\alpha},\ \varrho^{-1}(\lambda\alpha)^{ub}\varrho^{-1}(\lambda\beta)^{ua}).$$

Dies ist wieder von der Form (1) mit $r^{-1}(ua)^{\lambda\alpha}$, $\varrho^{-1}(\lambda\alpha)^{ua}$ statt a^{α}, α^{a}. Die neue Gruppe ist also wieder vom Typ $G\odot\Gamma$, aber mit dem Einselement (e,ε), denn es ist

$$\Pi(u,\lambda)=(e,\varepsilon),$$ w. z. b. w.

Satz 2. *In der Gruppe $G\odot\Gamma$ mit der Einheit (e,ε) darf man sich auf den Fall*

$$e^{\alpha}=e, \qquad \varepsilon^{a}=\varepsilon$$

beschränken.

Beweis. Aus $(a,\alpha)(e,\varepsilon)=(a^{\varepsilon}e^{\alpha},\alpha^{e}\varepsilon^{a})=(e,\varepsilon)(a,\alpha)=(e^{\alpha}a^{\varepsilon},\varepsilon^{a}\alpha^{e})=$ $=(a,\alpha)$ folgt

(7) $$a^{\varepsilon}e^{\alpha}=e^{\alpha}a^{\varepsilon}=a, \qquad \alpha^{e}\varepsilon^{a}=\varepsilon^{a}\alpha^{e}=\alpha$$

für alle $a\in G$ und alle $\alpha\in\Gamma$. Also muß $e^{\alpha}=s$ für alle $\alpha\in\Gamma$, sowie $\varepsilon^{a}=\sigma$ für alle $a\in G$ bestehen, wobei s und σ feste Elemente aus G bzw. Γ sind. Insbesondere gilt

$$(e,\varepsilon)(e,\varepsilon)=(s^2,\sigma^2)=(e,\varepsilon),$$

also

(8) $$s^2=e, \qquad \sigma^2=\varepsilon.$$

Aus (7) folgt weiter

$$a^{\varepsilon}s=sa^{\varepsilon}=a, \qquad \alpha^{e}\sigma=\sigma\alpha^{e}=\alpha,$$

und diese Beziehungen zeigen, daß s und σ Zentrumselemente von G bzw. Γ sind, denn $a^{\varepsilon},\alpha^{e}$ alle Elemente von G bzw. Γ durchlaufen.

Wenn wir jetzt statt a^α, α^a die neuen Funktionen $a^\alpha s$, $\alpha^a \sigma$ nehmen, dann gilt

$$e^\alpha s = s^2 = e, \qquad \varepsilon^a \sigma = \sigma^2 = \varepsilon, \tag{9}$$

und weiter

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (a^\beta s b^\alpha s, \alpha^b \sigma \beta^a \sigma) = (a^\beta b^\alpha s^2, \alpha^b \beta^a \sigma^2) = (a^\beta b^\alpha, \alpha^b \beta^a), \tag{10}$$

da s, σ Zentrumselemente sind. Wegen (9) und (10) haben wir Satz 2 bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 201—227.

[2] F. Rühs, Über ein spezielles Rédeisches schiefes Produkt in der Gruppentheorie, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 160—164.

(Eingegangen am 27. August 1959)

Un complément à la théorie de l'"intégration non commutative"

Par I. KOVÁCS à Szeged

Préliminaires

Dans ce travail on désignera par M un anneau d'opérateurs dans un espace hilbertien complexe $\mathfrak{H}$. La partie positive de M, c'est-à-dire l'ensemble des éléments hermitiens $\geqq 0$ de M sera désignée par M^+.

M est dite de genre dénombrable[1]) si toute famille de projecteurs[2]) de M non nuls et deux à deux orthogonaux est dénombrable.

Une forme linéaire ϱ sur M est dite positive si l'on a $\varrho(T) \geqq 0$ pour tout $T \in M^+$. Lorsqu'il en est ainsi, on dit que ϱ est normale si, pour tout ensemble filtrant croissant $F \subset M^+$ de borne supérieure $T \in M^+$, $\varrho(T)$ est la borne supérieure de $\varrho(F)$. On dit que ϱ est fidèle si les conditions $\varrho(T) = 0$, $T \in M^+$, entraînent $T = 0$.

Soit ϱ une forme linéaire positive sur M. Les conditions suivantes sont équivalentes (cf. [3], chap. I, § 3, th. 1; § 4, th. 1 et exerc. 9):

(i) ϱ est normale;

(ii) pour toute famille (E_ι) de projecteurs de M deux à deux orthogonaux, on a $\varrho(\sum_\iota E_\iota) = \sum_\iota \varrho(E_\iota)$;

(iii) la restriction de ϱ à la boule unité M_1 de M est faiblement (fortement) continue.

Dans ce qui suit nous supposerons que M est fini (ceci veut dire qu'il ne contient que des projecteurs finis[3])) de genre dénombrable. En ce cas on

---

[1]) Dans la théorie de l'intégration des hypothèses de dénombrabilité sur l'espace de base sont utiles. La considération des anneaux d'opérateurs de genre dénombrable présente une utilité analogue dans la théorie de l' "intégration non commutative".

[2]) Le mot "projecteur" est pris toujours au sens de "projecteur orthogonal".

[3]) Un projecteur P dans un anneau d'opérateurs M est dit fini si M ne contient aucun opérateur partiellement isométrique de projecteur initial P et de projecteur final $Q \leqq P$, $Q \neq P$.

montre ([3], chap. III, § 4) qu'il existe sur M une forme linéaire positive normale fidèle φ possédant la propriété suivante: pour tout $R \in$ M on a $\varphi(R^*R) = \varphi(RR^*)$. On appelle φ une trace normale finie fidèle sur M.

On peut définir l'espace vectoriel complexe, désigné par $L^1(\varphi)$, des opérateurs (non nécessairement continus) intégrables par rapport à φ. $L^1(\varphi)$ contient M et φ peut être prolongée en une forme linéaire positive sur $L^1(\varphi)$ désignée par la suite par la même lettre φ. $L^1(\varphi)$ et φ ont les propriétés suivantes: si $S \in$ M et $T \in L^1(\varphi)$ on a ST, $TS \in L^1(\varphi)$ et $\varphi(ST) = \varphi(TS)$; si $T \in L^1(\varphi)$ on a T^*, $|T| \in L^1(\varphi)$.[4]) On démontre que l'espace $L^1(\varphi)$, muni de la norme $T \to \varphi(|T|)$, est un espace de Banach complexe. M est partout dense dans $L^1(\varphi)$ et le dual de $L^1(\varphi)$ s'identifie à l'espace de Banach complexe M muni de la norme $S \to \|S\|$[5]) (cf. [2] et [5]). La norme d'un élément $T \in L^1(\varphi)$ sera désignée par $\|T\|_1$.

L'ensemble des projecteurs de M sera désigné par M_P.

Le théorème et son corollaire

La théorie générale de l'intégration pour des opérateurs dans un espace hilbertien complexe, développée en particulier par J. DIXMIER [2] et I. E. SEGAL [5], montre que la théorie des anneaux d'opérateurs généralise dans une certaine mesure la théorie de l'intégration ordinaire. Ainsi on parle parfois d' "intégration non commutative". En recherchant les analogies entre la théorie des anneaux d'opérateurs et la théorie de l'intégration ordinaire, nous venons d'obtenir le théorème suivant:

Théorème. *Soit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ une suite de formes linéaires positives normales sur* M. *Supposons que la limite $\varrho(T) = \lim_{n\to\infty} \varrho_n(T)$ existe pour tout $T \in$* M. *$\varrho(T)$ est alors elle-même une forme linéaire positive normale sur* M.

Ce théorème peut être regardé dans une certaine mesure comme le pendant "non commutatif" du théorème suivant de VITALI—HAHN—SAKS dans la théorie de l'intégration ordinaire: *Soit (X, S, μ)[6]) un espace mesuré, de mesure μ non-négative, et soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ une suite de fonctions d'ensemble, à valeurs complexes, additives et absolument continues par rapport à μ sur S.*

---

[4]) Si T est un opérateur fermé à domaine dense on appelle décomposition polaire de T la décomposition $T = U|T|$, où $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ et U est partiellement isométrique admettant pour sous-espace initial l'adhérence de $|T|\mathfrak{H}$. Si $T \in$ M on a $|T|$, $U \in$ M.

[5]) $\| \ \|$ est la norme usuelle des opérateurs continus.

[6]) Pour la terminologie de la théorie de la mesure nous renvoyons le lecteur à [1].

Supposons que la limite $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(E)$ *existe pour tout ensemble* $E \in S$. *Alors*

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \lambda_n(E) = 0,$$

uniformément par rapport à n ([1] III, 7. 2).

Nous démontrons d'abord deux lemmes:

L e m m e 1. *Dans la métrique induite*[7]) *par* $L^1(\varphi)$ *l'ensemble* M_P *est complet.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $P_1, P_2, P_3, \ldots$ une suite fondamentale d'éléments de M_P, c'est-à-dire pour laquelle on a $\lim_{m,n\to\infty} \|P_m - P_n\|_1 = 0$. La convergence de $\|P_m - P_n\|_1 = \varphi(|P_m - P_n|)$ vers zéro implique la convergence forte de $|P_m - P_n|$ vers zéro (cf. [3], chap. I, § 4, prop. 4). Soit $P_m - P_n = U_{m,n}|P_m - P_n|$ la décomposition polaire de $P_m - P_n$ et soit x un élément quelconque de $\mathfrak{H}$. L'inégalité

$$\|(P_m - P_n)x\| = \|U_{m,n}|P_m - P_n|x\| \leqq \||P_m - P_n|x\|$$

montre que la suite $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ tend fortement à un élément de M qui est un projecteur nécessairement, ce qui achève la démonstration du lemme 1.

L e m m e 2. *Soit* ϱ *un forme linéaire positive normale sur* M. *La condition* $\|P - P_0\|_1 = \varphi(|P - P_0|) \to 0$ *sur* M_P *entraîne* $\varrho(P) \to \varrho(P_0)$.

D é m o n s t r a t i o n. Le raisonnement de la démonstration du lemme 1 montre que la condition $\varphi(|P - P_0|) \to 0$ sur M_P entraîne la convergence forte de $P - P_0$ vers zero. Alors, notre assertion résulte de la continuité forte de ϱ sur M_1 (cf. Préliminaires).

Cela étant, passons à la

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e[8]). Il est clair que ϱ est une forme linéaire positive sur M. Pour achever la démonstration, prouvons d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ tel que sur M_P la condition $\varphi(P) < \delta$ entraîne $\varrho_n(P) \leqq \varepsilon$ pour tout n.

D'après le lemme 2, chaque ϱ_n est continue sur l'espace métrique complet M_P. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, les ensembles

$$\mathsf{M}_{m,n} = \{P \in \mathsf{M}_P : \ |\varrho_m(P) - \varrho_n(P)| \leqq \varepsilon\} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots),$$

$$\mathsf{M}_q = \bigcap_{m,n \geqq q} \mathsf{M}_{m,n} \qquad (q = 1, 2, \ldots)$$

[7]) Par la métrique de M_P nous entendrons dans ce qui suit cette métrique induite.

[8]) L'idée fondamentale de la démonstration est analogue à celle de la démonstration usuelle du théorème de VITALI—HAHN—SAKS.

sont fermés dans l'espace métrique complet M_P. Comme $\lim_{n\to\infty} \varrho_n(P)$ existe pour tout $P \in \mathsf{M}_P$, on a $\mathsf{M}_P = \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathsf{M}_q$.

D'après un théorème de catégorie de BAIRE (cf. [1], I, 6. 9), l'un des M_q a un point intérieur. Donc il existe un nombre entier p, un nombre positif r et un projecteur $Q_p \in \mathsf{M}_P$ tels que

$$|\varrho_m(P) - \varrho_n(P)| \leqq \varepsilon \qquad (m, n \geqq p)$$

pour tout P de la boule

$$K = \{P \in \mathsf{M}_P\colon \quad \|P - Q_p\|_1 < r\}.$$

Pour des projecteurs G et H de M, désignons par $G \cup H$ le plus petit projecteur majorant G et H. Évidemment $G \cup H$ appartient à M. En vertu du lemme 7. 3. 4. de [4], $(G \cup H) - H \precsim G$ [9]). Il en résulte que

$$\|(G \cup H) - H\|_1 = \varphi((G \cup H - H) \leqq \varphi(G),$$

$$\|((G \cup H) - G) - H\|_1 = \|((G \cup H) - H) - G\|_1 \leqq$$

$$\leqq \|(G \cup H) - H\|_1 + \|G\|_1 \leqq 2\varphi(G).$$

En appliquant ces inégalités et le lemme 2, on peut choisir un nombre δ $(0 < \delta < r)$ tel que pour tout $F \in \mathsf{M}_P$ satisfaisant à la condition $\varphi(F) < \delta$ on ait

$$\varrho_n(F) < \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots, p)$$

et

$$F \cup Q_p, \; [(F \cup Q_p) - F] \in K.$$

Alors, l'identité

$$\varrho_n(F) = \varrho_p(F) + [\varrho_n(F) - \varrho_p(F)] =$$

$$= \varrho_p(F) + [\varrho_p((F \cup Q_p) - F) - \varrho_n((F \cup Q_p) - F)] +$$

$$+ [\varrho_n(F \cup Q_p) - \varrho_p(F \cup Q_p)]$$

montre que $\varrho_n(F) \leqq 3\varepsilon$ pour tout n.

Montrons finalement que ϱ est normale. Il suffit de prouver que pour toute suite décroissante $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ de M_P telle que $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = 0$,[10]) $\varrho(P_n)$ tend vers

---

[9]) Deux projecteurs P et Q de M sont dits équivalents, et l'on écrit $P \sim Q$, s'il existe un élément U de M tel que $U^*U = P$, $UU^* = Q$. On écrit $P \prec Q$, ou $Q \succ P$, s'il existe un projecteur de M équivalent à P et majoré par Q.

[10]) Pour des projecteurs $P_1, P_2, \ldots$ de M, $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$ désigne le projecteur correspondant au sous-espace $\bigcap_{n=1}^{\infty} (P_n \mathfrak{H})$.

zéro. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il existe un nombre entier $N(\varepsilon)$ tel que, si $m \geqq N(\varepsilon)$, on a

$$|\varrho_n(P_m)| \leqq \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ainsi $|\varrho(P_m)| \leqq \varepsilon$ pour $m \geqq N(\varepsilon)$, ce qui établit notre assertion.

Corollaire. *La partie positive de $L^1(\varphi)$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments hermitiens $\geqq 0$ de $L^1(\varphi)$, est faiblement complète*[11]).

Démonstration. Soit $T_1, T_2, \ldots$ une suite d'éléments hermitiens non-négatifs de $L^1(\varphi)$ satisfaisant à la condition suivante: pour tout $T \in \mathsf{M}$

$$\lim_{m, n \to \infty} [\varphi(T_m T) - \varphi(T_n T)] = 0.$$

Pour tout n, $\varrho_n(T) = \varphi(T_n T)$ est une forme linéaire positive normale sur M (cf. [5], p. 423 et p. 430). D'après notre théorème, $\varrho(T) = \lim_{n \to \infty} \varrho_n(T)$ est une forme linéaire positive normale sur M. En vertu du théorème de RADON—NIKODÝM dans les anneaux d'opérateurs (cf. [5], th. 14), il existe un opérateur hermitien non-négatif A de $L^1(\varphi)$ tel que

$$\varphi(AT) = \varrho(T) = \lim_{n \to \infty} \varrho_n(T) = \lim_{n \to \infty} \varphi(T_n T),$$

ce qui achève la démonstration.

Bibliographie

[1] N. DUNFORD—J. T. SCHWARTZ, *Linear operators.* Part I: *General theory* (New York, 1958).

[2] J. DIXMIER, Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, *Bulletin de la Soc. Math. de France,* **81** (1953), 9—39.

[3] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann)* (Paris, 1957).

[4] F. J. MURRAY—J. VON NEUMANN, On rings of operators, *Annals of Math.*, **37** (1936), 116—229.

[5] I. E. SEGAL, A non commutative extension of abstract integration, *Annals of Math.*, **57** (1951), 401—457.

(Reçu le 3 septembre 1959)

[11]) La topologie faible de $L^1(\varphi)$ est la topologie faible définie par son dual M.

Bemerkung zu einem Satz von G. Alexits

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

G. ALEXITS hat den folgenden Satz bewiesen [1]):

Bezeichne $\{c_n\}$ *eine positive Zahlenfolge mit konvergentem* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$, *für die die Ungleichungen*

$$(1)\qquad \sqrt{n}\, c_n \geqq \sqrt{n+1}\, c_{n+1} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

und

$$(2)\qquad n^2 c_n^2 \leqq (n+1)^2 c_{n+1}^2 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

gelten. Ist die Orthogonalreihe

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

im Grundintervall $[a,b]$ *fast überall zur Funktion* $f(x)$ *Abelsch summierbar und gilt*

$$(4)\qquad a_n^2 = O(c_n^2),$$

so besteht für jede Indexfolge $\{\nu_m\}$ $(\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_m < \cdots)$ *bei jedem* $\alpha > \frac{1}{2}$:

$$\sum_{m=1}^{n} [f(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)]^2 = o(n)$$

fast überall, wo $\sigma_m^{(\beta)}(x)$ *das m-te* (C, β)*-Mittel der Reihe* (3) *bezeichnet.*

In dieser Note werden wir beweisen, daß *die Behauptung dieses Satzes auch ohne die Bedingung* (2) *gilt.* Für $\alpha = 1$ habe ich dieses Resultat schon früher erhalten. [2])

---

[1]) G. ALEXITS, Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 127—129.

[2]) K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. IV (Starke Summation.), *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 18—25.

Beweis. Ist die Reihe (3) fast überall nach der Funktion $f(x)$ Abelsch summierbar, so folgt aus einem Satz von A. ZYGMUND, daß $\lim_{m\to\infty} \sigma_m^{(\beta)}(x) = f(x)$ fast überall[3]) ($\beta>0$), somit gilt für eine beliebige Indexfolge $\{\nu_m\}$

$$\sum_{m=1}^{n} [f(x)-\sigma_{\nu_m}^{(\beta)}(x)]^2 = o(n) \qquad (\beta>0) \tag{5}$$

fast überall. Also haben wir die Behauptung nur für den Fall $\frac{1}{2}<\alpha<1$ zu beweisen. Da

$$\sum_{m=1}^{n}[f(x)-\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)]^2 \leqq 2\sum_{m=1}^{n}[f(x)-\sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2+2\sum_{m=1}^{n}[\sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)-\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)]^2$$

gilt, haben wir nach (5) nur zu zeigen, daß die letzte Summe fast überall die Größenordnung $o(n)$ hat. Nun ist aber

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_a^b [\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)-\sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2\,dx = \frac{1}{\alpha^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(A_{\nu_m}^{(\alpha)})^2}\sum_{k=1}^{\nu_m}(A_{\nu_m-k}^{(\alpha-1)})^2k^2a_k^2, \tag{6}$$

wo $A_m^{(\beta)}$ den m-ten Binomialkoeffizienten β-ter Ordnung bedeutet. Es gibt bekanntlich von m unabhängige, positive Konstanten C_1, C_2 derart, daß $C_1(m+1)^\beta \leqq A_m^{(\beta)} \leqq C_2(m+1)^\beta$ ($\beta>-1$; $m=0, 1, \ldots$) ist, folglich gilt wegen (4) und $\nu_m \geqq m$ $(m=1, 2, \ldots)$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(A_{\nu_m}^{(\alpha)})^2}\sum_{k=1}^{\nu_m}(A_{\nu_m-k}^{(\alpha-1)})^2k^2a_k^2= \tag{7}$$

$$=O(1)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{m-1}(\nu_m-k+1)^{2\alpha-2}k^2c_k^2+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}}\sum_{k=m}^{\nu_m}(\nu_m-k+1)^{2\alpha-2}k^2c_k^2\right).$$

Wegen (1) ergibt sich

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}}\sum_{k=m}^{\nu_m}(\nu_m-k+1)^{2\alpha-2}k^2c_k^2 \leqq \sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m^2}{\nu_m^{2\alpha}}\sum_{k=m}^{\nu_m}(\nu_m-k+1)^{2\alpha-2}k. \tag{8}$$

Da wegen $\alpha>\frac{1}{2}$ und $\nu_m \geqq m$ $(m=1, 2, \ldots)$

$$\sum_{k=m}^{\nu_m}(\nu_m-k+1)^{2\alpha-2}k=\sum_{l=1}^{\nu_m-m+1}l^{2\alpha-2}(\nu_m-l+1)=$$

$$=O(1)\left(\sum_{l=1}^{\nu_m-m}l^{2\alpha-1}+m(\nu_m-m)^{2\alpha-1}\right)=O(\nu_m^{2\alpha})$$

[3]) A. ZYGMUND, Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356—362.

gilt, so ist nach (8)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}} \sum_{k=m}^{\nu_m} (\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2} k^2 c_k^2 = O(1) \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 < \infty. \tag{9}$$

Auf Grund der Ungleichungen $\alpha < 1$ und $\nu_m \geqq m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{m-1} (\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2} k^2 c_k^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2}}{m\nu_m^{2\alpha}} \leqq \\ &\leqq \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^2 \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(m-k+1)^{2\alpha-2}}{m^{2\alpha}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Da wegen $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(m-k+1)^{2\alpha-2}}{m^{2\alpha}} &= \sum_{m=k}^{2k-1} \frac{(m-k+1)^{2\alpha-2}}{m^{2\alpha}} + \sum_{m=2k}^{\infty} \frac{(m-k+1)^{2\alpha-2}}{m^{2\alpha}} \leqq \\ &\leqq \frac{1}{k^{2\alpha}} \sum_{l=1}^{k} l^{2\alpha-2} + 2^{2-2\alpha} \sum_{m=2k}^{\infty} \frac{m^{2\alpha-2}}{m^{2\alpha}} = O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

besteht, so gilt nach (10)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{m-1} (\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2} k^2 c_k^2 = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty. \tag{11}$$

Auf Grund von (6), (7), (9) und (11) ergibt sich mit Anwendung des Satzes von B. LEVI, daß die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2$$

fast überall konvergiert, woraus sich nach einem oft verwendeten Kroneckerschen Lemma fast überall

$$\sum_{m=1}^{n} [\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2 = o(n)$$

ergibt.

Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen.

(Eingegangen am 18. September 1959)

Ein Summationssatz für Orthogonalreihen mit monotoner Koeffizientenfolge

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem. Wir betrachten die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

mit einer positiven, monoton nichtwachsenden Koeffizientenfolge $\{a_n\}$. Es ist bekannt, daß jede der folgenden zwei Bedingungen:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2 < \infty, \text{ [1]} \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \infty \text{ [2]} \tag{3}$$

für die $(C, 1)$-Summierbarkeit fast überall der Orthonalreihe (1) hinreichend ist.

In dieser Note werden wir den folgenden Satz beweisen. *Gibt es eine Indexfolge* $\{n_k\}$ $(n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots)$, *für die*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\{a_{n_k}\sqrt{n_{k+1}-n_k},\ a_{n_k}^2 (n_{k+1}-n_k)\log^2 k\} < \infty \tag{4}$$

gilt, so ist die Reihe (1) *fast überall* $(C, 1)$-*summierbar.*

Es ist leicht einzusehen, daß die Bedingung (4) schwächer als (2), oder (3) ist. Gilt nämlich (2), oder (3), so ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_{2^k}^2 2^k \log^2 k < \infty, \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{2^k}\sqrt{2^k} < \infty,$$

---

[1]) S. KACZMARZ, Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 99—105; D. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales. Deuxième partie, *Fundamenta Math.*, **8** (1926), 56 - 108.

[2]) G. ALEXITS, Ein Summationssatz für Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), 5—9.

und so besteht auch (4) mit $n_k = 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Andererseits es gibt eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge, für die (4) erfüllt wird, aber weder (2) noch (3) bestehen. Es sei nämlich

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2^{2^{k+1}} - 2^{2^k}}\, k \log k} \qquad (2^{2^k} \leqq n < 2^{2^{k+1}};\ k = 2, 3, \ldots).$$

Dann ist

$$\sum_{k=2^4}^{\infty} \min \{a_{2^{2^k}} \sqrt{2^{2^{k+1}} - 2^{2^k}},\ a_{2^{2^k}}^2 (2^{2^{k+1}} - 2^{2^k}) \log^2 k\} = \sum_{k=2^4}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

aber

$$\sum_{n=2^4}^{\infty} a_n^2 (\log \log n)^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2^{2^k}}^{2^{2^{k+1}}-1} a_n^2 (\log \log n)^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2 k} = \infty$$

und

$$\sum_{n=2^4}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2^{2^k}}^{2^{2^{k+1}}} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k} = \infty.$$

Beweis des Satzes. Seien $k_1 < k_2 < \cdots < k_i < \cdots$ die Indizes k, für die

$$\min \{a_{n_k} \sqrt{n_{k+1} - n_k},\ a_{n_k}^2 (n_{k+1} - n_k) \log^2 k\} = a_{n_k} \sqrt{n_{k+1} - n_k}$$

ist, und $l_1 < l_2 < \cdots < l_j < \cdots$ seien die übrigen Indizes. Nach (4) ist dann

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b |s_{n_{k_i+1}}(x) - s_{n_{k_i}}(x)|\, dx \leqq \sqrt{b-a} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\int_a^b (s_{n_{k_i+1}}(x) - s_{n_{k_i}}(x))^2\, dx} =$$

$$= \sqrt{b-a} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_{n_{k_i}+1}^2 + \cdots + a_{n_{k_i+1}}^2} \leqq \sqrt{b-a} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_{k_i}} \sqrt{n_{k_i+1} - n_{k_i}} < \infty,$$

und so konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} (s_{n_{k_i+1}}(x) - s_{n_{k_i}}(x)) \tag{5}$$

auf Grund des Satzes von B. Levi fast überall.

Wir betrachten das orthonormierte Funktionensystem

$$\Phi_k(x) = \frac{a_{n_k+1} \varphi_{n_k+1}(x) + \cdots + a_{n_{k+1}} \varphi_{n_{k+1}}(x)}{(a_{n_k+1}^2 + \cdots + a_{n_{k+1}}^2)^{1/2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Sei $c_k = (a_{n_k+1}^2 + \cdots + a_{n_{k+1}}^2)^{1/2}$ für $k = l_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ und $c_k = 0$ sonst. Auf Grund von (4) mit Anwendung des Satzes von D. Menchoff und H. RADEMACHER[3]) folgt, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k(x),$$

d. h. die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} (s_{n_{l_j+1}}(x) - s_{n_{l_j}}(x)) \tag{6}$$

fast überall konvergiert. Durch Addition von (5) und (6) ergibt sich, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (s_{n_{k+1}}(x) - s_{n_k}(x))$$

und folglich die Folge $\{s_{n_k}(x)\}$ fast überall konvergiert.

Aus (4) folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^2 (n_{k+1} - n_k) < \infty. \tag{7}$$

Daraus ergibt sich[4])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k < 2^n < n_{k+1}}^{(n)} \int_a^b (s_{2^n}(x) - s_{n_k}(x))^2 \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k < 2^n < n_{k+1}}^{(n)} (a_{n_k+1}^2 + \cdots + a_{2^n}^2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^2 \sum_{n_k < n < n_{k+1}}^{(n)} (2^n - n_k) = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^2 (n_{k+1} - n_k) < \infty,$$

und so konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k < 2^n < n_{k+1}}^{(n)} (s_{2^n}(x) - s_{n_k}(x))^2$$

auf Grund des Satzes von B. LEVI fast überall, also ist $s_{2^n}(x) - s_{n_k}(x) \to 0$ $(n_k < 2^n < n_{k+1})$ fast überall. Damit haben wir bewiesen, daß die Folge $\{s_{2^n}(x)\}$ fast überall konvergiert. Da nach (7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

gilt, so ergibt sich nach einem Satz von S. KACZMARZ[5]), daß die Reihe (1) fast überall $(C, 1)$-summierbar ist.

---

[3]) D. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82—105; H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112—138.

[4]) $\sum^{(n)}$ bedeutet, daß man in bezug auf n zu summieren hat.

[5]) S. KACZMARZ, Über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **96** (1927), 148—151.

Damit haben wir den Satz bewiesen.

Bemerkung. Aus dem Beweis des Satzes sieht man, daß auch die folgende, etwas schärfere Behauptung gilt: *Ist* (4) *für die positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge* $\{a_n\}$ *mit einer Indexfolge* $\{n_k\}$ *erfüllt und gilt* $c_n^2 = O(a_n^2)$, *so ist die Orthogonalreihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

fast überall $(C, 1)$*-summierbar.*

(Eingegangen am 18. September 1959)

Über die orthogonalen Polynomsysteme

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

§ 1. Einleitung

Nach dem bekannten Satz von MENCHOFF und RADEMACHER ist die Bedingung $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty$ hinreichend dafür, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert[1]). MENCHOFF [1]—[2] hat diesem *Konvergenzsatz* auch einen *Divergenzsatz* gegenüberstellt:

Zu jeder positiven Zahlenfolge $W(n)$, welche die Bedingung $W(n) = o(\log n)$ erfüllt, kann man eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ und ein im Intervall (a, b) gleichmäßig beschränktes, orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ finden, derart, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 W^2(n)$$

konvergiert, und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

in (a, b) überall divergiert.

Mit zusätzlichen Überlegungen hat MENCHOFF [3] diesen Divergenzsatz weiter so verschärft, daß man die Funktionen $\varphi_n(x)$ auch als Polynome wählen kann.

Neuerdings hat Herr K. TANDORI eine Reihe von weiteren Divergenzsätzen bewiesen, wobei immer die Existenz eines orthonormierten Funktionensystems mit gewissen Divergenzeigenschaften behauptet wird. Nun besteht die Frage, ob auch die Tandorischen Ergebnisse derart verschärft werden können, daß man für die orthonormierten Funktionensysteme mit den betreffenden Divergenzeigenschaften auch Polynomsysteme wählen kann.

---

[1]) In dieser Arbeit benützen wir den Logarithmus mit der Basis 2. Wir betrachten nur *reellwertige* Funktionen, undzwar auf einem *endlichen* Intervall.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit diesem Problem. Unter Benützung der Grundideen von MENCHOFF, die er im Beweis seines verschärften Satzes angewendet hat, werden wir zuerst einen allgemeinen Approximationssatz beweisen (Satz 1), der uns gestattet, von orthogonalen Funktionensystemen allgemeinen Typs zu orthogonalen Polynomsystemen unter Erhaltung gewisser Eigenschaften zu übergehen.

Satz 1. *Es sei* $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ *ein im Grundintervall* (a,b) *orthonormiertes Funktionensystem. Dann kann zu jeder positiven Zahlenfolge* $\{\varepsilon_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$ *und zu jeder Indexfolge* $\{N_i\}$ $(0=N_0<N_1<\cdots<N_i<\cdots)$ *ein in* (a,b) *orthonormiertes Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ *und eine Folge von meßbaren Mengen* $G_i(\subseteqq(a,b))$ $(i=1,2,\ldots)$ *derart angegeben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: für* $x\in CG_i$[2]) *und für jedes* n *mit* $N_{i-1}<n\leqq N_i$ *gilt*

$$|\varphi_n(x)-(-1)^{j_i(x)}P_n(x)|\leqq\varepsilon_i \qquad (j_i(x)=0 \text{ oder } 1), \tag{1.1}$$

$$\mu(G_i)\leqq\varepsilon_i. \tag{1.2}$$

Man kann die $P_n(x)$ *sogar so wählen, daß*

$$|P_n(x)|\leqq 2(\sup_{a<x<b}|\varphi_n(x)|+1)\text{ }^{3)} \tag{1.3}$$

gilt. Ist also insbesondere das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall* (a,b) *gleichmäßig beschränkt, so kann das Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ *ebenfalls gleichmäßig beschränkt gewählt werden.*

Es ist vielleicht von gewissem Interesse zu bemerken, daß eine derartige Approximation nur für ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ möglich ist; es gilt nämlich der folgende

Satz 1*. *Es sei* $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ *ein im Intervall* (a,b) *definiertes System von quadratisch integrierbaren Funktionen. Wir nehmen an, daß es zu jeder positiven Zahlenfolge* $\{\varepsilon_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$ *und Indexfolge* $\{N_i\}$ $(0=N_0<<N_1<\cdots<N_i<\cdots)$ *ein solches in* (a,b) *orthonormiertes Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ *und eine solche Folge von meßbaren Mengen* $E_i(\subseteqq(a,b))$ $(i=1,2,\ldots)$ *gibt, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: für* $x\in CE_i$ *und jedes* n *mit* $N_{i-1}<n\leqq N_i$ *gilt*

$$|\varphi_n(x)-(-1)^{j_i(x)}P_n(x)|\leqq\varepsilon_i \qquad (j_i(x)=0 \text{ oder } 1), \tag{1.4}$$

$$\mu(E_i)\leqq\varepsilon_i, \tag{1.5}$$

---

[2]) CH bezeichnet immer die Komplementärmenge der Menge H in bezug auf das jeweils betrachtete Grundintervall (a,b). Mit $\mu(H)$ wird das Lebesguesche Maß der Menge H bezeichnet.

[3]) Natürlich ist diese Bedingung nur in dem Falle von Bedeutung, daß $\sup_{a<x<b}|\varphi_n(x)|$ endlich ist.

und für $x \in (a, b)$ *und für jedes* n *gilt*

$$|P_n(x)| \leqq K_n |\varphi_n(x)| + 1, \tag{1.6}$$

wobei K_n *eine nur vom Index* n *abhängige positive Zahl ist. Dann ist* $\{\varphi_n(x)\}$ *ein im Intervall* (a, b) *orthonormiertes Funktionensystem.*

Aus Satz 1 ergibt sich der folgende

Satz 2. *Es seien vorgegeben: eine reelle Zahlenfolge* $\{s_n\}$, *ein im Intervall* (a, b) *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\varphi_n(x)\}$, *eine Folge von meßbaren Mengen* $G_m (\subseteqq (a, b))$, *eine Indexfolge* $\{N_m\}$ $(0 = N_0 < N_1 < \cdots < N_m < \cdots)$ *und eine positive Zahl* ε. *Wir nehmen an, daß* $\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} G_m) = b - a$ *ist, und daß es für jedes* $x \in G_m$ *einen Index* $n_m(x)$ $(< N_{m+1} - N_m)$ *derart gibt, daß die Ungleichung*

$$|s_{N_m+1}\varphi_{N_m+1}(x) + \cdots + s_{N_m+n_m(x)}\varphi_{N_m+n_m(x)}(x)| \geqq D(m) \tag{1.7}$$

besteht, wo $\{D(m)\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge ist.*

Dann kann ein in (a, b) *orthonormiertes Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ *angegeben werden, derart, daß die Ungleichung*

$$|s_{N_m+1}P_{N_m+1}(x) + \cdots + s_{N_m+n_m(x)}P_{N_m+n_m(x)}(x)| \geqq (1-\varepsilon)D(m) \tag{1.8}$$

für fast alle $x \in (a, b)$ *bei unendlich vielen Werten von* m *erfüllt wird. Ist das Funktionensystem* $\{\varphi_n(x)\}$ *in* (a, b) *gleichmäßig beschränkt, so kann auch das System* $\{P_n(x)\}$ *gleichmäßig beschränkt gewählt werden.*

Unter Benützung der Sätze 1 und 2 können wir die Divergenzsätze von K. TANDORI im schon erwähnten Sinne verschärfen. Es handelt hier um die folgenden Divergenzsätze.[4])

Satz A. (TANDORI [1]) *Es sei* $\{a_n\}$ *eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \infty$$

erfüllt ist. Dann existiert ein System $\{\varphi_n(x)\}$ *derart, daß die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \varphi_n(x)$$

für jede Koeffizientenfolge $\{a_n^*\}$ *mit* $a_n^* \geqq \eta a_n$ $(n = 0, 1, \ldots; \eta > 0)$ *fast überall divergiert, das System* $\{\varphi_n(x)\}$ *kann sogar beschränkt gewählt werden.*

[4]) Wobei $\{\varphi_n(x)\}$ immer ein in (a, b) orthonormiertes Funktionensystem bedeutet; das System $\{\varphi_n(x)\}$ heißt beschränkt, wenn $|\varphi_n(x)| \leqq K$ für alle $x \in (a, b)$ und $n = 1, 2, \ldots$ gilt.

Satz B. (TANDORI [1]) *Es sei $\{l_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, welche die Bedingung*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^2 n}{l_n^2} = \infty$$

erfüllt. Dann existiert ein System $\{\varphi_n(x)\}$ derart, daß

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{l_N} \left| \sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x) \right| = \infty$$

fast überall gilt. Das System $\{\varphi_n(x)\}$ kann auch beschränkt gewählt werden.

Satz C. (TANDORI [1]) *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \infty. \tag{1.9}$$

Dann existiert ein System $\{\varphi_n(x)\}$ mit

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} |\varphi_N(x)| = \infty, \tag{1.10}$$

fast überall in (a, b).

Satz D. (TANDORI [2]) *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung $w(n) = o(\log n)$ erfüllt. Dann kann eine Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$* [5]) *und ein System $\{\varphi_n(x)\}$ derart angegeben werden, daß die orthogonale Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1.11}$$

in (a, b) fast überall $(C, 1)$-summierbar ist und jedoch

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x) \right| = \infty$$

fast überall besteht. Das System $\{\varphi_n(x)\}$ kann auch beschränkt gewählt werden.

Satz E. (TANDORI [1]) *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, welche die Bedingung $w(n) = o(\log\log n)$ erfüllt. Dann gibt es eine Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$ und ein System $\{\varphi_n(x)\}$ derart, daß für jedes $\alpha > 0$*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} a_\nu \varphi_\nu(x) \right| = \infty \qquad \left(A_m^{(\alpha)} = \binom{m+\alpha}{m} \right)$$

fast überall besteht. Das System $\{\varphi_n(x)\}$ kann auch beschränkt gewählt werden.

---

[5]) Mit l^2 wird die Klasse der Koeffizientenfolgen $\{a_n\}$ bezeichnet, für die $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$ ist.

Satz F. (TANDORI [1]) *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit* (1.9). *Dann gibt es ein System* $\{\varphi_n(x)\}$, *für welches bei jedem* $\alpha(>0)$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{\lambda_N}\left|\frac{1}{A_N^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{N}A_{N-\nu}^{(\alpha)}\varphi_\nu(x)\right|=\infty$$

fast überall gilt.

Satz G. (TANDORI [2]) *Es sei* $\{a_n^*\}\in l^2$ *eine positive Zahlenfolge, für die die Bedingungen*

$$\sqrt{n}\,a_n^*\geqq\sqrt{n+1}\,a_{n+1}^*\quad(n=1,2,\ldots),\quad\sum_{n=2}^{\infty}(a_n^*)^2(\log\log n)^2=\infty$$

erfüllt sind. Dann existiert ein System $\{\varphi_n(x)\}$ *derart, daß die Reihe* (1.11) *für jede Koeffizientenfolge* $\{a_n\}\in l^2$ *mit* $a_n\geqq\eta a_n^*$ $(n=1,2,\ldots;\eta>0)$ *fast überall nicht* $(C,1)$*-summierbar ist.*

Satz H. (TANDORI [2]) *Es sei* $\{w(n)\}$ *eine positive Zahlenfolge mit* $\sqrt{n}=o(w(n))$. *Dann kann eine positive Koeffizientenfolge* $\{a_n\}\in l^2$ *und ein System* $\{\varphi_n(x)\}$ *derart angegeben werden, daß*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{w(n)}<\infty$$

gilt und die Reihe (1.11) *fast überall nicht* $(C,1)$*-summierbar ist.*

Satz I. (TANDORI [4]) *Es gibt ein System* $\{\varphi_n(x)\}$, *eine Koeffizientenfolge* $\{a_n\}\in l^2$ *und eine Indexfolge* $\{n_k\}$ *derart, daß die Reihe* (1.11) *in* (a,b) *fast überall zu einer quadratisch integrierbaren Funktion* $f(x)$ $(C,1)$*-summierbar ist, aber die Folge der Mittel*

$$\frac{S_{n_1}(x)+\cdots+S_{n_N}(x)}{N}$$

in (a,b) *fast überall divergiert, wobei* $S_k(x)$ *die* k*-te Partialsumme der Reihe* (1.11) *bezeichnet. Das System* $\{\varphi_n(x)\}$ *kann in* (a,b) *beschränkt gewählt werden.*

Satz J. (TANDORI [3]) *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendlich strebende Zahlenfolge, für welche die Bedingung* (1.9) *erfüllt wird. Dann kann man ein System* $\{\varphi_n(x)\}$ *derart angeben, daß fast überall in* (a,b) *gilt:*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{\lambda_N}\int_a^b\left|\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(x)\varphi_n(t)\right|dt>\delta(>0)\tag{1.12}$$

und

(1.13)
$$\int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt = O(\lambda_N).$$

Satz K. (TANDORI [3]) *Es sei α ein gegebener positiver Parameterwert und $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge, für welche die Bedingung (1.9) erfüllt ist. Dann existiert ein von α abhängiges System $\{\varphi_n^{(\alpha)}(x)\}$ derart, daß im Intervall (a, b) fast überall*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} \int_a^b \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{n=0}^{N} A_{N-n}^{(\alpha)} \varphi_n^{(\alpha)}(x)\varphi_n^{(\alpha)}(t) \right| dt > \varrho (> 0)$$

und

$$\int_a^b \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{n=0}^{N} A_{N-n}^{(\alpha)} \varphi_n^{(\alpha)}(x)\varphi_n^{(\alpha)}(t) \right| dt = O(\lambda_N)$$

gilt.

Satz L. (TANDORI [5]) *Sei $\{\lambda(n)\}$ eine positive, monoton gegen Unendlich konvergierende Zahlenfolge mit $\lambda(n) = O(\log^2 n)$. Dann existiert ein System $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ mit den folgenden Eigenschaften: es gilt für fast alle $x \in (a, b)$*

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\varphi_k(t) \right| dt = O(\lambda(n)) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

und für jede positive Zahlenfolge $\{w(n)\}$ mit $w(n) = o(\lambda(n))$ gibt es eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ mit konvergentem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 w(n)$$

und fast überall divergentem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

Auf Grund der Sätze 1—2 werde ich beweisen:

Satz 3. *Jeder der Sätze A—L läßt sich so verschärfen, daß das betreffende Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$ aus Polynomen besteht.*

*

Ich möchte dem Herrn Dozent KÁROLY TANDORI meinen aufrichtigen Dank aussprechen, daß er mich in dieses Thema eingeführt und bei der

Fertigstellung dieser Arbeit mit wertvollen Ratschlägen unterstützt hat. Herrn Professor BÉLA SZ.-NAGY bin ich für seine wertvollen Ratschläge ebenfalls dankbar.

§ 2. Zwei Hilfssätze von Menchoff

Zum Beweis des Satzes 1 benötigen wir die folgenden zwei bekannten Hilfssätze (siehe MENCHOFF [3], 29—30, bzw. 32—33).

Hilfssatz I. *Es seien* $\pi_r(x)$ $(1 \leqq r \leqq N)$ *stetige Funktionen und* $\Phi_s(x)$ $(1 \leqq s \leqq N')$ *Treppenfunktionen*[6]) *im Intervall* $[0, 1]$. *Dann kann zu jedem positivem* ε *eine meßbare Menge* $E(\subseteqq(0,1))$ *und ein Funktionensystem* $\{F_s(x)\}$ $(1 \leqq s \leqq N')$ *derart angegeben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\mu(E) < \varepsilon$,
2. *jede Funktion* $F_s(x)$ *ist in* $[0, 1]$ *stetig,*
3. *für* $x \in CE$ *gilt* $F_s(x) = (-1)^{j(x)} \Phi_s(x)$, *wobei* $j(x)$ *gleich* 0 *oder* 1 *ist* $(1 \leqq s \leqq N')$,
4. $\max\limits_{0 \leqq x \leqq 1} |F_s(x)| \leqq \max\limits_{0 \leqq x \leqq 1} |\Phi_s(x)|$ $(1 \leqq s \leqq N')$,
5. $\left|\int\limits_0^1 \pi_r(x) F_s(x)\,dx\right| < \varepsilon$ $(1 \leqq r \leqq N,\ 1 \leqq s \leqq N')$.

Hilfssatz II. *Seien* $\pi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq R)$ *und* $Q_m(x)$ $(R < m \leqq R')$ *nicht identisch verschwindende Polynome. Man setze*

$$\mu = \max_{n,m} \{ \max_{0 \leqq x \leqq 1} |\pi_n(x)|, \max_{0 \leqq x \leqq 1} |Q_m(x)| \},$$

$$G = \min_{n,m} \left\{ \int\limits_0^1 \pi_n^2(x)\,dx,\ \int\limits_0^1 Q_m^2(x)\,dx \right\},$$

$$\sigma = \max_{\substack{n,m,l \\ m \neq l}} \left\{ \left| \int\limits_0^1 \pi_n(x) Q_m(x)\,dx \right|,\ \left| \int\limits_0^1 Q_l(x) Q_m(x)\,dx \right| \right\},$$

$$\gamma = \max \left\{ 4R', \mu, \frac{1}{G}, 1 \right\} \quad und \quad \lambda = \gamma^{6(R'-R+1)}.$$

Ist das System $\{\pi_n(x)\}$ $(1 \leqq n \leqq R)$ *in* $(0, 1)$ *orthogonal und gilt*

$$\sigma < \frac{1}{\lambda},$$

[6]) D. h. für jede $\Phi_n(x)$ kann das Intervall (a, b) in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden, so daß die Funktion $\Phi_n(x)$ in jedem Teilintervall konstant ist.

so kann man es derart zu einem orthogonalen Polynomsystem $\{\pi_p(x)\}$ $(1 \leqq p \leqq R')$ *ergänzen, daß die hinzugefügten Polynome* $\pi_m(x)$ $(R < m \leqq R')$ *der Bedingung*

$$|Q_m(x) - \pi_m(x)| \leqq \lambda\sigma \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

genügen.

§ 3. Weitere Hilfssätze

Zuerst werden wir Satz 1 im speziellen Fall beweisen, daß das Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ aus einzeln beschränkten Funktionen besteht. Dann können wir sogar mehr zeigen. Es gilt nämlich der folgende:

Hilfssatz III. *Seien* $\psi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *im Intervall* (a, b) *definierte, einzeln beschränkte Funktionen und sei* $\{N_i\}$ $(0 = N_0 < N_1 < \cdots < N_i < \cdots)$ *eine gegebene Indexfolge. Wir nehmen an, daß für jedes* i $(i = 1, 2, \ldots)$ *die Funktionen* $\psi_n(x)$ $(N_{i-1} < n \leqq N_i)$ *je ein Orthonormalsystem in* (a, b) *bilden. Dann kann zu jeder positiven Zahlenfolge* $\{\varepsilon_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *ein solches in* (a, b) *orthonormiertes Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *und eine solche Folge von meßbaren Mengen* $E_i(\subseteqq (a, b))$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *angegeben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$(3.1) \qquad |\psi_n(x) - (-1)^{j_i(x)} P_n(x)| < \varepsilon_i \text{ für } x \in CE_i \text{ und für } N_{i-1} < n \leqq N_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

wobei $j_i(x) = 0$ *oder* 1 *ist,*

$$(3.2) \qquad \mu(E_i) \leqq \varepsilon_i$$

und

$$(3.3) \qquad |P_n(x)| \leqq 2(\sup_{a<x<b} |\psi_n(x)| + 1) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Es ist klar, daß sich aus dem Hilfssatz III der Satz 1 für orthonormierte Systeme von einzeln beschränkten Funktionen ergibt.

Beweis von Hilfssatz III. Offensichtlich genügt es, den Hilfssatz III für das Intervall (0, 1) zu beweisen; weiter kann $\varepsilon_i \leqq \frac{1}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ angenommen werden. Wir werden die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$M_0 = 0, \quad M_i = \sup_{0<x<1} \{\max(|\psi_{N_{i-1}+1}(x)|, \ldots, |\psi_{N_i}(x)|, M_{i-1}) + 1\} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

und

$$(3.4) \qquad A_i = (8 N_i M_i)^{6(N_i - N_{i-1}+1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Wir approximieren die Funktion $\psi_n(x)$ durch Treppenfunktionen. Auf Grund des Egoroffschen Satzes ist leicht zu sehen, daß man solche Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ und meßbare Mengen E_i' finden kann, für welche folgende die Beziehungen gelten:

$$(3.5)\qquad |\psi_n(x)-\Phi_n(x)|<\frac{\varepsilon_i}{A_i^3} \quad \text{für} \quad x\in CE_i' \quad \text{und für} \quad N_{i-1}<n\leqq N_i,$$

$$(3.6)\qquad \max_{0<x<1}|\Phi_n(x)|\leqq \sup_{0<x<1}|\psi_n(x)| \quad \text{für} \quad N_{i-1}<n\leqq N_i$$

und

$$(3.7)\qquad \mu(E_i')\leqq\frac{\varepsilon_i}{A_i^3}.$$

Für die Funktionen $\pi(x)\equiv 1$ und $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_1)$ wenden wir den Hilfssatz I mit $\varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{A_1^3}$ an. So ergibt sich die Existenz eines Funktionensystems $\{F_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots,N_1)$ und einer meßbaren Menge $E_1^*(\subseteqq(0,1))$, für welche die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mu(E_1^*)<\frac{\varepsilon_1}{A_1^3}$,
2. die Funktionen $F_n(x)$ $(n=1,2,\ldots,N_1)$ sind in $[0,1]$ stetig,
3. für $x\in CE_1^*$ gilt $F_n(x)=(-1)^{j_1(x)}\Phi_n(x)$, wobei $j_1(x)$ gleich 0 oder 1 ist,
4. $\max_{0\leqq x\leqq 1}|F_n(x)|\leqq\max_{0<x<1}|\Phi_n(x)|$,
5. $\left|\int_0^1 F_n(x)dx\right|<\frac{\varepsilon_1}{A_1^3}$.

Auf Grund von 2, und unter Verwendung des Approximationssatzes von WEIERSTRASS erhält man ein Polynomsystem $\{Q_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots,N_1)$ derart, daß

$$(3.8)\qquad \max_{0\leqq x\leqq 1}|F_n(x)-Q_n(x)|<\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \qquad (n=1,2,\ldots,N_1)$$

gilt.

Es sei $E_1=E_1^*\cup E_1'$, dann folgt nach 1, (3.4) und (3.7) die Beziehung (3.2) für $i=1$. Wir setzen

$$\sigma_1=\max_{\substack{1\leqq n,m\leqq N_1\\ n\neq m}}\left\{\left|\int_0^1 Q_n(x)dx\right|,\ \left|\int_0^1 Q_n(x)Q_m(x)dx\right|\right\},$$

$$\mu_1=\max_{0\leqq x\leqq 1}\{\max_{1\leqq n\leqq N_1}(1,|Q_n(x)|)\},$$

$$G_1=\min_{1\leqq n\leqq N_1}\left\{1,\int_0^1 Q_n^2(x)dx\right\},$$

$$\gamma_1=\max\left\{4N_1,\mu_1,\frac{1}{G_1},1\right\} \quad \text{und} \quad \lambda_1=\gamma_1^{6(N_1+1)}.$$

Wegen 4, (3. 4), (3. 6) und (3. 8) ist

$$\mu_1 \leqq 2M_1. \tag{3.9}$$

Auf Grund von (3. 4), (3. 5), (3. 6) und (3. 7) erhält man im Falle $N_{i-1} < n \leqq N_i$:

$$\int_0^1 \Phi_n^2(x)dx = \int_0^1 (\Phi_n(x) - \psi_n(x) + \psi_n(x))^2 dx \leqq \int_0^1 \psi_n^2(x)dx +$$

$$+\left|\int_0^1 (2\psi_n(x)(\Phi_n(x) - \psi_n(x)) + (\Phi_n(x) - \psi_n(x))^2)\, dx\right| \leqq$$

$$\leqq 1 + \left|\int_{CE_i'} (2\psi_n(x)(\Phi_n(x) - \psi_n(x)) + (\Phi_n(x) - \psi_n(x))^2) dx\right| + \tag{3.10}$$

$$+\left|\int_{E_i'} (2\psi_n(x)(\Phi_n(x) - \psi_n(x)) + (\Phi_n(x) - \psi_n(x))^2) dx\right| \leqq$$

$$\leqq 1 + 2M_i \frac{\varepsilon_i}{A_i^3} + 8M_i^2 \frac{\varepsilon_i}{A_i^3} \leqq 1 + \frac{\varepsilon_i}{2A_i^2},$$

und auf ähnliche Weise:

$$\int_0^1 \Phi_n^2(x)dx \geqq 1 - \frac{\varepsilon_i}{2A_i^2}. \tag{3.11}$$

Aus 1, 3, 4, (3. 4), (3. 6), (3. 8) und (3. 11) ergibt sich

$$\int_0^1 Q_n^2(x)dx \geqq \int_0^1 F_n^2(x)\,dx - 2M_1 \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \geqq \int_{CE_1^*} F_n^2(x)\,dx - 2M_1 \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} =$$

$$= \int_0^1 \Phi_n^2(x)dx - \int_{E_1^*} \Phi_n^2(x)\,dx - 2M_1 \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \geqq$$

$$\geqq 1 - \frac{\varepsilon_1}{2A_1^2} - M_1^2 \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} - 2M_1 \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \geqq 1 - \frac{\varepsilon_1}{A_1^2} \geqq \frac{1}{2} \qquad (1 \leqq n \leqq N_1).$$

Daraus folgt

$$G_1 \geqq \frac{1}{2}. \tag{3.12}$$

Auf Grund von (3. 4), (3. 9) und (3. 12) ist

$$\lambda_1 \leqq A_1. \tag{3.13}$$

Wegen 5 und (3.8) gilt

$$\left|\int_0^1 Q_n(x)dx\right| \leqq \left|\int_0^1 F_n(x)dx\right| + \left|\int_0^1 (Q_n(x)-F_n(x))dx\right| \leqq 2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \tag{3.14}$$

$(1 \leqq n \leqq N_1)$ und nach 1, 3, 4, (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8)

$$\left|\int_0^1 Q_n(x)Q_m(x)dx\right| \leqq \left|\int_0^1 F_n(x)F_m(x)dx\right| + 2M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + \frac{\varepsilon_1^2}{A_1^6} \leqq$$

$$\leqq \left|\int_{CE_1^*} \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx\right| + \left|\int_{E_1^*} F_n(x)F_m(x)dx\right| + 3M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \leqq \tag{3.15}$$

$$\leqq \left|\int_0^1 \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx\right| + \left|\int_{E_1^*} \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx\right| + M_1^2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + 3M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \leqq$$

$$\leqq \left|\int_0^1 (\Phi_n(x)\Phi_m(x) - \psi_n(x)\Phi_m(x) + \psi_n(x)\Phi_m(x) - \psi_n(x)\psi_m(x))dx\right| + 5M_1^2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \leqq$$

$$\leqq \left|\int_{CE_i'} (\Phi_m(x)(\Phi_n(x)-\psi_n(x)) + \psi_n(x)(\Phi_m(x)-\psi_m(x)))dx\right| +$$

$$+ \left|\int_{E_i'} (\Phi_m(x)(\Phi_n(x)-\psi_n(x)) + \psi_n(x)(\Phi_m(x)-\psi_m(x)))dx\right| +$$

$$+ 5M_1^2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \leqq 2M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + 4M_1^2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + 5M_1^2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} \leqq \frac{\varepsilon_1}{A_1^2}$$

$(1 \leqq n, m \leqq N_1;\ n \neq m)$. Wegen (3.14) und (3.15) ist $\sigma_1 \leqq \frac{\varepsilon_1}{A_1^2}$. Auf Grund von (3.13) ist also $\sigma_1\lambda_1 \leqq \frac{\varepsilon_1}{A_1} < 1$.

Für die Polynome $\pi(x)$, $Q_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots, N_1)$, kann also der Hilfssatz II angewendet werden. Also gibt es ein in $(0, 1)$ orthogonales Polynomsystem $\{\pi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots, N_1)$ derart, daß

$$|Q_n(x) - \pi_n(x)| \leqq \sigma_1\lambda_1 \leqq \frac{\varepsilon_1}{A_1} \qquad (1 \leqq n \leqq N_1;\ 0 \leqq x \leqq 1) \tag{3.16}$$

gilt. Auf Grund von 1, 3, 4, (3.4), (3.6), (3.8), (3.10), (3.11) und (3.16) erhält man

$$\int_0^1 \pi_n^2(x)\,dx \geqq \int_0^1 Q_n^2(x)\,dx - 4M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} \geqq \int_0^1 F_n^2(x)\,dx - 2M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} - 4M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} \geqq$$

$$\geqq \int_{CE_1^*} \Phi_n^2(x)\,dx - 6M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} = \int_0^1 \Phi_n^2(x)\,dx - \int_{E_1^*} \Phi_n^2(x)\,dx - 6M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} \geqq \tag{3.17}$$

$$\geqq 1 - \frac{\varepsilon_1}{2A_1^2} - 7M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} \geqq 1 - \frac{\varepsilon_1}{4M_1} \geqq \frac{1}{2}$$

und

$$\int_0^1 \pi_n^2(x)\,dx \leqq \int_0^1 Q_n^2(x)\,dx + 4M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} + \frac{\varepsilon_1^2}{A_1^2} \leqq \int_0^1 F_n^2(x)\,dx + 2M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + 5M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} =$$

$$= \int_{CE_1^*} \Phi_n^2(x)\,dx + \int_{E_1^*} F_n^2(x)\,dx + 7M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} \leqq \tag{3.18}$$

$$\leqq 1 + \frac{\varepsilon_1}{2A_1^2} + M_1^2\frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + 7M_1\frac{\varepsilon_1}{A_1} \leqq 1 + \frac{\varepsilon_1}{4M_1}.$$

Aus 4, (3.4), (3.6), (3.8) und (3.16) folgt ferner

$$|\pi_n(x)| \leqq |Q_n(x)| + |\pi_n(x) - Q_n(x)| \leqq |F_n(x)| + |Q_n(x) - F_n(x)| + \frac{\varepsilon_1}{A_1} \leqq$$

$$\leqq \max_{0<x<1} |\Phi_n(x)| + \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + \frac{\varepsilon_1}{A_1} \leqq \max_{0<x<1} |\Phi_n(x)| + 1 \leqq M_1. \tag{3.19}$$

Wir setzen

$$P_n(x) = \nu_n \pi_n(x) \text{ mit } \nu_n = \left(\int_0^1 \pi_n^2(x)\,dx\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (1 \leqq n \leqq N_1). \tag{3.20}$$

Die Polynome $P_n(x)$ bilden in $(0, 1)$ ein orthonormiertes System. Nach (3.6), (3.17) und (3.19) ist

$$|P_n(x)| \leqq 2|\pi_n(x)| \leqq 2(\max_{0<x<1} |\Phi_n(x)| + 1) \leqq 2(\sup_{0<x<1} |\psi_n(x)| + 1) \quad (1 \leqq n \leqq N_1),$$

also gilt (3.3) für $1 \leqq n \leqq N_1$. Wegen (3.17), (3.18), (3.19) und (3.20) ist

$$|\pi_n(x) - P_n(x)| = |\pi_n(x)|\,|1 - \nu_n| \leqq$$

$$\leqq 2M_1 \max\left\{\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{4M_1}\right)^{\frac{1}{2}} - 1,\ 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{4M_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \leqq 2M_1\frac{\varepsilon_1}{4M_1} = \frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{3.21}$$

Daraus und aus 3., (3.4), (3.5), (3.8), (3.16) und (3.21) folgt für $x \in (0, 1)$, $x \notin E_1^* \cup E_1'$:

$$|\psi_n(x) - (-1)^{j_1(x)} P_n(x)| \leqq |\psi_n(x) - \Phi_n(x)| + |\Phi_n(x) - (-1)^{j_1(x)} F_n(x)| +$$
$$+ |(-1)^{j_1(x)} F_n(x) - (-1)^{j_1(x)} Q_n(x)| + |(-1)^{j_1(x)} Q_n(x) - (-1)^{j_1(x)} \pi_n(x)| +$$
$$+ |(-1)^{j_1(x)} \pi_n(x) - (-1)^{j_1(x)} P_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + \frac{\varepsilon_1}{A_1^3} + \frac{\varepsilon_1}{A_1} + \frac{\varepsilon_1}{2} \leqq \varepsilon_1,$$

also ist (3.1) erfüllt für $1 \leqq n \leqq N_1$.

Nun sei k eine beliebige natürliche Zahl, >1. Wir nehmen an, daß die Polynome $P_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_{k-1})$ und die meßbaren Mengen $E_i (\subseteqq (0, 1))$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$ schon derart definiert sind, daß (3.1), (3.3) und (3.17) für $1 \leqq n \leqq N_{k-1}$, und (3.2) für $1 \leqq i \leqq k-1$ erfüllt sind. Für die Funktionen $\pi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_{k-1})$ und $\Phi_n(x)$ $(N_{k-1} < n \leqq N_k)$ wenden wir den Hilfssatz I mit $\varepsilon = \frac{\varepsilon_k}{A_k^3}$ an. Laut diesem gibt es ein Funktionensystem $\{F_n(x)\}$ $(n = N_{k-1}+1, \ldots, N_k)$ und eine meßbare Menge $E_k^* (\subseteqq (0, 1))$ derart, daß die folgenden Bedingungen gelten:

$\overline{1}$. $\mu(E_k^*) < \frac{\varepsilon_k}{A_k^3}$,

$\overline{2}$. die Funktionen $F_n(x)$ sind in $[0, 1]$ stetig,

$\overline{3}$. für $x \in CE_k^*$ gilt $F_n(x) = (-1)^{j_k(x)} \Phi_n(x)$ mit $j_k(x) = 0$ oder 1,

$\overline{4}$. $\max\limits_{0 \leqq x \leqq 1} |F_n(x)| \leqq \max\limits_{0 < x < 1} |\Phi_n(x)|$,

$\overline{5}$. $\left| \int\limits_0^1 \pi_m(x) F_n(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon_1}{A_1^3}$ $(1 \leqq m \leqq N_{k-1}, N_{k-1} < n \leqq N_k)$.

Aus $\overline{2}$ und unter Verwendung des Approximationssatzes von WEIERSTRASS ergibt sich ein Polynomsystem $\{Q_n(x)\}$ $(N_{k-1} < n \leqq N_k)$ derart, daß

$$\max_{0 \leqq x \leqq 1} |F_n(x) - Q_n(x)| < \frac{\varepsilon_k}{A_k^3} \qquad (N_{k-1} < n \leqq N_k) \tag{3.22}$$

gilt.

Es sei $E_k = E_k^* \cup E_k'$, dann gilt nach $\overline{1}$, (3.4), (3.7) die Beziehung (3.2) für $i = k$. Wir setzen

$$\sigma_k = \max_{l, n, m\, (n \neq m)} \left\{ \left| \int\limits_0^1 \pi_l(x) Q_n(x) dx \right|, \left| \int\limits_0^1 Q_n(x) Q_m(x) dx \right| \right\},$$

$$G_k = \min_{l, n} \left\{ \int\limits_0^1 \pi_l^2(x) dx, \int\limits_0^1 Q_n^2(x) dx \right\},$$

$$\mu_k = \max_{0 \leqq x \leqq 1} \{ \max_{l, n} (|\pi_l(x)|, |Q_n(x)|) \},$$

wobei l die Zahlen von 1 bis N_{k-1}, und n, m die Zahlen von $N_{k-1}+1$ bis N_k durchlaufen, ferner sei

$$\gamma_k = \max\left\{4N_k, \mu_k, \frac{1}{G_k}, 1\right\} \quad \text{und} \quad \lambda_k = \gamma_k^{6(N_k - N_{k-1}+1)}.$$

Auf Grund von $\overline{4}$., (3. 4), (3. 6), (3. 19) und (3. 22) ist

$$\mu_k \leqq 2M_k. \tag{3.23}$$

Nach $\overline{3}$, $\overline{4}$, (3. 4), (3. 6), (3. 11) und (3. 22) ergibt sich mit einer einfachen Rechnung

$$\int_0^1 Q_n^2(x)\,dx \geqq \frac{1}{2} \qquad (N_{k-1} < n \leqq N_k).$$

Daraus folgt wegen (3. 17) die Beziehung

$$G_k \geqq \frac{1}{2}. \tag{3.24}$$

Auf Grund von (3. 4), (3. 23) und (3. 24) ist

$$\lambda_k \leqq A_k. \tag{3.25}$$

Weiter erhält man wegen $\overline{1}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, (3. 4), (3. 5), (3. 6), (3. 7), (3. 19) und (3. 22) $\sigma_k \leqq \frac{\varepsilon_k}{A_k^2}$ und nach (3. 25) $\sigma_k \lambda_k \leqq \frac{\varepsilon_k}{A_k} < 1$.

Für die Polynome $\pi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_{k-1})$, $Q_m(x)$ $(N_{k-1} < m \leqq N_k)$ kann also Hilfssatz II angewendet werden. Also gibt es Polynome $\pi_n(x)$ $(N_{k-1} < n \leqq N_k)$ derart, daß

$$|Q_n(x) - \pi_n(x)| \leqq \sigma_k \lambda_k \leqq \frac{\varepsilon_k}{A_k} \qquad (N_{k-1} < n \leqq N_k;\ 0 \leqq x \leqq 1) \tag{3.26}$$

gilt und das ganze System $\{\pi_n(x)\}$ $(1 \leqq n \leqq N_k)$ in $(0, 1)$ orthogonal ist. Auf Grund von $\overline{1}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, (3. 4), (3. 6), (3. 10), (3. 11), (3. 22) und (3. 26) erhält man

$$1 - \frac{\varepsilon_k}{4M_k} \leqq \int_0^1 \pi_n^2(x)\,dx \leqq 1 + \frac{\varepsilon_k}{4M_k} \qquad (N_{k-1} < n \leqq N_k). \tag{3.27}$$

Ferner ist auf Grund von $\overline{4}$, (3. 4), (3. 6), (3. 22) und (3. 26)

$$\begin{aligned} |\pi_n(x)| &\leqq |Q_n(x)| + |\pi_n(x) - Q_n(x)| \leqq |F_n(x)| + |Q_n(x) - F_n(x)| + \frac{\varepsilon_k}{A_k} \leqq \\ &\leqq \max_{0<x<1} |\Phi_n(x)| + \frac{\varepsilon_k}{A_k^3} + \frac{\varepsilon_k}{A_k} \leqq \max_{0<x<1} |\Phi_n(x)| + 1 \leqq \sup_{0<x<1} |\psi_n(x)| + 1 \leqq M_k \end{aligned} \tag{3.28}$$

$(N_{k-1} < n \leqq N_k)$. Wir definieren die Polynome $P_n(x)$ $(N_{k-1} < n \leqq N_k)$ durch die Formel (3.20). Dann bilden die Polynome $P_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_k)$ ein orthonormiertes System in (0, 1). Nach (3.17) und (3.28) wird (3.3) auch für $N_{k-1} < n \leqq N_k$ erfüllt. Zur Analogie von (3.21) ist, auf Grund von (3.20), (3.27) und (3.28),

$$|\pi_n(x) - P_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon_k}{2}. \tag{3.29}$$

Daraus folgt wegen $\overline{3}$, (3.4), (3.5), (3.22), (3.26) und (3.29) für $x \in CE_k$, wie vorher, daß (3.1) auch für $N_{k-1} < n \leqq N_k$ erfüllt wird.

Auf diese Art ergibt sich mit vollständiger Induktion ein orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{E_i\}$, für welche die Bedingungen des Hilfssatzes III erfüllt sind.

Damit haben wir Hilfssatz III vollständig bewiesen.

Zum Beweis des Satzes 1 benötigen wir auch den folgenden.

Hilfssatz IV. *Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ein im Grundintervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem. Dann kann zu jeder positiven Zahlenfolge $\{\varepsilon_i\}$ und zu jeder Indexfolge $\{N_i\}$ $(0 = N_0 < N_1 < \cdots < N_i < \cdots)$ ein solches in (a, b) normiertes System von beschränkten Funktionen $\{\psi_n(x)\}$ und eine solche Folge von meßbaren Mengen $H_i (\subseteqq (a, b))$ angegeben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\int_a^b \psi_n(x)\psi_m(x)\,dx = 0 \qquad (N_{i-1} < n < m \leqq N_i;\ i = 1, 2, \ldots), \tag{3.30}$$

$$|\varphi_n(x) - \psi_n(x)| < \varepsilon_i \quad \textit{für} \quad x \in CH_i, \quad N_{i-1} < n \leqq N_i \tag{3.31}$$

und

$$\mu(H_i) < \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{3.32}$$

Beweis von Hilfssatz IV. Da die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ quadratisch integrierbar sind, so existiert zu jedem $\varepsilon_i \left(< \frac{1}{2}\right)$ eine positive Zahl δ_i (sogar mit $\delta_i \leqq \varepsilon_i$) derart, daß für jede meßbare Menge H mit $\mu(H) \leqq \delta_i$ die Ungleichungen

$$\int_H \varphi_n^2(x)\,dx < \varepsilon_i \qquad (N_{i-1} < n \leqq N_i;\ i = 1, 2, \ldots)$$

bestehen und für jedes n

$$\lim_{N \to \infty} \mu(E_N^{(n)}) = 0 \tag{3.33}$$

gilt, wobei $E_N^{(n)}$ die Menge derjenigen Punkte x bedeutet, für die $|\varphi_n(x)| \geqq N$

ist. Nach (3.33) existiert zu jedem n ein Index N_n, für welchen

$$\mu(E_{N_n}^{(n)}) \leqq \frac{\delta_i}{2(N_i - N_{i-1})} \qquad (N_{i-1} < n \leqq N_i)$$

ist.

Wir setzen

$$E_i = \bigcup_{n=N_{i-1}+1}^{N_i} E_{N_n}^{(n)} \qquad (i=1, 2, \ldots);$$

dann ist $\mu(E_i) \leqq \frac{\delta_i}{2}$. Wir überdecken die Menge E_i mit einer offenen Menge H_i vom Maß

$$\mu(H_i) = \delta_i \tag{3.34}$$

und führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$M_i = \sup_{x \in CH_i} \bigl(\max_{N_{i-1} < n \leqq N_i} |\varphi_n(x)| + 1 \bigr), \quad K_i = \gamma_{N_i - N_{i-1}+1} \qquad (i=1, 2, \ldots), \tag{3.35}$$

wobei die Zahlenfolge $\{\gamma_n\}$ durch die rekursiven Gleichungen

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_n = 1 + \sum_{l=1}^{n-1} \gamma_l^2 \qquad (n=2, 3, \ldots) \tag{3.36}$$

definiert sind; ferner sei

$$\varepsilon_i' = \frac{\varepsilon_i}{M_i \cdot K_i} \qquad (i=1, 2, \ldots). \tag{3.37}$$

Mit derselben Schlußweise, wie oben, erhalten wir, daß es eine positive Zahl δ_i' derart gibt, daß für jede meßbare Menge H' mit $\mu(H') \leqq \delta_i'$ die Ungleichungen

$$\int_{H'} \varphi_n^2(x)\,dx < \varepsilon_i' \qquad (N_{i-1} < n \leqq N_i;\ i=1, 2, \ldots) \tag{3.38}$$

bestehen, und daß es zu jedem n auch einen Index $N_n' \geqq N_n$ gibt, für welchen

$$\mu(E_{N_n'}^{(n)}) \leqq \frac{\delta_i'}{2(N_i - N_{i-1})} \qquad (N_{i-1} < n \leqq N_i)$$

gilt. Wir setzen

$$E_i' = \bigcup_{n=N_{i-1}+1}^{N_i} E_{N_n'}^{(n)} \qquad (i=1, 2, \ldots).\,^{*)}$$

Da $\mu(E_i') \leqq \frac{\delta_i'}{2}$ ist, können wir die Menge E_i' mit einer offenen Menge H_i

*) Wegen $N_n' \geqq N_n$ ist $E_{N_n'}^{(n)} \subseteqq E_{N_n}^{(n)}$, also auch $E_i' \subseteqq E_i$.

derart überdecken, daß

$$H_i' \subseteqq H_i \quad \text{und} \quad \mu(H_i') = \delta_i'$$

gelten.

Hiernach teilen wir die Menge H_i' in $N_i - N_{i-1}$ paarweise disjunkte meßbare Mengen $I_l^{(i)}$ $(l = 1, 2, \ldots, N_i - N_{i-1})$, die alle vom gleichen Maß sind, d. h. mit

$$\mu(I_l^{(i)}) = \frac{\delta_i'}{N_i - N_{i-1}} \qquad (l = 1, 2, \ldots, N_i - N_{i-1}). \tag{3.39}$$

Dann definieren wir ein System von Funktionen $\psi'_{N_{i-1}+l}(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, N_i - N_{i-1};\ i = 1, 2, \ldots)$ folgenderweise:

$$\psi'_{N_{i-1}+l}(x) = \begin{cases} \varphi_{N_{i-1}+l}(x) & \text{für } x \in CH_i', \\ c_s^{(i,l)} & \text{für } x \in I_s^{(i)} \\ & \quad (s = 1, 2, \ldots, l-1), \\ c_l^{(i,l)} = \left(\varepsilon_i' \dfrac{N_i - N_{i-1}}{\delta_i'}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{für } x \in I_l^{(i)}, \\ 0 & \text{für die übrigen Punkte} \\ & \quad x \text{ von } H_i', \end{cases} \tag{3.40}$$

wobei $c_s^{(i,l)}$ Konstanten sind, die so gewählt werden sollen, daß die Funktionen $\psi'_{N_{i-1}+l}(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, N_i - N_{i-1})$ ein orthogonales System bilden, d. h. die Bedingungen

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b \psi'_{N_{i-1}+k}(x)\, \psi'_{N_{i-1}+l}(x)\, dx = & \int\limits_{C\left(\bigcup\limits_{s=1}^{k} I_s^{(i)}\right)} \psi'_{N_{i-1}+k}(x)\, \psi'_{N_{i-1}+l}(x)\, dx + \\ & + \frac{\delta_i'}{N_i - N_{i-1}} \sum_{s=1}^{k} c_s^{(i,k)} c_s^{(i,l)} \end{aligned} \tag{B_{kl}}$$

$(1 \leqq k < l \leqq N_i - N_{i-1})$ erfüllt werden. Die Werte von $c_1^{(i,l)}$ $(l \geqq 2)$ ergeben sich eindeutig aus den Bedingungen (B_{1l}), da die Integrale an der rechten Seite offenbar nicht von den Konstanten $c_s^{(i,l)}$ $(l \geqq s \geqq 2)$ abhängen. Ferner bekommen auf Grund von (3.38), (3.39) und (3.40)

$$|c_1^{(i,l)}| \leqq c_1^{(i,1)} \qquad (l = 2, \ldots, N_i - N_{i-1};\ i = 1, 2, \ldots). \tag{3.41}$$

Dann können wir die Werte der Konstanten $c_2^{(i,l)}$ $(l \geqq 3)$ aus den Bedingungen (B_{2l}) bestimmen, da hier die Integrale rechts offenbar nur von denjenigen Konstanten $c_1^{(i,l)}$ abhängt, die schon bestimmt wurden. Auf Grund von (3.36), (3.38), (3.39), (3.40) und (3.41) ergibt sich

$$|c_2^{(i,l)}| \leqq \gamma_2 c_1^{(i,1)} \quad (l=3, 4, \ldots, N_i-N_{i-1};\ i=1, 2, \ldots).$$

So fortfahrend bestimmen wir mittels der Bedingungen (B_{3l}) die Werte der Konstanten $c_3^{(i,l)}$ usw. Durch Rekursion können wir also alle die Konstanten $c_k^{(i,l)}$ bestimmen und sie genügen Ungleichungen von der Form

$$(3.42) \qquad |c_k^{(i,l)}| \leqq \gamma_k c_1^{(i,1)} \quad (1 \leqq k \leqq l \leqq N_i-N_{i-1};\ i=1, 2, \ldots).$$

Nach der Definition von $\psi_n'(x)$ und wegen (3.35), (3.37), (3.38), (3.39) und (3.42) ergibt sich nach einfacher Rechnung

$$(3.43) \qquad 1-\varepsilon_i' \leqq \int_a^b \psi_n'^2(x)\,dx \leqq 1+\frac{\varepsilon_i}{M_i} \quad \text{für} \quad N_{i-1} < n \leqq N_i.$$

Wir betrachten nun die normierten Funktionen

$$(3.44) \qquad \psi_n(x) = \varrho_n \psi_n'(x) \quad \text{mit} \quad \varrho_n = \left(\int_a^b \psi_n'^2(x)\,dx\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Nach (3.35), (3.40), (3.43) und (3.44) gilt für $x \in CH_i$

$$(3.45) \qquad |\varphi_n(x)-\psi_n(x)| = |\varphi_n(x)-\varrho_n\varphi_n(x)| \leqq |\varphi_n(x)|\,|1-\varrho_n| \leqq \varepsilon_i$$
$$(N_{i-1} < n \leqq N_i;\ i=1, 2, \ldots).$$

Danach ist es wegen (3.34) und (3.45) klar, daß die so erhaltenen Funktionen $\psi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ und Mengen H_i $(i=1, 2, \ldots)$ die in der Behauptung des Hilfssatzes IV vorkommenden Bedingungen erfüllen.

Damit haben wir den Hilfssatz IV vollständig bewiesen.

§ 4. Beweis von Satz 1

Sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem, $\{N_i\}$ $(0=N_0<N_1<\cdots<N_i<\cdots)$ eine beliebige Indexfolge und $\{\varepsilon_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ eine positive Zahlenfolge.

Wir werden auf das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ und die Folgen $\{N_i\}$, $\left\{\frac{\varepsilon_i}{2}\right\}$ den Hilfssatz IV an. Also existiert ein normiertes System $\{\psi_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ von beschränkten Funktionen und eine Mengenfolge $\{H_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$, die (3.30), (3.31) und (3.32) erfüllen.

Danach wenden wir auf das Funktionensystem $\{\psi_n(x)\}$, die Indexfolge $\{N_i\}$ und die Zahlenfolge $\left\{\frac{\varepsilon_i}{2}\right\}$ den Hilfssatz III an. So erhält man ein orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ und eine Mengenfolge $\{E_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$, die (3.1), (3.2) und (3.3) erfüllen.

Es sei $G_i=E_i\cup H_i$ $(i=1,2,\ldots)$.

Wir beweisen, daß dieses Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ und diese Mengenfolge $\{G_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$ die in der Behauptung des Satzes 1 vorkommenden Bedingungen erfüllen. Für $x\in CG_i$

$$|\varphi_n(x)-(-1)^{j_i(x)}P_n(x)|\leqq|\varphi_n(x)-\psi_n(x)|+|\psi_n(x)-(-1)^{j_i(x)}P_n(x)|\leqq\varepsilon_i \quad (N_{i-1}<n\leqq N_i;\ i=1,2,\ldots) \tag{4.1}$$

und

$$\mu(G_i)\leqq\mu(E_i)+\mu(H_i)\leqq\varepsilon_i \qquad (i=1,2,\ldots) \tag{4.2}$$

bestehen.

Da die Folgen $\{N_i\}$ und $\{\varepsilon_i\}$ beliebig waren, folgt aus (3.3), (4.1) und (4.2), daß (1.1), (1.2) und (1.3) erfüllt sind.

Damit haben wir den Satz 1 vollständig bewiesen.

§ 5. Beweis von Satz 1*

Wir nehmen an, der Satz sei falsch. Dann gibt es zwei Indizes q,r, für die

$$\left|\int_a^b\varphi_q(x)\varphi_r(x)\,dx-\delta_{qr}\right|=c_{qr}>0$$

ist. Wir wählen die Indexfolge $\{N_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$ so, daß $N_{k-1}<q,r\leqq N_k$ gilt. Wir setzen

$$A^2=\max\left\{\int_a^b\varphi_q^2(x)\,dx,\ \int_a^b\varphi_r^2(x)\,dx\right\},\quad K=\max\{K_q,K_r\}$$

und

$$S_k=\frac{\min(c_{qr},1)}{2^4(A+1)(K+1)(b-a+1)}. \tag{5.1}$$

Dann kann ein δ derart angegeben werden, daß für jede Menge E, für die $\mu(E)<\delta$ ist, die Beziehung

$$\max\left\{\int_E\varphi_q^2(x)\,dx,\ \int_E\varphi_r^2(x)\,dx\right\}<S_k^2 \tag{5.2}$$

besteht. Nun sei $\{\varepsilon_i\}$ $(i=1,2,\ldots;\ i\neq k)$ eine beliebige Zahlenfolge und sei

$$\varepsilon_k=\min(\delta,S_k). \tag{5.3}$$

Betrachten wir das in diesem Falle existierende Polynomsystem $\{P_n(x)\}$

$(n=1,2,\ldots)$. Dann sind auf Grund von (1.4), (1.5), (1.6), (5.1), (5.2) und (5.3)

$$c_{qr}=\left|\int_a^b(\varphi_q(x)\varphi_r(x)-(-1)^{j_k(x)}\varphi_q(x)P_r(x)+(-1)^{j_k(x)}\varphi_q(x)P_r(x)-\right.$$

$$\left.-P_q(x)P_r(x))dx\right|\leqq\left|\int_a^b\varphi_q(x)(\varphi_r(x)-(-1)^{j_k(x)}P_r(x))dx\right|+$$

$$+\left|\int_a^b P_r(x)((-1)^{j_k(x)}\varphi_q(x)-P_q(x))dx\right|\leqq\left|\int_{CE_k}\varphi_q(x)(\varphi_r(x)-(-1)^{j_k(x)}P_r(x))dx\right|+$$

$$+\left|\int_{E_k}\varphi_q(x)(\varphi_r(x)-(-1)^{j_k(x)}P_r(x))dx\right|+$$

$$+\left|\int_{CE_k}P_r(x)((-1)^{j_k(x)}\varphi_q(x)-P_q(x))dx\right|+\left|\int_{E_k}P_r(x)((-1)^{j_k(x)}\varphi_q(x)-P_q(x))dx\right|\leqq$$

$$\leqq\left[\int_{CE_k}\varphi_q^2(x)dx\cdot\int_{CE_k}\varepsilon_k^2dx\right]^{1/2}+\left[\int_{E_k}\varphi_q^2(x)dx\right]^{1/2}\cdot\left\{\left[(K_r+1)^2\int_{E_k}\varphi_r^2(x)dx\right]^{1/2}+\varepsilon_k^{1/2}\right\}+$$

$$+\left[\int_{CE_k}P_r^2(x)dx\cdot\int_{CE_k}\varepsilon_k^2dx\right]^{1/2}+\left\{\left[K_r^2\int_{E_k}\varphi_r^2(x)dx\right]^{1/2}+\varepsilon_k^{1/2}\right\}\cdot\left\{\left[(K_q+1)^2\int_{E_k}\varphi_q^2(x)dx\right]^{1/2}+\varepsilon_k^{1/2}\right\}\leqq$$

$$\leqq\varepsilon_k\sqrt{b-a}\cdot A+S_k[(K_r+1)S_k+\varepsilon_k^{1/2}]+\varepsilon_k\sqrt{b-a}+$$

$$+(K_r\cdot S_k+\varepsilon_k^{1/2})[(K_q+1)S_k+\varepsilon_k^{1/2}]\leqq\frac{1}{2}c_{qr}.$$

Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit von Satz 1*.

§ 6. Beweis von Satz 2

Wir wenden auf das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ und die Indexfolge $\{N_i\}$ $(0=N_0<N_1<\cdots<N_i<\cdots)$ von Satz 2, mit der Zahlenfolge

$$\varepsilon_i=\frac{\varepsilon}{2^i(N_i-N_{i-1})\max\{s_{N_{i-1}+1},\ldots,s_{N_i}\}}\qquad(i=1,2,\ldots),\tag{6.1}$$

den Satz 1 an. Es sei $\{P_n(x)\}$ das so erhaltene in (a,b) orthonormierte Polynomsystem und es seien $\overline{G}_i(\subseteq(a,b))$ $(i=1,2,\ldots)$ die so erhaltenen Mengen. Für $x\in G_i-\overline{G}_i$ besteht nach (1.1), (1.7) und (6.1) die Beziehung (1.8) für $i=m$. Es sei $Z=\overline{\lim_{i\to\infty}}\,\overline{G}_i$. Zum Beweis von Satz 2 zeigt man einfach, daß $\mu(Z)=0$ ist. Offensichtlich ist aber

$$Z\subseteq\bigcup_{i=i_0}^{\infty}\overline{G}_i$$

für jedes i_0. So ist auf Grund von (1.2) und (6.1)

$$\mu(Z) \leqq \sum_{i=i_0}^{\infty} \mu(\overline{G}_i) \leqq \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{i_0-1}}$$

für jedes i_0, daraus folgt $\mu(Z)=0$.

Damit haben wir den Satz 2 bewiesen.

§ 7. Beweis von Satz 3

Wir werden nur die behauptete Verschärfung der Sätze C, F und I vorführen, da die Sätze A, D, G und H auf Grund des Satzes 1 und die übrigen Sätze auf Grund des Satzes 2, mit Zuhilfenahme der ursprünglichen Beweisführungen des Herrn TANDORI analog behandelt werden können.

Verschärfung von Satz C. Ist für die positive Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ die Bedingung (1.9) erfüllt, so kann man eine positive, nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\overline{\lambda}_n\}$ angeben, für die

(7.1) $$\lambda_n = o(\overline{\lambda}_n)$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\overline{\lambda}_n^2} = \infty$$

bestehen (TANDORI [1]). Nach einem Satz von TANDORI ([1], Satz V) gibt es ein in (a, b) orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\Phi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und eine Folge von meßbaren Mengen $\{I_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ derart, daß

$$|\Phi_m(x)| = \overline{\lambda}_m \quad \text{für } x \in I_m \qquad (m=1, 2, \ldots)$$

gilt und jeder Punkt $x \in (a, b)$ in unendlich vielen I_m enthalten ist. Mit Anwendung von Satz 2 mit $s_n = 1$ $(n=1, 2, \ldots)$, $N_m = m$, $G_m = I_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ ergibt sich ein in (a, b) orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ derart, daß

$$|P_m(x)| \geqq (1-\varepsilon)\overline{\lambda}_m$$

für fast alle x für unendlich viele m besteht. Aus (7.1) folgt dann, daß (1.10) anstatt $\varphi_n(x)$ mit $P_n(x)$ fast überall in (a, b) gilt.

Damit haben wir die gewünschte Verschärfung von Satz C bewiesen.

Verschärfung von Satz F. Nach einem Satz von TANDORI ([1], Satz X), kann zu jeder positiven, monoton nichtabnehmenden Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$, die die Bedingung (1.9) erfüllt, eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge $\{\bar{\lambda}_n\}$ angegeben werden, die die Bedingung

(7.2) $$\lambda_n = o(\bar{\lambda}_n)$$

erfüllt. Weiter können ein im Intervall (a, b) orthonormiertes System von beschränkten Funktionen $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ und Indexfolgen $\{n_s\}$ und $\{m_i\}$ derart angegeben werden, daß für jede natürliche Zahl r und für jedes x in (a, b) die Ungleichung

(7.3) $$\frac{A_{n_s}^{(r)}}{A_{2n_s}^{(r)}} |\varphi_{n_s}(x)| - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n_s}}^{2n_s} |\varphi_i(x)| \geqq \frac{c(r)}{2} \bar{\lambda}_{2m_{n_s}}$$

für unendlich viele Indizes n_s gilt, wobei $c(r)$ eine nur von r abhängige positive Zahl ist.

Es sei $\{N_i\}$ $(0=N_0<N_1<\cdots<N_i<\cdots)$ eine beliebige Indexfolge. Wir wählen die Folge $\{\varepsilon_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ so, daß

(7.4) $$\sum_{i=1}^{\infty} (N_i - N_{i-1})\varepsilon_i < \infty$$

besteht. Dann ergibt sich unter Anwendung des Satzes 1 ein orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ und eine Folge von meßbaren Mengen $E_i(\subseteqq(a, b))$ $(i=1, 2, \ldots)$ derart, daß für $x \in CE_i$ und $N_{i-1}<n\leqq N_i$

(7.5) $$|\varphi_n(x)-(-1)^{j_i(x)}P_n(x)| \leqq \varepsilon_i \qquad (j_i(x)=0 \text{ oder } 1)$$

und

(7.6) $$\mu(E_i) \leqq \varepsilon_i$$

gilt $(i=1, 2, \ldots)$.

Nach (7.4) ist

(7.7) $$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty.$$

Aus (7.6) und (7.7) erhält man durch eine einfache Rechnung

(7.8) $$\mu(\overline{\lim_{i\to\infty}} E_i) = 0.$$

Auf Grund von (7.8) existiert zu fast jedem $x \in (a, b)$ ein solches i_0, daß $x \notin E_i$ für $i > i_0$. Es sei

$$J_n(x) = j_i(x) \qquad (N_{i-1} < n \leqq N_i;\ i=1, 2, \ldots).$$

Wenn $x_0 \in C(\overline{\lim_{i\to\infty}} E_i)$ und N eine beliebige natürliche Zahl ist, besteht wegen

(7. 4) und (7. 5) für jedes $\alpha>0$ die Beziehung

$$\left|\frac{1}{A_N^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)}\left(P_\nu(x_0)-(-1)^{J_\nu(x_0)}\varphi_\nu(x_0)\right)\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{A_N^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)}\left|P_\nu(x_0)-(-1)^{J_\nu(x_0)}\varphi_\nu(x_0)\right| \leqq \sum_{\nu=0}^{N}\left|P_\nu(x_0)-(-1)^{J_\nu(x_0)}\varphi_\nu(x_0)\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=0}^{\infty}\left|P_\nu(x_0)-(-1)^{J_\nu(x_0)}\varphi_\nu(x_0)\right| = \tag{7.9}$$

$$=\left(\sum_{\nu=0}^{N_{i_0}}+\sum_{\nu=N_{i_0}+1}^{\infty}\right)\left|P_\nu(x_0)-(-1)^{J_\nu(x_0)}\varphi_\nu(x_0)\right| \leqq C(x_0)+\sum_{i=1}^{\infty}(N_i-N_{i-1})\varepsilon_i < C'(x_0).$$

Hierbei sind $C(x_0)$ und $C'(x_0)$ von N unabhängige positive Zahlen. Es sei

$$\pi_n^{(r)}(x)=\frac{1}{A_n^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(r)} P_\nu(x) \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Nach (7. 3) und (7. 9) ist

$$|\pi_{2n_s}^{(r)}(x_0)|=\left|\frac{1}{A_{2n_s}^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{2n_s} A_{2n_s-\nu}^{(r)}\left[\left(P_\nu(x_0)-(-1)^{J_\nu(x_0)}\varphi_\nu(x_0)\right)+(-1)^{J_\nu(x_0)}\varphi_\nu(x_0)\right]\right| \geqq$$

$$\geqq \left|\frac{1}{A_{2n_s}^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{2n_s} A_{2n_s-\nu}^{(r)}(-1)^{J_\nu(x_0)}\varphi_\nu(x_0)\right| - \tag{7.10}$$

$$-\left|\frac{1}{A_{2n_s}^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{2n_s} A_{2n_s-\nu}^{(r)}\left(P_\nu(x_0)-(-1)^{J_\nu(x_0)}\varphi_\nu(x_0)\right)\right| \geqq \frac{c(r)}{2}\bar{\lambda}_{2m_{n_s}}-C'(x_0).$$

Aus (7. 2), (7. 8) und (7. 10) folgt, daß die Relation

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{\lambda_N}|\pi_N^{(r)}(x_0)|=\infty \tag{7.11}$$

fast überall im Intervall (a, b) gilt. Wenn (7. 11) für $r=\alpha_0>0$ erfüllt wird, dann gilt es auch für jedes $\alpha\leqq\alpha_0$ (TANDORI [1], Satz X). Da r beliebig ist, so ergibt sich, daß für dieses Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ (7. 11) für $\alpha>0$ fast überall im Intervall (a, b) besteht.

Damit haben wir die gewünschte Verschärfung von Satz F bewiesen.

Verschärfung von Satz I. Wenn die positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ die Bedingung (1. 9) erfüllt, so können nach einem Satz von K. TANDORI ([3], Satz II), eine im strengen Sinne monoton wachsende Indexfolge $\{N_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ und ein im Intervall (a, b) orthonormiertes System von beschränkten Funktionen $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ derart angegeben werden, daß überall im Intervall (a, b) für jede natürliche Zahl N

$$\int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq \sum_{m=1}^{k-1} \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt + \tag{7.12}$$
$$+ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt = O(\lambda_N) \qquad (N_{k-1} < N \leqq N_k)$$

gilt, und fast überall in (a, b) für unendlich viele Indizes m

$$\int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N_m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \geqq \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt - \tag{7.13}$$
$$- \sum_{k=1}^{m-1} \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \geqq c\lambda_{N_m}$$

besteht, wobei c eine positive Konstante ist.

Wir führen die folgende Bezeichnung ein:

$$M_i = \sup_{a<x<b} \left(\max_{N_{i-1}<n\leqq N_i} |\varphi_n(x)| + 1 \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Wir wählen die Folge $\{\varepsilon_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ derart, daß die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{\infty} (N_i - N_{i-1}) M_i^2 \varepsilon_i < \infty \tag{7.14}$$

besteht. Nach Satz 1 existiert also ein orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ und eine Folge von meßbaren Mengen $E_i(\subseteqq(a, b))$ $(i=1, 2, \ldots)$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: für $x \in CE_i$ und für $N_{i-1} < n \leqq N_i$ ist

$$|\varphi_n(x) - (-1)^{j_i(x)} P_n(x)| \leqq \varepsilon_i \qquad (j_i(x) = 0 \text{ oder } 1), \tag{7.15}$$

$$|P_n(x)| \leqq 2M_i \tag{7.16}$$

und

$$\mu(E_i) \leqq \varepsilon_i. \tag{7.17}$$

Nach (7.14) ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty. \tag{7.18}$$

Aus (7.17) und (7.18) erhält man durch eine einfache Rechnung

$$\mu(\overline{\lim_{i\to\infty}} E_i) = 0. \tag{7.19}$$

Auf Grund von (7. 19) existiert zu fast jedem $x_0 \in (a, b)$ ein solches i_0, daß $x \notin E_i$ für $i > i_0$ gilt.

Ist $x_0 \in C(\overline{\lim_{i\to\infty}} E_i)$ und N $(> N_{i_0}$ und $N_{k-1} < N \leqq N_k)$ eine beliebige natürliche Zahl, so besteht wegen (7. 12), (7. 14), (7. 15), (7. 16) und (7. 17)

$$\int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} P_n(x_0) P_n(t) \right| dt \leqq \sum_{m=1}^{k-1} \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} P_n(x_0) P_n(t) \right| dt +$$

$$+ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} P_n(x_0) P_n(t) \right| dt =$$

$$= \sum_{m=1}^{k-1} \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} (P_n(x_0) - (-1)^{j_m(x_0)} \varphi_n(x_0) + (-1)^{j_m(x_0)} \varphi_n(x_0)) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (P_n(t) - (-1)^{j_m(t)} \varphi_n(t) + (-1)^{j_m(t)} \varphi_n(t)) \right| dt +$$

$$+ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} (P_n(x_0) - (-1)^{j_k(x_0)} \varphi_n(x_0) + (-1)^{j_k(x_0)} \varphi_n(x_0)) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (P_n(t) - (-1)^{j_k(t)} \varphi_n(t) + (-1)^{j_k(t)} \varphi_n(t)) \right| dt \leqq$$

$$\leqq \left(\sum_{m=1}^{i_0} + \sum_{m=i_0+1}^{k-1} \right) \left\{ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} (P_n(x_0) - (-1)^{j_m(x_0)} \varphi_n(x_0)) P_n(t) \right| dt + \right.$$

$$+ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varphi_n(x_0) (P_n(t) - (-1)^{j_m(t)} \varphi_n(t)) \right| dt +$$

$$\left. + \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varphi_n(x_0) \varphi_n(t) \right| dt \right\} +$$

$$+ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} (P_n(x_0) - (-1)^{j_k(x_0)} \varphi_n(x_0)) P_n(t) \right| dt +$$

$$+ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} \varphi_n(x_0) (P_n(t) - (-1)^{j_k(t)} \varphi_n(t)) \right| dt + \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} \varphi_n(x_0) \varphi_n(t) \right| dt \leqq$$

$$\leqq C(x_0)+\sum_{m=i_0+1}^{k}\left\{\int_a^b \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} |P_n(x_0)-(-1)^{j_m(x_0)}\varphi_n(x_0)|\,|P_n(t)|\,dt+\right.$$

$$\left.+\left(\int_{CE_m}+\int_{E_m}\right)\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} |\varphi_n(x_0)|\,|P_n(t)-(-1)^{j_m(t)}\varphi_n(t)|\,dt\right\}+O(\lambda_N)\leqq$$

$$\leqq C(x_0)+\sum_{i=1}^{\infty}(N_i-N_{i-1})2M_i\varepsilon_i(b-a)+\sum_{i=1}^{\infty}(N_i-N_{i-1})M_i\varepsilon_i(b-a)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}(N_i-N_{i-1})3M_i^2\varepsilon_i+O(\lambda_N),$$

folglich

$$\int_a^b\left|\sum_{n=1}^{N} P_n(x_0)P_n(t)\right|dt\leqq C'(x_0)+O(\lambda_N). \tag{7.20}$$

Hierbei sind $C(x_0)$ und $C'(x_0)$ von N unabhängige positive Zahlen.

Aus (7. 19) und (7. 20) folgt, daß (1. 13) mit $P_n(x)$ anstatt $\varphi_n(x)$ fast überall im Intervall (a, b) gilt.

Es sei Z' die Menge derjenigen Punkte x in (a, b), für welche die Bedingung (7. 13) nicht gilt; nach der Bedingung ist

$$\mu(Z')=0. \tag{7.21}$$

Auf Grund von (7. 13) ergibt sich unter Anwendung der vorigen Abschätzungen, für $x_0\in C((\overline{\lim_{i\to\infty}} E_i)\cup Z')$ und für einen beliebigen Index $N_m(>N_{i_0})$, die Beziehung

$$\int_a^b\left|\sum_{n=1}^{N_m} P_n(x_0)P_n(t)\right|dt\geqq\int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} P_n(x_0)P_n(t)\right|dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{m-1}\int_a^b\left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} P_n(x_0)P_n(t)\right|dt=$$

$$=\int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m}(P_n(x_0)-(-1)^{j_m(x_0)}\varphi_n(x_0)+(-1)^{j_m(x_0)}\varphi_n(x_0))\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(P_n(t)-(-1)^{j_m(t)}\varphi_n(t)+(-1)^{j_m(t)}\varphi_n(t))\right|dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{m-1}\int_a^b\left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k}(P_n(x_0)-(-1)^{j_k(x_0)}\varphi_n(x_0)+(-1)^{j_k(x_0)}\varphi_n(x_0))\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(P_n(t)-(-1)^{j_k(t)}\varphi_n(t)+(-1)^{j_k(t)}\varphi_n(t))\right|dt \geqq$$

$$\geqq \int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m}\varphi_n(x_0)\varphi_n(t)\right|dt -$$

$$-\int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m}(P_n(x_0)-(-1)^{j_m(x_0)}\varphi_n(x_0))P_n(t)\right|dt -$$

$$-\int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m}\varphi_n(x_0)(P_n(t)-(-1)^{j_m(t)}\varphi_n(t))\right|dt -$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{i_0}+\sum_{k=i_0+1}^{m-1}\right)\left\{\int_a^b\left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k}(P_n(x_0)-(-1)^{j_k(x_0)}\varphi_n(x_0))P_n(t)\right|dt+\right.$$

$$\left.+\int_a^b\left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k}\varphi_n(x_0)(P_n(t)-(-1)^{j_k(t)}\varphi_n(t))\right|dt+\int_a^b\left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k}\varphi_n(x_0)\varphi_n(t)\right|dt\right\}\geqq$$

$$\geqq \int_a^b\left|\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m}\varphi_n(x_0)\varphi_n(t)\right|dt-\sum_{k=1}^{m-1}\int_a^b\left|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k}\varphi_n(x_0)\varphi_n(t)\right|dt-C'(x_0),$$

folglich ist

$$\int_a^b\left|\sum_{n=1}^{N_m}P_n(x_0)P_n(t)\right|dt \geqq c\lambda_{N_m}-C'(x_0). \tag{7.22}$$

Aus (7.19), (7.21) und (7.22) folgt, daß (1.12) mit $P_n(x)$ anstatt $\varphi_n(x)$ fast überall im Intervall (a, b) gilt.

Damit haben wir die Verschärfung von Satz I vollständig bewiesen.

Schriftenverzeichnis

D. Menchoff, [1] Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82—105;

[2] Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble, *Recueil Math. Moscou*, **3** (**43**) (1938), 103—120;

[3] Sur les multiplicateurs de convergence pour les séries de polynômes orthogonaux, *Recueil Math. Moscou*, **6** (**48**) (1939), 27—51.

K. Tandori, [1] Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130;

[2] Über die orthogonalen Funktionen. II (Summation), *ebenda*, **18** (1957), 149—168;

[3] Über die orthogonalen Funktionen. III (Lebesguesche Funktionen), *ebenda*, **18** (1957), 169-178;

[4] Über die orthogonalen Funktionen. IV, *ebenda*, **19** (1958), 18—24;

[5] Über die orthogonalen Funktionen. V (Genaue Weylsche Multiplikatorfolgen), *ebenda*, **20** (1959), 1—13.

(Eingegangen am 30. November 1959)

Zur Theorie der Wahrheitsfunktionen

Von ANDRÁS ÁDÁM in Szeged

§ 1. Einführung

Die vorliegende Arbeit enthält drei Sätze über die einfache wiederholungsfreie Superposition von Funktionen des Aussagenkalküls.

Satz 1 erläutert den Zusammenhang der Prim-Implikanten der superponierten Funktion und der Prim-Implikanten der beiden Funktionen, die in der Superposition auftreten. (Dieser Satz ist ersichtlich sukzessiv anwendbar für eine beliebige wiederholungsfreie Superposition.) Sätze 2 und 3 beziehen sich auf den Fall, daß die äußere Funktion monoton von der inneren Funktion abhängt; Satz 2 liefert eine äquivalente Bedingung dafür, daß eine Teilmenge der Variablen einer Wahrheitsfunktion als die Menge der Variablen der inneren Funktion in einer passenden Superposition abtrennbar ist, und Satz 3 besagt, daß diese Abtrennbarkeit auch für den nicht-verschwindenden Durchschnitt abtrennbarer Variablenmengen gilt.[1])

Satz 2 ist in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung einiger bekannter Resultate von KUSNJEZOW und TRACHTENBROT. TRACHTENBROT ([6], Satz 6, S. 252) gibt nämlich ein Kriterium dafür an, daß ein Teilgraph eines zweipoligen Graphen ein (eventuell nicht-eigentlicher) zweipoliger Graph sei; diese Bedingung ist im wesentlichen die Aussage B) unseres Satzes 2 (vgl. den Zusammenhang der Bahnen eines zweipoligen Graphen und der Prim-Implikanten den entsprechenden Wahrheitsfunktion: [1], S. 209, oder [4], S. 177). Andererseits kann der Satz an der Seite 197 der Arbeit [5] so umformt werden, daß er eine andere logische Bedingung für dieselbe graphentheoretische Beschaffenheit gebe; diese Bedingung besteht darin, daß die Variablen, die den Kanten des Teilgraphen entsprechen, durch eine monotone Superposition abtrennbar sind. So gibt die Vergleichung der zitierten Ergeb-

[1]) Es ist ein offenes Problem, ob der unserem Satze 3 analoge Satz auch im allgemeinen Fall für abtrennbare Mengen gilt.

nisse von KUSNJEZOW und TRACHTENBROT einen mittelbaren Beweis für unseren Satz 2 im Spezialfall einer monotonen Wahrheitsfunktion, die durch einen zweipoligen Graphen ohne Wiederholung realisiert werden kann.

§ 2. Terminologie

Unter einer *Funktion* verstehen wir immer eine *Wahrheitsfunktion* (mit anderer Benennung: *Boolesche Funktion*), d. h. eine eindeutige Funktion der Form $f(x_1, \ldots, x_n)$, deren Wert und jede Variable wahr ($\uparrow$) oder falsch ($\downarrow$) sein kann.

Wir bezeichnen die Negation durch eine Querlinie, die Konjunktion durch & oder als Multiplikation.

Eine Konjunktion[2]) heißt eine *Elementarkonjunktion* von f, wenn jedes Glied derselben entweder eine unnegierte oder eine negierte Variable von f ist. Dieselbe Variable darf nicht in einer Elementarkonjunktion zweimal auftreten (in entgegengesetztem Falle könnten ja entweder einige Vorkommen derselben gestrichen werden, oder wäre die Konjunktion identisch falsch). Die Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ werden immer Elementarkonjunktionen bedeuten. Wir sagen, daß die Elementarkonjunktion $\mathfrak{A}$ eine *Implikante* von f ist, falls $\mathfrak{A}$ die Funktion f impliziert, d. h. falls f das Wert $\uparrow$ hat in jedem solchen Falle, daß $\mathfrak{A} = \uparrow$ ist. $\mathfrak{A}$ ist eine *Prim-Implikante* von f, wenn $\mathfrak{A}$ eine Implikante von f ist, aber keine echte Teil-Konjunktion von $\mathfrak{A}$ die Funktion f impliziert.[3]) (Für diesen Begriff siehe die Arbeiten [2], [3] von QUINE, und die Seite 175 der Arbeit [4] von KUSNJEZOW.)

Enthält eine Elementarkonjunktion $\mathfrak{A}$ jede Variable von f (entweder negiert oder unnegiert), so sagen wir, daß $\mathfrak{A}$ eine *volle Elementarkonjunktion* von f ist. Ist $\mathfrak{A}$ eine volle Elementarkonjunktion von f, so entspricht $\mathfrak{A}$ in bekannter Weise einer Stelle des Definitionsbereiches von f, so daß wir über den Wert einer Variablen in $\mathfrak{A}$, ferner über den Substitutionswert $f(\mathfrak{A})$ (d. h. den Wert von f an der einzigen Stelle, wo $\mathfrak{A}$ erfüllt wird) sprechen können.

Sei die geordnete Menge der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ durch Θ bezeichnet; wir schreiben $f[\Theta]$ statt $f(x_1, \ldots, x_n)$. Sei Θ' eine beliebige Teilmenge von Θ. Im Falle, daß zwei Wahrheitsfunktionen $f^*[(\Theta - \Theta') \cup x']$, $f'[\Theta']$ existieren (wo die Anordnung von Θ auch auf die Mengen $\Theta - \Theta'$ und Θ' übertragen wird, und x' eine in Θ nicht auftretende Variable ist, die in $(\Theta - \Theta') \cup x'$ als letzte auftritt), so daß durch die Substitution $x' = f'[\Theta']$ eine Funktion entsteht, die als Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ (in dieser Reihenfolge) aufgefaßt, mit $f[\Theta]$

---

[2]) Auch die Konjunktion mit einem Gliede und die leere Konjunktion (deren Wert $\uparrow$ ist) wird erlaubt.

[3]) Die identisch falsche Funktion hat keine Prim-Implikante; die identisch wahre hat eine einzige: die leere Konjunktion.

übereinstimmt, sprechen wir über eine *Darstellung* von $f[\Theta]$ in der Form einer *einfachen wiederholungsfreien Superposition*.[4]) Existiert eine solche Superposition für eine Teilmenge Θ' von Θ, so heißt Θ' eine *abtrennbare Teilmenge* (für die Funktion f).

Man sagt, daß die Wahrheitsfunktion f von der Variablen x_i *monoton wachsend* abhängt, wenn keine zwei solche volle Elementarkonjunktionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ existieren, daß

(i) $\mathfrak{A}$ die Variable x_i unnegiert, $\mathfrak{B}$ aber x_i negiert enthält,

(ii) jede andere Variable gleichen Wert in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hat,

(iii) $f(\mathfrak{A}) = \downarrow$ und $f(\mathfrak{B}) = \uparrow$ ist.

Es ist leicht ersichtlich, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn keine Prim-Implikante von f die Variable x_i negiert enthält.

Die Funktion f hängt von x_i *monoton abnehmend* ab, wenn keine zwei solche volle Elementarkonjunktionen existieren, daß

(i) $\mathfrak{A}$ die Variable x_i unnegiert enthält, $\mathfrak{B}$ aber x_i negiert enthält,

(ii) jede andere Variable gleichen Wert in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hat,

(iii) $f(\mathfrak{A}) = \uparrow$ und $f(\mathfrak{B}) = \downarrow$ gilt.

Dies ist genau dann der Fall, wenn keine Prim-Implikante x_i unnegiert enthält.

Ist f eine monoton wachsende oder monoton abnehmende Funktion von x_i, so sagen wir, daß f eine *monotone Funktion* von x_i ist. Ist f^* in einer Darstellung von f in der Form einer einfachen wiederholungsfreien Superposition eine monotone Funktion der Variablen x', so sagen wir, daß Θ' eine *monoton-abtrennbare Teilmenge* von Θ (für f) ist.[5])

Ist $\mathfrak{A}$ eine Elementarkonjunktion von $f[\Theta]$ und Θ' eine beliebige Teilmenge von Θ, so bedeutet $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ diejenige Teil-Konjunktion von $\mathfrak{A}$, die genau die gemeinsamen Variablen von $\mathfrak{A}$ und Θ' enthält (jede Variable ist unnegiert oder negiert je nachdem wie sie in $\mathfrak{A}$ vorkommt).

---

[4]) Das Wort „wiederholungsfrei" bezieht sich auf die Tatsache, daß f' und f^* keine gemeinsamen Argumente haben. Das Wort „einfach" ist für die Unterscheidung von den Superpositionen, wobei mehr als eine Variable von f^* substituiert wird, ferner von den iterierten Superpositionen zweckmäßig. Der betrachtete Superpositionsbegriff wird im Hilfssatz 1.1 der Arbeit [5] von Kusnjezow (S. 192) von einem anderen Gesichtspunkt aus erleuchtet.

[5]) Es ist möglich, daß eine Teilmenge der Variablen abtrennbar, aber nicht monoton-abtrennbar ist: z. B. die Menge $\{x, y\}$ für die Funktion

$$xz \vee yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = (x \vee y) \longleftrightarrow z.$$

§ 3. Ergebnisse

Satz 1. *Betrachten wir eine Darstellung der Wahrheitsfunktion $f[\Theta]$ in der Form einer einfachen wiederholungsfreien Superposition. Eine Elementarkonjunktion $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann eine Prim-Implikante von f, wenn eine der folgenden drei Aussagen für $\mathfrak{A}$ wahr ist:*

α) $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ *und* $\mathfrak{A}$ *ist eine Prim-Implikante von* f^*,

β) $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ *ist eine Prim-Implikante von* f' *und* $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & x' *ist eine Prim-Implikante von* f^*,

γ) $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ *ist eine Prim-Implikante von* $\bar{f}'$ *und* $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & $\bar{x}'$ *ist eine Prim-Implikante von* f^*.

Bemerkung. Es ist klar, daß für jede Elementarkonjunktion nur eine der Aussagen α), β), γ) gelten kann.

Der Beweis gründet sich auf zwei Hilfssätze.[6])

Hilfssatz 1. *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine Prim-Implikante von* f *und ist* $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ *nicht leer, so ist entweder*

β') $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ *eine Implikante von* f' *und* $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & x' *eine Implikante von* f^*, *oder*

γ') $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ *eine Implikante von* $\bar{f}'$ *und* $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & $\bar{x}'$ *eine Implikante von* f^*.

Beweis. Ist $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ keine Implikante von f' oder $\bar{f}'$, so existieren zwei passende volle Elementarkonjunktionen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von f', deren $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ eine gemeinsame Teil-Konjunktion ist, und für die $f'(\mathfrak{B}) = \uparrow, f'(\mathfrak{C}) = \downarrow$ gelten. Es sei $\mathfrak{D}$ eine beliebige volle Elementarkonjunktion von f, deren $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ eine Teil-Konjunktion ist. Wenn $f'(\mathfrak{D}_{\Theta'}) = \uparrow$ ist, dann muß

$$f(\mathfrak{D}) = f(\mathfrak{D}_{\Theta-\Theta'} \,\&\, \mathfrak{B}) = \uparrow$$

gelten (die erste Gleichung gilt, weil die Werte der Variablen von f^* übereinstimmen; und die zweite gilt, weil $\mathfrak{A}$ eine Teil-Konjunktion von $\mathfrak{D}_{\Theta-\Theta'}$ & $\mathfrak{B}$ ist). Wenn $f'(\mathfrak{D}_{\Theta'}) = \downarrow$ ist, dann muß (aus ähnlichen Gründen)

$$f(\mathfrak{D}) = f(\mathfrak{D}_{\Theta-\Theta'} \,\&\, \mathfrak{C}) = \uparrow$$

gelten. Daher ist $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ eine Implikante von f; das ist aber im Widerspruch zur Annahme, daß $\mathfrak{A}$ eine Prim-Implikante ist.

Wir haben die Behauptung von β') oder γ') über $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ bewiesen; wir sollen noch die Richtigkeit der entsprechenden Aussage über $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ zeigen. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ die Funktion f' impliziert, und betrachten den

[6]) Wir lassen im Beweis die Spezialfälle außer Acht, wenn f' identisch $\uparrow$ oder $\downarrow$ ist, und überlassen dem Leser die Richtigkeit des Satzes in diesen entarteten Fällen einzusehen und ihn einfacher zu formulieren.

Wert von f^* an einer beliebigen Stelle, wo $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & x' wahr ist. Dann muß f^* mit $f(\mathfrak{E}) = \uparrow$ übereinstimmen, wo $\mathfrak{E}$ eine beliebige volle Elementarkonjunktion von f ist, die $\mathfrak{A}$ als Teilkonjunktion enthält. Daher ist $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & x' eine Implikante von f^*. Der Beweis verläuft ähnlich, wenn $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ die Funktion $\bar{f}'$ impliziert.

Hilfssatz 2. *Gilt eine der Aussagen* β'), γ') *für eine Elementarkonjunktion* $\mathfrak{A}$, *so ist* $\mathfrak{A}$ *eine Implikante der Funktion* f.

Beweis. Wir nehmen an, daß β') erfüllt ist und $\mathfrak{A}$ bezüglich einer Stelle des Definitionsbereiches von f wahr ist. Dann ist f' wahr an der entsprechenden Stelle, und auch $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ wird genügt. Daher gibt die Substitution von f' für x' der Funktion f den Wahrheitswert $\uparrow$. Im Falle, daß γ') gilt, verläuft der Beweis analog.

Beweis des Satzes 1. Es sei eine Prim-Implikante $\mathfrak{A}$ von f angegeben. Im Falle $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ wird α) ersichtlich erfüllt. Im entgegengesetzten Falle können wir den Hilfssatz 1 anwenden. Wäre β') erfüllt, aber β) nicht, so könnten wir eine Teil-Konjunktion von $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ betrachten, die eine Prim-Implikante von f' ist, ferner eine Teil-Konjunktion von $\mathfrak{A}_{\Theta-\Theta'}$ & x', die eine Prim-Implikante von f^* ist. (Es muß in mindestens einem Falle eine echte Teil-Konjunktion-Relation bestehen.) Durch die Anwendung des Hilfssatzes 2 würden wir dann eine Implikante von f bekommen, die echter Teil von $\mathfrak{A}$ ist, was der Bedingung für $\mathfrak{A}$ widerspricht. Im Falle, daß γ') erfüllt wird, aber γ) nicht, schließen wir analog.

Umgekehrt, ist β) oder γ) gültig, so ist wegen des Hilfssatzes 2 $\mathfrak{A}$ eine Implikante von f. Wäre $\mathfrak{A}$ keine Prim-Implikante, so sollte sie eine Prim-Implikante echt enthalten; der Hilfssatz 1 führte dann aber zu einem Widerspruch. — Gilt α), so ist $\mathfrak{A}$ offenbar eine Prim-Implikante von f.

Satz 2. *Die folgenden Eigenschaften* A) *und* B) *sind äquivalent für eine beliebige Teilmenge* Θ' *der Variablenmenge* Θ *der Wahrheitsfunktion* $f[\Theta]$:

A) Θ' *ist monoton-abtrennbar,*

B) *sind* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *zwei beliebige Prim-Implikanten von* f, *und ist weder* $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ *noch* $\mathfrak{B}_{\Theta'}$ *die leere Konjunktion, so ist auch* $\mathfrak{A}_{\Theta'}$&$\mathfrak{B}_{\Theta-\Theta'}$ *eine Prim-Implikante von* f.

Beweis. Wird A) erfüllt, so ist es unmöglich, daß in zwei passenden Prim-Implikanten der Funktion f^* die Variable x' unnegiert bzw. negiert auftritt. B) muß wegen der Aussage β) oder γ) des Satzes 1 gelten.

Umgekehrt, es sei B) erfüllt. Betrachten wir die Funktionen $f'[\Theta']$ und $f^*[(\Theta-\Theta') \cup x']$, die durch die Formeln

$$f'[\Theta'] = \mathfrak{A}_{\Theta'}^{(1)} \vee \cdots \vee \mathfrak{A}_{\Theta'}^{(k)}$$

und

$$(1) \qquad f^*[(\Theta-\Theta')\cup x'] = \mathfrak{A}^{(k+1)} \vee \cdots \vee \mathfrak{A}^{(m)} \vee \mathfrak{A}^{(1)}_{\Theta-\Theta'}\, x' \vee \cdots \vee \mathfrak{A}^{(k)}_{\Theta-\Theta'}\, x'$$

definiert werden, wo $\mathfrak{A}^{(1)}, \dots, \mathfrak{A}^{(m)}$ die sämtlichen Prim-Implikanten von f sind, und $\mathfrak{A}^{(i)}_{\Theta'}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ genau im Falle $k < i \leqq m$ die leere Konjunktion ist.

Der Beweis wird vollständig sein, wenn wir zeigen, daß f gleich f^* ist, wenn $x' = f'$ gilt. In der Tat, substituieren wir die die Funktion f' definierende Formel für jedes Vorkommen von x' in (1), und wenden die Distributivität an. Die Aussage B) versichert, daß auf diese Weise die sämtlichen Prim-Implikanten von f und nur diese an der rechten Seite von (1) entstehen (dieselbe Prim-Implikante kann in mehreren Exemplaren auftreten), was die Gleichheit der superponierten Funktion mit f bedeutet.

Satz 3. *Sind Θ' und Θ'' monoton-abtrennbare Teilmengen von Θ für die Funktion f, deren Durchschnitt nicht leer ist, so ist auch $\Theta' \cap \Theta''$ monoton-abtrennbar für f.*

Beweis. Satz 2 hat ein Kriterium dafür gegeben, daß eine Teilmenge monoton-abtrennbar sei; deshalb genügt es zu beweisen, daß $\Theta' \cap \Theta''$ die Aussage B) erfüllt, wenn beide von Θ' und Θ'' sie erfüllen.

In der Tat ist dann $\mathfrak{A}_{\Theta'}$ & $\mathfrak{B}_{\Theta-\Theta'}$ eine Prim-Implikante von f, und damit ist auch

$$(\mathfrak{A}_{\Theta'} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta'})_{\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta''} = \mathfrak{A}_{\Theta'\cap\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{(\Theta-\Theta')\cap\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-\Theta''} =$$
$$= \mathfrak{A}_{\Theta'\cap\Theta''} \,\&\, \mathfrak{B}_{\Theta-(\Theta'\cap\Theta'')}$$

eine Prim-Implikante von f.

Literaturverzeichnis

[1] A. Ádám, Kétpólusú elektromos hálózatokról (Über zweipolige elektrische Netze). III, *A Magyar Tudományos Akadémia Mat. Kutató Intézetének Közleményei*, **3** (1958), 207—218. (Ungarisch, mit russischer und deutscher Zusammenfassung.)

[2] W. V. Quine, The problem of simplifying truth functions, *American Math. Monthly*, **59** (1952), 521—531.

[3] W. V. Quine, A way to simplify truth functions, *American Math. Monthly*, **62** (1955), 627—631.

[4] А. В. Кузнецов, Об одной свойстве функций, реализуемых неплоскими бесповторными схемами, Труды Мат. Инст. им. Стеклова, **51** (1958), 174—185.

[5] А. В. Кузнецов, О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики, Труды Мат. Инст. им. Стеклова, **51** (1958), 186—225.

[6] Б. А. Трахтенброт, К теории бесповторных контактных схем, Труды Мат. Инст. им. Стеклова, **51** (1958), 226—269.

(Eingegangen am 25. August 1959)

Erweiterung des Begriffs der Räume skalarer und konstanter Krümmung

Von ARTHUR MOÓR in Szeged

Einleitung

Ein n-dimensionaler Riemannscher Raum $\mathfrak{R}_n$, in dem die Metrik durch das Bogenelement

$$ds = \sqrt{g_{ij}(x)\,dx^i dx^j} \qquad (x:\ x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{0. 1}$$

bestimmt ist, wird ein Raum von skalarer Krümmung genannt, wenn der durch den metrischen Grundtensor $g_{ij}(x)$ bestimmte Krümmungstensor $R_i{}^j{}_{kl}$ die Form

$$R_i{}^j{}_{kl} = 2R(x)g_{i[k}\delta^j_{l]} \text{ [1]} \tag{0. 2}$$

hat. Der Krümmungstensor $R_i{}^j{}_{kl}$ des Raumes $\mathfrak{R}_n$ ist von den g_{ik} durch die sog. Übertragungsparameter $\Gamma_i{}^j{}_k$ abhängig, wo die $\Gamma_i{}^j{}_k$ die aus dem metrischen Grundtensor g_{ik} gebildeten Christoffelschen Symbole sind.

Die Übertragungsparameter $\Gamma_i{}^j{}_k$ bestimmen bekanntlich die Parallelübertragung der Vektoren und die geodätischen Linien des Raumes $\mathfrak{R}_n$.

Bestimmen wir nun die Metrik des Raumes durch die Grundform (0. 1), die Parallelübertragung der Vektoren aber statt der Übertragungsparameter $\Gamma_j{}^i{}_k$ durch andere Übertragungsparameter von der Form:

$$L_i{}^j{}_k = \Gamma_i{}^j{}_k + A_i{}^j{}_k, \tag{0. 3}$$

so bekommt man einen Raum $\mathfrak{R}_n^*$, dessen Struktur durch die beiden Fundamentaltensoren g_{ij} und $A_i{}^j{}_k$ bestimmt ist. Aus (0. 3) sieht man nämlich unmittelbar, daß $A_i{}^j{}_k$ nur einen Tensor bedeuten kann, falls die Transformationsformeln von $L_i{}^j{}_k$ und $\Gamma_i{}^j{}_k$ übereinstimmen, was wir im folgenden immer bedingen wollen. Eine derartige „Erweiterung" $\mathfrak{R}_n^*$ des Raumes $\mathfrak{R}_n$ hat sowohl

[1]) Wir verwenden die Schoutensche Symbolik; vgl. [7], insb. Kap. I. § 3. (Die Literatur befindet sich am Ende unserer Arbeit.)

physikalische, wie geometrische Anwendungen. Wir verweisen bezüglich der physikalischen Anwendungen auf die Arbeiten [3] und [5], und bezüglich der geometrischen Anwendungen auf die Arbeiten [6] und [7], Kap. III.

In vorliegender Arbeit sollen $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung, in zu den Riemannschen Räumen skalarer Krümmung formal analoger Weise (d. h. gemäß Formel (0. 2)), definiert werden. Danach soll festgestellt werden, welchen geometrischen Inhalt diese Definitionen haben. Die $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung haben die charakteristische Eigenschaft, daß in diesen Räumen in jedem Punkte und in jeder Richtung eine geodätische Hyperfläche gelegt werden kann. Diese Eigenschaft gibt eine geometrische Verallgemeinerungsmöglichkeit für die Definition der Räume von skalarer Krümmung.

Dementsprechend werden wir in § 1 die Grundformeln der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume zusammenstellen; in § 2 werden wir die Definition der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung angeben und die Gültigkeit des Schurschen Satzes in diesen Räumen untersuchen. In § 3 betrachten wir einige wichtige Grundbegriffe der Theorie der Hyperflächen in Bezug auf die Parallelübertragung der Hyperflächenvektoren und in § 4 und § 5 untersuchen wir die geometrischen Eigenschaften der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung. Endlich, in § 6 wollen wir durch Beispiele die Existenz dieser $\mathfrak{R}_n^*$-Räume beweisen.

§ 1. Grundformeln der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume

In einem n-dimensionalen $\mathfrak{R}_n^*$-Raum seien die geometrische Struktur bestimmenden Fundamentaltensoren $g_{ij}(x)$ und $A_i{}^j{}_k(x)$, wo der symmetrische Tensor g_{ij} die Metrik des Raumes bestimmt und für $g_{ij}(x)$ die quadratische Form $g_{ij}(x)y^iy^j$ in den Hilfsveränderlichen y^i positiv definit ist. Der Tensor $A_i{}^j{}_k$ definiert durch (0. 3) die Übertragungsparameter des Raumes.

In dem $\mathfrak{R}_n^*$-Raum existieren zwei kovariante und zwei invariante Differentiale je nach den beiden Übertragungsparametern (0. 3) und $\Gamma_j{}^i{}_k$. Die kovariante Ableitung nach den Übertragungsparametern (0. 3) bzw. $\Gamma_j{}^i{}_k$ wollen wir mit $\overset{*}{\nabla}_k$ bzw. ∇_k bezeichnen. Für einen Vektor ξ^i bzw. ξ_i ist also

$$(1.1)\qquad (a)\quad \nabla_k\xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_k\xi^i+\Gamma_j{}^i{}_k\xi^j,\qquad (b)\quad \nabla_k\xi_i \overset{\text{def}}{=} \partial_k\xi_i-\Gamma_i{}^j{}_k\xi_j,$$

$$(1.2)\qquad (a)\quad \overset{*}{\nabla}_k\xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_k\xi^i+L_j{}^i{}_k\xi^j \equiv \nabla_k\xi^i+A_j{}^i{}_k\xi^j,$$

$$(1.2)\qquad (b)\quad \overset{*}{\nabla}_k\xi_i \overset{\text{def}}{=} \partial_k\xi_i-L_i{}^j{}_k\xi_j \equiv \nabla_k\xi_j-A_i{}^j{}_k\xi_j.$$

Die entsprechenden invarianten Differentiale sind durch die Formeln

$$(1.3)\qquad D\xi^i \overset{\text{def}}{=} \nabla_k\xi^i dx^k,\qquad \overset{*}{D}\xi^i \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{\nabla}_k\xi^i dx^k \equiv D\xi^i+A_j{}^i{}_k\xi^j dx^k$$

bestimmt.

Neben den geodätischen Linien existieren im Raum $\mathfrak{R}_n^*$ die sog. autoparallelen Kurven. Da die Parallelübertragung der Vektoren längs einer Kurve: $x^i = x^i(t)$ durch

$$\frac{\overset{*}{D}\xi^i}{dt} \overset{\text{def}}{=} \frac{d\xi^i}{dt} + L_j{}^i{}_k \xi^j \frac{dx^k}{dt} \tag{1.4}$$

festgelegt ist, definieren die Differentialgleichungen (1.4) für $\xi^i = \dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{dt}$, d. h. die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + L_j{}^i{}_k(x(t)) \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{1.5}$$

solche Kurven, deren Tangentenvektoren $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{dt}$ längs der Kurve parallel verschiebbar sind. Wir bemerken, daß die Gleichungen (1.5) nicht parameterinvariant sind. Die parameterinvariante Form von (1.5) ist (vgl. [4] § 7 und § 22)

$$\frac{dx^h}{d\tau}\left(\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + L_j{}^i{}_k \frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\right) - \frac{dx^i}{d\tau}\left(\frac{d^2x^h}{d\tau^2} + L_j{}^h{}_k \frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\right) = 0. \tag{1.5a}$$

Der affine Parameter t in (1.5) ist bis auf eine lineare Transformation bestimmt. Die Kurven (1.5) nennt man autoparallele Kurven. Der Parameter: t ist in (1.5) im allgemeinen nicht die Bogenlänge: s, sondern ein geeigneter affiner Parameter des durch $L_{(i}{}^j{}_{k)}$ bestimmten affinen Zusammenhangs (vgl. [4] § 22. Offenbar kommt in (1.5) nur der symmetrische Teil von $L_i{}^j{}_k$ vor). Ist z. B. die Übertragung (1.2) metrisch, d. h. $\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} = 0$, so kann $t = s$ genommen werden da jetzt aus (1.5)

$$\frac{d}{dt}(g_{ik}(x(t))\dot{x}^i\dot{x}^k) = 0, \quad \text{d. h.} \quad g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k = \text{konst.}$$

folgt. Ist also für einen konstanten Wert t_0

$$g_{ik}(x(t_0))\dot{x}_0^i\dot{x}_0^k = 1, \quad \dot{x}_0^i \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=t_0},$$

so ist diese Relation längs der ganze Kurve gültig, d. h. $\dot{x}^i$ ist der tangente Einheitsvektor[2]).

Der zu den Übertragungsparametern $L_i{}^j{}_k$ gehörige Krümmungstensor ist durch die Formel

$$\overset{*}{R}_i{}^j{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} 2\partial_{[l}L_{|i|}{}^j{}_{k]} + 2L_i{}^t{}_{[k}L_{|t|}{}^j{}_{l]}$$

[2]) Wäre diese Relation für ein beliebiges t_0 nicht gültig, so würde ihre Gültigkeit nach einer Parametertransformation von der Form $\sigma = ct$ — die den Charakter von (1.5) unverändert läßt — erreichbar sein. Es wäre dann $\sigma = s$.

festgelegt (vgl. [7] Kap. III, Formel (4. 2))[3]). Auf Grund von (0. 3) kann dieser Tensor auch in der Form:

$$(1.6) \qquad \overset{*}{R}_i{}^j{}_{kl} \equiv R_i{}^j{}_{kl} + S_i{}^j{}_{kl}$$

angegeben werden, wo $R_i{}^j{}_{kl}$ der zu den Christoffelschen Symbolen $\Gamma_i{}^j{}_k$ gehörige Riemannsche Krümmungstensor ist, und der Tensor $S_i{}^j{}_{kl}$ durch

$$(1.7) \qquad S_i{}^j{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} 2\nabla_{[l}A_{|i|}{}^j{}_{k]} + 2A_i{}^t{}_{[k}A_{|t|}{}^j{}_{l]}$$

bestimmt werden kann [vgl. [7] Kap. III (4. 22a)][4]).

Man kann leicht verifizieren, daß der Krümmungstensor $\overset{*}{R}_i{}^j{}_{kl}$ den folgenden Identitäten — die die Verallgemeinerungen der sog. Bianchischen Identitäten sind — genügt:

$$(1.8a) \qquad \overset{*}{\nabla}_{[l}\overset{*}{R}_{|i|}{}^r{}_{jk]} + 2\overset{*}{R}_i{}^r{}_{[j|t|}\Omega_k{}^t{}_{l]} = 0, \quad \Omega_k{}^t{}_l \overset{\text{def}}{=} A_{[k}{}^t{}_{l]}.$$

(Vgl. [7] Kap. III (5. 19)). Diese Identitäten können auch in der äquivalenten Form:

$$(1.8b) \qquad \nabla_{[l}\overset{*}{R}_{|i|}{}^r{}_{jk]} + A_t{}^r{}_{[l}\overset{*}{R}_{|i|}{}^t{}_{jk]} - A_i{}^t{}_{[l}\overset{*}{R}_{|t|}{}^r{}_{jk]} = 0$$

angegeben werden. Die entsprechenden Identitäten für den Riemannschen Krümmungstensor $R_i{}^j{}_{kl}$ bekommt man aus (1. 8b), wenn $A_i{}^j{}_k = 0$ gesetzt wird.

Wegen seiner Anwendungen in der Geometrie und in der Physik ist der Fall

$$(1.9) \qquad A_{ijk} = -A_{jik}, \quad A_{ijk} \overset{\text{def}}{=} g_{jt}A_i{}^t{}_k$$

besonders wichtig. Die Relation (1. 9) bedeutet, daß die durch (0. 3) definierte Übertragung metrisch ist. In diesem Falle existieren also im Raum $\mathfrak{R}_n^*$ zwei metrische kovariante Ableitungen, und zwar (1. 1) und (1. 2) (vgl. [6] § 1). Bezüglich der physikalischen Anwendungen verweisen wir auf die Arbeit [5]. Die Relation (1. 9) beeinflußt die schiefsymmetrischen Eigenschaften der Krümmungstensoren $\overset{*}{R}_{ijkl}$ und S_{ijkl}. Aus (1. 7) folgt dann unmittelbar auf Grund der Formel $\nabla_i g_{jk} = 0$, daß

$$S_{ijkl} = -S_{jikl}$$

ist, und wegen

$$(1.10) \qquad R_{ijkl} = -R_{jikl}$$

wird nach (1. 6) auch der Krümmungstensor $\overset{*}{R}_{ijkl}$ in i, j schiefsymmetrisch.

---

[3]) In der Arbeit [7] sind unsere Übertragungsparameter $L_i{}^j{}_k$ mit $\Gamma_i{}^j{}_k$ und der Tensor $\overset{*}{R}_h{}^j{}_{kl}$ ist durch $R_{lkh}^{\cdot\cdot\cdot j}$ bezeichnet.

[4]) In der Arbeit [7] sind die Bezeichnungen $\overset{*}{\nabla}_k$ und ∇_k im Vergleich zu unserer Arbeit verwechselt. Statt $A_h{}^j{}_k$ steht in [7] $T_{hk}^{\cdot\cdot j}$ und statt $\Omega_k{}^t{}_l$ steht $S_{kl}^{\cdot\cdot t}$.

Die schiefe Symmetrie von R^*_{ijkl} könnte man übrigens im Falle einer metrischen Übertragung auch von den Identitäten von RICCI leicht ableiten. Die Identitäten von RICCI sind nämlich z. B. für einen Tensor zweiter Stufe:

$$(1.11)\qquad (\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_j - \overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_k) T_{ab} = -R^{*\,t}_{a\;jk} T_{tb} - R^{*\,t}_{b\;jk} T_{at} - 2\Omega_j{}^t{}_k \overset{*}{\nabla}_t T_{ab}.$$

Ist nun $\overset{*}{\nabla}_j g_{ab} = 0$, so ergibt (1.11), falls statt T_{ab} der metrische Fundamentaltensor g_{ab} gesetzt wird, unmittelbar die erwähnte Relation $R^*_{(ab)jk} = 0$.

Die geodätischen Linien und die autoparallelen Kurven sind in dem $\mathfrak{R}^*_n$-Raum identisch, falls die Relationen

$$(1.12)\qquad A_i{}^j{}_k = -A_k{}^j{}_i$$

bestehen. Wegen der längs (1.5) gültige Relation

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) \equiv (\overset{*}{\nabla}_k g_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k \equiv -2A_{(ij)k}\dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k = 0,$$

kann in (1.5) bei diesem Typ $t = s$ gesetzt werden. Dieser, durch (1.12) charakterisierte Typ findet seine physikalische Anwendungen in den Arbeiten I. und II. von [3]. In den durch (1.12) charakterisierten $\mathfrak{R}^*_n$-Räumen ist

$$(1.12a)\qquad A_i{}^j{}_k = \Omega_i{}^j{}_k.$$

Die schiefe Symmetrie der Krümmungstensoren R^*_{ijkl} und S_{ijkl} in den Indizes i und j ist aber jetzt nicht gültig.

Ist endlich

$$(1.13)\qquad A_i{}^j{}_k = A_k{}^j{}_i,$$

so sind die Übertragungsparameter $L_i{}^j{}_k$ nach den Formeln (0.3) in den Indizes i, k symmetrisch. Auch dieser Typ kann in der Physik angewandt werden (vgl. [3] III und IV). Es gilt jetzt

$$(1.13a)\qquad \Omega_i{}^j{}_k = 0.$$

Die Identitäten (1.8a) für den Krümmungstensor $R^{*\,j}_{i\;kl}$ werden jetzt dieselbe Form haben, wie die Bianchischen Identitäten für den Riemannschen Krümmungstensor $R_i{}^j{}_{kl}$. Statt der kovarianten Ableitung ∇_l steht aber in den Bianchischen Identitäten des Krümmungstensors $R^{*\,j}_{i\;kl}$ die kovariante Ableitung $\overset{*}{\nabla}_l$ (vgl. (1.1) und (1.2)). Der durch (1.13) charakterisierte Fall ist im Wesentlichen die Zusammensetzung eines metrischen und eines affinen Raumes mit symmetrischer Vektorübertragung. Die Vektorübertragung ist zwar nichtmetrisch, doch existiert im Raume eine Bogenlänge für die Kurven und ein Längenbegriff für die Vektoren.

Die Relationen (1.9) und (1.12) können gleichzeitig bestehen. Der Tensor A_{ijk} wird dann in allen seinen Indizes schiefsymmetrisch sein. Das müssen wir noch nur auf j, k beweisen. Es ist aber nach (1.9) und (1.12):

$$A_{ijk} = -A_{jik} = A_{kij} = -A_{ikj},$$

und das beweist unsere Behauptung. Offenbar können (1.12) und (1.13) nur dann gleichzeitig bestehen, wenn $A_{ijk} \equiv 0$ ist. Ebenso folgt aus (1.9) und (1.13), falls diese gleichzeitig bestehen sollen, daß $A_{ijk} \equiv 0$ ist. Es ist nämlich nach (1.9) und (1.13) ,

$$(1.14) \qquad A_{ijk} = -A_{jik} = -A_{kij} = A_{ikj} = A_{jki} = -A_{kji} = -A_{ijk},$$

d. h. $A_{ijk} = -A_{ijk}$, und das beweist unsere Behauptung.

Selbstverständlich muß in diesem letzten Falle $n > 2$ vorausgesetzt werden, denn vollständig schiefsymmetrische A_{ijk} können nur für $n > 2$ bestehen.

§ 2. Definition der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung

Die Definition der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung wollen wir in der Weise angeben, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum in den gewöhnlichen Riemannschen $\mathfrak{R}_n$-Raum von skalarer Krümmung übergehe, falls $A_i{}^j{}_k = 0$ gesetzt wird. Wir definieren erstens die $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung durch formale Forderungen

D e f i n i t i o n. *Ein $\mathfrak{R}_n^*$-Raum soll ein Raum von skalarer bzw. konstanter Krümmung erster, zweiter, bzw. dritter Gattung genannt werden, falls eine der Relationen*

$$(2.1) \qquad R^*_{ijkl} = 2R^* \gamma_{i[k}\gamma_{|j|l]},$$

$$(2.2) \qquad R^*_{ijkl} = 2R^* \gamma_{i[k} g_{|j|l]}, \qquad (2.2a) \qquad R^*_{ijkl} = 2R^* g_{i[k}\gamma_{|j|l]},$$

$$(2.3) \qquad R^*_{ijkl} = 2R^* g_{i[k} g_{|j|l]}$$

gültig ist. Der Tensor γ_{ik} soll dabei durch die Grundtensoren g_{ab} und $A_a{}^b{}_c$ bestimmt sein. $R^*(x)$ ist der Krümmungsskalar des Raumes; ist R^* eine Konstante, so ist der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum von konstanter Krümmung.

Die Typen (2.2) und (2.2a) haben gleichartigen Charakter, somit wollen wir nur (2.2) eingehender untersuchen. Wir werden jetzt einige Sätze in Bezug auf die Räume von skalarer Krümmung beweisen.

Nehmen wir an, daß der nicht unbedingt symmetrische Tensor γ_{ik} durch

$$(2.4) \qquad \overset{*}{\nabla}_j \gamma_{ik} = 0, \quad \operatorname{Det}(\gamma_{ik}) \neq 0$$

festgelegt ist. Wir beweisen den folgenden

Satz 1. *Ist in einem* $\mathfrak{R}_n^*$*-Raum* $(n>2)$ *von skalarer Krümmung* (2. 1) *und* (2. 4) *gültig, so besteht für den Krümmungsskalar* R^* *die Relation*

$$(2.5) \qquad \partial_k \log |R^*| = \frac{2}{n-1}\left(2\Omega_{k\ t}^{\ t} - \Lambda_{t\ k}^{\ t} + \gamma^t_{\ k}\Lambda_{(jt)l}\gamma_0^{jl}\right),$$

wo γ_0^{jl} *durch*

$$\gamma_{bt}\gamma_0^{ct} = \gamma_{tb}\gamma_0^{tc} = \delta_b^c = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad b=c, \\ 0 & \textit{für} \quad b \neq c \end{cases}$$

festgelegt ist. (Selbstverständlich ist γ_0^{ij} von $\gamma^{ij} = g^{it}g^{jr}\gamma_{tr}$ verschieden.)

Beweis. Ziehen wir in (1. 8a) den Index r herab, so wird wegen: $\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} = -2\Lambda_{(ij)k}$

$$\overset{*}{\nabla}_{[l}R^*_{|ir|jk]} + 2\Lambda_{(tr)[l}R^{*\ \ t}_{|i|\ jk]} + 2R^*_{ir[j|t|}\Omega_{k\ l]}^{\ t} = 0$$

bestehen. Beachten wir jetzt die Gleichungen (2. 1) und (2. 4), so wird:

$$(2.6) \quad \{2\overset{*}{\nabla}_l R^*\gamma_{i[j}\gamma_{|r|k]} + 4R^*(\Lambda_{(tr)l}\gamma_{i[j}\gamma^t_{\ k]} + \Omega_{k\ l}^{\ t}\gamma_{i[j}\gamma_{|r|t]})\} + \{\text{zykl.}\}_{jkl} = 0,$$

wo $\{\text{zykl.}\}_{jkl}$ eine zyklische Permutation auf die Indizes j, k, l bedeutet. Man bekommt aus der Formel (2. 6) nach einer Überschiebung mit γ_0^{rk} und dann mit γ_0^{ij} im Hinblick auf die Relation $\gamma_0^{kl}\gamma^t_{\ l} = g^{kt}$:

$$(2.7) \quad (n-1)(n-2)\overset{*}{\nabla}_l R^* - 2R^*(n-2)(2\Omega_{l\ t}^{\ t} - g^{tj}\Lambda_{(tj)l} + \gamma^t_{\ l}\Lambda_{(jt)k}\gamma_0^{jk}) = 0.$$

Beachten wir jetzt, daß für einen Skalar R^*, $\overset{*}{\nabla}_k R^* \equiv \partial_k R^*$ ist, so folgt aus (2. 7) wegen $n>2$ unmittelbar die Formel (2. 5), w. z. b. w.

Der bekannte Schursche Satz behauptet in den Riemannschen Räumen (vgl. [2] § 26), daß *in den Riemannschen Räumen von skalarer Krümmung der Krümmungsskalar* $R^*(x)$ *eine Konstante ist, falls* $n>2$ *besteht*[5]). Als eine unmittelbare Folgerung des Satzes 1 entsteht das folgende

Korollar. *In den durch* (2. 1) *und* (2. 4) *charakterisierten Räumen ist der Schursche Satz dann und nur dann gültig, falls*

$$2\Omega_{k\ t}^{\ t} = \Lambda_{t\ k}^{\ t} - \gamma^t_{\ k}\Lambda_{(jt)l}\gamma_0^{jl}$$

ist. In diesen $\mathfrak{R}_n^*$*-Räumen von skalarer Krümmung erster Gattung ist* $R^* = konst.$

---

[5]) In der Formulierung des Schurschen Satzes steht in [2] § 26 statt des Begriffs von „Räumen von skalarer Krümmung" der Begriff der Räume, deren Krümmung von der Orientation (d. h. von der Zweistellung) unabhängig ist. Bekanntlich sind aber diese beiden Typen von Riemannschen Räumen identisch.

Ist die Übertragung (0. 3) metrisch bezüglich der g_{ik}, so reduziert sich nach (1. 9) unsere letzte Formel auf $\Omega_k{}^t{}_t = 0$.

Für die durch (2. 2) charakterisierten Räume beweisen wir den folgenden

Satz 2. a) *Besteht in einem $\mathfrak{R}_n^*$-Raum von skalarer Krümmung die Relation* (2. 2), *ist weiter $R^* \neq 0$ und ist $\gamma_{ik} \neq c\, g_{ik}$, so kann die durch* (1. 2) *bestimmte Übertragung $\overset{*}{\nabla}_k$ in Bezug auf den Grundtensor g_{ik} nicht metrisch sein.*

b) *Sind γ_{ik} und $A_i{}^j{}_k$ in i, k symmetrisch, ist $R^* =$ konst., weiter existiert eine Zahl N derart, daß die letzte Gleichung des Systems*

$$(2.8) \qquad \hat{\gamma}_{l(i} \overset{*}{\nabla}_{|m_1} \ldots \overset{*}{\nabla}_{m_r|} \gamma_{j)k} - \hat{\gamma}_{k(i} \overset{*}{\nabla}_{|m_1} \ldots \overset{*}{\nabla}_{m_r|} \gamma_{j)l} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, N+1)$$

eine Folge der vorigen sei, und ist endlich $\hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij}$ eine Lösung dieses Gleichungssystems, dann ist $\overset{*}{\nabla}_k \gamma_{ij} = 0$.

c) *Ist $\Omega_i{}^j{}_k = 0$, $\overset{*}{\nabla}_k \gamma_{ij} \neq 0$, so ist für $n > 2$*

$$\partial_k \log |R^*| = -\frac{2}{n-1} \gamma_0^{ij} \overset{*}{\nabla}_{[k} \gamma_{|i|j]}.$$

Beweis. a) Im vorigen Paragraphen haben wir gezeigt, daß im Falle einer in Bezug auf den metrischen Grundtensor g_{ik} metrischen Übertragung $R^*{}_{(ij)kl} = 0$ ist. Auf Grund von (2. 2) wäre dann:

$$\gamma_{i[k} g_{l]j} + \gamma_{j[k} g_{l]i} = 0.$$

Von dieser Gleichung folgt nach einer Überschiebung mit g^{jl}

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{n} C g_{ik}, \qquad C \overset{\text{def}}{=} \gamma_{jl} g^{jl}.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer bezüglich des Tensors γ_{ik} gestellten Bedingung.

b) Die Integrabilitätsbedingungen von $\overset{*}{\nabla}_k \hat{\gamma}_{ij} = 0$ sind (vgl. [4] § 29)

$$\hat{\gamma}_{t(i} R^*_{j)}{}^t{}_{kl} = 0, \qquad \hat{\gamma}_{t(i} \overset{*}{\nabla}_{|m_1} \ldots \overset{*}{\nabla}_{m_r|} R^*_{j)}{}^t{}_{kl} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Da nach unserer Annahme (2. 2) besteht, und $R^* =$ konst. ist, sind die Integrabilitätsbedingungen die folgenden

$$\hat{\gamma}_{l(i} \gamma_{j)k} - \hat{\gamma}_{k(i} \gamma_{j)l} = 0,$$

$$\hat{\gamma}_{l(i} \overset{*}{\nabla}_{|m_1} \ldots \overset{*}{\nabla}_{m_r|} \gamma_{j)k} - \hat{\gamma}_{k(i} \overset{*}{\nabla}_{|m_1} \ldots \overset{*}{\nabla}_{m_r|} \gamma_{j)l} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Ist nun $\hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij}$, so ist dieses Gleichungssystem wegen (2. 8) erfüllt. (Die erste Integrabilitätsbedingung ist für $\hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij}$ immer identisch erfüllt).

Der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ist im Falle b) auch ein Riemannscher Raum von konstanter Krümmung mit dem metrischen Fundamentaltensor γ_{ij}. Die Bedingung $\Lambda_{[i}{}^j{}_{k]}=0$ ($\Lambda_i{}^j{}_k$ ist jetzt in i, k symmetrisch) sichert, daß auch $L_i{}^j{}_k$ in i, k symmetrisch ist; dann ist $L_i{}^j{}_k$ aus $\overset{*}{\nabla}_k\gamma_{ij}=0$ eindeutig bestimmbar, falls noch $\det(\gamma_{ij})\neq 0$ ist; die $L_i{}^j{}_k$ werden eben die aus γ_{ij} gebildeten Christoffelschen Symbole. Auf Grund von (2.2) wird:

$$R_i^*{}^j{}_{kl}=2R^*\gamma_{i[k}\delta_{l]}^j.$$

c) Ist nun $\Omega_i{}^j{}_k=0$, $\overset{*}{\nabla}_k\gamma_{ij}\neq 0$, so wird nach (1.8a) und (2.2)

$$\{\overset{*}{\nabla}_l R^*\gamma_{i[j}\delta_{k]}^r+R^*\overset{*}{\nabla}_l\gamma_{i[j}\delta_{k]}^r\}+\{\text{zykl.}\}_{jkl}=0$$

bestehen. Setzen wir $r=k$, summieren wir dann auf k, so wird nach einer Kontraktion mit γ_0^{ij}: $\partial_k\log|R^*|$ die im Satz 2 angegebene Form haben.

Für die Räume skalarer Krümmung dritter Gattung bemerken wir, daß

$$\partial_k\log|R^*|=\frac{4}{n-1}\Omega_k{}^t{}_t$$

bestehen wird, falls $\overset{*}{\nabla}_k g_{ij}=0$ gültig ist: dies folgt aus (1.8a) nach einer Verjüngung auf r, k und nach einer darauffolgenden Kontraktion mit g^{ij}. Ist $\overset{*}{\nabla}_k g_{ij}\neq 0$, so besteht der folgende

Satz 3. *Hat der Krümmungstensor R^*_{ijkl} die Form (2.3), so ist für den Krümmungsskalar $R^*(x)$*

$$\partial_k\log|R^*|=\frac{1}{n-1}(\Lambda_k{}^t{}_t-\Lambda_{tk}{}^t) \tag{2.9}$$

gültig, falls $n>2$ besteht.

Beweis. Nach (1.8b) und (2.3) wird wegen $\nabla_l g_{ik}=0$, wenn wir noch in (1.8b) den Index r herabziehen:

$$\{\nabla_l R^* g_{i[j}g_{k]r}+R^*(\Lambda_{trl}g_{i[j}\delta_{k]}^t-\Lambda_i{}^t{}_l g_{t[j}g_{k]r})\}+\{\text{zykl.}\}_{jkl}=0.$$

Überschieben wir diese Gleichung erstens mit g^{kr} und dann mit g^{ij}, so wird:

$$(n-1)(n-2)\partial_l R^*+(n-2)R^*(\Lambda_{tl}{}^t-\Lambda_l{}^t{}_t)=0,$$

da $\nabla_l R^*=\partial_l R^*$ ist. Aus unserer letzten Gleichung folgt aber wegen $n>2$ unmittelbar (2.9), w. z. b. w.

Auch in diesem Falle zeigt die Formel (2.9), daß der Schursche Satz nur in den durch $\Lambda_k{}^t{}_t=\Lambda_{tk}{}^t$ charakterisierten Räumen bestehen kann. Ist Λ_{ijk} in den ersten beiden Indizes schiefsymmetrisch, so stimmt (2.9) wegen $\Lambda_{tk}{}^t=-\Lambda_k{}^t{}_t$ mit (2.5) überein.

B e m e r k u n g. Der Teil b) von Satz 2 bestimmt die Bedingungen dafür, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum wieder ein Riemannscher Raum von skalarer Krümmung mit dem Fundamentaltensor γ_{ij} sei. Untersuchungen in Bezug auf das Problem, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum wieder ein allgemeiner Riemannscher Raum $\mathfrak{R}_n$ sei, befinden sich in [8]. Der Typ (2. 1) bestimmt im allgemeinen keinen Riemannschen Raum von skalarer Krümmung, da

$$R^{*}{}_{i}{}^{j}{}_{kl} \neq R^{*}(\gamma_{ik}\delta_l^j - \gamma_{il}\delta_k^j),$$

wenn für R^{*}_{ijkl} die Formel (2. 1) gültig ist. Von den $L_i{}^j{}_k$ erhalt man nämlich $R^{*}{}_{i}{}^{j}{}_{kl}$, und das Herabziehen von j in der Formel (2. 1) geschieht mit g_{jr} und nicht mit γ_{jr}. —

Wir werden jetzt die Räume von skalarer Krümmung durch die Verallgemeinerung einer geometrischen Eigenschaft der Riemannschen Räume von konstanter Krümmung definieren. Die Vektorübertragung des $\mathfrak{R}_n^*$-Raumes induziert auf jede Hyperfläche F_{n-1} eine Parallelübertragung für die Vektoren von F_{n-1}. Auf Grund dieser induzierten Übertragung — die wir im § 3 analytisch formulieren wollen —, können die autoparallelen Linien von F_{n-1} definiert werden. Jetzt können schon die autoparallelen Hyperflächen A_{n-1} — die die Verallgemeinerungen der geodätischen Hyperflächen eines Riemannschen Raumes sind — auch definiert werden.

D e f i n i t i o n. *Eine Hyperfläche F_{n-1} ist eine autoparallele Hyperfläche A_{n-1} von $\mathfrak{R}_n^*$, wenn die bezüglich der induzierten Parallelübertragung von F_{n-1} autoparallelen Linien auch bezüglich der Übertragung von $\mathfrak{R}_n^*$ autoparallel sind.*

Die Räume von skalarer Krümmung vierter Gattung definieren wir nun in folgender Weise:

D e f i n i t i o n. *Der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ist ein Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung, wenn in jedem Punkte P_0 von $\mathfrak{R}_n^*$ und in jeder Richtung eine autoparallele Hyperfläche A_{n-1} gelegt werden kann.* (Der Ausdruck: „in jeder Richtung" bedeutet, daß der Flächennormalenvektor ν_i im Punkte P_0 beliebig angegeben werden kann.)

Im nächsten Paragraphen werden wir die Grundzüge der Theorie der Hyperflächen und die charakteristischen Bedingungsgleichungen der autoparallelen Hyperflächen bestimmen. Erst dann können wir die analytische Formulierung der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung vierter Gattung angeben.

§ 3. Grundzüge der Theorie der Hyperflächen im $\mathfrak{R}_n^*$-Raum

Eine n-dimensionale Hyperfläche F_{n-1} kann durch die Funktionen von $(n-1)$ Veränderlichen

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.1}$$

oder durch die einzige Gleichung von der Form

$$\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0 \tag{3.2}$$

angegeben werden. Die Tangentenvektoren von (3. 1) sind durch

$$B_\varrho^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n-1)$$

bestimmt[6]). Wir werden immer bedingen, daß der Rang der Matrix (B_ϱ^i) gleich $(n-1)$ ist. Der metrische Grundtensor von F_{n-1} soll mit $a_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden; bekanntlich ist $a_{\alpha\beta}$ die Projektion des metrischen Grundtensors g_{ik} auf die Hyperfläche F_{n-1}. In gewöhnlicher Weise definieren wir die kontravarianten Komponenten $a^{\alpha\beta}$ von $a_{\alpha\beta}$ durch die Gleichungen $a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$. Wir benötigen noch die Projektionsvektoren

$$B_i^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} a^{\sigma\varrho} g_{ij} B_\varrho^j, \tag{3.3}$$

die im Wesentlichen nur eine andere Form der Tangentenvektoren sind.

Bezüglich der weiteren Bezeichnungen bemerken wir, daß wir die Flächenkomponenten eines Tensors immer durch griechische Indizes, während die Raumkomponenten durch lateinische Indizes bezeichnen werden.

Der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum induziert eine Parallelübertragung in die Hyperfläche F_{n-1}. Diese induzierte Übertragung wollen wir dadurch festlegen, daß wir fordern, daß das induzierte invariante Differential $\varDelta\xi^\varrho$ eines Vektors ξ^ϱ von F_{n-1} gleich die Projektion des invarianten Differentials $\overset{*}{D}\xi^i$ des entsprechenden Raumvektors ξ^i sei. Analytisch gibt diese Forderung die Relation

$$B_r^\varrho \frac{\overset{*}{D}\xi^r}{dt} = \frac{\varDelta\xi^\varrho}{dt}. \tag{3.4}$$

Diese Formel ist vollständig analog zur entsprechenden Relation der Riemannschen Geometrie (vgl. [2], Formel (24. 10)). Die Formel (3. 4) ermöglicht, daß mehrere Eigenschaften der geodätischen Linien auch für die autoparallelen Kurven der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume gültig bleiben.

Die Formel (3. 4) ist gleichwertig damit, daß die Übertragungsparameter $\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ der Flächenübertragung gleich der Projektion von $L_i{}^j{}_k$ sind. Da die von

[6]) Die griechischen Indizes sollen jetzt und in den Paragraphen 3—4 immer die Zahlen $1, 2, \ldots, (n-1)$ bedeuten. Die lateinischen Indizes laufen von 1 bis n.

$a_{\alpha\beta}$ gebildeten Christoffelschen Symbole die Projektion von $\Gamma_i{}^j{}_k$ sind (vgl. [2], § 24, insb. Formel (24. 9)), wird $\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ die Projektion von $L_i{}^j{}_k$, falls wir $\Lambda_i{}^j{}_k$ auf die Hyperfläche F_{n-1} proizieren, und die Projektion $\Lambda_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ von $\Lambda_i{}^j{}_k$ zu der Projektion $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ von $\Gamma_i{}^j{}_k$ addieren. — Ist der zu den —von $a_{\alpha\beta}$ gebildeten Flächenübertragungsparametern— $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ addierte Tensor $\Lambda_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ nicht die Projektion von $\Lambda_i{}^j{}_k$ auf F_{n-1}, sondern „a priori" angegeben, so ist zwar die Fläche F_{n-1} ein $\mathfrak{R}^*_{n-1}$-Raum, doch (3. 4) wird im allgemeinen nicht gültig sein.

Auf Grund der Formel (3. 4) kann der folgende Satz leicht bewiesen werden (für den analogen Satz im $\mathfrak{R}_n$-Raum vgl. [2] Kap. II § 24).

Satz 4. *Ist eine Kurve $C: x^i = x^i(t)$ einer F_{n-1} autoparallel in Bezug auf die Übertragung $\overset{*}{D}$ des $\mathfrak{R}^*_n$-Raumes, d. h. ist $\overset{*}{D}\dot{x}^i = 0$, so ist C auch in Bezug auf die induzierte Übertragung Δ von F_{n-1} autoparallel, d. h. es ist $\Delta\dot{u}^\varrho = 0$.*

Ist aber C autoparallel in Bezug auf die induzierte Übertragung Δ von F_{n-1}, so ist C in Bezug auf die Übertragung $\overset{*}{D}$ des $\mathfrak{R}^*_n$-Raumes entweder auch autoparallel, oder es steht der „affine Krümmungsvektor" $\overset{*}{D}\dot{x}^i$ von C orthogonal auf die Tangentenvektoren von F_{n-1}.

Bemerkung. $\overset{*}{D}\dot{x}^i$ ist im allgemeinen nicht parameterinvariant. Da aber nach der Voraussetzung die Kurve C in Bezug auf die Übertragung Δ von F_{n-1} autoparallel ist, bestimmt die Relation $\Delta\dot{u}^\varrho = 0$ einen ausgezeichneten affinen Parameter t der Flächenübertragung, definiert durch die Übertragungsparameter $\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$. Es ist dann

$$x^i(t) = x^i(u^1(t), u^2(t), \ldots, u^{n-1}(t))$$

und $\overset{*}{D}\dot{x}^i$ kann als ein affiner Krümmungsvektor in Bezug auf die Flächenübertragung Δ betrachtet werden.

Beweis des Satzes 4. Es sei in der Formel (3. 4) der Flächenvektor ξ^ϱ eben der Tangentenvektor $\dot{u}^\varrho$ einer Flächenkurve $u^\alpha = u^\alpha(t)$.

Ist nun $\overset{*}{D}\dot{x}^i = 0$, so folgt aus (3. 4) wegen

$$\xi^i = \dot{x}^i = B^i_\varrho \dot{u}^\varrho, \quad \xi^\varrho = \dot{u}^\varrho \tag{3. 5}$$

unmittelbar $\Delta\dot{u}^\varrho = 0$, und das beweist die erste Hälfte des Satzes 4.

Nach einer Überschiebung der Formel (3. 4) mit $a_{\varrho\sigma}$ bekommt man auf Grund von (3. 3) und (3. 5)

$$g_{rj} B^j_\sigma \frac{\overset{*}{D}\dot{x}^r}{dt} = a_{\varrho\sigma} \frac{\Delta\dot{u}^\varrho}{dt},$$

woraus die zweite Hälte des Satzes 4 unmittelbar folgt.

In dem Riemannschen Raum $\mathfrak{R}_n$ kann man im Satz 4 statt autoparallelen Kurven die geodätischen Linien nehmen, da im $\mathfrak{R}_n$ diese Kurven mit den autoparallelen Kurven identisch sind.

Die zweite Hälfte des Satzes 4 drückt aus, daß falls die Kurve $u^\alpha = u^\alpha(t)$ in Bezug auf die Flächenübertragung $\varDelta$ autoparallel ist, so hat der normierte Krümmungsvektor

$$\eta^i = \varrho(t)\frac{\overset{*}{D}\dot{x}^i}{dt}, \qquad \frac{1}{\varrho(t)} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik}\frac{\overset{*}{D}\dot{x}^i}{dt}\frac{\overset{*}{D}\dot{x}^k}{dt}}$$

die Richtung des Flächennormalenvektors ν_i d. h. $\eta^i = \pm \nu^i$. ($\varrho(t)$ ist bloß ein Normierungsfaktor, und nicht die Krümmung der Kurve, falls t nicht die Bogenlänge ist.) Offenbar ist η^i unbestimmt, wenn $\overset{*}{D}\dot{x}^i = 0$, d. h. die Kurve eine autoparallele Linie des $\mathfrak{R}_n^*$-Raumes ist. In diesem Falle kann η^i beliebig gewählt werden. Wir wollen aber auch in diesem Falle η^i durch $\eta^i = \nu^i$ bestimmen. Die zweite Hälfte des Satzes 4 kann also auch in der folgenden wichtigen Form formuliert werden:

Satz 4*. *Ist die Kurve C autoparallel in Bezug auf die induzierte Flächenübertragung, so ist der normierte Krümmungsvektor η^i bis auf Vorzeichen mit dem Flächennormalenvektor ν^i identisch.*

Bemerkung. Der normierte Krümmungsvektor η^i ist in dem Riemannschen Raum der Hauptnormalenvektor der Kurve. Im $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ist das nicht immer richtig, nur dann, wenn das invariante Differential $\overset{*}{D}$ metrisch ist. In anderen Fällen steht nämlich $\overset{*}{D}\dot{x}^i$ auf $\dot{x}^i$ nicht immer orthogonal. Aus

$$l^2(t) \overset{\text{def}}{=} g_{ik}(x(t))\dot{x}^i\dot{x}^k$$

sieht man, daß l^2 von dem Tensor $\varDelta_{ijk}$ unabhängig ist und es folgt somit nach der Ableitung $\overset{*}{D}/dt$ wegen $\overset{*}{D}g_{ik} = 2\varDelta_{(ik)j}dx^j$

$$\frac{dl}{dt}l = \dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k\varDelta_{(ik)j} + g_{ik}\dot{x}^i\frac{\overset{*}{D}\dot{x}^k}{dt}$$

und das beweist unsere Behauptung. Längs gewisser einzelnen Kurven kann selbtsverständlich $\overset{*}{D}\dot{x}^i$ auf $\dot{x}^i$ orthogonal stehen, wenn nämlich längs einer Kurve $2\frac{dl}{dt}l = \dot{x}^i\dot{x}^k\frac{\overset{*}{D}g_{ik}}{dt}$ gültig ist. Z. B. ist das der Fall auf Grund von Satz 4 längs der autoparallelen Kurven der Hyperfläche. In diesem Falle ist t der durch $\varDelta\dot{u}^\varrho = 0$ bestimmte Parameter.

Wir wollen jetzt die autoparallelen Hyperflächen A_{n-1} untersuchen. Die Definition der autoparallelen Hyperflächen haben wir im Paragraphen 2 angegeben. Mit den Bezeichnungen $\overset{*}{D}$ und Δ der invarianten Differentiale bedeutet die Autoparallelität einer Hyperfläche, daß für eine Kurve $u^\alpha = u^\alpha(t)$ der Hyperfläche aus $\Delta\dot{u}^\varrho = 0$ stets die Relation $\overset{*}{D}(B^i_\varkappa \dot{u}^\varkappa) = 0$ folgen muß.

Offenbar sind auf Grund ihrer Definition die autoparallelen Hyperflächen A_{n-1} im Riemannschen Raum $\mathfrak{R}_n$ mit den geodätischen Hyperflächen identisch, da die geodätischen Linien im $\mathfrak{R}_n$-Raum zugleich autoparallele Kurven sind.

Wir geben jetzt die analytische Formulierung der A_{n-1}-Fläche von $\mathfrak{R}^*_n$.

Die Fläche A_{n-1} sei durch (3. 2) angegeben. Es sollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen bestimmt werden, die die Autoparallelität von (3. 2) sichern. Es besteht der folgende

Satz 5. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die durch* (3. 2) *bestimmte Hyperfläche autoparallel sei, ist die Existenz eines Vektors a_i, derart, daß $\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi$ in der Form*

$$\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi = a_{(i} \overset{*}{\nabla}_{k)} \varphi - \Omega_i{}^r{}_k \overset{*}{\nabla}_r \varphi, \qquad \overset{*}{\nabla}_k \varphi \overset{\text{def}}{=} \partial_k \varphi \tag{3.6}$$

darstellbar ist.

(Im Riemannschen Raum ist $\Omega_i{}^j{}_k \equiv 0$ und statt $\overset{*}{\nabla}_k$ steht ∇_k. Vgl. [1] Kap. VI, § 3, Formel (10)).

Beweis. Es sei $x^i = x^i(t)$ eine beliebige Kurve der Hyperfläche (3. 2). Man hat somit nach (3. 2):

$$\varphi(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)) = 0. \tag{3.7}$$

Nach zweimaliger Ableitung nach t wird:

$$(\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi) \xi^i \xi^k + \overset{*}{\nabla}_i \varphi \frac{\overset{*}{D}\xi^i}{dt} = 0, \quad \xi^i \overset{\text{def}}{=} \dot{x}^i = \frac{\overset{*}{D}x^i}{dt}. \tag{3.8}$$

Ist nun die Kurve $x^i = x^i(t)$ eine autoparallele Kurve des $\mathfrak{R}^*_n$-Raumes d. h. ist $\overset{*}{D}\xi^i = 0$, $\xi^i \equiv \dot{x}^i$, so folgt aus (3. 8):

$$(\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi) \xi^i \xi^k = 0, \quad \text{wenn} \quad (\overset{*}{\nabla}_k \varphi) \xi^i = 0 \tag{3.9}$$

ist. (Die zweite Relation von (3. 9) drückt aus, daß die Kurve auf der Hyperfläche liegt.)

Wir beweisen, daß die Relation (3. 9) für die autoparallelen Hyperflächen charakteristisch ist. Dazu müssen wir noch zeigen, daß aus (3. 9) für jede autoparallele Kurve der Fläche (3. 2) die Relation $\overset{*}{D}\dot{x}^i = 0$ folgt.

Aus (3. 7) folgt aber nach einer Ableitung nach t, daß $n_i = \overset{*}{\nabla}_i \varphi$ der (nicht unbedingt auf 1 normierte) Normalenvektor der Fläche (3. 2) ist. Ist nun die Kurve $x^i = x^i(t)$ eine autoparallele Kurve der Hyperfläche (3. 2), so ist auf Grund des Satzes 4: $\overset{*}{D}\xi^i = \lambda n^i$. Aus (3. 8) und (3. 9) folgt aber dann $\lambda n_i n^i = 0$, und da die quadratische Form $g_{ik} n^i n^k$ positiv definit ist, wird $\lambda \equiv 0$, d. h. $\overset{*}{D}\dot{x}^i = 0$; das beweist unsere Behauptung bezüglich der Relation (3. 9).

Die autoparallelen Hyperflächen könnte man also auch durch (3. 9) charakterisieren, wir zeigen aber, daß aus (3. 9) die Relation (3. 6) folgt. Vor allem bemerken wir, daß in (3. 9) nur der symmetrische Teil von $\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi$ d. h. $\overset{*}{\nabla}_{(k} \overset{*}{\nabla}_{i)} \varphi$ vorkommt. (3. 9) kann man also in der äquivalenten Form

$$(3.10) \qquad (\overset{*}{\nabla}_{(k} \overset{*}{\nabla}_{i)} \varphi)\xi^i \xi^k = 0, \quad \text{wenn} \quad (\overset{*}{\nabla}_k \varphi)\xi^k = 0$$

bestimmen. Ist aber (3. 10) eine Folge der Relation $(\overset{*}{\nabla}_k \varphi)\xi^k = 0$, wo ξ^k ein beliebiges Element einer $(n-1)$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit von Vektoren ist, so hat $\overset{*}{\nabla}_{(k} \overset{*}{\nabla}_{i)} \varphi$ nach einem Hilfssatz der Tensoralgebra (vgl. [1] S. 133) die Form

$$(3.11) \qquad \overset{*}{\nabla}_{(k} \overset{*}{\nabla}_{i)} \varphi = a_{(i} \overset{*}{\nabla}_{k)} \varphi, \quad \overset{*}{\nabla}_k \varphi \equiv \partial_k \varphi, \quad a_i = a_i(x).$$

(In unserem Falle ist ξ^i in der Gleichung (3. 10) ein beliebiges Element der Tangentenvektoren in einem Punkte unserer Hyperfläche.) $\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi$ kann aber immer in der Form

$$(3.12) \qquad \overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi \equiv \overset{*}{\nabla}_{(k} \overset{*}{\nabla}_{i)} \varphi + \overset{*}{\nabla}_{[k} \overset{*}{\nabla}_{i]} \varphi$$

bestimmt werden. Auf Grund der Identität $\Omega_i{}^j{}_k \equiv A_{[i}{}^j{}_{k]}$ folgt die Relation

$$(3.13) \qquad \overset{*}{\nabla}_{[k} \overset{*}{\nabla}_{i]} \varphi = -\Omega_i{}^r{}_k \overset{*}{\nabla}_r \varphi.$$

Aus der Formel (3. 12) folgt nun unmittelbar auf Grund von (3. 11) und (3. 13) die Formel (3. 6), w. z. b. w.

In dem Riemannschen Raum $\mathfrak{R}_n$ können die geodätischen d. h. die autoparallelen Hyperflächen unter den allgemeinen Hyperflächen durch folgende Eigenschaft charakterisiert werden:

E). *Hat die Hyperfläche F_{n-1} die Eigenschaft, daß sie alle Vektoren dauernd enthält, die längs einer Kurve C von F_{n-1} durch Parallelverschiebung entstanden sind, so ist diese Hyperfläche eine geodätische Hyperfläche.*

Im allgemeinen $\mathfrak{R}_n^*$-Raum hat eine autoparallele Hyperfläche A_{n-1} nicht immer die Eigenschaft E). Während also im $\mathfrak{R}_n$-Raum durch die Eigenschaft E) die geodätischen Hyperflächen charakterisiert werden können, können durch diese Eigenschaft im $\mathfrak{R}_n^*$-Raum die A_{n-1}-Flächen im allgemeinen nicht charakterisiert werden. Das kann durch eine einfache Rechnung bestätigt werden, indem wir beweisen, daß eine A_{n-1} nicht alle parallelverschobene Vektoren enthalten muß.

Die Gleichung (3. 2) soll die Gleichung einer A_{n-1} sein. θ^i soll einen Vektor von A_{n-1} und $x^i = x^i(t)$ eine Kurve C von A_{n-1} bedeuten. Analytisch bedeutet das die Gültigkeit der folgenden Relationen:

$$\text{(3. 14)} \qquad \text{(a)} \ \theta^i \overset{*}{\nabla}_i \varphi = 0, \quad \text{(b)} \ \frac{dx^i}{dt} \overset{*}{\nabla}_i \varphi = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_i \varphi \equiv \partial_i \varphi.$$

Durch Ableitung nach t von (3. 14) (a) bekommt man die Formel:

$$(\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi) \theta^i \frac{dx^k}{dt} + \overset{*}{\nabla}_i \varphi \frac{\overset{*}{D}\theta^i}{dt} = 0.$$

Ist nun der Vektor θ^i längs C parallel verschoben, d. h. ist $\frac{\overset{*}{D}\theta^i}{dt} = 0$, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\text{(3. 15)} \qquad (\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi) \theta^i \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Wäre die zur Eigenschaft E) analoge Eigenschaft im $\mathfrak{R}_n^*$-Raum gültig, dann müßte (3. 15) eine Identität sein, da die Fläche A_{n-1} d. h. $\varphi(x) = 0$ eine autoparallele Hyperfläche ist, und selbstverständlich die Relationen (3. 14) (a) und (b) für den Vektor θ^i bzw. $\frac{dx^i}{dt}$ gültig sind. Aus der charakteristichen Gleichung (3. 6) folgt aber nach (3. 14) (a) und (b):

$$(\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi) \theta^i \frac{dx^k}{dt} = -\Omega_i{}^r{}_k \theta^i \overset{*}{\nabla}_r \varphi \frac{dx^k}{dt}.$$

Die Gleichung (3. 15) könnte also nur dann gültig sein, wenn aus (3. 14) die Relation

$$\text{(3. 16)} \qquad \Omega_i{}^r{}_k \theta^i \overset{*}{\nabla}_r \varphi \frac{dx^k}{dt} = 0$$

gefolgert werden könnte. Offenbar ist aber (3. 16) nicht in allen $\mathfrak{R}_n^*$-Räumen für eine A_{n-1} gültig, wenn auch (3. 6) und (3. 14) erfüllt sind.

Der formale Grund dafür, daß im $\mathfrak{R}_n^*$-Raum die A_{n-1}-Flächen durch die Eigenschaft E) nicht charakterisiert werden können ist das folgende: die Definition der autoparallelen Hyperflächen bestimmt bloß $\overset{*}{\nabla}_{(k} \overset{*}{\nabla}_{i)} \varphi$. Im Riemannschen Raum ist aber $\nabla_{(k} \nabla_{i)} \varphi \equiv \nabla_k \nabla_i \varphi$.

§ 4. Über die Form des Krümmungstensors in den $\mathfrak{R}_n^*$-Räumen von skalarer Krümmung vierter Gattung

In diesem Paragraphen beweisen wir, daß falls der Krümmungstensor eine gewisse Form hat, der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ein Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung ist. Es besteht der

Satz 6. *Hinreichend dafür, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ein Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung sei, ist das Bestehen der Relationen:*

$$\frac{1}{2} R_i^{*\,r}{}_{jk} = R^* \gamma_{i[j}\delta^r_{k]} - \overset{*}{\nabla}_{[k}\Omega_{j]}{}^r{}_i + \Omega_i{}^t{}_{[j}\Omega_{k]}{}^r{}_t + \Omega_j{}^t{}_k\Omega_i{}^r{}_t \tag{4.1}$$

und

$$\gamma_{i[j}\overset{*}{\nabla}_{k]}R^* + R^*(\overset{*}{\nabla}_{[k}\gamma_{j]i} - \Omega_i{}^t{}_{[j}\gamma_{k]t} + \Omega_j{}^t{}_k\gamma_{it}) = 0, \quad \gamma_{[ij]} = 0. \tag{4.2}$$

Bemerkung. γ_{ij} spielt in der Formel (4.1) die Rolle des metrischen Grundtensors, wie das ein Vergleich von (0.2) und (4.1) zeigt. Die Formel (4.2) bestimmt den Zusammenhang von γ_{ij} mit $L_i{}^j{}_k$ bzw. mit $\Lambda_i{}^j{}_k$.

Beweis des Satzes 6. Es sei $\Phi(x)$ eine zunächst beliebige Funktion. Wir definieren durch den Ansatz

$$\overset{*}{\nabla}_j p_i = -R^*\Phi\gamma_{ij} - \Omega_i{}^r{}_j p_r \tag{4.3}$$

ein Vektorfeld, wenn γ_{ij} den in (4.1) und (4.2) vorkommenden symmetrischen Tensor bedeutet. Berechnen wir die höheren Ableitungen von p_i gemäß (4.3), so bekommt man wegen der Voraussetzungen (4.1) und (4.2) direkt:

$$\overset{*}{\nabla}_{[k}\overset{*}{\nabla}_{j]}p_i = -\frac{1}{2}R^*{}_i{}^r{}_{jk}p_r - \Omega_j{}^r{}_k\overset{*}{\nabla}_r p_i + R^*\gamma_{i[j}\delta^r_{k]}(p_r - \Phi_r), \tag{4.4}$$

also Übereinstimmung mit den Riccischen Identitäten, falls dabei $p_i = \Phi_i = \overset{*}{\nabla}_i\Phi$ gesetzt wird. Dies ist aber gerechtfertigt, denn aus (4.3) folgt auf Grund von (1.2) (b) und (0.3) sofort:

$$\partial_j p_i = -R^*\gamma_{ij}\Phi + (\Gamma_i{}^t{}_j + \Lambda_{(i}{}^t{}_{j)})p_t = \partial_i p_j. \tag{4.5}$$

Das Differentialgleichungssystem (4.3) ist also unter der Bedingung $d\Phi = p_i dx^i$ integrabel.

Wir müssen noch zeigen, daß im $\mathfrak{R}_n^*$-Raum, für den (4.1) und (4.2) gültig sind, wirklich in jedem Punkt $P_0(\overset{(0)}{x^i})$ eine autoparallele Hyperfläche bestimmt werden kann, deren Normalenvektor: p_i eine beliebig vorgegebene Richtung p_i^0 hat. Wir betrachten die allgemeinste Lösung $p_i = \overset{*}{\nabla}_i\Phi(x)$ des

Differentialgleichungssystems (4. 3) für die

$$\Phi(\underset{(0)}{x^i}) = 0, \quad p_i(\underset{(0)}{x^j}) = p_i^0 \tag{4. 6}$$

besteht. Die durch

$$\Phi(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0$$

bestimmte Hyperfläche ist eine autoparallele Hyperfläche. Auf Grund von (4. 3) wird nämlich nach $\overset{*}{\nabla}_k \Phi = p_k$

$$\overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_i \Phi = -R^{*} \gamma_{ij} \Phi - \Omega_i{}^r{}_j \overset{*}{\nabla}_r \Phi.$$

Längs der Fläche $\Phi(x) = 0$ ist nun

$$(\overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_i \Phi) \xi^i \xi^j = 0,$$

und das ist eben mit der charakteristischen Gleichung (3. 9) der autoparallelen Hyperflächen identisch.

Gewisse spezielle Typen der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung vierter Gattung können auch durch andere Relationen als (4. 1) und (4. 2) charakterisiert werden. Zu solchen Räumen gelangen wir dadurch, daß wir die Integrabilitätsbedingungen der Relationen (3. 6) bestimmen. Der folgende Satz ist gültig:

S a t z 7. *Hinreichend dafür, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung sei, ist das Bestehen der folgende Relation für den Krümmungstensor:*

$$\begin{aligned} R_i^{*}{}^r{}_{jk} = {} & \delta^r_{[k} \overset{*}{\nabla}_{j]} a_i - \overset{*}{\nabla}_{[k} a_{j]} \delta^r_i - \frac{1}{2} a_i a_{[j} \delta^r_{k]} + 2 \Omega_j{}^t{}_k \Omega_i{}^r{}_t - \\ & -2(\overset{*}{\nabla}_{[k} \Omega_{j]}{}^r{}_i - \Omega_i{}^t{}_{[j} \Omega_{k]}{}^r{}_t) + a_t(\Omega_i{}^t{}_{[j} \delta^r_{k]} - \Omega_j{}^t{}_k \delta^r_i). \end{aligned} \tag{4. 7}$$

B e w e i s. Betrachten wir das Differentialgleichungssystem

$$\overset{*}{\nabla}_j p_i = a_{(i} p_{j)} - \Omega_i{}^r{}_j p_r. \tag{4. 8}$$

Offenbar wird die allgemeinste Lösung $p_i(x)$ von (4. 8) der charakteristischen Gleichung (3. 6) der autoparallelen Hyperflächen genügen, falls $p_i = \overset{*}{\nabla}_i \Phi$ gesetzt werden kann. Durch die Anfangswerte (4. 6) wird die Lösung eine Hyperfläche $\Phi(x) = 0$ bestimmen, die den Punkt $P_0(\underset{(0)}{x^i})$ enthält, und deren Normalenvektor $p_i(x)$ ist.

In analoger Weise, wie beim Beweis von Satz 6 bekommen wir durch die Berechnung der höheren Ableitungen von p_i gemäß (4. 8) wegen der Voraussetzung (4. 7)

$$\overset{*}{\nabla}_{[k} \overset{*}{\nabla}_{j]} p_i = -\frac{1}{2} R_i^{*}{}^r{}_{jk} p_r - \Omega{}^r{}_k \overset{*}{\nabla}_r p_i,$$

die ebén die Riccischen Identitäten für den Vektor p_i sind. Da nach (4. 8) und auf Grund von (1. 2) (b) und (0. 3):

$$\partial_j p_i = a_{(i} p_{j)} + (\Gamma_i{}^r{}_j + \Lambda_{(i}{}^r{}_{j)}) p_r = \partial_i p_j$$

ist, ist (4. 8) mit $p_i = \overset{*}{\nabla}_i \Phi$ integrabel, und das beweist den Satz 7.

Wir wollen in einigen Spezialfällen die durch (4. 7) charakterisierten Räume näher untersuchen.

Im ersten Falle nehmen wir an, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ein Riemannscher Raum $\mathfrak{R}_n$ von skalarer Krümmung ist. Da jetzt $\Omega_i{}^t{}_k \equiv 0, \overset{*}{\nabla} = \nabla$ und $R^*_i{}^j{}_{kl} = R_i{}^j{}_{kl}$ bestehen, wird aus (4. 7)

$$R_i{}^r{}_{jk} = \delta^r_{[k} \left(\nabla_{j]} a_i - \frac{1}{2} a_{j]} a_i \right) - \nabla_{[k} a_{j]} \delta^r_i .$$

Setzen wir $r = k$, so wird nach einer Summation über k

$$R_i{}^k{}_{jk} = \frac{1}{2} (n-1) \left(\nabla_j a_i - \frac{1}{2} a_i a_j \right) - \nabla_{[i} a_{j]} .$$

Beachten wir jetzt, daß der Raum $\mathfrak{R}_n$ nach der Annahme ein Raum von skalarer Krümmung ist, d. h. (0. 2) besteht, so wird auf Grund von (0. 2)

$$R_i{}^k{}_{jk} = (n-1) R g_{ij} .$$

Aus den beiden letzten Formeln folgt

$$\frac{1}{2} (n-1) \left(\nabla_j a_i - \frac{1}{2} a_i a_j \right) - \nabla_{[i} a_{j]} = (n-1) R g_{ij} . \tag{4. 9}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung in i, j symmetrisch ist, muß der schiefsymmetrische Teil der linken Seite verschwinden. Daraus bekommt man leicht

$$\nabla_j a_i - \nabla_i a_j = 0,$$

und nach (1. 1)

$$\partial_j a_i - \partial_i a_j = 0. \tag{4. 10}$$

Der Vektor a_i ist also ein Gradientvektor. Aus (4. 9) bekommt man für den metrischen Grundtensor g_{ij} die Form

$$g_{ij} = \frac{1}{2} R^{-1} \left(\nabla_j a_i - \frac{1}{2} a_i a_j \right), \quad a_i \overset{\mathrm{def}}{=} \partial_i a . \tag{4. 11}$$

Die Bedingungen (4. 11) und (0. 2) sind offenbar Beschränkungen für den metrischen Grundtensor g_{ij}; für $n = 2$, d. h. für den zweidimensionalen Raum bedeutet schon (0. 2) keine weitere Einschränkung, da der Raum $\mathfrak{R}_2$ bekanntlich immer ein Raum von skalarer Krümmung ist.

Die Relation (4. 10) bekommt man auch für einen $\mathfrak{R}_n^*$-Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung, wenn die Relationen

$$(4.12) \qquad \text{(a)} \quad \Omega_i{}^t{}_k = 0, \qquad \text{(b)} \quad R^{*}_{[i}{}^{t}{}_{k]t} = 0$$

bestehen, d. h. die Übertragung symmetrisch ist, und $R^{*}_i{}^j{}_{kl}$ einen gewissermaßen zum Tensor $R_i{}^j{}_{kl}$ ähnlichen Charakter hat. (4. 12) (b) ist nämlich für den Krümmungstensor $R_i{}^j{}_{kl}$ eines Riemannschen Raumes immer gültig (vgl. [2] § 8, insbesondere die Gleichung (8. 14) und die nachfolgenden Zeilen). Aus (4. 7) wird jetzt:

$$(4.13) \qquad R^{*}_i{}^r{}_{jk} = \delta^r_{[k}\left(\overset{*}{\nabla}_{j]} a_i - \frac{1}{2} a_{j]} a_i\right) - \overset{*}{\nabla}_{[k} a_{j]} \delta^r_i .$$

Setzen wir nun in (4. 13) $r = k$, so wird nach einer Summation über k

$$(4.14) \qquad R^{*}_i{}^k{}_{jk} = \frac{1}{2}(n-1)\left(\overset{*}{\nabla}_j a_i - \frac{1}{2} a_i a_j\right) + \overset{*}{\nabla}_{[j} a_{i]} .$$

Aus (4. 12) (b) folgt nun leicht wegen (4. 14) die Relation $\overset{*}{\nabla}_{[i} a_{j]} = 0$, und das ergibt wegen (4. 12) (a) die gewünschte Relation (4. 10). Aus (4. 14) wird jetzt

$$R^{*}_{ij} \overset{\text{def}}{=} R^{*}_i{}^k{}_{jk} = \frac{1}{2}(n-1)\left(\overset{*}{\nabla}_j a_i - \frac{1}{2} a_i a_j\right), \quad a_i \overset{\text{def}}{=} \partial_i a ,$$

und somit kann der Krümmungstensor $R^{*}_i{}^r{}_{jk}$ nach (4. 13) wegen $\overset{*}{\nabla}_{[k} a_{j]} = 0$ in der Form

$$(4.15) \qquad R^{*}_i{}^r{}_{jk} = \frac{2}{n-1} R^{*}_{i[j} \delta^r_{k]}$$

angegeben werden. Wir bemerken noch, daß aus (4. 15) und (4. 14) die Formel (4. 13) folgt, wenn $\overset{*}{\nabla}_{[j} a_{i]} = 0$ ist.

Zuletzt wollen wir noch in diesem Paragraphen bemerken, daß *wenn $\mathfrak{R}_n^*$ ein Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung ist und $A_i{}^j{}_k = \Omega_i{}^j{}_k$ besteht, dann auch der durch g_{ik} bestimmte Riemannsche Raum $\mathfrak{R}_n$ ein Raum von skalarer Krümmung ist.* Diese Bemerkung folgt einfach aus der Tatsache, daß jetzt die autoparallelen Kurven von $\mathfrak{R}_n^*$ mit den geodätischen Linien von $\mathfrak{R}_n$ übereinstimmen. Auch aus (4. 1) -falls $R^{*}_i{}^j{}_{kl}$ die Form (4. 1) hat- kann das leicht verifiziert werden. Drücken wir nämlich von der Formel (1. 7) den Tensor $S_i{}^j{}_{kl}$ mit Hilfe der kovarianten Ableitung $\overset{*}{\nabla}_k$ aus, (vgl. die Formeln (1. 2)), so wird:

$$S_i{}^j{}_{kl} = 2\overset{*}{\nabla}_{[l} A_{|i|}{}^j{}_{k]} + 2A_i{}^t{}_{[l} A_{|t|}{}^j{}_{k]} + 2A_i{}^j{}_t \Omega_k{}^t{}_l ,$$

beachten wir dann noch (1. 12a), so folgt aus der Formel (4. 1):

$$\frac{1}{2} R^{*\,r}_{i\ jk} = R^{*} \gamma_{i[j} \delta^{r}_{k]} + \frac{1}{2} S_{i\ jk}^{\ r}.$$

Nach (1. 6) folgt dann nach Herunterziehen von r, daß

$$\frac{1}{2} R_{irjk} = R^{*} \gamma_{i[j} g_{k]r} \tag{4.16}$$

besteht. Beachten wir jetzt (1. 10), und setzen wir für R_{ijkl} den Ausdruck von (4. 16) ein, so erhält man nach einer Kontraktion von (1. 10) mit g^{jl} für γ_{ik} die Form; $\gamma_{ik} = c\, g_{ik}$ und das beweist nach (4. 16), daß $\mathfrak{R}_n$ ein Raum von skalarer Krümmung ist.

§ 5. Über die Krümmung der autoparallelen Unterräume bei den symmetrischen Übertragungen

In der Theorie der Riemannschen Räume spielen die zweidimensionalen, in einem Punkte P_0 geodätischen Flächen G_2 bei der Bestimmung der Raumkrümmung eine wichtige Rolle (vgl. [2] § 25), da die Krümmung von G_2 in P_0 eben die in der Richtung von G_2 in P_0 bestimmte Raumkrümmung definiert. In gewissen speziellen $\mathfrak{R}^{*}_{n}$-Räume kann für die in einem Punkte autoparallelen Flächen ein etwas schwächerer Satz bewiesen werden.

Nehmen wir an, daß *die durch die Übertragungsparameter* (0. 3) *bestimmte Übertragung symmetrisch ist,* d. h. $\Omega_{i\ k}^{\ j} = 0$ besteht. In einem Punkte P_0 können dann bezüglich dieser symmetrischen Übertragungsparameter $L_{i\ k}^{\ j}$ Normalkoordinaten eingeführt werden, in der Weise, daß P_0 der Anfangspunkt mit den Koordinaten $(0, \ldots, 0)$ sei (vgl. [4] § 22). Die Gleichung der autoparallelen Kurven durch P_0 hat dann die Form (vgl. [4] Formel (23. 1))

$$x^{i} = \xi^{i} t.$$

Wir betrachten nun in P_0 m linear unabhängige Vektoren ξ^{i}_{α} $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$.[7]) Diese Vektoren bestimmen einen in P_0 autoparallelen Unterraum $\overset{0}{A}_m$ mit den Gleichungen

$$x^{i} = \xi^{i}_{\alpha} u^{\alpha}. \tag{5.1}$$

Wir beweisen den folgenden

---

[7]) Die griechischen Indizes sollen in diesem Paragraphen die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ bedeuten.

S a t z 8. *Ist* $\Omega_i{}^j{}_k = 0$, *so ist der Krümmungstensor* $\overset{*}{R}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ *des durch* (5. 1) *bestimmten im Punkte* P_0 *autoparallelen Unterraumes* $\overset{0}{A}_m$ *die Projektion des Krümmungstensors* $\overset{*}{R}_{ijkl}$ *von* $\overset{*}{\mathfrak{R}}_n$, d. h.

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\big|_{u^\tau=0} = \overset{*}{R}_{ijkl}\,\xi^i_\alpha \xi^j_\beta \xi^k_\gamma \xi^l_\delta\big|_{x^t=0}. \tag{5.2}$$

B e w e i s. Bezeichnen wir mit

$$a_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} g_{ij}\,\xi^i_\alpha \xi^j_\beta$$

den metrischen Grundtensor von $\overset{0}{A}_m$, so werden die Festsetzungen von § 3 bezüglich der induzierten Flächenübertragung auch in diesem Falle gültig sein, da ja für die Flächenübertragungsparameter die Dimensionszahl keinen Einfluß hatte. Der einzige Unterschied ist jetzt, daß die Projektionsvektoren $B^i_\varrho = \xi^i_\varrho$ Konstanten sind, und somit bekommt man für die Projektion $\Gamma_i{}^j{}_k$

$$\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma = \Gamma_i{}^j{}_k\,\xi^i_\alpha \xi^\beta_j \xi^k_\gamma. \tag{5.3}$$

Nach (5. 3) werden also die Übertragungsparameter von $\overset{0}{A}_m$ die Form

$$\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma = L_i{}^j{}_k\,\xi^i_\alpha \xi^\beta_j \xi^k_\gamma \tag{5.4}$$

haben, wo nach (3. 3)

$$\xi^\varrho_t \overset{\text{def}}{=} a^{\varrho\sigma} g_{tj}\,\xi^j_\sigma \tag{5.5}$$

ist. Da wir jetzt Normalkoordinaten benützt haben ist nach (5. 4)

$$L_i{}^j{}_k(0, \ldots, 0) = 0, \quad \Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma(0, \ldots, 0) = 0,$$

und somit wird wegen

$$\overset{*}{R}_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} \overset{\text{def}}{=} 2\,\partial_{[\delta}\Phi_{|\alpha|}{}^\beta{}_{\gamma]} + 2\,\Phi_\alpha{}^\tau{}_{[\gamma}\Phi_{|\tau|}{}^\beta{}_{\delta]}$$

im Punkte $x^i = 0$ die Relation

$$\overset{*}{R}_\alpha{}^\varrho{}_{\gamma\delta}\big|_{u^\varkappa=0} = \overset{*}{R}_i{}^t{}_{kl}\,\xi^i_\alpha \xi^\varrho_t \xi^k_\gamma \xi^l_\delta\big|_{x^j=0}$$

bestehen. Beachten wir jetzt (5. 5), so wird nach einer Kontraktion mit $a_{\beta\varrho}$ unsere letzte Gleichung eben in die Formel (5. 2) übergehen, w. z. b. w.

Nach unserer Bedingung war im Satz 8 die Übertragung $\overset{*}{\nabla}_k$ symmetrisch, und somit ist die Übertragung in Bezug auf g_{ik} sicher nicht-metrisch. Wäre nämlich die Übertragung in Bezug auf g_{ik} metrisch, so würde neben (1. 9) auch noch (1. 13) bestehen, und dann wäre nach (1. 14) $\Lambda_{ijk} = 0$, der Raum $\overset{*}{\mathfrak{R}}_n$ wäre somit mit dem Riemannscher Raum $\mathfrak{R}_n$ identisch.

Aus dem Satz 8 ergibt sich leicht das folgende

K o r o l l a r. *Ist der Raum* $\overset{*}{\mathfrak{R}}_n$ *in einem Punkte* P_0 *ein Raum von skalarer Krümmung zweiter Gattung, so ist in* P_0 *auch jeder autoparallele* *m-dimensionale Unterraum ein $\mathfrak{R}_m^*$-Raum von skalarer Krümmung zweiter Gattung.*

Beweis. Nach unserer Annahme ist in P_0 die Relation (2.2) gültig. In P_0 hat aber der Krümmungstensor $R^*_{\alpha\beta\gamma\delta}$ von $\mathfrak{R}_m^*$ die Form (5.2). Setzen wir R^*_{ijkm} von (2.2) in (5.2) ein, so wird in P_0

$$R^*_{\alpha\beta\gamma\delta}=2R^* h_{\alpha[\gamma}a_{|\beta|\delta]}, \quad h_{\alpha\gamma}\overset{\text{def}}{=}\gamma_{ij}\xi^i_\alpha\xi^j_\gamma,$$

w. z. b. w.

§ 6. Beispiele für die $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung

Wir nehmen an, daß der Basisraum $\mathfrak{R}_n$ ein Riemannscher Raum von skalarer Krümmung ist, d. h. der Krümmungstensor $R_i{}^j{}_{kl}$ die Form (0.2) hat. Setzen wir

$$A_{ijk}=p_i g_{jk},$$

wo p_i einen kovarianten Vektor bedeutet und beachten, daß dann die kovariante Ableitung ∇_l von g_{ik} identisch verschwindet, so bekommen wir nach (1.7)

$$S_{ijkl}=g_{jk}(\nabla_l p_i-p_i p_l)-g_{jl}(\nabla_k p_i-p_i p_k). \tag{6.1}$$

Mit der Bezeichnung

$$\gamma_{ik}=p_i p_k-\nabla_k p_i+R g_{ik} \tag{6.2}$$

bekommt man auf Grund von (0.2)[8]) und (6.1) aus der Formel (1.6):

$$R^*_{ijkl}=2\gamma_{i[k}g_{|j|l]}; \tag{6.3}$$

der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ist also von skalarer Krümmung zweiter Gattung. Es ist $R^*\equiv 1$. Ist noch p_i ein Gradientenvektor, so ist nach (1.1) (b) und (6.2) der Tensor γ_{ik} in i, k symmetrisch.

Wählen wir aber

$$A_{ijk}=p_j g_{ik},$$

so bekommen wir aus (1.7)

$$S_{ijkl}=g_{ik}(\nabla_l p_j+p_i p_l)-g_{il}(\nabla_k p_j+p_j p_l). \tag{6.4}$$

Nehmen wir jetzt für γ_{ik} den Tensor

$$\gamma_{jl}=\nabla_l p_j+p_j p_l+R g_{jl},$$

so wird nach (0.2) und (6.4) aus der Formel (1.6)

$$R^*_{ijkl}=2g_{i[k}\gamma_{|j|l]}; \tag{6.5}$$

[8]) Selbstverständlich müssen wir in der Formel (0.2) den Index j herabziehen.

der Krümmungstensor hat also die Form (2. 2a) mit $R^*\equiv 1$. Die Übertragungsparameter $L_i{}^j{}_k$ sind in diesem Falle symmetrisch in i, k, und falls p_j ein Gradientenvektor ist, so ist auch γ_{ik} symmetrisch.

Um ein Beispiel für den Typ (2. 3) zu bekomen, nehmen wir

$$A_{ijk}=g_{ij}p_k, \quad p_k=\partial_k p.$$

Es ist jetzt:

$$R^{*}_i{}^j{}_{kl}\equiv R_i{}^j{}_{kl}.$$

Besteht noch (0. 2), so ist der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ein Raum von skalarer Krümmung dritter Gattung.

Um einen Typ (2. 1) für den Krümmungstensor zu bekommen, nehmen wir für A_{ijk} die Form:

$$A_{ijk}=p_j\gamma_{ik},$$

wo für γ_{ik} die Relationen

$$(6.6)\qquad p_j\nabla_l\gamma_{ik}=p_{lj}\gamma_{ik}-g_{rj}(\partial_l\Gamma_i{}^r{}_k+\Gamma_i{}^t{}_k\Gamma_t{}^r{}_l),\quad \nabla_l p_j+p_{lj}+p^t\gamma_{tl}p_j=\gamma_{jl}$$

bestehen. Offenbar bildet (6. 6) ein Differentialgleichungssystem für γ_{ik}, p_{ik}, g_{ik} und p_j. Es wird jetzt nach (1. 7):

$$(6.7)\qquad S_{ijkl}=2\gamma_{i[k}(\nabla_{l]}p_j+p_{l]j}+p^t\gamma_{|t|l]}p_j)-R_{ijkl}.$$

Auf Grund der zweiten Formel von (6. 6) wird die Formel (1. 6) wegen (0. 2) und (6. 7) die Relation

$$R^*_{ijkl}=2\gamma_{i[k}\gamma_{|j|l]}$$

ergeben; der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ist somit ein Raum von skalarer Krümmung erster Gattung.

Zum Schluß wollen wir noch darauf hinweisen, daß *ein zweidimensionaler $\mathfrak{R}_2^*$-Raum, falls die Übertragung $\overset{*}{\nabla}_k$ in Bezug auf den Grundtensor g_{ik} metrisch ist, immer als einen $\mathfrak{R}_2^*$-Raum von skalarer Krümmung von erster und zugleich von dritter Gattung betrachtet werden kann.*

Ist nämlich die Übertragung $\overset{*}{\nabla}_k$ in Bezug auf g_{ik} metrisch, so ist (1. 9) gültig, und der Krümmungstensor R^*_{ijkl} ist — wie das in § 1 bemerkt wurde — in i, j und selbstverständlich nach seiner Definitionsformel auch in k, l schiefsymmetrisch. Im zweidimensionalen Fall hat also R^*_{ijkl} im wesentlichen die einzige von Null verschiedene Komponente: $R^*{}_{1212}$. Die beiden Tensoren

$$(6.8)\qquad \Gamma_{ijkl}\overset{\text{def}}{=}2\gamma_{i[k}\gamma_{|j|l]}\quad\text{und}\quad G_{ijkl}\overset{\text{def}}{=}2g_{i[k}g_{|j|l]},$$

wo γ_{ik} einen beliebiger Tensor zweiter Stufe ist, haben aber dieselben schiefsymmetrischen Eigenschaften, wie R^*_{ijkl}. Sie haben also im $\mathfrak{R}_2^*$-Raum auch nur eine von Null verschiedene Komponente, nämlich Γ_{1212} bzw. G_{1212}. Γ_{ijkl} und G_{ijkl} stimmen also im $\mathfrak{R}_2^*$ bis auf einen skalaren Faktor mit $\mathfrak{R}_{ijkl}^*$ überein, d. h. es ist

$$R_{ijkl}^* = R_{(\Gamma)}^* \Gamma_{ijkl}, \quad R_{ijkl}^* = R_{(G)}^* G_{ijkl}.$$

Im allgemeinen ist natürlich $R_{(\Gamma)}^* \neq R_{(G)}^*$. Nach (6. 8) drückt das eben unsere Behauptung aus.

Für wertvolle Bemerkungen spreche ich den Herrn Professoren H. Rund und O. Varga meinen besten Dank aus.

Literatur

[1] A. Duschek - W. Mayer, *Lehrbuch der Differentialgeometrie.* II (Leipzig und Berlin, 1930).

[2] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry* (Princeton, 1949).

[3] L. P. Eisenhart, A unified theory of general relativity of gravitation and electromagnetism. I-IV, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **42** (1956), 249-251, 646—650, 878—881 und **43** (1957), 333—336.

[4] L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry* (New York, 1927).

[5] J. I. Horváth, Zur Geometrisierung des elektromagnetischen Feldes, *Il Nuovo Cimento,* **X, 7** (1958), 636—648.

[6] A. Moór, Untersuchungen in Räumen mit rekurrenter Krümmung, *Journal für die reine und angew. Math.*, **199** (1958), 91—99.

[7] J. A. Schouten, *Ricci calculus* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954).

[8] V. Hlavaty, The Holonomy Group I. The Curvature Tensor, *Journal of Math. and Mech.*, **8** (1959), 285—307.

(Eingegangen am 1. August 1959)

On the permutability condition of quantum mechanics

By C. FOIAȘ in Bucharest, L. GEHÉR and B. SZ.-NAGY in Szeged

1. Introduction

A problem of importance for quantum mechanics is to find all couples of symmetric operators P, Q on Hilbert space $\mathfrak{H}$, satisfying the permutability condition

$$\text{(c)} \qquad PQ - QP = -iI,$$

I denoting the identity operator. There arise mathematical difficulties in the very formulation of this problem. Indeed, there exists no couple of bounded operators satisfying this condition[1]) and so it is necessary to consider non bounded and hence non everywhere defined operators too, and then one may require that (c) *holds only on some linear subset* $\mathfrak{D}$ of $\mathfrak{H}$, i. e.

$$(PQ - QP)f = -if \quad \text{for} \quad f \in \mathfrak{D};$$

in order to avoid trivial cases (such as the case $\mathfrak{D} = (0)$) it is however reasonable to require that this subset be not too sparse in $\mathfrak{H}$.

The Schrödinger functional operators

$$p:\ f(x) \to \frac{1}{i}\frac{df(x)}{dx}, \qquad q:\ f(x) \to xf(x)$$

on $L_2(-\infty, \infty)$ yield in this sense a particular solution of (c). $\mathfrak{D}_p$ [2]) consists of those $f(x) \in L_2$ which are absolutely continuous and such that $f'(x) \in L_2$; $\mathfrak{D}_q$ consists of those $f(x) \in L_2$ for which also $xf(x) \in L_2$; both p and q are selfadjoint. The condition (c) holds on the whole set $\mathfrak{D}_{pq-qp} = \mathfrak{D}_{pq} \cap \mathfrak{D}_{qp}$, consisting of those $f(x) \in L_2$ which are absolutely continuous and such that $xf(x)$, $f'(x)$, $xf'(x)$ also belong to L_2. This set is dense in L_2; moreover, the restrictions of p and q to $\mathfrak{D}_{pq-qp}$ are essentially selfadjoint[3]). Further, there

1) See Wielandt [9].

2) The domain of definition of an operator T will be denoted by $\mathfrak{D}_T$.

3) An operator T is essentially selfadjoint if its closure is selfadjoint.

exists a linear subset of $\mathfrak{D}_{pq-qp}$, which is invariant with respect to p and q,[4]) and nevertheless large enough that the restrictions of $p, q,$ and p^2+q^2 to this set be all essentially selfadjoint: such is the set $\mathfrak{D}^\infty$ of all infinitely differentiable functions $f(x)$ for which $\lim_{|x|\to\infty} x^n f^{(m)}(x)=0$ $(m, n=0, 1, 2, \ldots)$. Both $\mathfrak{D}_{pq-qp}$ and $\mathfrak{D}^\infty$ are mapped onto themselves by the operators $p\pm iI, q\pm iI$.

These statements may be proved by more or less straightforward reasonings, using incidentally the fact that the Fourier transformation F maps both $\mathfrak{D}_{pq-qp}$ and $\mathfrak{D}^\infty$ onto themselves, and carries p in q over: $p=F^{-1}qF$. (Concerning the operator p^2+q^2 see RELLICH [5].)

Any couple of operators $\{P, Q\}$ on a Hilbert space of dimension $\aleph_0$, which is unitarily equivalent to the couple $\{p, q\}$, will be called a *Schrödinger couple*. Any Schrödinger couple, and also the *direct sums* $\{P, Q\}$ *of Schrödinger couples* $\{P_\alpha, Q_\alpha\}$[5]) are then equally solutions of the permutability relation (c) and inherit also the other properties mentioned above, of the couple $\{p, q\}$.

The problem is if we have obtained thus *all* the solutions of (c), at least if we suppose some suitable additional conditions implying in particular that the set $\mathfrak{D}$ on which (c) holds is not to sparse. This is the *unicity problem for the permutability condition* (c).

If we calculate with P and Q formally as if they were everywhere defined and bounded operators, we get from (c) the relations $PQ^n-Q^nP=-inQ^{n-1}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ and hence

$$P\varphi(Q)-\varphi(Q)P=-i\varphi'(Q)$$

for any entire function $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots$, in particular

$$Pe^{isQ}-e^{isQ}P=se^{isQ}, \quad \text{thus} \quad e^{-isQ}Pe^{isQ}=P+sI.$$

Calculating further we get $e^{-isQ}P^n e^{isQ}=(P+sI)^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ and hence

$$e^{-isQ}\psi(P)e^{isQ}=\psi(P+sI)$$

for any entire function $\psi(\lambda)=b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2+\cdots$, in particular

$$e^{-isQ}e^{itP}e^{isQ}=e^{it(P+sI)}=e^{its}e^{itP}.$$

---

[4]) A set $\mathfrak{D}$ contained in the domain of definition of an operator T will be called invariant with respect to T if $T\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{D}$.

[5]) If P_α and Q_α act on the Hilbert space $\mathfrak{H}_\alpha$ (of dimension $\aleph_0$) then P and Q act on $\mathfrak{H}=\sum_\alpha\oplus\mathfrak{H}_\alpha$ and we have, by definition, $P=\sum_\alpha\oplus P_\alpha$, $Q=\sum_\alpha\oplus Q_\alpha$.

Thus we are lead from (c), at least by a formal calculus which was indicated first by H. WEYL [8], to the permutability condition

$$\text{(C)} \qquad e^{itP}e^{isQ} = e^{its}e^{isQ}e^{itP} \qquad (-\infty < s, t < \infty).$$

Now, by the spectral theory, the exponential functions $U_t = e^{itP}$, $V_s = e^{isQ}$ $(-\infty < t, s < \infty)$ have a well defined meaning for any selfadjoint operators P, Q; $\{U_t\}$ and $\{V_s\}$ are namely the (uniquely determined) strongly continuous one parameter groups of unitary operators whose infinitesimal generators are iP and iQ, respectively, i. e.

$$iPf = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U_t - I)f, \qquad iQg = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(V_s - I)g,$$

the domains of P and Q consisting of those elements f and g for which the respective limit exists.

In particular, the Schrödinger functional operators p, q (on L_2) generate in this sense the following operators $u_t = e^{itp}$, $v_s = e^{isq}$:

$$u_t f(x) = f(x+t), \qquad v_s f(x) = e^{isx}f(x),$$

and these operators satisfy obviously the permutability condition (C). This implies that (C) is satisfied by all one parameter groups $\{U_t = e^{itP}\}$, $\{V_s = e^{isQ}\}$, which are generated by Schrödinger couples $\{P, Q\}$ or by the direct sums $\{P, Q\}$ of Schrödinger couples.

J. VON NEUMANN [4] proved in 1931 that these are the only solutions of (C):[6])

Theorem of von Neumann. *In order that a couple $\{P, Q\}$ of selfadjoint operators on Hilbert space $\mathfrak{H}$ be a Schrödinger couple or the direct sum of Schrödinger couples it is necessary and sufficient that the one parameter unitary groups $\{U_t = e^{itP}\}$, $\{V_s = e^{isQ}\}$ $(-\infty < s, t < \infty)$ satisfy the permutability condition* (C).

The problem has been left open under which circumstances the formal equivalence of the two permutability conditions becomes an exact equivalence. Thus the solution of the unicity problem for (C), by VON NEUMANN, did not yield automatically a solution of the unicity problem for (c).

The unicity problem for (c) was attacked later, in 1946, directly, by F. RELLICH [5]; his results were recently improved by J. DIXMIER [1].

Theorem of Rellich—Dixmier. *In order that a couple of closed symmetric operators P, Q on Hilbert space $\mathfrak{H}$ be a Schrödinger couple or the*

[6]) See also MACKEY [3], [4].

direct sum of Schrödinger couples it is necessary and sufficient that there exists in $\mathfrak{D}_P \cap \mathfrak{D}_Q$ *a dense linear set* $\mathfrak{D}$, *such that*

(i) $\mathfrak{D}$ *is invariant with respect to* P *and* Q,

(ii) *the restriction of* P^2+Q^2 *to* $\mathfrak{D}$ *is essentially selfadjoint,*[7]

(iii) *the permutability condition* (c) *holds on* $\mathfrak{D}$.

These conditions imply also that the restrictions of P *and* Q *to* $\mathfrak{D}$ *are essentially selfadjoint.*

2. The theorems of this paper

The aim of the present paper is to study in a direct way the exact connections between the permutability conditions (c) and (C). In fact, we shall consider the permutability condition (C) more generally, for any two one parameter semi-groups of contraction operators $\{S_s\}_{s\geqq 0}$, $\{T_t\}_{t\geqq 0}$, each depending (strongly) continuously on its parameter[8]); for sake of brevity, we shall call them simply *contraction semi-groups.* Our result is the following

Theorem I. *Let* $\{S_s\}_{s\geqq 0}$, $\{T_t\}_{t\geqq 0}$ *be two contraction semi-groups on Hilbert space* $\mathfrak{H}$, *and let* A *and* B *be their infinitesimal generators:*

$$A=\lim_{s\to+0}\frac{1}{s}(S_s-I), \qquad B=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}(T_t-I).^{9)}$$

In order that the permutability condition

$$(C') \qquad T_t S_s = e^{its} S_s T_t \qquad (s, t \geqq 0)$$

hold it is necessary that $\mathfrak{D}_{AB-BA}$ *be dense in* $\mathfrak{H}$, *invariant with respect to*

---

[7]) In Rellich's version it was supposed that P^2+Q^2 is "decomposable in $\mathfrak{D}$", i. e. that it has a selfadjoint closure $\int \lambda\, dE_\lambda$ such that, for any finite interval (a, b), the subspace $(E_b-E_a)\mathfrak{H}$ is contained in $\mathfrak{D}$.

[8]) I. e. we suppose that $S_{s_1}S_{s_2}=S_{s_1+s_2}$, $T_{t_1}T_{t_2}=T_{t_1+t_2}$ $(s_1, s_2, t_1, t_2 \geqq 0,\ S_0=T_0=I,$ $\|S_s\|\leqq 1,\ \|T_t\|\leqq 1,\ \lim_{s\to 0} S_s=I,\ \lim_{t\to 0} T_t=I$ (strongly).

[9]) It is known that, for any contraction semi-group $\{W_t\}_{t\geqq 0}$ on Hilbert space $\mathfrak{H}$, the *infinitesimal generator* $A=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}(W_t-I)$ is a closed and densely defined operator. The operators $(A-I)^{-1}$ and $W=(A+I)(A-I)^{-1}$ are everywhere defined and bounded, W is moreover a contraction operator having not the eigenvalue 1; W is called the *infinitesimal cogenerator* of the semi-group $\{W_t\}$. Conversely, any contraction operator W which has not the eigenvalue $\lambda=1$ is the infinitesimal cogenerator of exactly one contraction semi-group $\{W_t\}$. (See Sz.-Nagy—Foiaş [7].)

$(A-I)^{-1}$ *and* $(B-I)^{-1}$,[10]) *and the permutability condition*

(c′) $$AB-BA=-iI$$

hold on $\mathfrak{D}_{AB-BA}$.

Conversely, in order that (C′) *hold it is sufficient that* (c′) *hold on some linear subset* $\mathfrak{D}$ *of* $\mathfrak{D}_{AB-BA}$, *for which* $(B-I)(A-I)\mathfrak{D}$ *or* $(A-I)(B-I)\mathfrak{D}$ *is dense in* $\mathfrak{H}$.

From Theorem I and from VON NEUMANN's theorem follows readily:

Theorem II. *In order that a couple of selfadjoint operators P, Q on Hilbert space $\mathfrak{H}$ be a Schrödinger couple or the direct sum of Schrödinger couples it is necessary and sufficient that there exist a linear set $\mathfrak{D}$, contained in $\mathfrak{D}_{PQ-QP}$, such that*

(i) *$(P+iI)(Q+iI)\mathfrak{D}$ or $(Q+iI)(P+iI)\mathfrak{D}$ be dense in $\mathfrak{H}$,*

(ii) *the permutability condition* (c) *hold on $\mathfrak{D}$.*

These conditions are namely, by Theorem I, necessary and sufficient that the unitary operators $U_t=e^{itP}$, $V_s=e^{isQ}$ satisfy (C) for $s, t \geqq 0$ and hence (as a consequence of the relation $U_{-t}=U_t^{-1}$, $V_{-s}=V_s^{-1}$) for all real s, t, and so we have only to apply the theorem of VON NEUMANN.

Corollary. *In order that a couple of closed symmetric operators P, Q on Hilbert space $\mathfrak{H}$ be a Schrödinger couple or the direct sum of Schrödinger couples it is necessary and sufficient that there exist in $\mathfrak{D}_{PQ-QP}$ a dense linear set $\mathfrak{D}$, such that*

(i) $(P\pm iI)\mathfrak{D}\supseteqq\mathfrak{D}$, $(Q\pm iI)\mathfrak{D}\supseteqq\mathfrak{D}$,

(ii) *the permutability condition* (c) *holds on $\mathfrak{D}$.*

Indeed, (i) and the fact that $\mathfrak{D}$ is dense in $\mathfrak{H}$ imply that the closure $\tilde{P}$ of the restriction of P to $\mathfrak{D}$ has the deficiency indices (0, 0), thus $\tilde{P}$ is selfadjoint, and since P is a symmetric extension of the selfadjoint $\tilde{P}$, so is $\tilde{P}=P$, i. e. P is itself selfadjoint; analogously for Q. Further, (i) implies that $(P+iI)(Q+iI)\mathfrak{D}\supseteqq\mathfrak{D}$ and since $\mathfrak{D}$ is dense, we have only to apply Theorem II to get the "sufficiency part" of the Corollary. The "necessity part" follows from what has been said above on the Schrödinger functional operators.

It is interesting to compare these results with those of RELLICH and DIXMIER. Though each set of conditions stated characterizes Schrödinger

---

[10]) This implies that $\mathfrak{D}_{AB-BA}\subseteqq(A-I)\mathfrak{D}_{AB-BA}$, $\mathfrak{D}_{AB-BA}\subseteqq(B-I)\mathfrak{D}_{AB-BA}\subseteqq(B-I)(A-I)\mathfrak{D}_{AB-BA}$, thus $(B-I)(A-I)\mathfrak{D}_{AB-BA}$ and analogously $(A-I)(B-I)\mathfrak{D}_{AB-BA}$ are dense in $\mathfrak{H}$.

couples and their direct sums (and thus they are equivalent), they do not seem to imply simply each other.

The theorems of RELLICH, DIXMIER, and VON NEUMANN have been stated by their authors also in the more general case where operators $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_n, Q_n$ are concerned with the permutability relations $P_k Q_k - Q_k P_k = -iI\,(k=1, \ldots, n)$, all operators with different subscripts being permutable. It is possible to generalize our results in the same direction too; but since this generalization is straightforward we treat the case $n=1$ only.

The rest of this paper deals with the proof of Theorem I.

3. Summary of the functional calculus for contractions

We shall make use of the functional calculus for contraction operators, developed by SZ.-NAGY and FOIAŞ [7], in the particular case of contraction operators which have not the eigenvalue 1, i. e. which are the infinitesimal cogenerators of some contraction semi-group (cf. [9])).

Let W be a contraction operator having not the eigenvalue 1. Correspondingly, we consider the class $\mathcal{C}$ of those complex-valued functions $\varphi(\lambda)$ which are defined and continuous on the set

$$K = \{\lambda:\ |\lambda| \leqq 1,\ \lambda \neq 1\}$$

in the complex plane, and holomorphic and bounded in its interior

$$K^0 = \{\lambda:\ |\lambda| < 1\}.$$

Then, by this functional calculus, to each $\varphi(\lambda) \in \mathcal{C}$ there corresponds a bounded linear operator $\varphi(W)$ such that

(α) $\varphi(\lambda) = \sum_0^\infty c_n \lambda^n \rightarrow \varphi(W) = \sum_0^\infty c_n W^n$ if $\sum_0^\infty |c_n| < \infty$;

(β) $c_1\varphi_1(\lambda) + c_2\varphi_2(\lambda) \rightarrow c_1\varphi_1(W) + c_2\varphi_2(W)$;

(γ) $\varphi_1(\lambda)\,\varphi_2(\lambda) \rightarrow \varphi_1(W)\,\varphi_2(W)$;

(δ) $\|\varphi(W)\| \leqq \sup_{\lambda \in K} |\varphi(\lambda)|$;

(ε) if a sequence $\varphi_n(\lambda) \in \mathcal{C}$ converges on K boundedly to a limit $\varphi(\lambda) \in \mathcal{C}$, then $\varphi_n(W) \rightarrow \varphi(W)$ strongly.

In particular, the functions

(1) $$e_t(\lambda) = \exp\left(t\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right) \qquad (t \geqq 0)$$

belong to $\mathcal{C}$ (we have $|e_t(\lambda)|\leqq 1$ on K), and the corresponding operators

$$W_t = e_t(W) \tag{2}$$

form precisely the contraction semi-group $\{W_t\}_{t\geqq 0}$ whose infinitesimal cogenerator is equal to the given W.

Conversely, W may be derived from W_t by the direct formula

$$W = \lim_{t\to+0}\,[W_t-(1-t)I]\,[W_t-(1+t)I]^{-1} \quad \text{(strong limit)}. \tag{3}$$

Cf., for all these statements, the paper [7].[11])

4. Proof of the "necessity" part of Theorem I

Let $\{S_s\}_{s\geqq 0}$, $\{T_t\}_{t\geqq 0}$ be two contraction semi-groups satisfying the permutability condition (C'). Let A, B be their infinitesimal generators and S, T their infinitesimal cogenerators, respectively;

$$S=(A+I)(A-I)^{-1}, \qquad T=(B+I)(B-I)^{-1}.$$

Differentiating both sides of (C') with respect to t at $t=0$ (from the right) we obtain that $S_s\mathfrak{D}_B\subseteqq\mathfrak{D}_B$ $(s\geqq 0)$ and

$$BS_s f = S_s Bf + is\,S_s f \quad \text{for} \quad f\in\mathfrak{D}_B. \tag{4}$$

If we differentiate now with respect to s at $s=0$ (from the right) we obtain, using also the fact that B is closed, the relations

$$\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{D}_{AB}\subseteqq\mathfrak{D}_{BA} \tag{5}$$

and

$$BAf = ABf + if \quad \text{for} \quad f\in\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{D}_{AB}. \tag{6}$$

Since $\mathfrak{D}_{AB}=\mathfrak{D}_{AB}\cap\mathfrak{D}_B$ it results from (5):

$$\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{D}_{AB}=\mathfrak{D}_A\cap(\mathfrak{D}_{AB}\cap\mathfrak{D}_B)=\mathfrak{D}_B\cap(\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{D}_{AB})\subseteqq\mathfrak{D}_B\cap\mathfrak{D}_{BA}.$$

If we carry out the differentiations in the reverse order we obtain analogously

$$\mathfrak{D}_B\cap\mathfrak{D}_{BA}\subseteqq\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{D}_{AB}.$$

Consequently,

$$\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{D}_{AB}=\mathfrak{D}_B\cap\mathfrak{D}_{BA}=\mathfrak{D}^*. \tag{7}$$

---

[11]) The functional calculus, as developed in the cited paper, applies to a somewhat larger class of functions, but for our present needs it is sufficient to consider only the above class $\mathcal{C}$.

Since obviously

$$\mathfrak{D}^* \subseteqq \mathfrak{D}_{AB} \cap \mathfrak{D}_{BA} \subseteqq \mathfrak{D}_B \cap \mathfrak{D}_{BA} = \mathfrak{D}^*,$$

we have also

$$\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}_{AB} \cap \mathfrak{D}_{BA} = \mathfrak{D}_{AB-BA}. \tag{8}$$

Thus, by (6), the permutability condition (c') holds on $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}_{AB-BA}$.

We have still to prove that $\mathfrak{D}^*$ is dense in $\mathfrak{H}$ and invariant with respect to $(A-I)^{-1}$ and $(B-I)^{-1}$.

We need to this aim some relations connecting the infinitesimal generator of one semi-group and the infinitesimal cogenerator of the other.

First we observe that the operators $S_s^{(t)} = e^{its} S_s$ $(s \geqq 0)$ form, for any fixed $t \geqq 0$, a contraction semi-group whose infinitesimal generator is $A^{(t)} = A + itI$; denote its infinitesimal cogenerator by $S^{(t)}$. The permutability condition (C') implies

$$T_t S_s = S_s^{(t)} T_t,$$

hence

$$(S_s^{(t)} - aI)\, T_t(S_s - bI) = (S_s^{(t)} - bI)\, T_t(S_s - aI)$$

for any scalar a, b, thus

$$T_t(S_s - bI)(S_s - aI)^{-1} = (S_s^{(t)} - aI)^{-1}(S_s^{(t)} - bI)\, T_t$$

if $|a| > 1$, for then the inverse operators indicated exist, are bounded and everywhere defined. Put in particular $a = 1 + s$, $b = 1 - s$ $(s > 0)$; letting $s \to +0$ apply the limit formula (3). It results

$$T_t S = S^{(t)} T_t \qquad (t \geqq 0). \tag{10}$$

We wish to differentiate both sides of (10) with respect to t at $t = 0$, from the right. To this effect we write $S^{(t)}$, for $t > 0$, in the following form:

$$S^{(t)} = (A^{(t)} + I)(A^{(t)} - I)^{-1} = \left[\left(1 + \frac{it}{2}\right)(A + I) - \frac{it}{2}(A - I)\right]\left[\frac{it}{2}(A + I) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{it}{2}\right)(A - I)\right]^{-1} = \left[\left(1 + \frac{it}{2}\right)S - \frac{it}{2}I\right]\left[\frac{it}{2}S + \left(1 - \frac{it}{2}\right)I\right]^{-1} = h_t(S)$$

where $h_t(S)$ is the operator corresponding to the function

$$h_t(\lambda) = \frac{\left(1 + \frac{it}{2}\right)\lambda - \frac{it}{2}}{\frac{it}{2}\lambda + \left(1 - \frac{it}{2}\right)} \in \mathfrak{C}$$

The function

$$\frac{1}{t}[h_t(\lambda)-\lambda]=-\frac{i}{2}\frac{(\lambda-1)^2}{1+\frac{it}{2}(\lambda-1)}$$

also belongs to $\mathfrak{C}$ and when $t\to+0$ it converges on K boundedly to the function $-\frac{i}{2}(\lambda-1)^2\in\mathfrak{C}$. By the functional calculus we have therefore

$$\frac{1}{t}(S^{(t)}-S)=\frac{1}{t}[h_t(S)-S]\to-\frac{i}{2}(S-I)^2.$$

Using this result and the fact that B is closed we obtain from (10) by differentiating with respect to t at $t=+0$ that

$$S\mathfrak{D}_B\subseteqq\mathfrak{D}_B \tag{11}$$

and

$$BSf=SBf-\frac{i}{2}(S-I)^2f \quad \text{for} \quad f\in\mathfrak{D}_B. \tag{12}$$

These are the relations we need, between the infinitesimal generator B of $\{T_t\}$ and the infinitesimal cogenerator S of $\{S_s\}$.

Let $f\in\mathfrak{D}_B$, $g=(S-I)f$. From (11) and (12) we deduce

$$Bg=B(S-I)f=SBf-Bf-\frac{i}{2}(S-I)^2f=(S-I)\left[Bf-\frac{i}{2}(S-I)f\right].$$

Since, by the definition of S,

$$S-I=2(A-I)^{-1}, \tag{13}$$

we see that both g and Bg belong to $\mathfrak{D}_{A-I}=\mathfrak{D}_A$, i.e. $g\in\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{D}_{AB}$. This proves that

$$(A-I)^{-1}\mathfrak{D}_B\subseteqq\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{D}_{AB}. \tag{14}$$

On the other hand we have

$$\mathfrak{D}_B\cap\mathfrak{D}_{BA}\subseteqq(A-I)^{-1}\mathfrak{D}_B \tag{15}$$

since $f\in\mathfrak{D}_B\cap\mathfrak{D}_{BA}$ implies $(A-I)f=Af-f\in\mathfrak{D}_B$.

Comparing (14), (15), and (7), we obtain

$$\mathfrak{D}^*=(A-I)^{-1}\mathfrak{D}_B. \tag{16}$$

If we interchange the rôle of the two semi-groups in the above reasoning we obtain the analogous relation

$$\mathfrak{D}^*=(B-I)^{-1}\mathfrak{D}_A. \tag{17}$$

Since $\mathfrak{D}^* \subseteqq \mathfrak{D}_B$ and $\mathfrak{D}^* \subseteqq \mathfrak{D}_A$, (16) and (17) imply that $\mathfrak{D}^*$ is invariant with respect to $(A-I)^{-1}$ and $(B-I)^{-1}$.

Finally, $\mathfrak{D}^*$ is dense in $\mathfrak{H}$. In the contrary case there would exist $g \neq 0$ in $\mathfrak{H}$, orthogonal to $\mathfrak{D}^* = (A-I)^{-1}\mathfrak{D}_B = (S-I)\mathfrak{D}_B$. Then $(S^*-I)g$ would be orthogonal to $\mathfrak{D}_B$, thus $(S^*-I)g=0$ since $\mathfrak{D}_B$ is dense in $\mathfrak{H}$. But $S^*g=g$ implies $Sg=g$,[12]) in contradiction to the fact that S has not the eigenvalue 1.

Thus the "necessity" part of Theorem I is proved.

5. Proof of the "sufficiency" part of Theorem I

We suppose now that the infinitesimal generators A, B of the contraction semi-groups $\{S_s\}$, $\{T_t\}$ satisfy the permutability condition (c′) on a linear subset $\mathfrak{D}$ of $\mathfrak{D}_{AB-BA}$, such that $(B-I)(A-I)\mathfrak{D}$ is dense in $\mathfrak{H}$. The case when $(A-I)(B-I)\mathfrak{D}$ is dense in $\mathfrak{H}$ may be treated in an analogous way. Since $A-I$ and $B-I$ have continuous inverses, both conditions imply that $\mathfrak{D}$ itself is also dense in $\mathfrak{H}$.

By (c′) we have for any $f \in \mathfrak{D}$

$$(A \mp I)Bf = B(A \mp I)f - if.$$

Putting $g=(A-I)f$ and remembering of the definition of the infinitesimal cogenerator S we obtain hence that

$$S(Bg-if) = BSg - if, \qquad SBg - BSg = i(S-I)f,$$

i. e.

$$(SB-BS)g = \frac{i}{2}(S-I)^2 g \tag{18}$$

since, by (13), $f=(A-I)^{-1}g = \frac{1}{2}(S-I)g$. Thus (18) has been proved for the elements g of $(A-I)\mathfrak{D}$.

We shall now prove that (18) holds for *all* elements of $\mathfrak{D}_B$. Let g be such an element. Since $(B-I)(A-I)\mathfrak{D}$ is dense in $\mathfrak{H}$, there exists a sequence $\{f_n\} \in \mathfrak{D}$ such that, putting $g_n = (A-I)f_n$, we have

$$(B-I)g_n \to (B-I)g.$$

Since $B-I$ has a continuous inverse this implies $g_n \to g$ and consequently $Bg_n = (B-I)g_n + g_n \to (B-I)g + g = Bg$. Now (18) holds for $g_n \in (A-I)\mathfrak{D}$, thus, by the fact that S is continuous and B is closed, it results that $Sg \in \mathfrak{D}_B$ and (18) holds also for $g \in \mathfrak{D}_B$.

---

[12]) A contraction operator and its adjoint have the same invariant elements, cf. [6] p. 402.

We have thus proved that $\mathfrak{D}_B$ is invariant with respect to S and (18) holds for the elements g of $\mathfrak{D}_B$. This implies by induction

$$(S^n B - B S^n) g = \frac{i}{2} n S^{n-1} (S - I)^2 g \quad (g \in \mathfrak{D}_B;\ n = 0, 1, \ldots).$$

Using again the fact that B is closed we obtain hence

$$(19) \qquad [\varphi(S) B - B \varphi(S)] g = \frac{i}{2} (S - I)^2 \varphi'(S) g \qquad (g \in \mathfrak{D}_B)$$

for any function $\varphi(\lambda) = \sum_0^\infty c_n \lambda^n$ and its derivative $\varphi'(\lambda) = \sum_1^\infty c_n n \lambda^{n-1}$ if the convergence radius of these power series is greater than 1.

This is the case in particular for the function $e_{s,r}(\lambda) = e_s(r\lambda)$ ($s \geqq 0$, $0 < r < 1$), where $e_s(\lambda) = \exp\left(s \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\right)$ (see (1)). Thus if we introduce also the function

$$\tilde{e}_{s,r}(\lambda) = \frac{1}{2} (\lambda - 1)^2 e'_{s,r}(\lambda) = -\frac{s}{r} \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda - \frac{1}{r}} \right)^2 e_{s,r}(\lambda) \in \mathfrak{C}$$

we have

$$(20) \qquad [e_{s,r}(S) B - B e_{s,r}(S)] g = i \tilde{e}_{s,r}(S) g \quad \text{for} \quad g \in \mathfrak{D}_B.$$

On K we have $|e_{s,r}(\lambda)| \leqq 1$ and $|\tilde{e}_{s,r}(\lambda)| \leqq \frac{s}{r}$, and when $r \to 1-0$ $e_{s,r}(\lambda)$ converges on K to $e_s(\lambda)$ and $\tilde{e}_{s,r}(\lambda)$ converges to $-s e_s(\lambda)$. By the functional calculus, $e_{s,r}(S)$ converges therefore to $e_s(S) = S_s$, and $\tilde{e}_{s,r}(S)$ to $-s S_s$. So it results from (20), again by the fact that B is closed, that

$$(21) \qquad S_s \mathfrak{D}_B \subseteqq \mathfrak{D}_B$$

and

$$(S_s B - B S_s) g = -is S_s g$$

i. e.

$$(22) \qquad S_s B g = (B - isI) S_s g \quad \text{for} \quad g \in \mathfrak{D}_B.$$

For any fixed value of s, $B^{(s)} = B - isI$ is evidently the infinitesimal generator of the contraction semi-group $\{T_t^{(s)} = e^{-its} T_t\}_{t \geqq 0}$. Let $T^{(s)}$ be the corresponding infinitesimal cogenerator, i. e. $T^{(s)} = (B^{(s)} + I)(B^{(s)} - I)^{-1}$. From (22) we get

$$S_s (B \mp I) g = (B^{(s)} \mp I) S_s g,$$

whence we see that

$$T^{(s)}[S_s(B-I)g]=S_s(B+I)g \quad \text{for any} \quad g\in\mathfrak{D}_B$$

i. e.

$$T^{(s)}S_sh=S_sTh$$

for any

$$h=(B-I)g\in(B-I)\mathfrak{D}_B=\mathfrak{H}.$$

Thus

$$T^{(s)}S_s=S_sT.$$

From this equation we deduce

$$\varphi(T^{(s)})S_s=S_s\varphi(T)$$

first for the functions $\varphi(\lambda)=\lambda^n$ $(n=0,1,2,\ldots)$, then for any function $\varphi(\lambda)$ which is holomorphic in a domain containing the closed unit disc in its interior, finally, reasoning again through the auxiliary functions $\varphi_r(\lambda)=\varphi(r\lambda)$ $(0<r<1)$, for any function $\varphi(\lambda)\in\mathfrak{C}$. If we take in particular $\varphi(\lambda)=e_t(\lambda)$ $(t\geqq 0)$ we obtain

$$T_t^{(s)}S_s=S_sT_t,$$

and this proves (C′).

Thus Theorem I is fully proved.

References

[1] Dixmier, J., Sur la relation $i(PQ-QP)=1$, *Compositio Math.*, **13** (1958), 263—270.
[2] Mackey, G. W., On a theorem of Stone and von Neumann, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 313—326.
[3] Mackey, G. W., Unitary representations of group extensions. I, *Acta Math.*, **99** (1958), 265—311.
[4] Neumann, J. von, Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, *Math. Annalen*, **104** (1931), 570—578.
[5] Rellich, F., Der Eindeutigkeitssatz für die Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen, *Göttinger Nachr.*, **1946**, 107–116.
[6] Riesz, F., and Sz.-Nagy, B., *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Budapest, 1952).
[7] Sz.-Nagy, B., and Foiaş, C., Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 26—46.
[8] Weyl, H., Quantenmechanik und Gruppentheorie, *Zeitschrift f. Physik*, **46** (1928), 1—47.
[9] Wielandt, H., Über die Unbeschränktheit der Schrödingerschen Operatoren der Quantenmechanik, *Math. Annalen*, **121** (1949), 21.

(Received July 1, 1959)

Sur l'ensemble des points de l'asymétrie approximative

Par MARIE KULBACKA à Łódź (Pologne)

Etant donné une fonction $f(x)$ de variable réelle, désignons par $E_{a,\varepsilon}$ (a réel, ε positif) l'ensemble des points x pour lesquels

$$|f(x)-a|<\varepsilon.$$

Nous appelons le nombre fini a une *valeur limite approximative de droite* de la fonction $f(x)$ au point x_0, si pour chaque $\varepsilon>0$

$$E_{a,\varepsilon}\cap(x_0,\infty)$$

possède au point x_0 la densité supérieure (éventuellement densité extérieure supérieure) positive.

En remplaçant la condition $x_0<x<\infty$ par la condition $-\infty<x<x_0$ nous obtenons la définition d'une *valeur limite approximative de gauche.*

Les symboles $D_{x_0}E$, $\overline{D}_{x_0}E$, $\underline{D}_{x_0}E$ appliqués dans le présent travail signifieront respectivement: la densité, la densité supérieure et la densité inférieure de l'ensemble E au point x_0. Au cas où l'ensemble E est non-mesurable, il faut comprendre ces symboles comme les densités extérieures correspondantes.

J'indiquerai par $W^+(x_0)$ et $W^-(x_0)$, selon les cas, l'ensemble de toutes les valeurs limites approximatives de droite ou de gauche de la fonction $f(x)$ au point x_0.

Il est facile d'observer que les *limites approximatives supérieures* et *inférieures* (à condition qu'elles soient finies) sont des *valeurs limites approximatives* et que de plus

$$\overline{\lim_{x\to x_0+}}\,\text{appr}\, f(x)=\sup W^+(x_0),\qquad \underline{\lim_{x\to x_0+}}\,\text{appr}\, f(x)=\inf W^+(x_0),$$

$$\overline{\lim_{x\to x_0-}}\,\text{appr}\, f(x)=\sup W^-(x_0),\qquad \underline{\lim_{x\to x_0-}}\,\text{appr}\, f(x)=\inf W^-(x_0).$$

Par conséquent, si $f(x)$ possède au point x_0 une limite approximative de droite ou de gauche, alors $W^+(x_0)$ ou $W^-(x_0)$, selon les cas, est composé d'un seul point (d'une façon analogue comme pour les ensembles des valeurs limites ordinaires).

Un théorème de YOUNG[1]) affirme que, pour toute fonction $f(x)$, l'ensemble des points x_0 pour lesquels l'ensemble des valeurs limites de droite n'est pas identique à l'ensemble des valeurs limites de gauche est tout au plus dénombrable. Vu ce théorème se pose la question qu'est-ce que l'on peut dire de l'ensemble des points x_0 pour lesquels $W^+(x_0) \neq W^-(x_0)$.[2]) La réponse nous est donnée par le suivant

Théorème. *L'ensemble N de tous les x_0 pour lesquels $W^+(x_0) \neq W^-(x_0)$, est de la 1ière catégorie.*[3])

---

1) W. H. YOUNG, La symétrie de structure des fonctions de variables réelles, *Bulletin des sciences math.*, (2) **52** (1928), 265—280.

2) Mlle L. BELOWSKA a prouvé que l'ensemble des x_0 pour lesquels $\overline{\lim_{x\to x_0+}}\operatorname{appr} f(x) \neq \overline{\lim_{x\to x_0-}}\operatorname{appr} f(x)$ peut être de la puissance du continu et Mlle H. MATYSIAK a démontré que cet ensemble est de la 1ière catégorie. C'est une partie de l'ensemble $\{x: W^+(x) \neq W^-(x)\}$.

3) *(Note ajoutée le 1 mars 1960.)* Par analogie on peut prouver que N est de mesure nulle (remarque de M. ÁKOS CSÁSZÁR). Voici une démonstration de ce fait (que j'ai trouvée indépendamment, après avoir pris connaissance de la remarque de M. CSÁSZÁR). Les notations employées ici ont le même sens que dans la démonstration du théorème que N est de la 1ière catégorie. On sait de la démonstration du théorème plus haut que $L = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$ et que, si $x_0 \in F_m$, on a

$$\text{(a)} \qquad D_{x_0}[E_{y_0, \frac{1}{m}} \cap (-\infty, x_0)] = 0, \quad \overline{D}_{x_0}[E_{y_0, \varepsilon} \cap (x_0, \infty)] > 0 \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Désignons par F_{mn} l'ensemble des $x_0 \in F_m$ pour lesquels

$$\text{(b)} \qquad y_0 \in \left(\frac{n}{4m}, \frac{n+1}{4m}\right].$$

Il est évident que $F_m = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} F_{mn}$ et par conséquent $L = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} F_{mn}$.

Prenons en considération l'ensemble F_{mn} où m et n sont fixés (mais arbitraires). En vertu de (a) et (b) on a pour tout $x_0 \in F_{mn}$

$$D_{x_0}\left\{x: \frac{n}{4m} < f(x) < \frac{n+2}{4m}\right\} \cap (-\infty, x_0) = 0; \quad \overline{D}_{x_0}\left\{x: \frac{n}{4m} < f(x) < \frac{n+2}{4m}\right\} \cap (x_0, \infty) > 0.$$

Mais ces densités sont les dérivés de DINI de la fonction

$$\Gamma(\xi) = \operatorname{sign} \xi \left| \left\{x: \frac{n}{4m} < f(x) < \frac{n+2}{4m}\right\} \cap (0, \xi) \right|$$

qui est presque partout dérivable; il en résulte que F_{mn} est de mesure nulle et par conséquent L est de mesure nulle. De la même façon on peut prouver que Z est de mesure nulle. $N = L \cup Z$ est alors aussi de mesure nulle, ce qu'il fallait démontrer.

D é m o n s t r a t i o n. En premier lieu on prouve que les ensembles $W^+(x_0)$ et $W^-(x_0)$ sont fermés.

Soit y_0 un point d'accumulation de l'ensemble $W^+(x_0)$ et soit ε un nombre positif arbitraire. Soit y_1 un point de $W^+(x_0)$ appartenant à l'intervalle $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$. Prenons $\varepsilon_1>0$ tel que

$$(y_1-\varepsilon_1, y_1+\varepsilon_1)\subset(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon).$$

Vu que $y_1\in W^+(x_0)$, on a

$$\overline{D}_{x_0}[E_{y_1,\varepsilon_1}\cap(x_0,\infty)]>0,$$

et puisque

$$E_{y_1,\varepsilon_1}\subset E_{y_0,\varepsilon}$$

on a à plus forte raison

$$\overline{D}_{x_0}[E_{y_0,\varepsilon}\cap(x_0,\infty)]>0.$$

Cela étant valable pour tout $\varepsilon>0$, il en résulte que

$$y_0\in W^+(x_0)$$

ce qui prouve que l'ensemble $W^+(x_0)$ est fermé. On prouve de la même façon que l'ensemble $W^-(x_0)$ est fermé.

Soit L l'ensemble des points x_0 pour lesquels l'ensemble $W^+(x_0)\setminus W^-(x_0)$ n'est pas vide. Démontrons que l'ensemble L est de la 1ière catégorie.

Faisons correspondre à chaque point $x_0\in L$ un nombre $y_0=y(x_0)\in$ $\in W^+(x_0)\setminus W^-(x_0)$. Vu que $y_0\overline{\in} W^-(x_0)$, il existe un nombre naturel $m_0=m(x_0)$ tel que

$$D_{x_0}[E_{y_0,\frac{1}{m_0}}\cap(-\infty,x_0)]=0. \tag{1}$$

On peut admettre, puisque $W^-(x_0)$ est fermé, que le nombre $m_0=m(x_0)$ est choisi tellement grand que l'intervalle $\left(y_0-\frac{1}{m_0}, y_0+\frac{1}{m_0}\right)$ ne contient aucun point de $W^-(x_0)$.

Ainsi à chaque point $x_0\in L$ on a fait correspondre l'intervalle $\left(y_0-\frac{1}{m_0}, y_0+\frac{1}{m_0}\right)$ où $y_0=y(x_0)$ et $m_0=m(x_0)$. Désignons par F_m l'ensemble des points x_0 de l'ensemble L pour lesquels $m(x_0)$ a la valeur fixée m. Il est évident que

$$L=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m.$$

Vu que $y_0\in W^+(x_0)$, l'ensemble

$$E_{y_0,\frac{1}{2m}}\cap(x_0,\infty) \tag{2}$$

possède au point x_0 la densité supérieure positive. Désignons par F_{mk} l'ensemble des points x_0 de F_m pour lesquels

$$(3) \qquad \frac{1}{k+1} < \overline{D}_{x_0}[E_{y_0, \frac{1}{2m}} \cap (x_0, \infty)] \leqq \frac{1}{k} \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Il est évident que

$$F_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{mk}.$$

En vertu de (1) il existe un entourage gauche (ξ, x_0) du point x_0 tel que pour les points x de cet entourage on a

$$(4) \qquad \frac{|E_{y_0, \frac{1}{m}} \cap (x, x_0)|}{x_0 - x} < \frac{1}{2k}.$$

Divisons les ensembles F_{mk} en des ensembles F_{mkr} tels que (4) a lieu pour tous les points de l'intervalle $\left(x_0 - \frac{1}{r}, x_0\right)$. De même que précédemment, on a

$$F_{mk} = \bigcup_{r=1}^{\infty} F_{mkr}.$$

Divisons maintenant l'axe des y en des intervalles demi-ouverts de longueur $\frac{1}{10m}$, en posant

$$I_p = \left(\frac{p}{10m}, \frac{p+1}{10m}\right],$$

où p passe par toutes les valeurs entières. Désignons par F_{mkrp} l'ensemble des $x_0 \in F_{mkr}$ pour lesquels $y_0 \in I_p$. Comme

$$F_{mkr} = \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} F_{mkrp},$$

on aura

$$L = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} F_{mkrp}.$$

Je dis que les ensembles F_{mkrp} sont non-denses. Supposons qu'un des F_{mkrp} ne soit pas non-dense, c'est-à-dire qu'il soit dense sur un certain intervalle (a, b). On peut admettre que la longueur de cet intervalle soit plus petite que $\frac{1}{r}$.

Soit $x_0 \in F_{mkrp} \cap (a, b)$. Vu que la densité supérieure de l'ensemble (2) est en vertu de (3), plus grande que $\frac{1}{2k}$, il existe un intervalle (x_0, x), où $x > x_0$ et $x \in (a, b)$, sur lequel la densité moyenne de l'ensemble (2) est plus grande que $\frac{1}{2k}$, c'est-à-dire

$$\frac{|E_{y_0, \frac{1}{2m}} \cap (x_0, x)|}{x - x_0} > \frac{1}{2k}.$$

Puisque la fonction

$$\Gamma(\xi) = \frac{|E_{y_0, \frac{1}{2m}} \cap (x_0, \xi)|}{\xi - x_0}$$

est une fonction continue de la variable ξ pour $\xi > x_0$ et que F_{mkrp} est dense sur l'intervalle (a, b), il existe un point $x_1 \in F_{mkrp} \cap (a, b)$ tel que $\Gamma(x_1) > \frac{1}{2k}$, c'est-à-dire que

$$\frac{|E_{y_0, \frac{1}{2m}} \cap (x_0, x_1)|}{x_1 - x_0} > \frac{1}{2k}. \tag{5}$$

Or nous avons supposé $b - a < \frac{1}{r}$, donc $x_1 - x_0 < \frac{1}{r}$; vu que $x_1 \in F_{mkrp}$ et en vertu de (4) nous avons donc

$$\frac{|E_{y_1, \frac{1}{m}} \cap (x_0, x_1)|}{x_1 - x_0} < \frac{1}{2k} \tag{6}$$

où y_1 est un nombre de l'ensemble $W^+(x_1) \setminus W^-(x_1)$ qui correspond au point x_1. Ensuite puisque x_0 et x_1 appartiennent à F_{mkrp} on a $y_0, y_1 \in I_p$, donc $|y_1 - y_0| < \frac{1}{10m}$, d'où il résulte que

$$\left(y_0 - \frac{1}{2m}, y_0 + \frac{1}{2m}\right) \subset \left(y_1 - \frac{1}{m}, y_1 + \frac{1}{m}\right).$$

On en tire que

$$E_{y_0, \frac{1}{2m}} \subset E_{y_1, \frac{1}{m}}$$

et cela implique que les inégalités (5) et (6) sont contradictoires.

D'après ce qui précède chacun des ensembles F_{mkrp} est non-dense et par conséquent l'ensemble L est de la 1ière catégorie.

De la même façon on peut prouver que l'ensemble Z de tous ces nombres réels x, pour lesquels $W^{-}(x) \setminus W^{+}(x)$ n'est pas vide, est de la 1ière catégorie. Vu que $N = L \cup Z$, N est aussi de la 1ière catégorie, ce qu'il fallait démontrer.

Faisons pour terminer une observation, à savoir que pour les valeurs limites on connait le théorème suivant:

„Pour toute fonction $f(x)$ à valeurs réelles l'ensemble des points x pour lesquels l'ensemble des valeurs limites du côté droit ou l'ensemble des valeurs limites du côté gauche ne contient pas le nombre $f(x)$, est tout au plus dénombrable."

La démonstration de ce théorème est analogue à la démonstration du théorème de YOUNG. Par analogie on pourrait espérer que la proposition suivante est vraie:

„Pour toute fonction $f(x)$ à valeurs réelles l'ensemble des points x pour lesquels $W^{+}(x)$ ou $W^{-}(x)$ ne contient pas le nombre $f(x)$, est de la 1ière catégorie."

Cette proposition est toutefois fausse, ce que prouve l'exemple suivant:

Soit l'ensemble E un G_δ dense, de mesure nulle et soit $\chi_E(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E. Dans chaque point x_0 nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{appr} \chi_E(x) = 0$, donc les ensembles $W^{+}(x_0)$ et $W^{-}(x_0)$ contiennent le seul nombre zéro. Vu qu'aux points de l'ensemble E on a $\chi_E(x) = 1$, donc E est l'ensemble des points, dans lesquels $W^{+}(x)$ et $W^{-}(x)$ ne contiennent pas le nombre $\chi_E(x)$. Mais l'ensemble E est de la 2ième catégorie (il est même résiduel), ce qui prouve que la proposition plus haut est fausse.

(Reçu le 26 octobre 1959)

Bibliographie

Fritz Rehbock, Darstellende Geometrie (Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 97), XV + 232 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1957.

In diesem schön ausgestatteten Buch sind die wichtigsten Konstruktionsmethoden der Mongeschen Darstellung, der Axonometrie und der Zentralprojektion kurz zusammengestellt und an vielen interessanten Beispielen (meistens aus der Technik und Architektur) illustriert; auch einige einfache Aufgaben der kotierten Projektion, der Photogrammetrie (hier „Bildausmessung" genannt) und die Grundbegriffe der Relief-Perspektive sind behandelt. Ferner sind zahlreiche Hinweise für die Geschichte und die Literatur der Darstellenden Geometrie gegeben.

Die Figuren sind gut geplant und mit großer Sorgfalt ausgeführt, so daß viele Konstruktionen allein durch Anschauen der betreffenden Figuren verstanden werden können. So ist dieses Buch gleichzeitig ein sehr gutes Handbuch für Fachleute und ein brauchbares Hilfsmittel für Studenten. Der Text des Buches ist aber übermäßig kurz gefaßt; deshalb können wir es für Anfänger zum Selbststudium kaum empfehlen.

G. Szász (Szeged)

Ulf Grenander and Gábor Szegő, Toeplitz forms and their applications, VII + 245 pages, Berkeley—Los Angeles, University of California Press, 1958.

Es sei $f \in L$ eine reelle, nach 2π periodische Funktion mit der Fourierreihe $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. Die Hermiteschen Formen

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{n} c_{\mu-\nu} u_\mu u_\nu$$

werden nach O. Toeplitz, der sie zum ersten Male untersuchte, Toeplitzsche Formen genannt. G. Szegő, der Senior der Verfasser, hat in Veröffentlichungen zwischen 1915 und 1921 recht wesentlich zur Kenntnis dieser Formen beigetragen. Später wurden seine Untersuchungen in Richtung eines wichtigen Anwendungsgebietes seiner Resultate, nämlich der Theorie der orthogonalen Polynome, abgelenkt. Er nahm seine ursprünglichen Forschungen erst in den letzten Jahren wieder auf. Der andere Verfasser, U. Grenander, fand jüngst bemerkenswerte Anwendungen dieser Ergebnisse in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

Der erste, einleitende Kapitel bringt neben Definitionen und Bezeichnungen einige grundlegende Sätze, z. B. über eine Darstellung nichtnegativer Funktionen, welche die Fejér—Rieszsche kanonische Darstellung nichtnegativer trigonometrischer Polynome verallgemeinert. Im zweiten und dritten Kapitel werden knapp aber doch gut lesbar die wichtigsten Sätze über orthogonale Polynome auf dem Einheitskreise zusammengestellt. Kap. 4 behandelt die Lösung des trigonometrischen Momentenproblems und Kap. 5 Sätze über die Verteilung der Eigenwerte der Matrizes $\|c_{\mu-\nu}\|$. In § 6 wird eine Verallgemeinerung Toeplitzscher Forme angegeben: Es wird $K_n(f)=\int_T f(x)\left|\sum v_k\varphi_k(x)\right|^2 dx$ bei verschiedener Wahl der $\{\varphi_k\}$ und T untersucht, wobei $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein System (komplexwertiger) orthogonaler normierter Funktionen über T bilden. In § 7 wird eine noch weitergehende Verallgemeinerung der Toeplitzschen Formen behandelt, welche sich auf Kernfunktionen über Produktmengen zweier Maß-Räume bezieht. Es bildet eine Einführung zum Studium jüngst erschienenen Originalarbeiten. Damit endet Teil I des Buches. In Teil II werden Anwendungen der Theorie angegeben: § 9 Anwendungen auf analytische Funktionen, § 10 Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, § 11 Anwendungen in der Statistik.

Ein Nachtrag enthält die Hinweise auf die originalen Abhandlungen und noch manche wertvolle Bemerkungen.

G. Freud (Budapest)

Mahlon M. Day, Normed linear spaces (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 21), 140 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1958.

Die Theorie der linearen normierten Räume ist im dritten Dezennium unseres Jahrhunderts aus den bahnbrechenden Arbeiten über lineare Funktionalgleichungen und lineare Operatoren von F. Riesz, E. Helly und H. Hahn entstanden, und wurde zu einer der wichtigsten Disziplinen der Mathematik. Das klassisch gewordene Buch von S. Banach war lange Zeit die einzige zusammenfassende Arbeit aus diesem Thema; die wichtigsten seither erzielten Ergebnisse findet man in den „Espaces vectoriels topologiques" von Bourbaki. Das vorliegende Heft gibt eine übersichtliche und —der Natur der Ergebnissereihe entsprechend— konzentrierte Zusammenfassung, die auch die neuesten (teilweise durch den Verfasser selbst erzielten) Resultate enthält.

Das Heft beginnt (Kap. 1 und 2) mit einer kurzen Zusammenfassung der wichtigsten Hilfsbegriffe und allgemeinen Eigenschaften der topologischen bzw. normierten Vektorräume (die Existenz und Gleichmächtigkeit der Basen, lineare Funktionalen, konjugierte Räume, Topologien in normierten linearen Räumen). Kapitel 3 und 4 beschäftigen sich mit verschiedenen topologischen Eigenschaften der linearen Räume: Vollständigkeit, Kompaktheit, Reflexivität, verschiedene Begriffe der Konvergenz, Existenz der Schauderschen Basen, sowie mit den grundlegenden Eigenschaften der vollstetigen Operatoren. In Kap. 5 findet man Untersuchungen über Extremalpunkte von kompakten konvexen Mengen, den Fixpunktssatz und die Charakterisation der Räume der stetigen Funktionen als ein spezieller Fall der Banachschen Räume. Kap. 6 führt den Begriff der Vektorverbände ein und gibt eine Charakterisation der abgeschlossenen Unterverbände der Räume der in einem kompakten Hausdorffschen Raum stetigen Funktionen. Dieses Kap. gibt auch Bedingungen für die Verallgemeinerungen des Hahn—Banachschen Satzes für den Fall, daß der Bildraum ein teilweise geordneter linearer Raum ist. Kap. 7 enthält eine kurze Diskussion der metrisch-geometrischen Beziehungen in einem normierten Raum. Am Schluß dieses Kapitels findet man verschiedene Charakterisationen der Räume, deren Norm aus einem inneren Produkt hergeleitet werden kann. Das letzte Kapitel enthält einen kurzen historischen Überblick.

Das Heft schließt mit einem sehr reichlichen und gut brauchbaren Literaturverzeichnis.

L. Gehér (Szeged)

A. D. Michal, Le calcul différentiel dans les espaces de Banach. Vol. I: **Fonctions analytiques. Equations intégrales,** XIV + 150 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1958.

Dieser erste Band enthält die Zusammenfassung der schönen Arbeiten, die Verf. 1936—1954 veröffentlicht hat. Die Anregung zur systematischen Ausarbeitung dieser Ergebnisse gab ihm M. Fréchet. Die Erscheinung des Buches ist ein Gewinn für die moderne Funktionalanalysis. Das Ziel des Verf. war, mit Hilfe des Begriffes des Fréchetschen Differentials die klassischen Ergebnisse der Analysis auf lineare Räume und Banach-Räume überzuführen.

Kap. I enthält die grundlegenden Definitionen. Als Einleitung wird die klassische Theorie der Volterraschen Integralgleichungen kurz behandelt. In Kap. II findet man die grundlegenden Eigenschaften der linearen normierten Räume und die Definition sowie die Haupteigenschaften der homogenen Polynome, die auf solchen Räumen definiert sind. Mit Hilfe dieser Definitionen und Eigenschaften werden die analytischen Funktionen in Banach-Räumen definiert. Diese Betrachtungen sind die schönsten und wichtigsten Teile des Buches. In Kap. III wird das Fréchetsche Differential definiert, die grundlegenden Tatsachen des Differentialkalküls in Banach-Räumen bestimmt. Die Beziehungen des Fréchetschen Differentials zum Gâteauschen werden festgelegt. Die bisher geschilderten Ergebnisse werden auf die klassische Volterrasche Integralgleichungstheorie angewandt (Kap. IV) und es werden die wohlbekannten Sätze von einem einheitlichen Standpunkte aus abgeleitet. Interessant sind diejenigen Forschungen, welche der Verfasser bezüglich der Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen in Banach-Räumen unternahm (Kap. V). In Kap. VI werden Differentialgleichungssysteme untersucht, deren Koeffizienten stetige Funktionen sind. Dort werden die Lösungsfunktionen als Funktionale der Koeffizientenfunktionen betrachtet. Viel interessantes findet der Leser auch in den Paragraphen, welche sich mit Differentialgleichungen in linearen normierten Räumen beschäftigen. Zum Schluß wird die Exponentialfunktion in Banach-Räumen betrachtet.

Neuere Ergebnisse werden leider nicht betrachtet, z. B. diejenigen von L. V. Kantorovitsch und seinen Mitarbeitern, und die von M. M. Weinberg. Der Text ist leicht verständlich geschrieben, die abstrakten Begriffsbildungen werden mit vielen und interessanten Beispielen erläutert. Diejenigen Sätze, deren Beweis zu lang ist oder besondere Vorkenntnisse erfordert, werden oft nur formuliert. An diesen Stellen wird der Leser an die Originalliteratur hingewiesen. Das Buch ist auch für eine erste Einführung in dieses Gebiet geeignet, aber auch für den Kenner bietet es viele Anregung für weitere Forschungen.

St. Fenyö (Budapest)

H. G. Garnir, Les problèmes aux limites de la Physique Mathématique (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. 23), 234 Seiten, Birkhäuser Verlag. Basel — Stuttgart, 1958.

Es handelt sich in diesem ausgezeichneten Buche um die grundlegenden Grenzwertaufgaben der Mathematischen Physik. Der Verfasser behandelt zuerst einen Sonderfall, und zwar die Probleme von Dirichlet und Neumann bezüglich des metaharmonischen Operators und geht später zu allgemeineren Problemen, namentlich zu den Problemen von Dirichlet und Neumann bezüglich des Differentialoperators $a\partial_t^2 + b\partial_t + c - \Delta$ mit $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}^2$ über (a, b, c sind reelle Konstanten).

Die Aufgaben werden wie möglich allgemein gestellt, ohne überflüssige Voraussetzungen zu benützen. Es wird der Begriff der Distributionen von L. SCHWARTZ stark benützt; natürlich wird es immer untersucht, in welchen Fällen die Distributionenlösungen mit gewöhnlichen Funktionen identisch sind.

Das Buch enthält vier Teile. Der erste ist eine schöne Einführung in die Theorie der Funktionen- und Hilbertschen Räume. Im zweiten werden die Probleme von DIRICHLET und NEUMANN bezüglich des metaharmonischen Operators diskutiert. Der dritte Teil enthält die Behandlung einer Funktionentransformation von Laplacescher Art. Mit Hilfe dieser werden die Probleme der Wellengleichung und der Diffusionsgleichung in Probleme über die metaharmonische Differentialgleichung überführt. Der letzte Teil löst mit Hilfe der vorigen Transformation die grundlegenden Randwertaufgaben der Wellengleichung und der Diffusionsgleichung.

Das Buch enthält viele neue Ergebnisse, auch die Auffassung und Formulierung der Aufgaben scheint uns neu zu sein. Der Standpunkt des Verfassers ist ganz modern; die einheitliche Behandlungsart, die Klarheit des Textes und der logische Aufbau des Stoffes sind hervorzuheben. Doch gehört das Buch nicht zu den sog. „leichten" Lehrbüchern. Besondere Vorkenntnisse werden vom Leser zwar nicht gefordert, doch muß er sich bemühen wenn er das Buch in allen Einzelheiten durcharbeiten will. Fast zu jedem Kapitel fügt der Verfasser eine reiche Auswahl von Übungsaufgaben und Problemen, darunter findet man auch ziemlich schwere (die Lösungshinweise zu diesen sind nützlich und enthalten schöne mathematische Gedanken). Derjenige, der diese gründlich durcharbeitet, kann eine besondere Gewandtheit auch in der Technik der behandelten Theorie gewinnen.

Das vorliegende Buch weist klar auf die Tatsache hin, daß die modernen Methoden der Funktionalanalysis in der Mathematischen Physik äußerst fruchtbar sind.

St. Fenyő (Budapest)

L. S. Pontrjagin, Topologische Gruppen. In zwei Bänden, 263+308 Seiten, Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1957—1958.

Der Begriff der topologischen Gruppe entstand im Zusammenhang mit der Untersuchung der Gruppen stetiger Transformationen. Die Grundlage einer allgemeinen Theorie dieser Gruppen hat SOPHUS LIE in der zweiten Hälfte des XIX. Jahrhunderts gelegt. In weiteren Untersuchungen zeigte es sich, daß zur Behandlung der meisten hier auftretenden Probleme keine Notwendigkeit besteht, die Gruppen als Transformationsgruppen zu betrachten. Es genügt die Gruppen von dem Gesichtspunkte aus zu untersuchen, daß in ihnen ein Stetigkeitsbegriff für die Gruppenoperation definiert ist. Damit entstand ein neuer mathematischer Begriff: die topologische Gruppe.

Das ursprünglich 1938 in russischer Sprache erschienene Buch des Verfassers lieferte die erste zusammenfassende und allgemeine Bearbeitung der Theorie der topologischen Gruppen. Es wurde 1939 in die englische Sprache übersetzt; 1954 erschien eine wesentliche erweiterte und umgearbeitete zweite Auflage des russischen Originals. Die vorliegende deutsche Übersetzung folgt diese zweite Auflage.

Die wichtigste Ergänzung der zweiten Auflage ist das 11. Kapitel, in dem die Struktur der kompakten Lieschen Gruppen sehr eingehend untersucht wird. Diese Untersuchung führt zu einer Klassifikation dieser Gruppen, die auf einer Klassifikation der kompakten Lieschen Algebren nach ihren Radikalsystemen beruht. Das 3. Kapitel ist mit einem Abschnitt über die Gruppen stetiger Transformationen ergänzt. Ein neues Kapitel (Kap. 4) beschäftigt sich mit der Struktur der lokalbikompakten nicht diskreten Körper. Dem der Integrationstheorie auf bikompakten topologischen Gruppen gewidmeten Kapitel wurde ein Abschnitt über die Theorie der Integralgleichungen hinzugefügt. Ein neuer Paragraph des 7. Kapitels behandelt die Begriffe der glatten und analytischen Mannigfaltigkeiten und ihre Zusammenhänge mit den Lieschen Gruppen. In Kap. 8 kommt zur Untersuchung der bikompakten Gruppen noch die Untersuchung der bikompakten Transformationsgruppen hinzu. In Kap. 9 ist die Betrachtung der Überlagerungsräume weiter ausgebaut.

Eine wesentliche Änderung in der vorliegenden zweiten Auflage, gegenüber der ersten besteht darin, daß man die Bedingung des zweiten Abzählbarkeitsaxioms in vielen Kapiteln des Buches, insbesondere im zweiten, den topologischen Räumen gewidmeten Kapitel, vermeidet. So spiegelt das Buch besser den modernen Stand der abstrakten Topologie wider.

Interessante Beispiele erleichtern das Verstehen der allgemeinen Theorie.

Die treffliche Übersetzung und die schöne Ausgabe werden diesem wichtigen Werk gewiß einen weiteren großen Erfolg sichern.

I. Kovács (Szeged)

G. Hoheisel, Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Dritte, durchgesehene und verbesserte Auflage (Sammlung Göschen, Band 1059), 124 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1958.

Der Verf. verbesserte die Stoffanordnung und so wurde das Buch übersichtlicher geworden; die Änderung ist besonders in den Kapiteln 2 und 3 augenfällig. Das Buch hat sich auch mit einigen neuen Aufgaben erweitert. Es ist gut brauchbar als Hilfsmittel für das Studieren der Differentialgleichungen.

L. Gehér (Szeged)

Karl Peter Grotemeyer, Analytische Geometrie (Sammlung, Göschen Bd. 65/65a), 202 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1958.

Das Werk behandelt die analytische Geometrie des dreidimensionalen euklidischen Raumes unter weitgehender Verwendung des Matrizenkalküls, der eine kurze und elegante Formulierung der Sätze ermöglicht. Besonders wird damit die Bestimmung der einzelnen Typen der Flächen zweiter Ordnung erleichtert. Anschließend der analytischen Geometrie des euklidischen Raumes wird eine kurze Zusammenfassung der affinen und projektiven Geometrien angegeben. Die Klassifizierung der verschiedenen Geometrien wird durch die in der neueren Untersuchungen eine so wichtige Rolle spielende Theorie der kontinuierlichen Gruppen durchgeführt. Besonders interessant sind die im letzten Kapitel behandelten verschiedenen projektiven Erzeugungen der Quadriken nach Staudt, Steiner, Magnus und Seydewitz, die alle auf gewisse charakteristische Eigenschaften der Quadriken begründet sind.

A. Moór (Szeged)

Loo-Keng Hua, Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I_2, Heft 13, Teil 1), 123 Seiten, Leipzig, Teubner, 1959.

The last comprehensive treatment of the analytical number theory was given by the encyclopedia article of H. Bohr and H. Cramér. This gave a complete picture of the subjetc up to May 1922. Since that time all results of this theory have been largely superseded so that the need of a new summary of the theory was more and more felt. The development made it necessary to split up the land of the analytical number theory into counties; the one dealt with in this article is centered around the estimations of exponential sums. The borders between the counties are not always clear and incidents at the borders of the land will be quite possible (with the probability theory e. g.). However the material treated in this work is presented masterfully; no wonder since the author is one of the top-workers on this field. He starts with a survey of the elementary methods, with highlights on an exposition of LINNIK's elementary solution of the Waring problem, on SELBERG's improvement of BRUN's sieve method (also the question of lower bound!) and beside the elementary proof of the prime number theorem by ERDŐS and SELBERG, on an ingenious proof due to VINOGRADOFF to an estimation of the remainder-term in the „circle problem". Next he turns to an exposition of the exponential-sum estimating methods due to H. WEYL, VAN DER CORPUT, KUZMIN and VINOGRADOFF; the last one, which is the most successful, is treated in a fashion due to the author. After a discussion of sums of type $\sum_{\nu=1}^{p} \exp\left[\frac{2\pi i}{p} f(\nu)\right]$ ($f(x)$: a polynomial with integer coefficients) he gives the main ideas of VINOGRADOFF's „trigonometrical sieve".

Sofar was everything arithmetical essentially. Then he continues with an analytical treatment of the distribution of primes from RIEMANN on but inserting the improvements obtained in the mean-time, particularly essential being the results concerning the difference of consecutive prime numbers. Ample space is given then to the HARDY—LITTLEWOOD—RAMANUJAN analytical „circle method" in VINOGRADOFF's „finite" variant, applied to the problems of WARING and GOLDBACH with VINOGRADOFF's arithmetical ideas and unified by HUA. As other field of applications of estimations of trigonometrical sums the theory uniform distribution mod 1 is treated next and a detailed discussion of lattice-point problems close the article.

The main feature of the article is that in a few pages it gives also the main ideas of many complicated proofs. It is certainly a gap-filling work.

The reviewer has observed only one little slip, on p. 107. Instead of

$$\limsup\, (x \log x)^{-1/4} [A(x) - \pi x] > 0 \qquad (x \to \infty)$$

only

$$\limsup\, x^{-1/4} [A(x) - \pi x] = +\infty$$

is proved at present (whereas the inequality

$$\liminf\, (x \log x)^{-1/4} [A(x) - \pi x] < 0$$

is correct) and similar remark applies to $D(x)$.

Paul Turán (Budapest)

Claude Berge, Espaces topologiques. Fonctions multivoques (Collection Universitaire de Mathématiques III), XI + 272 pages, Paris, Dunod, 1959.

Cet ouvrage sert à introduire un étudiant, familier avec les éléments de l'Analyse et d'une certaine maturité en mathématiques, aux théories modernes de la topologie générale et des espaces vectoriels topologiques. Un trait caractéristique de l'exposé est d'étudier systématiquement les applications multivoques (faisant correspondre à chaque élément x d'un ensemble X un sous-ensemble Γx, vide ou non, d'un autre ensemble Y) et d'illustrer les résultats de la théorie par des exemples tirés des domaines très variés, entre autres surtout de la théorie des jeux.

Trois chapitres de caractère introductoire présentent les connaissances nécessaires sur le domaine de la théorie des ensembles. On y trouve, auprès des notions bien connues, les notions de base de filtre et de treillis, de même que l'étude des applications multivoques et de leurs inverses, et les éléments de la théorie des ensembles ordonnés, y compris les différentes formes de l'axiome du choix (lemme de ZORN etc.).

On trouve dans le quatrième chapitre les notions d'espace métrique, espace L^* et espace topologique. Comme généralisation des suites dénombrables, l'auteur se sert des familles filtrées, c'est-à-dire des familles $\{x_i : i \in I\}$, une base de filtre étant donnée dans l'ensemble d'indices I; par là, il parvient à une synthèse des suites de MOORE—SMITH et des filtres. Il étudie ensuite les espaces séparés ($=$ espaces de HAUSDORFF), réguliers, normaux, compacts ($=$ bicompacts et séparés) et connexes, de même que les produits et les sommes d'espaces topologiques.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude des espaces métriques, tandis que le Chapitre VI expose la théorie des applications multivoques semi-continues supérieurement ou inférieurement. L'auteur réussit à généraliser de façon naturelle cette théorie due à BOULIGAND et KURATOWSKI; il traite aussi des limites topologiques de familles filtrées d'ensembles, de la distance de HAUSDORFF d'ensembles fermés dans les espaces métriques, et des décompositions demi-continues supérieurement.

Les trois derniers chapitres (comprenant à peu près la moitié du volume) constituent une introduction à la théorie des espaces vectoriels topologiques. Le premier est consacré à la partie purement algébrique de cette théorie (espaces vectoriels, applications linéaires, variétés linéaires, cônes, ensembles convexes, jauges, théorème de HAHN—BANACH). Le second étudie les ensembles convexes et les fonctions convexes dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. On y trouve les théorèmes sur la séparation des ensembles convexes par des hyperplans, le théorème sur les hyperplans d'appui des ensembles convexes compacts, le théorème de KREIN—MILMAN et le théorème de KAKUTANI (spécialisés toujours à $\mathbf{R}^n$); la démonstration de celui-ci est fondée sur le lemme de SPERNER par l'intermédiaire du lemme de KURATOWSKI—KNASTER—MAZURKIEWICZ. On étudie ensuite les fonctions convexes dans les ensembles convexes $C \subset \mathbf{R}^n$; au delà des propriétés bien connues, on trouve le théorème de BOHNENBLUST—KARLIN—SHAPLEY, celui de HELLY et le théorème minimax de VON NEUMANN, appliqué en théorie des jeux. Comme généralisations, l'auteur fait connaître les fonctions quasi-convexes, les fonctions sub-Φ de BECKENBACH et les fonctions S-convexes de SCHUR, la théorie de celles-ci étant basée sur les matrices bistochastiques et les théorèmes dûs à HARDY—LITTLEWOOD—PÓLYA et à BIRKHOFF— VON NEUMANN.

Le dernier chapitre renferme l'étude des espaces vectoriels topologiques, en particulier des espaces localement convexes, normés et de Banach; on y trouve les formes générales des théorèmes de séparation etc., présentés au chapitre précédent pour l'espace $\mathbf{R}^n$, et la notion de convergence faible, avec le théorème de BANACH—STEINHAUS, de même que celui sur la compacité faible de la boule unité.

L'exposé est concis et clair, présentant un grand nombre de définitions et de résultats en relativement peu de place. Malheureusement, la lecture est rendue désagréable par une quantité considérable de fautes d'impression, de changements de notation, d'assertions inexactes et de démonstrations incomplètes. Pour en citer quelques-unes: dans l'espace $\mathbf{R}^3$, les variétés linéaires forment un treillis modulaire (p. 18) (ce n'est valable que pour l'espace *projectif*); un sous-espace d'un espace normal est normal (p. 70); l'intersection de deux applications semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement (p. 120) (contre-exemple: $X = Y = \mathbf{R}$, $\Gamma_1 x = \{x\}$, $\Gamma_2 x = \{-x\}$); σ étant une application univoque d'un espace compact X dans un espace Y, si l'image d'un ensemble fermé est toujours fermé, les ensembles $\sigma^{-1}y$ forment une décomposition demi-continue supérieurement de X (p. 137) (contre-exemple: $X=[0,1]$, $Y=\{0,1\}$, $\sigma x=0$ pour $0\leqq x<\frac{1}{2}$, $\sigma x=1$ pour $\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$); G étant un ensemble ouvert dans $\mathbf{R}^2$, si l'on a pour $(x,y)\in G$ $f(x+h,y+k)-f(x,y)=a(x,y)\,h+b(x,y)\,k+c(x,y)\,h^2+d(x,y)\,hk+e(x,y)\,k^2+\varepsilon(x,y,h,k)\,(h^2+k^2)$, et si $\varepsilon(x,y,h,k)$ tend vers 0, pour $h,k\to 0$ (x et y restant fixés), les dérivées partielles f_{xx}, f_{xy} et f_{yy} existent partout dans G (p. 205) (contre-exemple: $G=R^2$, $f(x,y)=g(x+y)$, $g(u)=\int_0^u t\sin\frac{1}{t}\,dt$ pour $x=y=0$); $\varphi(t)=t^{1/\lambda}$ est concave pour $0<\lambda\leqq 1$, $t>0$ (p. 223); la démonstration du théorème de KAKUTANI (p. 181) n'est valable que si Γ est une application continue, ce qui est particulièrement regrettable, puisque plus tard (p. 260) on aurait besoin de ce théorème pour Γ semi-continue supérieurement (et non continue). Cependant, un lecteur attentif pourra corriger la plupart des erreurs et trouvera dans ce manuel une bonne introduction aux théories modernes traitées par l'auteur.

Ákos Császár (Budapest)

Szász Gábor, Bevezetés a hálóelméletbe [G. Szász, Einführung in die Verbandstheorie], 225 Seiten, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1959 (Ungarisch).

Das Ziel des vorliegenden Buches ist die grundlegenden Begriffe und die häufigsten Methoden der Verbandstheorie darzubieten und ihre Verbindungen mit verschiedenen anderen Gebieten der Mathematik zu zeigen. Deswegen können außer den Anfängern auch diejenigen dieses Buch gut gebrauchen, die die Grundlagen der Theorie hauptsächlich wegen ihrer Anwendungen studieren wollen. Die bearbeiteten Themen wurden geschickt ausgewählt und der behandelte Stoff ist vielseitiger als in den bisher erschienenen einleitenden Büchern der Fachliteratur. Die ausführliche und klare Darstellung macht das Buch leicht lesbar auch für die Anfänger und bietet eine gute Übersicht über einige der grundlegenden und wichtigsten Problemenkreise der Verbandstheorie. Mehrere Ergebnisse und tiefere Untersuchungen können in diesem Rahmen nur berührt werden, in diesen Fällen weist aber der Verf. immer auf die einschlägige Literatur hin. Die von verschiedenen Gebieten der Mathematik (Mengentheorie, mathematische Logik, Algebra, Geometrie, Topologie und Wahrscheinlichkeitsrechnung) genommenen zahlreichen Beispiele und die am Ende jedes Kapitels stehenden Übungsaufgaben bieten reichlich Gelegenheit zur Vertiefung des Verständnisses des behandelten Materials. Die Titel der Kapitel sind: I. Halbgeordnete Mengen; II. Über die Verbände im allgemeinen; III. Vollständige Verbände; IV. Distributive und modulare Verbände; V. Spezielle Unterklassen der modularen Verbände; VI. Boolesche Algebren; VII. Halbmodulare Verbände; VIII. Ideale von Verbänden; IX. Kongruenzrelationen.

Erwähnt seien auch die schönen, treffenden Abbildungen, das reichliche Literaturverzeichnis und endlich die musterhafte typographische Ausstattung, die den Wert des Buches noch erhöhen.

J. Szendrei (Szeged)

Günter Pickert, Analytische Geometrie (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 24), XII+410 Seiten. Dritte, bearbeitete Auflage, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1958.

Ziel dieses Buches ist einen axiomatischen Aufbau der analytischen Geometrie im n-dimensionalen Raum (im allgemeinen über einem Schiefkörper) zu entwickeln. Bezüglich des Inhalts verweisen wir auf die Besprechung der ersten Auflage im Band **16** (1955) dieser *Acta*, S. 276. Die vorliegende Auflage unterscheidet sich von der vorigen nur wenig. Wesentliche Änderungen sind nur in einigen Paragraphen durchgeführt und der Anhang II wurde ganz neu geschrieben. In diesem Anhang wird gezeigt, wie die Voraussetzung, daß die Vektoren mit Skalaren aus einem Schiefkörper multipliziert werden können, durch die Einführung von geeigneten geometrischen Grundbegriffen und Axiomen ersetzt werden kann.

J. Szendrei (Szeged)

Siegfried Valentiner, Vektoren und Matrizen (Sammlung Göschen, Band 354/354a), 252 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1958. Achte, erweiterte Auflage der „Vektoranalysis". Mit einem Anhang von HERMANN KÖNIG.

Für die Beliebtheit des früher mit dem Titel „Vektoranalysis" erschienenen Büchleins spricht, daß diese achte, erweiterte Auflage nötig war. Die ersten zwei Teile wurden nur unbedeutend verändert. Der dritte Teil wurde aber stark erweitert und die Matrizen und ihre Anwendungen sind jetzt in den Mittelpunkt der Behandlung gestellt. Hier handelt es sich um lineare Vektorfunktionen, Matrizen, Matrizen als Summen von Dyaden, und um den Gaußschen Algorithmus für die Auflösung linearer inhomogener Gleichungen. Der Leser kann auch von der neu hinzugefügten, durch H. KÖNIG zusammengestellten Aufgabensammlung guten Gebrauch machen.

J. Szendrei (Szeged)

L. Baumgartner, Gruppentheorie. Dritte, vollständig neubearbeitete Auflage (Sammlung Göschen, Band 837), 110 Seiten, Walter de Gruyter & Co., 1958.

Diese dritte Auflage weicht wesentlich von der zweiten ab. Inhaltlich ist das Buch moderner, abstrakter, einheitlicher und mehr gegliedert geworden. Einige Abschnitte wurden ganz weggelassen, z. B. die alten Abschnitte II (Der Gruppenbegriff in der Geometrie) und IV (Anwendung der endlichen Gruppen in der Theorie der algebraischen Gleichungen) dafür wurden mehrere neue Abschnitte aufgenommen. Die neuen Abschnitte VI (Die Homomorphie), VII (Die Automorphie), VIII (Die Endomorphie; charakteristische und vollinvariante Untergruppen), IX (Freie Gruppen und Gruppen mit Beziehungen zwischen den Elementen), IX (Genaueres über die Gruppenpostulate) sind auch inhaltlich ganz neu. Die übrigen neuen Abschnitte I (Einführung in den Gruppenbegriff), II (Gruppentheoretische Grundbegriffe und -methoden), III (Über endliche Gruppen), IV (Vertauschbarkeit von Elementen und Untergruppen), V (Die Faktorgruppe), X (Reihen von Gruppen) enthalten hauptsächlich Material aus den früheren Auflagen.

In jedem Abschnitt findet man mehrere Aufgaben, insgesamt gibt es 94, also ungefähr doppelt so viel, wie in der letzten Ausgabe. Das Buch ist auch mit einigen Tafeln (für einige wichtigere Gruppen) ergänzt.

J. Szép (Szeged)

INDEX — TARTALOM

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

SZEGED (HUNGARIA), ARADI VÉRTANÚK TERE 1.

Prix d'abonnement pour l'étranger $ 8.50. On peut s'abonner à l'entreprise de commerce des livres et journaux „Kultúra" (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21).

Formátum B/5.
Terjedelem 6,5 B/5 ív.
Példányszám 670.

Felelős szerk.: Szőkefalvi-Nagy Béla.
Nyomdábaadás ideje: 1960. I. 21.
Megjelenés: 1960. V. 20.

Kiadja a Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, V., Szalay-u. 10—14.
Kiadásért felel a Tankönyvkiadó Vállalat igazgatója.

Szegedi Nyomda Vállalat 60-494