ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

TOMUS XX

SZEGED, 1959

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY

KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

20. KÖTET

1959

SZEGED

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

TOMUS XX

1959

SZEGED

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

INDEX — TARTALOM

TOMUS XX — 1959 — 20. KÖTET

BIBLIOGRAPHIE

A kiadásért felelős:
Szőkefalvi-Nagy Béla
Eredeti kiadásról készült változatlan utannyomás

Külföldi terjesztés:
KULTURA KÖNYV- ÉS HÍRLAP
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT
BUDAPEST 62,
P. O. B. 149
This book is a reproduction of the original, published
in Budapest

General Distributors:
KULTURA Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,
Hungary
Printed in Hungary, 1971

Über die orthogonalen Funktionen. V
(Genaue Weylsche Multiplikatorfolgen)

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Herrn Professor Georg Alexits zum 60. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1,2,\dots)$ ein im Intervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem und

$$L_n(t)=\int_a^b\left|\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\varphi_k(t)\right|dx$$

die zugehörige n-te Lebesguesche Funktion. KACZMARZ [1] hat den folgenden Satz bewiesen (siehe auch TANDORI [1]):

Ist $L_n(t)=O(\lambda(n))$ $(a\leqq t\leqq b;\ n=1,2,\dots)$ mit einer positiven, monoton gegen Unendlich konvergierenden Zahlenfolge $\{\lambda(n)\}$, so konvergiert die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$$

für jede Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\,\lambda(n)<\infty,$$

fast überall in $[a,b]$.

Nach dem Satz von MENCHOFF [1] und RADEMACHER [1] ist dieses Resultat besonders im Falle $\lambda(n)=O(\log^2 n)$ vom Interesse.

Einen ähnlichen Satz hat KACZMARZ [2] auch für die Cesàrosche Summierbarkeit bewiesen (siehe auch TANDORI [1]).

In dieser Note werden wir beweisen, daß der obige Satz nicht verbessert werden kann. Es gilt nämlich der folgende

Satz I. *Es sei $\{\lambda(n)\}$ eine positive, monoton gegen Unendlich konvergierende Zahlenfolge mit*

(1) $$\lambda(n) = O(\log^2 n).$$[1]

Dann existiert ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit den folgenden Eigenschaften: es gilt in $[a, b]$

(2) $$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(x)\, \Phi_k(t) \right| dx = O(\lambda(n)) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und für jede positive Zahlenfolge $\{w(n)\}$ mit

(3) $$w(n) = o(\lambda(n))$$

gibt es eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ mit konvergentem

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n),$$

und fast überall divergentem

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x).$$

Ein ähnlicher Satz kann auch für die Cesàrosche Summierbarkeit bewiesen werden; den entsprechenden Satz werden wir aber nicht ausführlich behandeln.

Die folgende Definition stammt von MENCHOFF [2]. Es sei $\{W(n)\}$ eine positive Zahlenfolge und $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem. Die Folge $\{W(n)\}$ wird die *genaue Weylsche Multiplikatorfolge für das System* $\{\varphi_n(x)\}$ genannt, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat: für jede Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ mit konvergentem

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\, W(n)$$

konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

fast überall, und für jede positive Zahlenfolge $\{w(n)\}$ mit $w(n) = o(W(n))$ gibt es eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ mit konvergentem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\, W(n),$$

für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

fast überall divergiert.

---

[1]) In dieser Arbeit wird der Logarithmus mit der Basis 2 verwendet.

Auf Grund des erwähnten Satzes von KACZMARZ folgt leicht der folgende

Satz II. *Es sei $\{\lambda(n)\}$ eine positive, monoton gegen Unendlich konvergierende Zahlenfolge, für die die Bedingung* (1) *erfüllt wird. Dann gibt es ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für das diese Folge $\{\lambda(n)\}$ die genaue Weylsche Multiplikatorfolge ist.*

Dieser Satz ist eine Verschärfung eines Satzes von A. A. TALALYAN [1].

§ 1. Hilfssätze

Zum Beweis unseres Satzes benötigen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz I. *Es sei $p(\geqq 2)$ eine natürliche Zahl. Es kann ein im Intervall $0 \leqq x \leqq 5$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen*[2]) *$\{f_l(p;x)\}$ $(l=1,\ldots,2p)$ mit den folgenden Eigenschaften angegeben werden: zu jedem Punkt $x \in [2,3]$ gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)(<p)$, so daß die Funktionswerte $f_1(p;x),\ldots,f_{p+m(x)}(p;x)$ positiv sind und*

$$f_1(p;x)+\cdots+f_{p+m(x)}(p;x) \geqq A\sqrt{p}\log p \tag{1.1}$$

gilt, wo A eine von x und p unabhängige, positive Zahl ist, weiterhin für $x \in [0,5]$

$$\int_0^5 \left|\sum_{l=1}^{n} f_l(p;x) f_l(p;t)\right| dx \leqq B\log^2 p \qquad (n=1,\ldots,2p) \tag{1.2}$$

gilt, wobei $B(\geqq 1)$ eine von x und p unabhängige, positive Zahl ist.

Abgesehen von der letzten Behauptung ist dieser Hilfssatz bekannt. (KACZMARZ [3], siehe auch MENCHOFF [1] und TANDORI [2], Hilfssatz II.)

Beweis von Hilfssatz I. Es sei

$$\bar{f}_l(p;x) = \frac{1}{k-p-l-\frac{1}{2}} \quad \text{für } x \in \left[\frac{k-1}{p}, \frac{k}{p}\right) \quad (k=1,\ldots,4p;\ l=1,\ldots,2p).$$

Dann ist

$$\int_0^4 \bar{f}_l^2(p;x)\,dx = \sum_{k=1}^{4p} \frac{1}{\left(k-p-l-\frac{1}{2}\right)^2}\frac{1}{p} \qquad (l=1,\ldots,2p),$$

[2]) Eine Funktion in (a,b) heißt eine *Treppenfunktion*, wenn (a,b) in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden kann, so daß die Funktion in jedem Teilintervall konstant ist.

woraus folgt

$$(1.3)\qquad \frac{A'}{p} \leqq \int_0^4 \bar{f}_l^2(p;x)\,dx \leqq \frac{A''}{p} \qquad (l=1,\ldots,2p),$$

wo A' und A'' von p unabhängige Zahlen sind. Wir setzen:

$$\alpha_{i,j} = \int_0^4 \bar{f}_i(p;x)\bar{f}_j(p;x)\,dx \qquad (1 \leqq i \leqq 2p,\ 1 \leqq j \leqq 2p;\ i \neq j).$$

Mit einfacher Rechnung ergibt sich

$$(1.4)\qquad |\alpha_{i,j}| \leqq \frac{2}{p^2}$$

(siehe KACZMARZ [3] oder TANDORI [2], S. 66—67).

Im Intervall $[4,5]$ definieren wir die Funktionen $\{\bar{f}_l(p;x)\}$ $(l=1,\ldots,2p)$ folgenderweise. Wir teilen das Intervall $[4,5]$ in $N=2p(2p-1)$ paarweise disjunkte Teilintervalle gleicher Länge, die wir in irgendeiner Reihenfolge durch $I_{i,j}$ bezeichnen $(1 \leqq i \leqq 2p,\ 1 \leqq j \leqq 2p;\ i \neq j)$. Es sei für $l=1,\ldots,2p$

$$\bar{f}_l(p;x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}N|\alpha_{l,j}|} & \text{für} \quad x \in I_{l,j}, \\ -\sqrt{\frac{1}{2}N|\alpha_{l,j}|}\ \operatorname{sign} \alpha_{l,j} & \text{für} \quad x \in I_{j,l}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die so definierten Treppenfunktionen $\{\bar{f}_l(p;x)\}$ $(l=1,\ldots,2p)$ bilden im Intervall $[0,5]$ offenbar ein orthogonales System. Wir setzen

$$c_l^2 = \int_0^5 \bar{f}_l^2(p;x)\,dx \qquad (l=1,\ldots,2p$$

Da

$$c_l^2 = \int_0^4 \bar{f}_l^2(p;x)\,dx + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{l-1} |\alpha_{l,n}| + \frac{1}{2}\sum_{n=l+1}^{2p} |\alpha_{l,n}|$$

ist, so folgt nach (1.3) und (1.4) die Abschätzung:

$$(1.5)\qquad \frac{1}{A_1 p} \leqq c_l^2 \leqq \frac{1}{A_2 p} \qquad (l=1,\ldots,2p),$$

wo A_1 und A_2 von p unabhängige positive Zahlen sind.

Wir nehmen die orthonormierten Funktionen

$$f_l(p;x) = \frac{1}{c_l}\bar{f}_l(p;x) \qquad (l=1,\ldots,2p).$$

Auf Grund von (1.5) und der Definition von $\bar{f}_l(p;x)$ läßt sich zeigen, daß für diese Funktionen die Bedingung (1.1) erfüllt wird (siehe KACZMARZ [3] oder TANDORI [2], S. 67—68).

Wir werden noch (1.2) beweisen. Es sei n ein beliebiger Index $(1 \leqq n \leqq 2p)$. Wir setzen

$$(1.6)\qquad \int_0^5 \left| \sum_{l=1}^{n} f_l(p;x) f_l(p;t) \right| dx = \left(\int_0^4 + \int_4^5 \right) \left| \sum_{l=1}^{n} f_l(p;x) f_l(p;t) \right| dx = $$
$$= R_1(t) + R_2(t).$$

Wir betrachten zuerst den Fall $0 \leqq t < 4$. Dann gibt es einen Index k_0 $(1 \leqq k_0 \leqq 4p)$ so, daß $t \in \left[\frac{k_0-1}{p}, \frac{k_0}{p} \right)$ gilt. Nach der Definition von $f_l(p;x)$ und auf Grund von (1.5) ist dann

$$R_1(t) = \sum_{k=1}^{4p} \int_{\frac{k-1}{p}}^{\frac{k}{p}} \left| \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{c_l^2} \frac{1}{\left(k_0 - p - l - \frac{1}{2}\right)\left(k - p - l - \frac{1}{2}\right)} \right| dx \leqq$$
$$\leqq A_1 \sum_{k=1}^{4p} \sum_{l=1}^{n} \left| \frac{1}{\left(k_0 - p - l - \frac{1}{2}\right)\left(k - p - l - \frac{1}{2}\right)} \right| \leqq$$
$$\leqq A_1 \pi^2 + A_1 \sum_{\substack{k=1\\ k \neq k_0}}^{4p} \frac{1}{|k-k_0|} \sum_{l=1}^{n} \left| \frac{1}{k_0 - p - l - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k - p - l - \frac{1}{2}} \right| \leqq$$
$$\leqq A_1 \pi^2 + A_1 \sum_{\substack{k=1\\ k \neq k_0}}^{4p} \frac{1}{|k-k_0|} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{1}{\left|k_0 - p - l - \frac{1}{2}\right|} + \frac{1}{\left|k - p - l - \frac{1}{2}\right|} \right)$$

Daraus folgt mit einfacher Rechnung:

$$(1.7)\qquad R_1(t) \leqq A_3 (\log p)^2,$$

wo A_3 eine positive Konstante bezeichnet. Nach der Definition der Funktionen $f_l(p;x)$ und auf Grund von (1.5) gilt in diesem Falle

$$(1.8)\qquad R_2(t) \leqq A_1 p \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\left|k_0 - p - l - \frac{1}{2}\right|} \int_4^5 |\bar{f}_l(p;x)| \, dx.$$

Nach der Definition von $\bar{f}_l(p;x)$ ist

$$\int_4^5 |\bar{f}_l(p;x)|\,dx = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{2p} \mu(I_{l,j}) \sqrt{\frac{1}{2} N|\alpha_{l,j}|} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{2p} \mu(I_{j,l}) \sqrt{\frac{1}{2} N|\alpha_{l,j}|}.$$ [3])

Hier ist aber $\mu(I_{i,j}) = \frac{1}{2p(2p-1)} \leqq \frac{1}{2p^2}$, $N|\alpha_{i,j}| \leqq 8$ und so gilt

$$\int_4^5 |\bar{f}_l(p;x)|\,dx \leqq \frac{4}{p}. \tag{1.9}$$

Daraus folgt nach (1.8)

$$R_2(t) \leqq A_4 \log p,$$

wo A_4 eine positive Konstante bedeutet. Auf Grund von (1.6), (1.7) ergibt sich, daß (1.2) für $t \in [0,4)$ mit $B = \max(1, A_3 + A_4)$ besteht.

Es sei zweitens $t \in [4,5]$. Dann ist t in einem und nur einem $I_{i,j}$ enthalten. Nach der Definition der Funktionen $f_l(p;t)$ ist aber

$$f_l(p;t) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq l \leqq p,\ l \neq i,\ l \neq j,$$

und nach dem obigen gilt

$$|\bar{f}_i(p;t)| \leqq 2, \quad |\bar{f}_j(p;t)| \leqq 2.$$

So gilt nach (1.5)

$$\int_0^5 \left|\sum_{l=1}^{n} f_l(p;x) f_l(p;t)\right| dx \leqq 2A_1 p \left\{ \int_0^5 |\bar{f}_i(p;x)|\,dx + \int_0^5 |\bar{f}_j(p;x)|\,dx \right\}. \tag{1.10}$$

Nach der Definition von $\bar{f}_l(p;x)$ ist für $l = 1, \ldots, 2p$

$$\int_0^4 |\bar{f}_l(p;x)|\,dx = \sum_{k=1}^{4p} \int_{\frac{k-1}{p}}^{\frac{k}{p}} |\bar{f}_l(p;x)|\,dx = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{4p} \frac{1}{\left|k-p-l-\frac{1}{2}\right|} \leqq A_1 \frac{\log p}{p}.$$

Daraus folgt, nach (1.9) und (1.10), daß (1.2) auch im Falle $t \in [4,5]$ besteht.

Damit haben wir Hilfssatz I vollständig bewiesen.

Ist $I = [u, v]$ ein beliebiges Intervall, so definieren wir:

$$f_l(p, I; x) = \begin{cases} \sqrt{5}\, f_l\left(p; 5\frac{x-u}{v-u}\right) & \text{für} \quad u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(l = 1, \ldots, 2p)$ und

$$F(I) = \left[2\frac{v-u}{5} + u,\ 3\frac{v-u}{5} + u\right).$$

---

[3]) $\mu(H)$ bezeichnet das Lebesguesche Maß der Menge H.

Dann ist

$$\int_I f_i(p, I; x) f_j(p, I; x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für } i = j, \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\mu(F(I)) = \frac{\mu(I)}{5}, \tag{1.12}$$

für $x \in F(I)$ gibt es nach (1.1) eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x) (< p)$ derart, daß die Funktionenwerte $f_1(p, I; x), \ldots, f_{p+m(x)}(p, I; x)$ positiv sind, die Ungleichung

$$f_1(p, I; x) + \cdots + f_{p+m(x)}(p, I; x) \geqq \sqrt{5} A \sqrt{p} \log p \tag{1.13}$$

besteht und für $x \in [u, v]$

$$\int_u^v \left| \sum_{l=1}^{n} f_l(p, I; x) f_l(p, I; t) \right| dx \leqq \mu(I) B \log^2 p \qquad (n = 1, \ldots, 2p) \tag{1.14}$$

gilt.

H i l f s s a t z II. *Es sei* $\{\chi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *das orthonormierte Haarsche Funktionensystem im Grundintervall* $[0, 1]$. *Dann ist*

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{s} \chi_n(x) \chi_n(t) \right| dx \leqq 1 \qquad (s = 0, 1, \ldots) \tag{1.15}$$

überall in $[0, 1]$.

Dieser Hilfssatz ist bekannt (siehe HAAR [1]).

Für ein beliebiges endliches Intervall $I = [u, v]$ definieren wir

$$\chi_n(I; x) = \begin{cases} \chi_n\left(\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u < x < v \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Offenbar ist

$$\int_u^v \chi_i(I; x) \chi_j(I; x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für } i = j. \end{cases} \tag{1.16}$$

Aus (1.15) folgt, daß überall in I gilt:

$$\int_I \left| \sum_{n=0}^{s} \chi_n(I; x) \chi_n(I; t) \right| dx \leqq \mu(I) \qquad (s = 0, 1, \ldots). \tag{1.17}$$

H i l f s s a t z III. *Es seien* $\{N_k\}, \{M_k\}$ $(N_0 = 0, M_0 = 2, M_k \geqq 2; k = 0, 1, \ldots)$ *Zahlenfolgen von natürlichen Zahlen mit* $N_k + 2M_k \leqq N_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Dann existiert ein im Grundintervall* $[a, b]$ *orthonormiertes Funktionensystem von Treppenfunktionen* $\Phi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *und eine Folge* *von meßbaren Mengen* $F_k(\subseteq[a,b])$ $(k=1,2,\ldots)$ *derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

die Mengen F_k $(k=1,2,\ldots)$ *sind stochastisch unabhängig*[4]) *und es gilt für* $k=1,2,\ldots$

$$\mu(F_k)=\frac{b-a}{5}; \tag{1.18}$$

für jedes $x\in F_k$ *gibt es eine von* x *abhängige natürliche Zahl* $m_k(x)$ $(<M_k)$ *derart, daß die Funktionswerte* $\Phi_{N_k+1}(x),\ldots,\Phi_{N_k+M_k+m_k(x)}(x)$ *gleiche Vorzeichen haben und*

$$|\Phi_{N_k+1}(x)+\cdots+\Phi_{N_k+M_k+m_k(x)}(x)|\geqq C\sqrt{M_k}\log M_k \tag{1.19}$$

gilt, wo C *eine von* k *und* x *unabhängige, positive Zahl ist;*

für jedes $t\in[a,b]$ *und für jedes* k $(k=0,1,\ldots)$ *ist*

$$\int_a^b\left|\sum_{n=N_k+1}^{N}\Phi_n(x)\Phi_n(t)\right|dx\leqq D\log^2 M_k \qquad (N_k+1\leqq N\leqq N_{k+1}), \tag{1.20}$$

wo $D(\geqq 1)$ *eine von* t *und* k *unabhängige, positive Zahl bedeutet.*

Beweis von Hilfssatz III. Es seien

$$\Phi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\chi_{n-1}([a,b];x) \qquad (n=1,\ldots,N_1).$$

Nach (1.16) bilden diese Funktionen in $[a,b]$ ein orthonormiertes System und nach (1.17) ist (1.20) für $k=0$ erfüllt.

Da die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_1)$ Treppenfunktionen sind, so kann das Intervall $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(1\leqq\varrho\leqq r)$ derart zerlegt werden, daß in den einzelnen Teilintervallen die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_1)$ konstant sind. Die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ bezeichnen wir mit I'_ϱ, I''_ϱ $(1\leqq\varrho\leqq r)$. Wir wenden den Hilfssatz I für die Zahl $M_1(\geqq 2)$ an. Wir setzen

$$\Phi_{N_1+l}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left\{\sum_{\varrho=1}^{r}f_l(M_1,I'_\varrho;x)-\sum_{\varrho=1}^{r}f_l(M_1,I''_\varrho;x)\right\} \qquad (l=1,\ldots,2M_1)$$

und

$$F_1=\bigcup_{\varrho=1}^{r}(F(I'_\varrho)\cup F(I''_\varrho)).$$

Da die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_1+2M_1)$ Treppenfunktionen sind, kann das Intervall $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle $\bar{I}_\varrho$ $(1\leqq\varrho\leqq r)$ zerlegt werden, derart, daß in den einzelnen Teilintervallen die Funktionen $\Phi_n(x)$

[4]) Betreffs dieser Definition siehe TANDORI [2], S. 69.

($1 \leqq n \leqq N_1 + 2M_1$) konstant sind. Die zwei Hälften des Intervalls $\bar{I}_\varrho$ bezeichnen wir mit $\bar{I}'_\varrho, \bar{I}''_\varrho$ ($1 \leqq \varrho \leqq \bar{r}$). Wir setzen

$$\Phi_{N_1+2M_1+l+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{\bar{r}} \chi_l(\bar{I}'_\varrho; x) - \sum_{\varrho=1}^{\bar{r}} \chi_l(\bar{I}''_\varrho; x) \right\}$$
$$(l = 0, \ldots, N_2 - N_1 - 2M_1 - 1).$$

Auf Grund von (1. 11) und (1. 16) kann gezeigt werden, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ ($1 \leqq n \leqq N_2$) in $[a, b]$ ein orthonormiertes Funktionensystem bilden. Nach (1. 12) besteht (1. 18) für $k = 1$. Ist $x \in F_1$, so folgt nach (1. 13), daß (1. 19) für $k = 1$ mit geeigneterweise gewähltem $m_1(x)$ gilt, mit $C = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{b-a}} A$, wo A die im Hilfssatz I stehende Zahl ist. Endlich, nach (1. 14) und (1. 17) folgt, daß (1. 20) für $k = 1$ besteht, mit $D = 2B$, wo B die im Hilfssatz I stehende Zahl bedeutet.

Es sei $\varkappa \geqq 2$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ ($1 \leqq n \leqq N_\varkappa$) und die Mengen F_k ($1 \leqq k \leqq \varkappa - 1$) schon definiert sind, derart, daß diese Funktionen in $[a, b]$ ein orthonormiertes Funktionensystem bilden, diese Mengen stochastisch unabhängig sind, und (1. 18), (1. 19) und (1. 20) für $k = 1, \ldots, \varkappa - 1$ erfüllt sind.

Dann kann das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle J_ϱ ($1 \leqq \varrho \leqq s$) derart zerlegt werden, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ ($1 \leqq n \leqq N_\varkappa$) in den einzelnen Teilintervallen konstant sind. Die zwei Hälften des Intervalls J_ϱ bezeichnen wir mit J'_ϱ, J''_ϱ ($1 \leqq \varrho \leqq s$). Wir wenden den Hilfssatz I mit der Zahl $M_\varkappa$ ($\geqq 2$) an. Wir setzen

$$\Phi_{N_\varkappa+l}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{s} f_l(M_\varkappa, J'_\varrho; x) - \sum_{\varrho=1}^{s} f_l(M_\varkappa, J''_\varrho; x) \right\} \qquad (l = 1, \ldots, 2M_\varkappa)$$

und

$$F_\varkappa = \bigcup_{\varrho=1}^{s} (J'_\varrho \cup J''_\varrho).$$

Da die Funktionen $\Phi_n(x)$ ($1 \leqq n \leqq N_\varkappa + 2M_\varkappa$) Treppenfunktionen sind, so kann das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle $\bar{J}_\varrho$ ($1 \leqq \varrho \leqq \bar{s}$) derart zerlegt werden, daß in den einzelnen Teilintervallen die Funktionen $\Phi_n(x)$ ($1 \leqq n \leqq N_\varkappa + 2M_\varkappa$) konstant sind. Die zwei Hälften des Intervalls $\bar{J}_\varrho$ bezeichnen wir mit $\bar{J}'_\varrho, \bar{J}''_\varrho$ ($1 \leqq \varrho \leqq \bar{s}$). Wir setzen

$$\Phi_{N_\varkappa+2M_\varkappa+l+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{\bar{s}} \chi_l(\bar{J}'_\varrho; x) - \sum_{\varrho=1}^{\bar{s}} \chi_l(\bar{J}''_\varrho; x) \right\}$$
$$(l = 0, \ldots, N_{\varkappa+1} - N_\varkappa - 2M_\varkappa - 1).$$

Auf Grund von (1. 11) und (1. 16) kann gezeigt werden, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_{\varkappa+1})$ in $[a, b]$ ein orthonormiertes Funktionensystem bilden. Nach (1. 12) besteht (1. 18) für $k=\varkappa$. Es ist klar, daß die Mengen $F_1, \ldots, F_\varkappa$ stochastisch unabhängig sind. Ist $x \in F_\varkappa$, so folgt nach (1. 13), daß (1. 19) für $k=\varkappa$ mit geeignet gewähltem $m_\varkappa(x)$ und mit der obigen Konstante C gilt. Nach (1. 14) und (1. 17) folgt endlich, daß (1. 20) für $k=\varkappa$ mit der obigen Konstante D besteht.

Mit vollständiger Induktion ergibt sich ein Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{F_m\}$, für welche die Bedingungen des Hilfssatzes III erfüllt sind.

§ 2. Beweis von Satz I

Es sei $\{\lambda(n)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ eine positive, monoton gegen Unendlich strebende Zahlenfolge, für die die Bedingung (1) erfüllt wird; ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\lambda(1) \geqq 2$ angenommen werden. Dann sei M eine positive Zahl, für die $\lambda(n) \leqq M \log^2 n$ $(n=2, 3, \ldots)$ gilt; wir können $M \geqq 1$ annehmen. Dann können eine im strengen Sinne monoton wachsende Indexfolge $\{\nu_m\}$ $(\nu_1 \geqq 16)$ und eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\bar\lambda(n)\}$ derart angegeben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) $\lambda(n) \leqq \bar\lambda(n) \leqq 2\lambda(n)$ $\qquad (n=1, 2, \ldots)$,

a) $\bar\lambda(\nu_m) \leqq \frac{1}{2}\bar\lambda(\nu_{m+1})$ $\qquad (m=1, 2, \ldots)$,

c) für $\nu_{m+1}-\nu_m > 1$ ist $\bar\lambda(\nu_{m+1}) \leqq 4\bar\lambda(\nu_m)$ $\qquad (m=1, 2, \ldots)$.

(Für die Konstruktion dieser Folgen siehe TANDORI [3], S. 174—175.)

Wir behaupten daß die Ungleichung

$$\nu_{m+1} \geqq 2\nu_m \tag{2. 1}$$

für unendlich viele m erfüllt wird. Im entgegengesetzten Fall gäbe es nämlich einen Index a derart, daß $\nu_{m+a} < 2^m \nu_a$ für $m=0, 1, \ldots$ gilt. Dann wäre nach (1) und a)

$$\bar\lambda(\nu_{m+a}) \leqq 2\lambda(\nu_{m+a}) \leqq 2M \log^2 \nu_{m+a} \leqq 2M\,(m+\log \nu_a)^2. \tag{2. 2}$$

Nach b) ist aber

$$\bar\lambda(\nu_{m+1}) \geqq 2^m \bar\lambda(\nu_1),$$

was für genügend großes m (2. 2) widerspricht.

Wir setzen $N_0=0$ und es sei $N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots$ eine wachsende unendliche Folge von solchen Indizes $\nu_m (\geqq 16)$, für die (2. 1) erfüllt wird.

Dann ist

$$(2.3) \qquad 2N_k \leqq N_{k+1} \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Nach a) und b) gilt weiterhin

$$(2.4) \quad 1+\lambda(N_1)+\cdots+\lambda(N_k) \leqq 1+\bar{\lambda}(N_1)+\cdots+\bar{\lambda}(N_k) \leqq 2\bar{\lambda}(N_k) \leqq 4\lambda(N_k)$$
$$(k=1,2,\ldots).$$

Wir definieren eine Folge von natürlichen Zahlen M_k $(k=0,1,\ldots)$ folgenderweise. Es sei $M_0=2$. Ist $N_k=\nu_{m_k}$, so gilt nach der Definition von N_k und auf Grund von (1), a), c) und (2. 1):

$$(2.5) \log^2\left[\frac{N_k}{2}\right] > \log^2\frac{N_k}{4} \geqq \frac{1}{4}\log^2 N_k \geqq \frac{1}{8M}\bar{\lambda}(N_k) \geqq \frac{1}{32M}\bar{\lambda}(\nu_{m_k+1}) \geqq \frac{1}{32M}\bar{\lambda}(2N_k)$$

$(k=1,2,\ldots)$. $\left(\left[\frac{N_k}{2}\right]\right.$ ist der ganze Teil von $\left.\frac{N_k}{2}\right)$. Es sei M_k die erste natürliche Zahl, für die die Bedingungen

$$M_k \geqq 2, \quad 2M_k \leqq N_k, \quad \log^2 M_k \geqq \frac{1}{32M}\bar{\lambda}(2N_k) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

erfüllt sind. Nach (2. 5) sind diese Bedingungen nicht in Widerspruch. Dann ist nach a)

$$(2.6) \qquad \log^2 M_k \geqq \frac{1}{32M}\lambda(N_k+2M_k) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

und nach (2. 3) gilt

$$(2.7) \qquad N_k+2M_k \leqq N_{k+1} \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Wir werden noch beweisen, daß

$$(2.8) \qquad \log^2 M_k \leqq \lambda(N_k) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

gilt. Im Falle $\frac{1}{32M}\bar{\lambda}(2N_k) \leqq 1$ ist $M_k=2$ nach der Definition, und so ist dann (2. 8) richtig. Ist aber $\frac{1}{32M}\bar{\lambda}(2N_k) > 1$, so ist $M_k > 2$ und folglich

$$\log^2(M_k-1) < \frac{1}{32M}\bar{\lambda}(2N_k);$$

nach der Definition von N_k und auf Grund von a) und c) gilt aber

$$\log^2 M_k = \log^2(M_k-1)+(\log^2 M_k - \log^2(M_k-1)) <$$
$$< \frac{1}{32M}\bar{\lambda}(2N_k)+1 < \frac{1}{16M}\bar{\lambda}(\nu_{m_k+1}) \leqq \frac{1}{4M}\bar{\lambda}(\nu_{m_k}) \leqq \frac{1}{2M}\lambda(N_k) < \lambda(N_k).$$

Damit haben wir (2. 8) auch in diesem Falle bewiesen.

Auf Grund von (2.7) kann Hilfssatz III auf die Folgen $\{N_k\}$ und $\{M_k\}$ angewendet werden. Das so erhaltene Funktionensystem bezeichnen wir mit $\{\Phi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$; wir werden zeigen, daß dieses System die in Satz I formulierten Eigenschaften besitzt.

Es sei N eine beliebige natürliche Zahl, etwa $N_\varkappa < N \leqq N_{\varkappa+1}$. Dann gilt nach (1.20), (2.4) und (2.8) überall in $[a,b]$

$$\int_a^b \left|\sum_{n=1}^{N} \Phi_n(x)\Phi_n(t)\right| dt \leqq \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \int_a^b \left|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \Phi_n(x)\Phi_n(t)\right| dt +$$

$$+\int_a^b \left|\sum_{n=N_\varkappa+1}^{N} \Phi_n(x)\Phi_n(t)\right| dt \leqq D(1+\log^2 M_1+\cdots+\log^2 M_\varkappa) \leqq$$

$$\leqq D(1+\lambda(N_1)+\cdots+\lambda(N_\varkappa)) \leqq 4D\lambda(N_\varkappa) = O(1)\lambda(N).$$

Damit haben wir die im Satze formulierte Eigenschaft (2) bewiesen.

Nun sei $\{w(n)\}$ eine positive Zahlenfolge, die die Bedingung (3) erfüllt. Mit vollständiger Induktion kann aus der Folge $\{N_k\}$ eine Teilfolge $\{N_{k_\nu}\}$ $(\nu=1,2,\ldots)$ ausgewählt werden, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$N_{k_{\nu+1}} > N_{k_\nu}, \quad \frac{w(n)}{\lambda(n)} \leqq \frac{1}{\nu^2} \quad \text{für} \quad n > N_{k_\nu} \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

Wir definieren eine Folge $\{a_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ folgendermaßen. Gibt es zu n ein ν mit

$$N_{k_\nu} < n \leqq N_{k_\nu}+2M_{k_\nu}, \quad \text{so sei} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{M_{k_\nu}}\log M_{k_\nu}} \qquad (\nu=1,2,\ldots),$$

sonst sei $a_n=0$ gesetzt. Dann ist nach (2.6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=N_{k_\nu}+1}^{N_{k_\nu}+2M_{k_\nu}} a_n^2 \lambda(n)\frac{w(n)}{\lambda(n)} \leqq 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\frac{\lambda(N_{k_\nu}+2M_{k_\nu})}{\log^2 M_{k_\nu}} \leqq 64\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} < \infty.$$

Für die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ ist also die Reihe (4) konvergent. Es bleibt zu beweisen, daß die mit diesen Koeffizienten gebildete Orthogonalreihe (5) fast überall divergiert. Nach Hilfssatz III gibt es für $x \in F_{k_\nu}$ eine von x abhängige natürliche Zahl $m_{k_\nu}(x)\,(< M_{k_\nu})$, für die die Funktionswerte $\Phi_{N_{k_\nu}+1}(x), \ldots, \Phi_{N_{k_\nu}+M_{k_\nu}+m_{k_\nu}(x)}(x)$ gleiche Vorzeichen haben und so nach (1.19)

$$\text{(2.9)} \qquad |a_{N_{k_\nu}+1}\Phi_{N_{k_\nu}+1}(x)+\cdots+a_{N_{k_\nu}+M_{k_\nu}+m_{k_\nu}(x)}\Phi_{N_{k_\nu}+M_{k_\nu}+m_{k_\nu}(x)}(x)| \geqq C$$

gilt.

Ist $x \in \overline{\lim_{\nu\to\infty}} F_{k_\nu}$, so gilt (2. 9) mit geeigneterweise gewählten $m_{k_\nu}(x)$ für unendlich viele ν; folglich ist die Reihe (5) im Punkt x divergent. Da aber die Mengen F_{k_ν} $(\nu=1,2,\ldots)$ stochastisch unabhängig sind und nach (1. 18)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(F_{k_\nu}) = \infty$$

ist, so folgt mit Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas (siehe z. B. FELLER [1], S. 155):

$$\mu(\lim_{\nu\to\infty} F_{k_\nu}) = b-a.$$

Also ist die orthogonale Reihe (5) in $[a, b]$ fast überall divergent.

Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

Schriftenverzeichnis

FELLER, W., [1] *An introduction to probability theory and its applications*, vol. I (New York, 1950).

HAAR, A., [1] Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Annalen*, **69** (1910), 331—371.

KACZMARZ, S., [1] Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux, *Studia Math.*, **1** (1929), 87—121; [2] Notes on orthogonal series. I, *ebenda*, **5** (1934), 26—28; [3] Notes on orthogonal series. II, *ebenda*, **5** (1934), 103—106.

MENCHOFF, D., [1] Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82—105; [2] Sur les multiplicateurs de convergence pour les séries de polynômes orthogonaux, *Mat. Sbornik*, **6** (48) (1939), 27—52.

RADEMACHER, H., [1] Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112—138.

Талалян, А. А., [1] О сходимости ортогональных рядов, Доклады Акад. Наук СССР, **110** (1956), 511—516.

TANDORI, K., [1] Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Reihen, *Acta Sci. Math.*, **14** (1951—52), 85—95; [2] Über die orthogonalen Funktionen. I, *ebenda*, **18** (1957), 57—130; [3] Über die orthogonalen Funktionen. III (Lebesguesche Funktionen), *ebenda*, **18** (1957), 169—178.

(Eingegangen am 15. September 1958)

Über die orthogonalen Funktionen. VI
(Eine genaue Bedingung für die starke Summation)

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

Einleitung

Es sei $\{\varphi_\nu(x)\}$ $(\nu=1,2,\ldots)$ ein im Intervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem und $\{c_\nu\}$ $(\nu=1,2,\ldots)$ eine reelle Zahlenfolge mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2<\infty.$$

Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x),$$

ihre n-te Partialsumme bezeichnen wir mit $s_n(x)$.

Es sei weiterhin $\{\nu_n\}$ eine Indexfolge: $(1\leqq)\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_n<\cdots$. Wir betrachten die Folge

$$\sigma_n(\{\nu\};x)=\frac{s_{\nu_1}(x)+\cdots+s_{\nu_n}(x)}{n} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

In einer vorigen Mitteilung haben wir eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß die Folge $\{\sigma_n(\{\nu\};x)\}$ für *jede* Indexfolge $\{\nu_n\}$ fast überall konvergiert, nämlich die Bedingung $\sum_\nu c_\nu^2 \log\nu<\infty$ (TANDORI [1], Satz III). In der vorliegenden Note werden wir dieses Resultat wesentlich verschärfen. Wir werden nämlich den folgenden Satz beweisen.

Satz. *Ist*

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} c_\nu^2(\log\log\nu)^2<\infty, \tag{1}$$

so gibt es eine quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ derart, daß

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]^2\to 0$$

für jede Indexfolge $\{\nu_n\}$ in $[a,b]$ fast überall gilt.

Für die Indexfolge $\nu_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ hat diesen Satz BORGEN [1] bewiesen und in diesem Falle folgt dieser Satz aus den Resultaten von KACZMARZ [1] bzw. MENCHOFF [1] und ZYGMUND [1].

Wegen

$$\left|\frac{s_{\nu_1}(x)+\cdots+s_{\nu_N}(x)}{N}-f(x)\right|=\frac{|(s_{\nu_1}(x)-f(x))+\cdots+(s_{\nu_N}(x)-f(x))|}{N}\leqq$$

$$\leqq\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]^2}$$

ist unter der Bedingung (1) *die Folge* $\{\sigma_n(\{\nu\};x)\}$ *für jede Indexfolge* $\{\nu_n\}$ *in* $[a, b]$ *fast überall konvergent*. Für die Indexfolge $\nu_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ haben dieses Resultat KACZMARZ [1] und MENCHOFF [1] unabhängig voneinander bekommen.

Unsere Bedingung kann nicht mehr verfeinert werden. (Siehe z. B. KACZMARZ [1], MENCHOFF [1] und TANDORI [2].)

§ 1. Hilfssätze

Zum Beweis unseres Satzes benötigen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz I. *Für die Konvergenz fast überall der Folge* $\{\sigma_n(\{\nu\};x)\}$ *ist notwendig und hinreichend, daß die Folge* $\{s_{\nu_{2^n}}(x)\}$ *fast überall konvergiert*[1]).

Beweis. Wir haben bewiesen (TANDORI [1], S. 21), daß

$$s_{\nu_{2^n}}(x)-\sigma_{2^n}(\{\nu\};x)\to 0$$

fast überall gilt, was die Notwendigkeit der Bedingung bedeutet.

Um die Hinlänglichkeit der Bedingung zu beweisen, betrachten wir die folgende Abschätzung:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\int_a^b[\sigma_{n+1}(\{\nu\};x)-\sigma_n(\{\nu\};x)]^2dx=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sum_{\nu=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}c_\nu\varphi_\nu(x)+\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}}c_\nu\varphi_\nu(x)\right]^2dx=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2\sum_{\nu=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}c_\nu^2\right)\leqq$$

$$\leqq\sum_{k=1}^{\infty}k^2\sum_{\nu=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}c_\nu^2\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^3}\right)\leqq 2\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu^2<\infty.$$

[1]) Dieser Hilfssatz ist für $\nu_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bekannt (siehe KOLMOGOROFF [1] und KACZMARZ und STEINHAUS [1], S. 190).

Mit Anwendung des Satzes von LEVI ergibt sich daraus, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}(\{\nu\};x)-\sigma_n(\{\nu\};x))^2$$

fast überall konvergiert.

Es sei $2^m < n < 2^{m+1}$. Dann gilt auf Grund der obigen Relationen

$$|\sigma_n(\{\nu\};x)-\sigma_{2^m}(\{\nu\};x)| = \left|\sum_{k=2^m}^{n-1}(\sigma_{k+1}(\{\nu\};x)-\sigma_k(\{\nu\};x))\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=2^m}^{n-1}(k+1)(\sigma_{k+1}(\{\nu\};x)-\sigma_k(\{\nu\};x))^2 \sum_{k=2^m}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}(k+1)(\sigma_{k+1}(\{\nu\};x)-\sigma_k(\{\nu\};x))^2 \to 0$$

fast überall. Da die Folge $\{\sigma_{2^m}(\{\nu\};x)\}$ nach den obigen fast überall konvergiert, so folgt daraus die Behauptung.

Hilfssatz II. *Für die Konvergenz fast überall der Folge* $\{\sigma_n(\{\nu\};x)\}$ *zu einer Funktion* $f(x)$ *ist notwending und hinreichend, daß*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]^2 \to 0$$

fast überall gilt.[2])

Beweis. Nach der Abschätzung

$$|\sigma_N(\{\nu\};x)-f(x)| = \left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(s_{\nu_k}(x)-f(x))\right| \leqq \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[s_{\nu_k}(x)-f(x)]^2}$$

ist die Hinlänglichkeit der Bedingung klar.

Um die Notwendigkeit der Bedingung zu beweisen, definieren wir die Indexfolge $\{\mu_n\}$: für $2^m \leqq n < 2^{m+1}$ $(m=0,1,\ldots)$ sei $\mu_n = \nu_{2^m}$. Es gilt die Abschätzung

$$(1.1)\quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-f(x)]^2 \leqq \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\nu_n}(x)-s_{\mu_n}(x)]^2+\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_{\mu_n}(x)-f(x)]^2.$$

Da nach Hilfssatz I $s_{\mu_n}(x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$ fast überall gilt, so konvergiert das zweite Glied fast überall gegen 0. Mit einfacher Rechnung bekommen wir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_a^b[s_{\nu_n}(x)-s_{\mu_n}(x)]^2\,dx = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{n}(c^2_{\nu_{2^m+1}}+\cdots+c^2_{\nu_n}) \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{\infty}(c^2_{\nu_{2^m+1}}+\cdots+c^2_{\nu_{2^{m+1}}})\sum_{n=2^m+1}^{\infty}\frac{1}{n} \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu^2 < \infty.$$

---

[2]) Dieser Hilfssatz ist für $\nu_n = n$ $(n=1,2,\ldots)$ bekannt (ZYGMUND [1]).

Daraus folgt auf Grund des Satzes von LEVI, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [s_{\nu_n}(x) - s_{\mu_n}(x)]^2$$

fast überall konvergiert. Mit Anwendung des Kroneckerschen Hilfssatzes (siehe z. B. ZYGMUND [2], S. 255) ergibt sich, daß

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} [s_{\nu_n}(x) - s_{\mu_n}(x)]^2 \to 0$$

fast überall gilt. Daraus folgt die Behauptung auf Grund von (1. 1).

Hilfssatz III. *Es sei $\{f_k(x)\}$ $(k=1,\ldots,p)$ ein im Intervall $[a,b]$ orthogonales Funktionensystem, es sei weiterhin*

$$a_k^2 = \int_a^b f_k^2(x)\,dx \qquad (k=1,\ldots,p).$$

Dann gibt es eine nicht-negative Funktion $\delta(x)$ derart, daß

$$|f_1(x) + \cdots + f_l(x)| \leqq \delta(x) \qquad (l=1,\ldots,p)$$

in $[a,b]$ überall besteht und die Abschätzung

$$\int_a^b \delta^2(x)\,dx \leqq M(\log(p+1))^2 \sum_{k=1}^{p} a_k^2$$

gilt, wo M eine positive Konstante ist[3]).

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe z. B. KACZMARZ—STEINHAUS [1], S. 162.)

§ 2. Beweis des Satzes

Nach Sätzen von KACZMARZ [1] bzw. MENCHOFF [1] und KOLMOGOROFF [1] konvergiert unter der Bedingung (1) die Folge $\{s_{2^m}(x)\}$ fast überall gegen eine quadratisch-integrierbare Funktion $f(x)$. Es sei $m (\geqq 2)$ eine beliebige, natürliche Zahl, für die die Menge der natürlichen Zahlen n mit $2^m < \nu_{2^n} < 2^{m+1}$ nicht leer ist, sie möge aus den Zahlen n mit $n_1(m) \leqq n \leqq n_2(m)$ bestehen. Mit Anwendung des Hilfssatzes III auf die Funktionen

$$f_1(x) = s_{\nu_{2^{n_1(m)}}}(x) - s_{2^m}(x),\quad f_2(x) = s_{\nu_{2^{n_1(m)+1}}}(x) - s_{\nu_{2^{n_1(m)}}}(x),\ \ldots$$
$$\ldots,\ f_{n_2(m)-n_1(m)+1}(x) = s_{\nu_{2^{n_2(m)}}}(x) - s_{\nu_{2^{n_2(m)-1}}}(x)$$

---

[3]) In dieser Arbeit wird der Logarithmus mit der Basis 2 verwendet.

erhalten wir eine nichtnegative Funktion $\delta_m(x)$, für die im Falle $2^m < \nu_{2^n} < 2^{m+1}$

$$|s_{\nu_{2^n}}(x) - s_{2^m}(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n-n_1(m)+1} f_k(x) \right| \leqq \delta_m(x) \tag{2. 1}$$

in $[a, b]$ überall gilt und

$$\int_a^b \delta_m^2(x)dx \leqq M(\log(n_2(m) - n_1(m) + 2))^2 \sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} c_\nu^2$$

ist. Es ist klar, daß $n_2(m) - n_1(m) + 1 \leqq m$ besteht und so ist

$$(\log(n_2(m) - n_1(m) + 2))^2 \sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} c_\nu^2 \leqq 2 \sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} c_\nu^2 (\log\log\nu)^2.$$

Daraus folgt nach der Annahme, daß

$$\sum_{m=2}^{\infty} \int_a^b \delta_m^2(x)dx < \infty$$

ist, und so konvergiert die Reihe

$$\sum_{m=2}^{\infty} \delta_m^2(x)$$

fast überall. Daraus folgt nach (2. 1), daß für $2^m < \nu_{2^n} < 2^{m+1}$ und $m \to \infty$ fast überall gilt:

$$s_{\nu_{2^n}}(x) - s_{2^m}(x) \to 0.$$

Also konvergiert $s_{\nu_{2^n}}(x)$ fast überall in $[a, b]$ gegen eine Funktion $f(x)$. Nach Hilfssatz I folgt daraus $\sigma_n(\{\nu\}; x) \to f(x)$ fast überall in $[a, b]$. Mit Anwendung des Hilfssatzes II ergibt sich endlich die Behauptung.

Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

Schriftenverzeichnis

Borgen, S., [1] Über $(C, 1)$-summierbarkeit von Reihen orthogonaler Funktionen, *Math. Annalen*, **98** (1928), 125—150.

Kaczmarz, S., [1] Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 99—105.

Kaczmarz, S., und Steinhaus, H., [1] *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa-Lwów, 1935).

Kolmogoroff, A. N., [1] Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), 96—97.

Menchoff, D., [1] Sur les séries de fonctions orthogonales (Deuxième Partie), *Fundamenta Math.*, **8** (1926), 56—108,

Tandori, K., [1] Über die orthogonalen Funktionen. IV, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 18—25.; [2] Über die orthogonalen Funktionen. II, *ibidem*, **18** (1957), 149—168.

Zygmund, A., [1] Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356—362.; [2] *Trigonometrical series* (Warszawa—Lwów, 1935).

(Eingegangen am 11. September 1958)

Über die orthogonalen Funktionen. VII (Approximationssätze)

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Einleitung

Es sei $\{\varphi_k(x)\}$ $(k=1,2,\ldots)$ ein im Intervall $[a,b]$ orthonormiertes, reellwertiges Funktionensystem und es sei $\{c_k\}$ $(k=1,2,\ldots)$ eine reelle Koeffizientenfolge; in folgendem werden wir immer annehmen, daß $\{c_k\}\in l^2$ ist. Wir betrachten die Orthogonalreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x). \tag{1}$$

Nach dem Riesz—Fischerschen Satz konvergieren die Partialsummen $s_n(x)$ dieser Reihe im Mittel gegen eine quadratisch-integrierbare Funktion $f(x)$, $f(x)$ ist also durch die Reihe (1) bis auf eine Nullmenge bestimmt.

Neuerdings hat J. MEDER[1]) den folgenden Satz bewiesen.

Besteht die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \log^{2-\varepsilon} k < \infty$$

mit einem ε, $0<\varepsilon<1$, *so gilt*

$$\sigma_n(x)-f(x)=o\left(\frac{1}{\sqrt{\log^{1-\varepsilon} n}}\right)$$

fast überall, wo $\sigma_n(x)$ *die n-te* $(C,1)$*-Mittel der Reihe* (1) *bezeichnet.*

In dieser Note werden wir dieses Resultat verallgemeinern. Zuerst verabreden wir die folgende Bezeichnung: ist $\{f_n(x)\}$ eine in $[a,b]$ definierte Funktionenfolge und $\{\lambda(n)\}$ eine positive Zahlenfolge, so soll

$$\text{„fast überall } f_n(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)\text{“}$$

[1]) J. MEDER, On the estimation of Cesàro means of orthonormal series, *Annales Polonici Mathematici*, 4 (1957—58), 183—200.

bedeuten, daß a) fast überall $\lambda(n)f_n(x)\to 0$ gilt und b) eine positive, von der Folge $\{f_n(x)\}$ abhängige Funktion $F(x)\in L^2[a,b]$ existiert, für die $\lambda(n)|f_n(x)|\leqq \leqq F(x)$ $(n=1,2,\dots; a\leqq x\leqq b)$ gilt.

Mit dieser Bezeichnung können unsere Sätze folgenderweise ausgesprochen werden:

Satz I. *Es sei $\{\lambda(n)\}$ eine positive, monoton gegen Unendlich wachsende Zahlenfolge. Ist*

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(\log k)^2\lambda^2(k)<\infty,$$

so gilt fast überall

$$s_n(x)-f(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right).$$

Satz II. *Es sei $\{\lambda(n)\}$ eine positive, monoton gegen Unendlich wachsende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

(3) $$\lambda(n^2)\leqq c\lambda(n) \qquad (n=1,2,\dots)$$

erfüllt wird, wo c eine positive Konstante ist. Ist

(4) $$\sum_{k=2}^{\infty} c_k^2(\log\log k)^2\lambda^2(k)<\infty,$$

so gilt fast überall

$$\sigma_n(x)-f(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

Es ist klar, daß Satz II den Satz von J. Meder enthält.

§ 1. Beweis von Satz I

Aus (2) folgt nach einem bekannten Satz (s. z. B. G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya, *Inequalities* (Cambridge, 1934), 120—121), daß eine positive, monoton gegen Unendlich wachsende Zahlenfolge $\{\mu(n)\}$ gibt, für die die Bedingungen

(1. 1) $$\lambda(n)=o(\mu(n)),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(\log k)^2\mu^2(k)<\infty$$

erfüllt sind. Die n-te Partiellensumme der Orthogonalreihe

(1. 2) $$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\mu(k)\varphi_k(x)$$

bezeichnen wir mit $s_n^*(x)$. Nach dem Satz von D. Menchoff und H. Rade-

MACHER konvergiert die Reihe (1. 2) fast überall und es gibt eine quadratisch-integrierbare Funktion $G(x)$ derart, daß

$$|s_n^*(x)| \leqq G(x) \qquad (n=1,2,\dots) \tag{1.3}$$

im Grundintervall fast überall gilt (s. z. B. S. KACZMARZ—H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935), 161—164).

Auf Grund von (2), mit Anwendung des erwähnten Satzes von D. MENCHOFF und H. RADEMACHER, ergibt sich:

$$s_n(x)-f(x)=-\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)=-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\mu(k)}c_k\mu(k)\varphi_k(x)=$$

$$=-\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu(k)}-\frac{1}{\mu(k+1)}\right)s_k^*(x)+\frac{1}{\mu(n+1)}s_n^*(x),$$

und so ist nach (1. 3)

$$|s_n(x)-f(x)| \leqq 2G(x)\frac{1}{\mu(n)},$$

woraus, auf Grund von (1. 1), die Behauptung folgt.

§ 2. Beweis von Satz II

Zum Beweis von Satz II benötigen wir den folgenden

Hilfssatz. *Es sei $\{h_l(x)\}$ $(l=1,\dots,p;\ p\geqq 2)$ ein im Intervall $[a,b]$ orthogonales Funktionensystem und sei*

$$\int_a^b h_l^2(x)\,dx=a_l^2 \quad (l=1,\dots,p).$$

Dann gibt es eine Funktion $\delta(x)$, die die folgende Eigenschaften hat:

$$|h_1(x)+\dots+h_l(x)| \leqq \delta(x) \qquad (l=1,\dots,p;\ a\leqq x\leqq b)$$

und

$$\int_a^b \delta^2(x)\,dx \leqq A\log^2 p\sum_{l=1}^{p} a_l^2\,,$$

dabei ist A eine absolute Konstante.

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe z. B. S. KACZMARZ—H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935), S. 162.)

Da nach (4)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^2(2^{2^n})\int_a^b[s_{2^{2^n}}(x)-f(x)]^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^2(2^{2^n})\sum_{k=2^{2^n}+1}^{\infty}c_k^2=$$

$$=\sum_{k=3}^{\infty}c_k^2\sum_{2^{2^n}<k}\lambda^2(2^{2^n})=\sum_{k=2}^{\infty}c_k^2(\log\log k)^2\lambda^2(k)<\infty$$

gilt, konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^2(2^{2^n})\,[s_{2^{2^n}}(x)-f(x)]^2$$

fast überall und so ist fast überall

$$s_{2^{2^n}}(x)-f(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(2^{2^n})}\right). \tag{2.1}$$

Mit Anwendung des Hilfssatzes auf die Funktionen $s_{2^n}(x)-s_{2^{n-1}}(x)$ $(n=2^m+1, 2^m+2, \ldots, 2^{m+1})$ bekommen wir, daß eine Funktion $\bar{\delta}_m(x)$ existiert, für die die Ungleichungen

$$|s_{2^n}(x)-s_{2^{2^m}}(x)|\leqq \bar{\delta}_m(x) \qquad (2^m<n\leqq 2^{m+1}), \tag{2.2}$$

$$\int_a^b \bar{\delta}_m^2(x)\,dx \leqq A m^2 \sum_{k=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}} c_k^2 \tag{2.3}$$

erfüllt sind; dies gilt für jede natürliche Zahl m.

Da nach (2.3) und (4)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^2(2^{2^m})\int_a^b \bar{\delta}_m^2(x)dx \leqq A \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^2(2^{2^m})\,m^2 \sum_{k=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}} c_k^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=2}^{\infty} c_k^2(\log\log k)^2\lambda^2(k)<\infty$$

gilt, konvergiert die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^2(2^{2^m})\bar{\delta}_m^2(x)$$

fast überall, also gilt

$$\bar{\delta}_m(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(2^{2^m})}\right)$$

fast überall. Zu jeder natürlichen Zahl n $(n>3)$ bestimmen wir die natürliche Zahl m so, daß $2^m<n\leqq 2^{m+1}$ gilt. Auf Grund von (3), (2.1) und (2.2) ergibt sich dann, daß

$$s_{2^n}(x)-f(x)=s_{2^n}(x)-s_{2^{2^m}}(x)+s_{2^{2^m}}(x)-f(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(2^n)}\right) \tag{2.4}$$

fast überall besteht.

Mit einfacher Rechnung ergibt sich die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2(2^n)\int_a^b [s_{2^n}(x)-\sigma_{2^n}(x)]^2dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^2(2^n)\sum_{k=1}^{2^n}\frac{k^2}{4^n}c_k^2=\\ &=\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2k^2\sum_{2^n\geqq k}\frac{\lambda^2(2^n)}{4^n}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2k^2\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\lambda^2(2^n)}{4^n},\end{aligned} \tag{2.5}$$

wo $n_0 = n_0(k)$ jene nichtnegative ganze Zahl ist, für die $2^{n_0-1} < k \leqq 2^{n_0}$ besteht. Ist $2^{m_0-1} \leqq n_0 < 2^{m_0}$, so gilt nach (3)

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\lambda^2(2^n)}{4^n} = \sum_{n=n_0}^{2^{m_0}-1} \frac{\lambda^2(2^n)}{4^n} + \sum_{\nu=m_0}^{\infty} \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \frac{\lambda^2(2^n)}{4^n} \leqq$$

$$\leqq \frac{\lambda^2(2^{2^{m_0}})}{4^{n_0}} \sum_{n=n_0}^{2^{m_0}-1} \frac{1}{4^{n-n_0}} + \sum_{\nu=m_0}^{\infty} \lambda^2(2^{2^{\nu+1}}) \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \frac{1}{4^n} \leqq$$

$$\leqq \frac{4}{3} c \frac{\lambda^2(k)}{k^2} + c\lambda^2(k) \sum_{\nu=m_0}^{\infty} \frac{c^{\nu-m_0}}{4^{2^\nu}} \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \frac{1}{4^{n-2^\nu}} \leqq$$

$$\leqq \frac{4}{3} c \left(\frac{\lambda^2(k)}{k^2} + \frac{\lambda^2(k)}{k^2} \sum_{\nu=m_0}^{\infty} \frac{c^{\nu-m_0}}{4^{2^\nu-2^{m_0}}} \right) \leqq M \frac{\lambda^2(k)}{k^2},$$

wo M eine positive, von k unabhängige Konstante bedeutet. Nach (2.5) und (4) folgt die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2(2^n) \int_a^b [s_{2^n}(x) - \sigma_{2^n}(x)]^2 dx \leqq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda^2(k) < \infty.$$

Daraus ergibt sich, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2(2^n) [s_{2^n}(x) - \sigma_{2^n}(x)]^2$$

fast überall konvergiert; also fast überall

$$s_{2^n}(x) - \sigma_{2^n}(x) = \bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(2^n)}\right)$$

gilt. Nach (2.4) ergibt sich

$$\sigma_{2^n}(x) - f(x) = \sigma_{2^n}(x) - s_{2^n}(x) + s_{2^n}(x) - f(x) = \bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(2^n)}\right) \tag{2.6}$$

fast überall.

Mit einfacher Rechnung ergibt sich endlich

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^2(n) n \int_a^b [\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)]^2 dx &= \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^2(n) n \left[\frac{1}{n^2(n-1)^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 c_k^2 + \frac{1}{n^2} c_n^2 \right] \leqq \\ &\leqq 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^2(n)}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 c_k^2 = 4 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 k^2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^2(n)}{n^3}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Für $k \geqq 2$ sei $m_0 = m_0(k)$ jene ganze Zahl, für die $2^{2^{m_0-1}} \leqq k < 2^{2^{m_0}}$ gilt. Dann ist nach (3)

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^2(n)}{n^3}=\sum_{n=k}^{2^{2^{m_0}}-1}\frac{\lambda^2(n)}{n^3}+\sum_{\nu=m_0}^{\infty}\sum_{n=2^{2^\nu}}^{2^{2^{\nu+1}}-1}\frac{\lambda^2(n)}{n^3}\leqq$$

$$\leqq 4c\frac{\lambda^2(k)}{k^2}+c\sum_{\nu=m_0}^{\infty}\lambda^2(2^{2^\nu})\sum_{n=2^{2^\nu}}^{2^{2^{\nu+1}}-1}\frac{1}{n^3}\leqq 4c\left[\frac{\lambda^2(k)}{k^2}+\lambda^2(k)\sum_{\nu=m_0}^{\infty}\frac{c^{\nu-m_0}}{(2^{2^\nu})^2}\right]\leqq$$

$$\leqq 4c\left[\frac{\lambda^2(k)}{k^2}+\frac{\lambda^2(k)}{k^2}\sum_{\nu=m_0}^{\infty}\frac{c^{\nu-m_0}}{4^{2^\nu-2^{m_0}}}\right]\leqq \bar{M}\frac{\lambda^2(k)}{k^2},$$

wo $\bar{M}$ eine von k unabhängige, positive Konstante ist; $\bar{M}$ kann so gewählt werden, daß diese Abschätzung für jedes $k(\geqq 1)$ gilt. Aus (2.7), nach (4) folgt dann die Abschätzung

$$\sum_{n=2}^{\infty}\lambda^2(n)n\int_a^b[\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)]^2dx\leqq \bar{M}\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\lambda^2(k)<\infty.$$

Daraus folgt, daß die Reihe fast überall konvergiert und so gilt

$$\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}\lambda^2(k)k[\sigma_k(x)-\sigma_{k-1}(x)]^2=\bar{o}(1) \tag{2.8}$$

fast überall.

Es sei $2^m<n<2^{m+1}$. Dann ist nach (2.8)

$$|\sigma_n(x)-\sigma_{2^m}(x)|=\left|\sum_{k=2^m+1}^{n}(\sigma_k(x)-\sigma_{k-1}(x))\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=2^m+1}^{n}\lambda(k)\sqrt{k}(\sigma_k(x)-\sigma_{k-1}(x))\frac{1}{\lambda(k)\sqrt{k}}\right|\leqq$$

$$\leqq\left\{\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}\lambda^2(k)k[\sigma_k(x)-\sigma_{k-1}(x)]^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{k}\right\}^{1/2}\frac{1}{\lambda(2^m)}=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(2^m)}\right)$$

fast überall und so folgt nach (3) im Falle $2^m<n<2^{m+1}$

$$\sigma_n(x)-\sigma_{2^m}(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

fast überall.

Nach (2.6) ergibt sich endlich, daß die Relation

$$\sigma_n(x)-f(x)=\sigma_n(x)-\sigma_{2^m}(x)+\sigma_{2^m}(x)-f(x)=\bar{o}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

fast überall gilt.

Damit haben wir Satz II vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 14. Oktober 1958)

Bemerkung zur Divergenz der trigonometrischen Reihen

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Einleitung

S. B. STECKIN hat den folgenden Satz bewiesen[1]:

Satz. *Es sei* $\{\varrho_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ *eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 = \infty \tag{1}$$

erfüllt. Dann kann eine reelle Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ *derart angegeben werden, daß die trigonometrische Reihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \cos n(x-\lambda_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \sin n(x-\lambda_n)$$

überall divergieren.

Dieser Satz ist eine Verschärfung eines Satzes von NEDER[2]), der nur behauptet, daß unter den obigen Bedingungen eine reelle Zahlenfolge $\{\alpha_n\}$ existiert, für die die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\alpha_n} z^n$$

am Rande des Einheitskreises überall divergiert.

In dieser Note werden wir für den Satz einen einfacheren Beweis mitteilen.

---

[1]) С. Б. Стечкин, О тригонометрических рядах, расходящихся в каждой точке, Известия Акад. Наук СССР, 21 (1957), 711—728.

[2]) L. NEDER, Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, *Math. Annalen*, 84 (1921), 117—136.

§ 1. Hilfssätze

Zum Beweis benötigen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz I. *Es seien n und N natürliche Zahlen mit*

$$2^9 n \leqq N. \tag{1.1}$$

Dann können reelle Zahlen $\mu_k = \mu_k(n, N)$ $(N+1 \leqq k \leqq N+16n)$ derart angegeben werden, daß die trigonometrischen Polynome

$$P(n, N; x) = \sum_{k=N+1}^{N+16n} \cos k(x-\mu_k), \quad \tilde{P}(n, N; x) = \sum_{k=N+1}^{N+16n} \sin k(x-\mu_k)$$

folgende Eigenschaft haben: zu jedem Punkt x des Intervalls $\left[0, \frac{\pi}{2^9 n}\right]$ gibt es natürliche Zahlen $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ $(N+1 \leqq p_1(x) < p_2(x) \leqq N+16n$, $N+1 \leqq q_1(x) < q_2(x) \leqq N+16n)$ derart, daß im Punkte x die Funktionen $\cos k(x-\mu_k)$ für $p_1(x) \leqq k \leqq p_2(x)$, bzw. die Funktionen $\sin k(x-\mu_k)$ für $q_1(x) \leqq k \leqq q_2(x)$ gleiche Vorzeichen haben und die Abschätzungen

$$\left|\sum_{k=p_1(x)}^{p_2(x)} \cos k(x-\mu_k)\right| \geqq \frac{n}{2}, \quad \left|\sum_{k=q_1(x)}^{q_2(x)} \sin k(x-\mu_k)\right| \geqq \frac{n}{2}$$

gelten.

Beweis von Hilfssatz I. Es sei a eine natürliche Zahl mit

$$a \geqq n, \quad 2^5 a < N. \tag{1.2}$$

Wir betrachten die trigonometrischen Polynome

$$T(n, N+a; x) =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos(n-1)x\right)\cos(N+a)x + \cos(N+a+n)x =$$
$$= \sum_{\nu=N+a-n+1}^{N+a+n} \cos \nu x,$$

$$\tilde{T}(n, N+a; x) =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos(n-1)x\right)\sin(N+a)x + \sin(N+a+n)x =$$
$$= \sum_{\nu=N+a-n+1}^{N+a+n} \sin \nu x.$$

Für $|x| \leqq \frac{\pi}{4n}$ ist $\cos kx \geqq \frac{1}{2}$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$, also gilt

$$2\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos(n-1)x\right) \geqq n \tag{1.3}$$

für $|x| \leqq \frac{\pi}{4n}$. Ferner ist

(1.4) $$|\cos(N+a)x| \geqq \frac{1}{2}$$

für $x \in \left[\frac{k\pi}{N+a} - \frac{\pi}{4(N+a)}, \frac{k\pi}{N+a} + \frac{\pi}{4(N+a)}\right]$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Nach (1.2) ist $N+a \leqq 2N$ und so gilt (1.4) auch für $x \in I(k,a) = \left[\frac{k\pi}{N+a} - \frac{\pi}{8N}, \frac{k\pi}{N+a} + \frac{\pi}{8N}\right]$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Es sei $I(k) = \left[\frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{16N}, \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{16N}\right]$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Ist $|k| \leqq \frac{N}{16a}$, so gilt

$$\left|\frac{k\pi}{N} - \frac{k\pi}{N+a}\right| = \frac{a\pi}{N(N+a)}|k| < \frac{\pi}{16N}.$$

Nach der Definition der Intervalle $I(k,a)$ und $I(k)$ ist also $I(k) \subseteqq I(k,a)$ für $|k| \leqq \frac{N}{16a}$. Ist $x \in I(k)$ $\left(|k| \leqq \frac{N}{16a}\right)$, so gilt (1.4); nach (1.2) hat man

$$|x| \leqq \frac{|k|\pi}{N} + \frac{\pi}{16N} \leqq \frac{\pi}{16a} + \frac{\pi}{16N} < \frac{\pi}{8n}$$

und so gilt in diesem Falle auch (1.3). Also ist

(1.5) $$\begin{aligned} &|T(n, N+a; x) - \cos(N+a+n)x| = \\ &= \left|\sum_{\nu=N+a-n+1}^{N+a+n-1} \cos \nu x\right| \geqq \frac{n}{2} \quad \text{für} \quad x \in I(k) \quad \left(|k| \leqq \frac{N}{16a}\right). \end{aligned}$$

Ähnlicherweise ist

(1.6) $$|\sin(N+a)x| \geqq \frac{1}{2}$$

für $x \in J(k,a) = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2(N+a)} - \frac{\pi}{8N}, \frac{(2k+1)\pi}{2(N+a)} + \frac{\pi}{8N}\right]$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Es sei $J(k) = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2N} - \frac{\pi}{16N}, \frac{(2k+1)\pi}{2N} + \frac{\pi}{16N}\right]$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. Ist $|k| \leqq \frac{N}{16a} - 1$ $(\geqq 1)$, so gilt

$$\left|\frac{(2k+1)\pi}{2N} - \frac{(2k+1)\pi}{2(N+a)}\right| \leqq \frac{a\pi}{2N(N+a)}(2|k|+1) \leqq \frac{a\pi}{2N(N+a)} \frac{N}{8a} < \frac{\pi}{16N}.$$

Nach der Definition der Intervalle $J(k,a)$ und $J(k)$ ist also $J(k) \subseteqq J(k,a)$

für $|k| \leqq \frac{N}{16a} - 1$. Ist $x \in J(k)$ $\left(|k| \leqq \frac{N}{16a} - 1\right)$, so gilt (1.6); nach (1.2) hat man

$$|x| \leqq \frac{(2|k|+1)\pi}{2N} + \frac{\pi}{16N} \leqq \frac{\pi}{16a} + \frac{\pi}{16N} < \frac{\pi}{8n}$$

und so gilt in diesem Falle auch (1.3). Also ist

$$|\tilde{T}(n, N+a; x) - \sin(N+a+n)x| =$$

(1.7) $$= \left| \sum_{\nu=N+a-n+1}^{N+a+n-1} \sin \nu x \right| \geqq \frac{n}{2} \quad \text{für} \quad x \in J(k) \quad \left(|k| \leqq \frac{N}{16a} - 1\right).$$

Wir betrachten die trigonometrischen Polynome

$$T\left(n, N+(2l+1)n; x - \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) \qquad (l=0, 1, \dots, 7).$$

Nach (1.1), (1.2), (1.5) und (1.7) ergibt sich

$$\Bigg| T\left(n, N+(2l+1)n; x - \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) -$$
$$- \cos(N+2(l+1)n)\left(x - \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right)\Bigg| \geqq \frac{n}{2}$$
$$\text{für} \quad x \in I(k) + \frac{(2l+1)\pi}{16N} \quad \left(0 \leqq k \leqq \frac{N}{2^8 n}\right),$$
$$\Bigg| \tilde{T}\left(n, N+(2l+1)n; x - \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) -$$
$$- \sin(N+2(l+1)n)\left(x - \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right)\Bigg| \geqq \frac{n}{2}$$
$$\text{für} \quad x \in J(k) + \frac{(2l+1)\pi}{16N} \quad \left(-1 \leqq k \leqq \frac{N}{2^8 n} - 1\right).$$ [4]

Da nach der Definition von $I(k)$ und $J(k)$

$$\bigcup_{l=0}^{7} \bigcup_{k=0}^{\left[\frac{N}{2^8 n}\right]} \left(I(k) + \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) \supseteqq \left[0, \left[\frac{N}{2^8 n}\right]\frac{\pi}{N}\right],$$

$$\bigcup_{l=0}^{7} \bigcup_{k=-1}^{\left[\frac{N}{2^8 n}\right]-1} \left(J(k) + \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) \supseteqq \left[0, \left[\frac{N}{2^8 n}\right]\frac{\pi}{N}\right]$$ [5]

[4]) Für $I=[u, v]$ bezeichnet $I+a$ das Intervall $[u+a, v+a]$.

[5]) $[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α.

ist und nach (1. 1) $\left[\frac{N}{2^8 n}\right] \geqq \frac{N}{2^9 n}$ gilt, so ist es klar, daß die durch die Identität

$$P(n, N; x) \equiv \sum_{l=0}^{7} T\left(n, N+(2l+1)n; x - \frac{(2l+1)\pi}{16N}\right) \equiv \sum_{k=N+1}^{N+16n} \cos k(x-\mu_k)$$

bestimmten μ_k ($|\mu_k| < 2\pi$, $N+1 \leqq k \leqq N+16n$) die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllen.

Damit haben wir Hilfssatz I vollständig bewiesen.

Hilfssatz II. *Es seien c und m natürliche Zahlen mit*

$$c \leqq 2^{m-9}. \tag{1.8}$$

Dann können die reellen Zahlen $\nu_k = \nu_k(c, m)$ ($4^m + 1 \leqq k \leqq 4^{m+1}$) *derart angegeben werden, daß die trigonometrischen Polynome*

$$S_m(c; x) = \sum_{k=4^m+1}^{4^{m+1}} \cos k(x-\nu_k), \quad \tilde{S}_m(c; x) = \sum_{k=4^m+1}^{4^{m+1}} \sin k(x-\nu_k)$$

die folgende Eigenschaft haben: zu jedem Punkt x des Intervalls $\left[0, \frac{\pi}{2^{14}c^2}\right]$ *existieren natürliche Zahlen* $r_1(x), r_2(x), s_1(x), s_2(x)$ ($4^m + 1 \leqq r_1(x) < r_2(x) \leqq 4^{m+1}$, $4^m + 1 \leqq s_1(x) < s_2(x) \leqq 4^{m+1}$) *derart, daß im Punkte x die Funktionen* $\cos k(x-\nu_k)$ *für* $r_1(x) \leqq k \leqq r_2(x)$, *bzw. die Funktionen* $\sin k(x-\nu_k)$ *für* $s_1(x) \leqq k \leqq s_2(x)$ *gleiche Vorzeichen haben und die Ungleichungen*

$$\left|\sum_{k=r_1(x)}^{r_2(x)} \cos k(x-\nu_k)\right| \geqq \frac{c2^m}{2}, \quad \left|\sum_{k=s_1(x)}^{s_2(x)} \sin k(x-\nu_k)\right| \geqq \frac{c2^m}{2}$$

bestehen.

Beweis von Hilfssatz II. Wir wenden Hilfssatz I mit $n = c2^m$, $N = 4^m + 16lc2^m$ $\left(0 \leqq l \leqq \left[\frac{2^m}{2^4 c}\right] - 1\right)$ an. Nach (1.8) ist die Bedingung (1.1) in diesen Fällen erfüllt. So bekommen wir die trigonometrischen Polynome

$$P(c2^m, 4^m + 16lc2^m; x) = \sum_{k=4^m+16lc2^m+1}^{4^m+16(l+1)c2^m} \cos k(x - \mu_k(c2^m, 4^m + 16lc2^m)).$$

Wir betrachten die folgende Summe

$$S_m(c, x) = \sum_{l=0}^{\left[\frac{2^m}{2^4 c}\right]-1} P\left(c2^m, 4^m + 16lc2^m; x - \frac{l\pi}{2^9 c2^m}\right) + \sum_{k=4^m+16\left[\frac{2^m}{2^4 c}\right]c2^m+1}^{4^{m+1}} \cos kx;$$

da $4^m + 16\left[\frac{2^m}{2^4 c}\right]c2^m \leqq 4^m + 16\frac{2^m}{2^4 c}c2^m < 4^{m+1}$ gilt, ist diese Definition richtig. Die Zahlen ν_k ($|\nu_k| < 2\pi$, $4^m + 1 \leqq k \leqq 4^{m+1}$) definieren wir durch die Identität

$$S_m(c;x) \equiv \sum_{k=4^m+1}^{4^{m+1}} \cos k(x - \nu_k).$$

Auf Grund von Hilfssatz I ist es klar, daß für die Punkte x der Intervalle $I_l = \left[\frac{l\pi}{2^9 c 2^m}, \frac{(l+1)\pi}{2^9 c 2^m}\right]$ natürliche Zahlen $r_1(x)$, $r_2(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$ angegeben werden können, für die die Bedingungen des Hilfssatzes II erfüllt sind. Es gilt aber nach (1.8)

$$\bigcup_l I_l = \left[0, \left[\frac{2^m}{2^4 c}\right] \frac{\pi}{2^9 c 2^m}\right] \supseteqq \left[0, \frac{\pi}{2^{14} c^2}\right]. \tag{1.8}$$

Damit haben wir Hilfssatz II vollständig bewiesen.

§ 2. Beweis von Satz I

Aus (1) folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} 4^m \varrho_{4^m+1}^2 = \infty. \tag{2.1}$$

Es seien $(9 \leqq) m_1 < m_2 < \cdots < m_n < \cdots$ alle diejenigen Indizes m, für die

$$\varrho_{4^m+1} \geqq 2^9 4^{-m} \tag{2.2}$$

gilt. Aus (2.1) folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{m_n} \varrho_{4^{m_n}+1}^2 = \infty. \tag{2.3}$$

Es sei

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{für } \quad 2^{m_n} \varrho_{4^{m_n}+1} \geqq \frac{1}{2}, \\ \left[\frac{1}{2^{m_n} \varrho_{4^{m_n}+1}}\right] & \text{für } \quad 2^{m_n} \varrho_{4^{m_n}+1} < \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Aus (2.3) folgt leicht:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n^2} = \infty. \tag{2.4}$$

Nach (2.2) erfüllen die Zahlen c_n, m_n $(n = 1, 2, \ldots)$ die Bedingung (1.8), also können wir Hilfssatz II anwenden und so bekommen wir die trigonometrischen Polynome

$$\left.\begin{aligned} S_{m_n}(c_n;x) &= \sum_{k=4^{m_n}+1}^{4^{m_n+1}} \cos k(x-\nu_k(c_n,m_n)), \\ \tilde{S}_{m_n}(c_n;x) &= \sum_{k=4^{m_n}+1}^{4^{m_n+1}} \sin k(x-\nu_k(c_n,m_n)) \end{aligned}\right\} \quad (n=1,2,\ldots).$$

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Auf Grund von Hilfssatz II existieren für $x\in\left[0,\frac{\pi}{2^{14}c_n^2}\right]$ solche natürliche Zahlen $r_1(n;x)$, $r_2(n;x)$, $s_1(n;x)$, $s_2(n;x)$ $(4^{m_n}+1\leqq r_1(n;x)<r_2(n;x)\leqq 4^{m_n+1},\ 4^{m_n}+1\leqq s_1(n;x)<s_2(n;x)\leqq 4^{m_n+1})$, daß im Punkte x die Funktionen $\cos k(x-\nu_k(c_n,m_n))$ für $r_1(n;x)\leqq k\leqq r_2(n;x)$, bzw. die Funktionen $\sin k(x-\nu_k(c_n,m_n))$ für $s_1(n;x)\leqq k\leqq s_2(n;x)$ gleiche Vorzeichen haben und die Abschätzungen

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} \left|\sum_{k=r_1(n;x)}^{r_2(n;x)} \cos k(x-\nu_k(c_n,m_n))\right| &\geqq \frac{c_n 2^{m_n}}{2}, \\ \left|\sum_{k=s_1(n;x)}^{s_2(n;x)} \sin k(x-\nu_k(c_n,m_n))\right| &\geqq \frac{c_n 2^{m_n}}{2} \end{aligned}$$

gelten. Nach der Definition von c_n folgt aber leicht:

$$(2.6)\qquad \varrho_{4^{m_n+1}}\frac{c_n 2^{m_n}}{2}\geqq\frac{1}{4}\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Nach (2.5) und (2.6) ergibt es sich für $x\in\left[0,\frac{\pi}{2^{14}c_n^2}\right]$:

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} \left|\sum_{k=r_1(n;x)}^{r_2(n;x)} \varrho_k\cos k(x-\nu_k(c_n,m_n))\right| &\geqq \frac{1}{4}, \\ \left|\sum_{h=s_1(n;x)}^{s_2(n;x)} \varrho_k\sin k(x-\nu_k(c_n,m_n))\right| &\geqq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Es sei

$$\sigma_{n+1}=\frac{\pi}{2^{14}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k^2}\quad (n=1,2,\ldots),\qquad \sigma_1=0.$$

Es sei weiterhin $\lambda_k=\nu_k(c_n,m_n)+\sigma_n$ für $4^{m_n}+1\leqq k\leqq 4^{m_n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$ und es sei $\lambda_k=0$ sonst. Wir nehmen die trigonometrischen Summen

$$\left.\begin{aligned} Q_m(x) &= \sum_{k=4^m+1}^{4^{m+1}} \varrho_k\cos k(x-\lambda_k), \\ \tilde{Q}_m(x) &= \sum_{k=4^m+1}^{4^{m+1}} \varrho_k\sin k(x-\lambda_k) \end{aligned}\right\} \quad (m=0,1,\ldots).$$

Nach der Definition von λ_k ist

$$Q_m(x) = \sum_{k=4^{m_n}+1}^{4^{m_n+1}} \varrho_k \cos k(x - \nu_k(c_n, m_n) - \sigma_n) \quad \text{für} \quad m = m_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und für jedes $x \in [\sigma_n, \sigma_{n+1}]$ existieren nach (2.7) Partialsummen von $Q_{m_n}(x)$ und $\tilde{Q}_{m_n}(x)$, die im Absolutbetrag nicht kleiner als $\frac{1}{4}$ sind. Nach (2.4) ergibt es sich, daß die Folge $\{\lambda_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ die Bedingungen des Satzes erfüllt, d. h. die trigonometrischen Reihen

$$\varrho_1 \cos x + \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k \cos k(x - \lambda_k),$$

$$\varrho_1 \sin x + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{Q}_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k \sin k(x - \lambda_k)$$

überall divergieren.

Damit haben wir den Satz vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 13. September 1958)

Bounds for the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam

By E. MAKAI in Budapest

1. We consider a simply connected or ring-shaped plane domain D of area A, its boundary C whose total length is L, its principal frequency Λ and its torsional rigidity P.

The quantities Λ and P^{-1} may be defined as the minima of the expressions

$$\text{(1a)} \quad \left(\frac{\iint (\operatorname{grad} u)^2\, d\sigma}{\iint u^2\, d\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{(1b)} \quad \frac{\iint (\operatorname{grad} u)^2\, d\sigma}{4\left(\iint u\, d\sigma\right)^2},$$

respectively, where $d\sigma$ is the surface element of D, the integrations are extended over D; the function u is continuous in D, vanishes on C and has piecewise continuous first derivatives in D.[1])

We state that for a simply connected or ring-shaped domain

$$\text{(2a)} \quad \Lambda \leqq \sqrt{3}\,\frac{L}{A}, \qquad \text{(2b)} \quad P^{-1} \leqq \frac{L^2}{A^3}\ {}^{1a})$$

It is enough to show the validity of these inequalities for polygonal domains no two sides of which are parallel.[2]) The total statement follows hence by an argument of continuity.

---

[1]) See e. g. G. Pólya—G. Szegő, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton, 1951), pp. 87 and 102—103.

[1a]) *(Note added on February 25, 1959.)* The constants $\sqrt{3}$ and 1 on the right sides of (2a) and (2b), respectively, are not best possible. G. Pólya has shown that the precise upper bounds for $\Lambda A L^{-1}$ and $P^{-1} A^3 L^{-2}$ are $\frac{\pi}{2}$ and $\frac{3}{4}$, respectively; see his paper: Two more inequalities between physical and geometrical quantities (to be published in the *Journal of the Indian Math. Society*).

[2]) Cf. R. Courant—D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*. I (New York—London, 1955), pp. 419—423.

The inequalities (2) will be proved if one can find a particular function u for which the quantities (1a) and (1b) are less than (2a) resp. (2b). We shall see that such a function is the point function $d(P)$ which is defined as the distance of the point P from the boundary C. This function satisfies obviously the conditions imposed on the functions u.

Let the vertices of C be $A_1, A_2, \ldots, A_n$; the open line segment $A_i A_{i+1}$ $(A_{n+1}=A_1)$ will be denoted by a_i. We may now define subdomains D_i and D_i' of D in the following way. The interior of D_i resp. D_i' contains those points of D the nearest point of the boundary to which lies on a_i resp. it is the point A_i. The sum of the closures of the domains D_i and D_i' is D; D_i' is void if the inner angle at A_i is less than π.

The level lines of $d(P)$ are in D_i line segments parallel to a_i, in D_i' circular arcs, whose centre is A_i. In the interior of D_i or D_i' $|\text{grad}\, d(P)|=1$, and so

(3) $$\iint [\text{grad}\, d(P)]^2\, d\sigma = A.$$

Now the level line $d(P)=\xi$ is identical with the boundary of an inner parallel point set of the domain D. The length of this level line will be denoted by $l(\xi)$. We may transform the double integral $M_n=\iint [d(P)]^n d\sigma$ into a simple one by dividing D into narrow stripes the boundaries of which are the level lines $d(P)=\xi$ and the width of which is $d\xi$:

(4) $$M_n=\iint [d(P)]^n\, d\sigma = \int_0^r \xi^n\, l(\xi)\, d\xi$$

where r is the radius of the greatest circle which can be inscribed in D.

If $n=0$ we have from (4) that

$$\int_0^r l(\xi)\, d\xi = A.$$

Let now the quantity b be defined by $Lb=A$. As $0 \leqq l(\xi) \leqq L$ for $0 \leqq \xi \leqq r$,[3] it follows that $r \geqq b$, for $A \leqq \int_0^r L\, d\xi = Lr$. So we have for $n=1, 2, \ldots$

$$\int_0^r \xi^n\, l(\xi)\, d\xi - \int_0^b \xi^n L\, d\xi = \int_b^r \xi^n\, l(\xi)\, d\xi - \int_0^b \xi^n \{L - l(\xi)\}\, d\xi \geqq$$

$$\geqq b^n \int_r^b l(\xi)\, d\xi - b^n \int_0^b \{L - l(\xi)\}\, d\xi = b^n \{ \int_0^r l(\xi)\, d\xi - \int_0^b L\, d\xi \} = 0$$

---

[3]) A proof may be found in the paper by B. Sz.-Nagy, Über Parallelmengen nichtkonvexer ebener Bereiche, *Acta Sci. Math.*, 20 (1959), 36—47.

by the definition of b. It follows that $M_n \geqq \frac{b^{n+1}L}{n+1}$, hence

$$M_1 \geqq \frac{A^2}{2L} \quad \text{and} \quad M_2 \geqq \frac{A^3}{3L^2}$$

and from these

$$\Lambda \leqq \left(\frac{\iint [\operatorname{grad} d(P)]^2\, d\sigma}{\iint [d(P)]^2\, d\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\frac{A}{A^3/(3L^2)}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\,\frac{L}{A}, \tag{2a}$$

resp.

$$P^{-1} \leqq \frac{\iint [\operatorname{grad} d(P)]^2\, d\sigma}{4\,[\iint d(P)\, d\sigma]^2} \leqq \frac{A}{4\,[A^2/2L]^2} = \frac{L^2}{A^3}. \tag{2b}$$

2. There exists another upper estimate of Λ and P^{-1} for *star-shaped* domains, namely that of PÓLYA and SZEGŐ[4]). We consider the quantity $B_a = \int_C h^{-1}\, ds$ where a is a point inside D with respect to which C is star-shaped, h is the length of the perpendicular drawn from a to the tangent at a variable point of C where ds is the line element. If a varies and $B = \min B_a$, then $\Lambda \leqq j\sqrt{B/2A}$ with $j = 2.40\ldots$, and $P^{-1} \leqq BA^{-2}$.

It seems that for convex domains the estimate of PÓLYA and SZEGŐ gives better results than (2). Yet e. g. for the pentagonal domain whose consecutive vertices are $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,\varepsilon)$, $(-1,1)$ $(-1,0)$, B tends to infinity as $\varepsilon \to 0$; on the other hand L and A remain bounded.

3. It may be noted that there does not exist a universal positive constant c such that for any simply connected domain $\Lambda \geqq cL/A$. (Contrary to the case when D is convex.)[5]) For let us consider the domains

$$D_1(0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1) \quad \text{and} \quad D_2(1 \leqq x \leqq 1+\varepsilon^{-1}, 0 \leqq y \leqq \varepsilon).$$

In the case of the domain $D = D_1 + D_2$ we have $L/A = 2 + \varepsilon^{-1}$ and Λ is bounded, for it is less than the principal frequency of the unit square.

(Received August 22, 1958)

[4]) L. c. [1]) pp. 14—15 and 91—94.

[5]) E. MAKAI, On the principal frequency of a convex membrane and related problems, *Czechoslovak Math. Journal*, **9** (1959), 66—70.

Über Parallelmengen nichtkonvexer ebener Bereiche

Von BÉLA SZ.-NAGY in Szeged

1. Einleitung

Die klassischen Formeln von J. STEINER

$$A(t)=A(0)+L(0)t+\pi t^2, \quad L(t)=L(0)+2\pi t,$$

über den Inhalt und die Randlänge der äußeren Parallelbereiche konvexer ebener Bereiche im Abstand $t>0$ wurden neuerdings von H. HADWIGER[1]) auf den Fall der äußeren und der inneren Parallelbereiche solcher, nicht notwendigerweise zusammenhängender, beschränkter ebener Bereiche ausgedehnt, die „unterkonvex" vom Grade α bzw. „überkonvex" vom Grade β sind. Ist der Bereich durch n Randkurven von außen und durch m Randkurven von innen begrenzt, so gelten nach HADWIGER die Formeln

$$A(t)=A(0)+L(0)t+\pi(n-m)t^2, \quad L(t)=L(0)+2\pi(n-m)t$$

für den äußeren Parallelbereich im Abstand t $(0\leqq t\leqq\alpha)$ und

$$A(-t)=A(0)-L(0)t+\pi(n-m)t^2, \quad L(-t)=L(0)-2\pi(n-m)t$$

für den inneren Parallelbereich im Abstand t $(0\leqq t\leqq\beta)$.

In seinen Untersuchungen über gewisse Variationsprobleme für ebene Bereiche benötigte E. MAKAI Abschätzungen für die Randlänge der Parallelbereiche, die ohne Beschränkungen in bezug auf t gelten[2]). Er hat die folgenden Ungleichungen gefunden: a) für die äußeren Parallelbereiche eines zusammenhängenden beschränkten Bereichs:

$$L(t)\leqq L(0)+2\pi t \qquad (t\geqq 0),$$

b) für die inneren Parallelbereiche eines $m+1$-fach zusammenhängenden beschränkten Bereichs $(m\geqq 0)$:

$$L(-t)\leqq L(0)+2\pi(m-1)t \qquad (t\geqq 0).$$

---

1) H. HADWIGER, Die erweiterten Steinerschen Formeln für ebene und sphärische Bereiche, *Commentarii Math. Helvetici*, **18** (1945/46), 59—75.

2) E. MAKAI, Bounds for the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam, *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 33—35.

Der Beweis, den Herr MAKAI ursprünglich gefunden und uns freundlicherweise mitgeteilt hat, ist ziemlich kompliziert. Er geht von den Hadwigerschen Formeln aus und untersucht die Deformation des Randes bei Parallelbildung in ihren Einzelheiten; dabei treten Schwierigkeiten von topologischer Natur auf, außerdem hat man *a priori* anzunehmen, daß die Randlängen etwa im Minkowskischen Sinne $L(t)=\lim\limits_{h\to+0}\frac{1}{h}[A(t+h)-A(t)]$ existieren. Allerdings ist diese letzte Annahme im speziellen Fall der Polygonbereiche, den MAKAI in seiner Arbeit nur benötigt, offenbar erfüllt.

In diesem Aufsatz wollen wir zeigen, daß diese Schwierigkeiten völlig verschwinden, wenn man die Ungleichungen für die Randlänge in ihren „integrierten" Formen betrachtet, wobei diese als gewisse Konkavitätsaussagen über den Flächeninhalt der Parallelbereiche erscheinen; man braucht dabei die Existenz der Randlängen nicht vorauszusetzen: alles folgt *nachträglich* aus elementaren Differenzierbarkeitseigenschaften der konkaven Funktionen.

In der Beweisführung wird kein Bezug auf frühere Literatur über Parallelbereiche genommen[3]). Unsere Methode scheint auch zur Untersuchung des gleichen Problems für mehrdimensionale Bereiche geeignet zu sein, doch wollen wir in diesem Aufsatz nur den Fall ebener Bereiche betrachten.

2. Definitionen und einfache Feststellungen

a) *Parallelmengen.* Für eine beliebige nichtleere ebene Punktmenge G, deren abgeschlossene Hülle $\bar{G}$ nicht mit der ganzen Ebene zusammenfällt, definiert man die *äußere Parallelmenge* im Abstand $t>0$ als die Vereinigungsmenge G_t aller derjenigen abgeschlossenen Kreisschreiben vom Radius t, deren Mittelpunkt in G liegt.

Es is leicht einzusehen, daß für eine abgeschlossene Menge G auch G_t abgeschlossen, und für eine offene Menge G auch G_t offen ist. Es gilt

$$(G_t)_s=G_{s+t}\qquad(s,t>0); \tag{1}$$

G_t ist eine nichtabnehmende Funktion von t und man hat

$$\bigcap_{t>0} G_t=\lim_{t\to+0} G_t=\bar{G}, \tag{2}$$

letztere Beziehung berechtigt uns, im Falle einer abgeschlossenen Menge G,

---

3) Es ist aber zu bemerken, daß unsere Beweismethode eine gewisse Verwandtschaft mit der Methode aufweist, mit deren Hilfe G. BOL das Verhalten des sog. isoperimetrischen Defizits für innere Parallelbereiche nichtkonvexer Bereiche untersucht hat. Vgl. G. BOL, Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **51** (1941), 219—257.

G_0 gleich G zu setzen und damit die Definition der äußeren Parallelmengen G_t auch für $t=0$ auszudehnen.

Da voraussetzungsgemäß $\bar{G}$ nicht mit der ganzen Ebene zusammenfällt, ist die obere Grenze der Radien der in der Menge G^*[4]) enthaltenen Kreisscheiben positiv und eventuell gleich $+\infty$; wir wollen diese obere Grenze mit $\varrho^*(G)$ oder kurz mit ϱ^* bezeichnen. Im Falle eines endlichen ϱ^* ist $\overline{G_{\varrho^*}}$ offenbar gleich der ganzen Ebene, und da, wie man leicht einsieht, $\overline{G_{\varrho^*}}=\overline{\bigcup_{t<\varrho^*} G_t}$ ist, genügt es immer nur die Parameterwerte $t<\varrho^*$ in Betracht zu ziehen.

Für eine beliebige ebene Punktmenge G, die nicht mit der ganzen Ebene zusammenfällt und deren Innere G^0 nicht leer ist, wird für $t>0$ die *innere Parallelmenge* G_{-t} von G im Abstand t durch die äußere Parallelmenge der Menge G^* folgendermaßen definiert:

$$G_{-t}=((G^*)_t)^*.$$

Aus den Gesagten über die äußeren Parallelmengen folgen sofort die Eigenschaften: Ist G abgeschlossen (offen), so ist auch G_{-t} abgeschlossen (offen). Es gilt immer $(G_{-t})_{-s}=G_{-t-s}$ $(t, s>0)$. G_{-t} ist eine nichtwachsende Funktion von t und man hat

$$\bigcup_{t>0} G_{-t}=\lim_{t\to+0} G_{-t}=G^0; \tag{3}$$

diese Beziehung berechtigt uns, im Falle einer offenen Menge G, $G_0=G$ zu setzen und damit die Definition der inneren Parallelmengen G_{-t} auch für $t=0$ auszudehnen.

Da voraussetzungsgemäß G^0 nicht leer ist, ist die obere Grenze der Radien der in G enthaltenen Kreisscheiben positiv und eventuell gleich $+\infty$; wir bezeichnen diese obere Grenze mit $\varrho(G)$ oder kurz mit ϱ. Im Falle eines endlichen ϱ ist $(G_{-\varrho})^0=(\bigcap_{t<\varrho} G_{-t})^0$ leer, also genügt es nur die inneren Parallelmengen G_{-t} mit Parameterwerten $t<\varrho$ in Betracht zu ziehen.

b) *Kreisbereiche und Kreispolygone.* Wir werden sagen, die ebene Punktmenge H sei ein *Kreisbereich,* falls 1° weder H noch H^* leer sind, 2° H als Vereinigungsmenge von endlich vielen abgeschlossenen Kreisscheiben $K(M_k, r_k)$ (M_k ist der Mittelpunkt, r_k der Radius) und von höchstens einer abgeschossenen „uneigentlichen Kreisscheibe" $K^\infty(M, r)$ dargestellt werden kann; $K^\infty(M, r)$ wird als Komplementärmenge der offenen Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r erklärt.

Wir sagen, der Kreisbereich H sei *regulär,* falls keine zwei der erzeugenden (eigentlichen und uneigentlichen) Kreisscheiben sich berühren. Der

4) Für eine beliebige Punktmenge M soll M^* die in bezug auf die ganze Ebene genommene Komplementärmenge bezeichnen.

Rand C von H besteht dann offenbar aus endlich vielen, paarweise punktfremden einfachen Kurven, die je aus endlich vielen Kreisbogen gebildet sind; Kurven von dieser Art wollen wir *Kreispolygone* nennen. Orientieren wir den Rand des regulären Kreisbereichs H derart, daß das Innere von H immer an der linken Hand ist, so ist die Anzahl n der positiv orientierten Bestandteile gleich der Anzahl der beschränkten Komponenten der Menge H, und die Anzahl m der negativ orientierten Bestandteile ist gleich der Anzahl der beschränkten Komponenten der Komplementärmenge H^*. Jedenfalls ist $n \geqq 0$, $m \geqq 0, n+m \geqq 1$; enthält H eine uneigentliche Kreisscheibe, so ist $m \geqq 1$.

Es ist zweckmäßig, folgende Ausdrucksweise einzuführen. Eine abgeschlossene, nicht leere und nicht mit der ganzen Ebene zusammenfallende ebene Punktmenge G soll *vom Typus* (n, ν) genannt werden, wobei n eine nichtnegative ganze Zahl und ν gleich 0 oder 1 ist, falls G aus n beschränkten und ν unbeschränkten Komponenten besteht; die unbeschränkte Komponente, falls existiert ($\nu = 1$), soll eine volle Umgebung des unendlichfernen Punktes, d. h. eine uneigentliche Kreisscheibe enthalten. Ist G vom Typus (n, ν), so ist die äußere Parallelmenge G_t für $0 \leqq t < \varrho^*$ offenbar von einem Typus (n_t, ν_t) mit

$$n_t \leqq n, \quad \nu_t = \nu. \tag{4}$$

Für die Zwecke unserer Arbeit sind die Kreisbereiche deswegen von Bedeutung, weil ihre äußeren Parallelmengen ebenfalls Kreisbereiche sind. Für

$$H = \bigcup_k K(M_k, r_k) \quad \text{bzw.} \quad H = (\bigcup_k K(M_k, r_k)) \cup K^\infty(M, r)$$

und für $0 \leqq t < \varrho^*(H)$ ist nämlich

$$H_t = \bigcup_k K(M_k, r_k + t) \quad \text{bzw.} \quad H_t = (\bigcup_k K(M_k, r_k + t)) \cup K^\infty(M, r - t);$$

abgesehen von endlich vielen Werten von t ist G_t sogar *regulär*.

3. Parallelkurven von Kreispolygonen

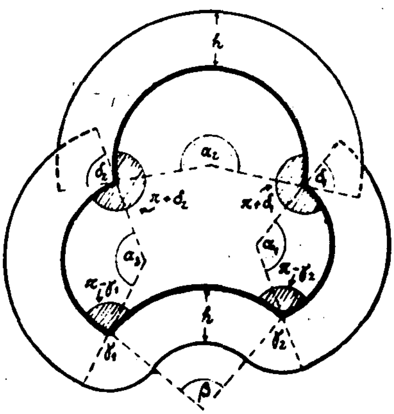
Ist C eine beliebige einfache geschlossene Kurve mit dem inneren Gebiet G, so wird die äußere *Parallelkurve* $C^a(t)$ von C im Abstand t $(0 < t < \infty)$ als der Rand des Parallelgebiets G_t, und die *innere Parallelkurve* $C^i(t)$ von C im Abstand t $(0 < t < \varrho(G))$ als der Rand des Parallelgebiets G_{-t} definiert.

Ist C insbesondere ein Kreispolygon, so sind ihre Parallelkurven aus Kreisbogen zusammengesetzt, und für genügend kleine Werte von t sind sie sogar einfache geschlossene Kurven, also wieder Kreispolygone.

Wir führen noch zwei Bezeichnungen ein: für eine (eventuell aus mehreren Zügen bestehende) rektifizierbare Kurve C soll $L[C]$ die Bogenlänge (bzw. die gesamte Bogenlänge), und für eine meßbare Punktmenge G in der Ebene wird $A[G]$ den *Flächeninhalt* (genauer gesagt, das zweidimensionale Lebesguesche Maß) bedeuten.

Lemma 1. *Für jedes Kreispolygon C existieren die beiden Grenzwerte*

$$d^a = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h}\{L[C^a(h)] - L[C]\}, \quad d^i = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h}\{L[C^i(h)] - L[C]\}$$



Figur 1.

und genügen den Ungleichungen

$$d^a \leqq 2\pi, \quad d^i \leqq -2\pi.$$ [5])

Beweis. Wir bezeichnen mit α_i bzw. β_j die Öffnungswinkel derjenigen Kreisbogenbestandteile von C, die von außen gesehen konvex bzw. konkav sind; ferner seien $\pi-\gamma_k$ die konvexen und $\pi+\delta_l$ die konkaven (inneren) Winkel von C ($0<\gamma_k\leqq\pi$, $0<\delta_l\leqq\pi$).

Für kleine Werte von h entsteht $C^a(h)$ aus C, indem man jeden Kreisbogen mit dem konzentrischen, um $h\alpha_i$ längeren bzw. um $h\beta_j$ kürzeren Kreisbogen im Abstande h ersetzt, an jedem konkaven Winkel $\pi+\delta_l$ zwei Stücke von diesen von der Gesamtlänge $2h \operatorname{tg} \frac{\delta_l}{2} + O(h^2)$ wegnimmt[6]) und an jedem konvexen Winkel $\pi-\delta_k$ je einen Kreisbogen vom Radius h und der Länge $h\gamma_k$ hinzunimmt (vgl. Figur 1). Also ist

$$L[C^a(h)] - L[C] = \sum_i h\alpha_i - \sum_j h\beta_j + \sum_k h\gamma_k - \sum_l 2h \operatorname{tg}\frac{\delta_l}{2} - O(h^2).$$

Hieraus folgt, daß der Grenzwert d^a existiert, und zwar ist

$$d^a = \sum_i \alpha_i - \sum_j \beta_j + \sum_k \gamma_k - \sum_l 2 \operatorname{tg}\frac{\delta_l}{2}.$$

Nun ist $\operatorname{tg}\varphi \geqq \varphi$ für $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$, also gilt die Ungleichung

(5) $$d^a \leqq \sum_i \alpha_i - \sum_j \beta_j + \sum_k \gamma_k - \sum_l \delta_l.$$

---

[5]) Herr Makai teilte mir nachträglich freundlicherweise mit, daß er in einem früheren Beweisansatz für seine in der Einleitung erwähnten Ungleichungen ebenfalls von diesem Lemma ausgegangen ist.

[6]) Man beachte, daß der Schnittpunkt der Parallelkreisbogen der beiden am Eckpunkt des Winkels $\pi+\delta_l$ anstoßenden Kreisbogen sich auf einer Hyperbel bzw. Ellipse bewegt, deren Brennpunkte die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise sind. Man benütze die Winkelhalbierungseigenschaft der Tangenten der Hyperbeln und der Ellipsen.

Wir durchlaufen die Kurve C im positiven Sinn und betrachten die Richtungsvariation der nach außen gerichteten Normalen. Längs dem Bogen von der Öffnung α_i dreht sich die Normale stetig im positivem Sinne mit dem Gesamtwinkel α_i, und längs dem Bogen von der Öffnung β_j dreht sich sie stetig im negativen Sinne mit dem Gesamtwinkel β_j. Am Eckpunkte des Winkels $\pi-\gamma_k$ erfährt sie eine Drehung um den Winkel γ_k im positiven Sinne, und am Eckpunkte des Winkels $\pi+\delta_l$ eine Drehung um den Winkel δ_l im negativen Sinne $(0<\gamma_k\leqq\pi,\ 0<\delta_l\leqq\pi)$. Die algebraische Summe dieser Drehungswinkel ist also gleich der Summe an der rechten Seite von (5). Nun ist aber diese Totaldrehung bekanntlich immer gleich 2π. Damit haben wir die Ungleichung $d^a\leqq 2\pi$ bewiesen.

Eine analoge Betrachtung führt uns zum Ergebnis, daß auch d^i existiert und gleich

$$-\sum_i \alpha_i+\sum_j \beta_j-\sum_k 2\operatorname{tg}\frac{\gamma_k}{2}+\sum_l \delta_l$$

ist, woraus dann die Ungleichung

$$d^i\leqq-\sum_i \alpha_i+\sum_j \beta_j-\sum_k \gamma_k+\sum_l \delta_l=-2\pi$$

folgt. Damit haben wir Lemma 1 bewiesen.

4. Äußere Parallelbereiche von Kreisbereichen

Zunächst sei H ein *regulärer* Kreisbereich vom Typus (n,ν). Sein orientierter Rand C möge aus den im positiven Sinne orientierten Kreispolygonen $C_1,\ldots,C_n$ und aus den im negativen Sinne orientierten Kreispolygonen ${}_1C,\ldots,{}_mC$ $(m\geqq\nu)$ bestehen (siehe Figur 2). Für genügend kleine positive Werte von t sind dann die äußeren bzw. inneren Parallelkurven $C_1^a(t),\ldots,C_n^a(t)$; ${}_1C^i(t),\ldots,{}_mC^i(t)$ ebenfalls Kreispolygone und paarweise punktfremd (siehe § 3). Zusammen bilden sie den Rand $C(t)$ von H_t. Auf Grund der Beziehung

$$\frac{1}{h}\{L[C(h)]-L[C]\}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{h}\{L[C_p^a(h)]-L[C_p]\}+\sum_{q=1}^{m}\frac{1}{h}\{L[{}_qC^i(h)]-L[{}_qC]\}$$

folgt dann mit Anwendung von Lemma 1, daß der Grenzwert

$$d=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\{L[C(h)]-L[C]\}$$

existiert, endlich ist, und der Ungleichung

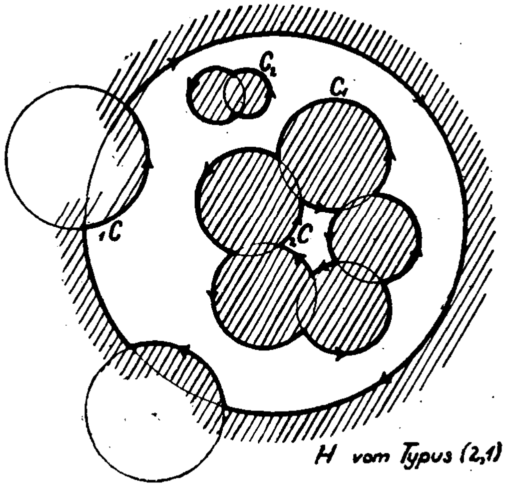
$$d\leqq 2\pi(n-m),$$

also wegen $m\geqq\nu$ um so mehr der Ungleichung

$$d\leqq 2\pi(n-\nu) \tag{6}$$

genügt.

Jetzt betrachten wir einen beliebigen Kreisbereich H_0 vom Typus (n, ν). Wie schon bemerkt (in § 2), ist H_t für jeden Wert von t aus dem Intervall $0 \leqq t < \varrho^*$, mit der Ausnahme von höchstens endlich vielen „singulären" Werten,



Figur 2.

ein regulärer Kreisbereich. Bezeichnet man den Rand von H_t mit $C(t)$, wendet man das soeben erhaltene Ergebnis (6) auf H_t statt auf H an, und beachtet die Beziehung (1), so erhält man das Ergebnis, daß die Funktion

$$l(t) = L[C(t)] \qquad (0 \leqq t < \varrho^*)$$

an jeder nichtsingulären Stelle t eine endliche rechtsseitige Ableitung

$$d(t) = \lim_{h \to +0} \frac{l(t+h) - l(t)}{h}$$

besitzt, und daß für diese die Ungleichung

$$d(t) \leqq 2\pi(n_t - \nu_t),$$

also wegen $n_t \leqq n$, $\nu_t = \nu$ um so mehr die Ungleichung

$$(7) \qquad d(t) \leqq 2\pi(n - \nu)$$

gilt. Andererseits ist $l(t)$ offenbar eine im ganzen Intervall $0 \leqq t < \varrho^*$ stetige Funktion von t.[7]) Die Funktion

$$f(t) = l(t) - 2\pi(n - \nu)t$$

[7]) Aus unserer Definition der Kreisbereiche folgt ja, daß bei stetiger Änderung des Parameters t im Intervall $0 \leqq t < \varrho^*$ (mit der eventuellen Ausnahme der Falles $t \to \varrho^*$) kein Randstück von H_t in ein von einem einzigen Punkt verschiedenes entartetes Gebilde zusammenschrumpfen kann.

ist dann in diesem Intervall ebenfalls stetig und besitzt mit der Ausnahme der endlich vielen singulären Stellen überall eine rechtsseitige Ableitung $f'_+(t) \leqq 0$. Hieraus aber folgt, daß $f(t)$ im ganzen Intervall nichtwachsend ist.[8])

Nun sieht man aber leicht ein, daß

$$L[C(t)] = \lim_{h \to +0} \frac{A[H_{t+h} - H_t]}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{A[H_t - H_{t-h}]}{h}$$

gilt (die erste Gleichung für $t \geqq 0$, die zweite für $t > 0$), folglich ist

$$f(t) = \frac{d}{dt}\{A[H_t - H_0] - \pi(n-\nu)t^2\} \qquad (0 \leqq t < \varrho^*);$$

es handelt sich hier um den Inhalt von durch endlich viele Kreisbogen berandeten beschränkten Bereichen. Somit haben wir folgendes bewiesen:

L e m m a 2. *Für jeden Kreisbereich H_0 vom Typus (n, ν) ist*

$$A[H_t - H_0] - \pi(n-\nu)t^2$$

eine im Intervall $0 \leqq t < \varrho^*(H_0)$ stetige, konkave Funktion von t.

5. Bereiche von allgemeinerer Struktur

Wir können jetzt zum Beweis unseres Hauptergebnisses übergehen:

S a t z 1. *Es sei G_0 eine beliebige abgeschlossene ebene Punktmenge vom Typus (n, ν). Dann ist*

$$A[G_t - G_0] - \pi(n-\nu)t^2$$

eine stetige, konkave Funktion von t im Intervall $0 \leqq t < \varrho^*(G_0)$; $A[G_t - G_0]$ bedeutet hierbei das Lebesguesche Maß der beschränkten, Borelschen Punktmenge $G_t - G_0$.

B e w e i s. Die abgeschlossene Menge G_0 möge aus den beschränkten Komponenten $G^1, \ldots, G^n$ und im Falle $\nu = 1$ noch aus der unbeschränkten Komponente G^∞ bestehen, letztere enthält definitionsgemäß eine uneigentliche

---

[8]) Wegen der Stetigkeit auch an den singulären Stellen genügt es zu beweisen, daß für jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$, welches keine singuläre Stelle enthält, $f(a) \geqq f(b)$ ist. Wie im Beweis des gewöhnlichen Mittelwertsatzes, betrachte man die Funktion

$$g(t) = f(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a);$$

τ sei eine Minimumstelle für $g(t)$ in $[a, b]$. Wegen $g(a) = g(b)$ kann man $\tau \neq b$ wählen. Dann ist offenbar $g'_+(\tau) \geqq 0$, also

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqq f'_+(\tau) \leqq 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

Kreisscheibe K^∞. Der minimale Abstand zwischen diesen Komponenten sei δ ($\delta>0$). Man wähle eine beliebige Zahl η mit $0<\eta<\delta/3$, und konstruiere für jede Komponente je einen zusammenhängenden Kreisbereich $H^{1,\eta},\ldots,H^{n,\eta}$ bzw. $H^{\infty,\eta}$ derart, daß die Inklusionen

(8) $$G^1\subseteqq H^{1,\eta}\subseteqq G^1_\eta,\ldots,G^n\subseteqq H^{n,\eta}\subseteqq G^n_\eta,\ G^\infty\subseteqq H^{\infty,n}\subseteqq G^\infty_\eta$$

gelten; G^1_η bedeutet dabei die äußere Parallelmenge von G^1 im Abstand η, usw. Für die kompakten Komponenten, etwa für G^1, verfährt man so, daß man um jeden Punkt von G^1 als Mittelpunkt die offene Kreisscheibe vom Radius η nimmt; laut dem Heine-Borelschen Satze kann man von diesen Kreisscheiben endlich viele auswählen, die schon die Menge G^1 bedecken; die abgeschlossene Hülle der Vereinigungsmenge der ausgewählten offenen Kreisscheiben ist dann ein Kreisbereich $H^{1,\eta}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Im Falle von G^∞ verfährt man auf analoge Weise zuerst für die kompakte Menge $G'=G^\infty-(K^\infty)^0$ (wobei $(K^\infty)^0$ das Innere der uneigentlichen Kreisscheibe K^∞ bedeutet) und dann nimmt man zu den G' bedeckenden endlich vielen Kreisscheiben K^∞ wieder hinzu.

Der minimale Abstand zwischen den Kreisbereichen $H^{1,\eta},\ldots,H^{n,\eta}$ und (im Falle $\nu=1$) $H^{\infty,\eta}$ ist $\geqq\delta-2\eta>\delta/3$. Diese Kreisbereiche sind also die Komponenten eines Kreisbereichs H^η_0 von demselben Typus (n,ν) wie die ursprüngliche Menge G_0, und man hat infolge (8)

(9) $$G_0\subseteqq H^\eta_0\subseteqq G_\eta.$$

Diese Beziehung überträgt sich auf die äußeren Parallelbereiche im Abstand t, d. h. man hat (mit der Bezeichnung $H^\eta_t=(H^\eta_0)_t$)

$$G_t\subseteqq H^\eta_t\subseteqq G_{t+\eta}\qquad(t\geqq 0)$$

und mithin auch

$$G_t-G_0\subseteqq H^\eta_t-G_0\subseteqq G_{t+\eta}-G_0\qquad(t\geqq 0).$$

Diese Differenzmengen sind alle Borelsch und beschränkt, und für $\eta\downarrow 0$ strebt die Menge $G_{t+\eta}-G_0$ abnehmend gegen die Menge G_t-G_0 (siehe (1) und (2) in § 1). Folglich gelten für die Lebesgueschen Maße die folgenden Beziehungen:

(10) $$A[G_t-G_0]\leqq A[H^\eta_t-G_0]\leqq A[G_{t+\eta}-G_0]$$

und

(11) $$A[G_t-G_0]=\lim_{\eta\to 0}A[G_{t+\eta}-G_0];$$

aus (10) und (11) folgt auch

$$A[G_t-G_0]=\lim_{\eta\to 0}[H^\eta_t-G_0]\cdot$$

Nun ist nach Lemma 2

$$A[H_t^\eta - H_0^\eta] - \pi(n-\nu)t^2$$

für jedes feste $\eta > 0$ eine konkave Funktion von t im Intervall $0 \leqq t < \varrho^*(H_0^\eta)$; wegen der Beziehung $A[H_t^\eta - G_0] = A[H_t^\eta - H_0^\eta] + A[H_0^\eta - G_0]$ ist auch die Funktion

$$A[H_t^\eta - G_0] - \pi(n-\nu)t^2 \tag{12}$$

im Intervall $0 \leqq t < \varrho^*(H_0^\eta)$ konkav. Da infolge (9) $\varrho^*(H_0^\eta)$ für $\eta \to 0$ gegen $\varrho^*(G_0)$ strebt, so ist die Limesfunktion von (12), d. h.

$$A[G_t - G_0] - \pi(n-\nu)t^2, \tag{13}$$

ebenfalls konkav im ganzen Intervalle $0 \leqq t < \varrho^*(G_0)$. Die Funktion (13) ist nach (11) überall stetig von rechts, und dann wegen ihrer Konkavität notwendigerweise stetig auch von links.

Damit haben wir den Satz vollständig bewiesen.

Satz 1 hat eine duale Form für innere Parallelmengen:

Satz 2. *Es sei G_0 eine offene ebene Punktmenge, deren Komplementärmenge G_0^* eine abgeschlossene Menge vom Typus (n^*, ν^*) ist. Dann ist*

$$A[G_0 - G_{-t}] - \pi(n^* - \nu^*)t^2$$

eine stetige, konkave Funktion von t im Intervall $0 \leqq t < \varrho(G_0)$.

Beweis. Man wende Satz 1 auf die abgeschlossene Menge G_0^* und deren äußeren Parallelmengen $(G_0^*)_t$ an, und man beachte die Beziehungen

$$(G_0^*)_t - G_0^* = (G_{-t})^* - G_0^* = G_0 - G_{-t},$$

deren erste aus der Definition der inneren Parallelmengen folgt und deren zweite eine Identität für Mengendifferenzen ist.

Nach den elementaren Differenzierbarkeitseigenschaften konkaver Funktionen folgen nun aus diesen Sätzen die beiden, ebenfalls dualen Sätze:

Satz 1. *Für eine beliebige abgeschlossene ebene Punktmenge G_0 vom Typus (n, ν) existieren die Grenzwerte*

$$L_+(t) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} A[G_{t+h} - G_t], \qquad L_-(t) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} A[G_t - G_{t-h}]$$

für $0 \leqq t < \varrho^*(G_0)$ bzw. $0 < t < \varrho^*(G_0)$; für alle $t > 0$ sind sie endlich, $L_+(t) \leqq \leqq L_-(t)$, und für alle $t > 0$ mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmewerten ist sogar $L_+(t) = L_-(t)$; $L_-(0)$ kann eventuell auch gleich $+\infty$ sein; und für $0 \leqq t_1 < t_2 < \varrho^*(G_0)$ gilt

$$L_+(t_1) - 2\pi(n-\nu)t_1 \geqq L_-(t_2) - 2\pi(n-\nu)t_2.$$

Insbesondere gilt

$$L_+(0) \geqq L_\pm(t) - 2\pi(n-\nu)t \tag{14}$$

für $0 < t < \varrho^*(G_0)$.

Satz 2'. *Für eine beliebige offene ebene Punktmenge G_0, für die G_0 vom Typus (n^*, ν^*) ist, existieren die Grenzwerte*

$$L_-(-t) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} A[G_{-t} - G_{-t-h}], \qquad L_+(-t) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} A[G_{-t+h} - G_{-t}]$$

für $0 \leqq t < \varrho(G_0)$ *bzw.* $0 < t < \varrho(G_0)$; *für alle* $t > 0$ *sind sie endlich,* $L_-(-t) \leqq L_+(-t)$, *und für alle* $t > 0$ *mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmewerten ist sogar* $L_-(-t) = L_+(-t)$; $L_-(0)$ *kann eventuell auch gleich* $+\infty$ *sein ; und für* $0 \leqq t_1 < t_2 < \varrho(G_0)$ *gilt*

$$L_-(-t_1) - 2\pi(n^* - \nu^*)t_1 \geqq L_+(-t_2) - 2\pi(n^* - \nu^*)t_2.$$

Insbesondere hat man

$$L_-(0) \geqq L_\pm(-t) - 2\pi(n^* - \nu^*)t \tag{15}$$

für $0 < t < \varrho(G_0)$.

Ist speziell G_0 ein beschränktes Kontinuum (Fall $n = 1$, $\nu = 0$), so gilt nach (14) $L_\pm(t) \leqq L_+(0) + 2\pi t$ für $0 < t < \infty$. Ist aber G_0 ein $m+1$-fach zusammenhängendes offenes Gebiet (Fall $n^* = m$, $\nu^* = 1$), so gilt nach (15) $L_\pm(-t) \leqq L_-(0) + 2\pi(m-1)t$ für $0 < t < \varrho(G_0)$. Somit haben wir die beiden Ungleichungen von Makai als spezielle Fälle der Sätze 1', 2', und zwar ohne a priori Annahme der Existenz von $L_\pm(t)$ bzw. $L_\pm(-t)$, bewiesen.

Als Korollare erhält man :

Satz 1''. *Für eine beliebige abgeschlossene ebene Punktmenge G_0 mit kompaktem Rand existieren die Grenzwerte*

$$L_+(t) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} A[G_{t+h} - G_t], \qquad L_-(t) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} A[G_t - G_{t-h}]$$

für jedes t mit $0 < t < \varrho^*(G_0)$, *beide sind endlich,* $L_+(t) \leqq L_-(t)$, *und mit der eventuellen Ausnahme von abzählbar vielen Werten von t ist sogar* $L_+(t) = L_-(t)$

Satz 2''. *Für eine beliebige offene ebene Punktmenge G_0 mit kompaktem Rand existieren die Grenzwerte*

$$L_-(-t) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} A[G_{-t} - G_{-t-h}], \qquad L_+(-t) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} A[G_{-t+h} - G_{-t}]$$

für jedes t mit $0 < t < \varrho(G_0)$, *beide sind endlich,* $L_-(-t) \leqq L_+(-t)$, *und mit der eventuellen Ausnahme von abzählbar vielen Werten von t ist sogar* $L_-(-t) = L_+(-t)$.

Wegen der Dualität dieser Behauptungen genügt es nur Satz 1'' zu beweisen. Voraussetzungsgemäß ist der Rand von G_0 in einer Kreisscheibe $K(M, r)$ enthalten; folglich ist der Rand von G_a $(a > 0)$ enthalten in der Kreisscheibe $K(M, r + a)$. Alle beschränkten Komponenten von G_a sind dann notwendigerweise ebenfalls in $K(M, r+a)$ enthalten, und da jede dieser Komponenten mindestens eine Kreisscheibe vom Radius a enthält und folglich vom Maß $\geqq \pi a^2$ ist, so ist die Anzahl n_a der beschränkten Komponenten von G_a notwendigerweise $\leqq \left(\frac{r+a}{a}\right)^2$. Wenn es eine unbeschränkte Komponente von G_a gibt, dann enthält diese die ganze uneigentliche Kreisscheibe $K^\infty(M, r+a)$. Folglich kann man Satz 1′ auf G_a anwenden; wegen der Beziehung $G_t = (G_a)_{t-a}$ $(t > a)$ folgt somit die Gültigkeit der Aussagen für $t > a$. Da aber a beliebig klein positiv gewählt werden kann, ist damit Satz 1″ bewiesen.

(Eingegangen am 1. Dezember 1958)

Über Fortsetzungs- und Approximationsprobleme für stetige Abbildungen von metrischen Räumen[1])

Von L. GEHÉR in Szeged

Nach dem klassischen Satz von TIETZE [1] besitzt jede, auf einer abgeschlossenen Untermenge D eines metrischen Raumes E definierte reelle stetige Funktion eine reelle stetige Fortsetzung auf den ganzen Raum E.

Es erhebt sich die Frage, ob dieser Satz auch für nicht-reellwertige Funktionen, etwa für solche Funktionen, deren Wertebereich in einen beliebigen anderen metrischen Raum fällt, die also eine Abbildung eines metrischen Raumes auf einen anderen metrischen Raum bewirken, gültig ist?

Ein Resultat in dieser Richtung befindet sich in einer Arbeit von ARONSZAJN und PANITCHPAKDI [2]. Es handelt sich dort allerdings nur um die Fortsetzung *gleichmäßig stetiger* Abbildungen. Um das Resultat von [2] formulieren zu können, müssen wir zuerst einige Begriffe einführen.

Definition 1. *Es sei T eine Abbildung des metrischen Raumes A in den metrischen Raum M. Wir sagen, eine nichtnegative, reelle und monoton nichtabnehmende Funktion $\delta(\varepsilon)$ $(0<\varepsilon<\infty)$[2]) mit $\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$ sei eine Stetigkeitsmajorante*[3]) *von T, wenn aus*

$$\varrho(x,y)\leqq\varepsilon \qquad (x,y\in A)$$

immer

$$\varrho'(T(x),T(y))\leqq\delta(\varepsilon)$$

folgt, wobei ϱ und ϱ' den Abstand in der Metrik von A bzw. M bedeuten.

Besitzt eine Abbildung eine Stetigkeitsmajorante, so hat sie offenbar unendlich viele, und ist die Abbildung gleichmäßig stetig.

---

[1]) Diese Arbeit enthält die wesentlichen Teile der in April 1958 an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Szeged eingereichten Doktorarbeit des Verfassers.

[2]) Der Wert von $\delta(\varepsilon)$ darf auch gleich $+\infty$ sein.

[3]) Diese Benennung stammt von Herrn Professor BÉLA SZ.-NAGY. Ihm bin ich für wertvolle Diskussionen während der Fertigstellung dieser Arbeit dankbar.

Jede gleichmäßig stetige Abbildung T besitzt eine *kleinste* Stetigkeitsmajorante, den sogenannten *Stetigkeitsmodul* $\delta_T(\varepsilon)$, den man folgenderweise definieren kann:

$$\delta_T(\varepsilon) = \sup\{\varrho'(T(x), T(y)) : x, y \in A;\ \varrho(x, y) \leqq \varepsilon\}.$$

In folgendem verstehen wir unter einer *Kugel* immer eine abgeschlossene Kugel; in Zeichen $G(x; r)$ (x ist der Mittelpunkt, r der Radius). Das Innere einer Kugel $G(x; r)$ nennen wir eine *offene Kugel* und bezeichnen wir sie mit $G^\circ(x; r)$.

Definition 2. *Wir nennen einen metrischen Raum M hyperkonvex, falls die folgende Bedingung erfüllt ist: Für jedes System $\mathfrak{S} = \{G(x_i; r_i)\}_{i\in I}$ von Kugeln in M (I ist eine beliebige Indexmenge) mit der Eigenschaft*

$$\varrho'(x_i, x_k) \leqq r_i + r_k \qquad (i, k \in I)$$

ist $\bigcap_{i\in I} G(x_i; r_i)$ nicht leer.

Diese Definition ist äquivalent mit der folgenden

Definition 2. *Ein metrischer Raum M is hyperkonvex, wenn er konvex ist*[4]) *und für jedes System $\mathfrak{S} = \{G(x_i; r_i)\}_{i\in I}$ von Kugeln in M mit paarweise nichtleerem Durchschnitt auch $\bigcap_{i\in I} G(x_i; r_i)$ nicht leer ist (sog. Eigenschaft der „binären Intersektion" für Kugeln).*

Jeder lineare metrische Raum ist konvex, folglich ist dann und nur dann hyperkonvex, wenn seine Kugeln die Eigenschaft der binären Intersektion besitzen.

L. Nachbin [3] hat bewiesen, daß ein endlichdimensionaler (reeller), linearer normierter Raum B dann und nur dann hyperkonvex ist, wenn man eine Basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ in B derart finden kann, daß für die Norm jedes Elementes

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \in B$$

gilt:

$$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

Ein endlichdimensionaler linearer Raum mit euklidischer Metrik ist also dann und nur dann hyperkonvex, wenn er eindimensional ist.

Mit der Hilfe dieser Begriffe können wir den Satz von Aronszajn und Panitchpakdi [2] folgenderweise formulieren:

Es sei D eine Untermenge eines metrischen Raumes E und M sei ein hyperkonvexer metrischer Raum. Jede Abbildung T von D in M, die eine

---

4) Wir nennen einen metrischen Raum M konvex, wenn man zu jedem Punktepaar x, y von M und zu jedem Paar α, β von positiven Zahlen mit $\alpha + \beta = \varrho(x, y)$, einen Punkt $z \in M$ mit $\varrho(x, z) = \alpha$ und $\varrho(y, z) = \beta$ finden kann.

subadditive Stetigkeitsmajorante[5]) $\delta(\varepsilon)$ *besitzt, kann zu einer Abbildung* T_E *von* E *in* M *fortgesetzt werden, und zwar mit derselben Stetigkeitsmajorante* $\delta(\varepsilon)$.[6])

Ist M *nicht hyperkonvex, so kann man einen Raum* E, *eine Untermenge* D *von* E *und eine Abbildung* T *von* D *in* M *mit einer subadditiven Stetigkeitsmajorante* $\delta(\varepsilon)$ *finden, für die der Satz ungültig ist.*

In einem speziellen Fall besagt dieser Satz Folgendes:

Erfüllt T auf der Menge D eine gleichmäßige Lipschitz-Bedingung mit der Konstante K, so besitzt T eine Fortsetzung auf E, die ebenfalls die Lipschitz-Bedingung, und zwar mit derselben Konstante K genügt[7]). (In diesem Fall ist nämlich die Funktion $\delta(\varepsilon) = K\varepsilon$ eine subadditive Stetigkeitsmajorante von T.)

In folgendem werden wir diese Resultaten in mehren Richtungen verallgemeinern.

Statt der Existenz einer *subadditiven Stetigkeitsmajorante* bzw. einer *gleichmäßigen Lipschitz-Bedingung* werden wir die *Stetigkeit in jedem Punkte* bzw. die Erfüllung einer *lokalen Lipschitz-Bedingung* annehmen. Dagegen setzen wir voraus, daß die Untermenge D abgeschlossen[8]), und der Raum M (bzw. der Wertebereich von T) hyperkonvex und beschränkt ist.

---

[5]) Aronszajn und Panitchpakdi [2] haben bewiesen, daß eine gleichmäßig stetige Abbildung T dann und nur dann eine *subadditive* Stetigkeitsmajorante besitzt, wenn ihr Stetigkeitsmodul $\delta_T(\varepsilon)$ die Bedingung $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to\infty}} \frac{\delta_T(\varepsilon)}{\varepsilon} \neq \infty$ erfüllt.

[6]) Ist T_2 eine Fortsetzung von T_1, so werden wir dies kurz durch das Zeichen $T_2 \succ T_1$ andeuten.

[7]) Wir sagen, daß die Abbildung T des metrischen Raumes A in den metrischen Raum M in einem Punkt $x_0 \in A$ eine *Lipschitz-Bedingung* erfüllt, wenn es eine Konstante $k(x_0)$ derart gibt, daß $\varrho'(T(x_0), T(y)) \leqq k(x_0)\,\varrho(x_0, y)$ für jedes $y \in A$ gültig ist. Gilt diese Ungleichung nur für die Punkte y einer gewissen Umgebung vom Radius $\vartheta(x_0)$ des Punktes x_0, so sagen wir, daß T im Punkt x_0 eine *lokale Lipschitz-Bedingung* erfüllt. Existiert eine Konstante K derart, daß $\varrho'(T(x), T(y)) \leqq K\varrho(x, y)$ für jedes Punktepaar $x, y \in A$ gilt, so sagen wir, T erfülle eine *gleichmäßige Lipschitz-Bedingung* mit der Konstante K.

Wir bezeichnen die Klasse der Abbildungen T von A in M, die in jedem Punkte $x \in A$ eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllen, mit $\mathrm{Lip}_l\,[A, M]$. Die Klasse der Abbildungen, die in jedem Punkt $x \in A$ eine (nicht lokale) Lipschitz-Bedingung erfüllen, sei mit $\mathrm{Lip}\,[A, M]$, und die Klasse der Abbildungen, die in A eine gleichmäßige Lipschitz-Bedingung erfüllen, mit $\mathrm{Lip}_u\,[A, M]$ bezeichnet.

Wenn wir auch die gleichmäßige Lipschitz-Konstante K bzw. die mit dem Punkte x veränderliche Lipschitz-Konstante $k(x)$ angeben, dann schreiben wir $\mathrm{Lip}_u\,[A, M; K]$ bzw. $\mathrm{Lip}\,[A, M; k]$.

[8]) Für eine gleichmäßig stetige Abbildung T ist die Voraussetzung, daß D abgeschlossen ist, unwesentlich. Ist nämlich T auf einer Menge D gleichmäßig stetig, so hat sie eine gleichmäßig stetige Fortsetzung auf die abgeschlossene Hülle von D.

Wir werden die Frage der Fortsetzung der stetigen Abbildungen auf die Frage der Fortsetzung der eine Lipschitz-Bedingung erfüllenden Abbildungen zurückführen, indem wir die stetigen Abbildungen durch Lipschitzsche Abbildungen gleichmäßig approximieren.

In § 1 werden wir uns mit der Fortsetzung solcher Abbildungen beschäftigen, die eine *lokale* Lipschitz-Bedingung erfüllen. Im Fall eines *beschränkten* Wertebereichs folgt die nichtlokale Lipschitz-Bedingung aus der lokalen[9]), folglich werden wir in diesem Fall das Wort „lokal" immer weglassen.

In § 2 werden wir die gleichmäßige Approximation *stetiger* Abbildungen durch *Lipschitzsche* Abbildungen untersuchen.

In § 3 werden wir die Sätze der Fortsetzbarkeit der *stetigen* Abbildungen als ein Korollar der Ergebnisse der §§ 1—2 gewinnen.

Die Ergebnisse der §§ 1—3 erweitern wir auch für beliebige endlichdimensionale lineare normierte Räume.

In § 4 werden wir den Begriff des hyperkonvexen metrischen Raumes etwas verallgemeinern, und die Sätze allgemeiner formulieren.

Wir bemerken noch, daß die Fortsetzungssätze nicht für beliebige metrische Räume M gültig bleiben. Genauer können wir Folgendes behaupten:

Es sei M ein gegebener metrischer Raum. Wenn bei jeder Wahl des metrischen Raumes E und der in E *abgeschlossenen* Menge D, jede *stetige* Abbildung von D in M sich zu einer stetigen Abbildung von E in M fortsetzen läßt, dann ist M notwendigerweise ein *absolutes Retraktum in weiterem Sinne* (vgl. [2]).

§ 1. Fortsetzungen von Lipschitzschen Abbildungen

Satz 1. *Es sei E ein beliebiger metrischer Raum, D eine abgeschlossene Untermenge von E, und M ein beschränkter und hyperkonvexer metrischer Raum*[10]) *mit dem Durchmesser d. Sei $T \in \mathrm{Lip}[D, M; k]$, $T^* \in \mathrm{Lip}[D, M; k^*]$, und*

---

[9]) Es folgt aus $\varrho'(T(x_0), T(y)) \leqq k(x_0)\,\varrho(x_0, y)$ für $\varrho(x_0, y) \leqq \vartheta(x_0)$ auch die Ungleichung

$$\varrho'(T(x_0), T(y)) \leqq \max\left[k(x_0), \frac{d}{\vartheta(x_0)}\right]\varrho(x_0, y) \quad \text{für} \quad y \in A,$$

wobei d den Durchmesser des Wertebereichs und A den Definitionsbereich von T bedeutet.

[10]) Statt der Beschränktheit von M genügt es vorauszusetzen, daß der Wertebereich von T beschränkt ist, Dies folgt daraus, daß jede Kugel G in einem hyperkonvexen metrischen Raum ebenfalls hyperkonvex ist, Jede Kugel in G ist nämlich der Durchschnitt von

es gelte die Ungleichung $\varrho'(T(x), T^*(x)) \leqq \varepsilon$ *in jedem Punkte* $x \in D$. *Existiert eine Fortsetzung* $T_E^* \in \mathrm{Lip}\,[E, M; k_E^*]$ *von* T^*, *so existiert auch eine Fortsetzung* $T_E \in \mathrm{Lip}\,[E, M; k_E]$ *von* T *mit*

$$k_E(x) = \begin{cases} \max\,[k(x), k_E^*(x)] & (x \in D) \\ 1 + \max\left[\dfrac{d}{\varrho(x, D)}, k_E^*(x)\right] & (x \in E - D), \end{cases}$$

und zwar derart, daß in jedem Punkt $x \in E$ *die Ungleichung* $\varrho'(T_E(x), T_E^*(x)) \leqq \varepsilon$ *erfüllt ist.*

Beweis. Wir zerlegen die Menge $E - D$ in abzählbar unendlich viele Teile E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ folgendermaßen: E_n soll die Menge aller Punkte von $E - D$ bezeichnen, die die Ungleichung

$$n - 1 < \max\left[\frac{d}{\varrho(x, D)}, k_E^*(x)\right] \leqq n$$

erfüllen. Die Mengen $D, E_1, E_2, \ldots$ sind offenbar paarweise fremd, und man hat $D \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = E$.

Wir führen in die Mengen $E_1, E_2, \ldots$ je eine Wohlordnung ein; die entsprechenden Ordnungstypen seien der Reihe nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Diese Wohlordnungen erzeugen eine Wohlordnung der Menge $E - D$, wenn wir alle Elemente von E_{n+1} nach den Elementen von E_n setzen $(n = 1, 2, \ldots)$. Der Ordnungstyp dieser Wohlordnung ist also $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$; $E - D = \{x_\nu\}_{\nu < \alpha}$.

Für eine beliebige Ordnungszahl η setzen wir $D_\eta = D \cup \{x_\nu\}_{\nu < \eta}$. Wir werden die gewünschte Fortsetzung der Abbildung durch transfinite Rekursion definieren, indem wir ihr Definitionsbereich schrittweise ausdehnen. Die Abbildung T mit dem ursprünglichen Definitionsbereich $D = D_1$ soll auch mit T_1 bezeichnet werden.

Es sei η eine beliebige Ordnungszahl $(\eta \leqq \alpha)$ und wir nehmen an, es sei schon je eine Fortsetzung T_ξ von T auf jede Menge D_ξ mit $\xi < \eta$ definiert, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $$\varrho'(T_\xi(x), T_\xi(y)) \leqq \bar{k}(x)\,\varrho(x, y) \qquad (x, y \in D_\xi)$$

G und einer Kugel in M, also können wir jedes System von Kugeln in G in der Form $\{G_i \cap G\}_{i \in I}$ darstellen. Sind die Mittelpunkte je zweier dieser Kungeln nicht ferner voneinander als die Summe ihrer Radien, so hat diese Eigenschaft auch das System der Kugeln G und G_i $(i \in I)$, und die Behauptung folgt dann auf Grund der Beziehung

$$\bigcap_{i \in I}(G_i \cap G) = (\bigcap_{i \in I} G_i) \cap G.$$

mit

$$\bar{k}(x)=\begin{cases}\max[k(x), k_E^*(x)] & \text{für} \quad x\in D,\\ n \quad \text{für} \quad x\in E_n & (n=1,2,\ldots),\end{cases}$$

(ii) $$\varrho'(T_\xi(x), T_E^*(x))\leqq\varepsilon \quad \text{für} \quad x\varepsilon D_\xi,$$

und

(iii) $$T_\xi \succ T_{\xi'} \quad \text{für} \quad \xi'<\xi<\eta.$$

Wir werden beweisen, daß T dann eine Fortsetzung T_η auf D_η besitzt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(I) $$\varrho'(T_\eta(x), T_\eta(y))\leqq\bar{k}(x)\varrho(x,y) \quad \text{für} \quad x,y\in D_\eta,$$

(II) $$\varrho'(T_\eta(x), T_E^*(x))\leqq\varepsilon \quad \text{für} \quad x\in D_\eta,$$

(III) $$T_\eta\succ T_\xi \quad \text{für} \quad \xi<\eta.$$

Man hat zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem η eine Limeszahl ist oder nicht.

Fall 1: η ist eine Limeszahl. Dann ist offenbar $\bigcup_{\xi<\eta} D_\xi=D_\eta$ und man definiere T_η durch

$$T_\eta(x)=T_\xi(x) \quad \text{für} \quad x\in D_\xi \quad (\xi<\eta);$$

wegen (iii) ist die Definition von T_η eindeutig und die Relation $T_\eta\succ T_\xi\succ T$ gilt für jede Ordnungszahl $\xi<\eta$. T_η erfüllt auch die Bedingungen (I) und (II). In der Tat, sind x und y zwei beliebig gewählte Punkte von D_η, so existiert eine Ordnungszahl $\xi<\eta$ derart, daß x und y beide in D_ξ enthalten sind; wegen (i), (ii) gelten also die Relationen:

$$\varrho'(T_\eta(x), T_\eta(y))=\varrho'(T_\xi(x), T_\xi(y))\leqq\bar{k}(x)\varrho(x,y),$$

$$\varrho'(T_\eta(x), T_E^*(x))=\varrho'(T_\xi(x), T_E^*(x))\leqq\varepsilon.$$

Fall 2: η ist keine Limeszahl, sondern z. B. $\eta=\xi+1$. Dann ist $D_\eta=D_{\xi+1}=D_\xi\cup\{x_\xi\}$. Der Punkt x_ξ möge zur Menge E_{n_0} gehören. Für das System der Kugeln $G(T_\xi(x), k(x)\varrho(x,x_\xi))$ mit $(x\in D_\xi)$ und $G(T_E^*(x_\xi),\varepsilon)$ gelten die Ungleichungen:

$$\begin{aligned}\bar{k}(y)\varrho(y,x_\xi)+\bar{k}(z)\varrho(z,x_\xi)&\geqq\\ \geqq\min[\bar{k}(y),\bar{k}(z)]\,(\varrho(y,x_\xi)+\varrho(z,x_\xi))&\geqq\\ \geqq\min[\bar{k}(y),\bar{k}(z)]\,\varrho(y,z)&\geqq\varrho'(T_\xi(y), T_\xi(z))\end{aligned}$$

für $y,z\in D_\xi$, und

$$\bar{k}(x)\varrho(x,x_\xi)+\varepsilon\geqq\varrho'(T_E^*(x), T_E^*(x_\xi))+\varrho'(T_E^*(x), T_\xi(x))\geqq$$
$$\geqq\varrho'(T_E^*(x_\xi), T_\xi(x))$$

für $x\in D_\xi$. Wegen der Hyperkonvexität von M haben diese Kugeln mindestens einen gemeinsamen Punkt. Wir wählen einen solchen gemeinsamen

Punkt t_ξ und mit seiner Hilfe definieren wir eine Fortsetzung T_η von T_ξ (und damit auch von T) auf D_η folgendermaßen:

$$T_\eta(x) = T_{\xi+1}(x) = \begin{cases} T_\xi(x) & \text{für } x \in D_\xi \\ t_\xi & \text{für } x = x_\xi. \end{cases}$$

T_η erfüllt die Bedingungen (I) und (II). Aus der Konstruktion folgen für $x \in D_\xi$ die Ungleichungen

$$\varrho'(T_\eta(x), T_\eta(x_\xi)) \leqq \bar{k}(x)\varrho(x, x_\xi),$$
$$\varrho'(T_\eta(x), T_E^*(x)) \leqq \varepsilon,$$

also sind die Bedingungen (I) und (II) für die Punkte $x \in D_\xi$ erfüllt. Wir müssen sie noch auch für den Punkt $x = x_\xi$ rechtfertigen. Daß (II) auch für $x = x_\xi$ erfüllt ist, folgt wieder aus der Konstruktion. Um auch die Erfüllung von (I) zu beweisen, nehmen wir einen beliebigen Punkt $y \in D_\eta$. Fällt dieser in D, so gilt

$$\frac{\varrho'(T_\eta(y), T_\eta(x_\xi))}{\varrho(y, x_\xi)} \leqq \frac{d}{\varrho(x_\xi, D)} \leqq \max\left[\frac{d}{\varrho(x_\xi, D)}, k_E^*(x_\xi)\right] \leqq$$
$$\leqq n_0 = \bar{k}(x_\xi).$$

Fällt aber y in $(E-D) \cap D_\eta$, so gehört er notwendigerweise zu einer Menge E_m mit $m \leqq n_0$. Dann folgt aus $\bar{k}(y) = m$, daß

$$\varrho'(T_\eta(y), T_\eta(x_\xi)) \leqq \bar{k}(y)\varrho(y, x_\xi) \leqq n_0\varrho(y, x_\xi) = \bar{k}(x_\xi)\varrho(y, x_\xi)$$

gilt, w. z. b. w.

So haben wir eine Fortsetzung T_E von T mit transfiniter Rekursion definiert, $T_E \in \mathrm{Lip}[E, M; \bar{k}] \subset \mathrm{Lip}[E, M; k_E]$ (weil $\bar{k}(x) \leqq k_E(x)$ ist). Damit ist der Satz 1 bewiesen.[11])

Korollar. *E, D, M seien wie in Satz 1. Jede Abbildung $T \in \mathrm{Lip}[D, M; k]$ besitzt eine Fortsetzung $T_E \in \mathrm{Lip}[E, M; k_E]$ mit*

$$k_E(x) = \begin{cases} k(x) & \text{für } x \in D, \\ 1 + \dfrac{d}{\varrho(x, D)} & \text{für } x \in E - D. \end{cases}$$

---

[11]) Ein ähnlicher Satz gilt für Abbildungen, die eine gleichmäßige Lipschitz-Bedingung erfüllen:

E, D und M seien wie in Satz 1, nur soll M nicht notwendig beschränkt und D nicht notwendig abgeschlossen sein. Es seien $T \in \mathrm{Lip}_u[D, M; K]$ und $T^* \in \mathrm{Lip}_u[D, M; K^*]$ und es gelte für jeden Punkt $x \in D$ die Ungleichung $\varrho'(T(x), T^*(x)) \leqq \varepsilon$. Bekanntlich (vgl. [2]) *existiert eine Fortsetzung $T_E^* \in \mathrm{Lip}_u[E, M; K^*]$ von T^*. Dann existiert auch eine Fortsetzung $T_E \in \mathrm{Lip}_u[E, M;$ $\max(K, K^*)]$ von T, die für jeden Punkt $x \in E$ die Ungleichung $\varrho'(T_E(x), T_E^*(x)) \leqq \varepsilon$ erfüllt.*

Der Beweis dieses Satzes ist ähnlich zum Beweis in [2] S. 415.

Zum Beweis wendet man Satz 1 mit $T^*(x) = a = \text{const.}$ $(x \in D)$ und $T_E^*(x) = a$ $(x \in E)$ an[12]).

Satz 1 gilt insbesondere für reellwertige Funktionen, hier braucht man sogar die Bedingung der Beschränktheit des Wertebereiches entbehren (vgl. [4]). Weiterhin bleibt der Satz auch im Fall richtig, daß die Bildmenge in einen beliebigen linearen normierten Raum fällt und nicht notwendig beschränkt ist, wenn wir voraussetzen, daß die Abbildung in jedem Punkt eine *lokale* Lipschitz-Bedingung erfüllt. Es gilt nämlich der folgende

Satz 1'. *E und D seien wie in Satz 1 und B sei ein endlichdimensionaler linearer normierter Raum. Ist* $T \in \mathrm{Lip}_u[D, B]$ *bzw.* $T \in \mathrm{Lip}_l[D, B]$, *so existiert eine Fortsetzung* T_E *von* T, *die zur Klasse* $\mathrm{Lip}_u[E, B]$ *bzw.* $\mathrm{Lip}_l[E, B]$ *gehört.*

Beweis. Es mögen die Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$ eine Basis in B bilden. Bekanntlich gibt es dann zwei Zahlen $\mu > 0$ und $m > 0$ derart, daß für jedes Element

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \in B$$

die Ungleichung

$$\text{(IV)} \qquad \mu \|x\| \leqq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n| \leqq m \|x\|$$

gilt (vgl. [5] S. 216).

T läßt sich (eindeutig) in der Form $T(x) = T_1(x)e_1 + T_2(x)e_2 + \cdots + T_n(x)e_n$ schreiben, wobei die $T_i(x)$ reellwertige Funktionen sind. T gehört offenbar dann und nur dann zur Klasse $\mathrm{Lip}_u[D, B]$ bzw. $\mathrm{Lip}_l[D, B]$, wenn jede Funktion T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zur Klasse $\mathrm{Lip}_u[D, R]$ bzw. $\mathrm{Lip}_l[D, R]$ gehört, wo R die reelle Zahlengerade bedeutet. (Dies folgt aus (IV.)) Haben wir also die „Koordinaten" T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ auf E fortgesetzt, so folgt aus (IV), daß die Fortsetzungen von T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ auch eine Fortsetzung von der gegebener Art von T bestimmen.

§ 2. Approximation von stetigen Abbildungen durch Lipschitzsche Abbildungen

In folgendem spielt die gleichmäßige Approximation der stetigen Abbildungen durch Lipschitzsche Abbildungen eine wichtige Rolle. Jede auf einem kompakten metrischen Raum definierte reelle stetige Funktion $f(x)$ läßt sich

---

12) Ist der Wertebereich der Abbildungen in einer beschränkter Untermenge, etwa in einer Kugel um den Punkt O eines hyperkonvexen linearen normierten Raumes enthalten (diese Kugel ist ja wieder hyperkonvex; vgl. Fußnote[10])), so folgt der Satz 1 aus dem Korollar. Man hat ja $\|T(x) - T^*(x)\| \leqq \varepsilon$ für $x \in D$. Also bekommt man den Satz 1, wenn man das Korollar auf die Abbildung $T - T^*$ und auf $M = G(O, \varepsilon)$ anwendet

durch Funktionen gleichmäßig approximieren, die je eine gleichmäßige Lipschitz-Bedingung erfüllen. Dies folgt einfach aus dem STONE—WEIERSTRASSschen Approximationssatz [6].

Im allgemeinen Fall, wo es sich über eine stetige Abbildung T eines beliebigen (nicht notwendig kompakten) metrischen Raumes A in einen beschränkten hyperkonvexen metrischen Raum M handelt, gelten ähnliche Approximationssätze, die wir jetzt beweisen werden. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem T gleichmäßig stetig oder nicht gleichmäßig stetig ist.

Satz 2. *Ist T gleichmäßig stetig auf A, so läßt sich sie beliebig genau durch zur Klasse* $\mathrm{Lip}_u\,[A, M]$ *gehörige Abbildungen gleichmäßig approximieren.*

Satz 3. *Ist T stetig auf A, so läßt sich sie beliebig genau durch zur Klasse* $\mathrm{Lip}\,[A, M]$ *gehörige Abbildungen gleichmäßig approximieren.*

Zum Beweis wird das folgende Lemma benützt:

Lemma. *Sei $m(r)$ eine Funktion, definiert auf einer Menge Δ von positiven reellen Zahlen, die 0 als Häufungspunkt hat. Die Werte von $m(r)$ seien nichtnegative reelle Zahlen (es ist auch der Wert $+\infty$ gestattet), ferner seien die folgenden Bedingungen erfüllt;* a) *für jedes $s>0$ ist* $\sup\limits_{r\geqq s} m(r)<\infty$, b) $\overline{\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ r\in\Delta}}}\, m(r)=\infty$. *Dann gibt es in einer beliebig kleinen Umgebung von 0 eine Zahl $r^*\in\Delta$ derart, daß für jedes $r\in\Delta$ mit $r>r^*$ die Ungleichung $2m(r^*)>m(r)$ gilt.*

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch, also, daß es in einer Umgebung $(0, \delta)$ von 0 kein Punkt r^* mit den gewünschten Eigenschaften existiert. Nach den Bedingungen a) und b) existiert aber in dieser Umgebung ein $r_1\in\Delta$ mit $m(r_1)>\sup\limits_{r\geqq\delta} m(r)$. Da nach unserer Annahme r_1 nicht die Eigenschaft eines r^* haben kann, existiert ein Punkt $r_2>r_1$, $r_2\in\Delta$, für den $m(r_2)\geqq 2m(r_1)$ gilt. Dann ist $m(r_2)>2\sup\limits_{r\geqq\delta} m(r)$, folglich muß r_2 auch in $(0, \delta)$ liegen, also kann auch r_2 nicht die Eigenschaft eines r^* haben, d. h. existiert ein Punkt $r_3>r_2$, $r_3\in\Delta$, für den $m(r_3)\geqq 2m(r_2)\geqq 4m(r_1)$ gilt. r_3 liegt wieder in $(0, \delta)$. Nach diesem Verfahren bekommen wir eine unendliche Folge $r_1<r_2<r_3<\cdots$ von Punkten aus $\Delta\cap(0, \delta)$, für die $m(r_n)\geqq 2^{n-1}m(r_1)$ und folglich $\lim\limits_{n\to\infty} m(r_n)=\infty$ gilt. Das ist aber in Widerspruch zur Bedingung a). Damit ist der Beweis beendet.

Beweis von Satz 2. Es genügt offenbar nur eine solche gleichmäßig stetige Abbildung von A in M zu betrachten, die selbst nicht zu

$\mathrm{Lip}_u[A, M]$ gehört. Dann gibt es in A beliebig nahe liegende Punktpaare[13]) und folglich hat der Definitionsbereich $\varDelta$ der Funktion

$$m(r) = \sup \left\{ \frac{\varrho'(T(x_1), T(x_2))}{\varrho(x_1, x_2)} : x_1, x_2 \in A; \varrho(x_1, x_2) = r \right\}$$

den Punkt 0 als Häufungspunkt.

Die Funktion $m(r)$ erfüllt die Bedingungen a) und b) des Lemmas. Bezeichnen wir nämlich mit d den Durchmesser von M, so ist $m(r) \leqq \frac{d}{r}$, also $\sup\limits_{r \geqq s} m(r) \leqq \frac{d}{s} < \infty$. Andererseits folgt aus der Relation $T \notin \mathrm{Lip}_u[A, M]$, daß $\overline{\lim\limits_{\substack{r \in \varDelta \\ r \to 0}}}\, m(r) = \infty$ ist.

Also können wir beliebig nahe zum Punkt 0 ein $r^* \in \varDelta$ finden derart, daß für $r \geqq r^*, r \in \varDelta$, die Ungleichung $2m(r^*) > m(r)$ gilt. Wir wählen r^* so klein, daß die Ungleichung $\varrho'(T(x_1), T(x_2)) \leqq \varepsilon$ für jedes, der Ungleichung $\varrho(x_1, x_2) \leqq r^*$ genügende Punktpaar x_1, x_2 gültig ist, wobei ε eine gegebene, beliebig kleine positive Zahl ist (das ist möglich wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von T).

Es sei N ein r^*-Netz im Raum A, d. h. eine Menge von Punkten von A mit der Eigenschaft, daß der Abstand von je zwei Punkten aus N nicht kleiner als r^* ist, und jeder Punkt $x \in A$ von mindestens einem Punkt von N einen Abstand kleiner als r^* hat. (Ein solches Netz existiert immer, vgl. z. B. Hausdorff [6].) Sei T_N die „Einschränkung" von T auf N, d. h. die Abbildung, die nur für die Punkte von N definiert ist und dort mit T zusammenfällt. T_N gehört zur Klasse $\mathrm{Lip}_u[N, M; 2m(r^*)]$: für $x, y \in N$ hat man ja $r = \varrho x, y) \geqq r^*$, also

$$\frac{\varrho'(T_N(x), T_N(y))}{\varrho(x, y)} = \frac{\varrho'(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)} \leqq m(r) \leqq 2m(r^*).$$

Nach Satz 1 existiert eine Fortsetzung T' von T_N auf A mit

$$T' \in \mathrm{Lip}_u[A, M; 2m(r^*)].$$

Wir werden zeigen, daß die Ungleichung $\varrho'(T(x), T'(x)) \leqq 3\varepsilon$ für jeden Punkt $x \in A$ besteht. Zu jedem Punkt $x \in A$ können wir ja einen Punkt $x_N \in N$

---

13) Ist A so beschaffen, daß jedes Punktepaar $x, y \in A$ einen Abstand $\varrho(x, y) \geqq \varepsilon$ hat, wobei ε eine positive Konstante ist, so gilt für jede Abbildung T von A in M: $\varrho'(T(x) T(y)) \leqq \leqq \frac{d}{\varepsilon}\varrho(x, y)$, also ist $T \in \mathrm{Lip}_u\left[A, M; \frac{d}{\varepsilon}\right]$.

finden derart, daß $\varrho(x, x_N) < r^*$ ist. Dann gilt auch die Ungleichung

$$\varrho'(T(x_N), T'(x)) = \varrho'(T'(x_N), T'(x)) \leqq 2m(r^*)\varrho(x, x_N) \leqq$$

$$\leqq 2m(r^*)r^* = 2r^* \sup\left\{\frac{\varrho'(T(x_1), T(x_2))}{r^*}:\ x_1, x_2 \in A; \varrho(x_1, x_2) = r^*\right\} =$$

$$= 2\sup\{\varrho'(T(x_1), T(x_2)):\ x_1, x_2 \in A; \varrho(x_1, x_2) = r^*\} \leqq 2\varepsilon.$$

Hieraus und aus der Ungleichung $\varrho'(T(x), T(x_N)) \leqq \varepsilon$ folgt die gewünschte Ungleichung. Damit haben wir Satz 2 bewiesen.

In Satz 2 genügt es statt der Beschränktheit von M die Erfüllung der Relation $\sup\limits_{r \geqq s} m(r) < \infty$ für jedes $s > 0$, d.h. die Beschränktheit von $\dfrac{\varrho'(T(x_1), T(x_2))}{\varrho(x_1, x_2)}$ für $\varrho(x_1, x_2) \geqq s$ vorauszusetzen.

Diese Bedingung ist immer erfüllt, wenn T eine subadditive Stetigkeitsmajorante $\delta(r)$ besitzt. Aus $\lim\limits_{r\to 0} \delta(r) = 0$ folgt ja, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $r_\varepsilon > 0$ gibt, derart, daß für $r < r_\varepsilon$ die Ungleichung $\delta(r) \leqq \varepsilon$ besteht. Man kann jede Zahl $r \geqq r_\varepsilon$ in der Form $r = q r_\varepsilon + r'$ mit einer natürlichen Zahl q und mit $0 \leqq r' < r_\varepsilon$ darstellen; wegen der Subadditivität gilt dann $\delta(r) \leqq q\delta(r_\varepsilon) + \delta(r')$. Ist insbesondere r gleich dem Abstande zweier Punkte $x_1, x_2 \in A$, so bekommen wir die Ungleichung

$$\frac{\varrho'(T(x_1), T(x_2))}{\varrho(x_1, x_2)} \leqq \frac{\delta(r)}{r} \leqq \frac{q\delta(r_\varepsilon) + \delta(r')}{q r_\varepsilon + r'} \leqq$$

$$\leqq \frac{q\varepsilon + \varepsilon}{q r_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{q r_\varepsilon} \leqq \frac{2\varepsilon}{r_\varepsilon}$$

für $\varrho(x_1, x_2) = r > r_\varepsilon$. Hieraus folgt die Behauptung.

Umgekehrt, wenn T sich durch eine zur Klasse $\mathrm{Lip}_u[A, M]$ gehörige Abbildung gleichmäßig approximieren läßt, dann besitzt T eine subadditive Stetigkeitsmajorante. In der Tat, ist T_ε eine zur Klasse $\mathrm{Lip}_u[A, M; K]$ gehörige Abbildung, die T mit der Genauigkeit ε approximiert, so ist

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\delta_T(r)}{r} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sup\{\varrho'(T(x_1), T(x_2)):\ x_1, x_2 \in A; \varrho(x_1, x_2) \leqq r\} \leqq$$

$$\leqq \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sup\{\varrho'(T_\varepsilon(x_1), T_\varepsilon(x_2)) + 2\varepsilon:\ x_1, x_2 \in A; \varrho(x_1, x_2) \leqq r\} \leqq$$

$$\leqq \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{r}(Kr + 2\varepsilon) = K.$$

Hieraus folgt (vgl. Fußnote 5), daß T eine subadditive Stetigkeitsmajorante hat. Also für nicht notwendig beschränkte hyperkonvexe metrische Räume gilt der folgende

Satz 2'. *Es sei T eine gleichmäßig stetige Abbildung eines metrischen Raumes A in einen hyperkonvexen metrischen Raum M. T ist dann und nur dann durch zur Klasse* $\mathrm{Lip}_u[A, M]$ *gehörige Abbildungen beliebig genau gleichmäßig approximierbar, wenn sie eine subadditive Stetigkeitsmajorante besitzt.*

Da aber, wie wir gesehen haben, T gewiß dann eine subadditive Stetigkeitsmajorante besitzt, wenn sie mindestens für ein einziges $\varepsilon > 0$ durch eine Abbildung $T^* \in \mathrm{Lip}_u[A, M]$ mit der Genauigkeit ε approximiert werden kann, so gilt der folgende

Satz 2''. *Es sei T wie in Satz 2'. Existiert eine Abbildung* $T^* \in \mathrm{Lip}_u[A, M]$ *mit* $\sup\limits_{x\in A} \varrho'(T(x), T^* x)) < \infty$, *so läßt sich T durch zur Klasse* $\mathrm{Lip}_u[A, M]$ *gehörige Abbildungen beliebig genau gleichmäßig approximieren.*

Beweis von Satz 3. Es sei $R \subset A$ die Menge derjenigen Punkte $x \in A$, in welchen T keine Lipschitz-Bedingung erfüllt, d. h. für die

$$\overline{\lim_{y\to x}} \frac{\varrho'(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)} = \infty$$

ist (ist R leer, so ist nichts zu beweisen). Die Komplementärmenge $A-R$ bezeichnen wir mit S.

Es sei x ein beliebiger, aber fester Punkt von R. Der Definitionsbereich $\varDelta$ der Funktion

$$m_x(r) = \sup_{\varrho(x,y)=r} \frac{\varrho'(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)}$$

hat den Punkt 0 als Häufungspunkt,[14]) $m_x(r)$ ist nichtnegativ und erfüllt die Bedingungen a) und b) des Lemmas; es gilt ja für jede Zahl $s > 0$

$$\sup_{r \geqq s} m_x(r) = \sup_{\varrho(x,y) \geqq s} \frac{\varrho'(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)} \leqq \frac{d}{s} < \infty$$

und

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\, m(r) = \overline{\lim_{y\to x}} \frac{\varrho'(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)} = \infty.$$

Nach dem Lemma können wir beliebig nahe zu 0 einen Punkt $r^* \in \varDelta$ finden, derart, daß für $r \geqq r^*$ die Ungleichung $2m_x(r^*) > m_x(r)$ gilt. Daraus folgt, daß wir beliebig nahe zum Punkt x einen Punkt x^* derart finden

[14]) Der Beweis ist ähnlich zum Beweis, der in Fußnote 13 angegeben wurde.

können, daß für jeden Punkt $y \in A$ mit $\varrho(x,y) \geqq \varrho(x,x^*)$ die Ungleichung

$$\text{(V)} \qquad 2\frac{\varrho'(T(x),T(x^*))}{\varrho(x,x^*)} < \frac{\varrho'(T(x),T(y))}{\varrho(x,y)}$$

besteht. Wegen der Stetigkeit können wir zu jedem Punkt $x \in A$ und jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\vartheta = \vartheta(x,\varepsilon)$ mit $0 < \vartheta < 1$ finden derart, daß für jeden Punkt $y \in A$ mit $\varrho(x,y) \leqq 2\vartheta$ die Ungleichung $\varrho'(T(x),T(y)) \leqq \varepsilon$ besteht. Wir ordnen jedem Punkt $x \in R$ einen Punkt x^* zu, der die Bedingung (V) und die Ungleichung $\varrho(x,x^*) < \vartheta$ erfüllt.

Wir bezeichnen mit $R_n (n = 1, 2, \ldots)$ die Menge derjenigen Punkte x von R, die die Bedingung $\frac{1}{n+1} \leqq \varrho(x,x^*) < \frac{1}{n}$ erfüllen. Offenbar sind die Mengen R_n paarweise fremd und ihre Vereinigungsmenge ist gleich R.

Wir konstruieren in der Menge R_1 ein 1-Netz und bezeichnen wir es mit N_1. Um jeden Punkt von N_1 als Mittelpunkt nehmen wir die offene Kugel vom Radius 1, die Vereinigungsmenge dieser Kugeln ist eine offene Menge G_1, die die Menge R_1 offenbar enthält: $G_1 \supset R_1$. In der Menge $R_2 - G_1$ konstruieren wir ein $\frac{1}{2}$-Netz N_2 und um jeden Punkt von N_2 schreiben wir eine offene Kugel vom Radius $\frac{1}{2}$; die Vereinigungsmenge G_2 dieser Kugeln ist wieder eine offene Menge und man hat $G_1 \cup G_2 \supset R_1 \cup R_2$. Dieses Verfahren fortgesetzt, am n-ten Schritte konstruiert man ein $\frac{1}{n}$-Netz N_n in $R_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} G_i$, und man bezeichnet mit G_n die Vereinigungsmenge der offenen Kugeln vom Radius $\frac{1}{n}$ um die Punkte von N_n.

Man setze $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ und $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$; G ist offen und $G \supset R$, also ist $A - G$ abgeschlossen und man hat $A - G = S - G \subset S$. Wir wollen beweisen, daß auch $N \cup (A - G)$ (in A) abgeschlossen ist. Dazu müssen wir zeigen, daß die Komplementärmenge von $N \cup (A - G)$ d. h. $G - N$ offen ist.

Es sei x ein beliebiger Punkt von $G - N$. Es gibt eine wohlbestimmte natürliche Zahl m, für welche $x \in G_m$. Das Netz N_m besitzt einen Punkt x_m mit $\varrho(x,x_m) < \frac{1}{m}$. Dies bedeutet, daß x in $G^\circ\left(x_m; \frac{1}{m}\right)$ liegt. In $G^\circ\left(x_m; \frac{1}{m}\right)$ liegt dann auch eine Umgebung von positivem Radius von x. Wählen wir diese Umgebung von x genügend klein, so enthält sie keinen Punkt von N und der abgeschlossenen Menge $A - G$, also ist sie dann in $G - N$ enthalten Damit haben wir bewiesen, daß jeder Punkt von $G - N$ eine ganze Umgebung in $G - N$ besitzt, d. h. $G - N$ ist offen.

Sei T_{N^*} die Einschränkung von T auf die Menge $N^* = N \cup (A-G)$; wir behaupten, daß T_{N^*} zur Klasse $\mathrm{Lip}\,[N^*, M; k]$ gehört, mit

$$k(x) = \begin{cases} 2\,\dfrac{\varrho'(T(x), T(x^*))}{\varrho(x, x^*)} & (x \in N), \\ \sup\limits_{y \in A} \dfrac{\varrho'(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)} & (x \in A-G). \end{cases}$$

(Das in der Definition von $k(x)$ vorkommende „Supremum" ist endlich, da T in jedem Punkte $x \in A-G \subset S$ eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Da N und $A-G$ fremd sind, ist die Definition von $k(x)$ eindeutig.) Für einen Punkt $x \in N$ folgt die Behauptung folgendermaßen. x ist in irgendeiner Menge N_n enthalten. Jeder von x verschiedene Punkt y von N^* hat dann von x einen Abstand $\varrho(x, y) \geqq \frac{1}{n}$, also ist a fortiori $\varrho(x, y) \geqq \varrho(x, x^*)$ und

$$\frac{\varrho'(T_{N^*}(x), T_{N^*}(y))}{\varrho(x, y)} = \frac{\varrho(T(x), T(y))}{\varrho(x, y)} \leqq 2\,\frac{\varrho'(T(x), T(x^*))}{\varrho(x, x^*)},$$

d. h.
$$\varrho(T_{N^*}(x), T_{N^*}(y)) \leqq k(x)\,\varrho(x, y) \quad (x \in N, y \in N^*).$$

Für $x \in A-G$ ist die Behauptung trivial. Damit haben wir die Behauptung $T_{N^*} \in \mathrm{Lip}\,[N^*, M; k]$ bewiesen.

Nach Satz 1 besitzt T_{N^*} eine Fortsetzung $T' \in \mathrm{Lip}\,[A, M; k_A]$ mit einer Funktion $k_A(x)$, die für $x \in N^*$ mit $k(x)$ übereinstimmt.

Wir zeigen, daß die Ungleichung $\varrho'(T(x), T'(x)) \leqq 5\varepsilon$ für jeden Punkt $x \in A$ besteht. Für $x \in N^*$ ist ja sogar $T'(x) = T_{N^*}(x) = T(x)$. Ist aber $x \in A - N^* = G - N \subset G$, so existiert eine natürliche Zahl n mit $x \in G_n$, also besitzt N_n einen Punkt x_n mit $\varrho(x_n, x) < \frac{1}{n} \leqq 2\,\varrho(x_n, x_n^*)$. Hieraus und aus der Ungleichung $\varrho(x_n, x_n^*) < \vartheta(x_n, \varepsilon)$ folgt

$$\varrho'(T(x_n), T'(x)) = \varrho'(T'(x_n), T'(x)) \leqq k_A(x_n)\,\varrho(x_n, x) \leqq$$
$$\leqq 2\,\frac{\varrho'(T(x_n), T(x_n^*))}{\varrho(x_n, x_n^*)}\, 2\,\varrho(x_n, x_n^*) \leqq 4\,\varrho'(T(x_n), T(x_n^*)) \leqq 4\,\varepsilon.$$

Anderseits folgt aus $\varrho(x, x_n) < 2\,\vartheta(x_n, \varepsilon)$, daß $\varrho'(T(x), T(x_n)) \leqq \varepsilon$ gilt. Diese zwei Ungleichungen liefern die gewünschte Ungleichung. Also ist T durch ein $T' \in \mathrm{Lip}\,[A, M]$ beliebig genau gleichmäßig approximierbar, w. z. b. w.

Die Sätze 2, 2' und 3 gelten insbesondere für Abbildungen von A in einen beschränkten Teil der reellen Zahlengerade, d. h. für beschränkte reellwertige Funktionen. Hier kann die Bedingung der Beschränktheit sogar weggelassen werden: die Sätze gelten für Abbildungen von A in die Zahlengerade, oder allgemeiner in einen beliebigen endlichdimensionalen linearen normierten Raum. Wir behaupten also die folgenden beiden Sätze:

Satz 4. *Es sei A ein beliebiger metrischer Raum und B ein endlichdimensionaler linearer normierter Raum. Eine gleichmäßig stetige Abbildung T von A in B läßt sich dann und nur dann durch zur Klasse* $\mathrm{Lip}_u[A, B]$ *gehörige Abbildungen beliebig genau gleichmäßig approximieren, wenn T eine subadditive Stetigkeitsmajorante* $\delta(\varepsilon)$ *besitzt.*

Satz 5. *Es seien A und B wie in Satz 4. Eine beschränkte stetige Abbildung T von A in B läßt sich durch zur Klasse* $\mathrm{Lip}[A, B]$ *gehörige Abbildungen beliebig genau gleichmäßig approximieren.*

Beweis von Satz 4. Wenn T sich durch eine zur Klasse $\mathrm{Lip}_u[A, B]$ gehörige Abbildung gleichmäßig approximieren läßt, dann besitzt T eine subadditive Stetigkeitsmajorante. Der Beweis ist derselbe wie in Satz 2'.

Umgekehrt, besitzt T eine subadditive Stetigkeitsmajorante $\delta(\varepsilon)$, so folgt aus (IV) ($e_1, e_2, \ldots, e_n$; $T_1, T_2, \ldots, T_n$; μ, m sind wie im Beweis von Satz 1') die Ungleichung

$$|T_i(x_1) - T_i(x_2)| \leqq m\|T(x_1) - T(x_2)\| \leqq m\,\delta(\varepsilon) \qquad (\varrho(x_1, x_2) \leqq \varepsilon)$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$; d. h. die reellwertigen Funktionen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ besitzen ebenfalls eine subadditive Stetigkeitsmajorante, und zwar $m\,\delta(\varepsilon)$. Also nach Satz 2' kann jede Funktion $T_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ durch eine konvergente Folge $\{T_i^{(k)}\}$ von Funktionen aus $\mathrm{Lip}_u[A, R]$ beliebig genau gleichmäßig approximiert werden (R ist die reelle Zahlengerade). Dann konvergiert aber die Folge $\{T^{(k)}(x)\} = \{T_1^{(k)}(x)e_1 + T_2^{(k)}(x)e_2 + \cdots + T_n^{(k)}(x)e_n\}$ gleichmäßig gegen T. Da $T^{(k)} \in \mathrm{Lip}_n[A, B]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, so haben wir den Satz bewiesen.

Beweis von Satz 5. Nach Satz 3 läßt sich jede Funktion T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ durch Funktionen aus $\mathrm{Lip}[A, R]$ beliebig genau gleichmäßig approximieren. Jede gleichmäßig konvergente Folge $\{T_i^{(k)}\} \to T_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ von Funktionen aus $\mathrm{Lip}[A, R]$ bestimmt eine gleichmäßig konvergente Folge $\{T^{(k)}\} \to T$ von Abbildungen aus $\mathrm{Lip}[A, B]$, w. z. b. w.

§ 3. Stetige Fortsetzung von stetigen Abbildungen

D sei eine abgeschlossene Untermenge des metrischen Raumes E, und T eine stetige Abbildung von D in einen beschränkten hyperkonvexen metrischen Raum M. Nach Satz 3 läßt sich T durch Abbildungen aus $\mathrm{Lip}[D, M]$ beliebig genau gleichmäßig approximieren. Es sei $\{T_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eine approximierende Folge aus $\mathrm{Lip}[D, M]$, mit $\varrho'(T(x), T_i(x)) \leqq \frac{1}{2^{i+1}}$ für jedes $x \in D$. Dann gilt auch $\varrho'(T_i(x), T_{i+1}(x)) \leqq \frac{1}{2^i}$ für $x \in D$ und $i = 1, 2, \ldots$.

Nach dem Korollar von Satz 1 besitzt T_1 eine Fortsetzung $T_1' \in \mathrm{Lip}[E, M]$. Mit wiederholter Anwendung von Satz 1 bekommen wir der Reihe nach Fortsetzungen $T_1', T_2', \ldots$ von $T_1, T_2, \ldots$ mit $T_i' \in \mathrm{Lip}[E, M]$ und $\varrho'(T_i'(x), T_{i+1}'(x)) \leqq \leqq \frac{1}{2^i}$ $(x \in E;\ i = 1, 2, \ldots)$.

Wir behaupten, daß die Folge $\{T_i'\}$ im Raum E gleichmäßig gegen eine Abbildung T' konvergiert, die offenbar eine stetige Fortsetzung von T ist. Es sei nämlich x ein beliebiger Punkt von E, und wir nehmen die Kugeln $G\left(T_i'(x), \frac{1}{2^{i-1}}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Wegen

$$\varrho'(T_i'(x), T_{i+k}'(x)) \leqq \varrho'(T_i'(x), T_{i+1}'(x)) + \varrho'(T_{i+1}'(x), T_{i+2}'(x)) + \cdots +$$
$$+ \varrho'(T_{i+k-1}'(x), T_{i+k}'(x)) \leqq \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{i+k-1}} < \frac{1}{2^{i-1}}$$

haben diese Kugeln mindestens einen gemeinsamen Punkt. Die Radien dieser Kugeln streben für $i \to \infty$ gegen 0, also haben die Kugeln nur einen einzigen gemeinsamen Punkt, den wir mit $t(x)$ bezeichnen. Die Abbildung T' von E in M, definiert durch

$$T'(x) = \begin{cases} T(x) & (x \in D) \\ t(x) & (x \in E - D), \end{cases}$$

ist dann gleichmäßiger Limes der Folge $\{T_i'\}$, und zwar ist $\varrho'(T_i'(x), T'(x)) \leqq \frac{1}{2^{i-1}}$ $(x \in E;\ i = 1, 2, \ldots)$. Also ist T' eine stetige Fortsetzung von T.

Ist M selbst nicht beschränkt und hyperkonvex, sondern das topologische Produkt endlichvieler beschränkter hyperkonvexer metrischer Räume, so braucht man nur die einzelnen „Koordinaten" von T stetig fortzusetzen um eine stetige Fortsetzung von T zu gewinnen. Damit haben wir also den folgenden Satz bewiesen:

Satz 6. *D sei eine abgeschlossene Untermenge eines beliebigen metrischen Raumes E, und M ein Raum, der als topologisches Produkt endlichvieler beschränkter und hyperkonvexer metrischer Räume entsteht. Jede stetige Abbildung T von D in M läßt sich zu einer stetigen Abbildung von E in M fortsetzen*[15, 16]).

---

[15]) Ein spezieller Fall dieses Satzes ist der folgende: M ist ein endlichdimensionaler linearer metrischer Raum und T ist beschränkt. Die Fortsetzbarkeit der nicht beschränkten Abbildungen folgt aus der Tat, daß der Satz auch für nicht beschränkte reelle Funtionen gilt.

[16]) Ist T gleichmäßig stetig, so läßt sich sie auch durch Abbildungen aus $\mathrm{Lip}_\mu[D, M]$ beliebig genau gleichmäßig approximieren. Fortsetzen wir diese Abbildungen derart, daß die Fortsetzungen zur Klasse $\mathrm{Lip}_\mu[E, M]$ gehören, so wird auch T_E gleichmäßig stetig.

§ 4. Verallgemeinerungen

Die folgenden beiden Definitionen stammen von ARONSZAJN und PANITCHPAKDI.

Definition 3. *Ein metrischer Raum M heißt $\mathfrak{m}$-hyperkonvex, wobei $\mathfrak{m}$ eine Kardinalzahl ist, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für jedes System $\{G(x_i; r_i)\}_{i\in I}$ von weniger als $\mathfrak{m}$ Kugeln in M mit der Eigenschaft*

$$\varrho'(x_i, x_k) \leqq r_i + r_k \qquad (i, k \in I)$$

ist $\bigcup\limits_{i\in I} G(x_i; r_i)$ nicht leer.

Offenbar ist jeder hyperkonvexe Raum a fortiori $\mathfrak{m}$-hyperkonvex für jedes $\mathfrak{m}$, und jeder $\mathfrak{m}$-hyperkonvexe Raum ist zugleich $\mathfrak{n}$-hyperkonvex für jedes $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$. Die $\mathfrak{m}$-Hyperkonvexität ist im Fall $\mathfrak{m} = 3$ mit der Konvexität indentisch.

Ein wichtiges Beispiel für einen metrischen Raum, der für eine gewiße Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{m}$-hyperkonvex, aber nicht hyperkonvex ist, ist der Raum C aller stetiger Funktionen im reellen Intervall $[0, 1]$ mit der Metrik $\varrho(f, g) = \sup\limits_{0\leqq x\leqq 1} |f(x) - g(x)|$. Dieser Raum ist nämlich abzählbar-hyperkonvex, aber nicht hyperkonvex (vgl. [2]).

Definition 4. *Ein metrischer Raum heißt $\mathfrak{m}$-separabel, falls in ihm eine überall dichte Untermenge von einer Mächtigkeit kleiner als $\mathfrak{m}$ existiert.*

Ist ein metrischer Raum $\mathfrak{m}$-separabel und $\mathfrak{m}$-hyperkonvex, so ist er auch hyperkonvex (vgl. [2]).

ARONSZAJN und PANITCHPAKDI [2] haben den folgenden Satz bewiesen:

Es sei E ein $\mathfrak{m}$-separabler metrischer Raum, D eine Untermenge von E, und M ein $\mathfrak{m}$-hyperkonvexer metrischer Raum. Jede Abbildung T von D in M mit subadditiver Stetigkeitsmajorante $\delta(\varepsilon)$ kann zu einer Abbildung von E in M mit derselben Stetigkeitsmajorante $\delta(\varepsilon)$ fortgesetzt werden.

Ist dagegen der metrische Raum M nicht $\mathfrak{m}$-hyperkonvex, so existiert ein $\mathfrak{m}$-separabler metrischer Raum E und eine Untermenge D von E, für die der Satz ungültig ist.

Es gelten die folgenden Sätze:

Satz 7. *Es sei E ein beliebiger $\mathfrak{m}$-separabler metrischer Raum, D eine abgeschlossene Untermenge von E und M ein beschränkter und $\mathfrak{m}$-hyperkonvexer metrischer Raum. Dann läßt sich jede Abbildung $T \in \mathrm{Lip}[D, M]$ zu einer Abbildung $T_E \in \mathrm{Lip}[E, M]$, und jede stetige Abbildung von D in M zu einer stetigen Abbildung von E in M fortsetzen.*

Satz 8. *Es sei A ein $\mathfrak{m}$-separabler metrischer Raum und M ein beschränkter $\mathfrak{m}$-hyperkonvexer metrischer Raum. Jede gleichmäßig stetige bzw.*

stetige Abbildung T von A in M kann beliebig genau gleichmäßig durch Abbildungen aus $\mathrm{Lip}_u[A, M]$ *bzw.* $\mathrm{Lip}[A, M]$ *approximiert werden.*

Zum Beweis brauchen wir nur den Satz 1 entsprechend zu verallgemeinern; daraus folgen dann die Sätze 7 und 8 mit ähnlicher Schlußweise, wie die Sätze 2, 3 und 6 aus dem Satz 1. Bei der Verallgemeinerung des Satzes 1 werden wir aber davon absehen, die Lipschitz-Konstante unverändert beizubehalten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Werte der Lipschitz-Konstanten $k(x)$ und $k_E^*(x)$ (von T bzw. T_E^*)) natürliche Zahlen sind. Dann sind die Werte der Lipschitz-Konstante $\bar{k}(x)$ ebenfalls natürliche Zahlen (vgl. Satz 1). Mit der Lipschitz-Konstante $\bar{k}(x)$ ist der Beweis der folgende.

Wir betrachten nur den Fall, daß $\mathfrak{m}$ eine nicht abzählbare Kardinalzahl ist. (Denn ist $\mathfrak{m}$ höchstens abzählbar, so hat E nur endlich viele Punkte, also erfüllt jede auf E definierte Abbildung eine (gleichmäßige) Lipschitz-Bedingung. Also ist der Satz in diesem Fall trivial.)

Wir nehmen an, daß wir die Fortsetzung von T schon auf jeder Menge $D_\xi = D \cup \{x_\nu\}_{\nu<\xi}$ mit $\xi < \eta$ konstruiert haben. Ist η eine Limeszahl, so können wir T_η ebenso wie in Satz 1 definieren.

Ist η keine Limeszahl, sondern von der Form $\eta = \xi + 1$, so verfahren wir zur Definition von T_η wie folgt. Wir bezeichnen mit $D_{\xi,n}(n = 1, 2, \ldots)$ denjenigen Teil von D_ξ, in dessen Punkten $\bar{k}(x)$ gleich n ist. Wir wählen in jedem $D_{\xi,n}(n = 1, 2, \ldots)$ je eine überall dichte Untermenge von Mächtigkeit kleiner als $\mathfrak{m}$. (Das ist ja möglich, weil E und so auch $D_{\xi,n}$ $\mathfrak{m}$-separabel ist.) Dann ist die Vereinigungsmenge X dieser Untermengen überall dicht in D_ξ, und hat ebenfalls eine Mächtigkeit kleiner als $\mathfrak{m}$. Wegen

$$\varrho'(T_\xi(x), T_\xi(y)) \leqq \bar{k}(x)\varrho(x, x_\xi) + \bar{k}(y)\varrho(y, x_\xi) \qquad (x, y \in X)$$

und

$$\varrho'(T_\xi(x) T_E^*(x_\xi)) \leqq \varepsilon + \bar{k}(x)\varrho(x, x_\xi) \qquad (x \in X)$$

besitzen die Kugeln $G(T_\xi(x); \bar{k}(x)\varrho(x, x_\xi))$ $(x \in X)$ und $G(T_E^*(x_\xi); \varepsilon)$ mindestens einen gemeinsamen Punkt, etwa den Punkt t_ξ.

Die Abbildung T_η von D_η in M, definiert durch

$$T_\eta(x) = \begin{cases} T_\xi(x) & (x \in D_\xi) \\ t_\xi & (x = x_\xi), \end{cases}$$

ist eine Fortsetzung von T_ξ, also auch von T, von der gewünschten Art. Man hat ja (vgl. (I), (II))

(VI) $$\varrho'(T_\eta(x), T_\eta(x_\xi)) \leqq \bar{k}(x)\varrho(x, x_\xi) \quad \text{für} \quad x \in X$$

und

$$\varrho'(T_\eta(x_\xi), T_E^*(x_\xi)) \leqq \varepsilon.$$

Wenn aber x ein beliebiger Punkt von D_ξ ist, der etwa in $D_{\xi,n}$ liegt, dann approximiere man den Punkt x durch Punkte aus der in $D_{\xi,n}$ überall dichten Menge: so gelangt man wieder zur Ungleichung (VI). Der übrige Teil des Beweises ist wie bei Satz 1.

Literaturverzeichnis

[1] H. Tietze, Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **145** (1915), 9—14.

[2] N. Aronszajn—P. Panitchpakdi, Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces, *Pacific Journal of Math.*, **6** (1956), 405—441.

[3] L. Nachbin, A theorem of Hahn-Banach type for linear transformations, *Transactions American Math. Soc.*, **88** (1950), 28—46.

[4] J. Czipszer—L. Gehér, Extension of functions satisfying a Lipschitz condition, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 213—221.

[5] F. Riesz—B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 3-ième édition (Budapest—Paris, 1955).

[6] M. H. Stone, The generalized Weierstrass approximation theorem, *Math. Mag.*, **21** (1948), 167—184, 237—254.

[7] F. Hausdorff, *Mengenlehre* (Berlin und Leipzig, 1935).

(Eingegangen am 30. Dezember 1958)

A generalization of the functional equation of distributivity

By MIKLÓS HOSSZÚ in Miskolc (Hungary)

§ 1. Introduction

1. The functional equation

$$F[G(x, y), u] = G[F(x, u), F(y, u)] \tag{1}$$

of distributivity can be generalized in various ways. Such a generalization is

$$F[G(x, y), u] = H[K(x, u), L(y, u)] \tag{2}$$

($x \in X, y \in Y, u \in U$; $G: X \times Y \to Z$; $F: Z \times U \to Z'$; $K: X \times U \to X'$; $L: Y \times U \to Y'$; $H: X' \times Y' \to Z'$), which is, at the same time, a generalization also of the following functional equations containing functions of two real variables:

$$\begin{array}{ll} E_k(x, y)u^k = E_k(xu, yu) & \text{(EULER's homogeneous function)}, \\ F[F(x, y), u] = F[x, L(y, u)] & \text{(transformation)}, \\ F[F(x, y), u] = F[x, F(y, u)] & \text{(associativity)}, \\ F[F(x, y), u] = F(x, y+u) & \text{(translation)}, \\ F(x, y) = F[F(x, u), F(y, u)] & \text{(transitivity)}. \end{array}$$

Moreover, (2) is also in connection with the functional equation

$$B[B(x, y), B(u, v)] = B[B(x, u), B(y, v)]$$

of bisymmetry, namely, this last equation with $v = v_0$ (constant) means that $B(x, y)$ satisfies a functional equation of distributive type (2), where

$$K = H = G = B, \quad F(x, u) = B[x, B(u, v_0)], \quad L(x, u) = B(x, v_0),$$

and the solution thus obtained satisfies also certain further restrictions as the functional equation of bisymmetry with arbitrary v.

Another generalization can be obtained by considering complex numbers or multidimensional vectors instead of real variables and functions. Moreover, if the domain of definition is an arbitrary set, e. g. a quasigroup, then (2) can be interpreted as a system of homotopism resp. isotopism relations be tween two operations.[1]) If, e. g., $G=H=A(x, y)$ is a binary operation on 3-dimensional euclidean space X_3 and

$$F=K=L=R(x, u)$$

are rotations of this space, then we get the functional equation

$$R[A(x, y), u]=A[R(x, u), R(y, u)]$$

which means that $A(x, y)$ is a rotation-automorphic operation.

2. These generalizations and special distributive type functional equations play an important role in several investigations as in the theory of geometric objects [6—8], in the axiomatization of probability calculus [2] and vector operations [1], etc. Previously [4—8] (1) and (2) were treated under certain invertibility and differentiability conditions. In the present paper we shall see the solution of (2) where

$$X=X'=Y=Y'=Z=Z'=T \text{ resp. } U \tag{3}$$

are domains in n- resp. m-dimensional spaces. If

$$X, X', Y, Y', Z, Z'$$

are different domains in X_n, then choosing suitable 1—to—1 mappings $h, \varkappa$ λ, ξ, η we consider the functions

$$h[F(z, u)], \quad \varkappa\{K[\xi(z), u]\}, \quad \lambda\{L[\eta(z), u]\} \qquad (Z\times U\to Z),$$
$$G[\xi(x), \eta(y)], \quad h\{H[\varkappa^{-1}(x), \lambda^{-1}(y)]\} \qquad (Z\times Z\to Z),$$

instead of F, K, L, G, H figuring in (2), for which a distributive type functional equation similar to (2) holds too. Therefore, in what follows, we shall consider only the case (3).

In § 2 the existence of an annullator $O=(0, 0, \dots)\in U$ will be supposed for which

$$K(x, O)=x_0, \quad L(x, O)=y_0 \qquad \text{(constant)} \qquad (x\in T), \tag{4}$$

In § 3 the special case $n=1$ will be treated under weaker suppositions than in § 2 and using another method of solution. § 4 deals also with the case $n=1$, where $K=L=F$, but without supposing the existence of an annullator O. We shall conclude that the solutions G, H are isotopic to the addition resp. isomorphic to an E_1 function on reals, further, F, K, L are operator-isotopic to the affinities

$$x\to \mathbf{C}x+r, \quad \mathbf{C}=\mathbf{C}(u), \quad r=r(u).$$

---

[1]) See [6]. Here the isotopism resp. isomorphism etc. of a structure with operation xy will be called isotopism resp. isomorphism etc. of the operation xy. This will cause no misunderstanding.

§ 5 deals with the rotation- and homothety-automorphic operations $A(x, y)$ in X_3. We prove that such an A on a continuous abelian group is isomorphic to the addition and a suitable isomorphism is $x \to |x|^{\nu} x$. Another example will be given: the rotation- and homothety-automorphic operations on X_n which are differentiable at $x = y = O$.

§ 2. T-algebras in X_n with h-operators and with annullator

1. A domain T will be called a *topological algebra* (briefly *T-algebra*) in X_n, if a differentiable binary operation $H(x, y)$ $(T \times T \to T)$ is defined on $T \subseteq X_n$ such that

$$|\partial_{x^i} H^j(x, y)|, \; |\partial_{y^i} H^j(x, y)| \neq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

hold. The elements $u \in U \subseteq X_m$ are called *homotopism operators* (briefly *h-operators*), if there exist mappings

$$F(x, u), \quad K(x, u), \quad L(x, u), \qquad (T \times U \to T)$$

such that (2), (3) hold. A h-operator is said to be an *isotopism operator* (briefly *i-operator*), if these mappings of T onto T are 1—to—1 hence invertible.[2]) An operator $O \in U$ is called *annullator*, if (4) holds. We state the following

Theorem 1. *Let T be a T-algebra in X_n with the h-operator set $U \subseteqq X_m$ having an i-operator e and an annullator O such that*

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} f(x) = \partial_{u^1} F(x, O), \; \alpha(x) = \partial_{u^1} K(x, O), \; \beta(x) = \partial_{u^1} L(x, O) & (T \to X_n) \\ \text{are bounded and invertible mappings.} \end{cases}$$

Then T is topologically isotopic to the additive vector group in X_n having affinities as h-operators.

More exactly, then the most general solution of the functional equation (2) is

$$(5) \qquad \begin{cases} G(x, y) = f^{-1}[\varphi(x) + \psi(y)], \\ H(x, y) = \chi[\varkappa(x) + \lambda(y)], \\ F(x, u) = \chi[\mathbf{C}(u) f(x) + r(u) + s(u)], \\ K(x, u) = \varkappa^{-1}[\mathbf{C}(u)\varphi(x) + r(u)], \\ L(x, u) = \lambda^{-1}[\mathbf{C}(u)\psi(x) + s(u)], \end{cases}$$

where $f, \chi^{-1}, \varphi, \psi, \varkappa, \lambda$ $(T \to X_n)$ are arbitrary invertible mappings and r, s $(U \to X_n)$ are arbitrary mappings with the only restriction that the differen-

---

2) A mapping $x (\in X) \to \varphi x$ $(\in X')$ is called 1—to—1, if the set X of the elements φx $(x \in X)$ is onefold. $x \to \varphi x$ is *onto* X', if $X' \subseteq \varphi X$. An *invertible* mapping is 1—to—1 and also onto.

tiability conditions shall be fulfilled, further, $\mathbf{C}(u)$ *is an arbitrary matrix with n rows and n columns for which*

$$\mathbf{C}(O)=\mathbf{O}\,;\ |\mathbf{C}(e)|,\ |\partial_u\mathbf{C}(O)|\neq 0 \tag{6}$$

are satisfied.

Proof. Let us define the functions $\varphi, \psi, \chi, \varkappa, \lambda$ by

$$\begin{cases} \varphi=\mathbf{A}\alpha,\ \psi=\mathbf{B}\beta,\ \mathbf{A}=\partial_x H(x_0, y_0),\ \mathbf{B}=\partial_y H(x_0, y_0), \\ \chi(x)=F[f^{-1}(x), e],\ \varkappa[K(x, e)]=\varphi(x),\ \lambda[L(x, e)]=\psi(x). \end{cases} \tag{7}$$

Differentiating (2) with respect to u^i and putting $u=O$, we get (5_1):

$$f[G(x, y)]=\varphi(x)+\psi(y).$$

Substituting this into (2), with $u=e$ we have

$$H(\xi, \eta)=H[K(x, e), L(y, e)]=F[G(x, y), e]=F\{f^{-1}[\varphi(x)+\psi(y)], e\}=$$
$$=\chi\{\varkappa[K(x, e)]+\lambda[L(y, e)]\}=\chi[\varkappa(\xi)+\lambda(\eta)]$$

and this is (5_2).

Substituting again G and H into (2), we see

$$F\{f^{-1}[\varphi(x)+\psi(y)], u\}=\chi\{\varkappa[K(x, u)]+\lambda[L(y, u)]\}$$

from which, by keeping u fixed and denoting

$$\begin{cases} \omega(x)=\chi^{-1}\{F[f^{-1}(x), u]\}, \\ \varrho(x)=\varkappa\{K[\varphi^{-1}(x), u]\}, \\ \sigma(x)=\lambda\{L[\psi^{-1}(x), u]\}, \end{cases} \tag{8}$$

the generalized Cauchy functional equation

$$\omega(x+y)=\varrho(x)+\eta(y) \qquad (x, y\in X_n;\ \varrho, \sigma, \omega: X_n\to X_n) \tag{9}$$

follows.

But here we have the

Lemma 1. *The most general bounded and one valued (not necessarily onto and 1—to—1) solutions of* (9) *are*

$$\omega(x)=\mathbf{C}x+r+s,\quad \varrho(x)=\mathbf{C}x+r,\quad \sigma(x)=\mathbf{C}x+s, \tag{10}$$

where $\mathbf{C}$ *is an arbitrary matrix with n rows and columns and* r, s *are arbitrary n-dimensional vectors (depending on u).*

Taking (8) into account, (10) gives the solutions (5_3)—(5_5). Lemma 1 will be proved in § 2.

On the other hand, (5) really satisfies (2) and the initial conditions, if the restrictions (6) are fulfilled.

2. A similar theorem can be proved in the case where f, α, β map T onto the different domains $T_f, T_\alpha, T_\beta \subseteq X_n$ respectively. Then the mappings

$$\varphi(T \to \mathbf{A}\, T_\alpha = T_\varphi), \quad \psi(T \to \mathbf{B}\, T_\beta = T_\psi), \quad \chi^{-1}(T \to T_f),$$
$$\varkappa(T \to T_\varphi), \quad \lambda(T \to T_\psi)$$

are 1--to—1 also in this case but not necessarily onto the whole of X_n and we must prove Lemma 1, where

$$\varrho(T_\varphi \to T_\varphi), \quad \sigma(T_\psi \to T_\psi), \quad \omega(T_f \to T_f = T_\varphi + T_\psi)$$

are bounded mappings but not necessarily onto. For this purpose we consider the arbitrarily fixed elements $x_0 \in T_\varphi$, $y_0 \in T_\psi$ and we define

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \omega(x + x_0 + y_0) - \omega(x_0 + y_0) = \\ &= \varrho(x + x_0) - \varrho(x_0) = \sigma(x + y_0) - \sigma(y_0),\end{aligned}$$

then we get

$$\begin{aligned}\delta(x+y) &= \omega(x + y + x_0 + y_0) - \omega(x_0 + y_0) = \\ &= \varrho(x + x_0) - \varrho(x_0) + \sigma(y + y_0) - \sigma(y_0) = \delta(x) + \delta(y).\end{aligned}$$

Here x and y lay in a neighbourhood of O and so we get the most general bounded solution $\delta(x) = \mathbf{C}x$, i. e.,

$$\begin{cases} \varrho(x) = \mathbf{C}(x - x_0) + \varrho(x_0) = \mathbf{C}x + r, \\ \sigma(y) = \mathbf{C}(y - y_0) + \sigma(y_0) = \mathbf{C}y + s, \\ \omega(x+y) = \mathbf{C}(x + y - x_0 - y_0) + \omega(x_0 + y_0) = \mathbf{C}(x+y) + r + s \end{cases}$$

on a neighbourhood of x_0 resp. y_0.

Since x_0, y_0 are arbitrary, we have the solution (10) on a neighbourhood of every x_0, y_0, futhermore, being this solution unique in an *open* neighbourhood of any fixed x_0, y_0 we have the same solution on the union of these open subsets, i. e., on the whole domain of definition.

On the other hand, (10) obviously satisfies (9) with arbitrary $\mathbf{C}, r, s$.

3. In the special case $G = H$, $F = K = L$, under the suppositions of Theorem 1 we have the general solution

$$\begin{cases} G(x, y) = f^{-1}[\mathbf{A}f(x) + \mathbf{B}f(y)], \\ F(x, u) = f^{-1}[\mathbf{C}(u)f(x) + r(u)], \end{cases}$$

where the restrictions (6) and also

$$\mathbf{AC} = \mathbf{CA}, \mathbf{BC} = \mathbf{CB}; \ (\mathbf{A} + \mathbf{B})r = r$$

are fulfilled. This latter assertions can be proved immediately.

It might be observed that in Theorem 1 the differentiability of $H(x, y)$ was used only at $x = x_0$, $y = y_0$.

§ 3. T-algebras in X_1 with h-operators and with annullator

1. Let us consider the solution of (2) on

$$T = X = X' = Y = Y' = Z = Z' \subseteq X_1$$

and on U. Here we do not suppose U to be a domain in an euclidean space and also the differentiability conditions (I) can be replaced by weaker ones. We state

Theorem 2. *Let T be a T-algebra in X_1 with operation $H(x, y)$ and with a set U of h-operators having an i-operator e and an annullator O, further, having a metric subspace $U_0 \subseteq U$ such that*

(i) *U_0 and the set of its limit points contain O and e;*

(ii) *$K(x, u)$, $L(x, u)$ are continuous on U_0 at $u = O$ for every fixed $x \in T$;*

(iii) *$\partial_x F(x, u)$, $\partial_x K(x, u)$, $\partial_x L(x, u) \neq 0$ for $u \in U_0 - O$.*

Then T is (topologically) isotopic to the real additive group with affinities as h-operators. More exactly, then the solution of the functional equation (2) *is*

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} G(x, y) = f^{-1}[\varphi(x) + \psi(y)], \\ H(x, y) = \chi[\varkappa(x) + \lambda(y)], \\ F(x, u) = \chi[f(x)c(u) + r(u) + s(u)], \\ K(x, u) = \varkappa^{-1}[\varphi(x)c(u) + r(u)], \\ L(x, u) = \lambda^{-1}[\psi(x)c(u) + s(u)], \end{cases}$$

where $c(u)$ and $r(u)$, $s(u)$ are on U_0 continuous but otherwise arbitrary functions with the only restriction

$$c(O) = 0 \notin c(U_0 - 0),$$

further, $f, \varphi, \psi, \chi, \varkappa, \lambda$ are arbitrary once differentiable functions with non zero derivatives.

Proof. Keeping $u \in U_0$, (2) shows that also $G(x, y)$ is differentiable. Therefore differentiating (2) with respect to x resp. y, we obtain

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} F_1[G(x, y), u]\, G_1(x, y) = H_1[K(x, u), L(y, u)]\, K_1(x, u), \\ F_1[G(x, y), u]\, G_2(x, y) = H_2[K(x, u), L(y, u)]\, L_1(y, u), \end{cases}$$

where the indices 1,2 denote the partial derivatives with respect to the first resp. second variables. Keeping $u \in U_0 - O$, these equations and (iii) imply $G_1(x, y)$, $G_2(x, y) \neq 0$.

Let us define

$$\Phi(x, y, \xi, \eta) = \frac{\dfrac{G_1(x, y)}{G_2(x, y)} \dfrac{G_1(\xi, \eta)}{G_2(\xi, \eta)}}{\dfrac{G_1(x, \eta)}{G_2(x, \eta)} \dfrac{G_1(\xi, y)}{G_2(\xi, y)}}$$

and $\Psi(x, y, \xi, \eta)$ similarly with H's instead of G's, then, forming

$$\frac{G_1(x, y)}{G_2(x, y)} = \frac{H_1[K(x, u), L(y, u)]}{H_2[K(x, u), L(y, u)]} \frac{K_1(x, u)}{L_1(y, u)}$$

and taking also (i), (ii) into account, we see that

$$\Phi(x, y, \xi, \eta) = \Psi[K(x, u), L(y, u), K(\xi, u), L(\eta, u)] =$$
$$= \Psi(x_0, y_0, x_0, y_0) = 1.$$

So keeping ξ, η fixed,

$$\frac{G_1(x, y)}{G_2(x, y)} = \frac{G_2(\xi, \eta)\dfrac{G_1(x, \eta)}{G_2(x, \eta)}}{G_1(\xi, \eta)\dfrac{G_2(\xi, y)}{G_1(\xi, y)}} = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)}$$

or, what is the same,

$$\begin{vmatrix} G_1(x, y) & G_2(x, y) \\ \varphi'(x) & \psi'(y) \end{vmatrix} = 0$$

involves the existence of a function f for which

$$f[G(x, y)] = \varphi(x) + \psi(y)$$

holds. Since the derivatives of G do not vanish,

$$\varphi(x) = G_1(\xi, \eta) \int \frac{G_1(x, \eta)}{G_2(x, \eta)} dx$$

is a strictly monotonic function with non zero derivative; $\psi(x)$ and consequently $f(x)$ too have the same property.

Thus we have (11_1). Now, we define $\chi, \varkappa, \lambda$ similarly as in (7) was done and the further proof goes in the same way as that of Theorem 1.

2. In the special case $G = H$, $K = L = F$ the supposition of the existence of an i-operator e can be omitted. Then we get the solution

$$(13) \qquad \begin{cases} F(x, u) = f^{-1}[f(x) g(u) + h(u)], \\ G x, y = f^{-1}[a f(x) + b f(y) + c], \end{cases}$$

where we have the restrictions

$$(14) \qquad c[g(u) - 1] \equiv (a + b - 1) h(u), \qquad g(O) = 0.$$

In fact, $G(x, y) = f^{-1}[\varphi(x) + \psi(y)]$ can be proved similarly as in Theorem 2. Putting this G into (2), we obtain

$$F\{f^{-1}[\varphi(x) + \psi(y)], u\} = f^{-1}\{\varphi[F(x, u)] + \psi[F(y, u)]\}$$

from which, keeping u constant and denoting

$$\omega(x) = f\{F[f^{-1}(x), u]\}, \quad \varrho(x) = \varphi\{F[\varphi^{-1}(x), u]\}, \quad \sigma(x) = \psi\{F[\psi^{-1}(x), u]\}$$

the generalized CAUCHY functional equation

$$\omega(x + y) = \varrho(x) + \sigma(y)$$

follows, the (differentiable) solution of which is

$$\omega(x)=gx+h, \quad \varrho(x)=gx+r, \quad \sigma(x)=gx+s \qquad (h=r+s).$$

Here g, h depend on u. This gives

$$F(x, u)=f^{-1}[f(x)g(u)+h(u)]=\varphi^{-1}[\varphi(x)g(u)+r(u)]=$$
$$=\psi^{-1}[\psi(x)g(u)+s(u)]$$

which proves (13_1) and shows that f, φ, ψ are not independent from each other, as, by denoting $\gamma(x)=\varphi[f^{-1}(x)]$, we must have

$$\gamma(gx+h)=g\gamma(x)+h.$$

By differentiating we get

$$\gamma'(x)=\gamma'(gx+h)=\gamma'\left(g^n x+\frac{1-g^n}{1-g}h\right)=\cdots=\gamma'\left(\frac{h}{1-g}\right)=a \qquad \text{(constant)}$$

as $|g(u)|\neq 1$ since $g(O)=0$ holds necessarily on account of (13_1). So we obtain

$$\lim g^n \to 0 \begin{cases} \text{for } n\to\infty, & \text{if } |g|<1, \\ \text{for } n\to-\infty, & \text{if } |g|>1. \end{cases}$$

Thus we have

$$\gamma(x)=\varphi[f^{-1}(x)]=ax+c_1, \quad \varphi(x)=af(x)+c_1,$$

and similarly also

$$\psi(x)=bf(x)+c_2$$

and (13_2) where $c=c_1+c_2$.

On the other hand, (13) really satisfies (1) if (14) is fulfilled.

3. It might be remarked that Theorem 2 is related to the following theorem: The most general measurable solution of the functional equation

$$f[G(x, y)]=f(x)+f(y)$$

is $f(x)=cf_0(x)$, where f_0 is an invertible bounded solution, supposed that such a solution exists. Here we have $F(x, e)=f_0(x)$, $F(x, O)=0$.

§ 4. Transitive system of T-endomorphisms on real T-quasigroups

1. An interval I will be called a *T-quasigroup* if an invertible operation $G(x, y)$ $(I\times I\to I)$ is defined[3]) such that I forms a T_1-algebra in X_1. A mapping $x\to F(x, u)$ will be called a *homomorphism* on I, if

(15) $$F[G(x, y), u]=H[F(x, u), F(y, u)] \qquad (x, y\in I;\ u\in U)$$

---

[3]) A set Q in which a binary operation xy $(Q\times Q\to Q)$ is defined is called a *quasigroup*, if both $x\to xy$ and $y\to xy$ are invertible.

holds. An invertible homomorphism is an *isomorphism*. In a similar sense we define the *endomorphism* and *automorphism* in the case, where $H=G$. A system of endomorphisms $x\to F(x,u)$ will be called *topological endomorphisms* (briefly *T-endomorphisms*), if $F(x,u)$ is a twice differentiable function of x and $\partial_x F(x,u)\neq 0$. Endomorphisms $x\to F(x,u)$ are called *transitive* for which $F(x_0,U)=I$ at least for one $x_0\in I$.

We state the following lemmas:

Lemma 2. *Let Q be a quasigroup with the operation xy. Every homomorphism of Q is also a homomorphism of the left and right quotient quasigroup of Q (and vice versa) in which the operation xy^{-1} resp. ${}^{-1}xy$ is defined by*

$$(xy^{-1})y=x,\quad x({}^{-1}xy)=y.$$

Lemma 3. *Let Q be a continuous quasigroup on reals with operation xy. Then at least one of the mappings*

$$x\to \mu x=xx,\ xx^{-1},\ {}^{-1}xx \qquad (Q\to Q)$$

is invertible.

Lemma 4. *The mappings $F_u x=F(x,u)$ $(I\times U\to I')$ form a system of homomorphisms of an algebra with isomorphism F_e, if and only if $N_u x=F_e^{-1}F_u x$ $(I\times U\to I)$ is a system of endomorphisms with identity $N_e x=x$.*

Lemma 5. *Let Q be an algebra (not necessarily a quasigroup) in which an operation xy is defined for which the mapping $\mu x=xx$ is invertible. Then Q^* with the operation $x*y=\mu^{-1}(xy)$ is an idempotent algebra $(x*x=x)$. A mapping $x\to N(x,u)$ is an endomorphism of Q, if and only if it is an endomorphism of Q^*.*

Lemma 6. *Let $G(x,y)$ $(I\times I\to I)$, $H(x,y)$ $(I'\times I'\to I')$ be T-quasigroup operations on reals and $F(x,u)$ a differentiable function of x. Suppose that the mappings $x\to F(x,u)$ are homomorphisms of I into I' Then $u=u_0$ is an annullator, if and only if $\partial_x F(x,u_0)=0$.*

Proof of the Lemmas. The proof of the Lemmas 2—5 is not difficult [6]. In order to prove Lemma 6, let us consider

$$(12_1)\qquad F_1[G(x,y),u]\,G_1(x,y)=H_1[F(x,u)\,F(y,u)]\,F_1(x,u).$$

If $F_1(x,u_0)=0$ for a fixed u_0, then we see that $F_1(t,u_0)=0$ holds for every $t=G(x,y)$, hence $F(t,u_0)$ is independent from t, i. e., u_0 is an annullator.

2. On account of the above lemmas, in order to solve the functional equation (15) we can restrict ourselves without loss of generality to the functional equation

$$(16)\qquad \begin{cases} N[M(x,y),u]=M[N(x,u),N(y,u)],\\ M(x,x)=x,\ N(x,e)=x,\ N(x_0,U)=I \qquad (x,y\in I),\end{cases}$$

if the propositions of these lemmas are fulfilled. Since § 3 gives the solution in the case where an annullator exists, taking the Lemma 6 into account, we consider only T-endomorphisms, where $\partial_x F(x,e) \neq 0$.

We state the following

Theorem 3. *Let $N(x,u)$ $(I \times U \to I)$ be a transitive system of T-endomorphisms (with the identical operator $u=e$) working on an idempotent T-algebra $I \subseteq X_1$ (not necessarily a quasigroup) with the operation $M(x,y)$ $(I \times I \to I)$ having a continuous second order derivative $\partial_{xy} M(x,y)$ for $y=x$.*

Then I is (topologically) isomorphic to an I' with an operation $\Phi(x,y)$ (isomorphic to an E_1 homogeneous function[4])) having affinities as T-endomorphisms.

More exactly, the most general solution of the functional equation (16) *under the conditions*

1. $\partial_x M(x,y),\ \partial_y M(x,y) \neq 0 \quad (x,y \in I)$;
2. *$N(x,u)$ is a twice differentiable function of x and $\partial_x N(x,u) \neq 0$;*
3. *$\partial_{xy} M(x,y)$ is continuous for $y=x$,*

is the following:

$$\text{(17)} \qquad \begin{cases} N(x,u) = f^{-1}[f(x)g(u)+h(u)], \\ M(x,y) = f^{-1}\{\varphi[f(x)-f(y)]+f(y)\}, \end{cases}$$

where f, φ are arbitrary twice differentiable functions with non zero derivative of the first order, and g, h are arbitrary functions with the restrictions

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} g \neq 0;\ g(e)=1, h(e)=0;\ f(I)=h(U);\ f(x_0)=0; \\ \varphi(gx)=g\varphi(x),\ \varphi(0)=0. \end{cases}$$

Proof. First we prove that

$$\text{(19)} \qquad M_1(x,x)M_2(x,x)=a \qquad \text{(constant)}.$$

To show this, let us differentiate (16_1) with respect to x resp. y. With $y= =x=x_0$ we can form

$$\frac{M_1(x_0,x_0)}{M_2(x_0,x_0)} = \frac{M_1[N(x_0,u),N(x_0,u)]}{M_2[N(x_0,u),N(x_0,u)]} = \frac{M_1(x,x)}{M_2(x,x)} = \text{constant}.$$

On the other hand, differentiating (16_2) we obtain $M_1(x,x)+M_2(x,x)=1$ which proves the statement.

Now, we reduce (16) to a functional-differential equation by differentiating it with respect to x and y:

$$N_{11}[M(x,y),u]M_1(x,y)M_2(x,y)+N_1[M(x,y),u]M_{12}(x,y) = \\ = M_{12}[N(x,u),N(y,u)]N_1(x,u)N_1(y,u).$$

[4]) See § 1.

If we put $y=x$, then by taking (16_2), (16_3) and (19) into account, we get

$$aN_{11}(x,u)+N_1(x,u)M_{12}(x,x)=M_{12}[N(x,u),N(x,u)]N_1(x,u)^2,$$

or, what is the same,

$$(-1/a)M_{12}[N(x,u),N(x,u)]N_1(x,u)+\frac{N_{11}(x,u)}{N_1(x,u)}=(-1/a)M_{12}(x,x).$$

By integrating we obtain

$$(-1/a)\int_{x_0}^{N(x,u)}M_{12}(s,s)ds+\log N_1(x,u)=(-1/a)\int_{x_0}^{x}M_{12}(s,s)ds+\log g(u),$$

i. e.,

$$N_1(x,u)\exp\Big[(-1/a)\int_{x_0}^{N(x,u)}M_{12}(s,s)ds\Big]=g(u)\exp\Big[(-1/a)\int_{x_0}^{x}M_1(s,s)ds\Big].$$

Integrating once again and introducing the function

$$f(x)=\int_{x_0}^{x}\exp\Big[(-1/a)\int_{x_0}^{t}M_{12}(s,s)ds\Big]dt$$

(having non zero derivative) we get $f[N(x,u)]=f(x)g(u)+h(u)$ which is (17_1).

In order to prove (17_2), we substitute (17_1) into (16_1):

$$f^{-1}\{f[M(x,y)]g(u)+h(u)\}=$$
$$=M\{f^{-1}[f(x)g(u)+h(u)],f^{-1}[f(y)g(u)+h(u)]\}$$

from which by denoting

$$\Phi(x,y)=f\{M[f^{-1}(x),f^{-1}(y)]\}$$

it follows the functional equation

(20) $$\Phi(x,y)g(u)+h(u)=\Phi[xg(u)+h(u),yg(u)+h(u)],$$

equivalent to (16_1), (17_1).

Three cases are possible: 1. $g(u)\equiv 1$; 2. $|g(u)|\equiv 1$ and $g(u_0)=-1$ at least for one u_0; 3. $|g(u)|\not\equiv 1$.

In the case $g(u)\equiv 1$, according to (16_4), u can be choosen such that $h(u)=-y$ and hence

(21) $$\Phi(x,y)=\varphi(x-y)+y,\quad \varphi(t)=\Phi(t,0)$$

hold. If $g(u_0)=-1$ and $|g(u)|\equiv 1$, then similarly we have the same solution but here φ has to satisfy $\varphi(-t)=-\varphi(t)$ as (20) must be satisfied. If $|g|\not\equiv 1$, then by differentiating we get

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(x,y)&=\Phi_1(gx+h,gy+h)=\cdots=c_1\\ \Phi_2(x,y)&=\Phi_2(gx+h,gy+h)=\cdots=c_2\end{aligned}\right\}\text{(constants)}$$

and, consequently, by integrating $\Phi(x,y)=px+qy+r$, where on account of (16_2) $p+q=1$, $r=0$.

The solution is also in this case of the form (21), but here $\varphi(t)=pt$ The solutions can be united in (21) where φ satisfies the restriction

$$\varphi(gx)=g\varphi(x),\ \varphi(0)=0.$$

The other restrictions (18) can be seen immediately.

Φ is obviously isomorphic to a function

$$E_1(x,y)=\varphi(x\,y)y$$

which is homogeneous.

Thus Theorem 3 is proved.

3. If we have the solutions M, N of the form (17), then we obtain the general form of F, G, H on account of Lemmas 4—5:

$$\begin{aligned}&F(x,u)=F_cN_ux=\nu[N(x,u)],\\&G(x,y)=\mu[M(x,y)],\\&H(x,y)=\nu\{G[\nu^{-1}(x),\nu^{-1}(y)]\}=\mu(\nu\{M[\nu^{-1}(x),\nu^{-1}(y)]\}),\end{aligned}$$

which with arbitrary functions ν, μ really satisfy (15), if $\mu[N(x,u)]=N[\mu(x),u]$ holds. This last equation can be written as

$$\mu\{f^{-1}[f(x)g(u)+h(u)]\}=f^{-1}\{f[\mu(x)]g(u)+h(u)\}$$

and this can be reduced to

$$\vartheta(gx+h)=g\vartheta(x)+h$$

by the notation $\vartheta=f\mu f^{-1}$.

4. If, e. g., U is a metric space and $x\to N(x,u)$ is a continuous, not identical constant mapping, then, on account of $N(x,e)=x$, I is the union of the transitivity sets $I_i=N(x_i,U)$.

Then the supposition $N(x_0,U)=I$, which was used only to prove

$$\frac{M_1(x,x)}{M_2(x,x)}=\frac{M_1[N(x_0,u),N(x_0,u)]}{M_2[N(x_0,u),N(x_0,u)]}=\frac{M_1(x_0,x_0)}{M_2(x_0,x_0)}\ \text{(constant)},$$

can be omitted.

§ 5. Examples

1. Let us consider the rotation automorphic vector operations $A(x,y)$ on a continuous abelian group in X_3. G. Darboux [3] has proved that such an $A(x,y)$ is topologically isomorphic to the addition, i. e., it has the form

$$f[A(x,y)]=f(x)+f(y),$$

where

$$f(x)=\varphi\cdot x^0=\varphi\cdot x/|x|$$

and φ is a topological function of $|x|$. Clearly,

$$y=f(x)=\varphi\cdot x^0=|y|x^0$$

has the inverse function

$$x=f^{-1}(y)=\varphi^{-1}(|y|)x^0.$$

Let us examine the question what kind of operations $A(x,y)$ of this form are homothety-automorphic (homogeneous)! Homogeneity means that

$$\lambda A(x,y)=A(\lambda x,\lambda y)$$

or, in another form,

$$f[\lambda f^{-1}(x+y)]=f[\lambda f^{-1}(x)]+f[\lambda f^{-1}(y)].$$

Choosing $x=\xi x^0$, $y=\eta x^0$, further, by denoting

$$f[\lambda f^{-1}(x)]=f[\lambda\varphi^{-1}(\xi)x^0]=\varphi[\lambda\varphi^{-1}(\xi)]x^0=\theta(\xi,\lambda)x^0,$$

we get the functional equation

$$\theta(\xi+\eta,\lambda)=\theta(\xi,\lambda)+\theta(\eta,\lambda)$$

the continuous solution of which is

$$\theta(\xi,\lambda)=\xi\vartheta(\lambda).$$

So we have

$$\varphi[\lambda\varphi^{-1}(\xi)]=\xi\vartheta(\lambda),\quad \varphi(\lambda\xi)=\vartheta(\lambda)\varphi(\xi)$$

which gives the solution

$$\varphi(\xi)=\xi^{\nu+1}\varphi(1)$$

by reducing it once again to CAUCHY's functional equation.

Finally, we have the solution

$$A(x,y)=f^{-1}[f(x)+f(y)],$$

where

$$f(x)=\varphi(|x|)x^0=|x|^{\nu+1}x^0=|x|^{\nu}x.$$

Here we can choose $\varphi(1)=1$ without loss of generality.

Clearly, every $A(x,y)$ of this form is rotation-automorphic and homogeneous.

2. Let us consider the homogeneous rotation-automorphic $A(x,y)$ vector operations in X_n which are differentiable at $x=y=O$. Homogeneity means that

$$\lambda A(x,y)=A(\lambda x,\lambda y)$$

holds for every real λ value. If we differentiate this equation with respect to λ and substitute $\lambda=0$ we obtain

$$A(x,y)=\mathbf{A}x+\mathbf{B}y.$$

Rotation automorphism means that $A(x,x)$ and $A(x,-x)$ do not depend from the rotations around x, that is

$$A(x,x)=(\mathbf{A}+\mathbf{B})x=\alpha x,$$
$$A(x,-x)=(\mathbf{A}-\mathbf{B})x=\beta x.$$

These involve that $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\alpha\mathbf{E}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\beta\mathbf{E}$ where $\mathbf{E}$ is the unit matrix. Thus we have

$$\mathbf{A}=\frac{\alpha+\beta}{2}\mathbf{E}=\mu\mathbf{E},\quad \mathbf{B}=\frac{\alpha-\beta}{2}\mathbf{E}=\nu\mathbf{E},$$

and the general form of $A(x,y)$ is

$$A(x,y)=\mu x+\nu y.$$

References

[1] J. Aczél, Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quaternionen, *Acta Math. Hung.*, **3** (1952), 309—316.

[2] J. Aczél, A solution of some problems of K. Borsuk and L. Jánossy, *Acta Phys. Hung.*, **4** (1955), 351—362.

[3] G. Darboux, Sur la composition des forces en statique, *Bulletin Sci. Math.*, (1) **9** (1875), 281—288.

[4] S. Gołąb, Przyczynek do algebry dzialan w ciele liczb rzeczywistych, *Wyzsza szkola pedagogiczna w Krakowie, Rocznik naukowo dydaktyczny*, Zeszyt **1**, Matematyka, 3—10 (Kraków, 1954).

[5] M. Hosszú, On the functional equation of distributivity, *Acta Math. Hung.*, **4** (1953), 159—167.

[6] M. Hosszú, Functional equations and algebraic methods in the theory of geometric objects, *Publicationes Math. Debrecen*, **5** (1958), 294—329.

[7] H. Pidek, Sur les objets géométriques de la classe zéro qui admettent une algèbre, *Annales Soc. Polon. Math.*, **24** (1951), 111—128.

[8] H. Pidek, Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_1, X_m, *Annales Polon. Math.*, **1** (1954), 114—126, 127—134.

(Received January 6, 1957)

On the structure of inner set mappings

By P. ERDŐS in Haifa, G. FODOR in Szeged, and A. HAJNAL in Budapest

Let S be a given set of power $\mathfrak{m}$, I_1 and I_2 two arbitrary classes of subsets of S. A function $G(X)$ is called a set mapping if $G(X)$ is defined on I_1 and such that, for each $X \in I_1$, $G(X) \in I_2$. We say that $G(X)$ is an *inner set mapping* if, for each $X \in I_1$, $G(X) \subset X$. Let further $X_0 \in I_2$, we define the inverse of X_0 in two different ways, first as the set

$$\bigcup_{G(X)=X_0} X = \overline{X_0^{-1}}$$

and second as the set

$$\{X : G(X) = X_0\} = \overline{\overline{X_0^{*-1}}}.$$

The set of all subsets of power $\mathfrak{n}$ and the set of all subsets of power $<\mathfrak{n}$ of S are denoted by $[S]^{\mathfrak{n}}$ and $[S]^{<\mathfrak{n}}$, respectively. If $I_1 = [S]^{\mathfrak{n}}$ or $I_1 = [S]^{<\mathfrak{n}}$, then a set mapping defined on $I_1 = [S]^{\mathfrak{n}}$ or $I_1 = [S]^{<\mathfrak{n}}$ is called a set mapping of type $\mathfrak{n}$ or type $<\mathfrak{n}$, respectively. If for a set mapping $G(X)$ is $I_2 = [S]^{\mathfrak{n}}$ or $I_2 = [S]^{<\mathfrak{n}}$, then $G(X)$ is called a set mapping of range $\mathfrak{n}$ or range $<\mathfrak{n}$, respectively.

We introduce now the symbols $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \rightarrow \mathfrak{r}$ and $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \rightarrow \mathfrak{r}$. These symbols indicate that for every set mapping of the type $\mathfrak{q}$ and range $\mathfrak{p}$, defined on the set S of power $\mathfrak{m}$, there exists an element $X_0 \in [S]^{\mathfrak{p}}$ for which $\overline{\overline{X_0^{-1}}} = \mathfrak{r}$ or $\overline{\overline{X_0^{*-1}}} = \mathfrak{r}$, respectively. The symbol $((\mathfrak{m}, <\mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \rightarrow \mathfrak{r}$ has an analogous meaning. The same symbols, with $\rightarrow$ replaced by $\not\rightarrow$, indicate the negation of the corresponding statement.

It is obvious, that we have to suppose $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{q} \geqq \mathfrak{p}$. We prove in this paper the following results:

a) *negative results* ($\mathfrak{q} \geqq \aleph_0$):

1) if $\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}^{\mathfrak{p}}$, then $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \not\rightarrow \mathfrak{q}^+$ and $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \not\rightarrow 2$,

2) if $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, then $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \not\rightarrow \mathfrak{q}^+$ and $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \not\rightarrow 2$.

b) *positive results* ($\mathfrak{q} \geqq \aleph_0$):

1) $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \rightarrow \mathfrak{m}$ if $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}^*$,

2) $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \rightarrow \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$ if $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} < (\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}})^*$ and $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$.

These results make possible with the aid of the generalized continuum hypothesis, the discussion in almost every case. We can obviously assume, that $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$ and $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$. Thus we can state:

c) $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \rightarrow \mathfrak{m}$ and $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^{*} \rightarrow \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$, if $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{m}^{*}$ or $\mathfrak{q} \geqq \mathfrak{m}^{*}$. Thus the only open question is the following:

Is it true, that $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \rightarrow \mathfrak{m}$ or $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^{*} \rightarrow \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$ if $\mathfrak{m} = \aleph_{\alpha}$, α is of second kind, $\mathfrak{q} = \aleph_{cf(\alpha)-1}$, $cf(\alpha)-1$ is of second kind and $\mathfrak{p} = \aleph_{\beta}$ with $\beta \geqq cf(cf(\alpha)-1)$?; for instance in the simplest case:

$$((\aleph_{\omega_{\omega+1}}, \aleph_0, \aleph_{\omega})) \rightarrow \aleph_{\omega_{\omega+1}}\,?$$

or

$$((\aleph_{\omega_{\omega+1}}, \aleph_0, \aleph_{\omega}))^{*} \rightarrow \aleph_{\omega_{\omega+1}}^{\aleph_{\omega}} = \aleph_{\omega_{\omega+1}}\,?$$

d) if $0 < k < l < \infty$, then $((\aleph_{\alpha+k}, k, l)) \rightarrow \aleph_{\alpha}$;
if $0 < k < l < \infty$, then $((\aleph_{\alpha+k}, k, l)) \mathrel{-\!\!|\!\!\rightarrow} \aleph_{\alpha+1}$.

e) Finally we deal with the symbol $((\mathfrak{m}, < \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \rightarrow \mathfrak{r}$. If $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$, then the validity of the symbol $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \rightarrow \mathfrak{r}$ implies the validity of $((\mathfrak{m}, < \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \rightarrow \mathfrak{r}$. This holds in the case too, if $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ and $\mathfrak{q} = \aleph_{\alpha}$ has an index of first kind. If $\mathfrak{q}$ is regular, $\mathfrak{q} \geqq \aleph_0$, and $\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}} < \mathfrak{m}^{*}$ for every $\mathfrak{r} < \mathfrak{q}$ and $\mathfrak{n} < \mathfrak{q}$, then $((\mathfrak{m}, < \mathfrak{q}, \mathfrak{q})) \rightarrow \mathfrak{m}$; thus in particular $((\mathfrak{m}, < \aleph_0, \aleph_0)) \rightarrow \mathfrak{m}$. The simplest unsolved problem with respect to the symbol $((\mathfrak{m}, < \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \rightarrow \mathfrak{r}$ is the following:

$$((\aleph_{\omega+2}, < \aleph_{\omega}, \aleph_{\omega})) \rightarrow \aleph_{\omega+1} \text{ or } \aleph_{\omega+2}\,?$$

Set mappings of type 1 and range $\mathfrak{n}$ or $< \mathfrak{n}$ have been investigated previously in [1], [2], [3], [4].

Notations and definitions. Throughout this paper, the symbols $\overline{\overline{S}}$ and $\bar{\beta}$ denote the cardinal number of S and the ordinal number β, respectively. For any cardinal number $\mathfrak{r}(=\aleph_{\alpha})$ we denote by $\varphi_{\mathfrak{r}}$ the initial number of $\mathfrak{r}$, by $\mathfrak{r}^{*}$ the smallest cardinal number for which $\mathfrak{r}$ is the sum of $\mathfrak{r}^{*}$ cardinal numbers each of which is smaller than $\mathfrak{r}$, by $cf(\alpha)$ the index β of the initial number ω_{β} of $\mathfrak{r}^{*}$, by $\mathfrak{r}^{+}$ the cardinal number immediately following $\mathfrak{r}$.

I.

We prove now negative results with respect to the symbols $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \rightarrow \mathfrak{r}$ and $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^{*} \rightarrow \mathfrak{r}$. First we prove the following:

Theorem 1. *Let* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ *and* $\mathfrak{m}$ *be cardinal numbers such that* $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{q} \geqq \mathfrak{p} \geqq \aleph_0$. *If* $\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{r}$, *then* $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \mathrel{-\!\!|\!\!\rightarrow} \mathfrak{q}^{+}$.

Proof. Let $\overline{\overline{S}} = \mathfrak{m}$. We define on S a one to one set mapping $G(X)$ of type $\mathfrak{q}$ and range $\mathfrak{p}$ which shows that the theorem is true. By the hypothesis

$$\overline{\overline{[S]^{\mathfrak{q}}}} = \mathfrak{r}.$$

Let

$$X_0, X_1, \ldots, X_\omega, X_{\omega+1}, \ldots, X_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi_\mathfrak{r})$$

be a well-ordering of the set $[S]^\mathfrak{q}$ of the type $\varphi_\mathfrak{r}$. We define $G(X)$ by transfinite induction as follows. Let $G(X_0)$ be an arbitrary subset of X_0 of power $\mathfrak{p}$, and ν a given ordinal number, $0 < \nu < \varphi_\mathfrak{r}$. Suppose that all sets $G(X_\mu)$, where $0 \leqq \mu < \nu$, have been already defined such that

1) $\overline{\overline{G(X_\mu)}} = \mathfrak{p}$, for $\mu < \nu$,
2) $G(X_\mu) \subset X_\mu$, for $\mu < \nu$,
3) $G(X_{\mu_1}) \neq G(X_{\mu_2})$ for $\mu_1 < \mu_2 < \nu$.

Since the power of the set $[X_\nu]^\mathfrak{p}$ is $\mathfrak{r}$ too, there exists a subset of X_ν of power $\mathfrak{p}$ which is distinct from each $G(X_\mu)$ with index $\mu < \nu$, because $\nu < \varphi_\mathfrak{r}$. Let $G(X_\nu)$ be such a subset of X_ν. Then $\overline{\overline{G(X_\nu)}} = \mathfrak{p}$, $G(X_\nu) \subset X_\nu$ and $G(X_\mu) \neq G(X_\nu)$ for $\mu < \nu$. Thus $G(X)$ is defined for every element of $[S]^\mathfrak{q}$ and it is a one to one inner set mapping of type $\mathfrak{q}$ and range $\mathfrak{p}$. The theorem is proved.

Corollary 1. *If $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ for every β, then $((\aleph_{\omega_\alpha+1}, \aleph_\alpha, \aleph_{\omega_\alpha})) \mathrel{-|\!\!\to} \aleph_{\omega_\alpha+1}$.*

It follows from the proof of Theorem 1 also the following

Theorem 2. *Let $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ and $\mathfrak{m}$ be cardinal numbers such that $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{q} \geqq \mathfrak{p} \geqq \aleph_0$. If $\mathfrak{m}^\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^\mathfrak{p}$, then $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \mathrel{-|\!\!\to} 2$.*

Theorem 3. *If $\mathfrak{q} \geqq \aleph_0$, then $((\mathfrak{m}, \mathfrak{q}, \mathfrak{q})) \mathrel{-|\!\!\to} \mathfrak{q}^+$ for every cardinal number $\mathfrak{m} > \mathfrak{q}$.*

Instead of Theorem 3 we prove the following stronger result:

Theorem 4. *Let S be a set of power $\mathfrak{m} > \mathfrak{q}$. There exists a function $G(X)$ defined on $[S]^\mathfrak{q}$ with the following properties:*

(1) *$G(X) \subset X$ and $X - G(X) \neq 0$ for every $X \in [S]^\mathfrak{q}$*
(2) *$G(X) \in [S]^\mathfrak{q}$ for every $X \in [S]^\mathfrak{q}$;*
(3) *$G(X) \neq G(Y)$ if X and Y are two distinct elements of $[S]^\mathfrak{q}$;*
(4) *for every $Y \in [S]^\mathfrak{q}$ there exists an element $X \in [S]^\mathfrak{q}$ such that $Y = G(X)$.*[1]

Proof. Let E be a set of power $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{q}$; we prove that there exists a a function $F(X)$ defined on $[E]^\mathfrak{q}$ which satisfies the conditions (1), (2), and (3).

We consider two cases: (i) $\overline{\overline{E}} = \mathfrak{q}$, and (ii) $\overline{\overline{E}} > \mathfrak{q}$.

Ad (i). Let

$$X_0, X_1, \ldots, X_\omega, \ldots, X_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi_\mathfrak{r})$$

---

[1]) For the proof of Theorem 1 it is sufficient that $G(X)$ satisfy the conditions (1), (2), and (3). This theorem is proved in [5].

be a well-ordering of $[E]^{\mathfrak{q}}$ of the type $\varphi_{\mathfrak{r}}$, where $\mathfrak{r}=2^{\mathfrak{q}}$. We define $F(X)$ by transfinite induction as follows. Let $F(X_0)$ be an arbitrary proper subset of X_0 of power $\mathfrak{q}$, and β a given ordinal number, $0<\beta<\varphi_{\mathfrak{r}}$. Suppose that all sets $F(X_\xi)$, where $0\leqq\xi<\beta$, have been already defined such that the conditions (1), (2), (3) are satisfied. Since the power of the set $[X_\beta]^{\mathfrak{q}}$ is $2^{\mathfrak{q}}$, and $\overline{\overline{\beta}}<2^{\mathfrak{q}}$, there is a subset Y of X_β, of power $\mathfrak{q}$, such that $X_\beta-Y\neq 0$ and Y is distinct from each $F(X_\xi)$ with index $\xi<\beta$. Let $F(X_\beta)=Y$. Thus $F(X)$ is defined for every element of $[E]^{\mathfrak{q}}$ such that the conditions (1), (2), and (3) are satisfied.

Ad (ii) Consider the set $\mathbf{M}$ of all subsets M of $[E]^{\mathfrak{q}}$ such that if X and Y are two distinct elements of M then $\overline{\overline{X\cap Y}}<\mathfrak{q}$. By ZORN's Lemma there is a maximal element M_0 of $\mathbf{M}$. Let

$$Z_0, Z_1, \ldots, Z_\omega, Z_{\omega+1}, \ldots, Z_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi_{\mathfrak{i}})$$

be a well-ordering of M_0 of the type $\varphi_{\mathfrak{i}}$, where $\mathfrak{i}=\overline{\overline{M_0}}$. Since $\overline{\overline{Z_\xi}}=\mathfrak{q}$ for every $\xi<\varphi_{\mathfrak{i}}$, there exists a function $F_\xi(Z)$ on $[Z_\xi]^{\mathfrak{q}}$ which satisfies the conditions (1), (2), and (3). Let now $X\in[E]^{\mathfrak{q}}$. By the definition of M_0 there is a smallest ordinal number $\nu=\nu(X)$ for which $\overline{\overline{X\cap Z_\nu}}=\mathfrak{q}$. Let

$$F(X)=F_{\nu(X)}(X\cap Z_{\nu(X)})\cup(X-Z_{\nu(X)}).$$

It is obvious that $F(X)$ satisfies the conditions (1) and (2). For the proof of (3) let $Y\neq X$ be another element of $[E]^{\mathfrak{q}}$ Then

$$F(Y)=F_{\nu(Y)}(Y\cap Z_{\nu(Y)})\cup(Y-Z_{\nu(Y)}).$$

There are two cases: 1) $\nu(X)=\nu(Y)$, 2) $\nu(X)\neq\nu(Y)$.

Ad 1. If $X\cap Z_{\nu(X)}\neq Y\cap Z_{\nu(X)}$, then by the definition of $F_{\nu(X)}$ $F_{\nu(X)}(X\cap Z_{\nu(X)})\neq F_{\nu(X)}(Y\cap Z_{\nu(X)})$. We may assume that $F_{\nu(X)}(Y\cap Z_{\nu(X)})$ does not contain $F_{\nu(X)}(X\cap Z_{\nu(X)})$. Let $x_0\in F_{\nu(X)}(X\cap Z_{\nu(X)})$ such that $x_0\notin F_{\nu(X)}(Y\cap Z_{\nu(X)})$. By the condition $F_{\nu(X)}(Z)\subset Z$, we have that $x_0\in X\cap Z_{\nu(X)}$. It follows that $x_0\notin Y-Z_{\nu(X)}$; consequently $x_0\notin F_{\nu(X)}(Y\cap Z_{\nu(X)})\cup(Y-Z_{\nu(X)})$ i.e. $F(X)\neq F(Y)$.

If $X\cap Z_{\nu(X)}=Y\cap Z_{\nu(X)}$, then, since $X\neq Y$, $X-Z_{\nu(X)}\neq Y-Z_{\nu(X)}$; consequently, by the definition of F, $F(X)\neq F(Y)$.

Ad 2. We may suppose that $\nu(X)<\nu(Y)$. By the definition of M_0, $\overline{\overline{Z_{\nu(X)}\cap Z_{\nu(Y)}}}<\mathfrak{q}$, i.e. $\overline{\overline{(X\cap Z_{\nu(X)})\cap(Y\cap Z_{\nu(Y)})}}<\mathfrak{q}$ consequently $F(X)\neq F(Y)$. Thus $F(X)$ statisfies the condition (3) too.

Let now F be a set of power $\mathfrak{r}>\mathfrak{q}$. It is easy see that there exists a function $H(X)$ on $[F]^{\mathfrak{q}}$ such that

a) $X\subset H(X)$ and $H(X)-X\neq 0$,
b) $\overline{\overline{H(X)}}=\mathfrak{q}$,
c) $H(X)\neq H(Y)$ if $X\neq Y$.

We apply now the following theorem of BANACH [6]: If the function φ maps the set A one to one onto a subset of B and the function ψ maps the set B one to one onto a subset of A, then there exists a decomposition $A=A_1\cup A_2$ of A and a decomposition $B=B_1\cup B_2$ of B such that $A_1\cap A_2=B_1\cap B_2=0$, $\varphi(A_1)=B_1$ and $\psi(B_2)=A_2$.

Let now $A=B=[S]^{\mathfrak{q}}$ ($\overline{\overline{S}}=\mathfrak{m}>\mathfrak{q}$). Let further φ be a function on $[S]^{\mathfrak{q}}$ such that the conditions (1), (2), (3), and ψ a function on $[S]^{\mathfrak{q}}$ such that the conditions a), b), c) hold respectively. Then there exist two decompositions $[S]^{\mathfrak{q}}=A^1\cup A_2=B_1\cup B_2$ such that $A_1\cap A_2=B_1\cup B_2=0$, $\varphi(A_1)=B_1$ and $\psi(B_2)=A_2$. We define $G(X)$ on $[S]^{\mathfrak{q}}$ as follows. Let

$$G(X)=\begin{cases}\varphi(X), & \text{if } X\in A_1,\\ \psi^{-1}(X), & \text{if } X\in A_2.\end{cases}$$

Obviously $G(X)$ satisfies the conditions (1), (2), (3) and (4).

The proof of Theorem 4 gives also the following

Theorem 5. *If* $\mathfrak{q}\geqq\aleph_0$, *then* $((\mathfrak{m},\mathfrak{q},\mathfrak{q}))^*\not\to 2$.

II.

We assume in this chapter that $\mathfrak{p}<\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}\geqq\aleph_0$ and $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}}<\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$ and prove:

Theorem 6. *If* $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}}<\mathfrak{m}^*$, *then* $((\mathfrak{m},\mathfrak{p},\mathfrak{q}))\to\mathfrak{m}$.

Proof. Suppose that the theorem is not true, i.e. for every subset P of power $\mathfrak{p}$

$$\overline{\overline{\bigcup_{G(Q)=P} Q}}<\mathfrak{m}.$$

By the condition,

$$\overline{\overline{\bigcup_{P'\subseteq P}\ \bigcup_{G(Q)=P'} Q}}<\mathfrak{m}$$

for every subset P of S of power $\mathfrak{p}$.

We define now by transfinite induction a sequence $\{P_\xi\}_{\xi<\varphi_{\mathfrak{q}}+\varphi_{\mathfrak{q}+}}$ of the type $\varphi_{\mathfrak{q}}+\varphi_{\mathfrak{p}+}$ of the subsets of S of power $\mathfrak{p}$ as follows. Let P_0 be an arbitrary subset of S of power $\mathfrak{p}$ and β a given ordinal number, $0<\beta<\varphi_{\mathfrak{q}}+\varphi_{\mathfrak{p}+}$. Suppose that all sets P_ξ, where $0\leqq\xi<\beta$, have been already defined, and let $A_\beta=\bigcup_{\xi<\beta}P_\xi$. Since $\beta<\varphi_{\mathfrak{q}}+\varphi_{\mathfrak{p}+}$ and $\overline{\overline{P_\xi}}=\mathfrak{p}<\mathfrak{q}$ we have $\overline{\overline{A_\beta}}\leqq\mathfrak{q}$. It follows by the hypothesis $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}}<\mathfrak{m}^*$ that

$$\overline{\overline{\bigcup_{P\subseteq A_\beta}\ \bigcup_{G(Q)=P} Q}}<\mathfrak{m}.$$

We define the set P_β as a subset of power $\mathfrak{p}$, of the set

$$S-\bigcup_{\xi<\beta}P_\xi-\bigcup_{P\subseteq A_\beta}\ \bigcup_{G(Q)=P} Q.$$

Put

(1) $$H = \bigcup_{\xi < \varphi_{\mathfrak{q}} + \varphi_{\mathfrak{p}^+}} P_\xi .$$

It is obvious that $\overline{\overline{H}} = \mathfrak{q}$. It follows that there exists a subset P of H of power $\mathfrak{p}$ such that $G(H) = P$. Since $\mathfrak{p}^+$ is regular there exists an ordinal number $\beta < \varphi_{\mathfrak{q}} + \varphi_{\mathfrak{p}^+}$ such that

$$P \subseteq \bigcup_{\xi < \beta} P_\xi = A_\beta .$$

But then clearly by the definition of $P_\beta, P_\beta \not\subseteq H$, which contradicts (1).

Corollary 2. *If* $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ *for every* β, *then* $((\aleph_{\omega_\alpha+2}, \aleph_\alpha, \aleph_{\omega_\alpha})) \to \to \aleph_{\omega_\alpha+2}$.

Theorem 7. *If* $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}^*$ *and* $\mathfrak{r}^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}^*$ *for every* $\mathfrak{r} < \mathfrak{q}$, *then* $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \to \mathfrak{m}$.

The proof of Theorem 7 is similar to the proof of Theorem 6.

Remark. If $\mathfrak{q} < \mathfrak{m}^*$, then $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}^*$, because if $\mathfrak{q} = \aleph_\alpha$ with index α of second kind or $\aleph_{\alpha+1} = \mathfrak{q}$, then

$$\sum_{\mathfrak{r}<\mathfrak{q}} \mathfrak{r}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} \quad \text{or} \quad \sum_{\mathfrak{r}<\mathfrak{q}} \mathfrak{r}^{\mathfrak{p}} = \aleph_\alpha^{\mathfrak{p}},$$

respectively, i. e. in this case Theorem 7 is a particular case of Theorem 6.

Corollary 2. *If* $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}^*$ *and* $\mathfrak{r}^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}^*$ *for every* $\mathfrak{r} < \mathfrak{q}$, *then* $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \to \mathfrak{m}$.

Corollary 3. *If* $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ *for every* β, $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{q} = \aleph_{\alpha+1}$ *and* $\mathfrak{p} < (\aleph_\alpha)^*$, *then* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \to \mathfrak{m}$.

Theorem 8. *Let* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ *and* $\mathfrak{m}$ *be cardinal numbers such that* $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{q}$. *If* $\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ *and* $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} < (\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}})^*$, *then* $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \to \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$.

Proof. The proof of this theorem is similar to the proof of Theorem 6. Suppose that the theorem is not true, i. e. for every subset P of S of power $\mathfrak{p}$, the power of the set

$$P^{*-1} = \{Q : G(Q) = P\}$$

is smaller than $\mathfrak{m}$. Let $\Gamma(P)$ be the set of all sets $P' \in [S]^{\mathfrak{p}}$ for which there exists a set $Q \in [S]^{\mathfrak{q}}$ such that $G(Q) = P_0$ for some $P_0 \subseteq P$ and $P' \subset Q$. Then by the condition

$$\overline{\overline{\Gamma(P)}} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$$

for every subset P of S of power $\mathfrak{p}$.

We define now by transfinite induction a sequence $\{P_\xi\}_{\xi < \varphi_{\mathfrak{q}} + \varphi_{\mathfrak{p}^+}}$ of the type $\varphi_{\mathfrak{q}} + \varphi_{\mathfrak{p}^+}$ of the sets $\in [S]^{\mathfrak{p}}$ as follows. Let P_0 be an arbitrary element of $[S]^{\mathfrak{p}}$ and β a given ordinal number, $0 < \beta < \varphi_{\mathfrak{q}} + \varphi_{\mathfrak{p}^+}$. Suppose that all sets P_ξ, where $0 \leqq \xi < \beta$, have been already defined, and let $A_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} P_\xi$. Since

$\beta < \varphi_{\mathfrak{q}} + \varphi_{\mathfrak{p}+}$ and $\overline{\overline{P}}_\xi = \mathfrak{p} < \mathfrak{q}$, we have $\overline{\overline{A}}_\beta \leqq \mathfrak{q}$. It follows by the hypothesis $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} < (\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}})^*$ that

$$\overline{\overline{\bigcup_{P \subseteqq A_\beta} \Gamma(P)}} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}.$$

We define the set P_β as a subset of power $\mathfrak{p}$, of the set

$$[S]^{\mathfrak{p}} - \{P_\xi\}_{\xi<\beta} - \bigcup_{P \subseteqq A_\beta} \Gamma(P).$$

Since $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$, there exists such an element of $[S]^{\mathfrak{p}}$. Put

$$H = \bigcup_{\xi < \varphi_{\mathfrak{q}} + \varphi_{\mathfrak{p}+}} P_\xi. \tag{2}$$

It is obvious that $\overline{\overline{H}} = \mathfrak{q}$. It follows that there exists a subset P of H of power $\mathfrak{p}$ such that $G(H) = P$. Since $\mathfrak{p}^+$ is regular there exists an ordinal number $\beta < \varphi_{\mathfrak{q}} + \varphi_{\mathfrak{p}+}$ such that

$$P \subseteq \bigcup_{\xi<\beta} P_\xi = A_\xi.$$

But then clearly, by the definition of P_β, $P_\beta \subseteq\!\!\!\!|\;\; H$, which contradicts (2).

III.

We assume in this chapter that $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$ and the generalized continuum hypothesis holds, i. e. $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ for every ordinal number α.

Lemma. *If* $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \to \mathfrak{m}$, *then* $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \to \mathfrak{m}$. We omit the proof.

Theorem 9. *If* $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{m}^*$ *or* $\mathfrak{q} \geqq \mathfrak{m}^*$, *then* $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \to \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$ *and* $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \to \mathfrak{m}$.

Proof. Suppose first, that $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{m}^*$. Thus if $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}^*$, then $((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \to \mathfrak{m}$ by Theorem 6 and $(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}))^* \to \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$ by the Lemma and Theorem 6, because in this case $\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$.

If $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} > \mathfrak{m}^*$, then we consider two cases: a) $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}^*$ and b) $\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{m}^*$.

Ad a. We have in this case that $\mathfrak{q} \geqq \mathfrak{m}^*$. It follows that $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}^+$; therefore there exists a set P_0 in $[S]^{\mathfrak{p}}$ for which $\overline{\overline{P_0^{*-1}}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ and consequently $\overline{\overline{P_0^{*-1}}} = \mathfrak{m}$.

Ad b. We have in this case that $\mathfrak{q} \geqq \mathfrak{m}^*$; consequently $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$. It follows that $\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}} = (\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}})^*$ Since the assumptions of Theorem 8 hold, there exists a set P_0 in $[S]^{\mathfrak{p}}$ such that $\overline{\overline{P_0^{*-1}}} = \mathfrak{m}^+$ i. e. $\overline{\overline{P_0^{-1}}} = \mathfrak{m}$.

Finally if $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^*$, then $\mathfrak{q} \geqq \mathfrak{m}^*$ by the assumption, and if in this case $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}^*$, then the proof is the same as in the case a) while if $\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{m}^*$, then our statement follows from Theorem 8.

IV.

We assume now that $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ are finite cardinal numbers and we prove

Theorem 10. *If k and l are two natural numbers such that $0 < k < l$, then $((\aleph_{\alpha+k}, k, l)) \to \aleph_\alpha$ for every ordinal number α.*

Proof. We use induction with respect to k. Let $k = 1$ and $l > 1$. Suppose that the theorem is false, i. e., for every element

$$\overline{\overline{\bigcup_{G(P)=\{x\}} P}} < \aleph_\alpha. \tag{3}$$

Let F be a subset of S of the power $\aleph_\alpha$ and omit from the set the elements of the set

$$H = \bigcup_{x\in F} \bigcup_{G(P)=\{x\}} P.$$

Since $\overline{\overline{F}} = \aleph_\alpha$, it follows from (3) that $\overline{\overline{S-H}} = \aleph_{\alpha+1}$. Let x_0 be an arbitrary element of $S-H$. If $\{x_0, y_1, \ldots, y_{l-1}\}$ is a set of l elements such that $\{y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}\} \subset F$, then $G(\{x_0, y_1, \ldots, y_{l-1})\} = \{x_0\}$, for if not then $G(\{x_0, y_1, \ldots, y_{l-1}\}) = \{y_n\}$ for some n, $1 \leqq n \leqq l-1$. In this case $x_0 \in H$, which is a contradiction. Thus, since $\overline{\overline{H}} = \aleph_\alpha$,

$$\overline{\overline{\bigcup_{G(P)=\{x_0\}} P}} = \aleph_\alpha,$$

which contradicts (3). The theorem is proved in the case $k = 1$.

Suppose now that $k > 1$ and the theorem is true for $k-1$. Let F be a subset of S, of power $\aleph_{\alpha+k-1}$. Let $\mathfrak{L}$ be the set of all subsets L of S, of l elements, such that

$$\overline{\overline{L \cap (S-F)}} = 1.$$

We have two cases:

1) $\mathfrak{L}$ has a subset $\mathfrak{L}'$ of power $\aleph_{\alpha+k}$ such that $G(L) \subset F$ for every $L \in \mathfrak{L}'$.

2) For every subset L of $[F]^{l-1}$ the power of the set of the elements $x \in S-F$ for which $G(L \cup \{x\}) \subset F$, is smaller than $\aleph_{\alpha+k}$.

Ad 1. Since the power of the set $[F]^{l-1}$ is $\aleph_{\alpha+k-1}$ there exists an element L_0 of $[F]^{l-1}$ and a subset B of $S-F$ of power $\aleph_{\alpha+k}$ such that

$$G(L_0 \cup \{x\}) \subset L_0$$

for every $x \in B$. It follows that there exists a subset K_0 of k elements and a subset B' of B of power $\aleph_{\alpha+k}$ such that

$$G(L_0 \cup \{x\}) = K_0$$

for every $x_0 \in B'$. But then

$$\overline{\overline{\bigcup_{G(L)=K_0} L}} = \aleph_{\alpha+k}.$$

Ad 2. Since $\aleph_{\alpha+k}$ is regular $S-F$ has an element x_0 such that

$$x_0 \in G(L \cup \{x_0\})$$

for every element L of $[F]^{l-1}$. We define now an inner set mapping $F(X)$ on $[F]^{l-1}$ into $[F]^{k-1}$ as follows. Let

$$F(L) = G(L \cup \{x_0\}) - \{x_0\}$$

for every $L \in [F]^{l-1}$. It is obvious that $F(L) \subset L$. By the induction hypothesis for $k-1$ the theorem is true, i. e. there is an element K of $[F]^{k-1}$ such that

$$\overline{\overline{\bigcup_{F(L)=K} L}} = \aleph_\alpha.$$

It follows from the definition of $F(X)$ that

$$\overline{\overline{\bigcup_{G(L)=K\cup\{x_0\}} L}} = \aleph_\alpha.$$

which proves the theorem.

Next we show that Theorem 5 cannot be improved.

Theorem 11. *If k and l natural numbers, $0 < k < l$, then $((\aleph_{\alpha+k}, k, l)) \mathrel{-\!\!\!|\!\!\!\to} \aleph_{\alpha+1}$.*

Proof. Let S be a set of power $\aleph_{\alpha+k}$ and

(4) $$x_0, x_1, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \omega_{\alpha+k})$$

a well-ordering of S of type $\omega_{\alpha+k}$. We define now an inner set mapping $G(X)$ of type k and range l as follows. Let L be an arbitrary element of $[S]^l$, and x_{ξ_1} the greatest element of L in the series (4). Let further

(5) $$x_0^{\xi_1}, x_1^{\xi_1}, \ldots, x_\omega^{\xi_1}, \ldots, x_{\omega+1}^{\xi_1}, \ldots, x_\xi^{\xi_1}, \ldots, \qquad (\xi < \omega(\xi_1))$$

be a well-ordering of the set $\{x_\mu\}_{\mu<\xi_1}$, where $\omega(\xi_1)$ is the initial number of $\bar{\xi}_1$. Let now $x_{\xi_2}^{\xi_1}$ be the greatest element of $L-\{x_{\xi_1}\}$ in the series (5) and let $\{x_\xi^{\xi_1,\xi_2}\}_{\xi<\omega(\xi_2)}$ be a well-ordering of the subset $\{x_\xi^{\xi_1}\}_{\xi<\xi_2}$ of (5), where $\omega(\xi_2)$ is the initial number of $\bar{\xi}_2$. Suppose that the element $x_{\xi_n}^{\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}}$ and the series $\{x_\xi^{\xi_1,\ldots,\xi_n}\}_{\xi<\omega(\xi_n)}$ are defined for every n, $1 < n \leqq m < k$. We define now the element $x_{\xi_{m+1}}^{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m}$ as the greatest element of $L-\{x_{\xi_1}, x_{\xi_2}^{\xi_1}, x_{\xi_3}^{\xi_1,\xi_2}, \ldots, x_{\xi_m}^{\xi_1,\ldots,\xi_{m-1}}\}$ in the series $\{x_\xi^{\xi_1,\ldots,\xi_m}\}_{\xi<\omega(\xi_m)}$, where $\omega(\xi_m)$ is the initial number of $\bar{\xi}_m$. We define $G(L)$ as the set $\{x_{\xi_1}, x_{\xi_2}^{\xi_1}, \ldots, x_{\xi_k}^{\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}}\}$. It is easy to see that for every element of $[S]^k$ the inverse has power $\leqq \aleph_\alpha$, which proves Theorem 9.

V.

We deal in this chapter with the symbol $((\mathfrak{m}, <\mathfrak{p}, \mathfrak{q})) \to \mathfrak{r}$.

Theorem 12. *Let $\mathfrak{q}$ and $\mathfrak{m}$ be two cardinal numbers such that $\mathfrak{q}$ is regular and $\mathfrak{q} \geqq \aleph_0$. If $\mathfrak{r}^\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ for every $\mathfrak{r} < \mathfrak{q}$ and $\mathfrak{n} < \mathfrak{q}$, then $((\mathfrak{m}, <\mathfrak{q}, \mathfrak{q})) \to \mathfrak{m}$.*

The proof of Theorem 12 is similar to the proof of Theorem 6.

Corollary 4. *If* $\mathfrak{q} = \aleph_0$ *or* $\mathfrak{q} > \aleph_0$ *is strongly inaccessible and* $\mathfrak{q} \leqq \mathfrak{m}^*$, *then* $((\mathfrak{m}, < \mathfrak{q}, \mathfrak{q})) \rightarrow \mathfrak{m}$.

Corollary 5. *Let* $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ *for every* β. *If* $\aleph_\alpha$ *is regular and either* $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ *or* $\aleph_\alpha < \mathfrak{m}^*$, *then* $((\mathfrak{m}, < \aleph_\alpha, \aleph_\alpha)) \rightarrow \mathfrak{m}$.

We can not prove that $((\mathfrak{m}, < \aleph_\omega, \aleph_\omega)) \rightarrow \mathfrak{n}$ *for some* $\mathfrak{m}$, *if* $\mathfrak{n} > \aleph_\omega$. If the generalized continuum hypothesis is true, then $((\aleph_{\omega+1}, < \aleph_\omega, \aleph_\omega)) \not\rightarrow \aleph_{\omega+1}$ (this is a consequence of Theorem 1).

Furthermore we are as yet not able to prove if $((\aleph_{\omega+2}, < \aleph_\omega, \aleph_\omega)) \rightarrow \aleph_{\omega+1}$ or if even $((\aleph_{\omega+2}, < \aleph_\omega, \aleph_\omega)) \rightarrow \aleph_{\omega+2}$?

References

[1] G. Fodor and I. Ketskeméty, Some theorems on the theory of sets, *Fundamenta Math.*, **37** (1950), 249—50.

[2] S. Ginsburg, Some remarks on relation between sets and elements, *Fundamenta Math.*, **39** (1952), 176—178.

[3] I. Ketskeméty, Eine Behauptung, die mit der verallgemeinerten Kontinuumhypothese äquivalent ist, *Publicationes Math. Debrecen*, **2** (1951—52), 232—233.

[4] G. Fodor, An assertion which is equivalent to the generalized continuum hypothesis, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 77—78.

[5] P. Erdős—A. Hajnal, On the structure of set-mappings, *Acta Math. Acad. Sci., Hung.*, **9** (1958). 111—131.

[6] S. Banach, Un théorème sur les transformations biunivoques, *Fundamenta Math.*, **6** (1924), 236—243.

(Received February 25, 1958)
(Theorem 8 and Chapter III added March 15, 1959)

Une relation parmi les vecteurs propres d'un opérateur de l'espace de Hilbert et de l'opérateur adjoint

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAS à Bucarest

1. Soit H un espace de Hilbert, T une transformation linéaire et bornée de H. Pour tout nombre complexe ζ, soit $E_\zeta[T]$ le sous-espace formé par les vecteurs x, solutions de l'équation $Tx=\zeta x$.[1])

Pour T *normale* il est bien connu que

$$E_\zeta[T]=E_{\bar\zeta}[T^*] \tag{$*$}$$

où T^* est l'adjointe de T et $\bar\zeta$ le nombre complexe conjugué à ζ (conséquence simple de la représentation spectrale de T).

Cette relation ne reste pas vraie en général pour les transformations *non normales.* Un cas particulier où elle est vraie, c'est lorsque *T est une contraction* ($\|T\|)\leqq 1$) *et ζ est situé sur le cercle unité* (*voir* [1], ou [2], p. 402).

Dans ce qui suit on démontrera des généralisations de ce dernier fait, en utilisant la notion de l'ensemble spectral au sens de J. v. NEUMANN ([3], *voir* aussi [2], p. 433).

2. Soit S un ensemble spectral de T, c'est-à-dire un ensemble fermé du plan complexe [contenant le spectre $\sigma(T)$ de T], tel que pour toute fonction rationnelle $f(\lambda)$, bornée sur S, on a

$$\|f(T)\|\leqq \sup_{\lambda\in S}|f(\lambda)|. \tag{1}$$

Enumérons quelques faits liés à cette notion, que nous utiliserons dans la suite. Tout d'abord on a, pour les mêmes fonctions $f(\lambda)$, les inégalités[2])

$$\left\|\frac{1}{2}[f(T)+f(T)^*]\right\|\leqq \sup_{\lambda\in S}|\mathrm{Re}\,f(\lambda)|,\quad \left\|\frac{i}{2}[f(T)^*-f(T)]\right\|\leqq \sup_{\lambda\in S}|\mathrm{Im}\,f(\lambda)|. \tag{2}$$

L'application $f(\lambda)\to f(T)$ est linéaire, multiplicative et continue [au sens de (1) et (2)], et se prolonge par continuité, en conservant ces propriétés à toutes

---

[1]) $E_\zeta[T]\neq\{0\}$ si et seulement si ζ est une valeur propre de T.

[2]) Elles découlent aisément par des homographies appliquant le disque unité sur un demi-plan (*voir* [2], pp. 430—432).

les fonctions *S-analytiques* (c'est-à-dire aux fonctions définies sur S, qui y sont des limites uniformes de fonctions rationnelles, régulières sur S).

3. Nous pouvons maintenant passer à l'étude de la relation (*) dans des conditions plus larges. Un premier cas est contenu dans les résultats de l'article [4]. En effet si S est un ensemble spectral de T, dont la frontière est une courbe jordanienne fermé, alors il existe (*voir* [4], théorèmes 6 et 7, pp. 41—43), dans un espace $K \supseteqq H$, une transformation normale N dont le spectre est situé sur la frontière de S, et telle qu'on a

$$T^n x = PN^n x \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; x \in H)$$

où P est la projection orthogonale de K sur H; on peut exiger que K soit sous-tendu par les éléments de la forme $N^n x$ et $N^{*n} x$ $(x \in H; n = 0, 1, \ldots)$; dans ce cas N est déterminée de manière univoque[3]), appelons-la la *dilatation normale forte* de T par rapport à l'ensemble spectral S.[4]) On a alors en tout point-frontière ζ de S

$$E_\zeta[T] = E_\zeta[N], \tag{3}$$

(*voir* [4], théorème 7 (iii)). Ces résultats nous donnent immédiatement le fait suivant:

Proposition I. *Si S est un ensemble spectral de T dont la frontière est une courbe jordanienne fermée C, la relation* (*) *est vraie pour tout point* $\zeta \in C$.

Démonstration. Soit $\bar{S} = \{\lambda : \bar{\lambda} \in S\}$. Alors, si $f(\lambda)$ est une fonction rationnelle, bornée sur $\bar{S}$, la fonction $f^*(\lambda) = \overline{f(\bar{\lambda})}$ est une fonction rationnelle, bornée sur S et en plus $f(T^*) = [f^*(T)]^*$. Ainsi on voit que $\bar{S}$ est à son tour un ensemble spectral de T^*.[5]) D'autre part on a

$$T^{*n} x = PN^{*n} x \qquad (n = 0, 1, \ldots; x \in H),$$

et les vecteurs $N^{*n} x$ et $(N^{**})^n x = N^n x$ engendrent K. De cette manière nous pouvons appliquer la relation (3) à T^*, N^* et $\bar{\zeta}$ au lieu de T, N et ζ. Nous obtenons

$$E_{\bar{\zeta}}[T^*] = E_{\bar{\zeta}}[N^*]. \tag{4}$$

Mais la relation (*) est vraie pour la transformation normale N. Par conséquent, en vertu de (3) et de (4), elle est vraie aussi pour T, c. q. f. d.

---

[3]) A condition qu'on ne distingue pas entre les différentes réalisations du prolongement K de H.

[4]) Dans le cas d'une contraction T on peut choisir pour S en particulier le disque unité (*voir* [3] ou [4]), et ce théorème se réduit alors à celui sur les dilatations unitaires des contractions (*voir* [5]).

[5]) Ce fait est évidemment vrai même pour des ensembles spectraux de type général.

4. Pour étudier la validité de $(*)$ en un deuxième cas, notamment pour certains points-frontière d'ensembles spectraux non nécessairement „jordaniens" nous avons besoin du lemme suivant:

Lemme. *Si T est une contraction et $Tx = \zeta x$, on a* $\|(T^* - \bar{\zeta} I)x\|^2 \leqq \leqq (1 - |\zeta|^2)\|x\|^2$.

Démonstration. Soit U une dilatation unitaire quelconque de T.[6]) On a alors

$$\|(T^* - \bar{\zeta} I)x\|^2 = \|P(U^* - \bar{\zeta} I)x\|^2 \leqq \|(U^* - \bar{\zeta} I)x\|^2 = \|(U - \zeta I)x\|^2 =$$
$$= \|Ux - Tx\|^2 = \|Ux\|^2 - \|Tx\|^2 = (1 - |\zeta|^2)\|x\|^2, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Cela étant, nous pouvons énoncer la

Proposition II. *Soit S un ensemble spectral de T et soit ζ un point-frontière de S, tel qu'il existe une suite de cercles $\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n| < r_n\}$ compris dans le complémentaire CS de l'ensemble S, telles que $\lambda_n \to \zeta$, $r_n^{-1}|\lambda_n - \zeta| \to 1$. Dans ces conditions, la relation $(*)$ est vraie.*

Démonstration. Soit $x \in H$, tel que $Tx = \zeta x$. Puisque $|r_n(\lambda - \lambda_n)^{-1}| \leqq 1$ sur $C\Gamma_n$, donc sur S, $T_n = r_n(T - \lambda_n I)^{-1}$ est une contraction. On a $T_n x = \zeta_n x$ avec $\zeta_n = r_n(\zeta - \lambda_n)^{-1}$. D'après le lemme nous avons

$$\|(T_n^* - \bar{\zeta}_n I)x\| \leqq \sqrt{1 - |\zeta_n|^2}\,\|x\|.$$

Or on a

$$T_n^* - \bar{\zeta}_n I = r_n(T^* - \bar{\lambda}_n I)^{-1} - r_n(\bar{\zeta} - \bar{\lambda}_n)^{-1} I = r_n(T^* - \bar{\lambda}_n I)^{-1}(\bar{\zeta} I - T^*)(\bar{\zeta} - \bar{\lambda}_n)^{-1},$$

donc

$$\|(T^* - \bar{\lambda}_n I)^{-1}(\bar{\zeta} I - T^*)x\| \leqq \frac{|\zeta - \lambda_n|}{r_n}\sqrt{1 - \frac{r_n^2}{|\zeta - \lambda_n|^2}}\,\|x\|. \tag{5}$$

Or on a $\|(T^* - \bar{\lambda}_n I)y\| \leqq (\|T\| + |\lambda_n|)\|y\|$, donc $\|(T^* - \bar{\lambda}_n I)^{-1}z\| \geqq (\|T\| + |\lambda_n|)^{-1}\|z\|$, quels que soient $y, z \in H$; par conséquent il s'ensuit de (5) que

$$\|(\bar{\zeta} I - T^*)x\| \leqq (\|T\| + |\lambda_n|)\sqrt{\frac{|\zeta - \lambda_n|^2}{r_n^2} - 1}. \tag{6}$$

Lorsque $n \to \infty$ il en résulte que $(\bar{\zeta} I - T^*)x = 0$. Par conséquent $E_\zeta[T] \subseteq \subseteq E_{\bar{\zeta}}[T^*]$. L'inclusion inverse résulte par la même voie en vertu de la remarque[5]), ce qui achève la démonstration.

5. Afin d'englober les propositions I et II dans une seule, plus générale, observons d'abord que, dans chacun des deux cas traités, la condition suivante est satisfaite:

---

[6]) C'est-à-dire on n'exige la relation $T^n x = PU^n x$ $(x \in H)$ que pour $n = 1$.

Condition A. *Il existe une suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions S-analytiques telles que*

(i) $\sup_{\lambda \in S} |\varphi_n(\lambda)| \leqq 1$;

(ii) $|\varphi_n(\zeta)| \to 1$;

(iii) $\varphi_n(\lambda) \to 0$ *uniformément sur tout compact de* $S - \{\zeta\}$.

Dans le cas envisagé dans la proposition II on n'a en effet qu'à poser $\varphi_n(\lambda) = r_n(\lambda - \lambda_n)^{-1}$.

Quant à l'autre cas, où la frontière de S est une courbe jordanienne fermée C et ζ est un point sur C, on peut raisonner comme il suit.

Il existe une suite de fonctions S-analytiques $\{f_n(\lambda)\}$ jouissant des propriétés suivantes: $\{\mathrm{Re}\, f_n(\lambda)\}$ *est une suite décroissante;* $0 \leqq \mathrm{Re}\, f_n(\lambda) \leqq 1$; $\mathrm{Re}\, f_n(\zeta) \to 1$; $\mathrm{Re}\, f_n(\lambda) \to 0$ *uniformément sur tout compact de* $S - \{\zeta\}$; $\mathrm{Im}\, f_n(\lambda) \to 0$ *uniformément sur tout* S. Rappelons la construction de telle suite (pour les détails *voir* [6], p. 273). Soit Σ l'ensemble des points

$$\mu = s + it, \quad 0 \leqq s \leqq 1, \quad -1 + \sqrt{s(2-s)} \leqq t \leqq 1 - \sqrt{s(2-s)}$$

et soit $\mu = \mu(\lambda)$ une transformation conforme de S sur Σ, telle que $\mu(\zeta) = 1$. Désignons par $\omega(z; \delta)$ la mesure harmonique de l'arc $s_\delta = (e^{-i\delta}, e^{i\delta})$ par rapport au disque unité $\{z : |z| < 1\}$,[7]) et par $\bar{\omega}(z; \delta)$ sa conjuguée harmonique. Notre suite $\{f_n(\lambda)\}$ sera alors donnée par

$$f_n(\lambda) = \omega\left(\mu(\lambda); \frac{1}{n}\right) + i\bar{\omega}\left(\mu(\lambda); \frac{1}{n}\right).$$

Posons $\varphi_n(\lambda) = f_n(\lambda) [\sup_{\lambda \in S} f_n(\lambda)]^{-1}$. On vérifie sans peine que $\{\varphi_n(\lambda)\}$ vérifie notre condition A.

6. Nous pouvons maintenant énoncer notre dernière proposition:

Proposition III. *Soit S un ensemble spectral de T, de type général, et soit ζ un point tel que la condition A est vérifiée. Dans ce cas, la relation* (*) *est vraie.*

Démonstration. Soit $\{f_n(\lambda')\}$ la suite considérée dans le paragraphe 5 mais qui est attaché à l'ensemble $S' = \{\lambda' : |\lambda'| \leqq 1\}$ et au point $\zeta = 1$.

Comme $\mathrm{Re}\, f_n(1) = 1$, pour tout n il existe un $\varrho_n > 0$, tel que

$$1 - \frac{1}{n} \leqq \mathrm{Re}\, f_n(\lambda') \quad \text{pour} \quad 1 - \varrho_n \leqq \lambda' \leqq 1.$$

En multipliant an besoin la fonction $\varphi_n(\lambda)$ de la condition A par des nombres

[7]) C'est-à-dire la solution du problème de Dirichlet pour le disque unité, avec les valeurs-frontière 1 sur s_δ et 0 ailleurs.

$e^{i\vartheta_n}$, nous pouvons supposer que $\varphi_n(\zeta)$ est de valeur reelle $\geqq 0$. Comme $\varphi_n(\zeta) \to 1$, il existe un N_n tel que pour $m > N_n$ on ait

$$1 - \varrho_n < \varphi_m(\zeta) \leqq 1.$$

De cette mainière nous pouvons trouver une suite croissante $\{n_p\}$ de nombres naturels telle que $f_p[\varphi_{n_p}(\zeta)] \geqq 1 - \frac{1}{p}$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Posons $F_p(\lambda) = f_p[\varphi_{n_p}(\lambda)]$. La suite $\{F_p(\lambda)\}$ jouit des propriétés suivantes: *$F_p(\lambda)$ est S-analytique; $F_n(\lambda) \to 0$ uniformément sur tout compact de $S - \{\zeta\}$*; $0 \leqq \operatorname{Re} F_p(\lambda) \leqq 1$; $\operatorname{Re} F_p(\zeta) \geqq 1 - \frac{1}{p}$; $\operatorname{Im} F_p(\lambda) \to 0$ *uniformément sur S.*

Posons

$$U_p = \frac{1}{2}[F_p(T) + F_p(T)^*] \quad \text{et} \quad V_p = \frac{i}{2}[F_p(T)^* - F_p(T)].$$

En vertu de (2) on a $\|U_p\| \leqq 1$ et $\|V_p\| \to 0$. D'autre part, si $\lambda_0 \notin S$, $(\lambda - \zeta)(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ est aussi S-analytique et $F_p(\lambda)(\lambda - \zeta)(\lambda - \lambda_0)^{-1} \to 0$ uniformément sur S. Par conséquent de (1) il résulte que

$$\|F_p(T)(T - \zeta I)\| \leqq \|F_p(T)(T - \zeta I)(T - \lambda_0 I)^{-1}\| \, \|T - \lambda_0 I\| \to 0,$$

d'où, en vertu du fait que $\|V_p\| \to 0$ et que $F_p(T) = U_p + iV_p$, on obtient

(8) $$\|U_p(T - \zeta I)\| \to 0.$$

Cela étant, soit $x \in H$ tel que $Tx = \zeta x$. Pour toute fonction rationnelle, régulière sur $\sigma(T)$, on a $r(T)x = r(\zeta)x$, d'où il résulte par continuité que pour toute fonction S-analytique $f(\lambda)$ on a aussi $f(T)x = f(\zeta)x$.

En particulier nous avons $F_p(T)x = F_p(\zeta)x$, d'où

$$(U_p x, x) = \operatorname{Re}(F_p(T)x, x) = \operatorname{Re} F_p(\zeta) \cdot \|x\|^2 \geqq \left(1 - \frac{1}{p}\right)\|x\|^2.$$

Par conséquent,

$$0 \leqq \|U_p x - x\|^2 = \|U_p x\|^2 - 2(U_p x, x) + \|x\|^2 \leqq$$
$$\leqq 2\|x\|^2 - 2\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|x\|^2 = \frac{2}{p}\|x\|^2 \to 0.$$

Donc on a $U_p x \to x$. En utilisant ce fait et (8), nous obtenons

$$(\bar{\zeta} I - T^*)x = \lim_{p \to \infty} (\bar{\zeta} I - T^*) U_p x = \lim_{p \to \infty} [U_p(\zeta I - T)]^* x = 0,$$

donc

(10) $$E_\zeta[T] \subseteqq E_{\bar{\zeta}}[T^*].$$

Or la validité de la condition A pour T, S, ζ entraîne sa validité aussi pour $T^*, \bar{S}, \bar{\zeta}$ (cf. [5])), donc nous avons aussi l'inclusion inverse à (10), ce qui achève la démonstration.

Ouvrages cités

[1] F. Riesz—B. Sz.-Nagy, Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math.*, **10** (1943), 202—205.

[2] F. Riesz—B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 3. édition (Budapest—Paris, 1955).

[3] J. von Neumann, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachrichten*, **4** (1951), 258—281.

[4] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 26—45.

[5] B. Sz.-Nagy, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 87—92.

[6] C. Foiaş, La mesure harmonique-spectrale et la théorie spectrale des opérateurs généraux d'un espace de Hilbert, *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 263—282.

(Reçu le 24 octobre 1958)

Bibliographie

Th. Schneider, Einführung in die transzendenten Zahlen (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 81), VII + 150 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1957.

Wie der Verfasser betont, ist das Ziel des Werkes eine solche Einführung ins Gebiet der transzendenten Zahlen zu geben, welche die wichtigsten Teile der Theorie im Lichte einiger *allgemeinerer* Beweismethoden behandelt. Während Transzendenzergebnisse seit Liouville bis zu den 30-er Jahren d. Jh. meistens auf Grund recht spezieller Gedanken bewiesen worden sind, verdankt man in neuerer Zeit manchen Autoren — vor allem A. O. Gelfond, K. Mahler, Th. Schneider und C. L. Siegel — auch umfassendere Prinzipien, welche für die weitere Entwicklung große Bedeutung haben. — Es ist also wohl anzuerkennen, daß die betreffenden Methoden auch an solchen Stellen benutzt werden, wo sie nicht die kürzestmögliche, aber eine verallgemeinerungsfähige Diskussion liefern, wie z. B. beim Lindemannschen Satz.

Der Stoff gliedert sich in fünf (voneinander mehr oder weniger unabhängige) Kapitel. — Das erste beschäftigt sich mit dem klassischen Liouvilleschen Satz und seinen Erweiterungen, mit Einschluß vielfältiger Anwendungen zur Konstruktion von transzendenten Zahlen. Die Rothsche (bestmögliche) Verschärfung des Thue-Siegelschen Approximationssatzes, welche ganz neuerdings, 1955 publiziert worden ist und eine der tiefliegendsten Resultate der Theorie darstellt, ist hierin in vollem Umfange bewiesen und mit geeigneten Beispielen illustriert. — Kap. II enthält eine moderne Zusammenfassung unserer Kenntnisse über die Transzendenz der Werte von periodischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen: nachdem es (mittels Interpolationsreihen) gezeigt wird, daß α und e^{α} für $\alpha \neq 0$ nicht gleichzeitig algebraisch sein können, eine natürliche Erweiterung der Methode führt zu einem allgemeinen Satz in bezug auf die algebraische Abhängigkeit von meromorphen Funktionen, welcher durch Spezialisierung u. a. sowohl die Lösung des 7-ten Hilbertschen Problems, d. h. das Theorem von Gelfond und Schneider (1934) über die Transzendenz von α^{β} (α, β algebraisch, $\alpha \neq 0, 1$ und β irrational), als auch Ergebnisse von Siegel und Schneider über den nicht-algebraischen Charakter elliptischer Funktionen und Integrale liefert. Die noch weitergehenden Resultate des Verfassers (1941) über Abelsche Funktionen und Integrale sind gleichfalls angedeutet, aber nicht ausführlich behandelt. — Kap. III gibt die Klasseneinteilung der Zahlen nach Mahler; die Beleuchtung der Zusammenhänge mit der analogen Koksmaschen Klassifikation ermöglicht dann, auch die entsprechenden maßtheoretischen Fragen teilweise zu beantworten. — Kap. IV schließt sich eng daran, indem — anstatt der (bei der Klassifikation benutzten) Mahlerschen Funktion — konkrete Transzendenzmaße für e (Mahler), α^{β} (Gelfond) usw. hergeleitet werden. Dabei wird besonderer Wert auf die einschlägige Gelfondsche Methode gelegt. — Kap. V bespricht eingehend (obzwar nicht in der vollsten Allgemeinheit) die von Siegel herrührende Methode zur Feststellung der algebraischen Unabhängigkeit von transzendenten Zahlen; als Anwendung ergeben sich eine Verschärfung des Satzes von Lindemann über die Werte der Exponentialfunktion und ein merkwürdiges Ergebnis von SIEGEL über die Werte von Besselschen Funktionen und ihren Ableitungen. — Aufzählung mancher offener Probleme, ein Anhang mit einigen (im Text benutzten) Hilfssätzen aus der Theorie der diophantischen Gleichungs- und Ungleichungssysteme, ferner ein ausführliches Literaturverzeichnis sind noch hinzugefügt.

Die Arbeit wird — nebst den vor einigen Jahren (1949 bzw. 1952) erschienenen Büchern von SIEGEL und GELFOND — gewiß jedem Mathematiker von Nutzen sein, der sich eine klare Vorstellung vom heutigen Stande der Transzendenztheorie machen bzw. Impulse aus diesem schönen Forschungsgebiet entnehmen will.

Miklós Mikolás (Budapest)

Tom M. Apostol, Mathematical Analysis. A Modern Approach to Advanced Calculus, XII+553 pages, Reading (Mass., USA), Addison—Wesley Publishing Company, 1957.

The book starts with a list of fundamental properties of the real number system, but does not give any construction of this system, by Dedekind sections or any other method, from the rational number system. There follow the elements of point set theory in finite dimensional euclidean spaces. The limit concept and continuity are explained in a very detailed manner. Three chapters (5—7) are devoted to the definition and general properties of differentiation, of functions of one or several variables. Great care is taken to an exact dealing with differentials: the function $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, is said to have a differential at $\mathbf{x}$ if there exists a function $g(\mathbf{x}; \mathbf{t})$, linear in $\mathbf{t}$, such that, for any $\varepsilon>0$,

$$|f(\mathbf{x}+\mathbf{t})-f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x};\mathbf{t})|<\varepsilon|\mathbf{t}|$$

if $0<|\mathbf{t}|<\delta=\delta(\mathbf{x}, \varepsilon)$; the "differential" g is then also denoted by df, and $\mathbf{t}$ by $d\mathbf{x}$. Chapter 8 deals with functions of bounded variation, rectifiable curves, and connected sets; the elementary but fair introduction of connectedness has to be emphasized. It follows an extended treatment of the Riemann—Stieltjes integral (Ch. 9), including complex integration and a discussion of the winding number. Multiple integrals and line integrals are treated in Ch. 10, including a fine proof of Green's theorem for plane regions bounded by arbitrary rectifiable Jordan curves. Unfortunately, the proof of the formula for the change of variable in a multiple integral contains an error (p. 271, bottom; the non-singularity of the Jacobian does not imply that at least one of the diagonal elements $D_k g_k(\mathbf{t})$ is $\neq 0$); the proof of theorem 10—48 is erroneous. Ch. 11, on Vector analysis, includes a careful treatment of surfaces and surface integrals. There follow chapters on infinite series and infinite products (Ch. 12), and on sequences of functions (Ch. 13). They contain many interesting details, among them a quite simple proof of Arzelà's theorem on bounded convergence for Riemann integrals [in the proof, however, the sets $A(n), B(n)$ should be defined in terms of $M_i(h_n)$ instead of $m_i(h_n)$]. Improper Riemann—Stieltjes integrals (Ch. 14), Fourier series and integrals (Ch. 15), and analytic functions in the complex domain (Ch. 16) are the topics treated in the last part of the book; among many other interesting details one finds here Fourier and Laplace transforms, inversion formulas, etc.

There is a minimum of emphasis on applications and physical motivation in the book. The opinion of the author, as expressed in the preface, is that it is a fairly easy matter for a lecturer to give a leisurely heuristic discussion that motivates a difficult concept, but in many instances the very same discussion may appear somewhat ridiculous when set down in print.

Summing up, this is a worthy modern text-book of Advanced Calculus, which may be recommended to students and lecturers.

Béla Sz.-Nagy (Szeged)

B. L. van der Waerden, Mathematische Statistik (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 87), IX+360 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1957.

Einführendes Werk in die mathematische Statistik. Erstrebt weder im Aufbau der Theorie der mathematischen Statistik, noch in der Aufzählung der Methoden eine Vollständigkeit, die modernen grundlegenden Probleme sind jedoch im allgemeinen erwähnt. Neben einer mathematischen Präzisität ist das Buch leicht verständlich, die praktischen Beziehungen werden überall hervorgehoben, die Beispiele sind der Praxis entnommen. Sowohl im Aufbau, wie auch in der Ausarbeitung des Buches äußert sich das Interesse eines hervorragenden Mathematikers und ausgezeichneten Didaktikers für bestimmte praktische Probleme der mathematischen Statistik.

Kapitel 1 gibt die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundbegriffe, nach dem Kolmogoroffschen Aufbau. Kapitel 2 legt das Verhältnis von Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten klar. Kapitel 3 macht mit einigen mathematischen Hilfsmitteln bekannt. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der empirischen Bestimmung von Verteilungsfunktionen und ihrer Parameter. In Kapitel 5 wird der Begriff der charakteristischen Funktion eingeführt, und die Anwendung in der Berechnung von Momenten und Ableitung von Grenzwertsätzen gegeben. Kapitel 6 befaßt sich mit der Fehlertheorie und mit dem Student-Test. Die folgenden drei Kapitel (7—8—9) schildern — von der Methode der kleinsten Quadrate ausgehend — die Probleme der statistischen Abschätzung. Ein selbstständiges Kapitel (10) behandelt die Fragen der Bio-Auswertung, auf welchem Gebiet Verf. bemerkenswerte eigene Tätigkeit ausgeübt hat. Die nachfolgenden beiden Kapitel (11—12) enthalten die Grundlagen der Prüfung von Hypothesen; das erstere beschäftigt sich neben allgemeinen Fragen mit dem χ^2 und dem F-Test und mit der Varianzanalyse, das zweite spricht über verteilungsfreie Tests (Smirnoff-Test, Wilcoxon-Test und dessen durch Verf. verbesserte Modifikation, X-Test). In Kapitel 13 werden der Korrelationskoeffizient und die Rangkorrelation behandelt. Kapitel 14 enthält 13 Tabellen zu den im Buch beschriebenen Standard-Tests. Die einzelnen Kapitel beginnen mit je einer kurzen Anweisung zur Bearbeitung des betreffenden Kapitels. Das Buch schließt mit einem Register der Beispiele, nach Fachgebieten geordnet, einer Nebeneinanderstellung englischer und deutscher Fachausdrücke und einem Namen- und Sachverzeichnis.

Das Buch enthält 50 ausgearbeitete Anwendungen auf Probleme aus der Physik, Chemie, Astronomie, Meteorologie, Biologie, Physiologie, Medizin, Demographie, Wirtschaftsstatistik und Industrie. Durch diese lehrreichen, praktischen Beispiele kann der Leser eine gute Praxis in den Anwendungen der Theorie gewinnen.

Das Buch ist, insbesondere wegen der anschaulichen und gründlichen Ausarbeitung zahlreicher theoretischer und praktischer Probleme, ein Gewinn der Literatur der mathematischen Statistik.

I. Vincze (Budapest)

H. Hadwiger, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 93), XIII + 312 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1957.

Die Begründung des Inhalts- und Oberflächenbegriffes, sowie das isoperimetrische Problem beschäftigte eine Reihe hervorragender Mathematiker. In den letzten Dezenien trat in diesem klassischen Gegenstand eine schnelle Entwicklung ein, die mit dem Namen des Verfassers am engsten verbunden ist. Deshalb ist es besonders erfreulich, daß er nun auch ein Buch über den Problemkreis geschrieben hat.

Das Buch setzt keine „höheren" Kentnisse voraus. Doch erfordert sein Studium eine gewisse Gewandheit im abstrakten Denken und in feinen Überlegungen.

Den Betrachtungen des ganzes Buches wird der k-dimensionale euklidische Raum zugrunde gelegt. Die älteren analytischen Methoden werden fast vollkommen vermieden und durch direkte mengengeometrische Betrachtungen ersetzt. Die Kraft dieser Methode zeigt sich in der allgemeinen, bedingungsfreien Lösung des isoperimetrischen Problems.

Der Verfasser ist bestrebt von einem Minimum von Voraussetzungen zu möglichst allgemeinen Resultaten zu gelangen. Dieses Bestreben wird im axiomatischen Aufbau der Inhaltstheorie auf meisterhafte Weise realisiert; der elementare Inhalt (Polyederinhalt), der Jordansche Inhalt, das Lebesguesche Maß, sowie der Tarskische Inhalt reihen sich alle in ein allgemeines, durch einige wenige Postulate definiertes Inhaltssystem ein. Besonders hervorzuheben ist die sehr schöne Begründung des elementaren Inhaltsbegriffes, dem die weitgehend ausgebaute Zerlegungstheorie unterliegt.

Das folgende skizzenhafte Inhaltsverzeichnis liefert eine Übersicht von der Reiche des behandelten Stoffes. Erstes Kapitel: Elementargeometrie der Polyeder (Begriff des Polyeders, Elemente der Polyedergeometrie, Zerlegungsgleichheit). Zweites Kapitel: Der elementare Inhalt (Begründung des Polyederinhalts, Polyederinhalt und Zerlegungsgleichheit, Inhalt und Oberfläche der Polyeder). Drittes Kapitel: Jordanscher Inhalt und Lebesguesches Maß (Punktmengen, Inhalts- und Maßsysteme, der Jordansche Inhalt, das Lebesguesche Maß, zum allgemeinen Inhalts- und Maßproblem). Viertes Kapitel: Ausgewählte Studien zur Mengengeometrie (Lineare Ausmessung von Punktmengen, Minkowskische Mengenoperationen, Mengenkonvergenz und Auswahlsatz, Mengengeometrie und Inhalt, Symmetrisierung, Drehmittelung und Kugelung). Fünftes Kapitel: Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie (Minkowskische Oberfläche, die isoperimetrische Ungleichung). Sechstes Kapitel: Konvexe Körper und allgemeine Integralgeometrie (Konvexe Körper und ihre fundamentalen Maßzahlen, integralgeometrische Ansätze, Integralformeln, allgemeine Integralsätze, konkave Eikörperfunktionale, die isoperimetrische Ungleichung).

Die am Ende jedes Kapitel zusammengestellten Anmerkungen enthalten eine Fülle von interessanten Tatsachen, historischen Hinweisen und Ausblicken auf weitere Forschungsgebiete. Das Buch ist mit sorgfältig zusammengestellten Literatur-, Namen- und Sachverzeichnis versehen.

Das Werk wird sicherlich in breiten Kreisen mit großer Freude empfangen und zum Ausgangspunkt mancher weiterer Untersuchungen werden.

J. Molnár (Budapest)

L. Fuchs, Abelian Groups, 367 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1958.

The late Tibor Szele concluded his review of Kaplansky's monograph on Infinite Abelian Groups with the words: „This excellent book will certainly initiate a new development of the theory of abelian groups." Now, only four years later, L. Fuchs' book on Abelian Groups has appeared. The many new results contained in it, the new proofs of known results, and the large number of new problems arising out of the advances show convincingly that this new development is in fact well under way; looking through the book and through its bibliography one sees that this is due in no small measure to the many and varied contributions made by the Hungarian school of group theorists.

This background certainly gives the book its distinctive flavour, very naturally and rightly so. It also means that there is a minimum of overlap with Kaplansky's book. Obviously any book on abelian groups will present the main body of fundamental structure theory; a little over half of the present book is devoted to this, and even here the manner of presentation is very different from KAPLANSKY's. After this, in the choice of additional topics, the books have very little in common. KAPLANSKY's professed „enthusiasm for modules" leads him to aim at full generality in dealing with groups with operators almost all the way. FUCHS prefers the simplicity of language and of formulae achieved by restricting himself to just groups, pointing out where appropriate the applicability to modules, but jettisoning those parts of the theory of modules that require their own specific means of attack. Thus representation theory does not occur as a topic in its own right, nor are topological groups mentioned — the chapter on group homomorphisms stops just short of the point where a topology on the group leads to essentially new methods and results, but turns instead to the study of endomorphism rings and automorphism groups in certain cases. On the other hand we find in this book the first connected account of a number of topics that up to now could be studied only in the original papers. Prominent amongst them is the Minkowski—Hajós Theorem on group coverings presented here with the simplifications due to RÉDEI and SZELE, and the generalizations to coverings with an infinity of components due to the author. Another chapter is devoted to a full account of the present state of knowledge on the additive group of rings, discussing the two central problems to find all non-isomorphic rings with a given additive group, and to characterize rings with given special properties by means of the structure of their additive group. These and some further chapters on special topics, containing in particular R. BAER's theory of projective groups, that is groups with the same subgroup lattice, are prepared for by the treatment of homomorphism groups and endomorphism rings mentioned earlier, a discussion of group extensions where both SCHREIER's and EILENBERG—MACLANE's approach are given and related to each other, and a brief introduction to tensor products. This must suffice to indicate the scope and character of that part of the book dealing with optional subjects, for a word must certainly be said about the first eight chapters containing the 'musts' of abelian group theory. This part has an air of consolidation about it, notwithstanding the numerous unsolved problems stated also here. The concepts of divisible group, pure subgroup, and basic subgroup are now well and truly established as the principal tools of the theory; accordingly they get the fullest possible treatment, each in a separate chapter. The results are then applied to give in turn the structure theorems for p-groups, torsion free groups and mixed groups. Again there are several novel features and new results of which we give an indication by two examples. GACSÁLYI's and KERTÉSZ' theorems on systems of linear equations over abelian groups are used to provide a very natural proof for the fact that a divisible subgroup is a direct factor. The usual proof, using ZORN's Lemma, is however also given and provides additional information on the theorem. This is not the only instance; several times the author gives space to alternative arguments where this helps to illuminate different facets of the situation. The beautiful chapter which develops KULIKOV's theory of basic subgroups leads on to the author's results on lower and upper basic subgroups, SZELE's theorem that every basic subgroup is an endomorphic image of the group, and applications of these facts and concepts.

The book is eminently readable from beginning to end, the presentation is clear and never hurried, full explanations and motivations are always given. Limitations to the validity of theorems are indicated by examples and counter examples, often in the text, more often in the exercises. The short summaries at the beginning of each chapter serve admirably as a guide to the essentials and help reader to follow the main trend of thought through the wealth of material provided. Thus the manner of presentation makes the book very well suited for the more mature student; at the same time it clearly is a mine of information also for the expert. The extraordinarily large number of exercises at the end of each chapter are aimed at both types of reader: many of them are designed to familiarise the student with the use of the concepts and methods discussed in the text and, incidentally, to give supplementary information; but the majority of the examples, especially in the later chapters, seem to be mainly a means of providing a large quantity of additional material. The book under review is not the first to adopt this way out of the dilemma how to combine readability with some measure of completeness. Nevertheless the reviewer may perhaps be permitted to use this opportunity to express some doubt as to the efficacy of this method. It seems very unlikely that any reader could work through so large a number of substantial examples; their purpose might therefore be better served by a concise but connected statement of the additional material, which is more readily absorbed on reading through it than a sequence of more or less disconnected examples, and would take little, if any, more space.

Full references to the original sources are given everywhere, and there is a very comprehensive bibliography. The printing of the book is excellent, there are few misprints. The reviewer noticed an occasional minor omission, usually easily put right by the reader, except for one instance in the first introductory chapter where presumably the convention to use the word 'group' in the meaning of 'abelian group' has led to a misstatement in the definition of the socle which is usually defined as the union of the minimal normal subgroups.

Obviously these small criticisms in no way detract from the excellence of the book and the author's great achievement in providing a book of such scope, yet suitable for so large and diverse an audience.

Hanna Neumann (Sale, Cheshire, England)

Ludwig Bieberbach, Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LXXXIII), VIII + 281 Seiten, Berlin—Göttingen—Heideiberg, Springer-Verlag, 1956.

Diese „Einführung" macht den Leser nicht nur mit den Grundtatsachen der Theorie der Differentialgleichungen bekannt, sondern führt in einigen Problemen bis zu ganz modernen Resultaten. Demnach ist das Buch als Nachschlagewerk auch für die Kenner sehr wertvoll. Die Beweisführungen sind übersichtlich, gut gewählte Beispiele erleichtern das Verstehen der Probleme und der Lösungsverfahren. Der Leser, der sich mit den behandelten Problemen besser bekannt machen will, findet mehrere Hinweise auf die neuere Fachliteratur.

Der erste Paragraph behandelt auf sehr ausführliche Weise die Existenz- und Unizitätssätze, auf die sich die ganze im Buch dargelegte Theorie stützt. Der zweite, kurze Paragraph behandelt numerische Verfahren und elementare Integrationsmethoden.

Wie der Verfasser schon im Vorwort betont, ist die Hauptaufgabe der Theorie die Untersuchung der Natur der Lösungen. Diese Untersuchung bildet den Gegenstand der sehr ausführlich dargelegten dritten und vierten Paragraphen. Der dritte Paragraph behandelt stationäre und nahezu stationäre Differentialgleichungen. (Stationär = konservativ oder autonom. Eine Differentialgleichung nennt man nahezu stationär, wenn sie aus einer stationären Differentialgleichung durch Anbringung von Störungsglieder hervorgeht.) Der Gegenstand dieses Paragraphen, deren Grundlagen die Untersuchungen von Liapunoff und Poincaré bilden, ist auch heute in lebhafter Entwicklung begriffen. Der Verfasser bietet eine Einsicht auch in die Ergebnisse der neueren Untersuchungen. Paragraph 4 beschäftigt sich mit Randwertaufgaben: z. B. dem Duffingschen Schwingungsproblem, den Sturm-Liouvilleschen Randwertaufgaben, und am Ende des Paragraphen sind einige neuere Ergebnisse über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung erwähnt. Paragraph 5 behandelt die Grundlagen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Das Buch wird gewiß einen ähnlich großen Erfolg haben, wie die anderen Monographien des Verfassers, insbesondere sein 1923 in derselben Sammlung erschienenes, etwas mehr elementar gehaltenes Lehrbuch über die Theorie der Differentialgleichungen, das die Vorlesungen aus dem Gesamtgebiet der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen enthielt.

L. Pintér (Szeged)

Ralph P. Boas and R. Creighton Buck, Polynomial expansion of analytic functions (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 19), VIII + 77 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1958.

This monograph deals with representations of analytic functions $f(z)$ in the form

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(z) \tag{1}$$

where $\{p_n(z)\}$ is a prescribed sequence of polynomials. It is required that the set $\{p_n(z)\}$ be *basic*, i. e. every polynomial $p(z)$ have a unique representation as a finite sum $p(z)=\sum_{n=0}^{N} c_n p_n(z)$. Then especially $z^k=\sum_{n}\pi_{k,n}p_n(z)$, thus if $f(z)$ is regular at $z=0$ we obtain formally

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k=\sum_{n=0}^{\infty}c_n p_n(z) \tag{2}$$

where

$$c_n=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_{k,n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \tag{3}$$

The expansion (2) when c_n is given by (3) is the so called *basic series* of J. M. Whittaker.

In their book the authors suppose that $\{p_n(z)\}$ is a set of *generalized Appel polynomials*, i. e. generated by the expansion

$$A(w)\Psi[zg(w)]=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(z)w^n$$

where $A(w)$, $g(w)$ and $\Psi(t)$ are analytic functions, $\Psi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n t^n$ with $\Psi_n\neq 0$ $(n=0,1,2,\ldots)$, $A(w)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n w^n$ with $a_0\neq 0$, and $g(w)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n w^n$ with $g_1\neq 0$. The polynomials $p_n(z)$ then have the explicit representation

$$p_n(z)=\sum_{j=0}^{n}\Psi_j z^j\sum a_{k_0}g_{k_1}g_{k_2}\cdots g_{k_j} \tag{4}$$

where the inner summation is extended over all sets of integers k_h ($k_0\geqq 0$, $k_h\geqq 1$ for $h=1,2,\ldots$) such that $\sum_{h=0}^{j}k_h=n$. If especially $\Psi(t)=e^t$ the polynomials $p_n(z)$ are called

Sheffer polynomials, if $g(w)=w$ *Brenke polynomials*, if both $\Psi(t)=e^t$ and $g(w)=w$ we obtain the ordinary *Appel polynomials* for which formula (4) reduces to the simple form

$$p_n(z)=\sum_{j=0}^{n} z^j \frac{a_{n-j}}{j!}.$$

Chapter I, which serves as an introduction, deals besides the formulation of the problem with the method of kernel expansion, which is the main tool of the theory as developed in Chapter II, and with some characteristic examples (e. g. Lidstone's series).

Chapter II deals with the representation of entire functions by series of generalized Appel polynomials. In this Chapter it is supposed that $\Psi(t)$ is an entire function, $\Psi(t)=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n t^n$ with $\Psi_n>0$ $(n=0,1,\ldots)$ and $\frac{\Psi_{n+1}}{\Psi_n}$ tending monotonically to 0, further that $A(w)$ is regular and $g(w)$ regular and univalent for $|w|\leqq\varrho$. Certain classes of entire functions $f(z)$ are exhibited which admit of a convergent expansion (1) with coefficients given by some integral-formulae. In connection with the multipicity of the representation, the representations of zero are considered in detail. Besides convergent expansions there are considered also expansions which are divergent but Mittag-Leffler summable. The general theory is illustrated by applications to 20 more or less specialized classes of polynomial sets.

Chapter III deals with the representation of functions which are regular only in some neighborhood of the point $z=0$. Again besides general theorems a series of important special cases are discussed.

Chapter IV gives some applications of the results of Chapter II and III. It is shown that by means of convergent or summable representations of analytic functions in the form (1) one can obtain easily some uniqueness theorems. Another important field of application is that of differential equations of finite or infinite order

$$A(D)y=f(z) \tag{5}$$

where $D=\frac{d}{dz}$ and $A(w)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n w^n$. This class of differential equations contains also the difference equation

$$\sum_{j=0}^{m}a_j y(z+\omega_j)=f(z)$$

which is obtained from (5) by choosing $A(w)=\sum_{j=1}^{m}a_j e^{\omega_j w}$ and taking into account that $e^{wD}y(z)=y(z+\omega)$.

Some interesting unsolved problems are also mentioned. The bibliography contains 95 references.

While many of the results on particular sets of polynomials given in the book were known before, they were treated up to now as isolated problems. Though it contains also a large number of interesting new results, the main value of the book is that it gives a coherent theory, which throws new light also on well known results. Owing to this feature the book will certainly contribute essentially to the further development of the subject. It should be read by everybody who wants to get acquainted with results and methods of this interesting and by far not exhausted field of research.

C. Rényi (Budapest)

Rings with additive group which is a torsion-free group of rank two

By R. A. BEAUMONT in Seattle (Wash., USA) and R. J. WISNER*) in Haverford (Pa., USA)

I. Introduction

In the past ten years considerable progress has been made in the construction of rings with given additive group and the related problem of characterizing the additive groups of rings satisfying various conditions. A complete bibliography of these results is given at the end of this paper.

Given an abelian group G, then we call $\mathfrak{R}$ *a ring over* G if the additive group $\mathfrak{R}^+ = G$. Throughout this paper *ring* means *associative ring.*

The results for rings over torsion-free abelian groups are meager. The rings over a given torsion-free group of rank 1 have been determined, and every such ring is either a zero-ring ($XY = 0$ for $X, Y \in \mathfrak{R}$) or is isomorphic to a subring of the field R of rational numbers (RÉDEI and SZELE [6], and BEAUMONT and ZUCKERMAN [2]). SZELE [9] has given a sufficient condition that an arbitrary torsion-free group be a nil group, and REE and WISNER [7] have found necessary and sufficient conditions that a completely reducible torsion-free group be a nil group. BEAUMONT [1] gave a construction which included all rings over free abelian groups, and FUCHS [3] extended this construction to divisible torsion-free groups. RÉDEI [5] generalized [1] to obtain algebras with given additive module.

In the present work, we consider rings over torsion-free abelian groups of rank 2 and the principal results are summarized below. Except where otherwise explicitly stated, the group G will always be a torsion-free abelian group of rank 2. In Section III, a characterization of a group G in terms of groups of rank 1 is given. This characterization depends on the choice of the rational basis for G. In Section IV, we find a necessary and sufficient condition that there exist a non-commutative ring over G and determine all

*) Supported in part by the Haverford College Faculty Research Fund.

such rings (Theorem 2). It follows from the latter result that every ring without zero-divisors over G is commutative, and in Section V we prove (Theorem 3) that $\mathfrak{R}$ is a ring without zero-divisors over G if and only if $\mathfrak{R}$ is isomorphic to a subring of a quadratic field extension $R(\alpha)$ of the rationals R.

II. Rational operators

Let H be a torsion-free abelian group, let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be elements of H, and let $a_1/b_1, a_2/b_2, \ldots, a_n/b_n$ be rational numbers. Denote the least common multiple of the integers b_i $(i=1,2,\ldots,n)$ by $[b_i]$. If the equation

$$[b_i]X = \sum_{j=1}^{n} [b_i](a_j/b_j)X_j \tag{1}$$

has a solution $X \in H$, then this solution is unique and we write

$$X = \sum_{j=1}^{n} (a_j/b_j)X_j. \tag{2}$$

Let $X = \sum_{j=1}^{n} r_j X_j$ and $Y = \sum_{j=1}^{n} s_j X_j$, where r_i and s_i $(i=1,2,\ldots,n)$ are rational numbers, be elements of H as described above. Then it is routine to check that

$$X \pm Y = \sum_{j=1}^{n} (r_j \pm s_j)X_j. \tag{3}$$

Further, if $\mathfrak{R}$ is a ring with H as its additive group, the distributive laws in $\mathfrak{R}$ yield

$$X \cdot Y = \sum_{i,j=1}^{n} r_i s_j (X_i \cdot X_j). \tag{4}$$

If the elements $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are independent elements of H, and if $X = \sum_{j=1}^{n} r_j X_j$ with r_j $(j=1,2,\ldots,n)$ rational numbers, then this representation is unique. Denote the pure subgroup of H generated by $X_1, X_2, \ldots, X_n$ by $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Then the mapping $X \rightarrow (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ is an isomorphism of $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ onto a subgroup of the divisible torsion-free group of rank n. In other words, $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ is isomorphic to a subdirect sum of groups of rank 1. If H has rank n, then $H = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

III. Characterization of groups of rank 2

For the purposes of this paper, it will be convenient to give a characterization of torsion-free abelian groups of rank 2 in terms of certain groups of rank 1. Let X_1, X_2 be independent elements of a group G of rank 2, so that $G=\{X_1, X_2\}$ in the terminology of the preceding paragraph. Each element $X \in G$ has the unique representation $X=uX_1+vX_2$, where u, v are rational numbers, and let U and V be the subgroups of R^+ determined by the projections $X \to u$ and $X \to v$, respectively, for every $X \in G$.

Let $U_0=[u \in U | uX_1 \in G]$ and $V_0=[v \in V | vX_2 \in G]$. Then U_0 and V_0 are subgroups of U and V, respectively, which are isomorphic to the pure subgroups $\{X_1\}$ and $\{X_2\}$ of G.

We call $U \supseteq U_0, V \supseteq V_0$, *the groups of rank* 1 *belonging to the independent set* X_1, X_2 *of* G.

Theorem 1. *Let $G=\{X_1, X_2\}$ be a torsion-free abelian group of rank 2. If U, U_0, V, V_0 are the groups of rank 1 belonging to X_1, X_2, then $U/U_0 \simeq V/V_0$. Conversely, given the groups of rank 1, $U \supseteq U_0, V \supseteq V_0$ such that $U/U_0 \simeq V/V_0$, then there exists a group G of rank 2 with independent elements X_1, X_2 such that U, U_0, V, V_0 are the groups belonging to X_1, X_2. G is essentially uniquely determined by U, U_0, V, V_0, and the isomorphism between U/U_0 and V/V_0.*

Proof. (a) Let $G=\{X_1, X_2\}$ be given. Then for $u \in U$, there exists an element $X=uX_1+vX_2$ in G. The isomorphism between U/U_0 and V/V_0 is given by the correspondence $u+U_0 \to v+V_0$.

(b) Let groups of rank 1, $U \supseteq U_0, V \supseteq V_0$ be given such that θ: $U/U_0 \to V/V_0$ is an isomorphism onto. Define $G=[(u, v) | u \in U, v \in \theta(u+U_0)]$ where equality and addition are defined componentwise. If $(u, v) \in G$ and $(u', v') \in G$, then $u+u' \in U, v \in \theta(u+U_0)=v+V_0$ and $v' \in \theta(u'+U_0)=v'+V_0$. Hence $v+v' \in v+v'+U_0=\theta(u+U_0)+\theta(u'+U_0)=\theta(u+u'+U_0)$, so that $(u+u', v+v') \in G$. Since the components u and v of the pairs $(u, v) \in G$ are elements of the abelian groups U and V respectively, the operation is associative and commutative. The element $(0, 0) \in G$ is the identity. If $(u, v) \in G$, then $u \in U$ and $v \in \theta(u+U_0)$, so that $-u \in U$ and $-v \in -\theta(u+U_0)= =\theta(-u+U_0)$, and it follows that $(-u, -v) \in G$. Thus G is an abelian group.

Now suppose $n(u, v)=(nu, nv)=(0, 0)$ where n is a positive integer. Since $u \in U, v \in V$, and U and V are torsion-free, this implies $u=0$ and $v=0$. Hence G is torsion-free.

Since $U_0 \neq 0$, $V_0 \neq 0$ (each having rank 1), there exists $u_0 \neq 0$ in U_0 and $v_0 \neq 0$ in V_0. Then $(u_0, 0) \in G$ since $0 \in \theta(u_0+U_0)=\theta(U_0)=V_0$. Similarly, $(0, v_0) \in G$. If $m(u_0, 0)+n(o, v_0)=(mu_0, nv_0)=(0, 0)$ for integers m

and n, then $m = n = 0$ since U_0 and V_0 are torsion-free. Hence the elements $(u_0, 0)$, $(0, v_0)$ are indepedent. For $(u, v) \in G$, there exist integers a, b, c, d such that $au = bu_0$ and $cv = dv_0$ since U and V have rank 1. Then $ac(u, v) = (acu, acv) = (bcu_0, adv_0) = bc(u_0, 0) + ad(0, v_0)$. Thus G has rank 2.

(c) Suppose now that $\varphi\colon U \to U'$ and $\chi\colon V \to V'$ are isomorphisms onto U' and V', respectively. Let $\varphi(U_0) = U_0'$, $\chi(V_0) = V_0'$, and let $\bar{\varphi}$ and $\bar{\chi}$ be the induced maps $\bar{\varphi}\colon U/U_0 \to U'/U_0'$, $\bar{\chi}\colon V/V_0 \to V'/V_0'$. Further let ψ and ψ' be isomorphisms such that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} U/U_0 & \xrightarrow{\psi} & V/V_0 \\ {\scriptstyle\bar{\varphi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\chi}} \\ U'/U_0' & \xrightarrow{\psi'} & V'/V_0'. \end{array}$$

Consider the groups $G = \{X_1, X_2\}$ and $G' = \{X_1', X_2'\}$ such that U, U_0, V, V_0 and U', U_0', V', V_0' belong to X_1, X_2 and X_1', X_2', respectively. The correspondence ω given by $\omega(u, v) = (\varphi(u), \chi(v))$ is a mapping $G \to G'$. For $\varphi(u) \in U'$ and since $v \in \psi(u + U_0)$, $\chi(v) \in \bar{\chi}\psi(u + U_0) = \psi'\bar{\varphi}(u + U_0) = \psi'(\varphi(u) + U_0')$, so that $(\varphi(u), \chi(v)) \in G'$. It is easy to verify that ω is an isomorphism of G onto G' such that $\omega(X_1) = X_1'$ and $\omega(X_2) = X_2'$. Hence G as constructed in (b), is essentially uniquely determined.

IV. Non-commutative rings over G

In this section we find a necessary and sufficient condition that there exist a non-commutative ring over G and determine all such rings.

Let X be an element of a torsion-free abelian group H, and let R_X be the subgroup of R^+ which is naturally isomorphic to the subgroup $\{X\} \subseteq H$, that is, R_X is the set of rational numbers r such that $rX \in H$.

Definition. The *nucleus* D of H is the subgroup of R^+ defined by $D = \bigcap_{X \in H} R_X$. The proof of the main theorem follows easily from several preliminary lemmas.

Lemma 1. *Let $\mathfrak{R}$ be a ring over a torsion-free group G of rank 2. If $\mathfrak{R}$ is non-commutative, then the elements Z and Z^2 are dependent elements of G for every $Z \in \mathfrak{R}$. If $\mathfrak{R}$ is commutative and if $\mathfrak{R}$ contains an element X such that $X^2 \neq 0$, then there exists an element $Z \in R$ such that Z and Z^2 are independent elements of G.*

Proof. Suppose first that $\mathfrak{R}$ is non-commutative and let $Z \in \mathfrak{R}$. If Z and Z^2 were independent, then every element of G could be written $rZ + sZ^2$ for rationals r, s, and this implies that $\mathfrak{R}$ is commutative by (4), Section II.

Now suppose that $\mathfrak{R}$ is commutative and that $\mathfrak{R}$ contains an element X such that $X^2 \neq 0$. Assume that Z and Z^2 are dependent for every $Z \in \mathfrak{R}$. Let X and Y be independent elements of G. Then we have $X^2 = rX$, $Y^2 = sY$, $XY = YX = tX + uY$ for rationals r, s, t, u, where we may assume that $r \neq 0$. We obtain $X^2Y = rXY$ and $X^2Y = tX^2 + uXY = rtX + uXY$. Hence $(r-u)XY = rtX$, and we consider two cases:

Case I: $r = u$. Here $t = 0$ and $XY = YX = uY = rY$. We have $(X+Y)^2 = rX + rY + rY + sY$. By hypothesis, $(X+Y)^2 = a(X+Y)$ for some rational number a. Hence $(r-a)X + (2r+s-a)Y = 0$, and this implies $r = a, r+s = 0$ Similarly $(X-Y)^2 = rX - rY - rY + sY$ and $(X-Y)^2 = b(X-Y)$ yields $r = b, r = s$. Hence $r + s = 2r = 0$, which is a contradiction.

Case II: $r \neq u$. Here $(r-u)XY = rtX$ combined with $(r-u)XY = (r-u)tX + (r-u)uY$ yields $u = 0$. From $Y^2X = sYX$ and $Y^2X = tYX + uY^2 = tYX$, we obtain either $s = t$ in which case $XY = YX = sX$, or $XY = YX = 0$. As in Case I, the computation of $(X+Y)^2$ and $(X-Y)^2$ yields $r = 0$, whichever of the alternatives holds.

Hence in each case, the assumption that Z and Z^2 are dependent for every $Z \in \mathfrak{R}$ leads to a contradiction, and this completes the proof of the lemma.

Lemma 2. *Let $\mathfrak{R}$ be a non-commutative ring over a torsion-free group G of rank 2. Then there exist independent elements $X, Y \in G$ and a rational number $a \neq 0$ in the nucleus D of G such that X and Y satisfy one of the following multiplication tables:*

$$X^2 = aX,\ XY = aY,\ YX = 0,\ Y^2 = 0; \tag{5}$$

$$X^2 = aX,\ XY = 0,\ YX = aY,\ Y^2 = 0. \tag{5'}$$

Proof. By Lemma 1, for every $Z \in G$, the elements Z and Z^2 are dependent elements of G. Let $G = \{X, Y\}$ where X and Y are independent elements of G, let $X^2 = aX$, $Y^2 = bY$, $XY = cX + dY$, $YX = eX + fY$, where a, b, c, d, e, f are rational multipliers. Let $K, L \in \mathfrak{R}$, where $K = mX + nY$ and $L = sX + tY$. By (4), Section II,

$$KL = msX^2 + mtXY + nsYX + ntY^2.$$

If $a = b = 0$, then $KL = mtXY + nsYX$, and $\mathfrak{R}$ would have a trivial commutative multiplication if $XY = YX = 0$. Hence not both $XY = 0$ and $YX = 0$, say $XY \neq 0$. Then $0 = XY^2 = cXY + dY^2 = cXY$ implies $c = 0$, and $0 = X^2Y = dXY$ implies $d = 0$. But then $XY = cX + dY = 0$, which is a contradiction. Similarly $YX \neq 0$ leads to a contradiction.

Hence we may assume not both $a=0$ and $b=0$ and we consider the case $a \neq 0, b=0$. By calculating XY^2, Y^2X, X^2X, and YX^2 we find $c=e=f=0, a=d$. Thus we have

$$X^2=aX, \quad Y^2 \neq 0, \quad XY=aY, \quad YX=0.$$

If $a=0, b \neq 0$, we similarly obtain

$$X^2=0, \quad Y^2=bY, \quad XY=0, \quad YX=bX.$$

Suppose now that $a \neq 0, b \neq 0$. If $XY=0$ then $0=(XY)X=X(YX)= =eX^2+fXY=eX^2$ implies $e=0$, and $0=Y(XY)=(YX)Y=eXY+ +fY^2=fY^2$ implies $f=0$, so that $YX=eX+fY=0$. But with $XY=YX=0$, $\mathfrak{R}$ would be commutative. Hence either $c \neq 0$ or $d \neq 0$. Since $aXY= =X^2Y=X(XY)=cX^2+dXY=acX+dXY$, we have $(a-d)XY=acX$. Now $a=d$ implies $c=0$, and $a \neq d$ implies $d=0$ since otherwise there would be a dependency between X and Y. Thus we have two cases to consider.

Case I: $c=0, d \neq 0$. Then $a=d$ and $XY=aY$

Case II: $c \neq 0, d=0$. Then $bXY=XY^2=(XY)Y=cXY$ implies $b=c$. so that $XY=bX$.

By an analysis similar to the above, we can show that either $YX=bX$ or $YX=aY$. Thus there are two apparent cases where $\mathfrak{R}$ is not commutative.

(i) $$X^2=aX, \quad XY=aY, \quad YX=bX, \quad Y^2=bY$$

(ii) $$X^2=aX, \quad XY=bX, \quad YX=aY, \quad Y^2=bY.$$

Now let $Z=XY-YX$. If (i) holds, then $Z=aY-bX$ and X and Z are independent elements of G such that

(5) $$X^2=aX, \quad XZ=aZ, \quad ZX=0, Z^2=0, \quad a \neq 0.$$

If (ii) holds, $Z=bX-aY$ and we have

(5′) $$X^2=aX, \quad XZ=0, \quad ZX=aZ, \quad Z^2=0.$$

We complete the proof of the lemma by showing that $a \in D$. Let $mX+nZ$ be an arbitrary element of G. Then by (5) $X(mX+nZ)=mX^2+ +nXZ=maX+naZ=a(mX+nZ) \in G$. Hence $a \in D$. Similarly, if (5′) holds, $(mX+nZ)X=maX+naZ=a(mX+nZ) \in G$.

Lemma 3: *Let $\mathfrak{R}$ be a ring over a torsion-free group G of rank 2 such that there exist independent elements $X, Y \in G$ which satisfy (5) or (5′) of Lemma 2, and let U be the group of rank 1 belonging to X. Then $aU \subseteq D$.*

Proof. Let $r \in U$. Then there exists $Z \in G$ such that $Z = rX + sY$. Let $W = eX + fY$ be an arbitrary element of G. Then by (5), $ZW = rfaX + rfaY = arW \in G$. Hence $ar \in D$ for all $r \in U$. Similarly by (5'), $WZ = arW \in G$,

Corollary. *Under the hypotheses of Lemma* 3, *U is isomorphic to D.*

Proof. Since for $a \neq 0$, aU is isomorphic to U, it follows from Lemma 3 that U is isomorphic to a subgroup of D. On the other hand, $D \subseteq R_X = U_0 \subseteq U$, so that D is isomorphic to a subgroup of U. Then by [4; p. 210], U is isomorphic to D.

Theorem 2. *Let G be a torsion-free group of rank* 2. *Then $\mathfrak{R}$ is a non-commutative ring over G if and only if multiplication in G is defined by $XY = \xi(X)Y$ or $XY = \xi(Y)X$, for $X, Y \in G$, where ξ is a non-trivial homomorphism of G into the nucleus D of G.*

Proof. If $\mathfrak{R}$ is a non-commutative ring over G, then by Lemma 2, $G = \{X_1, X_2\}$ where X_1, X_2 satisfy (5) or (5'). Suppose (5) is satisfied. For $rX_1 + sX_2$, $mX_1 + nX_2 \in G$, we have

$$(rX_1 + sX_2)(mX_1 + nX_2) = rmaX_1 + rnaX_2 = ra(mX_1 + nX_2).$$

It follows from Lemma 3 that the mapping $\xi\colon G \to D$ defined by $\xi(rX_1 + sX_2) = ra$ is a non-trivial homomorphism of G into D. Similarly, if (5') is satisfied, $(rX_1 + sX_2)(mX_1 + nX_2) = ma(rX_1 + sX_2) = \xi(mX_1 + nX_2)(rX_1 + sX_2)$.

Conversely if ξ is a non-trivial homomorphism of G into D, then multiplication defined by $XY = \xi(X)Y$ for $X, Y \in G$ is associative and distributive with respect to addition. Since ξ is non-trivial, there exists $K \in G$ such that $\xi(K) \neq 0$. Since G has rank 2, there exists $L \in G$ such that K and L are independent. If $KL = LK$, then $\xi(K)L = \xi(L)K$ which implies $\xi(K) = \xi(L) = 0$, which is a contradiction. Hence the multiplication yields a non-commutative ring $\mathfrak{R}$ over G. An analogous discussion can be given for $XY = \xi(Y)X$.

Corollary 1. *If H is a torsion-free abelian group of arbitrary rank and if ξ is a non-trivial homomorphism of H into the nucleus D of H, then multiplication defined by $XY = \xi(X)Y$ or $XY = \xi(Y)X$, for $X, Y \in H$ yields a (non-zero) ring $\mathfrak{R}$ over H. $\mathfrak{R}$ is non-commutative if and only if the rank of H is greater than one.*

Proof. The fact that the given multiplication is well-defined, associative, and distributive with respect to addition does not depend on the rank of H, and hence follows as in Theorem 2.

If $\mathfrak{R}$ is non-commutative, then H cannot have rank 1, since the only (non-zero) rings over torsion-free groups of rank one are isomorphic to subrings of the field of rational numbers ([2], p. 177). Conversely, if the rank of H is at least 2, the fact that $\mathfrak{R}$ is non-commutative follows from the proof of Theorem 2.

Corollary 2. *A non-commutative ring $\mathfrak{R}$ over a torsion-free group of rank* 2 *contains an ideal $\mathfrak{J}$ such that* (i) $\mathfrak{J}^2 = 0$, *and* (ii) *the additive group $\mathfrak{J}^+$ of $\mathfrak{J}$ has rank* 1. *In particular, $\mathfrak{R}$ contains proper divisors of zero.*

Proof. We note that $\{Y\}$, the pure subgroup of G generated by Y in (5) and (5'), Lemma 2, is an ideal in $\mathfrak{R}$ with the stated properties.

The non-commutative rings $\mathfrak{R}$ over G occur in antiisomorphic pairs, defined by $XY = \xi(X)Y$ and $XY = \xi(Y)X$ in Theorem 2. Thus, to determine the essentially different rings over G, we need only consider those defined by $XY = \xi(X)Y$. We denote such a ring by $(\mathfrak{R}, \xi)$.

Corollary 3. *The ring $(\mathfrak{R}, \xi)$ is isomorphic to the ring $(\mathfrak{R}, \eta)$ if and only if there exists an automorphism φ of G such that $\xi = \eta\varphi$.*

Proof. Let φ be an isomorphism of $(\mathfrak{R},\xi)$ onto $(\mathfrak{R}, \eta)$. Then φ induces an automorphism φ of G. Any automorphism φ of G has the property that if $rX \in G$ for $r \in R$, $X \in G$, then $\varphi\,(rX) = r\varphi(X)$. We have

$$\xi(X)\varphi(Y) = \varphi(XY) = \varphi(X)\varphi(Y) = \eta[\varphi(X)]\varphi(Y)$$

for all $X \in G$. Hence $\xi = \eta\varphi$.

Conversely, if $\xi = \eta\varphi$ for an automorphism φ of G, then it is clear by the above calculation that φ is a ring isomorphism of $(\mathfrak{R}, \xi)$ onto $(\mathfrak{R}, \eta)$.

V. Rings over G without divisors of zero

In this section we consider rings over a torsion-free group G of rank 2 which contain no proper divisors of zero. By Corollary 2 of Theorem 2, such a ring is necessarily commutative. In theorem 3 we characterize those rings $\mathfrak{R}$ over G which contain no proper divisors of zero.

Theorem 3. *Let G be a torsion-free group of rank* 2. *Then $\mathfrak{R}$ is a ring over G without proper divisors of zero if and only if $\mathfrak{R}$ is isomorphic to a subring of a quadratic extension $R(\alpha)$ of R.*

Proof. Let $\mathfrak{R}$ be a ring over G without divisors of zero. Then, as remarked above, $\mathfrak{R}$ is commutative. Hence, by Lemma 1, there exists $X \in G$ such that X and X^2 are independent. Then $X^3 = rX + sX^2$, where $r = r_1/r_2$

and $s=s_1/s_2$. Hence $[r_2, s_2]X$ and $([r_2, s_2]X)^2$ are independent elements of G where $([r_2, s_2]X)^3=[r_2, s_2]^2 r([r_2, s_2]X)+[r_2, s_2]s([r_2, s_2]X)^2$, so that we may assume that X and X^2 are independent elements of G, where $X^3=aX+bX^2$ with a and b integers.

Consider the polynomial x^2-bx-a, and let α and β be its zeros. Then α and β are not rational. For suppose the contrary. Then X^4-bX^3- $-aX^2=0$, and since $\alpha+\beta=b$ and $\alpha\beta=-a$, we have

$$X^4-bX^3-aX^2=(X^2-\alpha X)(X^2-\beta X)=0.$$

Since α and β are integers, and since X and X^2 are independent, $X^2-\alpha X$ and $X^2-\beta X$ are non-zero elements of $\mathfrak{R}$. But this contradicts the hypothesis that $\mathfrak{R}$ has no divisors of zero.

Since α is a zero of x^2-bx-a, we have $\alpha^3=a\alpha+b\alpha^2$. Hence the correspondence $\varphi:\mathfrak{R}\to R(\alpha)$ defined by $mX+nX^2\to m\alpha+n\alpha^2$ is a ring homomorphism. Moreover φ is an isomorphism for $m\alpha+n\alpha^2=0$ implies $(m+nb)\alpha+na=0$, and since α is not rational, this yields $m+nb=0$ and $na=0$. But again since α is not rational, $a\neq 0$. Hence $n=m=0$.

Conversely, any subring of a quadratic extension $R(\alpha)$ of R is an integral domain.

In order to derive a necessary condition for the existence of a ring $\mathfrak{R}$ without zero divisors over the group G, we find additional necessary and sufficient conditions that a ring $\mathfrak{R}$ over G has no zero divisors.

Theorem 4. *Let G be a torsion-free group of rank 2. Then $\mathfrak{R}$ is a ring over G without zero divisors if and only if there exists an element $Y\in\mathfrak{R}$ such that*

(i) *Y and Y^2 are independent;*

(ii) *$Y^3=cY$, where c is a non-square integer.*

Proof. In the proof of Theorem 3, X can be chosen so that $X^3=aX+bX^2$ where $b=2q$ is even (since the element X in the proof of Theorem 3 can be replaced by $2X$). Now $\alpha^2-2q\alpha-a=0$ so that we have

$$(\alpha-q)^2=q^2+a;\ (a\alpha-aq)^2=a^2(q^2+a);$$

$$a\alpha-aq=a\alpha-q(\alpha-q)^2+q^3=a\alpha-q(\alpha^2-2q\alpha) \tag{6}$$
$$=(a+2q)\alpha-q\alpha^2;$$

$$[(a+2q)\alpha-q\alpha^2]^2=(a\alpha-aq)^2=a^2(q^2+a); \tag{7}$$

$$[(a+2q)\alpha-q\alpha^2]^3=a^2(q^2+a)[(a+2q)\alpha-q\alpha^2]. \tag{8}$$

Now let $Y=(a+2q)X-qX^2$. Then $\varphi(Y)=(a+2q)\alpha-q\alpha^2$, where φ is the isomorphism of $\mathfrak{R}$ into $R(\alpha)$ given in Theorem 3. We note first that

Y and Y^2 are independent. For if $eY+fY^2=0$ for integers e and f, we would have $e\varphi(Y)+f\varphi(Y)^2=0$, which by (6) and (7) would yield

$$e(a\alpha-aq)+fa^2(q^2+a)=0.$$

But this implies α is rational unless $e=f=0$.

It is immediate from (8) that $Y^3=a^2(q^2+a)Y$ where $a^2(q^2+a)$ is a non-square integer.

Conversely, suppose that there exists an element $Y\in\mathfrak{R}$ which satisfies (i) and (ii). Assume that $\mathfrak{R}$ has proper divisors of zero, so that there exist non-zero elements $rY+sY^2$ and $uY+vY^2$ such that $(rY+sY^2)(uY+vY^2)=0$. Using (ii), this yields

$$c(rv+su)Y+(ru+svc)Y^2=0.$$

Since Y and Y^2 are independent, we have

$$c(rv+su)=0 \text{ and } ru+svc=0.$$

Since $c\neq 0$ by (ii), and not both r and s are zero, we obtain

$$0=uv-uvc=uv(1-c)$$

which implies (since $c\neq 1$ by (ii)) that $u=0$ or $v=0$. Suppose $u=0$. Then $crv=svc=0$, which implies $r=s=0$, since not both u and v are zero. But this is a contradiction. Similarly, a contradiction is obtained if $v=0$, and this completes the proof of the theorem.

Definition. A torsion-free group H of rank 1 is said to be of *nil type* if the only ring $\mathfrak{R}$ over H is a zero ring.

Let $p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots$ be an enumeration of the primes in their natural order and let k_j be the maximum power of the prime p_j which can occur in the denominator of an element of H. Then we write $H=(k_1, k_2, \ldots, k_j, \ldots)$. It is proved in [2; p. 175] that H is of nil type if and only if there is an infinite number of k_j such that $0<k_j<\infty$.

Theorem 5. *If there exists a ring $\mathfrak{R}$ without zero divisors over the torsion-free group G of rank 2, then G contains independent elements X_1 and X_2 such that the groups of rank 1, $U\supseteq U_0$ and $V\supseteq V_0$, belonging to X_1, X_2 satisfy*

(a) *$U\cong V$ and $U_0\cong V_0$;*

(b) *none of the groups U, U_0, V, V_0 are of nil type.*

Proof. Let X_1 and X_2 be the elements Y and Y^2 satisfying the conditions (i) and (ii) of Theorem 4, and let $U\supseteq U_0$, $V\supseteq V_0$ be the groups of rank 1 belonging to Y, Y^2. Let $Z=rY+sY^2$ be an element of G. Then

$$ZY=rY^2+sY^3=scY+rY^2.$$

Since Z is arbitrary, this implies $cV \subseteq U \subseteq V$, so that U and V are isomorphic [4; p. 210]. It can be shown similarly that $cV_0 \subseteq U_0 \subseteq V_0$ and this completes the proof of (a).

Assume now that U is of nil type. Write $U=(k_1, k_2, \dots, k_j, \dots)$ and $V=(h_1, h_2, \dots, h_j, \dots)$. Since $U \cong V$, there exist infinitely many $j \neq 1$ (i. e. $p_j \neq 2$) such that $0 < k_j = h_j < \infty$ ([2], p. 171). For any such j, $r = 1/p_j^{k_j} \in U$, and consider

$$\begin{aligned}(rY+sY^2)^2 &= r^2Y^2+2rsY^3+s^2Y^4\\ &= 2rscY+(r^2+cs^2)Y^2.\end{aligned}$$

Let $s=m/n$, $(m, n)=1$, and $n=p_j^l k, (p_j, k)=1$. We have

$$\begin{aligned}r^2+cs^2 &= 1/p_j^{2k_j}+\mathrm{c}m^2/p_j^{2l}k^2\\ &= (p_j^{2l}k^2+p_j^{2k_j}m^2c)/p_j^{2k_j+2l}k^2 \in V.\end{aligned}$$

Since $k_j=h_j$, we must have that $p_j^{k_j+2l}$ divides $p_j^{2l}k^2+p_j^{2k_j}m^2c$. If $l<k_j$, then $p_j^{k_j}$ divides $k^2+p_j^{2k_j-2l}m^2c$, which is a contradiction. Therefore $l \geqq k_j > 0$. Since

$$2rsc = 2mc/p_j^{k_j+l}k \in U,$$

p_j^l divides $2mc$. Hence p_j^l divides c. Since this holds for infinitely many primes p_j, $c=0$, which is a contradiction.

To show that V_0 (and consequently U_0) is not of nil type, we observe that the pure subgroup $\{Y^2\}$ is a subring of $\mathfrak{R}$ and hence is an integral domain. Thus V_0, which is isomorphic to $\{Y^2\}$ is not of nil type.

The authors believe that there is a stronger theorem than Theorem 5, namely that if $\mathfrak{R}$ is a ring without zero divisors over G, then G decomposes as a direct sum $U \oplus V$, where $U \cong V$ and V is not of nil type. This latter condition is sufficient for the existence of a ring $\mathfrak{R}$ without zero divisors over G. To prove this, we suppose that $G=U \oplus U$, where $U=(k_1, k_2, \dots, k_j, \dots)$ such that each k_j is either 0 or ∞. Then in the quadratic extension $R(\sqrt{n})$, the set $[a+b\sqrt{n} \mid a, b \in U]$ is a subring of $R(\sqrt{n})$ with additive group $G=U \oplus U$.

In conclusion it should be remarked that a ring over a torsion-free group G can be imbedded as a subring in an algebra over the field R of rational numbers of dimension equal to the rank of G. This is accomplished by imbedding G in the tensor product $G \otimes R$, where G and R are regarded as modules over the integers. Then $G \otimes R$ is a vector space over the field R in a natural way, and for $g \otimes r \in G \otimes R$, $r \neq 0$, $r^{-1}(g \otimes r) = g \otimes 1 \in G$. For G of rank 2, if one computes all algebras of dimension 2 over R, then the possible multiplication tables for independent elements of G are obtained from the multiplication tables for the algebras. By observing which algebras are non-commutative and which do not have zero divisors, one obtains Lemma 2, Theorem 3, and Theorem 4 by this alternate method.

References

[1] R. A. Beaumont, Rings with additive group which is the direct sum of cyclic groups, *Duke Math. Journal*, **15** (1948), 367—369.

[2] R. A. Beaumont—H. S. Zuckerman, A characterization of the subgroups of the additive rationals, *Pacific Journal of Math.*, **1** (1951), 169—177.

[3] L. Fuchs, Ringe und ihre additive Gruppen, *Publicationes Math. Debrecen*, **4** (1956), 488—508.

[4] A. G. Kurosh, *Theory of groups*, Vol. 1 (New York, 1955).

[5] L. Rédei, Über die Ringe mit gegebenem Modul, *Acta Sci. Math.*, **15** (1954), 251—254.

[6] L. Rédei—T. Szele, Die Ringe ersten Ranges, *Acta Sci. Math.*, **12 A** (1950), 18—29.

[7] R. Ree—R. J. Wisner, A note on torsion-free nil groups, *Proceedings Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 6—8.

[8] T. Szele, Zur Theorie der Zeroringe, *Math. Annalen*, **121** (1949), 242—246.

[9] T. Szele, Gruppentheorische Beziehungen bei gewissen Ringkonstruktionen, *Math. Zeitschrift*, **54** (1951), 168—180.

[10] T. Szele, Nilpotent Artinian Rings, *Publicationes Math. Debrecen*, **4** (1955), 71—78.

UNIVERSITY OF WASHINGTON
AND HAVERFORD COLLEGE

(Received October 27, 1958)

Décompositions intégrales des familles spectrales et semi-spectrales en opérateurs qui sortent de l'espace hilbertien

Par CIPRIAN FOIAȘ à Bucarest

Le problème de décomposition des familles spectrales par l'intermédiaire des vecteurs qui ne sont plus dans l'espace hilbertien est assez récent. Ayant comme point de départ le travail de MAUTNER [17], inspiré de la „reduction-theory" de J. VON NEUMANN [19], ce problème s'était développé dans la théorie des équations aux dérivées partielles ([12], [3], [15]). Un autre point de départ est dû à GELFAND et KOSTUTCHENKO ([13], *voir* aussi [14]) qui ont lié cette décomposition d'un plongement continu de l'espace hilbertien dans un espace localement convexe de type spécial. Dans tous ces travaux (*voir* aussi [1], [2], [4], [16], [8]) le support de la famille spectrale est R^1 ou R^2, bien que les conditions imposées ne soient pas identiques. Mais en fait dans tous ces cas on transforme, par un changement de norme (qui s'avère nucléaire) la famille spectrale (qui n'est pas à variation bornée) en une mesure (à valeurs opérateurs ou formes linéaires) qui est à variation bornée (telles mesures viennent d'être étudiées par N. DINCULEANU [6], [7]). Le procédé de dérivation peut alors être remplacé par le théorème de Radon—Nikodym et par conséquent on n'est plus lié des supports R^1 ou R^2; c'est dans ce sens que nous utilisons l'idée initiale de GELFAND et KOSTUTCHENKO. D'autre part, le but principal des travaux antérieurs est la décomposition en fonctions propres (généralisées) des opérateurs différentiels ou aux dérivées partielles, tandis que le but de notre travail est l'étude de ces décompositions dans un cadre général (celui d'une famille spectrale ou semi-spectrale, définie sur un clan borélien quelconque), en liaison à la théorie spectrale dans les espaces hilbertiens.

Ainsi, après avoir donné la représentation intégrale des familles spectrales ou semi-spectrales en opérateurs „propres" qui sortent de l'espace hilbertien (§ 1, § 2) ou en vecteurs „propres" qui ne sont plus des éléments de l'espace hilbertien, on étudie les liaisons entre ces deux représentations (propositions 2. 3, 3. 1 et 4. 2) et entre le rang des opérateurs de décomposition, la multiplicité et l'invariance unitaire de la famille spectrale (propositions 4. 3 et 5. 1). Ces propositions sont très voisines de certains résultats de la „reduction theory" de J. VON NEUMANN ([19] qui, dans ce cas particulier, en résultent) et du travail [1] de W. G. BADE et J. T. SCHWARZ.

La caractéristique de la méthode utilisée, c'est qu'elle permet d'éviter les champs de vecteurs, en utilisant seulement la notion plus simple de fonction à valeurs dans un espace de Banach. Le dernier paragraphe a pour but d'indiquer comment les résultats acquis peuvent être appliqués à l'étude spectrale, au calcul fonctionnel et au problème de l'invariance unitaire d'un opérateur autoadjoint borné.

Les principaux résultats contenus dans les premiers cinq paragraphes ont été énoncés déjà dans [9]. Des résultats du § 6, mentionnons l'étude des vecteurs propres approximatifs d'un opérateur autoadjoint borné (proposition 6. 6) qui nous a été suggérée par M. SZ.-NAGY.

Une application naturelle des résultats de ce travail est la théorie spectrale dans les espaces nucléaires, dont les résultats ont été énoncés dans [10].

Je tiens à cette occasion d'exprimer ma gratitude à M. le professeur BÉLA SZ.-NAGY pour des utiles remarques.

1. Préliminaires sur la représentation intégrale des mesures vectorielles

Soient $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{F}$ deux espaces linéaires normés de type dénombrable, soit $\mathfrak{F}^*$ l'espace conjugué de $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire l'espace de Banach des formes f^* antilinéaires[1]) continues sur $\mathfrak{F}$, et soit $\mathfrak{L}(\mathfrak{E};\mathfrak{F}^*)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus de $\mathfrak{E}$ à $\mathfrak{F}$. Soit $\mathfrak{B}$ un clan borélien des parties d'un ensemble T, soit $\mathbf{m}(\sigma)\in\mathfrak{L}(\mathfrak{E};\mathfrak{F}^*)$ une mesure[2]) sur $\mathfrak{B}$ et soit

$$\nu=\sup\sum_i\|\mathbf{m}(\sigma_i)\|<\infty \tag{1.1}$$

où le supremum est pris pour toutes les familles finies $\{\sigma_i\}\subset\mathfrak{B}$ d'ensembles disjoints; l'hypothèse (1. 1) veut dire que la mesure $\mathbf{m}(\sigma)$ est *à variation bornée.*

Envisageons la „variation totale indéfinie"

$$\nu(\sigma)=\sup\sum_i\|\mathbf{m}(\sigma_i)\|, \tag{1.2}$$

1) C'est-à-dire, vérifiant $\langle f^*|\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\rangle=\bar\lambda_1\langle f^*|f_1\rangle+\bar\lambda_2\langle f^*|f_2\rangle$, où $f_1,f_2\in\mathfrak{F}$ et λ_1,λ_2 sont des nombres complexes.

2) C'est-à-dire, une fonction définie sur $\mathfrak{B}$, à valeurs dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{E};\mathfrak{F}^*)$, telle que $\mathbf{m}(\bigcup_n\sigma_n)=\sum_n\mathbf{m}(\sigma_n)$ pour toute suite $\{\sigma_n\}\subset\mathfrak{B}$ d'ensembles disjoints.

le supremum étant pris pour toutes les partitions finies $\{\sigma_i\} \subset \mathfrak{B}$ de σ $(\sigma \in \mathfrak{B})$. On vérifie sans peine que $\nu(\sigma)$ est une mesure positive bornée sur $\mathfrak{B}$, que toute fonction $\varphi(t) \in L^1_\nu$ est aussi intégrable par rapport à la mesure $\langle \mathbf{m}(\sigma)e|f\rangle$ $(e \in \mathfrak{E},\ f \in \mathfrak{F})$ et que

$$(1.3) \qquad \left|\int_T \varphi(t)d\langle \mathbf{m}(t)e|f\rangle\right| \leqq \|e\|\,\|f\| \int_T |\varphi(t)|\,d\nu(t).$$

P r o p o s i t i o n 1. 1.[3]) *Il existe une fonction $\chi_0(t)$ définie sur T à valeurs dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{E};\mathfrak{F}^*)$, univoquement déterminée ν-pp,*[4]) *telle que*

$$(1.4) \qquad \langle \mathbf{m}(\sigma)e|f\rangle = \int_\sigma \langle \chi_0(t)e|f\rangle d\nu(t),$$

pour tout $e \in \mathfrak{E}$, $f \in \mathfrak{F}$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. De plus $\|\chi_0(t)\| = 1$ ν-pp.

D é m o n s t r a t i o n. L'inégalité (1.3) nous montre d'abord que toute mesure numérique $\langle \mathbf{m}(\sigma)e|f\rangle$ est absolument continue par rapport à $\nu(\sigma)$. D'après le théorème de Radon—Nikodym il existe une fonction $\chi_{e,f}(t)$ ν-intégrable, déterminée ν-pp, telle que

$$(1.5) \qquad \langle \mathbf{m}(\sigma)e|f\rangle = \int_\sigma \chi_{e,f}(t)d\nu(t) \qquad (\sigma \in \mathfrak{B}).$$

Soit $\omega_\varepsilon^+ = \{t : |\chi_{e,f}(t)| \geqq \|e\|\,\|f\| + \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$. Alors, en posant $\varphi(t) = \overline{\chi_{e,f}(t)}\varphi_{\omega_\varepsilon^+}(t)$[5]) dans (1.3) nous obtenons

$$(\|e\|\,\|f\| + \varepsilon) \int_{\omega_\varepsilon^+} |\chi_{e,f}(t)|\,d\nu(t) \leqq \int_{\omega_\varepsilon^+} |\chi_{e,f}(t)|^2 d\nu(t) \leqq \|e\|\,\|f\| \int_{\omega_\varepsilon^+} |\chi_{e,f}(t)|\,d\nu(t),$$

ce qui n'est possible que si $\nu(\omega_\varepsilon^+) = 0$. Il résulte que $|\chi_{e,f}(t)| \leqq \|e\| \cdot \|f\|$ ν-pp. En posant $\chi_{e,f}(t) = 0$ sur l'ensemble exceptionnel, nous pouvons donc supposer

$$(1.6) \qquad |\chi_{e,f}(t)| \leqq \|e\|\,\|f\| \qquad (e \in \mathfrak{E};\ f \in \mathfrak{F};\ t \in T).$$

Soient $\mathfrak{E}_0$ (resp. $\mathfrak{F}_0$) l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels complexes d'une partie dénombrable partout dense dans $\mathfrak{E}$ (resp. $\mathfrak{F}$) Pour $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ rationnels complexes, $e_1, e_2 \in \mathfrak{E}_0$ et $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}_0$, on a

$$(1.7) \quad \chi_{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,\, \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2}(t) = \lambda_1\bar\mu_1\chi_{e_1, f_1}(t) + \lambda_1\bar\mu_2\chi_{e_1, f_2}(t) + \lambda_2\bar\mu_1\chi_{e_2, f_1}(t) + \lambda_2\bar\mu_2\chi_{e_2, f_2}(t)$$

quel que soit t en dehors d'un ensemble $N(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2; e_1, e_2; f_1, f_2)$ de ν-

[3]) Dans le cas où $\mathfrak{F}^*$ est de type dénombrable, cette proposition a été obtenue antérieurement par N. Dinculeanu [7] comme conséquence d'un théorème général [5].

[4]) C'est-à-dire, presque partout par rapport à la mesure $\nu(\sigma)$.

[5]) Pour un ensemble $\omega \subset T$, φ_ω désigne la fonction caractéristique de ω.

mesure nulle. Soit $N = \bigcup N(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2; e_1, e_2; f_1, f_2)$; la réunion étant dénombrable on a aussi $\nu(N)=0$. Pour $t \notin N$ la relation (1.7) est toujours vraie. En vertu de (1.6), cette relation se prolonge par continuité sur tout $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{F}$. Par conséquent, pour tout $t \notin N$ il existe un opérateur $\chi_0(t) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{E}; \mathfrak{F}^*)$ tel que $\langle \chi_0(t) e | f \rangle = \chi_{e,f}(t)$, quels que soient $e \in \mathfrak{E}_0$ et $f \in \mathfrak{F}_0$. En posant $\chi_0(t)=0$ pour $t \in N$, $\chi_0(t)$ est définie sur tout T et en vertu de (1.5), $\chi_0(t)$ vérifie la relation (1.4) pour tous $e \in \mathfrak{E}_0$ et $f \in \mathfrak{F}_0$. De (1.6) il résulte que $\|\chi_0(t)\| \leqq 1$ pour tout $t \in T$. En utilisant maintenant le fait que $\mathfrak{E}_0$ et $\mathfrak{F}_0$ sont denses dans $\mathfrak{E}$ et dans $\mathfrak{F}$, on déduit par continuité (en faisant usage du théorème de Lebesgue) que (1.4) reste vraie pour tous $e \in \mathfrak{E}$ et $f \in \mathfrak{F}$. Soit maintenant $\omega_\varepsilon^- = \{t\colon \|\chi_0(t)\| \leqq 1-\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$. Comme $\|\chi_0(t)\| = \sup |\langle \chi_0(t) e | f \rangle|$, le supremum étant pris pour $e \in \mathfrak{E}_0$ et $f \in \mathfrak{F}_0$, il résulte que $\|\chi_0(t)\|$ est ν-mesurable donc $\omega_\varepsilon^- \in \mathfrak{B}$. Soit $\{\sigma_i\} \subset \mathfrak{B}$ une partition finie de ω_ε^-. Nous avons alors

$$\sum_i \|\mathbf{m}(\sigma_i)\| \leqq \sum_i \int_{\sigma_i} \|\chi_0(t)\| d\nu(t) = \int_{\omega_\varepsilon^-} \|\chi_0(t)\| d\nu(t) \leqq (1-\varepsilon)\nu(\omega_\varepsilon^-);$$

d'après la définition (1.2) il résulte $\nu(\omega_\varepsilon^-) \leqq (1-\varepsilon)\nu(\omega_\varepsilon^-)$, ce qui entraîne $\nu(\omega_\varepsilon^-)=0$. Donc $\|\chi_0(t)\|=1$ ν-pp.

Soit maintenant $\chi_1(t)$ une autre fonction vérifiant (1.4). Comme les fonctions $\chi_{e,f}(t)$ sont univoquement déterminées ν-pp, on obtient que, en dehors d'un ensemble N_1 de ν-mesure nulle, $\langle \chi_0(t) e | f \rangle = \langle \chi_1(t) e | f \rangle$ pour tout $e \in \mathfrak{E}_0$ et $f \in \mathfrak{F}_0$. On déduit par continuité que $\chi_1(t) = \chi_0(t)$ pour tout $t \notin N_1$. La proposition 1.1 est ainsi entièrement démontrée.

Envisageons maintenant une mesure positive quelconque $\mu(\sigma)$ sur $\mathfrak{B}$, σ-finie[6]), telle que $\mathbf{m}(\sigma)$ soit absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$.[7])

En vertu de la définition (1,2), $\nu(\sigma)$ est aussi absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$. D'après le théorème de Radon—Nikodym il existe une fonction $\nu(t)$, μ-intégrable, telle que

$$\nu(\sigma) = \int_\sigma \nu(t) d\mu(t) \qquad (\sigma \in \mathfrak{B}). \tag{1.8}$$

Posons $\chi(t) = \nu(t)\chi_0(t)$. De (1.4) et (1.8) on déduit

$$\langle \mathbf{m}(\sigma) e | f \rangle = \int_\sigma \langle \chi(t) e | f \rangle d\mu(t) \tag{1.9}$$

pour tout $e \in \mathfrak{E}$, $f \in \mathfrak{F}$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. L'unicité μ-pp de la fonction $\chi(t) [\in \mathfrak{L}(\mathfrak{E}; \mathfrak{F}^*)]$ résulte par la même voie que celle de $\chi_0(t)$. C'est sous cette forme généralisée que nous utiliserons la proposition 1.1 dans ce travail. Pour cela, il est

[6]) C'est-à-dire $T = \bigcup_n T_n$ où $\mu(T_n) < \infty$.

[7]) C'est-à-dire telle que $\mu(\sigma)=0$ entraîne $\mathbf{m}(\sigma)=0$.

utile de remarquer que $\|\chi(t)\|=\nu(t)\|\chi_0(t)\|=\nu(t)$ μ-pp et que par conséquent (1.8) devient

$$\nu(\sigma)=\int_\sigma \|\chi(t)\|d\mu(t) \qquad (\sigma\in\mathfrak{B}). \tag{1.10}$$

Considérons maintenant un cas particulier que nous utiliserons dans la suite. Soit $\mathbf{m}(\sigma)\in\mathfrak{E}^*$ une mesure à variation bornée absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$. En remarquant que $\mathfrak{E}^*=\mathfrak{L}(\mathfrak{E};C^*)$, où C est le champ des nombres complexes, nous pouvons appliquer la proposition 1.1 (sous sa forme généralisée). Par conséquent, il existe une fonction $\chi(t)\in\mathfrak{E}^*$, univoquement déterminée μ-pp, telle que

$$\langle\mathbf{m}(\sigma)|e\rangle=\int_\sigma\langle\chi(t)|e\rangle d\mu(t) \tag{1.11}$$

pour tout $e\in\mathfrak{E}$ et $\sigma\in\mathfrak{B}$.

2. La décomposition intégrale des familles spectrales ou semi-spectrales par l'intermédiaire des plongements nucléaires

Soit H un espace hilbertien, soit $(e|f)$ son produit scalaire, $\|e\|=\sqrt{(e|e)}$ sa norme, et soit $E(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ une famille semi-spectrale dans H[8]) Soit p un plongement nucléaire de $\mathfrak{E}$ dans H, c'est-à-dire un opérateur de $\mathfrak{E}$ dans H, tel que pour tout $e\in\mathfrak{E}$ on ait

$$pe=\sum_n\overline{\langle e_n^*|e\rangle}h_n \tag{2.1}$$

ou $\{h_n\}\subset H$, $\{e_n^*\}\subset\mathfrak{E}^*$ et

$$u=\sum_n\|e_n^*\|_1\|h_n\|<\infty.\text{[9])} \tag{2.2}$$

Soit p^* l'adjoint de p.[10])

P r o p o s i t i o n 2.1. *Quel que soit $h\in H$ fixé, la fonction d'ensemble $p^*E(\sigma)h\in\mathfrak{E}^*$ est une mesure à variation bornée.*

P r o p o s i t i o n 2.2. *La fonction d'ensemble $p^*E(\sigma)p\in\mathfrak{L}(\mathfrak{E};\mathfrak{E}^*)$ est une mesure à variation bornée.*

---

[8]) C'est-à-dire une application de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{L}(H;H)$, telle que, pour tout $\sigma\in\mathfrak{B}$, $E(\sigma)$ est un opérateur symétrique, $O\leqq E(\sigma)\leqq I$, et $(E(\sigma)h|g)$ est une mesure (numérique) sur $\mathfrak{B}$ pour tout $h,g\in H$. Si de plus $E(\sigma_1\cap\sigma_2)=E(\sigma_1)E(\sigma_2)$, la famille est dite *spectrale*. ($\mathfrak{B}$ est, comme plus haut, un clan borélien de parties d'un ensemble T.)

[9]) Pour distinguer les normes en $\mathfrak{E}$ de celles en H, nous désignons les premières par $\|\cdot\|_1$.

[10]) C'est-à-dire l'opérateur de H dans $\mathfrak{E}^*$, défini par $\langle p^*h|e\rangle=(h|pe)$ pour tout $h\in H$, $e\in\mathfrak{E}$.

Démonstration. Remarquons d'abord que si $\{\sigma_i\}\subset\mathfrak{B}$ est une famille finie d'ensembles disjoints et $\sigma=\bigcup_i\sigma_i$, alors pour tout $g,h\in H$ on a

$$(\sum_i|(E(\sigma_i)g|h)|)^2\leqq(E(\sigma)g|g)(E(\sigma)h|h). \tag{2.3}$$

En effet, on a $|(E(\sigma_i)g|h)|\leqq\sqrt{(E(\sigma_i)g|g)}\sqrt{(E(\sigma_i)h|h)}$, inégalité de Schwarz attachée à la forme hermitienne $(E(\sigma_i)e|e)\geqq0$; la relation (2.3) en résulte par l'inégalité de Cauchy $(\sum_i a_ib_i)^2\leqq\sum_i a_i^2\sum_i b_i^2$.

Montrons maintenant que $p^*E(\sigma)h\in\mathscr{E}^*$ est à variation bornée. Pour $e\in\mathscr{E}$ nous avons

$$\langle p^*E(\sigma)h|e\rangle=(E(\sigma)h|pe)=\sum_n\langle e_n^*|e\rangle(E(\sigma)h|h_n), \tag{2.4}$$

d'où

$$\|p^*E(\sigma)h\|_1\leqq\sum_n\|e_n^*\|_1|(E(\sigma)h|h_n)|.$$

De cette relation et de (2.3) il résulte

$$\sum_i\|p^*E(\sigma_i)h\|_1\leqq\sqrt{(E(\sigma)h|h)}\sum_n\|e_n^*\|_1\sqrt{(E(\sigma)h_n|h_n)}. \tag{2.5}$$

Mais on a $\|E(\sigma)\|\leqq1$, donc en tenant compte de (2.2) nous obtenons

$$\sum_i\|p^*E(\sigma_i)h\|_1\leqq\|h\|\sum_i\|e_n^*\|_1\|h_n\|=\|h\|u<\infty.$$

De cette manière, $p^*E(\sigma)h\in\mathscr{E}^*$ est à variation bornée.

De ce résultat il s'ensuit aisément que, pour toute suite infinie $\{\sigma_n\}$ d'ensembles disjoints $\sigma_n\in\mathfrak{B}$, la série $\sum_n p^*E(\sigma_n)h$ converge (en $\mathscr{E}^*$). L'additivité dénombrable de $p^*E(\sigma)h\in\mathscr{E}^*$ en résulte vu que $\langle p^*E(\sigma)h|e\rangle=(E(\sigma)h|pe)$ est dénombrablement additive pour tout $e\in\mathscr{E}$; cela achève la démonstration de la proposition 2.1.

Quant à la proposition 2.2, remarquons d'abord que par (2.1) nous avons pour $e,f\in\mathscr{E}$

$$\langle p^*E(\sigma)pe|f\rangle=(E(\sigma)pe|pf)=\sum_n\sum_m\overline{\langle e_n^*|e\rangle}\langle e_m^*|f\rangle(E(\sigma)h_n|h_m),$$

d'où il s'ensuit que

$$\|p^*E(\sigma)p\|_1\leqq\sum_{n,m}\|e_n^*\|_1\|e_m^*\|_1|(E(\sigma)h_n|h_m)|.$$

En faisant de nouveau usage de (2.3) on obtient

$$\sum_i\|p^*E(\sigma_i)p\|_1\leqq\sum_{n,m}\|e_n^*\|_1\|e_m^*\|_1\sqrt{(E(\sigma)h_n|h_n)}\sqrt{(E(\sigma)h_m|h_m)}, \tag{2.6}$$

d'où, en tenant compte de (2.2) il résulte

$$\sum_i\|p^*E(\sigma_i)p\|_1\leqq\sum_{n,m}\|e_n^*\|_1\|e_m^*\|_1\|h_n\|\|h_m\|=u^2<\infty;$$

donc la fonction d'ensemble $p^* E(\sigma) p \in \mathfrak{L}(\mathfrak{E}; \mathfrak{E}^*)$ est à variation bornée. Son additivité dénombrable en résulte tout comme dans la démonstration de la proposition 2.1.

La démonstration des propositions 2.1 et 2.2 est ainsi achevée.

Soit $\nu(h; \sigma)$ la variation totale indéfinie de $p^* E(\sigma) h \in \mathfrak{E}^*$. De (2.5) on déduit

$$\nu(h;\sigma) \leqq \sqrt{(E(\sigma)h|h)} \sum_n \|e_n^*\|_1 \sqrt{(E(\sigma)h_n|h_n)} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{(E(\sigma)h|h)} \sqrt{\sum_n \|e_n^*\|_1 \|h_n\|} \sqrt{\sum_n \|e_n^*\|_1 \frac{(E(\sigma)h_n|h_n)}{\|h_n\|}}.$$

On vérifie sans peine que

$$\lambda(\sigma) = \sum_n \|e_n^*\|_1 \frac{(E(\sigma)h_n|h_n)}{\|h_n\|} \tag{2.7}$$

est une mesure positive bornée sur $\mathfrak{B}$. Par conséquent nous avons obtenu l'inégalité suivante

$$\nu(h;\sigma) \leqq \sqrt{u} \sqrt{(E(\sigma)h|h)} \sqrt{\lambda(\sigma)}. \tag{2.8}$$

Soit $\nu(\sigma)$ la variation totale indéfinie de $p^* E(\sigma) p$. De (2.6) on obtient de manière analogue

$$\nu(\sigma) \leqq u \cdot \lambda(\sigma). \tag{2.9}$$

Les inégalités (2.8) et (2.9) nous montrent qu'il existe des mesures numériques positives $\mu(\sigma)$ [par exemple $\lambda(\sigma)$], σ-finies, telles que $\nu(h, \sigma)$ $(h \in H)$ et $\nu(\sigma)$ soient absolument continues par rapport à $\mu(\sigma)$. Soit $\mu(\sigma)$ l'une de ces mesures, qu'on suppose fixée dans tout ce paragraphe.

En vertu des résultats du paragraphe précédent on obtient donc les représentations intégrales

$$\begin{cases} \langle p^* E(\sigma) h | e \rangle = \int_\sigma \langle (\chi h)(t) | e \rangle d\mu(t) & (e \in \mathfrak{E}, h \in H) \\ \langle p^* E(\sigma) p e | f \rangle = \int_\sigma \langle \chi(t) e | f \rangle d\mu(t) & (e, f \in \mathfrak{E}), \end{cases} \tag{2.10}$$

quel que soit $\sigma \in \mathfrak{B}$. Etudions-les de plus près. Pour tout $h \in H$, les fonctions $(\chi h)(t)$ sont univoquement déterminées μ-pp. Le changement des valeurs de ces fonctions sur un ensemble de μ-mesure nulle n'altérant pas (2.10), nous pouvons supposer que

$$\langle \chi(t) e | e \rangle \geqq 0 \quad \textit{pour tout} \quad t \in T \textit{ et } e \in \mathfrak{E}, \tag{2.11}$$

$$(\chi p e)(t) = \chi(t) e \quad \textit{pour tout} \quad t \in T \textit{ et } e \in \mathfrak{E}. \tag{2.12}$$

En effet (2.12) résulte du fait que $\chi(t)e$ est aussi une fonction de décomposition de $p^* E(\sigma) pe$, donc (en vertu de l'unicité de cette fonction) $\chi(t)e = = (\chi pe)(t)$ μ-pp. En changeant les valeurs de $(\chi pe)(t)$ sur l'ensemble exceptionnel on obtient (2. 12). Quant à (2. 11) remarquons que $\langle p^* E(\sigma) pe | e \rangle = = (E(\sigma) pe | pe) \geqq 0$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{B}$ et $e \in \mathfrak{E}$. Il résulte que $\langle \chi(t) e | e \rangle \geqq 0$ pour tout $t \notin N(e)$, où $\mu[N(e)] = 0$. Soit $N = \bigcup_{e \in \mathfrak{E}_0} N(e)$. Alors $\mu(N) = 0$. Nous pouvons donc poser $\chi(t) = 0$ sur N. Alors $\langle \chi(t) e | e \rangle \geqq 0$ pour tout $e \in \mathfrak{E}_0$, quel que soit $t \in T$. Mais $\mathfrak{E}_0$ est dense dans $\mathfrak{E}$; par conséquent (2. 11) résulte par continuité. Une autre propriété évidente des $\chi(t)$ [conséquence immédiate de (2. 11)] est:

(2. 13) $\quad \langle \chi(t) e | f \rangle = \overline{\langle \chi(t) f | e \rangle}$ *pour tout* $t \in T$ *et* $e, f \in \mathfrak{E}$.

Une propriété, moins évidente, des fonctions $(\chi h)(t)$ est formulée par le suivant

Lemme. *Soit* $\{k_n\} \subset H$ *une suite tendant vers* 0 *(dans* H*), telle que chaque mesure* $(E(\sigma) k_n | k_n)$ *soit absolument continue par rapport à* $\mu(\sigma)$. *Il existe alors une suite partielle* $\{k_{n_p}\}$ *telle que* $\{(\chi k_{n_p})(t)\}$ *tend vers* 0 *(dans* $\mathfrak{E}^*$*)* μ-pp.

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$|\langle p^* E(\sigma) h | e \rangle| = |(E(\sigma) h | pe)| \leqq \sqrt{(E(\sigma) h | h)} \sqrt{(E(\sigma) pe | pe)} \leqq$$
$$\leqq \sqrt{(E(\sigma) h | h)} \sqrt{\langle p^* E(\sigma) pe | e \rangle}$$

d'où, par un raisonnement déjà utilisé dans la démonstration des propositions ci-dessus, on obtient que la variation totale indéfinie de $\langle p^* E(\sigma) h | e \rangle$ est majorée par $\sqrt{(E(\sigma) h | h)} \sqrt{\langle p^* E(\sigma) pe | e \rangle}$; donc, en vertu de (2. 10), on a

$$(2.14) \qquad \int_\sigma |\langle (\chi h)(t) | e \rangle| \, d\mu(t) \leqq \sqrt{(E(\sigma) h | h)} \sqrt{\int_\sigma \langle \chi(t) e | e \rangle \, d\mu(t)}$$

quels que soient $e \in \mathfrak{E}$, $h \in H$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. Mais dans notre cas

$$(2.15) \qquad (E(\sigma) k_n | k_n) = \int_\sigma [k_n(t)]^2 \, d\mu(t) \quad \text{où} \quad k_n(t) \geqq 0,$$

pour tous $n = 1, 2, \ldots$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. (2. 14) devient

$$(2.16) \quad \int_\sigma |\langle (\chi k_n)(t) | e \rangle| \, d\mu(t) \leqq \sqrt{\int_\sigma [k_n(t)]^2 \, d\mu(t)} \sqrt{\int_\sigma \langle \chi(t) e | e \rangle \, d\mu(t)}.$$

Soit $\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma) = \{t : |\langle (\chi k_n)(t) | e \rangle| \geqq \alpha, \ k_n(t) \leqq \beta, \ \sqrt{\langle \chi(t) e | e \rangle} \leqq \gamma\}$ où α, β, γ

sont des nombres rationnels, $\beta, \gamma \geqq 0$, $\beta\gamma < \alpha$. Alors

$$\alpha\mu[\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)] \leqq \int\limits_{\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)} |\langle(\chi k_n)(t)|e\rangle| d\mu(t) \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\int\limits_{\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)} |k_n(t)|^2 d\mu(t)} \sqrt{\int\limits_{\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)} \langle\chi(t)e|e\rangle d\mu(t)} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\beta^2\mu[\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)]} \sqrt{\gamma^2\mu[\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)]} = \beta\gamma\mu[\sigma_n(\alpha, \beta, \sigma)],$$

ce qui n'est possible que si $\mu[\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)] = 0$. Comme l'ensemble $N_n(e)$ des points $t \in T$, en lesquels l'inégalité

$$|\langle(\chi k_n)(t)|e\rangle| \leqq k_n(t)\sqrt{\langle\chi(t)e|e\rangle} \tag{2.17}$$

n'est pas vraie, est une réunion dénombrable d'ensembles $\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)$, il résulte que $\mu[N_n(e)] = 0$. Soit $N_n = \bigcup\limits_{e \in \mathfrak{E}_0} N_n(e)$. Alors $\mu(N_n) = 0$ et de (2.17) on déduit

$$\|(\chi k_n)(t)\|_1 \leqq k_n(t)\sqrt{\|\chi(t)\|_1} \tag{2.18}$$

pour tout $t \notin N_n$. Donc, si $t \notin N = \bigcup\limits_n N_n$, où $\mu(N) = 0$, l'inégalité (2.18) est vraie pour tout $n = 1, 2, \ldots$. Soit $\{k_{n_p}\}$ une suite partielle de $\{k_n\}$, telle que $\sum\limits_p \|k_{n_p}\|^2 < \infty$. Alors de (2.15) il résulte

$$\sum_p \int\limits_T [k_{n_p}(t)]^2 d\mu(t) = \sum_p \|k_{n_p}\|^2 < \infty.$$

En vertu du théorème de Beppo Levi, on a $\sum\limits_p |k_{n_p}(t)| < \infty$ μ-pp. Par conséquent, en dehors d'un ensemble N' de μ-mesure nulle, $k_{n_p}(t) \to 0$ pour $p \to \infty$. De (2.18) il résulte qu'en dehors de l'ensemble $N \cup N'$ de μ-mesure nulle on a $\|(\chi k_{n_p})(t)\|_1 \to 0$ pour $p \to \infty$, c. q. f. d.

Désignons par $\mathfrak{H}(\mathfrak{E})$ le sous-espace fermé de H, engendré par les éléments de la forme $E(\sigma)pe$ ($\sigma \in \mathfrak{B}$, $e \in \mathfrak{E}$). Soit $\varkappa$ la projection (orthogonale) de H sur $\mathfrak{H}(\mathfrak{E})$. Alors

$$\langle p^* E(\sigma)h|e\rangle = (E(\sigma)h|pe) = (\varkappa h|E(\sigma)pe) = (E(\sigma)\varkappa h|pe) = \langle p^* E(\sigma)\varkappa h|e\rangle$$

pour tout $h \in H$ et $e \in \mathfrak{E}$. Par conséquent, dans $\mathfrak{E}^*$ on a

$$p^* E(\sigma)h = p^* E(\sigma)\varkappa h \qquad (h \in H,\ \sigma \in \mathfrak{B}). \tag{2.19}$$

Il en résulte

$$(\chi h)(t) = (\chi\varkappa h)(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \in T \textit{ et } h \in H. \tag{2.20}$$

Soit $\mathfrak{E}(t)$ l'adhérence de $\chi(t)\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{E}^*$.

P r o p o s i t i o n 2.3. *Si $E(\sigma)$ est une famille spectrale, pour tout $h \in H$ on a $(\chi h)(t) \in \mathscr{E}(t)$ μ-pp.*

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de (2.20) il suffit de considérer $h \in \mathscr{H}(\mathscr{E})$. Considérons d'abord

$$h = \sum_i \lambda_i E(\sigma_i) p e_i \qquad (\{\sigma_i\} \subset \mathscr{B}, \{e_i\} \subset \mathscr{E}). \tag{2.21}$$

Posons $h(t) = \sum_i \lambda_i \varphi_{\sigma_i}(t) e_i \in \mathscr{E}$. On vérifie alors sans peine [en utilisant (2.10)] l'égalité suivante

$$\langle p^* E(\sigma) h | e \rangle = \int_\sigma \langle \chi(t) h(t) | e \rangle \, d\mu(t) \qquad (e \in \mathscr{E}, \sigma \in \mathscr{B}).$$

Il résulte que $(\chi h)(t) = \chi(t) h(t)$ μ-pp, donc dans ce cas $(\chi h)(t) \in \mathscr{E}(t)$ μ-pp. Soit $\{k_n\}$ une suite d'éléments de la forme (2.21) tendant vers $h \in \mathscr{H}(\mathscr{E})$ arbitraire. En dehors d'un ensemble N de μ-mesure nulle nous avons

$$(\chi(h - k_n))(t) = (\chi h)(t) - (\chi k_n)(t) \text{ et } (\chi k_n)(t) \in \mathscr{E}(t) \text{ pour tout } n. \tag{2.22}$$

Nous pouvons appliquer à la suite $\{h - k_n\}$ le lemme précédent.[11]) Nous obtenons une suite partielle $\{k_{n_p}\}$ telle que $(\chi(h - k_{n_p}))(t) \to 0$ en dehors d'un ensemble N' de μ-mesure nulle. De (2.20) il résulte que $(\chi h)(t) \in \mathscr{E}(t)$ pour tout $t \notin N \cup N'$, c. q. f. d.

Soit $\mathscr{E}'$ un autre espace normé et soit p' un plongement nucléaire de $\mathscr{E}'$ dans H, tel que $\mathscr{H}(\mathscr{E}) = \mathscr{H}(\mathscr{E}')$. Soient $\chi'(t) \in \mathfrak{L}(\mathscr{E}'; \mathscr{E}'^*)$ et $(\chi' h)(t) \in \mathscr{E}'^*$ $(h \in H)$ les fonctions données par les représentations intégrales

$$\langle p'^* E(\sigma) h | e' \rangle = \int_\sigma \langle (\chi' h)(t) | e' \rangle d\mu(t) \qquad (e' \in \mathscr{E}', \sigma \in \mathscr{B}),$$

$$\langle p'^* E(\sigma) p' e' | f' \rangle = \int_\sigma \langle (\chi')(t) e' | f' \rangle d\mu(t) \qquad (e', f' \in \mathscr{E}', \sigma \in \mathscr{B}).$$

Soit $\mathscr{E}'(t)$ l'adhérence de $\chi'(t)\mathscr{E}'$ dans $\mathscr{E}'^*$.

P r o p o s i t i o n 2.4. *Si $E(\sigma)$ est une famille spectrale, alors $\mathscr{E}(t)$ et $\mathscr{E}'(t)$ ont la même dimension μ-pp.*

D é m o n s t r a t i o n. Remarquons d'abord qu'en répétant les calculs faits dans la démonstration des propositions 2.1 et 2.2, on obtient aisément

---

[11]) En effet, $(E(\sigma)h|h)$ est absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$, quel que soit $h \in \mathscr{H}(\mathscr{E})$. Pour montrer cela, remarquons que pour un h de la forme (2.21) nous avons [vu que $E(\sigma)$ est une famille spectrale]

$$(E(\sigma)h|h) = \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle p^* E(\sigma \cap \sigma_i \cap \sigma_j) p e_i | e_j \rangle.$$

Il résulte que $\mu(\sigma) = 0$ entraîne $(E(\sigma)h|h) = 0$ aussi. Comme les h de la forme (2.21) engendrent un ensemble dense dans $\mathscr{H}(\mathscr{E})$, $\mu(\sigma) = 0$ entraîne $(E(\sigma)h|h) = 0$ pour tout $h \in \mathscr{H}(\mathscr{E})$.

que $p^* E(\sigma)p' \in \mathfrak{L}(\mathscr{E}'; \mathscr{E}^*)$ est une mesure à variation bornée, absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$. Soit $\Phi(t) \in \mathfrak{L}(\mathscr{E}'; \mathscr{E}^*)$ la fonction définie sur T, donnée (en vertu de la proposition 1.1) par la représentation intégrale

$$(2.23) \qquad \langle p^* E(\sigma)p'e' | f \rangle = \int_\sigma \langle \Phi(t)e' | f \rangle d\mu(t),$$

où $e' \in \mathscr{E}'$, $f \in \mathscr{E}$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. En comparant (2.23) à (2.10) on obtient que $\Phi(t)e' = (\chi p'e')(t)$ μ-pp. Soit $\mathscr{E}'_0 \subset \mathscr{E}'$ le correspondant de $\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}$. On a alors

$$(2.24) \qquad \Phi(t)e' = (\chi p'e')(t) \quad \text{pour tout} \quad e' \in \mathscr{E}'_0,$$

quel que soit $t \notin N'$, où $\mu(N') = 0$. En utilisant la proposition 2.3, on déduit que

$$(2.25) \qquad \Phi(t)\mathscr{E}'_0 \subset \mathscr{E}(t) \quad \text{pour tout} \quad t \notin N'.$$

D'autre part $\mathscr{E}'_0$ étant dense dans $\mathscr{E}'$, les éléments de la forme $h' = \sum_j \lambda'_j E(\sigma_j)p'e'_j$ $(e'_j \in \mathscr{E}'_0)$ engendrent $\mathscr{H}(\mathscr{E}') = \mathscr{H}(\mathscr{E})$. Par conséquent, en appliquant le lemme antérieur, on obtient en vertu de (2.24) que pour tout $e \in \mathscr{E}$ il existe une suite $\{h_m\}$ [où $h_m = \sum_j \lambda'_{mj} E(\sigma_{mj})p'e'_{mj}$ $(e'_{mj} \in \mathscr{E}'_0)$], telle que

$$\sum_j \lambda'_{mj} \varphi_{\sigma_{mj}}(t) \Phi(t) e'_{mj} = \sum_j \lambda'_{mj} \varphi_{\sigma_{mj}}(t)(\chi p' e'_{mj})(t) =$$
$$= \Big(\chi\Big(\sum_j \lambda'_{mj} E(\sigma_{mj})p'e'_{mj}\Big)\Big)(t) \to (\chi pe)(t) \quad (\text{dans } \mathscr{E}^*),$$

quel que soit $t \notin N(e)$, où $N(e) \supset N'$ est de μ-mesure nulle. La relation (2.12) nous montre que pour $t \notin N(e)$

$$\chi(t)e = (\chi pe)(t) = \lim \sum_j \lambda'_{mj} \varphi_{\sigma_{mj}}(t) \Phi(t) e'_{mj} \in \overline{\Phi(t)\mathscr{E}'_0}.$$

Soit $N = \bigcup_{e \in \mathscr{E}_0} N(e)$; on a $\mu(N) = 0$ et $\chi(t)\mathscr{E}_0 \subset \overline{\Phi(t)\mathscr{E}'_0} = \overline{\Phi(t)\mathscr{E}'}$ pour tout $t \notin N$, d'où $\mathscr{E}(t) \subset \overline{\Phi(t)\mathscr{E}'}$ $(t \notin N \supset N')$. De ce résultat et de (2.25) on obtient que $\mathscr{E}(t) = \overline{\Phi(t)\mathscr{E}'}$ μ-pp.

Soit $\Phi'(t) \in \mathfrak{L}(\mathscr{E}; \mathscr{E}'^*)$ la restriction à $\mathscr{E}$ de l'adjoint de $\Phi(t)$. La dimension de $\overline{\Phi'(t)\mathscr{E}}$ ne peut alors dépasser celle de $\overline{\Phi(t)\mathscr{E}'}$. D'autre part, de (2.23) il résulte

$$\langle p'^* E(\sigma)pe | f' \rangle = \overline{\langle p^* E(\sigma) p' f' | e \rangle} = \int_\sigma \overline{\langle \Phi(t) f' | e \rangle} d\mu(t) = \int_\sigma \langle \Phi'(t) e | f' \rangle d\mu(t),$$

quels que soient $e \in \mathscr{E}$, $f' \in \mathscr{E}'$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. D'après ce que nous avons déjà démontré, il résulte [en changeant $\mathscr{E}$ par $\mathscr{E}'$ et $\Phi(t)$ par $\Phi'(t)$] que $\mathscr{E}'(t) = \overline{\Phi'(t)\mathscr{E}}$ μ-pp. En tenant compte encore une fois de la première partie de la démonstration, nous obtenons

$$\dim \mathscr{E}'(t) = \dim \overline{\Phi'(t)\mathscr{E}} \leqq \dim \overline{\Phi(t)\mathscr{E}'} = \dim \mathscr{E}(t) \quad \mu\text{-pp};$$

d'où, en changeant $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}'$ on en déduit que $\dim \mathcal{E}(t) \leqq \dim \mathcal{E}'(t)$ μ-pp, ce qui achève la démonstration.

Un autre fait utile est formulé pár la

Proposition 2.5. *Soit $h^*(t) \in \mathcal{E}^*$ une fonction définie sur T, telle que pour tout $e \in \mathcal{E}$, $\langle h^*(t) | e \rangle$ est μ-mesurable et*

$$|\langle h^*(t)|e\rangle|^2 \leqq |\varphi(t)|^2 \langle \chi(t)e|e\rangle \tag{2.26}$$

où $\varphi \in L^2_\mu$. Alors, si $E(\sigma)$ est une famille spectrale, il existe un (et un seul) $h^* \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$, tel que $(\chi h^*)(t) = h^*(t)$ μ-pp.

Démonstration. Soit h donné par (2.21). Posons

$$h(t) = \sum_i \lambda_i \varphi_{\sigma_i}(t) e_i \qquad (t \in T) \tag{2.27}$$

et

$$(h) = \int_T \langle h^*(t) | h(t) \rangle d\mu(t).$$

On vérifie sans peine que $h \to (h)$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel [dense dans $\mathcal{H}(\mathcal{E})$] de ces h. De plus, en utilisant (2.26) et (2.27) nous avons

$$|(h)| \leqq \int_T |\langle h^*(t)|h(t)\rangle| d\mu(t) \leqq \int_T |\varphi(t)| \sqrt{\langle \chi(t) h(t) | h(t) \rangle} d\mu(t) \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\int_T |\varphi(t)|^2 d\mu(t)} \sqrt{\int_T \langle \chi(t) h(t) | h(t) \rangle d\mu(t)} =$$

$$= \sqrt{\int_T |\varphi(t)|^2 d\mu(t)} \sqrt{\sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \int_{\sigma_i \cap \sigma_j} \langle \chi(t) e_i | e_j \rangle d\mu(t)} =$$

$$= \sqrt{\int_T |\varphi(t)|^2 d\mu(t)} \sqrt{\sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j (E(\sigma_i \cap \sigma_j) p e_i | p e_j)} =$$

$$= \sqrt{\int_T |\varphi(t)|^2 d\varphi(t)} \sqrt{\left(\sum_i \lambda_i E(\sigma_i) p e_i \Big| \sum_j \lambda_j E(\sigma_j) p e_j\right)} = \|h\| \sqrt{\int_T |\varphi(t)|^2 d\mu(t)}.$$

Par conséquent, la forme linéaire (h) est continue dans $\mathcal{H}(\mathcal{E})$. Il existe un (et un seul) $h^* \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$, tel que $(h^*|h) = (h)$ pour tout h de la forme (2.21). En particulier pour $h = E(\sigma) p e$ nous obtenons

$$\langle p^* E(\sigma) h^* | e \rangle = (E(\sigma) h^* | pe) = (h^* | E(\sigma) pe) = \int_T \langle h^*(t) | \varphi_\sigma(t) e \rangle d\mu(t) =$$

$$= \int_\sigma \langle h^*(t) | e \rangle d\mu(t),$$

quel que soit $e \in \mathcal{E}$ et $\sigma \in \mathcal{B}$. Il résulte $(\chi h^*)(t) = h^*(t)$ μ-pp, c. q. f. d.

De cette démonstration résulte aussi l'inégalité

$$\|h^*\| \leqq \sqrt{\int_T |\varphi(t)|^2 d\mu(t)} \tag{2.28}$$

que nous utiliserons dans la suite.

3. La décomposition intégrale des familles semi-spectrales dans des espaces hilbertiens de type dénombrable

Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien de type dénombrable et soit $E(\sigma)$ $(\sigma \in \mathfrak{B})$ une famille semi-spectrale dans $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ un sous-espace linéaire partout dense dans $\mathcal{H}$, muni d'une nouvelle norme $\|e\|_1$, non nécessairement hilbertienne, telle que le plongement identique p de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{H}$ soit nucléaire. Telle situation est toujours réalisable.[12])

Dans ce cas p^* est biunivoque. En effet si $p^* h = 0$ on a $(h|e) = 0$ pour tout $e \in \mathcal{E}$, donc $h = 0$. Comme de plus $\langle p^* h|e\rangle = (h|pe) = (h|e)$ pour $e \in \mathcal{E}$, $h \in H$, il est légitime d'identifier $p^* h$ avec h. Alors $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^*$ et

$$(h|e) = \langle h|e\rangle \qquad (e \in \mathcal{E}, h \in \mathcal{H}), \tag{3.1}$$

la forme des paranthèses indiquant si h est considéré dans $\mathcal{H}$ ou dans $\mathcal{E}^*$.

La famille $E(\sigma)$ considérée dans $\mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$ est une mesure à variation bornée, car en fait elle est $p^* E(\sigma) p$. Soit $\nu(\sigma)$ la variation totale indéfinie de $E(\sigma) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$. Alors *$\nu(\sigma)$ est équivalente*[13]) *à $E(\sigma)$, considérée dans $\mathfrak{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$.* En effet, $\nu(\sigma) = 0$ entraîne que $E(\sigma) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$ est nul, donc $(E(\sigma)e|f) = 0$ pour tout $e, f \in \mathcal{E}$. Mais $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{H}$, donc $E(\sigma) = 0$ dans $\mathfrak{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$. Inversement, si $E(\sigma) = 0$ dans $\mathfrak{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$, alors $\lambda(\sigma) = 0$ [*voir* (2.7) et (2.9)] donc aussi $\nu(\sigma) = 0$. Cette propriété nous montre que *la classe d'équivalence de la mesure $\nu(\sigma)$ ne dépend pas de $\mathcal{E}$, mais seulement de la famille semi-spectrale $E(\sigma)$ $(\sigma \in \mathfrak{B})$.*

Soit maintenant $\mu(\sigma)$ une mesure positive, σ-finie, telle que la famille $E(\sigma)$ soit absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$. En appliquant les résultats du paragraphe précédent, nous pouvons énoncer les propositions suivantes [*voir* la proposition 1.1 et les relations (2.10), (2.11) et (2.12)][14]):

---

[12]) Par exemple, soit $\{h_n\}$ une base orthogonale complète de $\mathcal{H}$ et soit $\mathcal{E}$ l'espace des combinaisons finies de $\{h_n\}$. Pour un $e = \sum_j \lambda_j h_j \in \mathcal{E}$ posons $\|e\|_1 = \sqrt{\sum_j j^4 |\lambda_j|^2}$. On vérifie sans peine que nos conditions sont remplies. Remarquons que cette nouvelle norme est elle-même hilbertienne.

[13]) C'est-à-dire $E(\sigma) = 0$ dans $\mathfrak{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ si et seulement si $\nu(\sigma) = 0$.

[14]) Pour le cas où $T = R^1$ ou R^2, proposition 3.2 correspond aux décompositions en „vecteurs propres“ de Gelfand et Kostutchenko ([13] et [14]) et de Browder [4]. Proposition 3.1 contient comme cas particulier (choix particulier de la norme $\|\cdot\|_1$, $T = R^1$) la décomposition en „opérateurs propres“ de Katz [16], ou celle de l'auteur ($T = R^1$, *voir* [8]).

Proposition 3. 1. *Il existe une fonction* $\chi(t)\in\mathfrak{L}(\mathfrak{E};\mathfrak{E}^*)$, *univoquement determinée* μ-pp, *telle que*

$$\langle E(\sigma)e|f\rangle=\int_\sigma \langle\chi(t)e|f\rangle d\mu(t) \tag{3.2}$$

pour tout $e, f\in\mathfrak{E}$ *et* $\sigma\in\mathfrak{B}$. *De plus*

$$\langle\chi(t)e|e\rangle\geqq 0 \quad \textit{pour tout} \quad t\in T, e\in\mathfrak{E}, \tag{3.3}$$

et $\|\chi(t)\|_1$ *est* μ-*intégrable.*

Proposition 3. 2. *Pour tout* $h\in\mathcal{H}$ *il existe une fonction* $(\chi h)(t)\in\mathfrak{E}^*$ *définie sur* T, *univoquement déterminée* μ-pp, *telle que*

$$\langle E(\sigma)h|e\rangle=\int_\sigma \langle(\chi h)(t)|e\rangle d\mu(t) \tag{3.4}$$

pour tout $e\in\mathfrak{E}$ *et* $\sigma\in\mathfrak{B}$. *De plus pour* $e\in\mathfrak{E}$ *on a* $(\chi e)(t)=\chi(t)e$.

Dès ce moment nous supposerons toujours que les familles semi-spectrales ou spectrales $E(\sigma)$ *vérifient la condition* $E(T)=I$. La relation (3. 2) donne en particulier

$$\langle e|f\rangle=\int_T \langle\chi(t)e|f\rangle d\mu(t) \tag{3.5}$$

pour tout $e, f\in\mathfrak{E}$ [15]). On a la suivante réciproque de la proposition 3. 1:

Proposition 3. 3. *Soit* $\chi(t)\in\mathfrak{L}(\mathfrak{E};\mathfrak{E}^*)$ *une fonction définie sur* T, *vérifiant* (3. 3) *et* (3. 5). *Il existe une famille semi-spectrale* $E(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ *et une seule, pour laquelle* (3. 2) *soit vraie.*

Démonstration. L'unicité de la famille semi-spectrale $E(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ résulte directement de (3. 2) et du fait que $\mathfrak{E}$ est dense dans $\mathcal{H}$. Il nous reste à démontrer que

$$(e|f)_\sigma=\int_\sigma \langle\chi(t)e|f\rangle d\mu(t) \qquad (e, f\in\mathfrak{E})$$

peut se représenter sous la forme $(E(\sigma)e|f)$, où $O\leqq E(\sigma)\leqq I$. En ce but, remarquons que $(e|f)_\sigma$ est linéaire en $e\in\mathfrak{E}$, antilinéaire en $f\in\mathfrak{E}$ et qu'en vertu de (3. 3) et de (3. 5) elle vérifie

$$0\leqq(e|e)_\sigma\leqq(e|e) \qquad (e\in\mathfrak{E}). \tag{3.6}$$

L'inégalité de Schwarz appliquée à $(e|f)_\sigma$ nous donne $|(e|f)_\sigma|\leqq\|e\|\,\|f\|$. Par conséquent, $(e|f)_\sigma$ peut se prolonger en une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{H}$ qu'on peut représenter par $(E(\sigma)e|f)$ où $E(\sigma)\in\mathfrak{L}(\mathcal{H};\mathcal{H})$. En vertu de (3. 6) on a $O\leqq E(\sigma)\leqq I$, c. q. f. d.

[15]) En fait (3. 5) est une décomposition intégrale faible de l'opérateur de plongement p^*p de $\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{E}^*$, en opérateurs vérifiant (3. 3).

Posons maintenant $\sigma = T$ dans (3.4). Nous voyons que pour tout $h \in \mathcal{H}$ il existe des fonctions $h^*(t) \in \mathcal{E}^*$ [par exemple $h^*(t) = (\chi h)(t)$], définies sur T, telles que

$$\langle h|e\rangle = \int_T \langle h^*(t)|e\rangle d\mu(t) \quad \textit{pour tout} \quad e \in \mathcal{E}. \tag{3.7}$$

Il est naturel de se demander sous quelles conditions peut-on déduire de (3.7) que $h^*(t) = (\chi h)(t)$ μ-pp.

Une réponse à cette question est donnée par la

Proposition 3.4.[16]) *Si la fonction $h^*(t) = h(t)\chi(t)f$, où $h(t)$ est une fonction numérique μ-mesurable et $f \in \mathcal{E}$, vérifie* (3.7) *et*

$$\|h\|^2 = \int_T |h(t)|^2 \langle \chi(t)f|f\rangle d\mu(t), \tag{3.8}$$

on a $(\chi h)(t) = h(t)\chi(t)f$ μ-pp.

Démonstration. Remarquons d'abord que de (3.8) il résulte $h(t)\sqrt{\langle \chi(t)f|f\rangle} \in L^2_\mu$ et que

$$|\langle h^*(t)|e\rangle|^2 \leqq |h(t)|^2 |\langle \chi(t)f|e\rangle|^2 \leqq |h(t)|^2 \langle \chi(t)f|f\rangle \langle \chi(t)e|e\rangle.$$

Considérons maintenant l'extension de NEUMARK $\mathbf{E}(\sigma)$ de $E(\sigma)$ $(\sigma \in \mathfrak{B})$, où $\mathbf{E}(\sigma) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$, $\mathfrak{H} \supset \mathcal{H}$[17]). Alors [en vertu de la proposition 2.5 et de la remarque[17])] il existe un $h^* \in \mathfrak{H}$ tel que $(\chi h^*)(t) = h(t)\chi(t)f$ μ-pp. Pour $e \in \mathcal{E}$ nous avons donc

$$(h^*|e) = \int_T h(t) \langle \chi(t)f|e\rangle d\mu(t) = (h|e),$$

ce qui montre que $Ph^* = h$ (P étant la projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ sur $\mathcal{H}$). D'autre part de (2.28) il résulte

$$\|h^*\| \leqq \sqrt{\int_T |h(t)|^2 \langle \chi(t)f|f\rangle d\mu(t)} = \|h\| = \|Ph^*\|$$

ce qui n'est possible que si $h^* = h$. Par conséquent $(\chi h)(t) = (\chi h^*)(t) = h(t)\chi(t)f$ μ-pp, c. q. f. d.

---

[16]) Pour le cas $T = R^2$, celle-ci se trouve aussi dans [4].

[17]) C'est une famille *spectrale* dans $\mathfrak{H}$ telle que pour tout $h \in \mathcal{H}$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$ on ait $E(\sigma)h = P\mathbf{E}(\sigma)h$, où P est la projection (orthogonale) de $\mathfrak{H}$ sur $\mathcal{H}$; de plus $\mathfrak{H}$ est engendré par les éléments $\mathbf{E}(\sigma)h$ $(h \in \mathcal{H}, \sigma \in \mathfrak{B})$. La structure $\{\mathfrak{H}, E(\sigma), \mathcal{H}\}$ est déterminée à isomorphie près (*voir* [20] et [23]). On voit sans peine que $p^*\mathbf{E}(\sigma)p = E(\sigma) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$, donc les opérateurs de décomposition de $p^*\mathbf{E}(\sigma)p$ et de $E(\sigma)$ sont les mêmes. Tous les résultats du § 2 s'appliquent par conséquent à $\mathbf{E}(\sigma)$. En particulier, les décompositions (2.10), la proposition 2.4 et la remarque [11]), où nous n'avons qu'à observer que $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathcal{E})$ par rapport à $\mathbf{E}(\sigma)$.

4. La représentation des opérateurs $\chi(t)$. Le cas des opérateurs de rang fini

Soit $\mathbf{E}(\sigma)\in\mathfrak{L}(\mathfrak{H};\mathfrak{H})$, $\mathfrak{H}\supset\mathcal{H}$, l'extension de NEUMARK de $E(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ [*voir* la remarque [17])]. Nous commençons nos considérations par une proposition préliminaire. Soit $\mathbf{e}\in\mathfrak{H}$ fixé, soit $\mathfrak{H}_e$ le sous-espace linéaire fermé de $\mathfrak{H}$, engendré par les éléments $\mathbf{E}(\sigma)\mathbf{e}$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ et soit P_e la projection (orthogonale) de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}_e$, qui commute évidemment avec $\mathbf{E}(\sigma)$ pour tout $\sigma\in\mathfrak{B}$. Soit $\mu(\sigma)$ une mesure positive, σ-finie, telle que $E(\sigma)$ soit absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$. On a alors la

Proposition 4.1. *Il existe une fonction* $\mathbf{e}^*(t)\in\mathfrak{E}^*$ *définie sur* T, *univoquement déterminée* μ-pp, *telle que*

$$(P_e\mathbf{E}(\sigma)e|f)=\int_\sigma\overline{\langle\mathbf{e}^*(t)|e\rangle}\langle\mathbf{e}^*(t)|f\rangle d\mu(t) \tag{4.1}$$

pour tout $e,f\in\mathfrak{E}$ *et* $\sigma\in\mathfrak{B}$; *de plus,* $\|\mathbf{e}^*(t)\|_1$ *est* μ*-intégrable et* $\langle\mathbf{e}^*(t)|e\rangle$ *est* μ*-mesurable, quel que soit* $e\in\mathfrak{E}$.

Démonstration. Comme nous l'avons déjà remarqué [*voir* [17])], $\mathbf{E}(\sigma)$ est aussi absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$, et il en est alors de même pour $P_e\mathbf{E}(\sigma)$. Nous pouvons donc appliquer les résultats du § 2. On obtient une fonction $\chi_e(t)\in\mathfrak{L}(\mathfrak{E};\mathfrak{E}^*)$ univoquement déterminée μ-pp, telle que

$$(P_e\mathbf{E}(\sigma)e|f)=\langle p^*P_e\mathbf{E}(\sigma)pe|f\rangle=\int_\sigma\langle\chi_e(t)e|f\rangle d\mu(t) \tag{4.2}$$

pour tout $e,f\in\mathfrak{E}$ et $\sigma\in\mathfrak{B}$. $\mathbf{E}(\sigma)$ étant absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$, il existe une fonction $\mathbf{e}(t)\geqq 0$ telle que $(\mathbf{E}(\sigma)e|e)=\int_\sigma[\mathbf{e}(t)]^2d\mu(t)$ pour tout $\sigma\in\mathfrak{B}$. A tout élément $e=\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)\mathbf{e}$ faisons correspondre la fonction $\psi_e(t)=$ $=\sum_i\lambda_i\varphi_{\sigma_i}(t)\mathbf{e}(t)$. Nous avons

$$\begin{aligned}(e|e')&=(\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)\mathbf{e}|\sum_j\lambda_j'\mathbf{E}(\sigma_j')\mathbf{e})=\sum_{i,j}\lambda_i\overline{\lambda}_j'(\mathbf{E}(\sigma_i\cap\sigma_j')\mathbf{e}|\mathbf{e})=\\&=\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j'\int_{\sigma_i\cap\sigma_j'}[\mathbf{e}(t)]^2d\mu(t)=\int_T[\sum_i\lambda_i\varphi_{\sigma_i}(t)\mathbf{e}(t)]\,\overline{[\sum_j\lambda_j'\varphi_{\sigma_j'}(t)\mathbf{e}(t)]}d\mu(t)=\\&=\int_T\psi_e(t)\overline{\psi_{e'}(t)}d\mu(t).\end{aligned}$$

De cette manière, $e\to\psi_e(t)$ est une application linéaire isométrique d'un ensemble linéaire dense dans $\mathfrak{H}_e$ à valeurs dans L^2_μ. Cette application se prolonge en une application linéaire et isométrique de $\mathfrak{H}_e$ dans L^2_μ. Pour

$e = \sum_i \lambda_i \mathbf{E}(\sigma_i)\mathbf{e}$ nous avons

$$\mathbf{E}(\sigma)e = \sum_i \lambda_i \mathbf{E}(\sigma \cap \sigma_i)\mathbf{e} \longleftrightarrow \sum_i \lambda_i \varphi_{\sigma \cap \sigma_i}(t)\mathbf{e}(t) = \varphi_\sigma(t)\psi_e(t),$$

relation qui reste vraie pour tout $e \in \mathcal{H}_\mathbf{e}$; par conséquent

$$\int_\sigma \langle \chi_\mathbf{e}(t)e|f\rangle d\mu(t) = (P_\mathbf{e}\mathbf{E}(\sigma)e|f) = (\mathbf{E}(\sigma)P_\mathbf{e}e|P_\mathbf{e}f) =$$

$$= \int_T \varphi_{\mathbf{E}(\sigma)P_\mathbf{e}e}(t)\overline{\psi_{P_\mathbf{e}f}(t)}\,d\mu(t) = \int_\sigma \psi_{P_\mathbf{e}e}(t)\overline{\psi_{P_\mathbf{e}f}(t)}\,d\mu(t)$$

pour tout $e, f \in \mathcal{E}$; $\sigma \in \mathcal{B}$. Il résulte qu'en dehors d'un ensemble $N(e,f)$ de μ-mesure nulle on a

$$\langle \chi_\mathbf{e}(t)e|f\rangle = \psi_{P_\mathbf{e}e}(t)\,\overline{\psi_{P_\mathbf{e}f}(t)}. \tag{4.3}$$

Soit $N = \bigcup_{e,f \in \mathcal{E}_0} N(e,f)$; N est aussi de μ-mesure nulle. (4.3) est vérifiée pour tout $e, f \in \mathcal{E}_0$ et $t \notin N$. Pour tel t nous avons

$$|\psi_{P_\mathbf{e}e}(t)|^2 \leqq \langle \chi_\mathbf{e}(t)e|e\rangle \leqq \|\chi_\mathbf{e}(t)\|_1 \|e\|_1^2$$

pour tout $e \in \mathcal{E}$, ce qui montre que l'application $e \to \overline{\psi_{P_\mathbf{e}e}(t)}$ de $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ dans C est continue. Cette application se prolonge univoquement en une forme $\mathbf{e}^*(t)$ antilinéaire continue sur $\mathcal{E}$. En posant $\mathbf{e}^*(t) = 0$ sur N, nous avons $\langle \mathbf{e}^*(t)|e\rangle = \overline{\psi_{P_\mathbf{e}e}(t)}$ $(e \in \mathcal{E})$ et $\|\mathbf{e}^*(t)\|_1^2 = \|\chi_\mathbf{e}(t)\|_1$ μ-pp. On en déduit que $\langle \mathbf{e}^*(t)|e\rangle$ $(e \in \mathcal{E})$ et $\|\mathbf{e}^*(t)\|_1$ appartiennent à L^2_μ. Pour $t \notin N$ il résulte de (4.3) la relation

$$\chi_\mathbf{e}(t)e = \overline{\langle \mathbf{e}^*(t)|e\rangle}\mathbf{e}^*(t) \qquad (e \in \mathcal{E}). \tag{4.4}$$

De cette relation et de (4.2) on obtient (4.1), c. q. f. d.

En ce qui concerne les éléments $\mathbf{e}^*(t)$ remarquons que

$$\mathbf{e}^*(t) \in \mathcal{E}(t) \ \mu\text{-pp} \tag{4.5}$$

où, comme dans le § 2, $\mathcal{E}(t)$ est l'adhérence dans $\mathcal{E}^*$ de $\chi(t)\mathcal{E}$. En effet, soit $Z_\mathbf{e} = \{t \colon \mathbf{e}(t) = 0\}$; alors pour tout $h \in \mathcal{H}_\mathbf{e}$ nous avons $\psi_h(t) = 0$ sur $Z_\mathbf{e} - Z_\mathbf{e}(h)$ où $\mu[Z_\mathbf{e}(h)] = 0$. Soit $Z'_\mathbf{e} = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_0} Z_\mathbf{e}(P_\mathbf{e}e)$. Alors $\mu(Z'_\mathbf{e}) = 0$ et $\langle \mathbf{e}^*(t)|e\rangle = \psi_{P_\mathbf{e}e}(t) = 0$ pour tout $e \in \mathcal{E}_0$ et $t \in Z_\mathbf{e} - Z'_\mathbf{e}$. Il résulte que $\mathbf{e}^*(t) = 0$ sur $Z_\mathbf{e} - Z'_\mathbf{e}$. D'autre part, pour $f \in \mathcal{E}$ nous avons

$$\langle p^*\mathbf{E}(\sigma)\mathbf{e}|f\rangle = (\mathbf{E}(\sigma)\mathbf{e}|f) = (P_\mathbf{e}\mathbf{E}(\sigma)\mathbf{e}|f) = \int_\sigma \psi_\mathbf{e}(t)\,\overline{\psi_{P_\mathbf{e}f}(t)}\,d\mu(t) =$$

$$= \int_\sigma \mathbf{e}(t)\langle \mathbf{e}^*(t)|f\rangle d\mu(t) \qquad (\sigma \in \mathcal{B}).$$

Il en résulte que $(\chi\mathbf{e})(t) = \mathbf{e}(t)\mathbf{e}^*(t)$ en dehors d'un ensemble N' de μ-mesure nulle. (4.5) est évidemment vérifié si $\mathbf{e}^*(t) = 0$. Dans le cas contraire soit $t \notin N' \cup Z'_e$. Alors $\mathbf{e}(t) \neq 0$, d'où en utilisant la proposition 2.3 on déduit

$$\mathbf{e}^*(t) = \frac{(\chi \mathbf{e})(t)}{\mathbf{e}(t)} \in \mathcal{E}(t) \qquad \mu\text{-pp.}$$

Comme $\mu(N' \cup Z'_e) = 0$, la relation (4.5) est complètement démontrée.

Passons maintenant à l'étude des opérateurs $\chi(t)$. Soit $\{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un système d'éléments $\neq 0$ de $\mathcal{K}$, tel que le système $\{P_{\mathbf{e}_\alpha}\}_{\alpha \in A}$ soit formé de projections orthogonales entre elles, et maximum sous cette propriété. Soit $\{k_n\} \subset \mathcal{H}$ une base dénombrable dans $\mathcal{H}$. L'ensemble $A_n = \{\alpha : P_{\mathbf{e}_\alpha} k_n \neq 0\}$ est au plus dénombrable. Soit $A_0 = \bigcup_n A_n$ et $\alpha \in A - A_0$. Alors $P_{\mathbf{e}_\alpha} k_n = 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, donc aussi $P_{\mathbf{e}_\alpha} \mathbf{E}(\sigma) h = \mathbf{E}(\sigma) P_{\mathbf{e}_\alpha} h = 0$ pour tout $h \in \mathcal{H}$ et $\sigma \in \mathcal{B}$. Comme les éléments $\mathbf{E}(\sigma) h$ ($h \in \mathcal{H}$, $\sigma \in \mathcal{B}$) engendrent $\mathcal{K}$, il résulte que $P_{\mathbf{e}_\alpha} = 0$, donc $\mathbf{e}_\alpha = 0$, en contradiction avec l'hypothèse $\mathbf{e}_\alpha \neq 0$ pour tout $\alpha \in A$. Par conséquent $A = A_0$ est dénombrable; nous pouvons choisir $A = N$ l'ensemble des nombres entiers positifs. D'autre part, en utilisant les relations (1.10), (2.9) et (2.7) (dans cet ordre) pour chaque $P_{\mathbf{e}_n} \mathbf{E}(\sigma)$ ($\sigma \in \mathcal{B}$) et $\chi_{\mathbf{e}_n}(t)$ ($t \in T$), nous obtenons les relations

$$\sum_n \int_T \|\mathbf{e}_n^*(t)\|_1^2 d\mu(t) = \sum_n \int_T \|\chi_{\mathbf{e}_n}(t)\|_1 d\mu(t) \leqq \sum_n u \sum_m \|e_m^*\|_1 \frac{(P_{\mathbf{e}_n} h_m | h_m)}{\|h_m\|} =$$

$$= u \sum_n \sum_m \|e_m^*\|_1 \|h_m\| \left\| P_{\mathbf{e}_n} \frac{h_m}{\|h_m\|} \right\|^2 = u \sum_m (\|e_m^*\|_1 \|h_m\|).$$

$$\left(\sum_n \left\| P_{\mathbf{e}_n} \frac{h_m}{\|h_m\|} \right\|^2 \right) = u \sum_m \|e_m^*\|_1 \|h_m\| = u^2,$$

ce qui nous montre (en vertu du théorème de Beppo Levi) que $\sum_n \|\mathbf{e}^*(t)\|_1^2$ *est μ-intégrable,* et que

(4.6) $$\int_T \Big[\sum_n \|\mathbf{e}_n^*(t)\|_1^2\Big] d\mu(t) \leqq u^2.$$

De cette manière, $\sum_n \|\mathbf{e}_n^*(t)\|_1^2 < \infty$ en dehors d'un ensemble de μ-mesure nulle. En utilisant ce fait et (4.5) nous avons [en posant $\mathbf{e}_n^*(t) = 0$ sur un ensemble de μ-mesure nulle]

(4.7) $$\sum_n \|\mathbf{e}_n^*\|_1^2 < \infty \quad \textit{pour tout} \quad t \in T,$$

(4.8) $$\mathbf{e}_n^*(t) \in \mathcal{E}(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \in T \textit{ et } n = 1, 2, \ldots.$$

Soit $\chi_1(t)$ l'opérateur défini par l'application $e \to \sum_n \overline{\langle \mathbf{e}_n^*(t) | e \rangle} \mathbf{e}_n^*(t)$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}^*$. En vertu de (4.7) on a $\chi_1(t) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$. D'autre part, en vertu de la proposition 4. 1, nous avons pour tout $e, f \in \mathfrak{E}$

$$\langle E(\sigma)e|f\rangle = (E(\sigma)e|f) = (\mathbf{E}(\sigma)e|f) = \sum_n (P_{\mathbf{e}_n}\mathbf{E}(\sigma)e|f) =$$
$$= \sum_n \int_\sigma \overline{\langle \mathbf{e}_n^*(t)|e\rangle}\langle \mathbf{e}_n^*(t)|f\rangle d\mu(t) =$$
$$= \int_\sigma [\sum_n \overline{\langle \mathbf{e}_n^*(t)|e\rangle}\langle \mathbf{e}_n^*(t)|f\rangle] d\mu(t) = \int_\sigma \langle \chi_1(t)e|f\rangle d\mu(t),$$

quel que soit $\sigma \in \mathfrak{B}$. D'après la proposition 3. 1, $\chi(t) = \chi_1(t)$ μ-pp. On peut donc supposer que

$$\chi(t)e = \sum_n \overline{\langle \mathbf{e}_n^*(t)|e\rangle}\mathbf{e}_n^*(t) \qquad (e \in \mathfrak{E}), \tag{4.9}$$

quel que soit $t \in T$.

On peut aussi supposer que, *pour tout* n, $\mathbf{e}_n^*(t)$ *est ou bien linéairement indépendant de* $\mathbf{e}_1^*(t), \mathbf{e}_2^*(t), \ldots, \mathbf{e}_{n-1}^*(t)$, *ou bien* $\mathbf{e}_n^*(t) = 0$, *quel que soit* $t \in T$. Il suffit de démontrer que pour tout n cette alternative est vraie en dehors d'un ensemble N_n de μ-mesure nulle, car nous pouvons toujours poser $\mathbf{e}_l^*(t) = 0$ $(l = 1, 2, \ldots)$ sur l'ensemble $\bigcup_n N_n$ de μ-mesure nulle. Soit maintenant $\{k_m\}$ une suite convergeant vers $\mathbf{e}_n$, $k_m = \sum_i \lambda_{mi}\mathbf{E}(\sigma_{mi})e_{mi}$ $(e_{mi} \in \mathfrak{E})$. En appliquant successivement le lemme du § 2, on trouve une suite partielle $\{k_{m_p}\}$ telle que la suite $\{(\chi_{\mathbf{e}_l}k_{m_p})(t)\}$ converge dans $\mathfrak{E}^*$ vers $(\chi_{\mathbf{e}_l}\mathbf{e}_n)(t)$ en dehors d'un ensemble N_n' de μ-mesure nulle, quel que soit $l = 1, 2, \ldots, n$. Soit $k_{m_p}(t) = \sum_i \lambda_{m_p i}\varphi_{\sigma_{m_p i}}(t)e_{m_p i}$, alors (*voir* aussi la démonstration de la proposition 2. 3) nous avons en dehors d'un autre ensemble N_n'' de μ-mesure nulle

$$(\chi_{\mathbf{e}_l}k_{m_p})(t) = \chi_{\mathbf{e}_l}(t)k_{m_p}(t) = \overline{\langle \mathbf{e}_l^*(t)|k_{m_p}(t)\rangle}\mathbf{e}_l^*(t) \quad (l = 1, 2, \ldots, n;\ p = 1, 2, \ldots).$$

Mais $(\chi_{\mathbf{e}_l}\mathbf{e}_n)(t) = 0$ pour $l < n$ et $(\chi_{\mathbf{e}_n}\mathbf{e}_n)(t) = \mathbf{e}_n(t)\mathbf{e}_n^*(t)$, donc pour $p \to \infty$

$$\overline{\langle \mathbf{e}_n^*(t)|h_{m_p}(t)\rangle} \to \mathbf{e}_n(t), \quad \overline{\langle \mathbf{e}_l^*(t)|h_{m_p}(t)\rangle} \to 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{4.10}$$

pour tout $t \in N_n' \cup N_n''$. Soit L l'ensemble des t en lesquels $\mathbf{e}_n^*(t)$ dépend linéairement de $\mathbf{e}_1^*(t), \ldots, \mathbf{e}_{n-1}^*(t)$; soit $t \in L - N_n' \cup N_n'' \cup Z_{\mathbf{e}_n}'$. De $\mathbf{e}_n^*(t) = \sum_{l=1}^{n-1}\lambda_l\mathbf{e}_l^*(t)$ et de (4. 10) il résulte que $\mathbf{e}_n(t) = 0$, donc aussi $\mathbf{e}_n^*(t) = 0$. L'ensemble exceptionnel N_n est donc compris dans $N_n' \cup N_n'' \cup Z_{\mathbf{e}_n}'$ qui est évidemment de μ-mesure nulle, c. q. f. d.

Les relations (4. 9) et (4. 7) montrent que les *opérateurs* $\chi(t)$ *sont nucléaires*. Parmi ces opérateurs les plus simples sont les opérateurs de rang fini.[18]) Soit Ω_n l'ensemble des points $t \in T$ tels que $\chi(t)$ soit de rang fini n

---

[18]) Un opérateur est de rang fini si l'espace de ses valeurs est de dimension finie.

[c'est-à-dire que $\mathscr{E}(t)$ soit de dimension n], $n=0,1,2,\ldots$. De la dernière propriété que nous avons démontrée, il résulte que *pour tout* $t\in\Omega_n$ *il existe exactement* n *éléments* $\mathbf{e}_l^*(t)\neq 0$.

Posons, par définition,

$$(4.11)\qquad e_p^*(t)=\begin{cases}\text{le } p\text{-ième des } \mathbf{e}_l^*(t)\neq 0, \text{ si tel existe,}\\ 0 \text{ dans le cas contraire.}\end{cases}$$

Les relations (4.7), (4.8) et (4.9) se conservent si on remplace $\mathbf{e}_l^*(t)$ par $e_l^*(t)$ $(l=1,2,\ldots)$. Montrons que $\langle e_p^*(t)|e\rangle$ *est* μ*-mesurable pour tout* $e\in\mathscr{E}$ *et* $p=1,2,\ldots$. Pour cela, remarquons d'abord que $\omega_n=\{t\colon \|\mathbf{e}_n^*(t)\|_1\neq 0\}$ est μ-mesurable. Posons $\omega_n^+=\omega_n$ et $\omega_n^-=T-\omega_n$. Soit $n_1<n_2<\cdots<n_p$ un système de nombres entiers positifs et soit $\omega(n_1,n_2,\ldots,n_p)=\bigcap_{l=1}^{n_p}\omega_l^{\pm}$, où le signe „+" est posé seulement pour $n_1,n_2,\ldots,n_p$. Evidemment, $\omega(n_1,n_2,\ldots,n_p)$ est μ-mesurable et

$$e_p^*(t)=\sum_{n_1<n_2<\cdots<n_p}\varphi_{\omega(n_1,n_2,\ldots,n_p)}(t)\,\mathbf{e}_{n_p}^*(t)\qquad (t\in T);$$

notre assertion résulte maintenant du fait que

$$\sum_{n_1<n_2<\cdots<n_p}\varphi_{\omega(n_1,n_2,\ldots,n_p)}(t)\langle\mathbf{e}_{n_p}^*(t)|e\rangle$$

est μ-mesurable pour tout $p=1,2,\ldots$, c. q. f. d.

En résumant, nous avons démontré la

Proposition 4.2. *Il existe une suite* $\{e_n^*(t)\}\subset\mathscr{E}^*$ *de fonctions définies sur* T, *telle que* (i) $e_n^*(t)\in\mathscr{E}(t)$ *pour tout* $t\in T$ *et* n; (ii) $\sum_n\|e_n^*(t)\|_1^2\in L_\mu^1$ *et* $\sum_n\|e_n^*(t)\|_1^2<\infty$ *pour tout* $t\in T$; (iii) *si* $t\in\Omega_k$ *on a* $e_n^*(t)=0$ *pour tout* $n>k$ $(k=0,1,2,\ldots)$; (iv) $\langle e_n^*(t)|e\rangle\in L_\mu^2$ *pour tout* $e\in\mathscr{E}$ *et* n; (v) *dans* $\mathscr{E}^*$ *on a*

$$\chi(t)e=\sum_n\overline{\langle e_n^*(t)|e\rangle}e_n^*(t),$$

pour tout $t\in T$ *et* $e\in\mathscr{E}$.

Dans le cas où Ω_n est vide pour $n\geqq 2$, nous obtenons le corollaire suivant:

Si les opérateurs $\chi(t)\neq 0$ *sont de rang* 1, *il existe une fonction* $e^*(t)\in\mathscr{E}^*$, *définie sur* T, *telle que* $\|e^*(t)\|_1\in L_\mu^2$, $\langle e^*(t)|e\rangle\in L_\mu^2$ *et* $\chi(t)e=\overline{\langle e^*(t)|e\rangle}e^*(t)$, *quel que soit* $e\in\mathscr{E}$.

Complétons la proposition 4.2 par une propriété d'indépendance linéaire des $e_n^*(t)$ $(n=1,2,\ldots)$. Soit $\Omega_\infty=T-\bigcup_{n=0}^{\infty}\Omega_n$ et soit $\{h_n(t)\}$ une suite de fonctions μ-mesurables telles que $\sum_n|h_n(t)|^2\in L_\mu^1$.

P r o p o s i t i o n 4.3. *Dans* Ω_∞, $\sum_n h_n(t)e_n^*(t)=0$ μ-pp *entraîne* $h_n(t)=0$ μ-pp $(n=1,2,\ldots)$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $h'_n(t)=\varphi_{\Omega_\infty}(t)h_n(t)$. Remarquons que si $t\in\Omega_\infty$ nous avons $e_n^*(t)=\mathbf{e}_n^*(t)$ pour tout $n=1,2,\ldots$. Posons $h_n^*(t)=h'_n(t)\mathbf{e}_n^*(t)$. Alors

$$|\langle h_n^*(t)|e\rangle|^2=|h'_n(t)|^2|\langle \mathbf{e}_n^*(t)|e\rangle|^2\leqq|h_n(t)|^2|\langle \mathbf{e}_n^*(t)|e\rangle|^2=|h_n(t)|^2\langle\chi_{\mathbf{e}_n}(t)e|e\rangle.$$

En vertu de la proposition 2.5 et de la proposition 4.1, il existe un $h_n\in\mathcal{H}_{\mathbf{e}_n}$, tel que $(\chi_{\mathbf{e}_n}h_n)(t)=h'_n(t)\mathbf{e}_n^*(t)$. La relation (2.28) nous donne

$$\|h_n\|^2\leqq\int_T|h_n(t)|^2d\mu(t).$$

Les projections $P_{\mathbf{e}_n}$ étant orthogonales entre eux nous avons

$$\left\|\sum_{j=n}^{n+p}h_j\right\|^2=\sum_{j=n}^{n+p}\|h_j\|^2\leqq\sum_{j=n}^{n+p}\int_T|h_n(t)|^2d\mu(t),$$

et comme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_T|h_n(t)|^2d\mu(t)=\int_T\left[\sum_{n=1}^{\infty}|h_n(t)|^2\right]d\mu(t)<\infty,$$

il résulte que la série $\sum_n h_n$ converge dans $\mathcal{H}$. Soit $h^*=\sum_n h_n$. Alors $(\chi h)(t)=\sum_n h'_n(t)e_n^*(t)=0$ μ-pp, ce qui entraîne $h=0$. Mais ceci entraîne à son tour que $h_n=0$ quel que soit $n=1,2,\ldots$; par conséquent $h'_n(t)e_n^*(t)=0$ μ-pp. Comme pour $t\in\Omega_\infty$ on a $e_n^*(t)\neq0$ $(n=1,2,\ldots)$, il résulte que dans Ω_∞ on a $h_n(t)=0$ μ-pp, c. q. f. d.

Un premier problème qui se pose est de déterminer le cas où $T=\bigcup_{k=0}^{n'}\Omega_k$. La réponse à cette question est contenue dans la

P r o p o s i t i o n 4.4. *Les opérateurs* $\chi(t)$ *sont de rang* $\leqq n$ *si et seulement si* $\mathbf{E}(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ *est de multiplicité* $\leqq n$.[19])

D é m o n s t r a t i o n. Supposons d'abord que $\mathbf{E}(\sigma)$ est de multiplicité n au plus. Soient $e_1,e_2,\ldots,e_n$ les éléments correspondants [*voir* la remarque[19])]. Posons $\mathbf{e}_1=e_1$, $\mathbf{e}_2=e_2-P_{\mathbf{e}_1}e_2,\ldots,$ $\mathbf{e}_k=e_k-(P_{\mathbf{e}_1}+P_{\mathbf{e}_2}+\cdots+P_{\mathbf{e}_{k-1}})e_k,\ldots$ $\ldots,\mathbf{e}_n=e_n-(P_{\mathbf{e}_1}+P_{\mathbf{e}_2}+\cdots+P_{\mathbf{e}_{n-1}})e_n$. Alors $\{P_{\mathbf{e}_k}\}_{k=1}^n$ est un système maximum de projections orthogonales entre elles (*voir* les considérations faites après

[19]) La famille spectrale $\mathbf{E}(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ est de multiplicité n s'il existe n éléments $e_1,e_2,\ldots,e_n$, tels que les éléments $\mathbf{E}(\sigma)e_k$ $(k=1,2,\ldots,n;\ \sigma\in\mathfrak{B})$ engendrent $\mathcal{H}$, et si aucun système de moins de n éléments de $\mathcal{H}$ n'a cette propriété.

la proposition 4.1); de cette manière dans (4.9) $\mathbf{e}^*_{n+1}(t)=\mathbf{e}^*_{n+2}(t)=\cdots=0$ pour tout $t\in T$, ce qui montre que les $\chi(t)$ sont de rang n au plus.

Supposons maintenant que les $\chi(t)$ sont de rang n au plus. Alors, en vertu de la proposition 4.2, nous avons

$$\chi(t)e=\sum_{k=1}^{n}\overline{\langle e^*_k(t)\,|\,e\rangle}e^*_k(t),$$

où $\langle e^*_k(t)|e\rangle\in L^2_\mu$ pour tout $e\in\mathfrak{E}$ et $k=1,2,3,\ldots,n$. Soit $\mathfrak{L}$ le sous-espace linéaire fermé de $\sum_1^n\oplus L^2_\mu$, engendré par les systèmes de la forme $\varphi_\sigma\Psi_e=$ $=\{\varphi_\sigma(t)\overline{\langle e^*_1(t)|e\rangle},\ \varphi_\sigma(t)\overline{\langle e^*_2(t)|e\rangle},\ldots,\varphi_\sigma(t)\overline{\langle e^*_n(t)|e\rangle}\}$ où $\sigma\in\mathfrak{B}$ et $e\in\mathfrak{E}$. Comme

$$\begin{aligned}(\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)e_i|\sum_j\lambda'_j\mathbf{E}(\sigma'_j)e'_j)&=\sum_{i,j}\lambda_i\bar\lambda'_j(\mathbf{E}(\sigma_i\cap\sigma'_j)e_i|e'_j)=\\&=\sum_{i,j}\lambda_i\bar\lambda'_j\int_{\sigma_i\cap\sigma_j}\langle\chi(t)e_i|e'_j\rangle d\mu(t)=\\&=\sum_{i,j}\lambda_i\bar\lambda'_j\int_T\varphi_{\sigma_i\cap\sigma'_j}(t)(\sum_k\overline{\langle e^*_k(t)|e_i\rangle}\langle e^*_k(t)|e'_j\rangle)d\mu(t)=\\&=\sum_{i,j}\lambda_i\bar\lambda'_j\Big[\sum_k\int_T\varphi_{\sigma_i}(t)\overline{\langle e^*_k(t)|e_i\rangle}\,\overline{\varphi_{\sigma_j}(t)\overline{\langle e^*_k(t)|e'_j\rangle}}\,d\mu(t)\Big]=\\&=\sum_{i,j}\lambda_i\bar\lambda'_j(\varphi_{\sigma_i}\Psi_{e_i}|\varphi_{\sigma'_j}\Psi_{e'_j})=(\sum_i\lambda_i\varphi_{\sigma_i}\Psi_{e_i}|\sum_j\lambda'_j\varphi_{\sigma'_j}\Psi_{e'_j})\qquad(e_i,e'_j\in\mathfrak{E})\end{aligned}$$

(où les derniers deux produits scalaires sont dans $\sum_1^n\oplus L^2_\mu$), il résulte que

$$h=\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)e_i\to\Psi_h=\sum\lambda_i\varphi_{\sigma_i}\Psi_{e_i}\qquad(e_i\in\mathfrak{E},\ \sigma_i\in\mathfrak{B})$$

est une application linéaire et isométrique d'un ensemble dense de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{L}$, qui se prolonge par continuité en une seule application linéaire et isométrique de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{L}$. D'autre part, pour $h=\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)e_i$ $(e_i\in\mathfrak{E},\ \sigma_i\in\mathfrak{B})$ nous avons

$$\Psi_{\mathbf{E}(\sigma)h}=\Psi_{\Sigma\lambda_i\mathbf{E}(\sigma\cap\sigma_i)e_i}=\sum_i\lambda_i\varphi_{\sigma\cap\sigma_i}\Psi_{e_i}=\varphi_\sigma\Psi_h.$$

Par continuité on en déduit

(4.12) $$\varphi_\sigma\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}\ \text{ et }\ \Psi_{\mathbf{E}(\sigma)h}=\varphi_\sigma\Psi_h\qquad(h\in\mathfrak{H},\ \sigma\in\mathfrak{B}).$$

Remarquons maintenant que la multiplication par φ_σ est une projection orthogonale de $\sum_1^n\oplus L^2_\mu$ et que la famille de ces projections est une famille spectrale dans $\sum_{1}^{n} \oplus L_\mu^2$. En vertu de (4. 12) cette famille permute avec la projection orthogonale Q de $\sum_{1}^{n} \oplus L_\mu^2$ sur $\mathfrak{L}$.

Nous pouvons toujours supposer que $\mu(\sigma)$ est une mesure bornée [car dans le cas contraire on n'aurait qu'à remarquer que $\chi_0(t)$ (*voir* la proposition 1. 1) sont aussi de rang n au plus, et de remplacer la mesure $\mu(\sigma)$ par la variation totale indéfinie $\nu(\sigma)$ de $E(\sigma) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{S}; \mathfrak{S}^*)$, qui est une mesure bornée]. Alors $\Psi_k = \{\delta_{k1} \varphi_T, \ldots, \delta_{kn} \varphi_T\}$, où δ_{ki} est le symbole de Kronecker, appartient à $\sum_{1}^{n} \oplus L_\mu^2$. On vérifie sans peine que les éléments $\varphi_\sigma \Psi_k$ $(\sigma \in \mathfrak{B};$ $k = 1, 2, \ldots, n)$ engendrent $\sum_{1}^{n} \oplus L_\mu^2$ tout entier. Par conséquent, les éléments $\varphi_\sigma(Q \Psi_k) = Q \varphi_\sigma \Psi_k$ $(\sigma \in \mathfrak{B};\ k = 1, 2, \ldots, n)$ engendrent $\mathfrak{L}$. Mais $Q\Psi_k$ appartenant à $\mathfrak{L}$ est de la forme Ψ_{e_k}, où $e_k \in \mathfrak{H}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et $\varphi_\sigma(Q\Psi_k) = \Psi_{\mathbf{E}(\sigma)e_k}$. Il en résulte que les éléments $\mathbf{E}(\sigma)e_k$ $(\sigma \in \mathfrak{B};\ k = 1, 2, \ldots, n)$ engendrent $\mathfrak{H}$, donc que $\mathbf{E}(\sigma)$ $(\sigma \in \mathfrak{B})$ est de multiplicité n au plus, c. q. f. d.

On peut compléter cette proposition par la remarque suivante:

La multiplicité de $\mathbf{E}(\sigma)$ $(\sigma \in \mathfrak{B})$ *est égale au plus grand des nombres* n *tels que* $\mu(\Omega_n) \neq 0$.

En effet, si $\mu(\Omega_n) \neq 0$ et $\mu(\Omega_{n+p}) = 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$ on peut poser $\chi(t) = 0$ sur Ω_{n+p} $(p = 1, 2, \ldots)$. En vertu de la proposition 4. 4, la multiplicité de $\mathbf{E}(\sigma)$ est plus petite ou égale à n. Si elle était $< n$ on aurait, en vertu de la même proposition 4. 4, $\mu(\Omega_n) = 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Remarquons aussi le suivant cas particulier $(n = 1)$ de la proposition 4. 4:

Les $\chi(t)$ *sont de rang* $\leqq 1$ *si et seulement s'il existe un* $e \in \mathfrak{H}$, *tel que les éléments* $\mathbf{E}(\sigma)e$ $(\sigma \in \mathfrak{B})$ *engendrent* $\mathfrak{H}$ *tout entier.*

Un deuxième problème qui se pose est de savoir comment le rang des opérateurs $\chi(t)$ dépend-il de $E(\sigma)$. Pour répondre à cette question soit $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ un autre sous-espace dense de $\mathfrak{H}$, muni d'une nouvelle norme $\|\cdot\|_1$ ayant les mêmes propriétés que $\mathfrak{S}$ (*voir* le commencement du § 3). Soit $\chi_{\mathfrak{F}}(t) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{F}^*)$ la fonction donnée par la représentation intégrale

$$\langle E(\sigma)e|f\rangle = \int_\sigma \langle \chi_{\mathfrak{F}}(t)e|f\rangle d\mu(t) \qquad (\sigma \in \mathfrak{B})$$

où $e, f \in \mathfrak{F}$ et $E(\sigma)$ est considéré dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{F}^*)$. Posons aussi $\chi_{\mathfrak{S}}(t) = \chi(t)$ $(t \in T)$. La réponse à la question posée est donnée par le fait suivant:

Les opérateurs $\chi_{\mathfrak{S}}(t)$ *et* $\chi_{\mathfrak{F}}(t)$ *ont le même rang* μ-pp.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.4. En effet, on n'a qu'à remarquer que le rang de $\chi_{\mathcal{E}}(t)$ [resp. $\chi_{\mathcal{F}}(t)$] est égal à la dimension de $\mathcal{E}(t)=\overline{\chi_{\mathcal{E}}(t)\mathcal{E}}$ [resp. $\mathcal{F}(t)=\overline{\chi_{\mathcal{F}}(t)\mathcal{F}}$] et que $\mathcal{H}(\mathcal{E})=\mathcal{H}=\mathcal{H}(\mathcal{F})$.

5. L'invariance unitaire des extensions de Neumark des familles semi-spectrales

Soit $F(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ une autre famille semi-spectrale dans $\mathcal{H}$ et soit $\mathbf{F}(\sigma)$ $[\mathbf{F}(\sigma)\in\mathfrak{L}(\mathcal{H}_F;\mathcal{H}_F), \mathcal{H}_F\supset\mathcal{H}]$ l'extension de NEUMARK de $F(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$. Soit μ une mesure positive (sur $\mathfrak{B}$), telle que $E(\sigma)$ et $F(\sigma)$ soient absolument continues par rapport à $\mu(\sigma)$. Soient $\chi_E(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$, et $\chi_F(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$ les fonctions déterminées par les représentations intégrales

$$\langle E(\sigma)e|f\rangle=\int_\sigma\langle\chi_E(t)e|f\rangle d\mu(t),\quad\text{resp.}\quad\langle F(\sigma)e|f\rangle=\int_\sigma\langle\chi_F(t)e|f\rangle d\mu(t),$$

où $e,f\in\mathcal{E}$ et $\sigma\in\mathfrak{B}$ sont arbitraires.

Proposition 5.1. *Les familles spectrales* $\mathbf{E}(\sigma)$ *et* $\mathbf{F}(\sigma)$ *sont unitairement équivalentes*[20]) *si et seulement si* $\chi_E(t)$ *et* $\chi_F(t)$ *ont le même rang* μ-pp.

Tout ce paragraphe sera consacré à la démonstration de cette proposition, effectuée par étapes.

Supposons que $\mathbf{E}(\sigma)$ et $\mathbf{F}(\sigma)$ sont unitairement équivalentes. En nous appuyant sur la proposition 2.4, nous allons montrer que $\chi_E(t)$ et $\chi_F(t)$ ont le même rang μ-pp. En ce but, soit $\mathcal{E}'=\Phi^{-1}\mathcal{E}$ [*voir* la remarque[20])] et posons $\|e'\|_1'=\|\Phi e'\|_1$ pour tout $e'\in\mathcal{E}'$. Soit $\chi'(t)=\Phi^*\chi_F(t)\Phi$, où $\Phi^*\in\mathfrak{L}(\mathcal{E}^*;\mathcal{E}'^*)$ est l'adjoint de Φ considéré dans $\mathfrak{L}(\mathcal{E}';\mathcal{E})$. Pour $e',f'\in\mathcal{E}'$ nous avons

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{E}(\sigma)e'|f'\rangle&=(\mathbf{E}(\sigma)e'|f')=(\Phi^*\mathbf{F}(\sigma)\Phi e'|f')=(\mathbf{F}(\sigma)\Phi e'|\Phi f')=\\&=(F(\sigma)\Phi e'|\Phi f')=\langle F(\sigma)\Phi e'|\Phi f'\rangle=\int_\sigma\langle\chi_F(t)\Phi e'|\Phi f'\rangle d\mu(t)=\\&=\int_\sigma\langle\Phi^*\chi_F(t)\Phi e'|f'\rangle d\mu(t)=\int_\sigma\langle\chi'(t)e'|f'\rangle d\mu(t)\qquad(\sigma\in\mathfrak{B}),\end{aligned}$$

ce qui montre que $\chi'(t)$ est la fonction appartenant à $\mathfrak{L}(\mathcal{E}';\mathcal{E}'^*)$ donnée par la representation du type (2.10). D'autre part, comme

$$\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)e_i'=\sum\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)\Phi^{-1}e_i=\Phi^{-1}\sum_i\lambda_i\mathbf{F}(\sigma_i)e_i\qquad(\{e_i\}\subset\mathcal{E},\ \{e_i'\}\subset\mathcal{E}')$$

et Φ^{-1} est unitaire, il résulte $\mathcal{H}(\mathcal{E}')=\mathcal{H}_E$. Par conséquent (en tenant compte

[20]) C'est-à-dire qu'il existe un opérateur isométrique Φ de $\mathcal{H}_E\,(=\mathcal{H})$ *sur* $\mathcal{H}_F$ (opérateur unitaire), tel que $\mathbf{F}(\sigma)\Phi=\Phi\mathbf{E}(\sigma)$ pour tout $\sigma\in\mathfrak{B}$.

de la proposition 2.4) nous obtenons que $\overline{\chi_E(t)\mathcal{E}}$ et $\overline{\chi'(t)\mathcal{E}'}$ ont la même dimension μ-pp, donc que $\chi_E(t)$ et $\chi'(t)$ ont le même rang μ-pp. Mais en vertu de la définition de $\chi'(t)$, son rang ne peut dépasser celui de $\chi_F(t)$. Il résulte que μ-pp le rang de $\chi_E(t)$ ne dépasse pas celui de $\chi_F(t)$. En changeant les rôles de $\mathbf{E}(\sigma)$ et $\mathbf{F}(\sigma)$ nous obtenons aussi l'inégalité inverse. Par conséquent $\chi_E(t)$ et $\chi_F(t)$ ont le même rang μ-pp.

Pour démontrer l'implication inverse nous utiliserons le suivant

Lemme. *Soit $\{h_n(t)\}$ une suite de fonctions μ-mesurables, telles que $\Sigma|h_n(t)|^2\in L^1_\mu$. Il existe alors un (et un seul) $h^*\in\mathcal{H}$, tel que $(\chi h^*)(t)=$ $=\sum_n h_n(t)e_n^*(t)$* μ-pp. *De plus*

$$\|h^*\|^2=\int_T\Big[\sum_n|h_n(t)|^2\varphi_{\Sigma_n}(t)\Big]d\mu(t) \tag{5.1}$$

où $\Sigma_n=T-\bigcup_{k=1}^{n-1}\Omega_k$.

Démonstration. Remarquons d'abord que $h^*(t)=\sum_n h_n(t)e_n^*(t)$ est défini μ-pp et que pour tout $e\in\mathcal{E}$

$$|\langle h^*(t)|e\rangle|^2\leqq\Big[\sum_n|h_n(t)|\,|\langle e_n^*(t)|e\rangle|\Big]^2\leqq\Big[\sum_n|h_n(t)|^2\Big]\Big[\sum_n|\langle e_n^*(t)|e\rangle|^2\Big]=$$
$$=\Big[\sum_n|h_n(t)|^2\Big]\langle\chi(t)e|e\rangle,$$

ce qui montre que $h^*(t)$ vérifie (2.26). Par conséquent (en vertu de la proposition 2.5) il existe un (et un seul) $h^*\in\mathcal{H}$, tel que $(\chi h^*)(t)=\sum_n h_n(t)e_n^*(t)$ μ-pp.

Il nous reste à démontrer la relation (5.1). Dans ce but remarquons d'abord que si $h=\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)e_i$ $(e_i\in\mathcal{E})$, on a

$$(\chi h)(t)=\chi(t)h(t)=\sum_n\overline{\langle e_n^*(t)|h(t)\rangle}e_n^*(t)\quad \mu\text{-pp}$$

où $h(t)=\sum_i\lambda_i\varphi_{\sigma_i}(t)e_i$; de plus

$$\|h\|^2=\sum_{i,j}\lambda_i\bar{\lambda}_j(\mathbf{E}(\sigma_i\cap\sigma_j)e_i|e_j)=\sum_{i,j}\lambda_i\bar{\lambda}_j\int_{\sigma_i\cap\sigma_j}\langle\chi(t)e_i|e_j\rangle d\mu(t)=$$
$$=\int_T\langle\chi(t)h(t)|h(t)\rangle d\mu(t)=\int_T\Big[\sum_n|\langle e_n^*(t)|h(t)\rangle|^2\Big]d\mu(t)=$$
$$=\int_T\Big[\sum_n|\langle e_n^*(t)|h(t)\rangle|^2\varphi_{\Sigma_n}(t)\Big]d\mu(t),$$

ce qui nous montre que (5.1) est vraie pour $h^*=\Sigma\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)e_i$ $(e_i\in\mathcal{E})$. En utilisant le fait que ces éléments engendrent $\mathcal{H}$, on obtient aisément une suite

$\{h_p\}$ de tels éléments convergeant vers h^* et une suite $\{h'_n(t)\}$ de fonctions numériques μ-mesurables, telles que $\sum_n |h'_n(t)|^2 \in L^1_\mu$ et

$$\lim_{p\to\infty} \int_T [\sum_n |\langle e^*_n(t) | h_p(t)\rangle - h'_n(t)|^2 \varphi_{\Sigma_n}(t)] d\mu(t) = 0.$$

Il résulte (par continuité)

$$\|h^*\|^2 = \int_T [\sum_n |h'_n(t)|^2 \varphi_{\Sigma_n}(t)] d\mu(t) \tag{5.2}$$

et

$$\langle \mathbf{E}(\sigma)h^* | e\rangle = (\mathbf{E}(\sigma)h^* | e) = \lim_{p\to\infty} (\mathbf{E}(\sigma)h_p | e) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_\sigma [\sum_n \overline{\langle e^*_n(t) | h_p(t)\rangle} \langle e^*_n(t) | e\rangle] d\mu(t) = \int_\sigma [\sum_n h'_n(t) \langle e^*_n(t) | e\rangle] d\mu(t)$$

quel que soit $e \in \mathfrak{E}$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. Par conséquent,

$$\sum_n h_n(t) e^*_n(t) = (\chi h^*)(t) = \sum_n h'_n(t) e^*_n(t) \quad \mu\text{-pp},$$

d'où, en tenant compte de la proposition 4.2 (iii) et de la proposition 4.3, on obtient $h_n(t) = h'_n(t)$ μ-pp pour $t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_{n+k} = \Sigma_n$. De cette manière $h_n(t)\varphi_{\Sigma_n}(t) = h'_n(t)\varphi_{\Sigma_n}(t)$, donc

$$\int_T [\sum_n |h_n(t)|^2 \varphi_{\Sigma_n}(t)] d\mu(t) = \int_T [\sum_n |h'_n(t)|^2 \varphi_{\Sigma_n}(t)] d\mu(t),$$

d'où, en vertu de (5.2) on obtient (5.1), c. q. f. d.

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition 5.1. Supposons donc que $\chi_E(t)$ et $\chi_F(t)$ ont le même rang μ-pp. En posant $\chi_E(t) = \chi_F(t) = 0$ sur l'ensemble exceptionnel nous pouvons supposer que $\chi_E(t)$ et $\chi_F(t)$ ont le même rang pour tout $t \in T$. Par conséquent les ensembles $\Sigma_n(E)$ et $\Sigma_n(F)$ où le rang de $\chi_E(t)$, resp. $\chi_F(t)$ dépasse n sont identiques. Soient

$$\chi_E(t)e = \sum_n \overline{\langle e^*_n(t) | e\rangle} e^*_n(t) \quad \text{et} \quad \chi_F(t)e = \sum_n \overline{\langle f^*_n(t) | e\rangle} f^*_n(t)$$

les décompositions données par la proposition 4.2. Pour $h = \sum_i \lambda_i \mathbf{E}(\sigma_i) e_i$ et $k = \sum_j \lambda'_j \mathbf{F}(\sigma'_j) e'_j$ posons

$$\Phi(t)h(t) = \sum_n \overline{\langle e^*_n(t) | h(t)\rangle} f^*_n(t) \quad \text{et} \quad \Phi'(t)k(t) = \sum_n \overline{\langle f^*_n(t) | k(t)\rangle} e^*_n(t),$$

où $h(t) = \sum_i \lambda_i \varphi_{\sigma_i}(t) e_i$ et $k(t) = \sum \lambda'_j \varphi_{\sigma'_j}(t) e'_j$ $(e_i, e'_j \in \mathfrak{E})$. En vertu du lemme précédent il existe un $\Phi h \in \mathcal{H}_E$ et un $\Phi' k \in \mathcal{H}_E$, tels que $(\chi_F \Phi h)(t) = \Phi(t)h(t)$ et $(\chi_E \Phi' k)(t) = \Phi'(t)k(t)$ μ-pp. De plus [en vertu de (5.1)]

$$\|\Phi h\|^2 = \int_T \Big[\sum_n |\langle e_n^*(t)|h(t)\rangle|^2 \varphi_{\Sigma_n(F)}(t)\Big] d\mu(t) =$$
$$= \int_T \Big[\sum_n |\langle e_n^*(t)|h(t)\rangle|^2 \varphi_{\Sigma_n(E)}(t)\Big] d\mu(t) = \int_T \Big[\sum_n |\langle e_n^*(t)|h(t)\rangle|^2\Big] d\mu(t) =$$
$$= \int_T \langle \chi_E(t)h(t)|h(t)\rangle d\mu(t) = \|h\|^2$$

et d'une manière analogue on obtient $\|\Phi' k\| = \|k\|$. Il résulte que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_E; \mathcal{H}_F)$ et $\Phi' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_F; \mathcal{H}_E)$ sont deux opérateurs isométriques. D'autre part

$$(\Phi h|k) = \sum_j \bar{\lambda}_j'(\mathbf{F}(\sigma_j')\Phi h|e_j') = \sum_j \bar{\lambda}_j' \int_{\sigma_j'} \langle(\chi_F \Phi h)(t)|e_j'\rangle d\mu(t) =$$
$$= \sum_j \bar{\lambda}_j' \int_{\sigma_j'} \langle \Phi(t)h(t)|e_j'\rangle d\mu(t) = \int_T \langle \Phi(t)h(t)|k(t)\rangle d\mu(t) =$$
$$= \int_T \overline{\langle \Phi'(t)k(t)|h(t)\rangle} d\mu(t) = \overline{\sum_i \lambda_i \int_{\sigma_i} \langle \Phi'(t)k(t)|e_i\rangle d\mu(t)} =$$
$$= \overline{\sum_i \lambda_i \int_{\sigma_i} \langle(\chi_E \Phi' k)(t)|e_i\rangle d\mu(t)} = \sum_i \lambda_i \overline{(\mathbf{E}(\sigma_i)\Phi' k|e_i)} =$$
$$= \sum_i \lambda_i (\mathbf{E}(\sigma)e_i|\Phi' k) = (h|\Phi' k),$$

d'où il s'ensuit par continuité que $\Phi' = \Phi^*$ donc que Φ est unitaire. Il nous reste à démontrer que $\mathbf{F}(\sigma)\Phi = \Phi\mathbf{E}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathcal{B}$. Or

$$(\mathbf{F}(\sigma)\Phi h|k) = \sum_j \bar{\lambda}_j'(\mathbf{F}(\sigma \cap \sigma_j')\Phi h|e_j') = \sum_j \bar{\lambda}_j' \int_{\sigma \cap \sigma_j'} \langle \Phi(t)h(t)|e_j'\rangle d\mu(t) =$$
$$= \int_\sigma \langle \Phi(t)h(t)|k(t)\rangle d\mu(t) = \overline{\int_\sigma \langle \Phi'(t)k(t)|h(t)\rangle d\mu(t)} =$$
$$= \overline{(\mathbf{E}(\sigma)\Phi' k|h)} = (\mathbf{E}(\sigma)h|\Phi' k) = (\Phi\mathbf{E}(\sigma)h|k),$$

d'où il résulte $\mathbf{F}(\sigma)\Phi = \Phi\mathbf{E}(\sigma)$, ce qui achève la démonstration de la proposition 5.1.

6. Applications à l'étude spectrale et des invariants unitaires d'un opérateur autoadjoint borné[21])

Commençons par démontrer le fait suivant:

Pour tout système fini d'opérateurs $A_j \in \mathfrak{L}(\mathcal{H};\mathcal{H})$ $(j=1,2,\ldots,n)$ *il existe un sous-espace* $\mathfrak{E} \subset \mathcal{H}$, *muni d'une nouvelle norme* $\|\cdot\|_1$ *vérifiant les hypothèses du* § 3, *tel que* $A_j\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}$ *pour* $j=1,2,\ldots,n$.

En ce but, considérons d'abord une base orthogonale $\{h_m\}$ de $\mathcal{H}$ et posons $e_1=h_1$. Orthonormons le système $\{e_1, A_je_1, h_2\ (j=1,2,\ldots,n)\}$ sans changer e_1. Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_{p_1}\}$ le système obtenu. Orthonormons $\{e_i, A_je_i, h_3$ $(i=1,2,\ldots,p_1;\ j=1,2,\ldots,n)\}$ sans changer $\{e_i\}_1^{p_1}$ etc. Si après m telles opérations le système fini orthonormal obtenu est $\{e_i\}_1^{p_m}$, le nouveau système sera obtenu en orthonormant $\{e_i, A_je_i, h_{m+1}\ (i=1,2,\ldots,p_m;\ j=1,2,\ldots,n)\}$ sans changer $\{e_i\}_1^{p_m}$. De cette manière, on obtient (par récurrence) une suite orthonormale $\{e_p\}$, telle que chaque h_m et A_je_p sont des combinaisons linéaires finies de $\{e_p\}$. Soit $\mathfrak{E}$ l'espace linéaire de ces combinaisons finies. Alors $\mathfrak{E} \subset \mathcal{H}$ et $A_je_p \in \mathfrak{E}$ pour tout j et p, donc $A_j\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}$; la démonstration s'achève comme indiquée dans la remarque [12]).

L'espace $\mathfrak{E}$, que nous venons de construire, a aussi les deux propriétés suivantes: [22])

(i) *Tout élément de* $\mathfrak{E}$ *est une combinaison linéaire finie d'éléments d'un ensemble dénombrable* $\mathfrak{E}_{00}$ *de* $\mathfrak{E}$;

(ii) $\mathcal{H}$ *est un sous-espace dense de* $\mathfrak{E}^*$.

La propriété (i) est évidente (en posant $\mathfrak{E}_{00}=\{e_p\}$). En ce qui concerne (ii), remarquons d'abord que $\mathfrak{E}$ est un espace pré-hilbertien. Soit p le plongement identique de $\mathfrak{E}$ dans $\mathcal{H}$. Ce plongement se prolonge par continuité en un opérateur $p_1 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{E}_1;\mathcal{H})$, $\mathfrak{E}_1$ étant l'espace hilbertien obtenu par la complétion de $\mathfrak{E}$. Il est évident (*voir* la construction de $\mathfrak{E}$) que $p_1e_1=0$ entraîne $e_1=0$ et que $\mathfrak{E}_1^*=\mathfrak{E}^*$. Si $\mathcal{H}$ n'était pas dense dans $\mathfrak{E}^*$, il existerait un $e_0^{**} \in (\mathfrak{E}^*)^* = \mathfrak{E}_1^{**} = \mathfrak{E}_1 (e_0^{**} \neq 0)$, tel que $\langle h | e_0^{**}\rangle = 0$ pour tout $h \in \mathcal{H}$. Mais $h \in \mathcal{H} \subset \mathfrak{E}^* = \mathfrak{E}_1^*$ est en fait p_1^*h, d'où il résulte $(h|p_1e_0^{**}) = \langle h|e_0^{**}\rangle = 0$, donc $p_1e_0^{**}=0$ et par conséquent $e_0^{**}=0$, en contradiction avec $e_0^{**} \neq 0$. Il résulte que $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathfrak{E}^*$, ce qui achève la démonstration de la propriété (ii).

---

[21]) Quoique les méthodes employées dans ce paragraphe soient de puissance plus grande, nous n'envisageons que ce cas simple pour mieux mettre en évidence la signification des résultats acquis dans les paragraphes précédents..

[22]) Nous n'avons pas imposé à $\mathfrak{E}$ ces conditions dès le commencement, car elles ne sont pas toujours remplies (par exemple, dans la théorie spectrale des opérateurs d'un espace nucléaire; *voir* [10]).

Tout espace $\mathcal{E}$ ayant les propriétés (i), (ii), vérifiant les hypothèses du § 3 et invariant par rapport à $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sera appelé *admis* par rapport à $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Soit maintenant A un opérateur autoadjoint borné de $\mathcal{H}$. Soit $E(\sigma)$ (σ borélien $\subset R^1$) la famille spectrale attachée à A [c'est-à-dire telle que $A = \int_{R_1} t\,dE(t)$]; elle est univoquement déterminée et on a $E([-\|A\|, \|A\|]) = I$. Soit $\mathcal{E}$ un espace admis par rapport à A. Soit $\nu(\sigma)$ la variation totale indéfinie de $E(\sigma)$ considérée dans $\mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$. Des relations (2.7) et (2.9) il résulte que le support[23]) de $\nu(\sigma)$ est aussi inclus dans $[-\|A\|, \|A\|]$. Soit $\mu(\sigma)$ une mesure borélienne quelconque à support compact, telle que $E(\sigma)$ soit absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$ [par exemple, on peut prendre $\mu(\sigma) = \nu(\sigma)$]. Pour un $h \in \mathcal{H}$, soit $(\chi h)(t) \in \mathcal{E}^*$ la fonction définie sur T, déterminée μ-pp, telle que

$$\langle E(\sigma)h|e\rangle = \int_\sigma \langle (\chi h)(t)|e\rangle d\mu(t), \tag{6.1}$$

quel que soit $e \in \mathcal{E}$ et σ borélien de R^1. Comme $\langle (\chi h)(t)|e\rangle$ est μ-mesurable pour tout $e \in \mathcal{E}$, il résulte [en vertu du fait que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$ sont du type dénombrable[24])] que la fonction $(\chi h)(t)$ est μ-mesurable[25]). D'autre part $\|(\chi h)(t)\|_1$ est μ-intégrable (voir la proposition 3.2), par conséquent, *$(\chi h)(t) \in \mathcal{E}^*$ est une fonction μ-intégrable.* De cette manière, la relation (6.1) peut être écrite

$$E(\sigma)h = \int_\sigma (\chi h)(t)\,d\mu(t) \qquad [E(\sigma)h \in \mathcal{E}^*, h \in \mathcal{H}] \tag{6.2}$$

pour tout σ borélien de R^1.

Soit $\chi(t) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$ la fonction définie sur T, déterminée μ-pp, telle que

$$\langle E(\sigma)e|f\rangle = \int_\sigma \langle \chi(t)e|f\rangle d\mu(t) \tag{6.3}$$

quels que soient $e, f \in \mathcal{E}$ et σ borélien de R^1. Comme nous avons déjà montré (§ 2), nous pouvons supposer que

$$(\chi h)(t) \in \mathcal{E}(t) = \overline{\chi(t)\mathcal{E}} \qquad (t \in T, h \in \mathcal{H}). \tag{6.4}$$

---

[23]) Pour une mesure $\mu(\sigma)$ (σ borélien $\subset R^1$) le support $S(\mu)$ est le complémentaire de la réunion des ensembles ouverts G, tels que $\mu(G) = 0$. L'intégration par rapport à μ se fait en réalité sur $S(\mu)$.

[24]) En effet, $\mathcal{E}^*$ est du type dénombrable car $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{E}^*$ et d'autre part $\mathcal{H}$ est lui-même du type dénombrable.

[25]) En ce qui concerne la théorie de l'intégration pour des fonctions à valeurs vectorielles (devenue déjà classique) on peut consulter N. Dunford—J. Schwarz, *Linear Operators,* Part I (New York, 1958) ou E. Hille—R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-groups* (New York, 1957).

Proposition 6.1. *La fonction $\chi(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$ est μ-intégrable.*

Démonstration. Nous allons utiliser la proposition 4.2. En effet, nous avons $\chi(t)e=\sum\overline{\langle e_n^*(t)|e\rangle}e_n^*(t)$, où $\sum_n\|e_n^*(t)\|_1^2\in L_\mu^1$ et $\overline{\langle e_n^*(t)|e\rangle}$ est μ-mesurable ($e\in\mathcal{E}$; $n=1,2,\ldots$). Il résulte que $e_n^*(t)\in\mathcal{E}^*$ est une fonction μ-mesurable ($n=1,2,\ldots$); par conséquent, il existe une suite $\{\sum_k e_{mk}^*\varphi_{\sigma_{mk}}(t)\}_m$ de fonctions étagées μ-mesurables tendant (dans $\mathcal{E}^*$) vers $e_n^*(t)$ μ-pp. Considérons l'opérateur $\chi_{e_n}(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$ défini par $\chi_{e_n}(t)=\overline{\langle e_n^*(t)|e\rangle}e_n^*(t)$; soit $\chi_m(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$ défini par

$$\chi_m(t)e=\overline{\langle\sum_k e_{mk}^*\varphi_{\sigma_{mk}}(t)|e\rangle}\sum_k e_{mk}^*\varphi_{\sigma_{mk}}(t)=\sum_{k,h}\overline{\langle e_{mk}^*|e\rangle}e_{mh}^*\varphi_{\sigma_{mk}\cap\sigma_{mh}}(t).$$

La fonction $\chi_m(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$ est alors une fonction étagée μ-mesurable. D'autre part

$$\|[\chi_m(t)-\chi_{e_n}(t)]e\|_1\leqq[\|e_n^*(t)-\sum_k e_{mk}^*\varphi_{\sigma_{mk}}(t)\|_1\|\sum_k e_{mk}^*\varphi_{\sigma_{mk}}(t)\|_1+$$
$$+\|e_n^*(t)-\sum_k e_{mk}^*\varphi_{\sigma_{mk}}(t)\|_1\|e_n^*(t)\|_1]\|e\|_1 \qquad (e\in\mathcal{E}),$$

ce qui montre que $\chi_m(t)\to\chi_{e_n}(t)$ [dans $\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$] μ-pp. Par conséquent $\chi_{e_n}(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$ est une fonction μ-mesurable. Il résulte que $\sum_{h=1}^N\chi_{e_n}(t)$ est une fonction μ-mesurable, d'où il résulte (en tenant compte de nouveau de la proposition 4.2) que $\chi(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$ est une fonction μ-mesurable. Comme $\|\chi(t)\|_1\leqq\sum_n\|e_n^*(t)\|_1^2\in L_\mu^1$, il résulte que $\chi(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$ est une fonction μ-intégrable, c. q. f. d.

La proposition 6.1 nous permet d'écrire (6.3) sous la forme

$$E(\sigma)=\int_\sigma\chi(t)d\mu(t) \qquad [E(\sigma)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)] \tag{6.5}$$

quel que soit σ borélien de R^1. Pour qu'on puisse indiquer les conséquences des faits que nous venons de démontrer, quelques considérations supplémentaires seront nécessaires.

Soit σ_μ un intervalle borné contenant $S(\mu)$ [*voir* la remarque[23]] et soit $\{\Delta^{(n)}\}$ une suite de partitions finies ($\Delta^{(n)}=\{\sigma_k^{(n)}\}_{k=1}^{N_n}$) de σ_μ en intervalles, de norme $\nu(\Delta^{(n)})=\sup_k|\sigma_k^{(n)}|\to0$. Soit X un espace de Banach quelconque et soit $x(t)\in X$ une fonction μ-intégrable.

Lemme. *Il existe une suite partielle $\{\Delta^{(n_p)}\}\subset\{\Delta^{(n)}\}$, telle que, pour $p\to\infty$, on a μ-pp*

$$\frac{1}{\mu[\sigma_{k_0}^{(n_p)}]}\int_{\sigma_{k_0}^{(n_p)}}x(t)d\mu(t)\to x(t_0) \qquad (\textit{dans } X) \tag{6.6}$$

où, pour chaque p, $\sigma_{k_0}^{(n)}$ est choisi de façon qu'il contienne le point t_0 ($k_0=k(t_0,p)$).

Démonstration. Soit $x_n(t) \in X$ la fonction définie par

$$x_n(t) = \sum_k \{\mu[\sigma_k^{(n)}]\}^{-1} \Big[\int_{\sigma_k^{(n)}} x(\tau) d\mu(\tau) \Big] \varphi_{\sigma_k^{(n)}}(t).$$

Alors $x_n(t)$ est aussi μ-intégrable et

$$\int_{\sigma_\mu} |x_n(t) - x(t)| d\mu(t) = \sum_k \int_{\sigma_k^{(n)}} \Big| [\mu(\sigma_k^{(n)})]^{-1} \int_{\sigma_k^{(n)}} x(\tau) d\mu(\tau) - x(t) \Big| d\mu(t) =$$

$$= \sum_k [\mu(\sigma_k^{(n)})]^{-1} \int_{\sigma_k^{(n)}} \int_{\sigma_k^{(n)}} | [x(\tau) - x(t)] d\mu(\tau) | d\mu(t) \leqq$$

$$\leqq \sum_k [\mu(\sigma_k^{(n)})]^{-1} \int_{\sigma_k^{(n)}} \int_{\sigma_k^{(n)}} |x(\tau) - x(t)| d\mu(\tau) d\mu(t) = I_n(x).$$

On vérifie sans peine que $I_n(x) \leqq 2 \int_{\sigma_\mu} |x(t)| d\mu(t)$ et que si $y(t) \in X$ est une autre fonction μ-intégrable alors $I_n(x+y) \leqq I_n(x) + I_n(y)$. Utilisons maintenant le fait que les fonctions continues (à valeurs dans X) forment un ensemble dense dans l'espace des fonctions (à valeurs dans X) μ-intégrables. Pour $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $c_\varepsilon(t) \in X$, telle que

$$\int_{\sigma_\mu} |c_\varepsilon(t) - x(t)| d\mu(t) < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0 \text{ donné}).$$

En vertu des propriétés de $I_n(x)$ nous avons

$$I_n(x) \leqq I_n(c_\varepsilon) + I_n(x - c_\varepsilon) \leqq I_n(c_\varepsilon) + 2 \int_{\sigma_\mu} |x - c_\varepsilon| d\mu(t) \leqq I_n(c_\varepsilon) + 2\varepsilon.$$

Or, il est évident [en vertu de la continuité uniforme de $c_\varepsilon(t)$] que $I_n(c_\varepsilon) \to 0$ pour $n \to \infty$. Par conséquent, $\limsup I_n(x) \leqq 2\varepsilon$, d'où il résulte que $\lim I_n(x) = 0$, donc aussi

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\sigma_\mu} |x(t) - x_n(t)| d\mu(t) = 0. \tag{6.7}$$

Choisissons une suite partielle $\{n_p\} \subset \{n\}$, telle que

$$\sum_p \int_{R^1} |x(t) - x_{n_p}(t)| d\mu(t) = \sum_p \int_{\sigma_\mu} |x(t) - x_{n_p}(t)| d\mu(t) < \infty,$$

ce qui est possible en vertu de (6. 7). Alors du théorème de Beppo Levi il résulte que $\sum_p |x(t) - x_{n_p}(t)|$ est μ-intégrable. Par conséquent $\sum_p |x(t) - x_{n_p}(t)| < < \infty$ μ-pp, ce qui entraîne $|x_{n_p}(t) - x(t)| \to 0$ μ-pp, d'où, en tenant compte de la définition des fonctions $x_n(t)$, on obtient la relation (6. 6), c. q. f. d.

En appliquant ce lemme aux fonctions $(\chi h)(t) \in \mathcal{E}^*$ et $\chi(t) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$ nous obtenons les deux propositions suivantes:

Proposition 6.2. *Pour tout $h \in \mathcal{H}$ il existe une suite partielle $\{\Delta^{(n_p)}\} \subset \{\Delta^{(n)}\}$ [où $n_p = n_p(h)$], telle que pour $p \to \infty$ on ait μ-pp*

$$\frac{E(\sigma_{k_0}^{(n_p)})\,h}{\mu(\sigma_{k_0}^{(n_p)})} \to (\chi h)(t_0) \qquad (dans\ \mathcal{E}^*).$$

Proposition 6.3. *Il existe une suite partielle $\{\Delta^{(n_p)}\} \subset \{\Delta^{(n)}\}$, telle que pour $p \to \infty$ on ait μ-pp*

$$\frac{E(\sigma_{k_0}^{(n_p)})}{\mu(\sigma_{k_0}^{(n_p)})} \to \chi(t_0) \qquad [dans\ \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)].$$ [26])

Choisissons les partitions $\Delta^{(n)}$ de sorte que leurs points de division soient de μ-mesure nulle, ce qui est possible en vertu du fait que l'ensemble des points t tels que $\mu(\{t\}) \neq 0$, est dénombrable. Nous pouvons poser $\chi(t) = 0$ dans les points de division de $\Delta^{(n_p)}$ $(p = 1, 2, \ldots)$, aussi bien que dans les points exceptionnels de la proposition 6.3, car ils forment un ensemble de μ-mesure nulle. On déduit alors de la proposition 6.3 le théorème suivant:

En dehors d'un ensemble de μ-mesure nulle [où $\chi(t) = 0$], pour tout $t \in R^1$ il existe deux suites $\{t_n'\}$ et $\{t_n''\}$ convergeant vers t, telles que $t_n' < t' < t_n''$ et

$$\frac{E([t_n', t_n''])}{\mu([t_n', t_n''])} \to \chi(t) \qquad [dans\ \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)]. \tag{6.8}$$

Tous ces résultats sont en fait des conséquences de la propriété (ii) de $\mathcal{E}$. En utilisant maintenant aussi la propriété (i) de $\mathcal{E}$, nous allons faire l'étude spectrale des opérateurs autoadjoints bornés.

Convenons d'abord d'appeler *vecteur propre généralisé* de A correspondant au point $t \in R^1$ tout $e^* \in \mathcal{E}^*$ vérifiant

$$\langle e^* | A e \rangle = t \langle e^* | e \rangle \tag{6.9}$$

pour tout $e \in \mathcal{E}$. Soit $\mathcal{E}^*(t)$ l'espace formé par ces vecteurs pour t fixé. Evidemment, $\mathcal{E}^*(t)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^*$.

Proposition 6.4. *$\mathcal{E}^*(t) \cap \mathcal{H} \neq \{0\}$ si et seulement si t est une valeur propre (dans $\mathcal{H}$) de A. Dans ce cas $\mathcal{E}^*(t) \cap \mathcal{H}$ est l'espace des vecteurs propres (dans $\mathcal{H}$) de A correspondants au point t.*

Démonstration. Soit $h_0 \in \mathcal{H}$ un vecteur propre de A, correspondant à la valeur propre t_0 $(A h_0 = t_0 h_0)$. Nous avons alors pour tout $e \in \mathcal{E}$

$$\langle h_0 | A e \rangle = (h_0 | A e) = (A h_0 | e) = t_0 (h_0 | e) = t_0 \langle h_0 | e \rangle,$$

[26]) La première de ces deux propositions est analogue à une proposition obtenue antérieurement par KATZ [16] dans des conditions semblables.

donc h_0, considéré dans $\mathscr{E}^*$, vérifie (6.9). Il résulte que $h_0 \in \mathscr{E}^*(t)$. De cette manière nous avons démontré que si t_0 est une valeur propre (dans $\mathscr{H}$) de A, alors $\mathscr{E}^*(t_0)$ contient l'espace des vecteurs propres (dans $\mathscr{H}$) de A, correspondants au point t_0. Il nous reste à démontrer que si $\mathscr{E}^*(t_0) \cap \mathscr{H} \neq \{0\}$, alors t_0 est une valeur propre (dans $\mathscr{H}$) de A et que tout élément de $\mathscr{E}(t_0) \cap \mathscr{H}$ est un vecteur propre (dans $\mathscr{H}$) de A, correspondant au point t_0. En effet, soit $0 \neq h_0^* \in \mathscr{E}^*(t_0) \cap \mathscr{H}$; de (6.9) on déduit alors $(h_0^*|Ae) = t_0(h^*|e)$ $(e \in \mathscr{E})$. Mais A est autoadjoint; par conséquent $Ah_0^* = t_0 h_0^*$, c. q. f. d.

Proposition 6.5. *Pour tout* $t \in R^1$ *on a*

$$\chi(t)\mathscr{E} \subset \mathscr{E}^*(t). \tag{6.10}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que pour tout $e, f \in \mathscr{E}$ on a

$$\langle Ae|f\rangle = (Ae|f) = \int_{R^1} t\, d(E(t)e|f) = \int_{R^1} t\, d\langle E(t)e|f\rangle = \int_{R^1} t\langle \chi(t)e|f\rangle d\mu(t),$$

$$\|Ae\|^2 = \int_{R^1} t^2 d(E(t)e|e) = \int_{R^1} t^2 d\langle E(t)e|e\rangle = \int_{R^1} t^2 \langle \chi(t)e|e\rangle d\mu(t).$$

Il s'ensuit en vertu de la proposition 3.4 que $\chi(t)Ae = (\chi Ae)(t) = t\chi(t)e$ pour tout t sauf peut-être les points d'un ensemble $N(e)$ de μ-mesure nulle; par conséquent, pour $t \notin N(e)$ on a

$$\langle \chi(t)f|Ae\rangle = \overline{\langle \chi(t)Ae|f\rangle} = t\overline{\langle \chi(t)ef\rangle} = t\langle \chi(t)f|e\rangle$$

quel que soit $f \in \mathscr{E}$. Soit $N = \bigcup_{e \in \mathscr{E}_{00}} N(e)$. Alors $\mu(N) = 0$ et pour tout $e \in \mathscr{E}$ $(e = \Sigma \lambda_i e_i,\ \{e_i\} \subset \mathscr{E}_{00})$ et $t \notin N$ on a

$$\langle \chi(t)f|Ae\rangle = \sum_i \bar{\lambda}_i \langle \chi(t)f|Ae_i\rangle = t\sum_i \bar{\lambda}_i \langle \chi(t)f|e_i\rangle = t\langle \chi(t)f|e\rangle,$$

quel que soit $f \in \mathscr{E}$. Comme il est permis de modifier les valeurs de $\chi(t)$ sur un ensemble de μ-mesure nulle, posons $\chi(t) = 0$ sur N. Ce changement conserve à $\chi(t)$ toutes les propriétés que nous avons déjà établies. En outre, nous aurons $\langle \chi(t)f|Ae\rangle = t\langle \chi(t)f|e\rangle$ pour tout $t \in R^1$ et $e, f \in \mathscr{E}$; il résulte que $\chi(t)f \in \mathscr{E}^*(t)$ pour tout $f \in \mathscr{E}$, c. q. f. d.

Remarquons que par (6.4) il s'ensuit de la proposition 6.5 le corollaire suivant:

Pour tout $t \in R^1$ *on a* $\mathscr{E}(t) \subset \mathscr{E}^*(t)$ *et* $(\chi h)(t) \in \mathscr{E}^*(t)$, *quel que soit* $h \in \mathscr{H}$.

Voici un autre corollaire de la proposition 6.5:

$\chi(t_0)\mathscr{E} \cap \mathscr{H} \neq \{0\}$ ***si et seulement si*** t_0 ***est une valeur propre (dans*** $\mathscr{H}$***) de*** A.

En effet, si $\chi(t_0)\mathscr{E} \cap \mathscr{H} \neq \{0\}$, on a en vertu de la proposition 6.5 $\mathscr{E}^*(t_0) \cap \mathscr{H} \neq \{0\}$, donc (en vertu de la proposition 6.4) t_0 est une valeur propre (dans $\mathcal{H}$) de A. Inversement $E(\{t_0\})\neq 0$, par conséquent $\mu(\{t_0\})\neq 0$ aussi. En posant dans (6. 5) $\sigma=\{t_0\}$, nous obtenons $E(\{t_0\})=\chi(t_0)\mu(\{t_0\})$, d'où il résulte $\chi(t_0)\mathcal{E}\cap\mathcal{H}=E(\{t_0\})\mathcal{E}\cap\mathcal{H}\neq\{0\}$, c. q. f. d.

Envisageons maintenant le comportement des vecteurs propres approximatifs de A (c'est-à-dire des suites $\{e_n\}\subset\mathcal{H}$, telles que $\|Ae_n-te_n\|\to 0$ pour un $t\in R^1$ fixé). Soit $\mathcal{E}^0(t)$ l'ensemble des $e^*\in\mathcal{E}^*$, tels que $e^*=\lim e_n$ (dans $\mathcal{E}^*$), où $\{e_n\}\subset\mathcal{H}$ et $\|Ae_n-te_n\|\to 0$.

Proposition 6.6. *$\mathcal{E}^0(t)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^*$, tel que $\mathcal{E}(t)\subset\mathcal{E}^0(t)\subset\mathcal{E}^*(t)$, quel que soit $t\in R^1$.*[27])

Démonstration. Comme il est facile à voir que $\mathcal{E}^0(t)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^*$, passons à la démonstration des inclusions $\mathcal{E}(t)\subset\mathcal{E}^0(t)\subset\mathcal{E}^*(t)$. La deuxième s'ensuit de ce que, pour tout $e\in\mathcal{E}$ on a

$$\begin{aligned}|\langle e^*|Ae\rangle-t\langle e^*|e\rangle|&\leqq\|e_n-e^*\|_1(\|Ae\|_1+|t|\,\|e\|_1)+|\langle e_n|Ae\rangle-t\langle e_n|e\rangle|=\\&=\|e_n-e^*\|_1(\|Ae\|_1+|t|\,\|e\|_1)+|(e_n|Ae)-t(e_n|e)|\leqq\\&\leqq\|e_n-e^*\|_1(\|Ae\|_1+|t|\,\|e\|_1)+\|Ae_n-te_n\|\,\|e\|\to 0;\end{aligned}$$

par conséquent e^* vérifie (6. 9) donc $e^*\in\mathcal{E}^*(t)$. Il nous reste à démontrer la première inclusion $\mathcal{E}(t)\subset\mathcal{E}^0(t)$. Pour cela, remarquons d'abord que si $\{\Delta^{(n)}\}$ est la suite des partitions construites après la proposition 6. 3, l'ensemble des points $t_0\in R^1$, tels que $\mu(\sigma_{k_0}^{(n_p)})(|\sigma_{k_0}^{(n_p)}|)^{-1}\to 0$ où $t_0\in\sigma_{k_0}^{(n_p)}$, est de μ-mesure nulle. En effet, soit N cet ensemble et soit $N_{\varepsilon,p}=\bigcup\sigma_k^{(n_p)}$, où $\mu(\sigma_k^{(n_p)})<$ $<\varepsilon|\sigma_k^{(n_p)}|$. Si $t\in N$, il existe un p_t tel que $p>p_t$ entraîne $t\in N_{\varepsilon,p}$, donc $N\subset\bigcup_{p=1}^{\infty}\bigcap_{q=p}^{\infty}N_{\varepsilon,q}$. Mais $\mu(N_{\varepsilon,q})<\varepsilon\Sigma|\sigma_k^{(n_p)}|\leqq\varepsilon|\sigma_\mu|$, donc aussi $\mu(\bigcap_{q=p}^{\infty}N_{\varepsilon,q})<\varepsilon|\sigma_\mu|$. Comme $\{\bigcap_{q=p}^{\infty}N_{\varepsilon,q}\}$ est une suite croissante d'ensembles, il résulte $\mu(\bigcup_{p=1}^{\infty}\bigcap_{q=p}N_{\varepsilon,q})\leqq$ $\leqq\varepsilon|\sigma_\mu|$. Par conséquent $\mu(N)\leqq\varepsilon|\sigma_\mu|$, quel que soit $\varepsilon>0$ donc $\mu(N)=0$. Il nous est permis de poser $\chi(t)=0$ sur N sans rien changer dans toutes nos considérations antérieures. Dans le corollaire de la proposition 6. 3 (en passant par exemple à une nouvelle suite partielle) nous pouvons donc supposer aussi que

$$\inf_n\frac{\mu([t_n',t_n''])}{t_n''-t_n'}\geqq\varepsilon(t)>0\qquad[t\text{ tel que }\chi(t)\neq 0].$$

Posons $e_n=[\mu([t_n',t_n''])]^{-1}E([t_n',t_n''])f$. En vertu du même corollaire on a alors

---

[27]) Il sera intéressant d'élucider les cas où $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}^0(t)$, ou $\mathcal{E}^0(t)=\mathcal{E}^*(t)$.

$e_n \to \chi(t)f$ dans $\mathcal{E}^*$. Il nous reste à démontrer $\|Ae_n - te_n\| \to 0$. Or

$$\|Ae_n - te_n\|^2 = [\mu([t'_n, t''_n])]^{-2} \| \int_{[t'_n, t''_n]} (\tau - t) dE(\tau) f \|^2 =$$

$$= [\mu([t'_n, t''_n])]^{-2} \int_{[t'_n, t''_n]} |\tau - t|^2 d(E(\tau)f|f) \leqq \frac{(t'' - t')^2}{[\mu([t'_n, t''_n])]^2} (E([t'_n, t''_n])f|f) \leqq$$

$$\leqq \frac{(t''_n - t'_n)^2}{[\mu([t'_n, t''_n])]^2} \|E([t'_n, t''_n])\|_1 \|f\|_1^2 = (t''_n - t'_n)\|f\|_1^2 \frac{t''_n - t'_n}{\mu([t'_n, t''_n])} \cdot$$

$$\cdot \left\| \frac{E([t'_n, t''_n])}{\mu([t'_n, t''_n])} \right\|_1 \leqq \frac{\|f\|_1^2}{\varepsilon(t)} (t''_n - t'_n) \left\| \frac{E([t'_n, t''_n])}{\mu([t'_n, t''_n])} \right\|_1 \to \frac{\|f\|_1^2}{\varepsilon(t)} \cdot 0 \cdot \|\chi(t)\|_1 = 0,$$

donc $\chi(t)f \in \mathcal{E}^0(t)$. Il résulte que $\chi(t)\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^0(t)$, et comme $\mathcal{E}^0(t)$ est fermé, on a $\mathcal{E}(t) \subset \mathcal{E}^0(t)$, c. q. f. d.

Les espaces $\mathcal{E}^*(t)$ et $\mathcal{E}^0(t)$ sont déterminés univoquement par A. Les espaces $\mathcal{E}(t)$ sont définis par l'intermédiaire de la fonction $\chi(t) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$, dont la dépendance de A nous n'avons pas mise en évidence. Pour déterminer la dépendance de A de la fonction $\chi(t)$, remarquons que si dans (6.3) nous posons $\sigma = R^1$, nous obtenons la décomposition intégrale

(6.11) $$\langle e|f\rangle = \int_{R^1} \langle \chi(t)e|f\rangle d\mu(t) \qquad (e, f \in \mathcal{E})$$

de $\mathcal{E}$, les opérateurs $\chi(t)$ vérifiant

(6.12) $$\langle \chi(t)e|e\rangle \geqq 0 \qquad (e \in \mathcal{E})$$

et (6.10). Inversement, ces propriétés déterminent $\chi(t)$:

Proposition 6.7. *Soit* $\chi_1(t) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$ *une fonction définie sur* R^2, *vérifiant* (6.10), (6.11) *et* (6.12). *Alors* $\chi_1(t) = \chi(t)$ μ-pp.

Démonstration. En vertu de la proposition 3.3 il existe une famille semi-spectrale $E_1(\sigma)$ (σ borélien $\subset R^1$) telle que

(6.13) $$(E_1(\sigma)e|f) = \langle E_1(\sigma)e|f\rangle = \int_\sigma \langle \chi_1(t)e|f\rangle d\mu(t) \qquad (e, f \in \mathcal{E}).$$

Soit σ_μ un intervalle contenant $S(\mu) \cup [-\|A\|, \|A\|]$. Alors $E_1(\sigma_\mu) = I$ et [en vertu de (6,9), (6.10) et (6.13)]

$$(A^n e|f) = (E_1(\sigma_\mu)e|A^n f) = \int_{\sigma_\mu} \langle \chi_1(t)e|A^n f\rangle d\mu(t) =$$

$$= \int_{\sigma_\mu} t^n \langle \chi_1(t)e|f\rangle d\mu(t) \qquad (e, f \in \mathcal{E};\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

donc

$$(A^n e|f) = \int_{\sigma_\mu} t^n d(E_1(t)e|f) \qquad (e, f \in \mathfrak{E};\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Il en résulte que $E_1(\sigma)$ est égale à la famille spectrale $E(\sigma)$ de A. Mais alors de (6. 3) et (6. 13) il s'ensuit (en vertu de la proposition 3. 1) que $\chi_1(t) = \chi(t)$ μ-pp, c. q. f. d.

Nous pouvons maintenant étudier l'équivalence unitaire des opérateurs autoadjoints bornés. Dans le cas des opérateurs à spectre discret, le problème est bien élémentaire et revient à l'égalité des rangs des projections propres. Nos considérations nous permettent de conserver cette caractérisation par l'intermédiaire des opérateurs $\chi(t)$. Les invariants unitaires ne sont pas essentiellement différents de ceux déjà connus (*voir* [12] ou [19]) mais leur interprétation [le rang des „opérateurs propres généralisés“ $\chi(t)$] nous semble être nouvelle.

Soient A et B deux opérateurs autoadjoints bornés, $E_A(\sigma)$ et $E_B(\sigma)$ leurs familles spectrales, et soit $\mu(\sigma)$ une mesure borélienne telle que $E_A(\sigma)$ et $E_B(\sigma)$ soient absolument continues par rapport à $\mu(\sigma)$. Soit $\mathfrak{E}$ un espace admis par rapport à A et B, et soient $\chi_A(t)$ et $\chi_B(t)$ les opérateurs propres généralisés [c'est-à-dire vérifiant (6. 10), (6. 11) et (6. 12)] de A et B.

Proposition 6. 8. *Les opérateurs A et B sont unitairement équivalents si et seulement si $\chi_A(t)$ et $\chi_B(t)$ ont le même rang μ-pp.*

Démonstration. A et B sont unitairement équivalents si et seulement si $E_A(\sigma)$ et $E_B(\sigma)$ (σ borélien $\subset R^1$) sont unitairement équivalents. En vertu de la proposition 6. 7 et de la proposition 5. 1, $E_A(\sigma)$ et $E_B(\sigma)$ (σ borélien $\subset R^1$) sont unitairement équivalents si et seulement si $\chi_A(t)$ et $\chi_B(t)$ ont le même rang μ-pp, c. q. f. d.

Montrons finalement, comment le théorème suivant de J. von Neumann [28] sur les fonctions [29] d'un opérateur autoadjoint découle de nos résultats:

Soient A et B deux opérateurs autoadjoints bornés tels que B commute avec tout $\Phi \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ commutant avec A; alors B est une fonction de A.

Démonstration. Soit $\mathfrak{E}$ un espace admis par rapport à A et B. Soit $\Phi_m(t)e = \overline{\langle e_m^*(t)|e\rangle} e_1^*(t)$ $(e \in \mathfrak{E})$, où $\chi(t)e = \sum \overline{\langle e_m^*(t)|e\rangle} e_m^*(t)$ est la décomposition de $\chi(t)$ donnée par la proposition 4. 2. Evidemment $|\langle \Phi_m(t)e|f\rangle|^2 \leqq \langle \chi(t)e|e\rangle \langle \chi(t)f|f\rangle$ et $\langle \Phi(t)e|f\rangle$ est une fonction borélienne quel que soit $f \in \mathfrak{E}$. Par conséquent, en vertu de la proposition 2. 5, il existe un $\Phi_m e \in \mathcal{H}$,

---

[28]) J. von Neumann [18], F. Riesz [21].

[29]) Dans le sens usuel; *voir* par exemple [22], Ch. VII, § 1 et § 2.

tel que $(\chi\Phi_m e)(t)=\Phi_m(t)e$ μ-pp et [en vertu de (2.28)]

$$\|\Phi_m e\|^2 \leqq \int_{R^1} \langle\chi(t)e|e\rangle d\mu(t)=\|e\|^2$$

L'application $e\to\Phi_m e$ est linéaire et continue (dans $\mathcal{H}$). Elle se prolonge par continuité en un seul opérateur $\Phi_m\in\mathfrak{L}(\mathcal{H};\mathcal{H})$. Comme on a [en vertu du fait que $e_m^*(t)\in\mathcal{E}(t)$, $m=1,2,\ldots$]

$$\begin{aligned}(\Phi_m Ae|f) &= \int_{R^1} \langle(\chi\Phi_m Ae)(t)|f\rangle d\mu(t)=\int_{R^1}\langle\Phi_m(t)Ae|f\rangle d\mu(t)=\\ &=\int_{R^1} t\langle\Phi_m(t)e|f\rangle d\mu(t)=\int_{R^1}\langle\Phi_m(t)e|Af\rangle d\mu(t)=\\ &=(\Phi_m e|Af)=(A\Phi_m e|f) \qquad (e,f\in\mathcal{E}),\end{aligned}$$

il résulte $\Phi_m A=A\Phi_m$; par conséquent $\Phi_m B=B\Phi_m$. En utilisant la proposition 6.2, nous obtenons pour $e\in\mathcal{E}$ fixé

$$\langle\Phi_m(t)Be|f\rangle=\langle(\chi\Phi_m Be)(t)|f\rangle=\lim\frac{\langle E(\sigma_k^{(n_p)})\Phi_m Be|f\rangle}{\mu(\sigma_k^{(n_p)})}=$$

$$=\lim\frac{\langle E(\sigma_k^{(n_p)})\Phi_m e|Bf\rangle}{\mu(\sigma_k^{(n_p)})}=\langle(\chi\Phi_m e)(t)|Bf\rangle=\langle\Phi(t)e|Bf\rangle \quad (\text{où } t\in\sigma_k^{(n_p)})$$

pour tout $f\in\mathcal{E}$ et $t\in R^1$ en dehors d'un ensemble $N_m(e)$ de μ-mesure nulle. Soit $N_m=\bigcup_{e\in\mathcal{E}_{00}} N_m(e)$. Alors $\mu(N_m)=0$ et

$$\langle\Phi_m(t)Be|f\rangle=\langle\Phi_m(t)e|Bf\rangle \tag{6.14}$$

quel que soit $e,f\in\mathcal{E}$ et $t\notin N_m$. Soit $N=\bigcup_m N_m$. Alors N est à son tour de μ-mesure nulle et de (6.14) nous obtenons que pour tout $t\notin N$ et $m=1,2,\ldots$

$$\overline{\langle e_m^*(t)|Be\rangle}\langle e_1^*(t)|f\rangle=\overline{\langle e_m^*(t)|e\rangle}\langle e_1^*(t)|Bf\rangle \tag{6.15}$$

quel que soit $e,f\in\mathcal{E}$. Soit $e_1^*(t)\neq 0$ [c'est-à-dire $t\notin\Omega_0$, ou $\chi(t)\neq 0$] et soient $e_1,f_1\in\mathcal{E}$, tels que $\langle e_1^*(t)|e_1\rangle\neq 0\neq\langle e_1^*(t)|f_1\rangle$. Alors de (6.15) on déduit (en posant d'abord $e=e_1, f=f_1$, puis $e=f_1, f=f_1$)

$$\frac{\overline{\langle e_1^*(t)|Be_1\rangle}}{\overline{\langle e_1^*(t)|e_1\rangle}}=\frac{\langle e_1^*(t)|Bf_1\rangle}{\langle e_1^*(t)|f_1\rangle}=\frac{\overline{\langle e_1^*(t)|Bf_1\rangle}}{\overline{\langle e_1^*(t)|f_1\rangle}}$$

Par conséquent, pour $t\notin N$ la valeur du rapport $\langle e_1^*(t)|Be\rangle/\langle e_1^*(t)|e\rangle$ ne dépend pas de e, sous l'hypothèse qu'elle soit déterminée. Soit $b_0(t)$ cette valeur et soit $b(t)$ la fonction prolongeant $b_0(t)$ sur tout R^1, identiquement nulle sur $\Omega_0\cup N$. Alors $b(t)$ est une fonction réelle univoquement déterminée. En outre $b(t)$ est une fonction borélienne. En effet comme $\Omega_0\cup N$ est un ensemble borélien (car il est μ-mesurable), il nous reste à démontrer que $b_0(t)$ est borélienne sur $R^1-\Omega_0 \cup N$. Pour cela, soit $\{e_n\}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans $\mathfrak{E}$ et soit $A_n=\{t: \langle e_1^*(t)|e_n\rangle \neq 0\}$. Alors $\bigcup_n A_n = R^1-\Omega_0$ et $b_0(t)=\langle e_1^*(t)|Be_n\rangle/\langle e_1^*(t)|e_n\rangle$ est sur tout $A_n \cap (T-N)$ évidement borélienne. Il en résulte aisément que $b_0(t)$ est borélienne sur $T-\Omega_0 \cup N = (\bigcup_n A_n) \cap (T-N)$, donc que $b(t)$ est borélienne. D'autre part de (6. 15) nous obtenons

$$\overline{\langle e_m^*(t)\,|\,Be\rangle} = b(t)\overline{\langle e_m^*(t)\,|\,e\rangle}$$

pour tout $t \notin N$, $e \in \mathfrak{E}$ et $m=1,2,\ldots$. En utilisant encore une fois la proposition 4. 2, on déduit que $\chi(t)Be=b(t)\chi(t)e$ quel que soit $e\in\mathfrak{E}$ et $t\notin N$. Par conséquent

$$(Be|f)=\int_{R^1}\langle\chi(t)Be|f\rangle d\mu(t)=\int_{R^1} b(t)\langle\chi(t)e|f\rangle d\mu(t)=$$
$$=\int_{R^1} b(t)d(E(t)e|f) \qquad (e,f\in\mathfrak{E})$$

ce qui montre justement que $B=b(A)$, c. q. f. d.

Ouvrages cités

[1] W. G. Bade—J. T. Schwartz, On Mautner's eigenfunction expansion, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **42** (1956), 519—525.

[2] Y. M. Berezansky, Sur la décomposition en fonctions propres généralisées des opérateurs différentiels autoadjoints, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **108** (1956), 379—383 (en russe).

[3] F. E. Browder, Eigenfunction expansions for formally selfadjoint partial differential operators. I, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **42** (1956), 769—772.

[4] F. E. Browder, Eigenfunction expansions for non-symmetric partial differential operators. I, *American Journal of Math.*, **80** (1958), 365—381.

[5] N. Dinculeanu, Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **245** (1957), 1203—1205.

[6] N. Dinculeanu, Mesures vectorielles et opérations linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **246** (1958), 2328—2331.

[7] N. Dinculeanu, Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires. III, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 59—68.

[8] C. Foiaş, Sur la décomposition spectrale en opérateurs propres des opérateurs formellement symétriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **246** (1958), 3147—3148.

[9] C. Foiaş, Sur la décomposition intégrale des familles semi-spectrales en opérateurs qui sortent de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 904—906.

[10] C. Foiaş, Sur la décomposition spectrale en opérateurs propres des opérateurs linéaires dans les espaces nucléaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 1105—1108.

[11] K. Friedrichs, Die unitären Invarianten selbstadjungierter Operatoren im Hilbertschen Raum, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, **45** (1935), 79—82.

[12] L. Gårding, Eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators, *C. R. du douzième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Lund* (1953), 44—55.

[13] I. M. Gelfand—A. G. Kostutchenko, Sur la décomposition en fonctions propres des opérateurs différentiels et d'autres opérateurs, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **103** (1955), 345—352 (en russe).

[14] I. M. Gelfand—G. E. Šilov, Quelques applications de la théorie des fonctions généralisées, *Journal math. pures et appl.*, **35** (1956), 383—414.

[15] L. Hörmander, On the theory of general partial differential operators, *Acta Math.*, **94** (1955), 161—248.

[16] G. I. Katz, Sur la décomposition en fonctions propres des opérateurs autoadjoints, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **119** (1958), 19—23 (en russe).

[17] F. I. Mautner, On eigenfunction expansions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 49—53.

[18] J. von Neumann, Über Funktionen von Funktionaloperatoren, *Annals of Math.*, **32** (1931), 191—226.

[19] J. von Neumann, On rings of operators. Reduction Theory, *Annals of Math.*, **50** (1949), 401—485.

[20] M. A. Neumark, On a representation of additive operator set functions, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **41** (1943), 359—361.

[21] F. Riesz, Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **7** (1935), 147—129.

[22] B. Sz.-Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (Berlin, 1942).

[23] B. Sz.-Nagy, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace*. Appendice au livre „*Leçons d'analyse fonctionnelle*" par F. Riesz et B. Sz.-Nagy.

(Reçu le 20 octobre 1958, sous forme revue le 15 mai 1959)

La mesure de Jordan et l'intégrale de Riemann dans un espace mesuré topologique

Par S. MARCUS à Bucarest

§ 1. Introduction

On a essayé plusieurs fois de caractériser l'intégrabilité riemannienne à l'aide de la mesurabilité jordanienne. Les premiers résultats concernant ce sujet ont été donnés en 1933 par MIRON NICOLESCU [1] et ORRIN FRINK Jr. [2]. J. RIDDER a remarqué déjà en 1935 que la condition qu'une fonction bornée soit mesurable Jordan (dans un sens approché à celui considéré ci-dessous) est nécessaire et suffisante pour que la fonction soit intégrable Riemann [3]. J. S. LIPINSKI a retrouvé certains résultats de FRINK et a donné aussi quelques nouvelles caractérisations de l' intégrabilité riemannienne à l'aide de la mesurabilité jordanienne [4]. Certains auteurs comme par exemple OTTO HAUPT et CHRISTIAN PAUC ont défini, dans un espace mesuré topologique, la notion d'"ensemble quarrable" par la condition que sa frontière soit de mesure nulle [5]. CHRISTIAN PAUC a esquissé, pour les fonctions réelles définies dans un espace mesuré topologique, une théorie de l'intégrale riemannienne basée sur des partitions "horizontales", c'est-à-dire des partitions de l'espace de définition de la fonction [6]. Une notion de "fonction mesurable Jordan" équivalente à celle donnée ci-dessous et un critère correspondant d'intégrabilité riemannienne se trouvent dans un travail de L. H. LOOMIS [7]. Remarquons encore, parmi les travaux concernant une théorie abstraite de l'intégrale riemannienne, ceux de E. HEWITT [8] et HEINZ BAUER [9], [10]. Nous avons esquissé une théorie abstraite de la mesure de Jordan et donné une construction, utilisant des partitions "verticales", pour l'intégrale de Riemann d'une fonction réelle définie sur un ensemble mesurable Jordan de R^n [11].

Les résultats du présent travail généralisent et apportent des améliorations aux résultats de [1], [2], [4] et [11]. En même temps, les démonstrations que nous allons donner, tout en gardant certaines idées, surtout de [2], nous semblent plus simples que celles données par les auteurs cités. En contraste avec le procédé de PAUC, nous utilisons des partitions verticales.

Le théorème 2 du présent travail n'a pas d'analogue dans les travaux cités ci-dessus.

Je remercie M. le Professeur MIRON NICOLESCU pour avoir posé la question qui fait l'objet du présent travail.

§ 2. Ensembles mesurables Jordan

La terminologie sera celle de [12].

Soit S un espace topologique. Soit K une σ-algèbre d'ensembles de S. Supposons que chaque ensemble borelien de S appartient à K.

Soit μ une mesure finie, définie sur K. Nous supposons cette mesure complète, c'est-à-dire que chaque sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle appartient à K. Nous dirons qu'un ensemble $X \subset S$ est *mesurable Jordan* (tout court: mesurable (J)) si $\mu(\mathrm{Fr}\, X) = 0$[1]. Des formules bien connues pour la frontière [$\mathrm{Fr}(X \cup Y) \subset (\mathrm{Fr}\, X) \cup (\mathrm{Fr}\, Y) \supset \mathrm{Fr}(X \cap Y)$, $\mathrm{Fr}\, X = \mathrm{Fr}\, S - X)$ etc.; voir, par exemple, [13]] il s'ensuit qu'une réunion et une intersection finies d'ensembles mesurables (J) sont aussi mesurables (J) et le complémentaire d'un ensemble mesurable (J) est mesurable (J). De $X - Y = X \cap (S - Y)$ et de $\mathrm{Fr}\, S = 0$ il s'ensuit que la différence de deux ensembles mesurables (J) est mesurable (J) et que S est mesurable (J). On a donc le résultat suivant:

Les ensembles mesurables (J) de S forment une algèbre.

Puisque $\mathrm{Int}\, X$ est ouvert, donc borelien, il s'ensuit que pour X mesurable (J) on a

$$\mu(X) = \mu(\mathrm{Int}\, X) + \mu(X \cap \mathrm{Fr}\, X) = \mu(\mathrm{Int}\, X)$$

donc:

chaque ensemble X mesurable (J) appartient à K et on a $\mu(X) = \mu(\mathrm{Int}\, X)$.

De ce que $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}\, X) \subset \mathrm{Fr}\, X$ (voir, par exemple, [13]) et $\mathrm{Fr}\, X = \bar{X} - X$ il s'ensuit que *la frontière et la fermeture d'un ensemble X mesurable (J) sont mesurables (J). On a $\mu(X) = \mu(\bar{X})$.*

Puisque $\mathrm{Int}\, X = \bar{X} - \mathrm{Fr}\, X$ on déduit que *l'intérieur d'un ensemble mesurable (J) est mesurable (J).*

---

[1]) A l'occasion d'une conférence sur l'intégrale de Riemann, que j'ai donnée à la Société Bolyai de Budapest, M. le Professeur G. ALEXITS m'a suggéré la définition du texte. J'ai retrouvé, ultérieurement, cette définition dans le travail [5] de HAUPT et PAUC.

§ 3. Fonctions mesurables Jordan

Soit f une fonction réelle définie sur S. Nous dirons que f est mesurable Jordan sur S si un au moins des ensembles

$$A_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}, \quad B_\alpha = \{x : f(x) \geqq \alpha\}$$

est mesurable (J) pour chaque α, à l'exception possible d'un ensemble au plus dénombrable de valeurs de α.

Puisque $C_\alpha = \{x : f(x) \leqq \alpha\} = S - A_\alpha$, $D_\alpha = \{x : f(x) < \alpha\} = S - B_\alpha$ il s'ensuit que f est mesurable (J) si et seulement si un au moins des ensembles C_α et D_α est mesurable (J) pour chaque α, à l'exception possible d'un ensemble au plus dénombrable de valeurs de α.

Contrairement à ce qui se passe avec les fonctions mesurables Lebesgue, dans la définition des fonctions mesurables (J) on ne peut pas supprimer l'ensemble dénombrable exceptionnel. Par exemple, la fonction égale à 0 pour x irrationnel et à $\frac{1}{q}$ pour $x = \frac{p}{q}$ (p, q entiers, $(p, q) = 1$) est mesurable (J) sur $[0, 1]$ mais l'ensemble A_0 n'est pas mesurable (J).

Désignons par Δ l'ensemble des points de discontinuité de f sur S.

Lemme 1. *Si f est mesurable (J) sur S, alors* $\mu(\Delta) = 0$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un ensemble réel dénombrable H tel que A_α est mesurable (J) pour chaque $\alpha \notin H$. Il existe alors un ensemble réel dénombrable $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ partout dense sur $(-\infty, \infty)$ et tel que A_{β_n} (et donc aussi C_{β_n}) soit mesurable (J) pour $n = 1, 2, \ldots$. Posons $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fr}\, A_{\beta_n}$. On a $\mu(F) = 0$. Il suffit donc de montrer que $\Delta \subset F$.

Soit $x \in \Delta$. Il existe un nombre positif ϱ tel que $\omega(f; x)$ (l'oscillation de f au point x) est $> \varrho$. En tenant compte que $\{\beta_n\}_{1 \leqq n < \infty}$ est partout dense sur $(-\infty, \infty)$, il résulte l'existence de deux nombres entiers positifs p et r tels que

$$\beta_p < f(x) < \beta_r, \quad \beta_r - \beta_p < \frac{\varrho}{2} \tag{1}$$

donc

$$x \in A_{\beta_p} \cap C_{\beta_r}. \tag{2}$$

S'il existait un ensemble ouvert contenant x et contenu dans $A_{\beta_p} \cap C_{\beta_r}$, alors on déduirait de (1) que $\omega(f; x) < \varrho$, ce qui est contradictoire. Il y a donc dans chaque voisinage de x un point au moins qui n'appartient pas à

$A_{\beta_p} \cap C_{\beta_r}$. En vertu de (2) il s'ensuit

$$x \in \mathrm{Fr}(A_{\beta_p} \cap C_{\beta_r}) \subset (\mathrm{Fr}\, A_{\beta_p}) \cup (\mathrm{Fr}\, C_{\beta_r}) = (\mathrm{Fr}\, A_{\beta_p}) \cup (\mathrm{Fr}\, A_{\beta_r})$$

donc $x \in F$ et $\Delta \subset F$.

Supposons maintenant qu'il existe un ensemble réel dénombrable H tel que B_α soit mesurable (J) pour chaque $\alpha \notin H$. Par une voie analogue à celle ci-dessus on trouve que $\Delta \subset F$.

R e m a r q u e. En fait, on a démontré ci-dessus la proposition suivante qui apporte une amélioration au lemme 1:

S'il existe un ensemble Ω partout dense sur $(-\infty, \infty)$ et tel que, pour $\alpha \in \Omega$, l'ensemble A_α soit mesurable (J), alors $\mu(\Delta) = 0$. Au lieu de A_α on peut poser dans cet enoncé B_α.

L e m m e 2. *Si $\mu(\Delta) = 0$, alors il existe un ensemble réel dénombrable H tel que pour $\alpha \notin H$ les ensembles A_α et B_α (donc aussi C_α et D_α) soient mesurables (J).*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\mu(\Delta) = 0$. Posons

$$P_\alpha = \{x : f(x) = \alpha,\ x \in S - \Delta\}, \quad Q_\alpha = \{x : f(x) = \alpha,\ x \in \Delta\}.$$

De $Q_\alpha \subset \Delta$ il s'ensuit que $\mu(Q_\alpha) = 0$. Puisque f est continue sur $S - \Delta$ il s'ensuit que P_α est fermé par rapport à $S - \Delta$ donc $P_\alpha = \Phi \cap (S - \Delta)$, où Φ est un ensemble fermé. De $S \in K$ il s'ensuit que $(S - \Delta) \in K$. D'autre part Φ, étant fermé, est borelien donc $\Phi \in K$ et $P_\alpha \in K$. Posons $N_\alpha = \{x : f(x) = \alpha, x \in S\}$. On a $N_\alpha = P_\alpha \cup Q_\alpha$, donc $N_\alpha \in K$ pour chaque α. Puisque pour $\alpha' \neq \alpha''$ on a $N_{\alpha'} \cap N_{\alpha''} = 0$ et puisque $\mu(S) < \infty$, il résulte l'existence d'un ensemble réel dénombrable H tel que pour $\alpha \notin H$ on ait $\mu(N_\alpha) = 0$.

Nous allons montrer que pour chaque $\alpha \notin H$ les ensembles A_α et B_α sont mesurables (J). En effet, soit $x \in \mathrm{Fr}\, A_\alpha$, où $\alpha \notin H$. Si $x \notin N_\alpha$, alors $x \in A_\alpha \cup D_\alpha$. Si $x \in A_\alpha$, alors $x \in A_\alpha \cap \bar{C}_\alpha$ donc $x \in \Delta$. Si $x \in D_\alpha$, alors $x \in D_\alpha \cap \bar{B}_\alpha$ et de nouveau $x \in \Delta$. Il s'ensuit que $\mathrm{Fr}\, A_\alpha \subset \Delta \cup N_\alpha$. Mais on a $\mu(\Delta) = \mu(N_\alpha) = 0$, donc $\mu(\mathrm{Fr}\, A_\alpha) = 0$ pour chaque $\alpha \notin H$ et A_α est mesurable (J).

D'une manière analogue on prouve que B_α est mesurable (J) pour chaque $\alpha \notin H$.

Des lemmes 1 et 2 et de la remarque qui précède le lemme 2 on déduit le

T h é o r è m e 1. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1° *f est mesurable (J) sur S;*

2° *il existe un ensemble réel dénombrable H tel que, pour $\alpha \notin H$, les ensembles A_α et B_α (donc aussi C_α et D_α) soient mesurables (J);*

3° $\mu(\Delta) = 0$;

4° *un au moins des ensembles* A_α *et* B_α *est mesurable* (J) *pour chaque* α, *à l'exception possible d'un ensemble frontière de valeurs de* α;

5° *les ensembles* A_α *et* B_α *sont mesurables* (J) *pour chaque* α, *à l'exception possible d'un ensemble frontière de valeurs de* α.

En tenant compte du théorème 1 et du fait qu'une suite uniformément convergente de fonctions réelles définies dans S et continues en un même point $x \in S$ a pour limite une fonction continue en x, on obtient le fait suivant: *Si* $\{f_n\}_{1 \leqq n < \infty}$ *est une suite uniformément convergente de fonctions réelles définies et mesurables* (J) *sur* S, *alors* $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *est mesurable* (J) *sur* S.

Existe-t-il un théorème du type Lusin pour les fonctions mesurables (J)? La réponse est donnée par le

Théorème 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que à chaque* $\varepsilon > 0$ *corresponde un ensemble* E_ε *mesurable* (J), *tel que* $\mu(E_\varepsilon) > \mu(S) - \varepsilon$ *et que la restriction de* f *sur* E_ε *soit continue, est que* Δ *soit mesurable* (J) *et* $\mu(\Delta) = 0$.

Démonstration. *La condition est nécessaire.* Soit $\varepsilon > 0$ et soit E_ε mesurable (J) tel que $\mu(E_\varepsilon) > \mu(S) - \varepsilon$ et la restriction de f sur E_ε soit continue. En vertu de ce qu'on a montré dans § 2, $\operatorname{Int} E_\varepsilon$ est mesurable (J) et $\mu(E_\varepsilon) = \mu(\operatorname{Int} E_\varepsilon)$. Posons $G_\varepsilon = \operatorname{Int} E_\varepsilon$. G_ε est un ensemble ouvert, donc f est continue en chaque point de G_ε. De $\Delta \subset S - G_\varepsilon$ et du fait que $S - G_\varepsilon$ est fermé on déduit $\bar{\Delta} \subset S - G_\varepsilon$ et, comme on a $\mu(G_\varepsilon) > \mu(S) - \varepsilon$, on obtient $\mu(\bar{\Delta}) \leqq \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$. Donc $\mu(\bar{\Delta}) = 0$ et $\mu(\operatorname{Fr} \Delta) = \mu(\bar{\Delta} - \Delta) = 0 = \mu(\Delta)$. On a prouvé ainsi que Δ est mesurable (J) et $\mu(\Delta) = 0$.

La condition est suffisante. En effet, si Δ est mesurable (J) et $\mu(\Delta) = 0$, alors f est continue en chaque point de l'ensemble mesurable (J) $S - \Delta$, où $\mu(S - \Delta) = \mu(S)$. On peut donc prendre $E_\varepsilon = S - \Delta$.

§ 4. L'intégrale de Riemann

Soit f une fonction réelle, définie et bornée sur S. Désignons par m et M les bornes de f sur S. Supposons que pour tout α, β $(\alpha < \beta)$, sauf peut-être les points d'un ensemble dénombrable H de nombres réels, l'ensemble $B_\alpha \cap D_\beta = \{x : \alpha \leqq f(x) < \beta\}$ est mesurable (J). Soit $a < m \leqq M < b$. (donc $a \notin H$, $b \notin H$). Considérons une partition $\delta = (a = y_0 < y_1 < \cdots < y_i < y_{i+1} < \cdots < y_n = b)$ de $[a, b]$ telle que $y_i \notin H$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Posons

$$s_\delta = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \mu(B_{y_i} \cap D_{y_{i+1}}), \quad S_\delta = \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} \cdot \mu(B_{y_i} \cap D_{y_{i+1}}).$$

On a $a \cdot \mu(S) \leqq s_\delta \leqq S_\delta \leqq b \cdot \mu(S)$ donc il existe

$$U = \sup_\delta \{s_\delta\}, \quad V = \inf_\delta \{S_\delta\}.$$

Par un raisonnement bien connu on montre que si δ' est plus fine que δ, alors $s_\delta \leqq s_{\delta'}$, $S_{\delta'} \leqq S_\delta$. On déduit que pour deux partitions arbitraires δ_1 et δ_2, on a $s_{\delta_1} \leqq S_{\delta_2}$, donc $U \leqq V$.

Par définition, s'il existe un ensemble réel dénombrable H tel que pour $\alpha \notin H, \beta \notin H$ l'ensemble $B_\alpha \cap D_\beta$ soit mesurable (J) et si $U = V$, alors f est *intégrable Riemann* (tout court: integrable (R)) sur S et la valeur $U = V$ est l'intégrale riemannienne de f sur S:

$$(R) \int_S f(x)\, d\alpha.$$

L'ensemble H est *l'ensemble exceptionnel* de f.

Théorème 3. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction réelle f, définie et bornée sur S, soit intégrable Riemann sur S, est que f soit mesurable (J) sur S.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit f intégrable (R) sur S. Il existe donc H réel dénombrable tel que pour $\alpha \notin H, \beta \notin H$ l'ensemble $B_\alpha \cap D_\beta$ soit mesurable (J). Mais de $a < m$ il s'ensuit $a \notin H$, car dans le cas contraire $B_\alpha \cap D_\beta$ serait non mesurable (J) pour chaque $\alpha < m$, ce qui est contrairement à l'hypothèse. Donc $B_a \cap D_\beta$ est mesurable (J) pour chaque $\beta \notin H$. De $B_a \cap D_\beta = D_\beta$ il s'ensuit alors que D_β est mesurable (J) pour $\beta \notin H$ donc B_β (le complémentaire de D_β) est aussi mesurable (J) pour $\beta \notin H$ et f est mesurable (J).

La condition est suffisante. Soit f bornée et mesurable (J) sur S. Soit $\varepsilon > 0$. Désignons par δ une partition de $[a, b]$ telle que $y_i \notin H$, où par H on a désigné l'ensemble exceptionnel de f. Supposons que $\nu(\delta) = \max\limits_{0 \leqq i \leqq n-1} (y_{i+1} - y_i) < \frac{\varepsilon}{\mu(S)}$. On a

$$0 \leqq V - U \leqq S_\delta - s_\delta = \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) \cdot \mu(B_{y_i} \cap D_{y_{i+1}}) < \frac{\varepsilon}{\mu(S)} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(B_{y_i} \cap D_{y_{i+1}}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\mu(S)} \cdot \mu(S) = \varepsilon,$$

donc $U = V$ et f est intégrable (R) sur S.

Théorème 4. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction simple f, définie sur S, soit intégrable (R) sur S est que chaque ensemble de niveau de f soit mesurable (J).*

Démonstration. *La condition est nécessaire.* Soient $y_1 < y_2 < \cdots < y_i < \cdots < y_n$ les valeurs prises par f sur S. Posons $L_i = \{x : f(x) = y_i, x \in S\}$. Supposons que f soit intégrable (R) sur S. Il s'ensuit que, à l'exception possible d'un ensemble dénombrable de valeurs α et β, $B_\alpha \cap D_\beta$ est mesurable (J). Admettons, par réduction à l'absurde, qu'il existe un entier p tel que $1 \leqq p \leqq n$ et L_p ne soit pas mesurable (J). Si $1 < p < n$, alors il y a une infinité non dénombrable de valeurs de α et β telles que $y_{p-1} < \alpha \leqq y_p < \beta < y_{p+1}$ et pour ces valeurs on a $L_p = B_\alpha \cap D_\beta$, ce qui est contradictoire. Si $p = 1$, alors pour chaque α tel que $y_1 < \alpha < y_2$ l'ensemble $D_\alpha = L_1$ n'est pas mesurable (J). Si $p = n$, alors pour chaque α tel que $y_{n-1} < \alpha < y_n$ l'ensemble $A_\alpha = L_n$ n'est pas mesurable (J), donc on a de nouveau une contradiction avec la mesurabilité jordanienne de f sur S.

La condition est suffisante. Supposons que chaque L_i $(1 \leqq i \leqq n)$ est mesurable (J). Dans ce cas, pour chaque α l'ensemble A_α, comme réunion de certains des ensembles $L_1, L_2, \ldots, L_n$, est mesurable (J). Donc f est mesurable (J) et, en vertu du théorème 3, f est intégrable (R) sur S.

Théorème 5. *Si f est intégrable (R) sur S, alors il existe une suite uniformément convergente de fonctions f_n simples et mesurables (J) sur S telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.*

Démonstration. Soit $\{\delta_n\}$ une suite de partitions de $[a, b]$ $(a < m \leqq M < b)$ où $\delta_n = (a = y_0^n < y_1^n < \cdots < y_i^n < y_{i+1}^n < \cdots < y_{p_n}^n = b)$ et

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0 \leqq i \leqq p_n - 1} (y_{i+1}^n - y_i^n) = 0.$$

Désignons par H l'ensemble exceptionnel de f et supposons que $y_i^n \notin H$ pour $i = 0, 1, \ldots, p_n$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$. Posons

$$f_n(x) = y_i^n \quad \text{si} \quad y_i^n \leqq f(x) < y_{i+1}^n \quad (n = 1, 2, \ldots; i = 0, 1, \ldots, p_n).$$

f_n est une fonction simple et on a $L_i^n = \{x : f_n(x) = y_i^n\} = B_{y_i^n} \cap D_{y_{i+1}^n}$ donc L_i^n est mesurable (J) pour $i = 0, 1, \ldots, p_n$ et $n = 1, 2, \ldots$. En vertu du théorème 4 il s'ensuit que chaque f_n est intégrable (R) sur S.

Montrons que la convergence de $\{f_n\}$ vers f est uniforme. On a, en effet, $|f_n(x) - f(x)| \leqq y_{i+1}^n - y_i^n \leqq \max\limits_{0 \leqq i \leqq p_n - 1} (y_{i+1}^n - y_i^n) = \lambda_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Des théorèmes 1, 3 et 5 on déduit, compte tenu de la remarque faite avant le théorème 2, le

Théorème 6. *Si f est une fonction réelle, définie et bornée sur S, alors les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1° *f est mesurable (J) sur S;*

2° $\mu(\Delta)=0$;

3° *f est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions simples, intégrables (R) sur S.*

4° *f est intégrable (R) sur S.*

Ouvrages cités

[1] Miron Nicolescu, Sur les fonctions mesurables (J), *Bulletin des Sciences Math.*, **57** (1933), 276—281.

[2] Orrin Frink Jr., Jordan measure and Riemann integration, *Annals of Math.*, **34** (1933), 518—526.

[3] J. Ridder, Integration in abstrakten Räumen, *Fundamenta Math.*, **24** (1935), 72—117.

[4] J. S. Lipinski, Sur les ensembles $\{f(x)>a\}$, où $f(x)$ sont des fonctions intégrables au sens de Riemann, *Fundamenta Math.*, **43** (1956), 202—229.

[5] Otto Haupt—Christian Pauc, Mesure et topologie adaptées. Espaces mesurés topologiques, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **230** (1950), 711—712.

[6] Christian Pauc, Intégrale de partition et intégrale topologique. Familles dérivantes topologiques, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **230** (1950) 810—811.

[7] L. H. Loomis, Linear functionals and content, *American Journal of Math.*, **76** (1954), 168—182.

[8] Edwin Hewitt, Integral representation of certain linear functionals, *Arkiv för Mat.*, **2** (1952), 269—282.

[9] Heinz Bauer, Über die Beziehungen einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie Radonscher Maße, *Math. Zeitschrift*, **65** (1956), 448-482.

[10] Heinz Bauer, Zur Theorie des Riemann-Integrals in lokal kompakten Räumen, *Sitzungsber. Math.-Natw. Kl. Bayer. Akad. Wiss.*, (1955), 187—208.

[11] S. Marcus, Sur une théorie du type Lebesgue pour l'intégrale de Riemann (en roumain, avec un résumé en russe et en français), *Studii şi Cercetări Mat.*, **9** (1958), 333—369.

[12] P. R. Halmos, *Measure Theory* (New York, 1950).

[13] C. Kuratowski, *Topologie I* (Warszawa—Wrocław, 1940), p. 29—30.

(Reçu le 12 février 1959)

On the general theory of Möbius inversion formula and Möbius product

By RICHARD WIEGANDT in Orosháza (Hungary)

1. Introduction

The number-theoretic Möbius function and inversion formula (or Dedekind inversion formula) were generalized by DELSARTE [1], WARD [4], and WEISNER [5]. The most general results are in the cited paper of WARD. WARD defined the Möbius (or Dirichlet) product of functions defined for finite intervals of a partially ordered set. (An interval or quotient of a partially ordered set is a subset with elements d satisfying the relation $a \leqq d \leqq b$ for some elements a, b of the considered set.) WARD defined the Möbius function for intervals, and he got a generalization of the Möbius inversion formula. WARD's results include WEISNER's results. DELSARTE generalized the Möbius product and inversion formula to functions defined on the lattice of the subgroups of Abelian groups. Applications to the theory of groups and Abelian groups are given by WEISNER [5] and DELSARTE [1], respectively. A very interesting application of the Delsarte—Möbius inversion formula is in the theory of the group-theoretic ζ-functions introduced by L. RÉDEI [2], [3].

In this paper we consider an arbitrary partially ordered set. Assume that for every element a of the set the relation $d \leqq a$ has only a finite number of solutions in the set. In section 2 we define the sum and inversion function of a function defined on this set, and give a generalization of the Möbius inversion formula. The Möbius function appearing in the inversion formula is also a function of one variable defined on the set. If the considered set has only one minimal element, then these results may be obtained also from WARD [4]. In section 3 we define the Möbius product of functions defined on the considered set, and establish a necessary and sufficient criterion for the associativity and commutativity of the Möbius product, further we give the functions which have an inverse according to the Möbius product. In section 4 we demonstrate how we get the classical number-theoretic results and the results of DELSARTE from our theory. In section 5 we consider the partially ordered set of finite subsets of any countable set. Further specializing our theory, in this case we obtain simple inversion formulae which are applied in the probability and in coloring-theory.

2. Möbius function and inversion formula

Let S be an arbitrary partially ordered set in which the ordering relation is denoted by the sign $<$. If $a \leqq b$ $(a, b \in S)$ is valid, then we say that a is less than or equal to b. Assume that for every element a $(\in S)$ the relation $d \leqq a$ has only a finite number of solutions in S. By a set we understand throughout this paper a partially ordered set of this type.

Throughout this section denote by f and F functions defined on the set S, with values belonging to a given module.

Definition 1. By the sum function of a function f we understand the function

$$F(a) = \sum_{d \leqq a} f(d). \tag{1}$$

The function f is called the inversion function of the function F.

Theorem 1. *Every function F has an inversion function. The inversion function is determined uniquely by its sum function, namely*

$$f(a) = \sum_{d \leqq a} c_{ad} F(d) \qquad (a \in S) \tag{2}$$

is valid, where the coefficients c_{ad} are integers determined by the set S.

Proof. Let a be an arbitrary element of S. Order the elements less than a and the element a into a sequence such that any element of the sequence be not less than the preceding elements. Obviously this is possible. Let the considered sequence be

$$a_1, a_2, \ldots, a_n = a.$$

Writing up $F(a_i)$ for every i $(i = 1, \ldots, n)$ we get

$$F(a_i) = \sum_{k=1}^{n} \vartheta_{ik} f(a_k) \tag{3}$$

where

$$\vartheta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad a_k \leqq a_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Equations (3) form a system of linear equations in the unknowns $f(a_i)$. This system of equations may be solved by CRAMER's formula, since its determinant is the expression

$$D=|\vartheta_{ik}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & 0 \\ \vartheta_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Thus (3) determines $f(a)$ uniquely, and $f(a)$ is a linear expression of values $F(a_i)$ $(i=1, \ldots, n)$, whose coefficients are integers determined by the set S. Thus Theorem 1 is proved.

The coefficients c_{ad} $(d \leqq a;\ a, d \in S)$ in (2) may be expressed in certain cases by the values of the Möbius function defined below.

Let $$\delta(a)=\begin{cases} 1 & \text{if } a \text{ is a minimal element of } S, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(the so-called Dirac function).

Definition 2. The inversion function of the Dirac function δ is called the Möbius function defined on the set S, and it will be denoted by μ.

As a consequence of Definitions 1, 2 we have

$$\sum_{d \leqq a} \mu(d)=\delta(a) \qquad (a \in S).$$

By Theorem 1 the Möbius function exists, and it is uniquely determined.

It is easy to see that, if c_{ad} means the set of the non-negative integers which is partially ordered by the divisibility, then Definition 2 defines just the number-theoretic Möbius function.

Theorem 2. *The coefficients c_{ad} in (2) may be expressed as values of the Möbius function if and only if there exists a function ϱ of two variables defined on S, with values belonging to S such that for every elements a, b $(b \leqq a;\ a, b \in S)$ the equation*

$$\sum_{b \leqq d \leqq a} \mu(\varrho(d, b))=\begin{cases} 1 & \text{if } \ b=a, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

is valid.

Proof. Assume that the coefficients in (2) may be expressed as values of the Möbius function. This means that for every elements a, b $(b \leqq a;$ $a, b \in S)$ there is an element s $(\in S)$ such that

$$\mu(s)=c_{ab} \tag{5}$$

holds. Since s depends only on the elements a, b, so we have $s=\varrho(a, b)$ where ϱ means a function of two variables defined on S and with values belonging to S. Writing this expression of s into (5) we get

$$\mu(\varrho(a, b))=c_{ab}. \tag{6}$$

Substitute the values of f which are determined by the inversion formula (2) into the right-hand side of equation (1). We get

$$F(a)=\sum_{d\leqq a}\sum_{b\leqq d} c_{db}F(b).$$

Changing the summation variables we have

$$F(a)=\sum_{b\leqq a}F(b)\sum_{b\leqq d\leqq a}\mu(\varrho(d, b)).$$

Since by Theorem 1 this equality is an identity, so the equation

$$\sum_{b\leqq d\leqq a}\mu(\varrho(d, b))=\begin{cases}1 & \text{if } b=a,\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

is valid proving the necessity of the condition.

Conversely, suppose that there exists a function which satisfies condition (4). Now the identity

$$F(a)=\sum_{b\leqq a}F(b)\sum_{b\leqq d\leqq a}\mu(\varrho(d, b))$$

holds. Changing the summation variables we get

$$F(a)=\sum_{d\leqq a}\sum_{b\leqq d}\mu(\varrho(d, b))F(b).$$

Hence $\sum_{b\leqq d}\mu(\varrho(d, b))F(b)$ is the inversion function of F, and by Theorem 1 it is uniquely determined. Thus we have

$$f(a)=\sum_{b\leqq d}\mu(\varrho(d, b))F(b).$$

This means that the coefficients in (2) may be expressed as values of the Möbius function, completing the proof.

Theorem 3 (general Möbius inversion formula). *If there exists a function ϱ defined on S which satisfies condition* (4), *then the equations*

$$\sum_{d\leqq a}f(d)=F(a) \qquad (a\in S),$$

$$\sum_{d\leqq a}\mu(\varrho(a, d))F(d)=f(a) \qquad (a\in S)$$

imply each other.

Theorem 3 is a simple consequence of Theorems 1 and 2.

On a set there may be defined sometimes more functions which satisfy condition (4). If ϱ and σ are two functions defined on S which fulfil condition (4), then by Theorem 3

$$\sum_{d \leqq a} \mu(\varrho(a, d)) F(d) = \sum_{d \leqq a} \mu(\sigma(a, d)) F(d) \qquad (a \in S)$$

is valid for every function F. This is possible only if

$$\mu(\varrho(a, b)) = \mu(\sigma(a, b))$$

holds for every elements a, b ($b \leqq a$; $a, b \in S$).

Conversely, there exist sets, on which no function satisfying condition (4) exists.

These assertions will be proved by the two following examples.

Example 1. Consider the set $S_1 = \{a, b, c, d, e\}$ with the partial ordering

$$a < b < e, \quad c < d < e.$$

It is easy to see that the values of the inversion function f of any function F are

$$f(a) = F(a), \quad f(c) = F(c),$$
$$f(b) = F(b) - F(a), \quad f(d) = F(d) - F(c),$$
$$f(e) = F(e) - F(b) - F(d) + 0 \cdot F(a) + 0 \cdot F(c);$$

and the values of the Möbius function are

$$\mu(a) = 1, \quad \mu(c) = 1,$$
$$\mu(b) = -1, \quad \mu(d) = -1,$$
$$\mu(e) = 0.$$

We see that in the expressions of the values of f, the coefficients of F may be substituted by the values of the Möbius function. So there exists a function defined on S_1 which fulfils condition (4). It is easy to see that there are more than one such functions.

Example 2. Consider the set $S_2 = \{a, b, c, d, e\}$ with the partial ordering

$$a, b < d; \quad b, c < e.$$

It is easy to see that the values of the inversion function f of any function F are

$$f(a) = F(a), \quad f(b) = F(b), \quad f(c) = F(c),$$
$$f(d) = F(d) - F(a) - F(b),$$
$$f(e) = F(e) - F(b) - F(c);$$

however, the values of the Möbius function are

$$\mu(a)=\mu(b)=\mu(c)=1, \quad \mu(d)=\mu(e)=-2.$$

We see that in the values of f, the coefficients of F may not be replaced by the values of the Möbius function, thus there does not exist any function defined on S_2 which fulfils condition (4).

3. Möbius product

In his cited paper DELSARTE defined the Möbius product of functions on finite Abelian groups. It is easy to generalize this definition to functions which are defined on any set S. For this aim consider the set $\mathfrak{F}$ of functions defined on the set S with values belonging to a given field. Let α be a function of two variables defined on S and with values belonging to S.

Definition 3. The Möbius product of two functions f, g $(\in \mathfrak{F})$ with respect to the function α (shortly their α-product) is the function

$$F(a)=f \overset{\circ}{\alpha} g=\sum_{d \leqq a} f(d)\, g(\alpha(a, d)) \qquad (a \in S).$$

The question arises under what conditions is the Möbius product associative and commutative. To examine this question we need the idea of factor-function.

Definition 4. A function α of two variables defined on the set S is called a factor-function, if it satisfies the conditions

a) $\alpha(a, b) \leqq a$ $\qquad (b \leqq a;\ a, b \in S)$,

b) $\alpha(a_1, b)<\alpha(a_2, b)$ $\qquad (b \leqq a_1<a_2;\ a_1, a_2, b \in S)$,

c) $\alpha(a, \alpha(a, b))=b$ $\qquad (b \leqq a;\ a, b \in S)$,

d) $\alpha(\alpha(a, c), \alpha(b, c))=\alpha(a, b)$ $\qquad (c \leqq b \leqq a;\ a, b, c \in S)$.

Theorem 4. *$\mathfrak{F}$ is a commutative semi-group with identity with respect to the α-product if and only if α is a factor-function. The Dirac function δ is the identity of $\mathfrak{F}$.*

In the proof of Theorem 4 we shall use some properties of the factor-functions. First we investigate these properties. Let α be any factor-function.

Property 1. If $\alpha(a, b_1)=\alpha(a, b_2)$ $(b_1, b_2 \leqq a)$, then $b_1=b_2$.

Namely, using condition c) twice, we get

$$b_1=\alpha(a, \alpha(a, b_1))=\alpha(a, \alpha(a, b_2))=b_2.$$

Property 2. If $b_1 < b_2 \leqq a$ $(a, b_1, b_2 \in S)$, then $\alpha(a, b_1) > \alpha(a, b_2)$.

By condition $d)$

$$\alpha(a, b_2) = \alpha(\alpha(a, \alpha(b_2, b_1)), \alpha(b_2, \alpha(b_2, b_1)))$$

is valid. Using condition c) on the right-hand side we get

$$\alpha(a, b_2) = \alpha(\alpha(a, \alpha(b_2, b_1), b_1). \tag{6}$$

Since $b_2 \leqq a$, by condition b) we have $\alpha(b_2, b_1) \leqq \alpha(a, b_1)$, and so by condition a) $\alpha(b_2. b_1) \leqq a$. Using again condition a) we get $\alpha(a, \alpha(b_2, b_1)) \leqq a$. Thus applying condition b) for (6) we get

$$\alpha(a, b_2) \leqq \alpha(a, b_1).$$

Since $b_1 \neq b_2$, therefore by Property 1

$$\alpha(a, b_1) > \alpha(a, b_2)$$

is valid.

Property 3. In S, $\alpha(a, a)$ is the unique minimal element which is less than or equal to a.

Let a_0 be any minimal element of S, less than a. By condition c) we have

$$a_0 = \alpha(a, \alpha(a, a_0)) = \alpha(a, d)$$

where we have denoted the element $\alpha(a, a_0)$ by d. Since, by Property 2, $\alpha(a, a)$ is the least element among the elements $\alpha(a, d)$ $(d \leqq a)$, therefore

$$a_0 = \alpha(a, a)$$

holds necessarily.

For any two given elements a, b $(b \leqq a;\ a, b \in S)$ the set of elements d which satisfy the relation $b \leqq d \leqq a$, is called the interval $[b, a]$.

By Property 3 the elements less than or equal to a form exactly the interval $[a_0, a]$.

In the sequel let a_0 mean the element $\alpha(a, a)$.

Property 4. $\alpha(a, a_0) = a$.

Namely, using Property 3 and condition c), we get

$$\alpha(a, a_0) = \alpha(a, \alpha(a, a)) = a.$$

Property 5. The correspondence $d \leftrightarrow \alpha(a, d)$ is a one-to-one mapping between the elements of intervals $[b, a]$ and $[a_0, \alpha(a, b)]$.

Property 1 implies that this correspondence is one-to-one. By Property 2 $\alpha(a, d) \leqq \alpha(a, b)$ $(d \in [b, a])$ holds, thus the elements $\alpha(a, d)$ belong to the interval $[a_0, \alpha(a, b)]$. Hence it is sufficient to prove that to every element d' $(\in [a_0, \alpha(a, b)])$ there belongs an element d $(\in [b, a])$ such that $d' = \alpha(a, d)$

holds. Let $d = \alpha(a, d')$ be an element belonging to an arbitrary element d' ($\in [a_0, \alpha(a, b)]$). Using condition c) we get

$$\alpha(a, d) = \alpha(a, \alpha(a, d')) = d'.$$

We show that $d \in [b, a]$ holds. Since $d = \alpha(a, d')$, so by condition a) $d \leqq a$ is valid. Since $d' \leqq \alpha(a, b)$, therefore by Property 2 we have

$$\alpha(a, d') \geqq \alpha(a, \alpha(a, b)),$$

that is

$$\alpha(a, \alpha(a, d)) \geqq \alpha(a, \alpha(a, b)).$$

Applying condition c) to both sides we get $d \geqq b$. Thus Property 5 is proved.

Property 6. The correspondence $d \leftrightarrow \alpha(d, b)$ is a one-to-one mapping between the elements of $[b, a]$ and $[a_0, \alpha(a, b)]$.

Namely, condition b) implies $\alpha(d, b) \in [a_0, a(a, b)]$. Hence it is sufficient to prove that every element d' ($\in [a_0, \alpha(a, b)]$) may be represented uniquely in the form $d' = \alpha(d, b)$ ($d \in [b, a]$). Let d' be an arbitrary element of the interval $[a_0, \alpha(a, b)]$. By Property 5 the elements d' are of the form $\alpha(a, d^*)$ where d^* is a uniquely determined element of the interval $[b, a]$. Using condition d) we get

$$d' = \alpha(a, d^*) = \alpha(\alpha(a, \alpha(d^*, b)), \alpha(d^*, \alpha(d^*, b))).$$

Using condition c) on the right-hand side, we get

$$d' = \alpha(\alpha(a, \alpha(d^*, b)), b),$$

i. e. $d' = \alpha(d, b)$, where $d = \alpha(a, \alpha(d^*, b))$. Like d^*, d is uniquely determined too. Since by condition a) $d = \alpha(a, \alpha(d^*, b)) \leqq a$ holds, so by conditions c) and b) we have

$$b = \alpha(d^*, \alpha(d^*, b)) \leqq \alpha(a, \alpha(d^*, b)) = d,$$

therefore $d \in [b, a]$ is valid, proving the statement.

We return now to the proof of Theorem 4. Assume that α is an arbitrary factor-function. First we prove that the α-product is commutative. Consider the product

$$f \overset{\circ}{\alpha} g = \sum_{d \leqq a} f(d)\, g(\alpha(a, d)).$$

Since according to Property 5 each element $d (\leqq a)$ may be uniquely represented in the form $d = \alpha(a, d')$ ($d' \leqq a$) and since d' ranges over the interval $[a_0, a]$ too, so we get

$$f \overset{\circ}{\alpha} g = \sum_{d' \leqq a} f(\alpha(a, d'))\, g(\alpha(a, \alpha(a, d'))).$$

Using condition c) we get

$$f \overset{\circ}{\alpha} g = \sum_{d' \leqq a} f(\alpha(a, d'))\, g(d') = g \overset{\circ}{\alpha} f,$$

which proves the commutativity of the α-product.

Next we prove that the α-product is associative. Let f, g, h be arbitrary functions of $\mathfrak{F}$. Consider the α-product

$$f \overset{\circ}{\alpha} (g \overset{\circ}{\alpha} h) = \sum_{d \leqq a} f(d) \sum_{d^* \leqq \alpha(a, d)} g(d^*)\, h(\alpha(\alpha(a, d), d^*)). \tag{7}$$

By Property 6 d^* is of the form $d^* = \alpha(d', d)$, where d' is a uniquely determined element of the interval $[d, a]$, which ranges over the interval $[d, a]$ when d^* ranges over the interval $[a_0, \alpha(a, d)]$. Taking this into consideration, transform the right-hand side of (7). We get

$$f \overset{\circ}{\alpha} (g \overset{\circ}{\alpha} h) = \sum_{d \leqq a} f(d) \sum_{d \leqq d' \leqq a} g(\alpha(d', d))\, h(\alpha(\alpha(a, d), \alpha(d', d))).$$

Applying condition d) to the variable of the function h, we get

$$f \overset{\circ}{\alpha} (g \overset{\circ}{\alpha} h) = \sum_{d \leqq a} f(d) \sum_{d \leqq d' \leqq a} g(\alpha(d', d))\, h(\alpha(a, d')).$$

Changing the summation variables, we can write

$$f \overset{\circ}{\alpha} (g \overset{\circ}{\alpha} h) = \sum_{d' \leqq a} \Big[\sum_{d \leqq d'} f(d)\, g(\alpha(d', d))\Big]\, h(\alpha(a, d')) = (f \overset{\circ}{\alpha} g) \overset{\circ}{\alpha} h.$$

This proves the associativity of the α-product.

We show that the Dirac function δ is the identity of $\mathfrak{F}$ with respect to the α-product. Namely, since $\delta(a)$ is zero unless a is a minimal element of S, so by Property 4 we have

$$\delta \overset{\circ}{\alpha} f = \sum_{d \leqq a} \delta(d)\, f(\alpha(a, d)) = \delta(a_0)\, f(\alpha(a, a_0)) = f(a).$$

Thus we have proved the necessity of the condition.

Suppose, conversely, that the α-product is commutative and associative. By the commutativity we have $f \overset{\circ}{\alpha} g = g \overset{\circ}{\alpha} f$, i. e.

$$\sum_{d \leqq a} f(d)\, g(\alpha(a, d)) = \sum_{d' \leqq a} g(d')\, f(\alpha(a, d')).$$

Since this is true for any two functions $f, g\ (\in \mathfrak{F})$, therefore to each element $d\ (\leqq a)$ there corresponds an element $d'\ (\leqq a)$ such that $d = \alpha(a, d')$ and $d' = \alpha(a, d)$ are valid at the same time. Substituting d' into the expression of d, we get $d = \alpha(a, \alpha(a, d))$ which means just that condition c) holds. Since $\alpha(a, d) = d' \leqq a$, so condition a) holds too.

By the associativity, for any $f, g, h\,(\in \mathfrak{F})$ the equation $f \overset{\circ}{\underset{\alpha}{}} (g \overset{\circ}{\underset{\alpha}{}} h) = (f \overset{\circ}{\underset{\alpha}{}} g) \overset{\circ}{\underset{\alpha}{}} h$ is valid, i. e. we have

$$(8)\quad \sum_{d \leqq a} f(d) \sum_{d^* \leqq \alpha(a,d)} g(d^*)\, h(\alpha(\alpha(a,d), d^*)) = \sum_{d' \leqq a} \sum_{d \leqq d'} f(d)\, g(\alpha(d', d))\, h(\alpha(a, d')).$$

Compare the variables of the function g. Equation (8) holds for any $f, g, h\,(\in \mathfrak{F})$ only if the set of the elements $\alpha(d', d)$ $(d \leqq d' \leqq a)$ coincides with the set of the elements d^* $(\leqq \alpha(a, d))$ and to every element d^* $(\leqq \alpha(a, d))$ there corresponds a single element d' $(\in [d, a])$ such that $d^* = \alpha(d', d)$ is valid. Obviously, in the case $d' < a$ the relation

$$\alpha(d' d) < \alpha(a, d)$$

holds, which implies condition b).

Compare the variables of the function h. Equation (8) holds only if

$$\alpha(\alpha(a, d), d^*) = \alpha(a, d')$$

is valid. Since by the previous facts $d^* = \alpha(d', d)$, so the equation

$$\alpha(\alpha(a, d), \alpha(d', d)) = \alpha(a, d')$$

holds, which implies condition d). Hence the proof is finished.

In the sequel denote by α an arbitrary function of two variables. We shall determine the functions which have a so-called left-α-inverse.

Theorem 5. *If f is any function $\in \mathfrak{F}$ and a is an arbitrary element of S such that $f(\alpha(a, a))$ is not zero, then there exists a function f_α^{-1} such that the equation*

$$(9)\qquad f_\alpha^{-1} \overset{\circ}{\underset{\alpha}{}} f = \delta(a)$$

holds.

Proof. Let a be a minimal element of S. Now we can write (9) in the form

$$f_\alpha^{-1}(a)\, f(\alpha(a, a)) = 1.$$

Since $f(\alpha(a, a)) \neq 0$, so in this case $f_\alpha^{-1}(a)$ is uniquely determined.

Now let a be an arbitrary but not minimal element of S and assume that the statement is true for the elements d less than a. Now (9) has the form

$$\sum_{d \leqq a} f_\alpha^{-1}(d)\, f(\alpha(a, d)) = 0,$$

that is

$$\sum_{d < a} f_\alpha^{-1}(d)\, f(\alpha(a, d)) + f_\alpha^{-1}(a)\, f(\alpha(a, a)) = 0.$$

This equation determines $f_\alpha^{-1}(a)$ uniquely and this completes the proof.

Let α denote an arbitrary factor-function. The next theorem is a trivial consequence of Theorems 4 and 5.

Theorem 6. *If* $f \overset{\circ}{_\alpha} g = F(a)$ $(f, g, F \in \mathfrak{F};\ g(\alpha(a, a)) \neq 0)$, *then* $f(a) = F \overset{\circ}{_\alpha} \overset{-1}{g_\alpha}$.

Let ε denote the function $\varepsilon(a) = 1$ $(a \in S)$. It is easy to see that the function ε is exactly the α-inverse of the Möbius function (and vice versa). In particular for $g = \varepsilon$ we get

$$f(a) = F \overset{\circ}{_\alpha} \mu, \tag{10}$$

which is exactly the Möbius inversion formula. Equation (10) shows that $f(a)$ is a linear expression of the values of $F(d)$ $(d \leqq a)$, with coefficients which are the values of the Möbius function. So by Theorem 2 the factor-function α satisfies condition (4). Hence we have proved

Theorem 7. *Every factor-function α satisfies condition* (4), *i. e. the equation*

$$\sum_{b \leqq d \leqq a} \mu(\alpha(d, b)) = \begin{cases} 1 & \text{if } b = a, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

holds.

It is easy to prove Theorem 7 immediately. Namely, by Property 6 the elements $d' = \alpha(d, b)$ $(d \in [b, a])$ form the interval $[a_0, \alpha(a, b)]$, thus according to the definition of the Möbius function

$$\sum_{b \leqq d \leqq a} \mu(\alpha(d, b)) = \sum_{d' \leqq \alpha(a, b)} \mu(d') = \begin{cases} 1 & \text{if } b = a, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

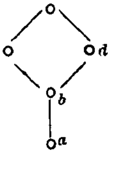
is valid.

It happens that more factor-functions may be defined on a given set. We can see this easily on the example of the modular lattice of order five. There are sets on which we can not define any factor-function, but there exists a function satisfying condition (4).

Example 3. Consider the set $S_3 = \{a, b, c, d, e\}$ with the partial ordering

$$a < b < c < e, \quad a < b < d < e.$$

The diagram of S_3 is the following:



We show that we can not define any factor-function on S_3 Suppose that α

is a factor-function defined on S_8 Now the relations

$$a=\alpha(e,e)<\alpha(e,c)<\alpha(e,b)<\alpha(e,a)=e,$$
$$a=\alpha(e,e)<\alpha(e,d)<\alpha(e,b)<\alpha(e,a)=e$$

are valid. The relations of S_8 and these imply $\alpha(e,c)=\alpha(e,d)$, and so Property 1 implies $c=d$ which is a contradiction.

It is easy to see that any function f defined on S_8 may be expressed by its sum function as follows:

$$f(a)=F(a),$$
$$f(b)=F(b)-F(a),$$
$$f(c)=F(c)-F(b)+0\cdot F(a),$$
$$f(d)=F(d)-F(b)+0\cdot F(a),$$
$$f(e)=F(e)-F(c)-F(d)+0\cdot F(b)+0\cdot F(a),$$

and the values of the Möbius function are

$$\mu(a)=1,\quad \mu(b)=-1,\quad \mu(c)=\mu(d)=\mu(e)=0.$$

Since the coefficients of the values of F are exactly the values of the Möbius function, so we can define a function on S which fulfils condition (4).

4. The theory of Delsarte

1. Let $C_k\,(k=1,2,\dots)$ be groups which are isomorphic to the group of all complex roots of unity, or otherwise expressed, to the group of all finite rotations of the circle. Clearly each C_k is the discrete direct product of quasicyclic groups belonging to the distinct primes. Consider the discrete direct product of the groups $C_k\,(k=1,2,\dots)$, and denote this group by A. Let S_A be the set of the finite subgroups of A. Clearly the elements of S_A are Abelian groups, and every finite Abelian group is isomorphic to any (or more) elements of the set S_A. Denote the inclusion of groups by the sign $\leqq$. Under the relation of inclusion the set S_A is partially ordered. Define the function β of two variables on S_A as follows.

i) If $b\not\leqq a$ $(a,b\in S_A)$, then $\beta(a,b)$ means the identity.

ii) If a $(\in S_A)$ is a cyclic group of order p^n and b is a subgroup of order p^k $(k\leqq n)$ in a then $\beta(a,b)$ means the subgroup of order p^{n-k} in a.

iii) Let a,b $(b\leqq a\in S_A)$ be arbitrary groups. Let $b=\prod_{i=1}^{n} b_i$ be any decomposition of b into the direct product of cyclic groups of prime power order. Obviously the group a may be decomposed into the direct product of cyclic groups of prime power order in the form $a=\prod_{i=1}^{N} a_i$ such that $b_i \leqq \leqq a_i$ $(i=1, \ldots, n)$ hold. Now let $\beta(a, b)$ mean the direct product of the groups $\beta(a_i, b_i)$ $(i=1, \ldots, n)$ and a_i $(i=n+1, \ldots, N)$, i. e.

$$\beta(a, b)=\prod_{i=1}^{n} \beta(a_i, b_i) \prod_{i=n+1}^{N} a_i .$$

We show that the function β is a factor-function. In the cases i), ii) the function β fulfils conditions a), b), c) and d) trivially. In the case iii) β satisfies conditions a) and b) obviously. Since

$$\beta(a, \beta(a, b))=\beta\left(\prod_{i=1}^{N} a_i, \prod_{i=1}^{n} \beta(a_i, b_i) \prod_{i=n+1}^{N} a_i\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^{n} \beta(a_i, \beta(a_i, b_i)) \prod_{i=n+1}^{N} \beta(a_i, a_i)=\prod_{i=1}^{n} b_i=b,$$

so condition c) is fulfilled. Let a, b, c $(c \leqq b \leqq a \in S_A)$ be three arbitrary groups and let

$$c=\prod_{i=1}^{k} c_i, \quad b=\prod_{i=1}^{l} b_i, \quad a=\prod_{i=1}^{n} a_i$$

be their decompositions into cyclic groups of prime power order such that $c_i \leqq b_i$ $(i=1, \ldots, k)$ and $b_i \leqq a_i$ $(i=1, \ldots, l)$ hold. Clearly this is possible. Since in the case ii) condition d) is fulfilled therefore we have

$$\beta(\beta(a, c), \beta(b, c))=\beta\left(\prod_{i=1}^{k} \beta(a_i, c_i) \prod_{i=k+1}^{n} a_i, \prod_{i=1}^{k} \beta(b_i, c_i) \prod_{i=k+1}^{l} b_i\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^{k} \beta(\beta(a_i, c_i), \beta(b_i, c_i)) \prod_{i=k+1}^{l} \beta(a_i, b_i) \prod_{i=l+1}^{n} a_i=$$

$$=\prod_{i=1}^{k} \beta(a_i, b_i) \prod_{i=k+1}^{l} \beta(a_i, b_i) \prod_{i=l+1}^{n} a_i=\beta(a, b).$$

Hence we proved that condition d) is satisfied, and so β is a factor-function.

Since β is a factor-function, so the results of section 3 are true for complex-valued functions defined on S_A. If we consider only functions f such that $f(a)=f(b)$ if a, b $(\in S_A)$ are isomorphic, we get exactly the results of DELSARTE. In this case namely we can define the functions f for every finite Abelian group by the equations

$$f(g_a)=f(a) \qquad (g_a \approx a ;\ a \in S_A)$$

where g_a means an arbitrary finite Abelian group. Since by ii) and iii)

$\beta(a, b)$ $(b \leqq a \in S_A)$ are isomorphic to the factor group a/b, so the β-product of any two functions f, g has the form

$$f \overset{\circ}{\beta} g = \sum_{d \leqq a} f(a)\, g(a/d),$$

which is exactly the Möbius product defined by DELSARTE.

Consider now the group C_k for a fixed positive integer k, and denote the set of the finite subgroups of C_k by S_C. Clearly the inclusion $S_C \subseteqq S_A$ holds, and the elements of S_C are finite cyclic groups. In this special case of DELSARTE's theory we get the classical number-theoretic Möbius function and inversion formula.

2. We may get the number-theoretic Möbius function and inversion formula in another way too. Consider namely the ideals of the ring I of the integers, except for the zero-ideal. Denote the set of these ideals by S_I. Every element of S_I is a principal ideal $\{n\}$ where n means any positive integer. Denote the fact that the ideal $\{d\}$ contains the ideal $\{n\}$ by $\{d\} \leqq \{n\}$ (i. e. the integer d divides n). Thus S_I becames a partially ordered set, and since S_I does not contain the zero-ideal, so every relation $\{x\} \leqq \{n\}$ has only a finite number of solutions for any fixed n. Define the function β of two variables on S_I as follows:

$$\beta(\{n\}, \{d\}) = \begin{cases} \left\{\dfrac{n}{d}\right\} & \text{if } \{d\} \leqq \{n\}, \\ \{1\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is easy to see that the function β satisfies conditions a), b), c) and d), so β is a factor-function. If we apply the results of section 3 to complex-valued functions defined on S_I, then we get again the number-theoretic Möbius function and inversion formula.

We can get similar results as in DELSARTE's theory, if we form the discrete direct sum J of rings I_k $(k = 1, 2, \ldots;$ each I_k being isomorphic to the ring of integers), and apply the results of section 3 to the set of the ideals of J.

5. Möbius inversion formula on a set of subsets

Let M be an arbitrary countable set, and let S_M be the set of the finite subsets of M. In the sequel let s_n $(\in S_M)$ denote any set of n elements. Let $\gamma(s_n, s_k)$ mean the complement of s_k in s_n if the inclusion $s_k \subseteqq s_n$ holds, and the void-set otherwise. γ fulfils condition a), b) and c) trivially.

We show that γ is a factor-function. It is sufficient to prove that condition d) holds. For this aim let $s_l, s_k, s_n (\in S_M)$ be arbitrary sets satisfying the inclusion $s_l \subseteq s_k \subseteq s_n$. The set $s_x = \gamma(\gamma(s_n, s_l), \gamma(s_k, s_l))$ consists of the elements which belong to s_n, but neither to s_l nor to the complement of s_l in s_k. Since $s_l \subseteq s_k$ holds, so the set s_x consists exactly of the elements of the complement of s_k in s_n, i. e. $s_x = \gamma(s_n, s_k)$. This proves our statement.

Theorem 8. *If μ means the Möbius function defined on S_M, and s_n $(\in S_M)$ is an arbitrary set of n elements, then $\mu(s_n) = (-1)^n$.*

Proof. For $n=0$ the assertion is obvious. Assume it is true for the integers k less than n. By the definition of the Möbius function for any positive integer n, we have

$$\sum_{s_k \subseteq s_n} \mu(s_k) = 0,$$

i. e.

$$\sum_{s_k \subset s_n} \mu(s_k) + \mu(s_n) = 0.$$

By the induction hypothesis we have

$$\sum_{s_k \subset s_n} (-1)^k + \mu(s_n) = 0.$$

Since a set of n elements has $\binom{n}{k}$ subsets of k elements, so we can write the left-hand side in the form

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k + \mu(s_n) = 0.$$

Adding $(-1)^n$ to both sides we get

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k + \mu(s_n) = (-1)^n.$$

Since $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$, therefore $\mu(s_n) = (-1)^n$ which completes the proof.

Theorem 9. *Let $f(n)$ be any function defined for non-negative integers and its values belong to a given module. If F is the function defined by the equation*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) = F(n), \tag{11}$$

then

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} F(k) = f(n) \tag{12}$$

is true.

P r o o f. Define the functions f and F on the set S_M by the equations

$$f(s_n)=f(n) \quad \text{and} \quad F(s_n)=F(n) \qquad (s_n \in S_M).$$

Hence according to Theorem 8 we can write equations (11) and (12) in the form

$$\sum_{s_k \subseteqq s_n} f(s_k)=F(s_n),$$

$$\sum_{s_k \subseteqq s_n} \mu(\gamma(s_n, s_k))\, F(s_k)=f(s_n).$$

By Theorem 3 these equations are equivalent, proving our statement.

T h e o r e m 10. *Let $f(n)$ be any complex-valued function defined for non-negative integers. Define the function $F(n)$ recursively, by the equations*

$$F(0)=f(0),$$

$$F(n)=f(n)+anf(n-1) \quad (n>0,\ a \text{ a complex number}).$$

Then f is determined uniquely by F and the equation

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}(-1)^{n-k} a^{n-k} F(k)=f(n)$$

is valid.

P r o o f. Define the functions f, F on S_M by the equations

$$f(s_n)=f(n), \quad F(s_n)=F(n) \qquad (s_n \in S_M).$$

Let ξ denote the function

$$\xi(s_n)=\xi(n)=\begin{cases} 1 & \text{if } n=0, \\ a & \text{if } n=1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Consider the product $\xi \underset{\gamma}{\circ} f$, i. e.

$$\xi \underset{\gamma}{\circ} f=f(n)+anf(n-1)=F(n).$$

Since $\xi(0)$ is not equal to zero, thus by Theorem 6 the equation

$$F \underset{\gamma}{\circ} \xi_\gamma^{-1}=f \tag{13}$$

holds. Our purpose is to determine the function ξ_γ^{-1}. We show that $\xi_\gamma^{-1}= =(-1)^n a^n n!$ holds. This statement is true for $n=0$. Assume it is true for the integers less than n (>0). By the definition of the γ-inverse we have $\xi_\gamma^{-1} \underset{\gamma}{\circ} \xi=\delta$, i. e. in the case $n>0$

$$an\xi_\gamma^{-1}(n-1)+\xi_\gamma^{-1}(n)=0.$$

Using the induction hypothesis for $\xi_\gamma^{-1}(n-1)$ we get

$$(-1)^{n-1} a^n n!+\xi_\gamma^{-1}(n)=0,$$

which proves the statement. Now the equation (13) is of the form

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}(-1)^{n-k} a^{n-k}(n-k)!\,F(k)=f(n),$$

i. e.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}(-1)^{n-k} a^{n-k} F(k)=f(n),$$

and this completes the proof.

Now we give a simple application of Theorem 10.

Example 4. Let f be the function $f(n)=n$, and let $a=1$. Now for the function F occurring in Theorem 10 we get

$$F(n)=n+n(n-1)=n^2.$$

Hence by Theorem 10 the equation

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}(-1)^{n-k} k^2=n$$

holds. Divide both sides by $n!$ and write $l+1$ instead of k. It results

$$\sum_{l=0}^{n-1} \frac{l+1}{l!}(-1)^{n-(l+1)}=\frac{1}{(n-1)!}.$$

Write N instead of $n-1$. We get the formula

$$\sum_{l=0}^{N} \frac{l+1}{l!}(-1)^{N-l}=\frac{1}{N!}.$$

Bibliography

[1] S. Delsarte, Fonctions de Möbius sur les groupes Abeliens finis, *Annals of Math.*, 49 (1948), 600—609.

[2] L. Rédei, Zetafunktionen in der Algebra, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 6 (1955), 5—25.

[3] L. Rédei, *Algebra* I (Leipzig, 1959).

[4] M. Ward, The algebra of lattice functions, *Duke Math. Journal*, 5 (1939), 357—371.

[5] L. Weisner, Abstract theory of inversion of finite series, *Transactions American Math. Soc.*, 38 (1935), 474—484.

(Received April 13, 1959)

Complemented modular lattices derived from non-associative rings

By ICHIRO AMEMIYA [1]) in Tokyo (Japan) and ISRAEL HALPERIN in Kingston (Canada)

§ 1. Introduction

K. D. FRYER and the authors proved in [6] and [2]: if L is a complemented modular lattice and if a normalized frame of order 3 in L satisfies the conditions (3. 1. 7), (5. 1. 1), (5. 1. 2) of [6] (see Remark 1 following Theorem 4 in § 5 below) then L can be coordinatized. The coordinatization uses a ring[2]) $\mathfrak{R}$ with unit satisfying:

(P_1): $\mathfrak{R}$ is *idempotent-associative,* i. e., $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ if any of α, β, γ is idempotent.

(P_2): $\mathfrak{R}$ is *regular,* i. e., for each α there exists a *left partial inverse* β (this means: $\beta\alpha$ is idempotent and $\alpha(\beta\alpha)=\alpha$) and a *right partial inverse* β' (this means: $\alpha\beta'$ is idempotent and $(\alpha\beta')\alpha=\alpha$).[3])

(P_3): In $\mathfrak{R}$, $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ if any of $\alpha\beta, \beta\gamma$ is idempotent.[4])

In this paper we shall make use of the following property which is stronger than (P_2) but which, in the presence of (P_1) and (P_2), is easily seen to be implied by (P_3).

$(\bar{P}_2)$: For every α in $\mathfrak{R}$, $(\alpha)_l=\mathfrak{R}\alpha$ and $(\alpha)_r=\alpha\mathfrak{R}$; for each α there exists β and an idempotent e such that $\alpha e=\alpha$, $\beta\alpha=e$ and for every

---

[1]) Post-doctorate Fellow (of the National Research Council of Canada) at Queen's University.

[2]) Ring means non-associative ring, i. e., an additive group $\mathfrak{R}$ with a left and right distributive multiplication; e is idempotent means $ee=e$. A subgroup I is a left ideal of $\mathfrak{R}$ if $\mathfrak{R}I\subset I$; by duality, a right ideal if $I\mathfrak{R}\subset I$ (henceforth, it is understood that every definition and statement in this paper is to include its dual). The smallest left ideal containing $A\subset\mathfrak{R}$ exists (obviously); it is denoted by $(A)_l$, by $(\alpha)_l$ if $A=(\alpha)$. Obviously, $\mathfrak{R}\alpha\subset(\alpha)_l$.

[3]) VON NEUMANN called an associative ring *regular* if for each α, there exists β with $\alpha\beta\alpha=\alpha$ (then $\alpha\beta, \beta\alpha$ are both idempotent).

[4]) The reader can verify easily that $(P_1), (P_2), (P_3)$ together imply the other condition on $\mathfrak{R}$ proved in [6], namely: $\beta\alpha$ idempotent with $\alpha=\alpha(\beta\alpha)$ implies that $\alpha\beta$ is idempotent.

$\gamma:\alpha\gamma=0$ implies $e\gamma=0$; and for each α there exists β' and idempotent e' such that $e'\alpha=\alpha$, $\alpha\beta'=e'$ and for every $\gamma:\gamma\alpha=0$ implies $\gamma e'=0$.

Although it is not needed for the rest of this paper, we shall show below (see § 4, Corollary to Theorem 2) that in the presence of (P_1) and (P_2), the property (P_3) is equivalent to:

$(P_3)'$: $\mathfrak{R}$ is *alternative*, i.e., the associator $[\alpha,\beta,\gamma]=(\alpha\beta)\gamma-\alpha(\beta\gamma)$ vanishes whenever two of α,β,γ coincide.

In the present paper we consider an arbitrary ring $\mathfrak{R}$ and we define $\mathfrak{R}^a$ to be the set of associating elements[5] in $\mathfrak{R}$ (our $\mathfrak{R}^a$ is denoted as $\mathfrak{R}_0$ in [10] and called there the "Kern" of $\mathfrak{R}$; earlier, it was denoted as N by Bruck and Kleinfeld [3] and called the "Nucleus"). As we show in Lemma 1. 1, $\mathfrak{R}^a$ is an associative subring of $\mathfrak{R}$. We define $L=L(\mathfrak{R})$ to be the set of all $(e)_l$ with e idempotent, ordered by set inclusion. Obviously, L has (0) for zero and, if $\mathfrak{R}$ has a right unit,[6] $\mathfrak{R}$ for unit element. $M_n(\mathfrak{R})$ will denote the ring of all $n\times n$ matrices (α^{ij}) with all α^{ij} in $\mathfrak{R}$ and $S_n=S_n(\mathfrak{R})$ will denote the set of such (α^{ij}) with $\alpha^{ij}=0$ for $i<j$ and all α^{ii} associating. Then $S_1=\mathfrak{R}^a$ and the reader can verify by obvious calculation that for $n=1,2$ or 3, S_n is an associative ring (with a right unit if $\mathfrak{R}$ has a right unit).

For $n=1,2$ or 3 we define $L_n=L_n(\mathfrak{R})$ to be $L(S_n(\mathfrak{R}))$. If $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative, $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{R}^a$ have the same idempotents (obviously) and then L and $L_1=L(\mathfrak{R}^a)$ are isomorphic (obviously).

The main results of this paper are:

(1) If $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and semi-regular[7]) then L is a relatively complemented lattice[8]) with zero, complemented if $\mathfrak{R}$ has a right unit, modular if $\mathfrak{R}$ is regular (§ 3, Theorem 1).

(2) If $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and regular then L_2 is a relatively complemented, modular lattice with zero, complemented with a homogeneous basis of order 2 if $\mathfrak{R}$ has a right unit (§ 5, Theorem 3).

---

5) δ is called *associating* if $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ whenever any of α,β,γ coincide with δ.

6) An idempotent e in $\mathfrak{R}$ is a *right unit* for $\Lambda\subset\mathfrak{R}$ if $\alpha e=\alpha$ for all α in Λ, a *unit* for Λ if $\alpha e=e\alpha=\alpha$ for all α in Λ.

7) See § 3 for definition of "semi-regular"; every idempotent-associative regular ring is necessarily semi-regular.

8) We call an arbitrary ordered set *relatively complemented* if: whenever $a\leqq b\leqq c$ there exists some d (called a *relative complement of b in c over a*, denoted $[c-b]_a$) such that a is the meet of d,b and c is the union of d,b. When a is a zero element we write $[c-b]$ and call it a *relative complement of b in c*. In a lattice we denote union and meet of two elements a,b by $a+b$, ab respectively; if the lattice has a zero element 0 and $ab=0$ we sometimes write $a\oplus b$ in place of $a+b$.

(3) If $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and $(\bar{P}_2)$ holds then L_3 is a relatively complemented modular lattice with zero, complemented with a homogeneous basis of order 3 if $\mathfrak{R}$ has a right unit (§ 5, Theorem 3).

(4) If $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and regular and (P_3) holds (equivalently, $\mathfrak{R}$ is alternative) and $\mathfrak{R}$ has a right unit, then every normalized frame of order 3 for L_3 does satisfy (3. 1. 7), (5. 1. 1), (5. 1. 2) of [6]; and if $\mathfrak{R}$ is the coordinatizing ring of some L', as defined in [6], then L_3 is isomorphic to L'.[9]) Moreover the construction of [6], applied to a suitable normalized frame for L_3 will give a coordinatizing ring which is isomorphic to the original $\mathfrak{R}$[10]) (§ 5, Theorem 4).

We recall that the original construction of a relatively complemented modular lattice with zero L_n, for *every integer* $n \geqq 1$, made by J. VON NEUMANN, required $\mathfrak{R}$ to be associative and regular ([9], Part II, Theorems 2. 14 and 2. 4; [5], § 3. 6).

§ 2 contains some preliminary lemmas of general interest which are required in the other sections.

§ 3 contains the proof of (1). Here Lemma 3. 2 permits us to adapt the usual arguments for the associative, regular case.

§ 5 contains the proofs of (2), (3), (4). Lattice character of L_2 and L_3 is obtained without difficulty but modularity is established only with the help of an embedding theorem for rings by means of which we can reduce the discussion to rings having no idempotents other than 0, 1. The embedding theorem for rings is given in § 4.

§ 2. Preliminaries

By easy calculation the reader can verify the identity:[11])

(2. 1) $$\alpha[\beta, \gamma, \delta]+[\alpha, \beta\gamma, \delta]+[\alpha, \beta, \gamma]\delta=[\alpha\beta, \gamma, \delta]+[\alpha, \beta, \gamma\delta]$$

and hence

(2. 2) $$\alpha[\beta, \gamma, \delta]=[\alpha\beta, \gamma, \delta] \quad \text{if} \quad \alpha \quad \text{is associating,}$$

(2. 3) $$[\alpha, \beta\gamma, \delta]=[\alpha, \beta, \gamma\delta] \quad \text{if} \quad \gamma \quad \text{is associating.}$$

---

9) We actually show that L_3 is isomorphic to the lattice L_3^M of M-sets of vectors used in [2] and shown there to be isomorphic to the given L'. (M-sets and L_3^M are defined in § 5 below.)

10) Whether *all* normalized frames of order 3 for a fixed L_3 give isomorphic coordinatizing rings is not known, even if $\mathfrak{R}$ is associative. However this isomorphism does hold if $\mathfrak{R}$ has "no associative part", i. e., if $B=(0)$ in Theorem 2 (from the embedding construction used in Theorem 3 and the Remark following the proof of Lemma 5. 3 (i)).

11) Given as (2) on page 125 of [12].

We let $A = A(\mathfrak{R})$ denote the set of α in $\mathfrak{R}^a$ for which $\alpha\mathfrak{R}, \mathfrak{R}\alpha \subset \mathfrak{R}^a$ and we let B denote the set of β such that $\beta\alpha = \alpha\beta = 0$ for all α in A.

Lemma 2.1. *A and B are ideals of $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}/B$ is an associative ring, $\mathfrak{R}^a$ is an associative subring of $\mathfrak{R}$ and if $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and regular then $\mathfrak{R}^a$ is regular.*

Proof. To show that A is an ideal we need only prove that α in A implies $\beta\alpha\gamma$ is associating for all β, γ. But (2.2) implies for all δ, ϱ:

$$[\beta\alpha\gamma, \delta, \varrho] = (\beta\alpha)[\gamma, \delta, \varrho] = \beta[\alpha\gamma, \delta, \varrho] = 0,$$

and by duality, $[\delta, \varrho, \beta\alpha\gamma] = 0$. Also, (2.3) implies:

$$[\delta, \beta\alpha\gamma, \varrho] = [\delta, \beta, \alpha\gamma\varrho] = [\delta, \beta\alpha, \gamma\varrho] = 0.$$

Thus $\beta\alpha\gamma$ is associating, so A is an ideal.

Next, B is a right ideal; for if β is in B, and α is in A and γ is arbitrary,

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma = 0, \qquad (\beta\gamma)\alpha = \beta(\gamma\alpha) = 0.$$

By duality, B is also a left ideal, hence an ideal.

Next, (2. 2) and its dual show that for α in A and arbitrary β, γ, δ:

$$\alpha[\beta, \gamma, \delta] = 0 = [\beta, \gamma, \delta]\alpha,$$

so $[\beta, \gamma, \delta]$ is in B. Thus all associators in $\mathfrak{R}/B$ are zero, which means $\mathfrak{R}/B$ is an associative ring.

Next, α and β both associating clearly implies: $\alpha - \beta$ is associating and, from (2. 2), the dual of (2. 2) and (2. 3), $\alpha\beta$ is also associating. Thus $\mathfrak{R}^a$ is a subring, obviously associative.

Finally, suppose $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and regular. If $\beta\alpha = e$ (idempotent) and $\alpha = \alpha e$ and α is associating, then $\alpha\beta$ is idempotent, for $(\alpha\beta)\ (\alpha\beta) = (\alpha\beta\alpha)\beta = \alpha\beta$. Now $(e\beta)\alpha = e$ and $e\beta$ is associating, for (2. 2) and (2. 3) show:

$$[e\beta, \gamma, \delta] = e[\beta, \gamma, \delta] = \beta[\alpha\beta, \gamma, \delta] = 0,$$
$$[\gamma, e\beta, \delta] = [\gamma, \beta(\alpha\beta), \delta] = [\gamma, \beta, \alpha\beta\gamma] = [\gamma, \beta\alpha, \beta\delta] = 0,$$
$$[\gamma, \delta, e\beta] = [\gamma, \delta\beta\alpha, \beta] = [\gamma, \delta\beta, \alpha\beta] = 0,$$

since $\alpha\beta, \beta\alpha$ are idempotent. Thus $\mathfrak{R}^a$ is regular.

Lemma 2. 2. *Suppose $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative. Then if e is idempotent, $(e)_l = \mathfrak{R}e$ (obviously). If h, e, f are idempotents with $\mathfrak{R}h \subset \mathfrak{R}e \subset \mathfrak{R}f$ then there exist orthogonal idempotents*[12] *e_i $(i = 1, 2, 3)$ with $\mathfrak{R}h = \mathfrak{R}e_1$, $\mathfrak{R}e = \mathfrak{R}(e_1 + e_2)$, $\mathfrak{R}f = \mathfrak{R}(e_1 + e_2 + e_3)$.*

[12]) α, β orthogonal means: $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$.

Proof. $\mathfrak{R}h \subset \mathfrak{R}e \subset \mathfrak{R}f$ implies $e=ef$, $h=he=hf$. The lemma holds with $e_1=feh$, $e_2=fe-e_1$, $e_3=f-e_1-e_2$.

Corollary. *If $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative then L is relatively complemented.*

Proof. In Lemma 2.2, $\mathfrak{R}(e_1+e_3)$ is a relative complement of $\mathfrak{R}(e_1+e_2)$ in $\mathfrak{R}(e_1+e_2+e_3)$ over $\mathfrak{R}e_1$.

Lemma 2.3. *Suppose $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative. Then $\alpha-\alpha f$ is an idempotent whenever f is an idempotent such that $(\alpha^2-\alpha)f=\alpha^2-\alpha$ and $f\alpha f=f\alpha$.*

Proof. $(\alpha^2-\alpha)f=\alpha^2-\alpha$ implies $\alpha^2-\alpha^2 f=\alpha-\alpha f$. Now
$(\alpha-\alpha f)(\alpha-\alpha f)=\alpha^2-\alpha f\alpha-\alpha^2 f+\alpha f\alpha f=(\alpha^2-\alpha^2 f)+\alpha(f\alpha f-f\alpha)=\alpha-\alpha f.$

Corollary. *Suppose $\mathfrak{R}$ is an idempotent-associative regular ring and suppose I is an ideal of $\mathfrak{R}$. If either*

(i) *every idempotent in $\mathfrak{R}$ is in the centre*[13]) *of $\mathfrak{R}$ or*

(ii) $I=A$,

then $\mathfrak{R}/I$ is also idempotent-associative and every idempotent in $\mathfrak{R}/I$ is of the form $e+I$ with e idempotent.

Proof. Suppose $\alpha+I$ is idempotent in $\mathfrak{R}/I$. Then $(\alpha+I)(\alpha+I)= =\alpha+I$, hence $\alpha^2-\alpha$ is in I. Since $\mathfrak{R}$ is regular there is an idempotent f such that: $(\alpha^2-\alpha)f=\alpha^2-\alpha$ and $f=\gamma(\alpha^2-\alpha)$ for some γ.

Now f is in the ideal I (since $\alpha^2-\alpha$ is in this ideal), then also $\beta f, f\beta$ are in I for all β.

In case (i) $f\alpha f=f\alpha$. In case (ii) all $f\beta, \beta f$ are associating (by the definition of A) so in this case also

$$\begin{aligned} f\alpha f=ff\alpha f&=(f\gamma)(\alpha^2-\alpha)(\alpha f)=(f\gamma)\alpha(\alpha(\alpha f))-(f\gamma)\alpha(\alpha f)=\\ &=(f\gamma)\alpha((\alpha^2-\alpha)f)=(f\gamma)\alpha(\alpha^2-\alpha)=(((f\gamma)\alpha)\alpha)\alpha-((f\gamma)\alpha)\alpha=\\ &=(f\gamma)(\alpha^2-\alpha)\alpha=ff\alpha=f\alpha.\end{aligned}$$

Thus, in both cases, Lemma 2.3 shows that $e=\alpha-\alpha f$ is idempotent. Since αf is in I, $\alpha+I=e+I$. This means: every idempotent in $\mathfrak{R}/I$ is of the form $e+I$ with e idempotent. This implies that $\mathfrak{R}/I$ is idempotent-associative.

Lemma 2.4. *Suppose $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative. Then $e\alpha-\alpha e$ is in A for every α and every idempotent e.*

13) e is in the centre of $\mathfrak{R}$ means: $e\beta=\beta e$ for all β in $\mathfrak{R}$.

Proof. For any δ in $\mathfrak{R}$, $e+e\delta-e\delta e$ and $e+\delta e-e\delta e$ are idempotents and their difference $e\delta-\delta e$ is associating. Now suppose $\delta=e\delta$ and $\delta e=0$; then $\delta=e\delta-\delta e$ is associating, and also for arbitrary β,

$$\delta\beta=\delta(\beta e-e\beta)+e(\delta\beta)-(\delta\beta)e$$

and

$$\beta\delta=(\beta e-e\beta)\delta+e(\beta\delta)-(\beta\delta)e$$

are associating; so δ is in A. This applies in particular to $\delta=e\alpha-e\alpha e$ so $e\alpha-e\alpha e$ is in A. By duality, $\alpha e-e\alpha e$ is in A. Hence their difference $e\alpha-\alpha e$ is in A.

Corollary. *If $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and regular, $\mathfrak{R}/A$ is idempotent-associative and has all its idempotents in its centre.*

Proof. By the Corollary to Lemma 2.3 every idempotent in $\mathfrak{R}/A$ is of the form $e+A$. Now $(e+A)(\alpha+A)-(\alpha+A)(e+A)=(e\alpha-\alpha e)+A=A$.

Lemma 2.5. *Suppose $\mathfrak{R}$ is a ring with unit. Then*

(i) $\mathfrak{R}$ *is a division ring without zero divisors*[14]) *if and only if* $(\bar{P}_2)$ *holds and* $\mathfrak{R}$ *has no idempotents other than* 0, 1, *and*

(ii) $\mathfrak{R}$ *is an alternative division ring if and only if it is regular and* (P_3) *holds and* $\mathfrak{R}$ *has no idempotents other than* 0, 1.

Proof. The reader can verify easily that (i) follows from the definitions.

(ii) is easily transformed into the now well known statement that a ring is a Moufang division ring if and only if it is an alternative division ring ([12]; [8], § II; [10], p. 161, Theorem 4). (ii) is required by us only to prove the Corollary to Theorem 2, which is itself not required for the rest of this paper.

§ 3. Semi-regular rings

A right unit e for $\varLambda\subset\mathfrak{R}$ is called a *left idempotent* for $\varLambda$ if $ef=e$ for every right unit f for $\varLambda$ (if $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative, this is equivalent to: $\mathfrak{R}e$ is the smallest element in L which contains $\varLambda$).

$\mathfrak{R}$ is called *left semi-regular* if every α in $\mathfrak{R}$ possesses a left idempotent, *semi-regular* if it is also right semi-regular. If $\mathfrak{R}$ is idempotent-associa-

---

[14]) A ring is a division ring means: every equation $\alpha\beta=\gamma$ can be solved for β if $\alpha\neq0$ and for α if $\beta\neq0$; without zero divisors means: $\alpha\beta=0$ implies α or β is 0. An alternative division ring means: an alternative division ring without zero divisors (then it must have a unit, see [10], page 161). A ring is a *Moufang ring* if it has a unit and for each $\alpha\neq0$, there exist β_1,β_2 such that: $\beta_1\alpha=\alpha\beta_2=1$ and $\gamma=\beta_1(\alpha\gamma)=(\gamma\alpha)\beta_2$ for every γ (then necessarily, $\beta_1=\beta_2=\beta$ is unique).

tive, $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{R}^a$ have the same idempotents (obviously) and $\mathfrak{R}$ left semi-regular implies $\mathfrak{R}^a$ is left semi-regular (obviously).

If $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and regular then each $(\alpha)_l$ is of the form $\mathfrak{R}e$ which implies $\mathfrak{R}$ is left semi-regular; by duality, $\mathfrak{R}$ is also right semi-regular, hence semi-regular.

Lemma 3. 1. *Suppose $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and that every finite subset of $\mathfrak{R}$ has a right unit. If some $\alpha-\alpha e$ has a left idempotent with e idempotent then α also has a left idempotent provided that:*

$$(3.1)\qquad \alpha\in\mathfrak{R}g \quad \textit{implies} \quad e\in\mathfrak{R}g \quad \textit{for every idempotent} \quad g.$$

Proof. Let f be a left idempotent for $\alpha-\alpha e$. We shall show that $fe=0$.

In fact, if g is a right unit for $\{\alpha, e\}$, then $fg=f$, $g-ge$ is idempotent and $(\alpha-\alpha e)(g-ge)=\alpha-\alpha e$ (i. e., $g-ge$ is a right unit for $\alpha-\alpha e$), so $f(g-ge)=f$, hence $fe=0$.

We now show that $h=e+f-ef$ is a left idempotent for α. In fact, $hh=h$ and $\alpha h=\alpha e+(\alpha-\alpha e)f=\alpha e+\alpha-\alpha e=\alpha$; if g is any idempotent with $\alpha g=\alpha$ then, by hypothesis, $eg=e$, $(\alpha-\alpha e)g=\alpha-\alpha e$, hence $fg=g$ and finally $hg=h$.

Remark. (3. 1) is certainly satisfied if e has the form $e=\beta\alpha$.

Lemma 3. 2. *Suppose $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and left semi-regular. If e is a left idempotent for α then for every idempotent f, $\alpha f=0$ implies $ef=0$.*

Proof. Let g be a left idempotent for $e+f-fe$. Then $\alpha=\alpha(e+f-fe)\in \in\mathfrak{R}(e+f-fe)\subset\mathfrak{R}g$. Hence $\alpha=\alpha g, e=eg$ (since e is a left idempotent for α), and

$$fg=(e+f-fe)g-(e-fe)g=(e+f-fe)-(e-fe)=f.$$

Then $g-gf$ is a right unit for α ($g-gf$ is idempotent and $\alpha(g-gf)= =\alpha-\alpha f=\alpha$) so $e(g-gf)=e$, i. e., $ef=0$.

Remark. If $(\bar{P}_2)$ also held, then in Lemma 3. 2, $\alpha\beta=0$ would imply $e\beta=0$ for *all* β.

Theorem 1. *Suppose $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and semi-regular. Then L is a relatively complemented lattice with zero (complemented if $\mathfrak{R}$ has a right unit) and the lattice meet of $\mathfrak{R}e$, $\mathfrak{R}f$ in L coincides with their set intersection.*

If $\mathfrak{R}$ is also regular, then L is modular.

Proof. This theorem is easily verified since Lemma 2.2 holds and for arbitrary idempotents e, f:

(i) the least element in L containing $\mathfrak{R}e$ and $\mathfrak{R}f$ is precisely $\mathfrak{R}(e+g-eg)$ where g is any *left* idempotent for $f-fe$;

(ii) the greatest element in L contained in both $\mathfrak{R}e$ and $\mathfrak{R}f$ is precisely $\mathfrak{R}(f-gf)$ where g is any *right* idempotent for $f-fe$ and this greatest element coincides with the set intersection $\mathfrak{R}e \cap \mathfrak{R}f$;

(iii) if $\mathfrak{R}$ is regular, the least element in (i) coincides with $\mathfrak{R}e+\mathfrak{R}f$ and L is a sublattice of the modular lattice $\mathfrak{L}$ of all left ideals of $\mathfrak{R}$.

Indeed, in (i) $f-fe=(f-fe)g$ implies $f=fe+(f-fe)g$ and, by Lemma 3.2, $(f-fe)e=0$ implies $ge=0$. Hence, $e+g-eg$ is idempotent. Then $e=e(e+g-eg)$, $f=(fe+fg-feg)(e+g-eg)$, so $\mathfrak{R}(e+g-eg)\supset\mathfrak{R}e$, $\mathfrak{R}f$. On the other hand, any element of L which contains $\mathfrak{R}e, \mathfrak{R}f$ must also contain $f-fe$, hence g (g is a left idempotent for $f-fe$ so if h is idempotent and $(f-fe)h=f-fe$ then $g=gh\in\mathfrak{R}h$), and so it must contain $e+g-eg$, hence $\mathfrak{R}(e+g-eg)$ too.

In (ii), $f(f-fe)=f-fe$, hence $fg=g$ since g is a right idempotent for $f-fe$. This implies that $f-gf$ is an idempotent. But $g(f-fe)=f-fe$ implies that $f-gf=(f-gf)e$ so $\mathfrak{R}(f-gf)\subset\mathfrak{R}e\cap\mathfrak{R}f$. But if α is any element in $\mathfrak{R}e\cap\mathfrak{R}f$, α possesses a left idempotent h and h is in $\mathfrak{R}e\cap\mathfrak{R}f$. Then $h(f-fe)=h-h=0$. This implies $hg=0$ by the dual of Lemma 3.2, so $\alpha g=(\alpha h)g=\alpha(hg)=0$ and $\alpha(f-gf)=\alpha f-0=\alpha$, i.e., α is in $\mathfrak{R}(f-gf)$.

(iii) If $\mathfrak{R}$ is regular then in (i) above, g can be chosen to be of the form $\alpha(f-fe)$ for some α. Then $\mathfrak{R}(e+g-eg)$, which is the union of $\mathfrak{R}e$ and $\mathfrak{R}f$ in L, is contained in $\mathfrak{R}e+\mathfrak{R}f$. On the other hand, this union obviously contains $\mathfrak{R}e+\mathfrak{R}f$, so they coincide. Since $\mathfrak{R}e+\mathfrak{R}f$ is the union of $\mathfrak{R}e$ and $\mathfrak{R}f$ in $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}e$ and $\mathfrak{R}f$ have the same union in L and in $\mathfrak{L}$. By (ii) above, $\mathfrak{R}e$ and $\mathfrak{R}f$ have the same lattice meet in L and in $\mathfrak{L}$. This proves (iii).

Corollary 1. *Suppose $\mathfrak{R}_1$ is a subring of an idempotent-associative semi-regular ring $\mathfrak{R}$ and suppose that for each α in $\mathfrak{R}_1$ there exist idempotents in $\mathfrak{R}_1$ which are right and left idempotents respectively, for α in $\mathfrak{R}$. Then $L(\mathfrak{R}_1)$ is isomorphic to a sublattice of $L(\mathfrak{R})$ under the mapping: $\mathfrak{R}_1e\to\mathfrak{R}e$ for idempotents e in $\mathfrak{R}_1$.*

Proof. Clearly, $\mathfrak{R}_1$ is idempotent-associative and semi-regular. If e, f are in $\mathfrak{R}_1$ then (i) and (ii) of the proof of Theorem 1 show that there are idempotents g, h in $\mathfrak{R}_1$ such that the union and meet of $\mathfrak{R}e$ and $\mathfrak{R}f$ are $\mathfrak{R}g, \mathfrak{R}h$ respectively; at the same time, those of $\mathfrak{R}_1e$ and $\mathfrak{R}_1f$ are $\mathfrak{R}_1g, \mathfrak{R}_1h$ respectively. It follows that the given mapping is a lattice isomorphism.

Corollary 2. *If $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and left semi-regular, then every finite subset of $\mathfrak{R}$ has a right unit, and every finite subset of $S_n(\mathfrak{R})$ has a right unit.*

Proof. The proof of (i) in Theorem 1 holds for this $\mathfrak{R}$. Now suppose each α_i has right unit e_i $(i=1,\ldots,m)$ and let $\mathfrak{R}e$ be the union of the $\mathfrak{R}e_i$. Then clearly, $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ has e as right unit in $\mathfrak{R}$. If $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ are all the elements of a set of matrices in $S_n(\mathfrak{R})$ then these matrices have for right unit the diagonal matrix with all diagonal elements equal to e, all other matrix elements equal to zero.

§ 4. Decomposition theorems for rings

Lemma 4.1. *Suppose $\mathfrak{R}$ is left semi-regular. Then A, B have only 0 in common and hence $\alpha \to (\alpha+A, \alpha+B)$ is an isomorphic mapping of $\mathfrak{R}$ onto a subring of the direct sum $\mathfrak{R}/B \oplus \mathfrak{R}/A$.*

Proof. If α is in both A and B then so is a left idempotent e of α since A and B are ideals, by Lemma 2.1. Then $ee=0$ so $e=0$, and $\alpha=\alpha e=0$.

Lemma 4.2. *Suppose $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and regular and every idempotent of $\mathfrak{R}$ is in its centre. Then $\mathfrak{R}$ contains a family of ideals N_λ such that each $\mathfrak{R}_\lambda=\mathfrak{R}/N_\lambda$ is idempotent-associative, regular and has a unit but no other non-zero idempotents and $\alpha\to(\alpha+N_\lambda)$ is an isomorphic mapping of $\mathfrak{R}$ onto a subring of the direct sum of the N_λ.*

Proof. Let E denote the set of idempotents in $\mathfrak{R}$, ordered by: $e \leqq f$ if $ef=e$. Then E is a Boolean ring. For each maximal ideal λ of E let N_λ denote the set of α in $\mathfrak{R}$ for which $e\alpha=\alpha$ for some e in λ. Then N_λ is an ideal of $\mathfrak{R}$, since

(i) if α is in N_λ then $e\alpha=\alpha$ for some e in λ; then $e(\alpha\beta)=\alpha\beta$, $e(\beta\alpha)=\beta(e\alpha)=\beta\alpha$ for this e; thus $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ are in N_λ for all β in $\mathfrak{R}$;

(ii) if α,β are in N_λ then $e\alpha=\alpha$, $f\beta=\beta$ for some e,f in λ; then, $e+f-ef$ is also in λ and, since e,f are commuting idempotents,

$$(e+f-ef)(\alpha+\beta)=(e+f-ef)(e\alpha+f\beta)=\alpha+\beta,$$

thus $\alpha+\beta$ is also in N_λ. Moreover, by the Corollary to Lemma 2.3, every idempotent in $\mathfrak{R}_\lambda=\mathfrak{R}/N_\lambda$ is of the form $e+N_\lambda$ with e idempotent in $\mathfrak{R}$.

Now let f be any idempotent not in λ. Then for every α in $\mathfrak{R}$, $\beta=\alpha-\alpha f$ satisfies $f\beta=0$. Let e_1 be a left unit for β. Then $e=e_1-e_1f$ is also a left unit for β, i. e., $e\beta=\beta$. But $ef=0$, hence the set $\bar{\lambda}$ consisting of all $eh+g-ehg$ $(h \in E, g \in \lambda)$ excludes f (and includes e). But $\bar{\lambda}$ is an ideal of E and $\bar{\lambda} \supseteq \lambda$. Hence $\bar{\lambda} = \lambda$ since λ is a maximal ideal of E. Thus λ contains e, hence (by definition) N_λ contains β. Now

$$(\alpha + N_\lambda)(f + N_\lambda) = (f + N_\lambda)(\alpha + N_\lambda) = f\alpha + N_\lambda =$$
$$= f\alpha + (\beta + N_\lambda) = (f\alpha + \beta) + N_\lambda = \alpha + N_\lambda$$

showing that $f + N_\lambda$ is a unit of $\mathfrak{R}_\lambda$.

The mapping $\alpha \to (\alpha + N_\lambda)$ is an isomorphism. For, if $\alpha \neq 0$, then there exists an idempotent e with $\beta\alpha = e$, $\alpha e = \alpha$ (since $\mathfrak{R}$ is regular) and, obviously, $e \neq 0$; hence there exists a maximal ideal λ in E for which $e \in \lambda$ is false (as is well known, such λ can be constructed with the help of ZORN's Lemma or by the usual transfinite induction); hence $\alpha \in N_\lambda$ is false. Thus $\alpha \to (N_\lambda)$ only if $\alpha = 0$.

Theorem 2. *Suppose $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative and regular. Then $\mathfrak{R}$ is isomorphic to a subring of a direct sum $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/B \oplus \Sigma \mathfrak{R}/N_\lambda$ where $\mathfrak{R}/B$ is associative and regular and each $\mathfrak{R}/N_\lambda$ is a regular ring with unit but no idempotents other than 0 and 1. $\mathfrak{R}$ satisfies $(\bar{P}_2)$ or (P_3) if and only if each $\mathfrak{R}/N_\lambda$ satisfies $(\bar{P}_2)$, (P_3) respectively, and if only if each $\mathfrak{R}/N_\lambda$ is a division ring without zero divisors or an alternative division ring, respectively.*[15])

Proof. This follows from Lemma 4. 1, Lemma 2. 1, the Corollary to Lemma 2. 4, Lemma 4. 2 and Lemma 2. 5, since $\mathfrak{R}$ satisfies $(\bar{P}_2)$ or (P_3) if and only if each homomorphic map $\mathfrak{R}/N_\lambda$ satisfies $(\bar{P}_2)$ or (P_3) respectively.

Corollary. *An idempotent-associative regular ring has property (P_3) if and only if it is alternative.*

§ 5. *M*-sets and S_n-matrices

$\mathfrak{R}$ will denote a fixed ring, n a fixed integer $\geqq 1$.

A vector $v = (\alpha^i; i = 1, \ldots, n)$ with all α^i in $\mathfrak{R}$, will be called an *r-vector* (and we sometimes write $(\alpha^1, \ldots, \alpha^r)$ for v) if $\alpha^i = 0$ for all $i > r$, a *controlled r-vector* if also α^r is idempotent $(= e(v) = e$, say) with $e\alpha^j = \alpha^j$ for all $j < r$.

A set of vectors $v_1, \ldots, v_n$ will be called a *basis* if each v_r is a controlled r-vector, *canonical* if also $\alpha_r^i e_i = 0$ for all $i < r$ where e_i denotes $e(v_i)$.

An M_n-set (or simply M-set), written $M(v_1, \ldots, v_n)$, shall be defined whenever $v_1, \ldots, v_n$ is a basis and shall consist of all controlled vectors of

[15]) Related decomposition theorems were given by FORSYTHE and MCCOY [4] and M. F. SMILEY [11].

the form $\gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_n v_n$; $v_1, \ldots, v_n$ is called then a basis for $M(v_1, \ldots, v_n)$. The set of all M-sets, ordered by inclusion, will be denoted $L^M = L_n^M = L_n^M(\mathfrak{R})$. We shall sometimes denote $M(v_1, \ldots, v_n)$ by $[v_1, \ldots, v_m]$ omitting some or all of those v_i which happen to be 0.

An S_n-matrix (or simply S-matrix) shall mean a matrix $X = (\alpha_i^r; r, i = 1, \ldots, n)$ in $S = S_n(\mathfrak{R})$, i. e., the r-th row is an r-vector v_r with α_r^r associating. We sometimes write $\|v_1, \ldots, v_n\|$ for X. The matrix X is called *canonical* if $v_1, \ldots, v_n$ is a canonical basis. If $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative then a canonical X is necessarily idempotent.

Lemma 5. 1. *Suppose $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative. If $n = 1, 2$ or 3 then*

(i) *$M(u_1, \ldots, u_n) \subset M(v_1, \ldots, v_n)$ if and only if all $u_1, \ldots, u_n$ are in $M(v_1, \ldots, v_n)$,*

(ii) *every M-set has a canonical basis,*

(iii) *for every idempotent X in S there exists a canonical E in S with $XE = X$ and $EX = E$, (so that $SE = SX$, since S is an associative ring),*

(iv) *L^M and $L(S)$ are order-isomorphic under the correspondence $M \leftrightarrow SE$ if M consists of all controlled vectors occurring as rows in matrices of SE, where E is an idempotent in S.*

Proof. We consider $n = 3$ only (the argument given will cover the cases $n = 1, 2$ also).

(i) can be verified easily by the reader.

(ii) If (e_1), (α, e_2), (β, γ, e_3) is a basis for the M-set then (e_1), $(\alpha - \alpha e_1, e_2)$, $(\beta - \beta e_1 - \gamma(\alpha - \alpha e_1), \gamma - \gamma e_2, e_3))$ is a canonical basis for the M-set.

(iii) An idempotent X must have the form $\|(e), (\alpha, f), (\beta, \gamma, g)\|$ with e, f, g idempotent and $\alpha e + f\alpha = \alpha$, $\beta e + \gamma\alpha + g\beta = \beta$, $\gamma f + g\gamma = \gamma$. Now $E = \|(e), (f\alpha, f), (g\beta - g\beta e, g\gamma - g\gamma f, g)\|$ satisfies the requirements. This implies $SE = SEX \subseteq SX$ and $SX = SXE \subseteq SE$, i. e., $SE = SX$.

(iv) From (i), (ii) and (iii), L^M and $L(S)$ are order-isomorphic under the correspondence $M(u_1, u_2, u_3) \leftrightarrow \|u_1, u_2, u_3\|$ for canonical bases u_1, u_2, u_3. Indeed, if u_1, u_2, u_3 and v_1, v_2, v_3 are each a canonical basis, then by (i) above, $M(u_1, u_2, u_3) \subset M(v_1, v_2, v_3)$ if and only if

$$u_1 = e_1 v_1, \quad u_2 = \alpha_{21} v_1 + e_2 v_2, \quad u_3 = \alpha_{31} v_1 + \alpha_{32} v_2 + e_3 v_3$$

for suitable α_{ij} and idempotents e_1, e_2, e_3 in $\mathfrak{R}$. But this condition is equivalent to

$$\|u_1, u_2, u_2\| = \|(e_1), (\alpha_{21}, e_2), (\alpha_{31}, \alpha_{32}, e_3)\| \, \|v_1, v_2, v_3\|$$

that is, to: $\|u_1, u_2, u_3\| \in S\|v_1, v_2, v_3\|$. From (ii) and (iii) it now follows that the correspondence given above is an order-isomorphism of all L^M and all $L(S)$.

Finally, suppose E is an idempotent in S, so that, by (iii), $SE = S\|u_1, u_2, u_3\|$ where u_1, u_2, u_3 is a canonical basis. If now w is a controlled vector in a matrix of SE, then w is a controlled vector of the form $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ and thus it is in $M(u_1, u_2, u_3)$. On the other hand, if w is a vector in $M(u_1, u_2, u_3)$ it must be a controlled vector of one of the forms

$$e_1 u, \quad \alpha_{21} u_1 + e_2 u_2, \quad \alpha_{31} u_1 + \alpha_{32} u_2 + e_3 u_3$$

and hence does occur as a row in a matrix obtained from $\|u_1, u_2, u_3\|$ by multiplying on the left by a matrix of one of the forms

$$\|(e_1), (0), (0)\|, \quad \|(0), (\alpha_{21}, e_2), (0)\|, \quad \|(0), (0), (\alpha_{31}, \alpha_{32}, e_3)\|.$$

This proves all parts of (iv).

Lemma 5.2. *Suppose $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative.*

(i) *If $\mathfrak{R}$ is regular and e is a left idempotent for α, then $X = \|(0), (\alpha), (0)\|$ has $E = \|(e), (0), (0)\|$ for left idempotent in S_3, and $\|(0), (\alpha)\|$ has $\|(e), (0)\|$ for left idempotent in S_2, and every $X_1 = \|(0), (\alpha, \beta), (0)\|$ with β associating has a left idempotent $\|v_1, v_2, (0)\|$ in S_3 such that $\|(0), (\alpha, \beta)\|$ has $\|v_1, v_2\|$ as left idempotent in S_2.*

(ii) *If $(\bar{P}_2)$ holds in $\mathfrak{R}$, then every $X = \|(0), (0), (\alpha, \beta)\|$ has a left idempotent of the form $E = \|(e), (\gamma, f), (0)\|$ in S_3, and every $X_1 = \|(0), (0), (\alpha, \beta, \gamma)\|$ with γ associating has a left idempotent in S_3.*

Proof of (i). Clearly $XE = X$. If $F = \|u_1, \ldots\|$ is idempotent (necessarily $u_1 = (h)$ with h idempotent) and $XF = X$ then $\alpha h = \alpha$. Hence $eh = e$ since e is a left idempotent for α. This implies $EF = E$ so E is a left idempotent for X.

Now, since β is associating, by Lemma 2.1 there is a left partial inverse $\beta' \in \mathfrak{R}^a$ for β. Then $E_1 = \|(0), (0, \beta'\beta\beta'), (0)\| X_1$ is canonical. By Lemma 3.1 and Corollary 2 to Theorem 1, X_1 has a left idempotent if $X_1 - X_1 E_1$ has a left idempotent, and this is so since $X_1 - X_1 E_1$ has the form $\|(0), (\alpha_1), (0)\|$.

Proof of (ii). By $(\bar{P}_2)$ there exist idempotents e, f, g and an element δ such that $\beta f = \beta$ and for every $\eta, \beta\eta = 0$ implies $f\eta = 0$; $g\beta = \beta$ and $\beta\mathfrak{R} = g\mathfrak{R}$; $\delta(\alpha - g\alpha) = e$ and $(\alpha - g\alpha)e = \alpha - g\alpha$.

Then $\alpha - \alpha e = g\alpha - g\alpha e \in g\mathfrak{R} (= \beta\mathfrak{R})$, hence $\alpha - \alpha e = \beta\gamma$ for some γ. Since $\beta\gamma = (\beta f)\gamma = \beta(f\gamma)$, we may use $f\gamma$ as a new γ. After this change, we have $f\gamma = \gamma$. Since $\beta\gamma e = (\alpha - \alpha e)e = 0$ it follows that $f\gamma e = 0$, hence $\gamma e = 0$.

Now $E = \|(e), (\gamma, f), (0)\|$ is canonical, and $XE = X$. If $XF = X$ for any $F = \|(\theta), (\varrho, \varphi), u_3\|$ then $\alpha\theta + \beta\varrho = \alpha$, $\beta\varphi = \beta$ and θ, φ are associating.

To show E is a left idempotent for X we need only prove that $EF=E$, i. e., $e\theta=e$, $\gamma\theta+f\varrho=\gamma$, $f\varphi=f$. But, since $\alpha\theta=\alpha-\beta\varrho$ and $g\beta=\beta$,

$$e\theta=\delta(\alpha-g\alpha)\theta=\delta(\alpha-\beta\varrho-g(\alpha-\beta\varrho))=\delta(\alpha-g\alpha)=e;$$

since $\alpha=\alpha e+\beta\gamma=\alpha\theta+\beta\varrho$ and $\beta f=\beta$,

$$\beta(\gamma\theta+f\varrho-\gamma)=(\alpha-\alpha e)\theta+\beta\varrho-\beta\gamma=\alpha\theta-\alpha e+\beta\varrho-\beta\gamma=$$
$$=(\alpha\theta+\beta\varrho)-(\alpha e+\beta\gamma)=0,$$

hence,

$$0=f(\gamma\theta+f\varrho-\gamma)=\gamma\theta+f\varrho-\gamma \text{ (since } f\gamma=\gamma);$$

so $\gamma\theta+f\varrho=\gamma$. Finally, since $\beta=\beta f=\beta\varphi$, therefore $\beta(\varphi-f)=0$, hence $f(\varphi-f)=0$ so $f\varphi=f$. This completes the proof that E is a left idempotent for X.

Now if γ is associating, there is a left partial inverse $\gamma'\in\mathfrak{R}^a$ for γ. As in the proof of (i), X_1 has a left partial inverse since $E_1=\|(0),(0),(0,0,\gamma'\gamma\gamma')\|X_1$ is canonical and $X_1-X_1E_1$ is of the form $\|(0),(0),(\alpha_1,\beta_1)\|$.

Theorem 3. *Suppose $\mathfrak{R}$ is idempotent-associative.*

(i) *If $\mathfrak{R}$ is regular then S_2 is semi-regular and L_2 is a relatively complemented modular lattice with zero, complemented with a homogeneous basis of order 2 if $\mathfrak{R}$ has a right unit.*

(ii) *If $(\bar{P}_2)$ holds then S_3 is semi-regular and L_3 is a relatively complemented modular lattice with zero, complemented with a homogeneous basis of order 3 if $\mathfrak{R}$ has a right unit.*

Proof. We consider (ii) (the argument given will cover (i) also).

Proof of (ii): *lattice character.* We first show that every $X=\|(\alpha),(\beta,\gamma),(\lambda,\mu,\nu)\|$ in S_3 has a left idempotent.

Let e be a left unit for $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\nu$ (existing by Corollary 2 to Theorem 1; the Corollary applies since $(\bar{P}_2)$ implies $\mathfrak{R}$ is regular, a fortiori, semi-regular). Let $X_1=\|(e),(0,e),(0)\|X$. Now if X_1 has a left idempotent E, then Lemma 3. 1 shows that X also has a left idempotent. Indeed, Lemma 3. 1 applies with S_3 in place of $\mathfrak{R}$, X in place of α, and E in place of e; (3. 1) holds because for every idempotent G in S_3, $X\in S_3G$ implies $X=XG$, hence $X_1G=X_1$ and so $EG=E$, that is, $E\in S_3G$; further, $X-XE=\|(0),(0),(\lambda',\mu',\nu')\|$ has a left idempotent by Lemma 5. 2 (ii). Thus we need consider only X_1, i. e., we can suppose $\lambda=\mu=\nu=0$. Similarly we can suppose $\beta=\gamma=0$.

Now if $\alpha' \in \mathfrak{R}^a$ is a left partial inverse of α then $\|(\alpha'), (0), (0)\| \|(\alpha), (0), (0)\|$ is clearly a left idempotent for $\|(\alpha), (0), (0)\|$ in S_3 so that S_3 is left semi-regular.

By the dual argument,[16]) S_3 is also right semi-regular, hence semi-regular. Then, by Theorem 1, L_3 is a relatively complemented lattice with zero.

Proof of (ii): *modularity*. By Theorem 2, $\mathfrak{R}$ can be imbedded in a direct sum $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/B \oplus \Sigma \mathfrak{R}/N_\lambda$, and this induces a natural imbedding of $S_3(\mathfrak{R})$ in the direct sum $\overline{S}_3 = S_3(\mathfrak{R}/B) \oplus \Sigma S_3(\mathfrak{R}/N_\lambda)$. We have already shown that every X in $S_3(\mathfrak{R})$ has a left idempotent E in $S_3(\mathfrak{R})$ (for example, if $X = \|(\alpha), (0), (0)\|$ then $E = \|(\alpha'\alpha), (0), (0)\|$ where $\alpha' \in \mathfrak{R}^a$ is a left partial inverse of α; but then this E is also a left idempotent for this X, considered in $\overline{S}_3$). Examination of Lemma 3. 1 and Lemma 5. 2 and their application to construct a left idempotent E in $S_3(\mathfrak{R})$ for arbitrary X in $S_3(\mathfrak{R})$ shows that E is also a left idempotent for X considered in $\overline{S}_3$. A dual statement holds for right idempotents. So by Corollary 1 to Theorem 1, $L_3(\mathfrak{R}) = L(S_3(\mathfrak{R}))$ is lattice isomorphic to a sublattice of $L(\overline{S}_3) = L(S_3(\mathfrak{R}/B)) \oplus \Sigma L(S_3(\mathfrak{R}/N_\lambda))$. Thus, to prove L_3 modular we need only show that $L(S_3(\mathfrak{R}/B))$ is modular and that each $L(S_3(\mathfrak{R}/N_\lambda))$ is modular.

Since $\mathfrak{R}/B$ is associative and regular, the work of von Neumann [9], Part II, Proof of Theorem 2. 13, shows[17]) that $M_3(\mathfrak{R}/B)$ is associative and regular and that $L(M_3(\mathfrak{R}/B))$ is isomorphic to $L(S_3(\mathfrak{R}/B))$, so the latter is modular (for the definition of $M_n(\mathfrak{R})$ see § 1).

Thus, by Theorem 2, we need only show: $L_3(\mathfrak{R})$ is modular when $\mathfrak{R}$ is a division ring with unit, and without zero divisors.

It is sufficient to show that $L_3^M(\mathfrak{R})$ is a projective plane geometry[18]), hence modular. Clearly $M(u_1, u_2, u_3)$ is an atom if and only if exactly one

---

16) The dual ring $\mathfrak{R}'$ consists of the elements of $\mathfrak{R}$ with addition unchanged but with multiplication $\alpha \circ \beta$ in $\mathfrak{R}'$ coinciding with $\beta\alpha$ in $\mathfrak{R}$. Then $S_3(\mathfrak{R})$ is anti-isomorphic to $S_3(\mathfrak{R}')$ under the correspondence

$$\|(\alpha), (\beta, \gamma), (\lambda, \mu, \nu)\| \longleftrightarrow \|(\nu), (\mu, \gamma), (\lambda, \beta, \alpha)\|.$$

Now the proof of left semi-regularity of $S_3(\mathfrak{R})$ is also a proof of left semi-regularity of $S_3(\mathfrak{R}')$ which is equivalent to right semi-regularity of $S_3(\mathfrak{R})$.

17) J. von Neumann showed that if $\mathfrak{R}$ is regular and associative then $M_n(\mathfrak{R})$ is associative and regular for all $n = 1, 2, \ldots$ so that for every A in $M_n(\mathfrak{R})$ there exists an idempotent E in $M_n(\mathfrak{R})$ with $M_n(\mathfrak{R})A = M_n(\mathfrak{R})E$. Now, although this is not stated explicitly, the argument given by von Neumann actually shows that there exists such an E in $S_n(\mathfrak{R})$; hence, if $\mathfrak{R}$ is associative and regular there is an obvious order-isomorphism between $L(M_n(\mathfrak{R}))$ and $L(S_n(\mathfrak{R}))$ for each $n = 1, 2, \ldots$.

18) We do not require $\mathfrak{R}$ to be alternative, hence this plane projective geometry is more general than the geometry constructed by R. Moufang [8].

of the u_i is $\neq 0$ and $M(u_1, u_2, u_3)$ is the unit of L_3^M if all u_i are $\neq 0$; we shall call $M(u_1, u_2, u_3)$ a *line* if exactly two of the $u_i \neq 0$.

It is easily verified that if one line is contained in another, they are identical, it is obvious that every line contains at least two distinct points, and we know already (Lemma 5. 1, (iv)) that L_3^M is a relatively complemented lattice. Therefore, to show that L_3^M is a projective plane we need only show:

(i) two atoms are always contained in some line,

(ii) two lines have at least one atom in common.

(i) is obvious except when the atoms are of the form $[(\alpha, \beta, 1)]$ and $[(\lambda, \mu, 1)]$. In this case, either $\beta = \mu$ and then both atoms are contained in the line $[(1), (\alpha, \beta, 1)]$; or $\beta \neq \mu$ and then both atoms are contained in the line $[(\gamma, 1)\ (\delta, 0, 1)]$ where δ is a solution for $(\mu - \beta)\delta = \lambda - \alpha$ and γ is the common value of $\lambda - \mu\delta = \alpha - \beta\delta$.

(ii) is obvious except when the lines are of the form $[(\alpha, 1), (\beta, 0, 1)]$ and $[(\lambda, 1), (\mu, 0, 1)]$ with $\alpha \neq \lambda$. Then $\gamma\alpha + \beta = \gamma\lambda + \mu$ for some γ; with this γ, $[(\gamma\alpha + \beta, \gamma, 1)]$ is common to both lines.

This completes the proof of modularity of L_3.

Proof of (ii): *homogeneous basis.* Finally, if $\mathfrak{R}$ has a right unit e_0, the following is readily verified to be a normalized frame for L_3^M: $a_1 = [(e_0)]$, $a_2 = [(0, e_0)]$, $a_3 = [(0, 0, e_0)]$, $c_{12} = c_{21} = [(-e_0, e_0)]$, $c_{13} = c_{31} = [(-e_0, 0, e_0)]$, $c_{23} = c_{32} = [(0, -e_0, e_0)]$.

Theorem 4. *Suppose* $\mathfrak{R}$ *is an idempotent-associative, regular ring with unit for which* (P_3) *holds. Then*

(i) *every normalized frame of order* 3 *for* L_3 *satisfies the conditions* (3. 1. 7), (5. 1. 1), (5. 1. 2) *of* [6],

(ii) *the construction of* [6], *applied to the particular normalized frame given at the end of the proof of Theorem* 3, *yields a coordinatizing ring isomorphic to the original* $\mathfrak{R}$, *under the mapping* $\alpha \leftrightarrow [(-\alpha, 0, 1)]$ $(\alpha \in \mathfrak{R}$, $[(-\alpha, 0, 1)] \in L_{31})$.

(iii) *if* $\mathfrak{R}$ *is the coordinatizing ring of some* L' *constructed as in* [6], *then* L_3 *is isomorphic to* L'.

Remark 1. We recall that if $a_1, a_2, a_3, c_{12} = c_{21}, c_{13} = c_{31}, c_{23} = c_{32}$ is a normalized frame for any complemented modular lattice L then L_{ij} denotes the set of x with $x \oplus a_j = a_i \oplus a_j$. If i, j, k are $1, 2, 3$ in some order, then $P_{k:i}x$ denotes $(x + c_{ik})(a_i + a_j)$. In each L_{ij}, multiplication is defined by:

$$x \times y = (P_{k:j}x + P_{k:i}y)(a_i + a_j).$$

The conditions (5. 1. 1), (5. 1. 2) of [6] are equivalent to

$(M)_{ij}$: For all x, y in L_{ij}:

$$P_{k:j}(x\times y)=(P_{k:j}x)\times(P_{k:j}y),$$
$$P_{k:i}(x\times y)=(P_{k:i}x)\times(P_{k:i}y).$$

The condition (3. 1. 7) of [6] asserts

$(A)_{ij}$: For all x, y in L_{ij}, the value of $Z(x,y,p,q)=\{(x+p)(q+a_j)+ +(y+q)(p+a_j)\}(a_i+a_j)$ is independent of p, q provided that $p+q=a_i+q$, $q(a_i+a_j)=0$, $pa_i\leqq x$ and we write $x\dotplus y$ for the common value of $Z(x,y,p,q)$. Then $\alpha=(x_{ij};\, i>j)$ is called an upper semi-L-number if for $i>j$, $x_{ij}\in L_{ij}$ and $P_{2:1}\,x_{31}=x_{32}$, $P_{2:3}\,x_{31}=x_{21}$. As shown in [6], the set of such α, under the operations $\alpha+\beta=(x_{ij}\dotplus y_{ij})$, $\alpha\beta=(x_{ij}\times y_{ij})$ for all $\alpha=(x_{ij})$, $\beta=(y_{ij})$ forms a ring $\mathfrak{R}$ with unit having properties (P_1), (P_2), (P_3) provided $(A)_{31}$, $(A)_{32}$, $(A)_{21}$ and $(M)_{31}$ all hold.

Remark 2. In an arbitrary ordered set

$a+b=c$ means: the union of a, b does exist and it is c,

$ab=c$ means: the meet of a, b does exist and it is c.

Now consider $L_3(\mathfrak{R})$ where $\mathfrak{R}$ is merely an idempotent-associative ring with unit (do not assume $\mathfrak{R}$ to be regular). Then easy calculations show that $a_1=[(1)]$, $a_2=[(0,1)]$, $a_3=[(0,0,1)]$, $c_{12}=c_{21}=[(-1,1,0)]$, $c_{23}=c_{32}=[(0,-1,1)]$, $c_{13}=c_{31}=[(-1,0,1)]$ is a normalized frame, i. e., $a_1+a_2+a_3=1$ and $a_i\oplus a_j= =c_{ij}\oplus a_j$, $a_i(a_j+a_k)=0$, $c_{ij}=c_{ji}$, $(c_{ij}+c_{jk})(a_i+a_k)=c_{ik}$ for i,j,k all different. Moreover with respect to this frame, L_{31} consists precisely of all $[(-\alpha,0,1)]$ with arbitrary α in $\mathfrak{R}$ and $P_{2:3}[(-\alpha,0,1)]=[(-\alpha,1,0)]$, $P_{2:1}[(-\alpha,0,1)]=[(0,-\alpha,1)]$. Finally if $x=[(-\alpha,0,1)]$ and $y=[(-\beta,0,1)]$, then

$$\begin{aligned} Z(x,y,c_{23},a_2)&=\{[(-\alpha,1,0)]+([(-\beta,0,1)]+[(0,1])([(1)]+\\ &\qquad+[(0,-1,1)])\}([(1)]+[(0,0,1)])=\\ &=\{[(-\alpha,1,0)]+[(-\beta,-1,1)]\}([(1)]+[(0,0,1)])=\\ &=[(-(\alpha+\beta),0,1)],\\ x\times y&=([(0,-\alpha,1)]+[(-\beta,1,0)])([(1)]+[(0,0,1)])=\\ &=[(-\alpha\beta,0,1)]. \end{aligned}$$

Thus (ii) certainly holds if the construction of [6] is possible, i. e., if (i) holds (the above calculations are important in the problem of coordinatizing ordered sets much more general than those discussed in this paper, which are complemented modular lattices satisfying the special conditions enumerated in Remark 1 above).

Remark 3. If $\mathfrak{R}$ is the coordinatizing ring of some L' as constructed in [6] then L_3^M is isomorphic to L' (as shown in [2], where L_3^M was called L_3).

Lemma 5. 1 shows that the L_3 of the present paper is isomorphic to L_3^M so that (iii) is proved.

Proof of Theorem 4. We need only show (i), in view of Remarks 2, 3 above. Moreover, as in the proof of modularity in Theorem 3, we need prove (i) only for the two special cases: $\mathfrak{R}$ is associative and regular or $\mathfrak{R}$ is a division ring without zero divisors, with unit, in which (P_3) holds. Since the first case was settled by the work of VON NEUMANN [6], §§ 4. 3, 4. 8 we need only consider the second special case (L_3 is then a plane projective geometry).[19])

As shown in [6], the conditions (3. 1. 7), (5. 1. 1), (5. 1. 2) of [6], i. e., $(A)_{ij}$ and $(M)_{ij}$ for all $i \neq j$, for an arbitrary normalized frame of order 3 in any projective plane geometry, follow from the following quadrangle condition (Q_5), given in [6], § 6[20]).

(Q_5): Suppose two quadrangles P_i and P'_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ and a line W are such that:

(i) no three of the vertices of the same quadrangle lie on a common line;

(ii) W contains none of the vertices of either quadrangle. For $i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j$, let $P_{ij} = (P_i + P_j) W$ and $P'_{ij} = (P'_i + P'_j) W$ (P_{ij}, P'_{ij} are necessarily points).

Suppose also that:

(iii) $P_{14} = P_{23}$, $P'_{14} = P'_{23}$;

(iv) $P_{ij} = P'_{ij}$ except possibly for the pair $(i, j) = (3, 4)$. Then (iv) holds also for the pair $(i, j) = (3, 4)$.

Thus the proof of Theorem 4 is completed by (ii) of the following lemma.

Lemma 5. 3. *Let $L_3(\mathfrak{R})$ be the plane projective geometry defined by a fixed division ring $\mathfrak{R}$ with unit without zero divisors and satisfying (P_3).*

---

[19]) Under our present assumptions on $\mathfrak{R}$, it is easy to show that this geometry coincides with the plane geometry constructed by R. MOUFANG starting from an arbitrary alternative division ring $\mathfrak{R}$ [8]. It was shown by MOUFANG that in this geometry her condition (D_9) holds, which implies the "uniqueness of harmonic conjugate point" condition; as shown in [6], § 6, this in turn implies the conditions (3. 1. 7), (5. 1. 1), (5. 1. 2) of [6] *if the diagonal points of a complete quadrangle are non-collinear.* Here we do not suppose such non-collinearity of diagonal points and we give a complete proof.

[20]) To prove $(A)_{ij}$ choose $P_1 = p$, $P_2 = q$, $P_3 = (p + x)\ (q + a_j)$, $P_4 = (q + y)(p + a_j)$, $W = a_i + a_j$ (we may suppose $x \neq a_i$, $y \neq a_i$); to prove $(M)_{ij}$, first choose $P_1 = x \times y$, $P_2 = P_{k:j}x$, $P_3 = x$, $P_4 = P_{k:j}(x \times y)$, $P'_1 = y$, $P'_2 = c_{ik}$, $P'_3 = c_{ij}$, $P'_4 = P_{k:j}y$, $W = a_j + a_k$ (we may suppose $x \neq a_i$, $y \neq a_i$, $y \neq c_{ij}$) then choose $P_1 = x \times y$, $P_2 = P_{k:i}y$, $P_3 = y$, $P_4 = P_{k:i}(x \times y)$, $P'_1 = x$, $P'_2 = c_{kj}$, $P'_3 = c_{ij}$, $P'_4 = P_{k:i}x$, $W = a_i + a_k$ (we may suppose $x \neq a_i$, $y \neq a_i$, $x \neq c_{ij}$).

(i) *If P_i and P'_i $(i=1,2,3)$ are points such that the three P_i do not lie on a line and the three P'_i do not lie on a line then there is a lattice automorphism of $L_3(\mathfrak{R})$ which maps each P'_i on P_i*[21]).

(ii) *(Q_6) holds in $L_3(\mathfrak{R})$.*

Proof of (i). Since the product of automorphisms is an automorphism, we may suppose $P_i=a_i$ $(i=1,2,3)$ where a_i, c_{ij} are as in Theorem 3 and the Remark 2 following Theorem 4. It is clearly sufficient to show for each $j=1,2,3$: if $P'_i=P_i$ for all $i<j$ then there is an automorphism of L_3 which leaves P'_i fixed for $i<j$ and maps P'_j onto P_j.

Consider the following functions[22]) which map point onto point:

1) For arbitrary fixed γ,δ:

$$\psi[(\alpha,\beta,1)]=[(\alpha+\gamma,\beta+\delta,1)]$$
$$\psi[(\alpha,1)]=[(\alpha,1)]$$
$$\psi[(1)]=[(1)]$$

2)

$$\psi_{12}[(\alpha,\beta,1)]=[(\beta,\alpha,1)]$$
$$\psi_{12}[(\alpha,1)]=[(\alpha^{-1},1)] \quad \text{if} \quad \alpha\neq 0$$ [23])
$$\psi_{12}[(0,1)]=[(1)]$$
$$\psi_{12}[(1)]=[(0,1)]$$

3)

$$\psi_{23}[(\alpha,\beta,1)]=[(\beta^{-1}\alpha,\beta^{-1},1)] \quad \text{if} \quad \beta\neq 0$$
$$\psi_{23}[(\alpha,0,1)]=[(\alpha,1)]$$
$$\psi_{23}[(\alpha,1)]=[(\alpha,0,1)]$$
$$\psi_{23}[(1)]=[(1)].$$

The reader can verify easily that if u_1,u_2,u_3 is a canonical basis, then each of 1), 2), 3) maps $M(u_1,u_2,u_3)$ onto $M(v_1,v_2,v_3)$ where $[v_i]$ is the map of $[u_i]$, and hence each of 1), 2), 3) determines an automorphism. The reader can also verify that a suitable product of automorphisms of types 1), 2), 3) satisfies the requirements of (i).

Remark. From the work of BRUCK and KLEINFELD ([3] and [7]) it follows that for each fixed $\delta\neq 0$, there exists a function $\varphi(\alpha)$ which maps $\mathfrak{R}$ onto itself and has the properties (see [10], page 196): for all α,β in $\mathfrak{R}$,

$$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$$
$$\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)\left(\delta\varphi(\beta)\right)$$

21) If use is made of the work of BRUCK and KLEINFELD [3] and [7] it can be shown that *four* points P'_i, no three on a line, can be mapped onto four points P_i, no three on a line (see the Remark following the proof of (i)).

22) See [8], p. 215.

23) If $\beta\neq 0$, β^{-1} denotes the unique solution of $\beta^{-1}\beta=\beta\beta^{-1}=1$.

(necessarily, $\varphi(1)=\delta^{-1}$, $\varphi(-1)=-\delta^{-1}$). Then a lattice automorphism is determined by the point function:

$$4)\qquad \begin{aligned}&\varphi[(\alpha,\beta,1)]=[(\varphi(\alpha),\varphi(\beta),1)]\\&\varphi[(\alpha,1)]=[(\delta\varphi(\alpha),1)]\\&\varphi[(1)]=[(1)].\end{aligned}$$

With the use of 4), (i) can be sharpened as described in footnote 21. However, we do not make use of 4) and our proof of (ii) below can be read without knowledge of the Bruck—Kleinfeld structure theory.

Proof of (ii). Because of (i) we may now suppose that $P_{12}=P'_{12}=a_3=[(0,0,1)]$ and $P_{23}=P_{14}=P'_{23}=P'_{14}=a_1=[(1,0,0)]$; then $P_{13}=P'_{13}=[(\alpha,0,1)]$ for some α and $P_{24}=P'_{24}=[(\beta,0,1)]$ for some β. We shall calculate P_{34} and P'_{34}.

Clearly not both of P_1, P_2 are on a_1+a_2 since P_3 is on P_2+a_1. We may therefore suppose P_2 is not on a_1+a_2 since we can always interchange the pairs P_1, P_4 and P_2, P_3. Hence P_2 has the form $[(\gamma,\delta,1)]$ with $\delta\neq 0$.

The possibilities for P_1 are:

$$[(\delta^{-1}\gamma,1)]\quad\text{or}\quad[(\theta(\delta^{-1}\gamma),\theta,1)]\quad\text{with}\quad\theta\neq 0;$$

we consider these two cases separately.

If $P_1=[(\delta^{-1}\gamma,1)]$ then P_3 must be $[(\alpha+\gamma,\delta,1)]$, $P_4=[(\delta^{-1}(\gamma-\beta),1)]$, and $P_{34}=[(\alpha+\beta,0,1)]$.

If $P_1=[(\theta(\delta^{-1}\gamma),\theta,1)]$, P_3 must be $[(\alpha+\gamma-\delta(\theta^{-1}\alpha),\delta,1)]$, $P_4=[(\beta+\theta(\delta^{-1}\gamma-\delta^{-1}\beta),\theta,1)]$ and $P_{34}=[(\varepsilon,0,1)]$ where

$$\varepsilon=\beta+\theta(\delta^{-1}\gamma-\delta^{-1}\beta)-\theta\{(\delta-\theta)^{-1}(-\beta-\theta(\delta^{-1}\gamma-\delta^{-1}\beta)+\alpha+\gamma-\delta(\theta^{-1}\alpha))\}.$$

To calculate ε we note that for all ϱ:

$$(\delta-\theta)^{-1}(\theta\varrho)=(\delta-\theta)^{-1}(\delta\varrho-(\delta-\theta)\varrho)=(\delta-\theta)^{-1}(\delta\varrho)-\varrho.$$

If $\varrho=\delta^{-1}\gamma-\delta^{-1}\beta$, the above expression is equal to $(\delta-\theta)^{-1}(\gamma-\beta)-(\delta^{-1}\gamma-\delta^{-1}\beta)$. Hence

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\beta+\theta(\delta^{-1}\gamma-\delta^{-1}\beta)+\theta((\delta-\theta)^{-1}(\gamma-\beta))-\\&-(\delta^{-1}\gamma-\delta^{-1}\beta))-\theta((\delta-\theta)^{-1}(\alpha+\gamma-\beta-\delta(\theta^{-1}\alpha)))=\\&=\beta+\theta\{(\delta-\theta)^{-1}(\gamma-\beta-\alpha-\gamma+\beta+\delta(\theta^{-1}\alpha))\}=\\&=\beta+\theta\{(\delta-\theta)^{-1}(\delta(\theta^{-1}\alpha)-\alpha)\}=\\&=\beta+\theta\{(\delta-\theta)^{-1}(((\delta-\theta)+\theta)(\theta^{-1}\alpha)-\alpha)\}=\\&=\beta+\theta\{\theta^{-1}\alpha+(\delta-\theta)^{-1}(\alpha-\alpha)\}=\\&=\beta+\theta(\theta^{-1}\alpha)=\alpha+\beta.\end{aligned}$$

Thus in all cases $P_{34}=[(\alpha+\beta, 0, 1)]$ so that, by the same calculation $P'_{34}=P_{34}$, as required to establish (ii). This completes the proof of (ii) and so Theorem 4 is completely proved.

Remark. Let P_1, P_2, P_3, P_4 be four points, no three of which lie on a line. Let

$$D_1=(P_4+P_1)(P_2+P_3),\ D_2=(P_4+P_2)(P_1+P_3),\ D_3=(P_4+P_3)(P_1+P_2).$$

Then the diagonal points D_1, D_2, D_3 always lie on a line or never lie on a line according as $1+1=0$ or $1+1\neq 0$ in $\mathfrak{R}$.

For, by Lemma 5. 3 (i), we may suppose $P_1=a_1$, $P_2=a_2$, $P_3=a_3$. Then $D_3=[(\alpha, 0, 1)]$ for some $\alpha\neq 0$, and

$$[(\alpha+\alpha, 0, 1)]=((D_1+D_2)(P_1+P_2)+P_4)(P_1+P_3).$$

Thus $\alpha+\alpha=0$ if and only if this last point is P_3, i. e., if and only if $P_4+(D_1+D_2)(P_1+P_2)$ contains P_3; since P_4+D_3 contains P_3, this means, if and only if $(D_1+D_2)(P_1+P_2)$ coincides with D_3, or equivalently D_1+D_2 contains D_3. Thus D_1, D_2, D_3 lie on a line if and only if $\alpha+\alpha=0$. But $\alpha+\alpha=\alpha(1+1)$; since $\alpha\neq 0, \alpha+\alpha=0$ is equivalent to $1+1=0$.

Note *(added in proof, August 14, 1959).* P. Jordan and H. Freudenthal (see the references listed in our [10] as 103, 75 and 76) have constructed a lattice which is isomorphic to our $L_3(\mathfrak{R})$ for the case that $\mathfrak{R}$ is the alternative division ring of Cayley numbers (octaves); they made use of the available conjugation $\alpha\rightarrow\bar{\alpha}$ in $\mathfrak{R}$ and used Hermitian symmetric 3×3 matrices over $\mathfrak{R}$. This method of construction has been recently generalized to a general alternative division ring by T. Springer (announced at the Freudenthal symposium, Utrecht, August, 1959).

References

[1] Ichiro Amemiya, On the representation of complemented modular lattices, *Journal Math. Soc. Japan*, **9** (1957), 263—279.

[2] Ichiro Amemiya and Israel Halperin, Coordinatization of complemented modular lattices, *Proceedings Amsterdam*, **62** (1959), 70—78.

[3] R. H. Bruck and E. Kleinfeld, The structure of alternative division rings, *Proceedings American Math. Soc.*, **2** (1951), 878–890.

[4] Alexandra Forsythe and N. H. McCoy, On the commutativity of certain rings, *Bulletin American Math. Soc.*, **52** (1946), 523—526.

[5] K. D. Fryer and Israel Halperin, The von Neumann coordinatization theorem for complemented modular lattices, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 203—249.

[6] K. D. Fryer and Israel Halperin, On the construction of coordinates for non-Desarguesian complemented modular lattices. I, II, *Proceedings Amsterdam*, **61** (1958), 142—161.

[7] E. Kleinfeld, Alternative division rings of characteristic 2, *Proceedings National Academy of Sciences USA*, **37** (1951), 818–820.

[8] R. Moufang, Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit (D_9), *Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität*, **9** (1933), 107—222.

[9] J. von Neumann, *Continuous Geometry*. Parts I, II, III (planographed lecture notes, Institute for Advanced Study, Princeton, 1936), to be published in book form by Princeton University Press in 1959.

[10] G. Pickert, *Projektive Ebenen* (Berlin, 1955).

[11] M. F. Smiley, Alternative regular rings without nilpotent elements, *Bulletin American Math. Soc.*, **53** (1947), 775—778.

[12] M. Zorn, Theorie der alternativen Ringe, *Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität*, **8** (1930 - 31), 123—147.

QUEEN'S UNIVERSITY, CANADA,
TOKYO COLLEGE OF SCIENCE, JAPAN.

(Received January 6, 1959)

Über eine neue Erweiterung von Ringen. II

Von J. SZÉP in Szeged

In der ersten Mitteilung[1]) haben wir folgendes Ringerweiterungsproblem gelöst:

Es seien A und B zwei beliebige ($\neq 0$) Ringe. Darzustellen sind diejenigen Ringe R, für welche

$$R^+ = A^+ + B^+, \quad A \cap B = 0$$

gilt.

Solche Ringe R haben wir kurz zerlegbare Ringe genannt und durch $R = A \dotplus B$ bezeichnet.

Zwecks Lösung des Erweiterungsproblems haben wir die vier (eindeutigen) Funktionen

(1) $$a^b, \; {}^b a \in A; \quad b^a, \; {}^a b \in B \quad (a \in A; \, b \in B)$$

eingeführt, und mit Hilfe dieser Funktionen die Multiplikation in R^+ durch

(2) $$ab = a^b + {}^a b, \quad ba = {}^b a + b^a$$

und

(3) $$(a+b)(a'+b') = aa' + ba' + ab' + bb' \quad (a, a' \in A; \; b, b' \in B)$$

definiert.

Damit die aus dem Modul R^+ vermittels (2) und (3) hervorgehende Struktur mit zwei Operationen ein Ring sei, ist es notwendig und hinreichend, daß die Funktionen (1) die folgenden Bedingungen erfüllen:

(4) $$a^0 = {}^0 a = 0^a = {}^a 0 = b^0 = {}^0 b = 0^b = {}^b 0 = 0,$$

(5) $$\begin{aligned} a^{b+b'} &= a^b + a^{b'}, & {}^{b+b'} a &= {}^b a + {}^{b'} a, \\ b^{a+a'} &= b^a + b^{a'}, & {}^{a+a'} b &= {}^a b + {}^{a'} b, \end{aligned}$$

(6) $$(a+a')^b = a^b + a'^b, \qquad {}^b(a+a') = {}^b a + {}^b a',$$

---

[1]) *Acta Sci. Math.*, 19 (1958), 51—62.

$$(7)\qquad \begin{aligned} &(b+b')^a = b^a + b'^a, && {}^a(b+b') = {}^ab + {}^ab', \\ &(a^b)^{b'} = a^{bb'}, && {}^{b'}({}^ba) = {}^{b'b}a, \\ &(b^a)^{a'} = b^{aa'}, && {}^{a'}({}^ab) = {}^{a'a}b, \end{aligned}$$

$$(8)\qquad \begin{aligned} &(aa')^b = aa'^b + a^{a'^b}, && {}^b(aa') = {}^baa' + {}^{b^a}a', \\ &(bb')^a = bb'^a + b^{b'^a}, && {}^a(bb') = {}^abb' + {}^{a^b}b', \end{aligned}$$

$$(9)\qquad (a^b)a' + {}^{a^b}a' = a^{b^{a'}} + a({}^ba'), \quad (b^a)b' + {}^{b^a}b' = b^{a^{b'}} + b({}^ab'),$$

$$(10)\qquad ({}^ba)^{b'} = {}^b(a^{b'}), \qquad ({}^ab)^{a'} = {}^a(b^{a'}).$$

Weiterhin haben wir uns in der erwähnten ersten Mitteilung mit mehreren allgemeinen Eigenschaften der Ringe $R = A \dotplus B$ beschäftigt.

In der vorliegenden Mitteilung werden wir nun einige spezielle Klassen zerlegbarer Ringe untersuchen.

§ 1.

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit denjenigen Ringen $R = A \dotplus B$, für welche

$$(11)\qquad ab = ba$$

bei beliebigen $a \in A$ und $b \in B$ gilt.

In diesem Falle gilt offenbar

$$(12)\qquad {}^ba = a^b, \quad {}^ab = b^a.$$

Dementsprechend reduziert sich die Anzahl der unter (1) auftretenden Funktionen auf zwei. Auch die Anzahl der die Lösung des Erweiterungsproblems beschreibenden Bedingungen (4)—(10) erfährt eine Herabsetzung. Und zwar gewinnen wir die der Bedingung (11) genüge leistenden Ringe $R = A \dotplus B$ durch Lösung der folgenden Funktionalgleichungen:

$$(13)\qquad a^0 = 0^a = b^0 = 0^b = 0,$$

$$(14)\qquad a^{b+b'} = a^b + a^{b'}, \qquad b^{a+a'} = b^a + b^{a'},$$

$$(15)\qquad (a+a')^b = a^b + a'^b, \quad (b+b')^a = b^a + b'^a,$$

$$(16)\qquad (a^b)^{b'} = a^{bb'}, \qquad (b^a)^{a'} = b^{aa'},$$

$$(17)\qquad (aa')^b = aa'^b + a^{b^{a'}} = a^ba' + a'^{b^a}, \quad (bb')^a = bb'^a + a^{a^{b'}} = b^ab' + b'^{a^b},$$

$$(18)\qquad (a^b)^{b'} = (a^{b'})^b, \qquad (b^a)^{a'} = (b^{a'})^a.$$

Unter Berücksichtigung von (12) entstehen nämlich die Gleichungen (13), (14), (15), (16), (17) und (18) der Reihe nach aus den Gleichungen (4), (5), (6), (7), (8) und (10). Da ferner in unserem Falle die Gleichungen (9) die Gestalt

$$(19) \qquad (a^b)a' + a'^{b^a} = a^{b^{a'}} + a(a'^b), \quad (b^a)b' + b'^{a^b} = b^{a^{b'}} + b(b'^a)$$

haben, sieht man sofort ein, daß (19) schon in (17) enthalten ist.

Auf die Struktur der der Bedingung (11) genügenden Ringe $R = A \dotplus B$ bezieht sich der folgende

Satz 1. *In jedem der Bedingung* (11) *genügenden Ring* $R = A \dotplus B$ *gibt es ein Ideal* $\mathfrak{c}$, *für welches* $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ $(\mathfrak{a} \subseteqq A;\ \mathfrak{b} \subseteqq B)$ *und* $R/\mathfrak{c} \approx A/\mathfrak{a} \dotplus B/\mathfrak{b}$ *ist, wobei* $R/\mathfrak{c}$ *ein kommutativer Ring ist.*

Beweis. Sind die Ringe A und B beide kommutativ, so ist offenbar auch R kommutativ, und für $\mathfrak{c}$ kann insbesondere das Nullideal gewählt werden.

Nehmen wir jetzt an, daß von den Ringen A und B mindestens einer, z. B. B nichtkommutativ ist. Es sei $bb' - b'b \neq 0$ $(b, b' \in B)$. Dann ergibt sich unter Anwendung von (14), (16) und (18) $a^{bb'-b'b} = 0$ für jedes Element $a \in A$. Somit gibt es in R (nach den Sätzen 3 und 4 unserer ersten Mitteilung) ein maximales Linksideal $\mathfrak{b}$ $(\neq 0, \subseteqq B)$ (welches in B ein Ideal ist und die Kommutatoren von B offenbar enthält, und) welches wegen (11) auch in R ein Ideal ist. Auf ähnliche Weise erbringt man den Nachweis der Existenz eines maximalen Ideals $\mathfrak{a} \subseteqq A$ von R. Offenbar gilt

$$R/\mathfrak{b} \approx A \dotplus (B/\mathfrak{b}).$$

Der Ring $B/\mathfrak{b}$ ist bereits kommutativ. Im Gegenfall könnte man nämlich (ähnlich wie vorher) zeigen, daß es im Ring ein Ideal $0 \neq \mathfrak{b}' \subseteq B/\mathfrak{b}$ gibt, woraus dann die Existenz in R eines $\bar{\mathfrak{b}} \supset \mathfrak{b}$ folgen würde, was jedoch der Maximalität von $\mathfrak{b}$ widerspricht.

Man zeigt auf ähnliche Weise, daß auch der Ring $A/\mathfrak{a}$ kommutativ ist, woraus sich dann die Behauptungen unseres Satzes sofort ergeben.

Folgerung. Es ist in R jedes Ideal $\mathfrak{v}$, welches ein einfacher Ring ist und für welches $\mathfrak{v} \nsubseteq \mathfrak{c}$ $(= \mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ gilt, ein Körper oder ein Zeroring von Primzahlordnung. Offenbar gilt nämlich $\mathfrak{v} \cap \mathfrak{c} = 0$, weshalb $R/\mathfrak{c}$ einen zu $\mathfrak{v}$ isomorphen Unterring enthält, woraus aber die Kommutativität von $\mathfrak{v}$ folgt. Da nun $\mathfrak{v}$ ein einfacher Ring ist, folgt daraus unsere Behauptung.

Satz 2. *Es sei* $R = A \dotplus B$ *ein zerlegbarer Ring, für welchen die Bedingung* (11) *gilt. Dann besitzt* R *die folgenden Eigenschaften:*

a) *Ist* $a + b$ $(a \in A;\ b \in B)$ *ein linksseitiges* (*rechtsseitiges*) *Einselement in* R, *so ist dieses* $a + b$ *zugleich Einselement, und*

b) *die Elemente* $a'-aa'\,(=a'^{b})$ *bzw.* $b'-bb'\,(=b'^{a})$ $(a'\in A;\ b'\in B)$ *bilden in A bzw. in B je ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$, *und der Modul* $\mathfrak{a}^{+}+\mathfrak{b}^{+}$ *ist ein Teilring L von R, für welchen* $L=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ *gilt.*

Dem Beweis dieses Satzes schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz. *In einem Ring* $R=A\dotplus B$ *ist* $a+b$ $(a\in A;\ b\in B;\ a+b\neq 0)$ *dann und nur dann linksseitiges Einselement, falls die Bedingungen*

$$ {}^{b}a'=a'-aa',\quad {}^{a}b'=b'-bb', \tag{20}$$

$$ b^{a'}=0,\qquad a^{b'}=0 \tag{21}$$

für beliebige Elemente $a'\in A$ *und* $b'\in B$ *gelten, und* $a+b$ $(a\in A;\ b\in B;\ a+b\neq 0)$ *ist dann und nur dann rechtsseitiges Einselement von R, falls die Bedingungen*

$$ a'^{b}=a'-a'a,\quad b'^{a}=b'-b'b, \tag{22}$$

$$ {}^{a'}b=0,\qquad {}^{b'}a=0 \tag{23}$$

für beliebige Elemente $a'\in A$ *und* $b'\in B$ *gültig sind.*

Beweis. Ist $a+b$ linksseitiges Einselement von R, so gelten die Gleichungen

$$(a+b)a'=aa'+b^{a'}+{}^{b}a'=a'$$

und

$$(a+b)b'=a^{b'}+{}^{a}b'+bb'=b'$$

aus welchen man unter Berücksichtigung von $A\cap B=0$

$$aa'+{}^{b}a'=a',\ b^{a'}=0\quad \text{und}\quad a^{b'}=0,\ {}^{a}b'+bb'=b'$$

folgert. Aus diesen Gleichungen kann man nunmehr die Behauptungen unseres Satzes bezüglich des linksseitigen Einselementes ohne weiteres ablesen. Auf ähnliche Weise erbringt man den Nachweis der Behauptungen unseres Satzes bezüglich des rechtsseitigen Einselementes.

Hilfssatz 2. *Ist* $a+b$ *das Einselement des Ringes* $R=A\dotplus B$, *so gilt*

$$a=a,\ b^{2}=b,\ ab=ba=0.$$

Beweis. Aus (21) und (23) folgt $ab=a^{b}+{}^{a}b=0$ und $ba=b^{a}+{}^{b}a=0$, weiterhin gilt wegen $(a+b)(a+b)=a^{2}+b^{2}=a+b$ $a^{2}=a$ und $b^{2}=b$.

Beweis des Satzes 2. Auf Grund von (12) und mit Rücksicht auf (20) und (22) gelten die Relationen

$$a'-aa'=a'-a'a,$$
$$b'-bb'=b'-b'b$$

für beliebige Elemente $a' \in A$ und $b' \in B$. Daraus folgt aber $aa' = a'a$ und $bb' = b'b$, weshalb $a+b$ das Einselement von R ist. Hiermit haben wir die erste Behauptung unseres Satzes bewiesen.

Um den Nachweis auch der zweiten Behauptung unseres Satzes zu erbringen, zeigen wir vor allem, daß die Elemente $a' - aa'$ $(= a'^b)$ bzw. $b' - bb'$ $(= b'^a)$ je ein Ideal von A bzw. B bilden. Dies folgt sofort aus den leicht einzusehenden Gleichungen

$$a' - aa' + a'' - aa'' = a' + a'' - a(a' + a''),\quad b' - bb' + b'' - bb'' = b' + b'' - b(b' + b''),$$

$$(a' - aa')(a'' - aa'') = a'a'' - aa'a'',\quad (b' - bb')(b'' - bb'') = b'b'' - bb'b'',$$

$$(a' - aa')a'' = a'a'' - aa'a'',\quad a''(a' - aa') = a''a' - aa''a',$$

$$(b' - bb')b'' = b'b'' - bb'b'',\quad b''(b' - bb') = b''b' - bb''b' \quad (a', a'' \in A;\ b', b'' \in B).$$

Da zugleich auch die Gleichung

$$(a' - aa')(b' - bb') = (b' - bb')(a' - aa') = 0$$

besteht, haben wir damit den Nachweis der Behauptung b) und auch den Beweis von Satz 2 vollendet.

B e m e r k u n g. Unter Anwendung der beiden zum Satz 2 gehörigen Hilfssätze können wir durch eine einfache Rechnung auch die beiden folgenden Behauptungen beweisen:

a) Sind A und B die durch das Element a bzw. b erzeugten Ringe, dann sind diejenigen zerlegbaren Ringe $R = A \dotplus B$, in welchen $a+b$ Einselement ist, durch die direkte Summe der Ringe A und B gegeben, d. h. es gilt $R = A + B$.

b) Es seien A und B die durch das Element a bzw. b erzeugten Ringe. Damit das Element $a+b$ in dem zerlegbaren Ring $R = A \dotplus B$ linksseitiges Einselement sei, ist notwendig und hinreichend, daß aus jeder in B gültigen Gleichung

$$\sum_j l_j b^j = 0$$

das Bestehen der Gleichung

$$\sum_j l_j (1-a)^j a = 0$$

und aus jeder in A gültigen Gleichung

$$\sum_i k_i a^i = 0$$

das Bestehen der Gleichung

$$\sum_i k_i (1-b)^i b = 0$$

folgt. (Hierbei sind die l_j und k_i ganze Zahlen, $\sum_j l_j(1-a)^j a$ bzw. $\sum_i k_i(1-b)^i b$ ist eine kürzere Schreibweise für $\sum_j l_j\left(a-\binom{j}{1}a^2+\cdots+\right.$ $\left.+(-1)^j\binom{j}{j}a^{j+1}\right)$ bzw. $\sum_i k_i\left(b-\binom{i}{1}b^2+\cdots+(-1)^i\binom{i}{i}b^{i+1}\right)$ und im Falle wo A bzw. B kein Einselement hat, ist die Rolle des Elements 1 bloß formal.)

Falls für die beiden Ringe A und B die erwähnten Bedingungen gelten, so hat unser Problem eine einzige Lösung welche durch die folgenden Funktionen beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} {}^{\sum_j l_j b^j}a' &= \sum_j l_j(1-a)^j a', \quad a'^{b'}=0 \\ {}^{\sum_i k_i a^i}b' &= \sum_i k_i(1-b)^i b', \quad b'^{a'}=0 \end{aligned} \qquad (a'\in A;\ b'\in B)$$

Ein dem Satz 2 ähnlicher Satz läßt sich im Falle beweisen, wo R einen Linksannullator enthält. Wir haben nämlich den folgenden

Satz 3. *Es sei* $R=A\dotplus B$ *ein die Bedingung* (11) *erfüllender Ring. Ist* $a+b$ *ein Links- (bzw. Rechts-) annullator von* R, *so gilt*

a) $a+b$ *ist ein Annullator von* R,

b) die Elemente $-a'^b(=aa')$ *bzw.* $-b'^a(=bb')$ *bilden je ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$ *von* A *bzw.* B, *ferner ist* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ *ein Zeroring und ein Ideal in* R.

Dem Beweis des Satzes schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. $a+b$ $(a\in A;\ b\in B)$ *ist dann und nur dann Linksannullator im Ring* $R=A\dotplus B$, *falls die Gleichungen*

$$ {}^b a' = -aa', \quad {}^a b' = -bb' \tag{24}$$

und

$$ b^{a'}=0, \qquad a^{b'}=0 \tag{25}$$

für beliebige Elemente $a'\in A$ *und* $b'\in B$ *gelten, und* $a+b$ $(a\in A;\ b\in B)$ *ist dann und nur dann Rechtsannullator im Ring* R, *falls die Gleichungen*

$$ a'^b = -a'a, \quad b'^a = -b'b, \tag{26}$$

$$ {}^{a'}b = 0, \qquad {}^{b'}a = 0 \tag{27}$$

für beliebige Elemente $a'\in A$ *und* $b'\in B$ *gelten.*

Beweis. Ist $a+b$ Linksannullator in R, so gilt

$$(a+b)a' = aa' + {}^b a' + b^{a'} = 0$$

und

$$(a+b)b' = a^{b'} + {}^a b' + bb' = 0.$$

Daraus folgen wegen $A \cap B = 0$

$$aa' + {}^{b}a' = 0, \quad b^{a'} = 0$$

und

$$a^{b'} = 0, \quad {}^{a}b' + bb' = 0,$$

woraus man die Behauptungen des Hilfssatzes bezüglich des Linksannullators ohne weiteres ablesen kann.

Das über den Rechtsannullator gesagte läßt sich ähnlich beweisen.

Hilfssatz 2. *Ist $a+b$ ein Annullator von R, so gilt*

$$a^2 = b^2 = 0, \; ab = ba = 0. \tag{28}$$

Beweis. Aus (25) und (27) folgen die Relationen $ab = a^b + {}^a b = 0$ und $ba = b^a + {}^b a = 0$, sodann ergibt sich unter Anwendung derselben $(a+b)(a+b) = a^2 + b^2 = 0$, woraus sich die Behauptung des Hilfssatzes ablesen läßt.

Beweis von Satz 3. Aus (24) und (26) folgt (mit Rücksicht auf (12))

$$a'a = aa', \; b'b = bb'$$

für beliebige Elemente $a' \in A$ und $b' \in B$. Daraus folgt, daß $a+b$ ein Anullator von R ist.

Da die Gleichungen

$$aa' + aa'' = a(a' + a''), \; bb' + bb'' = b(b' + b''),$$
$$(a', a'' \in A; b', b'' \in B)$$
$$aa'aa'' = a^2 a' a'' = 0, \quad bb'bb'' = b^2 b' b'' = 0$$

bestehen, bilden die Elemente $aa' (= -a'^{b})$ bzw. $bb' (= -b'^{a})$ in A bzw. in B je einen Zeroring $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$, ferner sind diese Ringe wegen

$$a''(aa') = a(a''a'), \; (aa')a'' = a(a'a''), \; b''(bb') = b(b''b'), \; (bb')b'' = b(b'b'') \tag{29}$$

Ideale in A bzw. in B.

Zugleich zeigen die Relationen

$$aa'\,bb' = bb'\,aa' = aba'b' = 0,$$

daß $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein Zeroring ist. Mit Rücksicht auf (16) und (17) auf (24)—(27) gilt

$$b'aa' = aa'b' = (aa')^{b'} + b'^{aa'} = (aa')^{b'} = aa'^{b'} \in \mathfrak{a}$$

und auf ähnliche Weise

$$a'bb' = bb'a' = (bb')^{a'} + a'^{bb'} = (bb')^{a'} = bb'^{a'} \in \mathfrak{b}.$$

Daraus und aus (29) folgen

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})a' \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \quad (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})b' \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b},$$
$$a'(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \quad b'(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}.$$

Man sieht also, daß die direkte Summe $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ ein Ideal in R ist. Damit haben wir sämtliche Behauptungen von Satz 3 bewiesen.

Bemerkung. Unter Anwendung der beiden zum Satz 3 gehörigen Hilfssätze kann man durch eine einfache Rechnung die Richtigkeit der beiden folgenden Behauptungen zeigen:

a) Es seien A und B die durch das Element a bzw. b erzeugten Ringe. Diejenigen zerlegbaren Ringe $R=A\dotplus B$, in welchen $a+b$ ein Annullator ist, ergeben sich als die direkte Summe von A und B.

b) Es seien A und B die durch das Element a bzw. b erzeugten Ringe. Damit im Ring $R=A\dotplus B$ das Element $a+b$ ein Linksannullator ist, ist es notwendig und hinreichend, daß aus jeder in B gültigen Gleichung

$$\sum_j l_j b^j=0 \quad \text{die Gleichung} \quad \sum_j (-1)^j l_j a^{j+1}=0$$

und aus jeder in A gültigen Gleichung

$$\sum_i k_i a^i=0 \quad \text{die Gleichung} \quad \sum_i (-1)^i k_i b^{i+1}=0$$

folgt (wobei l_j, k_i ganze Zahlen bedeuten). Gelten diese Bedingungen für die Ringe A und B, so ist der Ring $R=A\dotplus B$ eindeutig bestimmt, und kann durch die folgenden Funktionen beschrieben werden:

$$\overset{\sum\limits_j l_j b^j}{a'}=\sum_j (-1)^j l_j a^j a', \qquad \overset{\sum\limits_i k_i a^i}{b'}=\sum_i (-1)^i k_i b^i b',$$

$$a'^{b'}=0,\ b'^{a'}=0 \qquad (a'\in A;\ b'\in B).$$

Satz 4. *Falls der Ring $R=A\dotplus B$ die Bedingung* (11) *erfüllt, und eine der Komponenten, z. B. A, ein Zeroring ist, so gibt es in R ein Ideal $\mathfrak{b}\subseteq B$ derart, daß A ein Ideal im Ring $A\dotplus B/\mathfrak{b}(\approx R/\mathfrak{b})$ ist.*

Beweis. Da A ein Zeroring ist, gilt nach (17) $a^{b^{a'}}=0$ $(a, a'\in A;\ b\in B)$. Gilt nun $b^{a'}=0$ für jedes a' und b, so ist (nach Satz 3 unserer ersten Mitteilung und mit Rücksicht auf (11)) A ein Ideal in R, wobei die Rolle von $\mathfrak{b}$ durch das Ideal $0\ (\subset B)$ übernommen wird.

Nehmen wir jetzt an, daß $b^{a'}=0$ nicht für alle a' gültig ist. Dann gibt es ein Element $b'(=b^{a'})\neq 0$ derart, daß $a^{b'}=0$ für jedes Element a richtig ist. Sodann gibt es in B (erste Mitteilung, Satz 3) ein maximales Ideal $0\neq\mathfrak{b}\subseteq B$, welches (wegen (11)) auch in R ein Ideal ist. Für den Ring $A\dotplus B/\mathfrak{b}$ gilt offenbar $R/\mathfrak{b}\approx A\dotplus B/\mathfrak{b}$. Nun ist A ein Ideal im Ring $A\dotplus B/\mathfrak{b}$. Im Gegenfall würde nämlich (ähnlich wie vorher) $B/\mathfrak{b}$ ein Ideal $\mathfrak{b}$ enthalten, und dieses wäre zugleich Ideal auch in $A\dotplus B/\mathfrak{b}$. Daraus würde aber folgen, daß R ein Ideal $\mathfrak{b}' \supset \mathfrak{b}$ enthält, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{b}$ in R. Damit haben wir unseren Satz bewiesen.

Folgerung. Genügt der Ring $R = A \dotplus B$ der Bedingung (11), und sind A und B beide Zeroringe, so enthält R ein Ideal $\mathfrak{a}(\subseteq A)$ und ein Ideal $\mathfrak{b}(\subseteq B)$ derart, daß der Faktorring $R/\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ ein Zeroring ist.

§ 2.

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit Ringen $R = A \dotplus B$, bei welchen A und B beide Zeroringe sind. (Die Bedingung (11) setzen wir nicht voraus.)

Sind in einem Ring $R = A \dotplus B$ A und B beide Zeroringe, so gestalten sich die Gleichungen (7)—(10) folgendermaßen:

$$(a^b)^{b'} = {}^{b'}({}^b a) = (b^a)^{a'} = {}^{a'}({}^a b) = 0, \tag{30}$$

$$a^{{a'}^b} = {}^{b^a}a' = b^{{b'}^a} = {}^{a^b}b' = 0, \tag{31}$$

$$^{{}^a b}a' = a^{b^{a'}}, \quad {}^{{}^b a}b' = b^{a^{b'}}, \tag{32}$$

$$({}^b a)^{b'} = {}^b(a^{b'}), \quad ({}^a b)^{a'} = {}^a(b^{a'}). \tag{33}$$

Satz 5. *Es seien im zerlegbaren Ring $R = A \dotplus B$ A und B Zeroringe, und es seien die Bedingungen*

$$a^{b^{a'}} = b^{a^{b'}} = ({}^b a)^{b'} = ({}^a b)^{a'} = 0 \qquad (a, a' \in A;\ b, b' \in B) \tag{34}$$

für beliebige Elemente a, a', b, b' erfüllt. Dann gibt es im Ring R ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ und ein Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$, derart, daß im Ring $R/\mathfrak{a} \approx A/\mathfrak{a} \dotplus B$, bzw. im Ring $R/\mathfrak{b} \approx A \dotplus B/\mathfrak{b}$, B bzw. A ein Ideal ist, und der Faktorring $R/\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \approx A/\mathfrak{a}+B/\mathfrak{b}$ ein Zeroring ist.

Beweis. In Hinblick auf die Relationen (30)—(34) gelten die Gleichungen

$$a'\,{}^a b = a'^{\,{}^a b} + {}^{a'}({}^a b) = 0,$$

$${}^a b a' = {}^{{}^a b}a' + ({}^a b)^{a'} = 0,$$

$$a' b^a = a'^{\,b^a} + {}^{a'}(b^a) = 0,$$

$$b^a a' = {}^{b^a}a' + (b^a)^{a'} = 0,$$

welche zeigen, daß die Elemente ${}^a b$ und b^a ein in B enthaltendes Ideal von R erzeugen (welches durch den Ring A annulliert wird). Auf ähnliche Weise zeigt man, daß die Elemente ${}^b a$ und a^b ein in A liegendes Ideal von R

erzeugen (welches durch den Ring B annulliert wird). Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1. Gilt ${}^{a}b = b^{a} = 0$ für beliebige Elemente a und b, so ist (wie man leicht einsieht) der Ring A ein Ideal in R. Ähnlicherweise, wenn $a^{b} = {}^{b}a = 0$ für jedes a und jedes b erfüllt ist, dann ist der Ring B ein Ideal in R. In diesen Fällen sind die Behauptungen unseres Satzes offenbar gültig.

Fall 2. Nehmen wir jetzt an, daß nicht der vorhergehende der Fall ist. Dann gibt es ein Element $a(\neq 0)$, derart, daß z. B. ${}^{a}b = 0$ nicht für jedes b erfüllt ist. Dann hat R wegen (31) und (34) ein maximales Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$. Offenbar gilt

$$R/\mathfrak{b} \approx A \dotplus B/\mathfrak{b}.$$

A und $B/\mathfrak{b}$ sind Zeroringe, ferner hat $A \dotplus B/\mathfrak{b}$ kein in $B/\mathfrak{b}$ enthaltenes Ideal (andernfalls könnte nämlich $\mathfrak{b}$ in R nicht maximal sein) so, daß $A \dotplus B/\mathfrak{b}$ ein zum Fall 1 gehöriger zerlegbarer Ring ist, folglich A ein Ideal in $A \dotplus B/\mathfrak{b}$ sein muß. Man zeigt ähnlich, daß im Fall, wo weder A noch B ein Ideal in R ist, R ein maximales Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ enthält, wofür

$$R/\mathfrak{a} \approx A/\mathfrak{a} \dotplus B$$

ist, ferner B ein Ideal im Ring $A/\mathfrak{a} \dotplus B$ ist. Die letzte Behauptung des Satzes folgt sofort aus dem Gesagten.

Satz 6. *Es seien im zerlegbaren Ring $R = A \dotplus B$ A und B Zeroringe. Dann gibt es in R zwei Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ und $\mathfrak{b} \subseteq B$ derart, daß für die Elemente des Faktorringes*

$$R/\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \approx A/\mathfrak{a} \dotplus B/\mathfrak{b}$$

die Relationen (34) *gültig sind.*

Beweis. Wir können annehmen, daß im Ring $R = A \dotplus B$ die Bedingungen (34) nicht erfüllt sind. Andernfalls kann man nämlich $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = 0$ setzen.

Nehmen wir z. B. an, daß die Funktionen $b^{a^{b'}}$, ${}^{a}(b^{a'})$ nicht alle gleich Null sind. Der durch die Elemente $b^{a^{b'}}$ und ${}^{a}(b^{a'})$ erzeugte Ring $\mathfrak{b}'$ ist von Null verschieden, ist ein Ideal in R, und wird durch die Elemente von A annulliert. Mit Rücksicht auf (30) und (31) gelten nämlich die Relationen

$$\bar{a}\,{}^{b_a}b' = {}^{\bar{a}}({}^{b_a}b') + \bar{a}^{{}^{b_a}b'} = 0,$$

$${}^{b_a}b'\,\bar{a} = {}^{{}^{b_a}b'}(\bar{a}) + ({}^{b_a}b')^{\bar{a}} = {}^{b^{a^{b'}}}\bar{a} + (b^{a^{b'}})^{\bar{a}} = 0,$$

$$\bar{a}\,{}^{a}(b^{a'}) = \bar{a}^{{}^{a}(b^{a'})} + {}^{\bar{a}}({}^{a}(b^{a'})) = 0,$$

$${}^{a}(b^{a'})\,\bar{a} = {}^{{}^{a}(b^{a'})}\bar{a} + ({}^{a}(b^{a'}))^{\bar{a}} = {}^{({}^{a}b)^{a'}}\bar{a} + (({}^{a}b)^{a'})^{\bar{a}} = 0.$$

Es sei $\mathfrak{b}(\supseteq\mathfrak{b}')$ das maximale in B enthaltene Ideal von R. Dann gilt

$$R/\mathfrak{b}\approx A\dotplus B/\mathfrak{b}.$$

Der Ring $A\dotplus B/\mathfrak{b}$ enthält kein von Null verschiedenes Ideal $\bar{\mathfrak{b}}\subseteq B/\mathfrak{b}$, da dies der Maximalität von $\mathfrak{b}$ widersprechen würde. Daraus folgt, daß für die, sich auf den Ring $A\dotplus B/\mathfrak{b}$ beziehenden Funktionen $\bar{b}^{a^{\bar{b}'}}$, $({}^a\bar{b})^{a'}$ $(a, a'\in A; \bar{b}, \bar{b}'\in B/\mathfrak{b})$ die Relation $\bar{b}^{a^{\bar{b}'}}=({}^a\bar{b})^{a'}=0$ erfüllt ist.

Ähnlich zeigt man, daß es in R ein Ideal $\mathfrak{a}\subseteq A$ gibt, für welches

$$R/\mathfrak{a}\approx A/\mathfrak{a}\dotplus B$$

gilt, wobei im Ring $A/\mathfrak{a}\dotplus B$ die Relationen $\bar{a}^{b^{\bar{a}'}}=0$ und $({}^b\bar{a})^{b'}=0$, $(b, b'\in B; \bar{a}, \bar{a}'\in A/\mathfrak{a})$ gelten. Aus dem Gesagten folgt sofort, daß für die Elemente des Faktorringes

$$R/\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\approx A/\mathfrak{a}\dotplus B/\mathfrak{b}$$

(34) erfüllt ist.

§ 3.

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit denjenigen zerlegbaren Ringen $R=A\dotplus B$, bei welchen A und B Schiefkörper sind.

Bezüglich der Funktionen a^b, ${}^ba$, b^a, ${}^ab$ haben wir bereits in unserer ersten Mitteilung die Gültigkeit der folgenden Relationen erwähnt:

(35)	ist $a^b=0$	so ist B	Linksideal in R,
(36)	ist ${}^ba=0$	so ist B	Rechtsideal in R,
(37)	ist $b^a=0$	so ist A	Linksideal in R,
(38)	ist ${}^ab=0$	so ist A	Rechtsideal in R.

Wir werden den Ring $R=A\dotplus B$ einfach, zweifach, dreifach oder vierfach entartet nennen, je nachdem in R von den Relationen (35)—(38) eine, zwei, drei oder alle vier gleichzeitig erfüllt sind. (Im vierfach entarteten Fall ist R die direkte Summe von A und B.)

Satz 7. *Sind im Ring $R=A\dotplus B$ A und B Schiefkörper, so ist R ein mindestens zweifach entarteter Ring.*

Beweis. Wir betrachten zuerst die Funktion a^b. Vor allem ist es klar, daß der durch die Elemente $a^b(\in A)$ $(a\in A;\ b\in B)$ erzeugte Ring A' in A ein Linksideal ist. Gemäß (8) gilt nämlich die Relation

$$\bar{a}a^b=(\bar{a}a)^b-\bar{a}^{a^b}$$

für jedes Element $\bar{a}\in A$. Da A ein Schiefkörper ist, gilt entweder $A'=0$

oder $A' = A$. Auf ähnliche Weise sieht man ein, daß der durch die Elemente ${}^{b}a$ erzeugte Ring A'' in R ein Rechtsideal ist, wobei entweder $A'' = 0$ oder $A'' = A$ gilt.

Ist $A' = 0$, d. h. gilt $a^{b} = 0$ für jedes $a \in A$ und $b \in B$, so ist B ein Linksideal in R.

Nunmehr sei $A' = A$. Es sei e_B das Einselement von B. Dann gilt nach (8)

$$ {}^{a}b = {}^{a}(b\,e_B) = {}^{a}b e_B + {}^{a^{b}}e_B = {}^{a}b + {}^{a^{b}}e_B\,, $$

woraus ${}^{a^{b}}e_B = 0$ folgt. Wegen $A' = A$ und mit Rücksicht auf (5) und (7) gilt

$$ {}^{a}e_B = 0 \tag{39} $$

für jedes Element $a \in A$. Weiterhin gelten auf Grund von (7) und (8) (und wegen (4) und (39)) die Relationen

$$ a^{b} = a^{b e_B} = (a^{b})^{e_B}, \tag{40} $$

$$ (a^{b}\bar{a}^{\bar{b}})^{e_B} = a^{b}(\bar{a}^{\bar{b}})^{e_B} + (a^{b})^{\bar{a}^{\bar{b}}e_B} = a^{b}\bar{a}^{\bar{b}}. \tag{41} $$

Wegen $A' = A$ gilt auf Grund von (40) und (41) (mit Rücksicht auf (6))

$$ a^{e_B} = a. \tag{42} $$

Das Element e_B ist ein rechtsseitiges Einselement in R, denn unter Anwendung von (39) und (42) folgt

$$ a\,e_B = a^{e_B} + {}^{a}e_B = a. $$

Bisher haben wir also folgendes gezeigt:

(43) ist $A' = 0$ so ist B Linksideal in R,
ist $A' = A$ so ist e_B rechtsseitiges Einselement in R.

Es seien nunmehr A'', B', B'' die durch die Elemente ${}^{b}a$, b^{a}, ${}^{a}b$ der Reihe nach in A bzw. in B erzeugten einseitigen Ideale. Ganz ähnlich wie im Falle der Elemente a^{b} sieht man folgendes ein:

(44) ist $A'' = 0$, so ist B Rechtsideal in R,
(45) ist $A'' = A$, so ist e_B linksseitiges Einselement in R,
(46) ist $B' = 0$, so ist A Linksideal in R,
(47) ist $B' = B$, so ist e_A rechtsseitiges Einselement in R,
(48) ist $B'' = 0$, so ist A Rechtsideal in R,
(49) ist $B'' = B$, so ist e_A linksseitiges Einselement in R.

(e_A ist das Einselement in A).

Man sieht leicht ein, daß von den vier Fällen $A' = A$, $A'' = A$, $B' = B$, $B'' = B$ glechzeitig höchstens zwei in R auftreten können. Andernfalls muß nämlich von den folgenden zwei Möglichkeiten die eine gewiß eintreten: a) e_A ist ein linksseitiges, e_B ein rechtsseiteges Einselement, b) e_B ist ein linksseitiges, e_A ein rechtsseitiges Einselement. In beiden Fällen gelangt man zu einem Widerspruch; gilt z. B. a), so erhält man $e_A e_B = e_A = e_B$ und dies widerspricht der Bedingung $A \cap B = 0$. Da von den Fällen (43)—(49) in R vier eintreten (zwei für A und zwei für B), ist die Behauptung des Satzes somit bewiesen.

Bemerkung 1. Im Laufe des Beweises hat sich etwas mehr herausgestellt als im Satze behauptet wurde. Die Relationen (43)—(49) erteilen uns nämlich Auskunft auch über die in R gespielte Rolle der Elemente e_A und e_B. Ist z. B. B ein Ideal und A kein einseitiges Ideal in R, so ist e_A ein Einselement in R.

Bemerkung 2. Ist im Ring $R = A \dotplus B$ (A, B sind Schiefkörper) z.B. A ein Linksideal, dann gilt für ein beliebiges Element b von B entweder $Ab = A$ oder $Ab = 0$. Wäre nämlich $Ab = A' \subset A$ ($A' \neq 0$), so wäre A' (wegen $aA' = a(Ab) = (aA)b = Ab = A'$) in A ein Linksideal, was ein Widerspruch ist. Gilt außerdem für ein einziges Element $b (\neq 0)\, Ab = 0$, so gilt $Ab' = 0$ für jedes Element b' von B. Die Elemente b' mit $Ab' = 0$ bilden nämlich ein Rechtsideal $\mathfrak{b}'$ von B. Es gilt ja $A(\mathfrak{b}' b'') = (A\mathfrak{b}')b'' = 0$ für beliebiges $b'' \in B$, also $\mathfrak{b}' b'' \subset \mathfrak{b}'$. Ähnliches gilt, wenn A ein Rechtsideal in R ist. Ist A ein Rechts- und B ein Linksideal in R, so ist $AB = 0$.

Im zweifach entarteten Fall können wir leicht ein Beispiel konstruieren. Es seien A und B isomorphe Schiefkörper und $a_i \longleftrightarrow b_i$ ($a_i \in A$; $b_i \in B$) ein gegebener Isomorphismus. Die Relationen $a_i b_j = b_i b_j$ und $b_j a_i = a_j a_i$ definieren einen Ring $R = A \dotplus B$, in dem A und B Rechtsideale sind.

(Eingegangen am 1. April 1959)

Bibliographie

Alfred Haar, Gesammelte Arbeiten. Im Auftrage der Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von Béla Szőkefalvi-Nagy, ord. Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, 660 S., Budapest, Verlag der Akademie der Wissenschaften, 1959.

Mehr als 25 Jahre sind seit dem frühen Tode des hervorragenden ungarischen Mathematikers Alfred Haar verflossen. In diesen Jahrzehnten haben seine Untersuchungen auf verschiedenen Gebieten der Analysis, in erster Reihe in der Theorie der Orthogonalreihen, der Variationsrechnung und der topologischen Gruppen, aus ihrer Bedeutung nichts verloren; gerade im Gegenteil, die Wirkung seiner Arbeiten, die Wichtigkeit der von ihm eingeführten Begriffe und seiner Entdeckungen, um nur die Beispiele des Haarschen Orthogonalsystems, des Haarschen Lemmas in der Variationsrechnung und des Haarschen Maßes zu erwähnen, wurden durch zahlreiche Untersuchungen seiner Nachfolger immer mehr hervorgehoben, der letzterwähnten Begriff gewann sogar in der Theorie der topologischen Gruppen eine grundlegende und zentrale Rolle.

Unter diesen Umständen sollen die Mathematiker der ganzen Welt Dank der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und ihrem Mitglied Béla Szőkefalvi-Nagy wissen für die Ausgabe der gesammelten Arbeiten von Alfred Haar, umso mehr, da dieser vorzügliche Analytiker seine äußerst wertvollen Untersuchungen in Buchform nie veröffentlicht hat, so daß sie bisher in verschiedenen Zeitschriften zerstreut und somit schwer zugänglich waren. Durch den jetzt erschienenen schön ausgestatteten Band wird also das Studium der Werke von Haar bedeutend erleichtert.

Nach einem kurzen Lebenslauf von Alfred Haar und der Liste seiner Arbeiten in der Reihenfolge ihrer Erscheinung, enthält der Band den auf photographischem Wege nachgedruckten Text der Arbeiten selbst, nach Gegenständen folgenderweise gruppiert: Mengentheorie — Orthogonale Funktionenreihen und singuläre Integrale — Analytische Funktionen — Partielle Differentialgleichungen — Variationsrechnung — Approximationen von Funktionen und lineare Ungleichungen — Diskrete Gruppen und Funktionenalgebren — Kontinuierliche Gruppen. Die einzelnen Gruppen werden von einigen Bemerkungen über ihren Inhalt und über die durch sie beeinflußten Arbeiten anderer Verfasser eingeleitet; damit wird die Orientierung des Lesers über die Bedeutung der einzelnen Arbeiten ermöglicht.

Dann folgt in einem ersten Anhang die deutsche Übersetzung von drei, nur auf ungarischer Sprache erschienenen und somit in der internationalen Literatur bisher wenig bekannten Abhandlungen von Haar. Die erste besitzt den Titel „Über ein orthogonales Funktionensystem" und stammt aus dem Jahre 1914, die beiden anderen sind zwei Mitteilungen über die Theorie der Gruppencharaktere und bilden einen Teil der letzten Untersuchungen des Verfassers. Der zweite Anhang enthält Teile aus einem ungarischen Vortrag über die Bedeutung der hyperbolischen Geometrie von Bolyai für die universelle Wissenschaft, gehalten von Haar in 1923 auf der Universität Szeged, bei der Gelegenheit des Zentenariums der Entdeckung von JOHANN BOLYAI. Der dritte Anhang bringt zwei Nachrufe für ALFRED HAAR.

Wir hoffen, daß diese opferwillige Ausgabe der Ungarischen Akademie der Wissenschaften Quelle neuer, von den Werken von ALFRED HAAR veranlaßter Untersuchungen wird.

Á. Császár (Budapest)

C. Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Band I, **Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung,** 2. Auflage (herausgegeben von E. HÖLDER), XI+171 Seiten, Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1956.

Dieses Buch ist eine im wesentlichen unveränderte Auflage des ersten Teiles des klassischen Carathéodoryschen Werkes. Einige Druckfehler und Versehen wurden berichtigt, und kurze Erläuterungen und ein Nachtrag von E. HÖLDER sind hinzugefügt worden. Die neue Auflage des zweiten Teiles und ein Ergänzungsband von E. HÖLDER sollen später erscheinen.

K. Tandori (Szeged)

F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 9), VIII+165 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1956.

On sait que le théorème de Riemann—Roch est la clef d'un grand nombre de théorèmes concernant la géométrie des courbes algébriques.

L'étude des variétés algébriques de dimension quelconque a posé, naturellement, le problème d'obtenir une généralisation du théorème de Riemann—Roch. Pour le cas des surfaces algébriques, cette généralisation a été obtenu par les géomètres italiens, mais pour le cas des variétés algébriques de dimension 3, telle généralisation n'a été obtenue qu'en 1952 par K. KODAIRA. La généralisation du théorème de Riemann—Roch pour le cas des variétés algébriques de dimension quelconque n'est devenue possible que tout récemment. Elle est due à F. HIRZEBRUCH et la première démonstration complète se trouve dans cette monographie. Pour l'obtenir, l'auteur a utilisé les résultats importants de la topologie algébrique, surtout de la théorie des espaces fibrés, de la théorie des faisceaux et des formes harmoniques. Ce sont les méthodes modernes, utilisées par l'auteur pour étudier diverses questions de géométrie algébrique, questions qui gravitent autour du théorème de Riemann—Roch. L'étude des variétés algébriques est entreprise, comme on voit, du point de vue „transcendant".

Dans le premier chapitre, on introduit la notion de suite multiplicative de polynomes, on expose les propriétés principales des classes de CHERN et de PONTRIAGUINE associées à une structure fibrée sphérique unitaire ou orthogonale et la théorie des faisceaux de J. LERAY sous la forme donnée par H. CARTAN.

Dans le deuxième chapitre est developpée la théorie du „cobordisme" due à ROKHLIN et THOM.

Le troisième chapitre est dédié à l'étude du genre de TODD d'une variété complexe ou presque-complexe.

Le chapitre IV formule le problème de Riemann—Roch et expose les résultats de HODGE et KODAIRA concernant la géométrie des variétés kähleriennes et les résultats de CARTAN, SERRE, DOLBEAULT sur les groupes de cohomologie d'une variété complexe. Dans ce chapitre on trouve enfin la démonstration du théorème de Riemann—Roch pour le cas des variétés algébriques de dimension quelconque, le point culminant du livre.

Le théorème de Riemann—Roch ainsi démontré contient — compte tenu des résultats de Dolbeault — le théorème concernant l'égalité entre le genre arithmétique et le genre de Todd d'une variété algébrique.

Il faut dire que tous les chapitres sont écrits avec très grande clarté et que les résultats de ce livre sont rappelés à devenir très rapidement classiques.

I. Bucur (Bucarest)

Adriaan C. Zaanen, An introduction to the theory of integration, IX+254 pages, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1958.

There already exists a rapidly growing number of textbooks and treatises on modern integration theory, and almost every author uses more or less different methods and aims at different degree of generality. Measure theoretic approach and linear functional approach are the two main trends, but these may be combined in several ways. It is needless to dispute which of these approaches is better, for much — if not all — depends here on one's personal taste and education. So it is not astonishing that in his new book Professor Zaanen presents an approach to the theory, which, though much influenced by a method indicated by M. H. Stone (1948), has much personal flavour.

The exposition begins with the theory of measure: given a σ-additive, non-negative function on a semi-ring Γ of subsets of an abstract set, it is shown how to extend it — via the exterior measure which it generates — to a measure on the least σ-ring containing Γ (the terminology is that of Halmos's *Measure Theory*). This method of extension is then used to define the Daniell integral of functions on an abstract set X, starting from a linear function $I(f)$ on some linear set L of functions $f(x)$ on X (containing with $f(x)$ always $|f(x)|$ too), so that (a) $I(f)\geqq 0$ for $f(x)\geqq 0$, (b) $I(f_n)\downarrow 0$ for $f_n(x)\downarrow 0$. The key observation is that this initial functional can be considered as a σ-additive, non-negative function on the semi-ring $\overline{\Gamma}$ formed by the ordinate sets $\{x, y: f(x)<y\leqq g(x),\ x\in X\}$ with $f,\ g\in L,\ 0\leqq f(x)\leqq g(x)$. A somewhat odd feature of this method is that the proof of the linearity of the resulting integral requires a fairly long additional reasoning (Theorem 10). The Lebesgue integral and its generalized forms (Stieltjes-Lebesgue, etc.) appear then as special cases of the Daniell integral where the initial class L contains with $f(x)$ also $\min\{f(x), 1\}$.

There follows a thorough study of Fubini's theorem and of the theorem of Radon and Nikodym; the latter is proved by von Neumann's method using the canonical representation of linear functionals in the function space L^2. The fundamental properties of Hilbert and Banach spaces, in particular of the function spaces L^p, are treated in a separate chapter. Then follows a neat expostion of the basic facts on the differentiation of σ-additive set functions in abstract sets (introduced by R. de Possel, 1935) and in euclidean space (Lebesgue's theorem); instead of Vitali coverings the device of conjugate nets (due to de la Vallée Poussin, 1915) is used. The rule of change of variables in a Lebesgue integral (in one or more dimensional euclidean space) is proved by the method of J. Schwartz (1954). Signed and complex measures, and the Banach spaces which they form are treated in another chapter. The three concluding chapters of the book deal with the linear functionals on the standard Banach function spaces, Fourier transforms, and ergodic theory. The exposition of each of these topics is fairly complete, at least in the frame of an "introductory" book.

At the end of almost every section one finds several "exercises" which are mostly statements, and brief hints of proof, of topics which are in close connection with those treated in the main text, but for some reason could not be treated there in a detailed manner. For example, the Cartesian product of infinitely many measures is treated as an "exercise" attached to the chapter on FUBINI's theorem. (By the way, the bibliographical references given here are not correct; the history of the Cartesian product of infinitely many integrals goes back at least to a paper of DANIELL in 1918.)

Within the frame of the methods and generality chosen by the author, the book succeeds in presenting a considerable amount of information, in a polished and well readable manner. It will be a useful lecture for students and lecturers, including those who, like the reviewer, prefer some other approach to modern integration theory.

Béla Sz.-Nagy (Szeged)

H. G. Eggleston, Problems in Euclidian Space, Application of Convexity, VIII+165 pages, London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1957.

The present book is a collection of different works of the author published previously. The problems proposed and solved in it relate to Euclidian 2- and 3-space. The author illustrates by these problems the importance of convexity in different braches of mathematics.

The book divides into four chapters. The problems of Chapter 1 are of general character. These problems connect either by analogy or by the arguments to the notion of convexity. The 4th problem constituting Chapter 2 can be reduced to a problem on convex sets. Chapter 3 contains problems on convex sets, whilst Chapter 4 concerns special convex domains.

From Chapter 1 we emphasize the 2nd problem raised by S. ULAM. The discussion of this problem concludes in the result that all homeomorphisms of the plane can be approximated pointwise by a special one, but this assertion does not hold for uniform approximation. Chapter 2 contains the proof in 3-space of a famous conjecture of K. BORSUK according to which any point-set of n-space, of diameter 1, can be decomposed into $n+1$ subsets of diameter $\leqq 1$. The same result was obtained by GRÜNBAUM and HEPPES in an essentially simpler way. The author prefers his method because "it is possible that this method extends to higher dimensional spaces".

The following problem goes back to DOWKER who proved that the least "area-deviation" of a closed convex curve from an inscribed or circumscribed n-gon is a convex function of n. The question was proposed by L. FEJES TÓTH wether this remains true for arbitrary polygons and for the "perimeter-" and "distance-deviation" too. This problem is solved with a positive answer for the area- and perimeter-deviation and with a negative answer for the distance-deviation. The author proceeds to establish different interesting extremum properties of the triangle not yet treated in books.

The remaining problems are of rather special character. We stress the following theorem: if Γ is a convex set of width d and θ is a central convex set of perimeter $\leqq 2d$, then Γ may be translated until it covers entirely θ. This theorem involves the solution of the plank problem of TARSKI.

The tendence in the arrangement of the problems, to descend gradually from the general to the special, constitutes only a loose bond to join the single problems treated. Of course there exist many simpler and more characteristic problems and proofs which would illustrate as well the significance of convexity. However the reader will find in studying the special problems treated in this book many valuable suggestions.

Margaret Imre (Budapest)

P. Lorenzen, Formale Logik (Sammlung Göschen, Bd. 1176/1176a), 165 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1958.

This book is a concise summary of the ideas exposed by the author in various papers and in his book, *Einführung in die operative Logik und Mathematik* (Springer-Verlag, 1955). These ideas, though not shared by the most part of the logicians, may exert a fertilizing influence on the development of logic. This influence would possibly be greater without the difficulties caused by the author's symbolism and terminology, very much different from any other now usual in the literature.

The book seems to have been written in a hurry and makes the impression of a first draft. On p. 16, e. g., the author writes after having given a preliminary definition of the syllogistic cases a and e: „Als dritte Möglichkeit bleibt, daß Q einigen, aber nicht allen P zukommt. Die Behauptung, daß diese dritte Möglichkeit vorliegt, läßt sich also in die beiden Teilbehauptungen (i) und (o) aufspalten" — as if a, e, i, and o were possibilities excluding each other. This contradicts, however, not only the usual definitions of these relations, but also p. 24 (2.21) and other places of the book itself. Errors of this and other kinds are not infrequent in this book. Many of them are misprints, like B instead of $\bar{B}$ on p. 45 (5.2); $\mathfrak{b}_2$ instead of $\bar{\mathfrak{b}}_2$ on p. 46, line -11; $\sqcap$ instead of $\sqcup$, p. 49, last line; q instead of b on p. 51, line -7; others are due to inaccuracy on the part of the author, like § 7 instead of § 3 on p. 64, line 11.

The lack of a modern formal logic in the Göschen series does not seem to have been perfectly ceased by the edition of the present book. Another title for the book — perhaps "Operative Logik" — would have been more appropriate.

T. Varga (Budapest)

Karl Strubecker, Differentialgeometrie. II und III, Theorie der Flächenmetrik und Theorie der Flächenkrümmung (Sammlung Göschen, Bd. 1179/1179a und 1180/1180a), 195 und 254 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1958.

Die zwei Bändchen enthalten die klassische Flächentheorie, die im vergangegenen Jahrhundert entstanden ist und die auch heutzutage die Grundlagen der differentialgeometrischen Studien bildet. Trotz dem kleinen Umfang wurde die Flächentheorie sehr ausführlich und mit präziser Formulierung entwickelt, und durch zahlreiche Beispiele und anschauliche Figuren erläutert. Neben den reellen Flächen erweitert der Verf. öfters die einzelnen Theorien auch auf die komplexen analytischen Flächen.

Band II beschäftigt sich mit der inneren Geometrie der Flächen. Die vier Kapitel von Band II sind die folgenden: A) Flächenmetrik, B) Vektoranalysis auf Flächen, C) Theorie der Abbildung von Flächen, D) Geodätische Krümmung. Geodätische Linien. Absoluter Parallelismus. Besonders hervorzuheben sind die konformen und die flächentreuen Abbildungen der Kugel, die in der Kartographie eine wichtige Rolle spielen.

Band III behandelt in fünf Kapiteln die äußere Flächentheorie. Die einzelnen Kapitel sind die folgenden: A) Streifentheorie, B) Elementare Theorie der Flächenkrümmung, C) Gaußsche Theorie der Flächenkrümmung, D) Ableitungsgleichungen und Fundamentalsätze der Flächen, E) Minimalflächen. Eine der interessantesten Teile dieses Bandes ist die Entwicklung der Grundzüge der hyperbolischen Geometrie und der projektiven Metrik von der allgemeinen Theorie der Flächen mit der festen Gaußschen Krümmung $K = -1$. Es zeigt sich, daß von der Seite der Differentialgeometrie die vollständige Theorie der hyperbolischen Ebene von dem Bogenelementquadrat der reellen pseudosphärischen Fläche ableitbar ist.

A. Moór (Szeged)

Fumitomo Maeda, Kontinuierliche Geometrien (Die Grundlehren der Mathemaschen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. XCV), X+244 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1958.

Das vorliegende Buch ist eine — im wesentlichen unveränderte — Übersetzung des 1950 geschriebenen japanischen Originals, und es enthält alle wichtigen Ergebnisse, die in der Theorie der kontinuierlichen Geometrien in jener Zeit bekannt waren. In seinen ersten drei Kapiteln befindet sich eine Zusammenstellung aller Begriffe und Ergebnisse der Theorie der Verbände (insbesondere, der modularen Verbände) und der projektiven Räume, die in den weiteren Kapiteln gebraucht werden. Kap. IV und V beschäftigen sich mit der Dimensionstheorie der stetigen komplementären modularen Verbände, die für den irreduziblen Fall von J. von Neumann und für den reduziblen von T. Iwamura, Y. Kawada, K. Higuchi und Y. Matsushima ausgearbeitet wurde. In Kap. VI werden — zur Vorbereitung des nachfolgenden — gewisse ringtheoretische Grundbegriffe und die wichtigsten Eigenschaften der regulären Ringe erörtert; insbesondere wird der Satz bewiesen, daß der Hauptrechtsidealverband eines regulären Ringes immer ein komplementärer modularer Verband ist. Es folgen (Kap. VII) die Ergebnisse des Verfassers bezüglich der Dimensionstheorie und der subdirekten Zerlegungen stetiger regulärer Ringe. Die folgenden vier Kapitel behandeln — mit der Methode von K. Kodaira und S. Furuya — die Neumannsche Darstellungstheorie der komplementären modularen Verbände, deren Hauptresultat ist, daß zu jedem solchen Verband mit einer Ordnung größer als 3 ein regulärer Ring — der sog. Hilfsring — bestimmt werden kann, dessen Hauptrechtsidealverband dem vorgegebenen Verband isomorph ist. Endlich handelt es sich in Kap. XII um die Darstellungstheorie der orthokomplementären modularen Verbände; das Hauptresultat dieses Kapitels ist die Maedasche Verallgemeinerung des Birkhoff—Neumannschen Darstellungssatzes.

Die Theorie der kontinuierlichen Geometrien ist bekanntlich ein schweres Studium. Doch legt uns der Verf. eine übersichtliche und verhältnismäßig leichte Behandlung dieser Theorie; alle Einzelheiten sind ausführlich und sorgfältig ausgearbeitet. Es wäre aber vorteilhaft gewesen, wenn die wichtigsten Sätze nicht nur in Worten, sondern auch typographisch betont worden wären.

G. Szász (Szeged)

M. Miller, Variationsrechnung, (Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek, Bd. 24), Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1959.

Dies ist ein gutes Lehrbuch zur ersten Einführung in die Variationsrechnung. Die Grundtatsachen bzw. die Grundprobleme der Variationsrechnung, z. B. die Eulersche Differentialgleichung, natürliche Randbedingung, Transversalität, Legendresche Bedingung bzw. die inverse Aufgabe der Variationsrechnung, Variationsprobleme in Parameterdarstellung, isoperimetrische Probleme werden in einfachsten Fällen betrachtet. Die direkten Methoden der Variationsrechnung, und zwar die Methoden von Euler, Ritz, Fourier und die Frage der Zurückführung von Rand- und Eigenwertproblemen auf Variationsprobleme werden kurz erwähnt. Die theoretischen Erörterungen werden durch zahlreiche, vollständig durchgerechnete, klassische Beispiele ergänzt.

K. Tandori (Szeged)

Sur un problème de M. Paul Erdős

Par A. SCHINZEL à Varsovie (Pologne) et G. SZEKERES à Adelaide (Australie)

P. ERDŐS a démontré[1]) que pour toute suite des nombres naturels $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ tels que

(1) $$a_1 < a_2 < \cdots < a_r \leqq n \quad \text{et} \quad [a_i, a_j] > n \qquad (1 \leqq i < j \leqq r)$$

on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} < 2.$$

R. S. LEHMAN a démontré[2]) que la condition (1) entraîne l'inégalité plus forte

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} < \frac{7}{6} + \frac{1}{6n}.$$

Pour $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$ la condition (1) est remplie et

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i} = \frac{31}{30}.$$

Or, P. ERDŐS a posé le problème si pour toute suite satisfaisant à la condition (1) on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} \leqq \frac{31}{30}$$

et a exprimé l'hypothèse que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un n_0 tel que pour $n > n_0$ la condition (1) entraîne l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} < 1 + \varepsilon.$$

Outre la suite $\{2, 3, 5\}$ nous ne connaissons qu'une seule suite pour laquelle on ait (1) et l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} > 1,$$

---

[1]) Publication orale.

[2]) *Amer. Math. Monthly*, **58** (1951), p. 345, problème 4365.

c'est la suite $\{3, 4, 5, 7, 11\}$ où

$$\sum \frac{1}{a_i} = 1{,}017099\ldots$$

En connection avec ces problèmes, nous démontrerons les trois théorèmes suivants:

Théorème 1. *Pour toute suite de nombres naturels* $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ *satisfaisant à la condition* (1) *on a*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} \leqq \frac{31}{30}$$

où l'égalité est atteinte seulement pour $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5 = n$.

Théorème 2. *Quel que soit* $\varepsilon > 0$ *il existe un* n_0 *tel que, pour* $n > n_0$, *la condition* (1) *entraîne l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} < c + \varepsilon$$

où

$$c = \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{j+1}{j} = 1{,}017262\ldots$$

et les valeurs de c_j *sont données par les égalités* (6).

Théorème 3. *Quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un* n_0 *tel que pour* $n > n_0$ *et pour une certaine suite satisfaisant à la condition* (1) *on ait*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} > 1 - \varepsilon.$$

Nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 1. *Soient* $c_1, c_2, \ldots$ *des nombres* $\geqq 0$, *tels que pour chaque* q *naturel on ait*

$$S_q = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{\frac{q}{j} \geqq p > \frac{q}{j+1}} \frac{1}{p} \geqq 1. \tag{2}$$

Alors, pour chaque suite $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *vérifiant la condition* (1), *on a l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} \leqq S_n.$$

Démonstration. En effet, soit l un nombre naturel quelconque et désignons par x_m le nombre des termes de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_r$ qui sont contenus dans l'intervalle $\left(\frac{l}{m+1} n, \frac{l}{m} n\right]$. Chacun de ces nombres a précisément $\left[\frac{m}{k}\right]$ multiples $\leqq \frac{l}{k} n$, donc précisément $\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]$ multiples compris dans l'intervalle $\left(\frac{l}{k+1} n, \frac{l}{k} n\right]$. Or, d'après (1), si $k \geqq l$, les multiples des termes distincts de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sont distincts et on a au moins $\sum_{m=k}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]\right) x_m$ nombres entiers dans l'intervalle $\left(\frac{l}{k+1} n, \frac{l}{k} n\right]$. Vu que cet intervalle contient précisément $\left[\frac{l n}{k}\right]-\left[\frac{l n}{k+1}\right]$ nombres entiers, on a pour $k=l,\ l+1,\ l+2, \ldots$ l'inégalité

$$\sum_{m=k}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]\right) x_m \leqq\left[\frac{l n}{k}\right]-\left[\frac{l n}{k+1}\right]. \tag{3}$$

D'autre part

$$\sum_{a_i \in\left(\frac{l n}{m+1}, \frac{l n}{m}\right]} \frac{1}{a_i} \leqq \frac{m+1}{l n} x_m,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} \leqq \frac{1}{l n} \sum_{m=l}^{\infty}(m+1) x_m. \tag{4}$$

Observons maintenant que pour tous m et k naturels on a

$$\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]=\sum_{\frac{m}{k} \geqq p>\frac{m}{k+1}} 1=\sum_{k+1>\frac{m}{p} \geqq k} 1=\sum_{\left[\frac{m}{p}\right]=k} 1 \tag{5}$$

où les sommes doivent être étendues aux valeurs indiquées de p.

Une suite de nombres $\alpha_k \geqq 0$ étant donnée, désignons par $\sum_k{}' \alpha_k$ la somme

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{k=lj}^{l(j+1)-1}(k+1) \alpha_k \quad(\leqq \infty).$$

En vertu des formules (5) et (2) nous obtenons

$$\sum_k{}'\left(\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]\right)=\sum_\kappa{}' \sum_{\left[\frac{m}{p}\right]=k} 1=\sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{l(j+1)>\left[\frac{m}{p}\right] \geqq lj}\left(\left[\frac{m}{p}\right]+1\right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{\left[\frac{m}{pl}\right]=j} \frac{m+1}{p}=(m+1) \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{\frac{\left[\frac{m}{l}\right]}{j} \geqq p>\frac{\left[\frac{m}{l}\right]}{j+1}} \frac{1}{p}=(m+1) S_{\left[\frac{m}{l}\right]} \geqq m+1.$$

Il en résulte que

$$\sum_k' \sum_{m=l}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]\right)x_m=\sum_{m=l}^{\infty}x_m\sum_k'\left(\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]\right)\geqq\sum_{m=l}^{\infty}(m+1)x_m.$$

Donc, en vertu de (4), (3) et (5)

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{a_i}\leqq\frac{1}{ln}\sum_k'\sum_{m=l}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m}{k+1}\right]\right)x_m\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{ln}\sum_k'\left(\left[\frac{ln}{k}\right]-\left[\frac{ln}{k+1}\right]\right)=\frac{1}{ln}\sum_k'\sum_{\left[\frac{ln}{p}\right]=k}1=$$

$$=\frac{1}{ln}\sum_{j=1}^{\infty}c_j\sum_{l(j+1)>\left[\frac{ln}{p}\right]\geqq lj}\left(\left[\frac{ln}{p}\right]+1\right)=\frac{1}{ln}\sum c_j\sum_{\frac{n}{j}\geqq p>\frac{n}{j+1}}\left[\frac{ln}{p}\right]+$$

$$+\frac{1}{ln}\sum_{j=1}^{\infty}c_j\sum_{\frac{n}{j}\geqq p>\frac{n}{j+1}}1\leqq S_n+\frac{1}{ln}\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\left[\frac{n}{j}\right]-\left[\frac{n}{j+1}\right]\right).$$

Cette formule ayant lieu pour tout l on a

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{a_i}\leqq S_n,\qquad\text{c. q. f. d.}$$

Lemme 2. *Les nombres*

$$c_1=1,\ c_2=\frac{1}{2},\ c_3=c_4=\frac{1}{6},\ c_6=\frac{2}{15},$$

$$c_{10}=\frac{31}{420},\ c_{15}=c_{16}=\frac{2021}{45045},\ c_{22}=\frac{3565609}{116396280},$$

$$c_{28}=\frac{37069832}{1673196525},\ c_{35}=\frac{7864304243}{668534967100},\tag{6}$$

$$c_{36}=\frac{52102743271}{300840735190},\ c_{58}=\frac{859309339517577929}{1520827395602202087400},$$

$$c_j=0\ \textit{(pour tous les autres } j)$$

satisfont pour tout q naturel à l'inégalité

$$S_q\geqq 1$$

et pour tout $q\neq 5, 13, 19, 20, 31, 32, 61, 62$ à l'inégalité

$$S_q<\frac{31}{30}.$$

La règle de formation des nombres $c_1, c_2, \ldots$ est la suivante:

Supposons que chaque c_j $(j<q)$ est déjà déterminé, alors c_q est le plus petit nombre non-négatif tel que $S_q \geqq 1$. On voit que

$$\lim S_q = \lim \sum_{j=1}^{58} c_j \sum_{\frac{q}{j} \geqq p > \frac{q}{j+1}} \frac{1}{p} = \sum_{j=1}^{58} \lim_{q\to\infty} \sum_{\frac{q}{j} \geqq p > \frac{q}{j+1}} \frac{1}{p} = \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{j+1}{j} = c \tag{7}$$

et on vérifie aisément que $c = 1{,}0172\ldots < \frac{31}{30}$. Donc l'inégalité

$$1 \leqq S_q < \frac{31}{30} \tag{8}$$

est certainement vraie pour q suffisamment grand.

Pour $q \leqq 365$ le lémme peut être vérifié directement.

Pour q > 365 on peut démontrer l'inégalité (8) de la façon suivante:

Comme

$$\log \frac{\left[\frac{q}{j}\right]+1}{\left[\frac{q}{j+1}\right]+1} \leqq \sum_{\frac{q}{j} \geqq p > \frac{q}{j+1}} \frac{1}{p} \leqq \log \frac{\left[\frac{q}{j}\right]}{\left[\frac{q}{j+1}\right]},$$

on a

$$S_q \geqq \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{\left[\frac{q}{j}\right]+1}{\left[\frac{q}{j+1}\right]+1} = \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{j+1}{j} + \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{j\left[\frac{q}{j}\right]+j}{(j+1)\left[\frac{q}{j+1}\right]+j+1} =$$

$$= c + \log(q+1) + \sum_{j=2}^{59} (c_j - c_{j-1}) \log\left(j\left[\frac{q}{j}\right]+j\right) = c + \sum_{j=2}^{59} (c_j - c_{j-1}) \log \frac{j\left[\frac{q}{j}\right]+j}{q+1}$$

et

$$S_q \leqq \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{\left[\frac{q}{j}\right]}{\left[\frac{q}{j+1}\right]} = \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{j+1}{j} + \sum_{j=1}^{58} c_j \log \frac{j\left[\frac{q}{j}\right]}{(j+1)\left[\frac{q}{j+1}\right]} =$$

$$= c + \log q + \sum_{j=2}^{59} (c_j - c_{j-1}) \log j\left[\frac{q}{j}\right] = c + \sum_{j=2}^{59} (c_j - c_{j-1}) \log \frac{j\left[\frac{q}{j}\right]}{q},$$

c'est-à-dire :

$$c-S_q \leqq \sum_{j=2}^{59}(c_{j-1}-c_j)\log\frac{j\left[\frac{q}{j}\right]+j}{q+1},$$

$$S_q-c \leqq \sum_{j=2}^{59}(c_{j-1}-c_j)\log\frac{q}{j\left[\frac{q}{j}\right]}.$$

Vu les inégalités

$$c_5-c_6=-c_6<0, \qquad 6\left[\frac{q}{6}\right]+6\geqq 3\left[\frac{q}{3}\right]+3>3\left[\frac{q}{3}\right]\geqq 6\left[\frac{q}{6}\right],$$

$$c_9-c_{10}=-c_{10}<0, \qquad 10\left[\frac{q}{10}\right]+10\geqq 5\left[\frac{q}{5}\right]+5>5\left[\frac{q}{5}\right]\geqq 10\left[\frac{q}{10}\right],$$

$$c_{14}-c_{15}=-c_{15}<0, \qquad 15\left[\frac{q}{15}\right]+15\geqq 5\left[\frac{q}{5}\right]+5>5\left[\frac{q}{5}\right]\geqq 15\left[\frac{q}{15}\right],$$

$$c_{21}-c_{22}=-c_{22}<0, \qquad 22\left[\frac{q}{22}\right]+22\geqq 11\left[\frac{q}{11}\right]+11>11\left[\frac{q}{11}\right]\geqq 22\left[\frac{q}{22}\right],$$

$$c_{27}-c_{28}=-c_{28}<0, \qquad 28\left[\frac{q}{28}\right]+28\geqq 7\left[\frac{q}{7}\right]+7>7\left[\frac{q}{7}\right]\geqq 28\left[\frac{q}{28}\right],$$

$$c_{34}-c_{35}=-c_{35}<0, \qquad 35\left[\frac{q}{35}\right]+35\geqq 7\left[\frac{q}{7}\right]+7>7\left[\frac{q}{7}\right]\geqq 35\left[\frac{q}{35}\right],$$

$$c_{35}-c_{36}=-\frac{1}{180}<0, \qquad 36\left[\frac{q}{36}\right]+36\geqq 3\left[\frac{q}{3}\right]+3>3\left[\frac{q}{3}\right]\geqq 36\left[\frac{q}{36}\right],$$

$$c_{57}-c_{58}=-c_{58}<0, \qquad 58\left[\frac{q}{58}\right]+58\geqq 29\left[\frac{q}{29}\right]+29>29\left[\frac{q}{29}\right]\geqq 58\left[\frac{q}{58}\right],$$

on obtient

$$c-S_q \leqq (c_1-c_2)\log\frac{2\left[\frac{q}{2}\right]+2}{q+1}+\left(c_2-c_3-c_6-\frac{1}{180}\right)\log\frac{3\left[\frac{q}{3}\right]+3}{q+1}+$$
$$+(c_4-c_{10}-c_{15})\log\frac{5\left[\frac{q}{5}\right]+5}{q+1}+(c_6-c_{28}-c_{35})\log\frac{7\left[\frac{q}{7}\right]+7}{q+1}+$$
$$+(c_{10}-c_{22})\log\frac{11\left[\frac{q}{11}\right]+11}{q+1}+c_{16}\log\frac{17\left[\frac{q}{17}\right]+17}{q+1}+c_{22}\log\frac{23\left[\frac{q}{23}\right]+23}{q+1}+$$
$$+(c_{28}-c_{58})\log\frac{29\left[\frac{q}{29}\right]+29}{q+1}+c_{26}\log\frac{37\left[\frac{q}{37}\right]+37}{q+1}+c_{58}\log\frac{59\left[\frac{q}{59}\right]+59}{q+1}$$

et

$$S_q - c \leqq (c_1 - c_2) \log \frac{q}{2\left[\frac{q}{2}\right]} + \left(c_2 - c_3 - c_6 - \frac{1}{180}\right) \log \frac{q}{3\left[\frac{q}{3}\right]} +$$

$$+ (c_4 - c_{10} - c_{15}) \log \frac{q}{5\left[\frac{q}{5}\right]} + (c_6 - c_{28} - c_{35}) \log \frac{q}{7\left[\frac{q}{7}\right]} +$$

$$+ (c_{10} - c_{22}) \log \frac{q}{11\left[\frac{q}{11}\right]} + c_{16} \log \frac{q}{17\left[\frac{q}{17}\right]} + c_{22} \log \frac{q}{23\left[\frac{q}{23}\right]} +$$

$$+ (c_{28} - c_{58}) \log \frac{q}{29\left[\frac{q}{29}\right]} + c_{36} \log \frac{q}{37\left[\frac{q}{37}\right]} + c_{58} \log \frac{q}{59\left[\frac{q}{59}\right]}.$$

Or, comme les nombres $c_1 - c_2$, $c_2 - c_3 - c_6 - \frac{1}{180}$, $c_4 - c_{10} - c_{15}$, $c_6 - c_{28} - c_{35}$, $c_{10} - c_{22}$, c_{16}, c_{22}, $c_{28} - c_{58}$, c_{36} et c_{58} sont positifs et comme pour tout $j \leqq 59$ et $q > 365$ on a les inégalités

$$\left.\begin{aligned} &\log \frac{j\left[\frac{q}{j}\right] + j}{q+1} \leqq \log \frac{q+j}{q+1} \leqq \frac{j-1}{q+1} \\ &\log \frac{q}{j\left[\frac{q}{j}\right]} \leqq \log \frac{q}{q-j+1} \leqq \frac{j-1}{q-j+1} \end{aligned}\right\} \leqq \frac{j-1}{308},$$

on trouve

$$|S_q - c| \leqq \frac{1}{308} \Big\{ c_1 - c_2 + 2\left(c_2 - c_3 - c_6 - \frac{1}{180}\right) + 4(c_4 - c_{10} - c_{15}) +$$

$$+ 6(c_6 - c_{28} - c_{35}) + 10(c_{10} - c_{22}) + 16c_{16} + 22c_{22} + 28(c_{28} - c_{58}) +$$

$$+ 36c_{36} + 58c_{58} \Big\} < 0{,}0160$$

d'où

$$S_q \geqq c - 0{,}0160 \geqq 1{,}0172 - 0{,}0160 > 1,$$

$$S_q \leqq c + 0{,}0160 \leqq 1{,}0173 + 0{,}0160 < \frac{31}{30}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 1. Des lemmes 1 et 2 nous obtenons tout de suite que pour tout nombre naturel $n \neq 5$, 13, 19, 20, 31, 32, 61, 62 et pour toute suite satisfaisant à la condition (1) on a

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i} < \frac{31}{30}.$$

Pour $n=5$, 13, 19, 20, 31, 32, 61, 62 le théorème peut être vérifié directement.

Démonstration du théorème 2. Ce théorème résulte immédiatement des lemmes 1 et 2 et de la formule (7).

Démonstration du théorème 3. n étant donné, soit T_n l'ensemble des nombres entiers c $(0 < c \leqq n)$ jouissant de la propriété suivante:

Si p est le plus petit diviseur premier de c, alors $c \geqq \frac{n}{p}$.

Soit A_n l'ensemble de tous les $a \in T_n$ qui ne sont divisibles par aucun $c \in T_n$, $c \neq a$.

Pour $a_1 \in A_n$, $a_2 \in A_n$, $a_1 < a_2$, on a alors $[a_1, a_2] > n$. En effet, soit $a_1 = dq_1$, $a_2 = dq_2$, $(q_1, q_2) = 1$, $1 < q_1 < q_2$. Alors $[a_1, a_2] = dq_1q_2 = a_1q_2 > a_1q_1 \geqq n$.

Soit $a_1 < a_2 < \cdots \leqq n$ la suite des nombres appartenant à A_n et soit $\sum \frac{1}{a_i} = 1 - \varepsilon_n$; nous devons démontrer que $\lim \varepsilon_n = 0$.

Soit B_n l'ensemble de tous les nombres entiers $(0 < b \leqq n)$ qui ne sont divisibles par aucun $a \in A_n$. Il suffit évidemment de démontrer que $|B_n| = o(n)$.

On a $c \nmid b$ pour $c \in T_n$, $b \in B_n$, puisque chaque c est divisible par au moins un a. Donc les b sont caractérisés par la propriété suivante:

$d|b$ implique que, si p est le plus petit diviseur premier de d, alors $d < \frac{n}{p}$.

Soit $b = p_1p_2\cdots p_i$, $p_1 \geqq p_2 \geqq \cdots \geqq p_i$. Alors

$$\begin{array}{ll} p_1 < \dfrac{n}{p_1}, & p_1 < \sqrt{n}, \\ p_1p_2 < \dfrac{n}{p_2}, & p_2 < \sqrt{\dfrac{n}{p_1}}, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ p_1p_2\cdots p_i < \dfrac{n}{p_i}, & p_i < \sqrt{\dfrac{n}{p_1p_2\cdots p_{i-1}}}. \end{array}$$

Désignons par B'_n l'ensemble de tous les nombres entiers b' $(0 < b' \leqq n)$ qui peuvent être représentés sous la forme

$$b' = k_1k_2\cdots k_i, \quad k_1 < \sqrt{n}, \quad k_j < \sqrt{\frac{n}{k_1k_2\cdots k_{j-1}}} \qquad (j = 2, \ldots, i)$$

(les k_j ne sont pas nécessairement premiers et allant en décroissant). En vertu du théorème de HARDY—RAMANUJAN on peut supposer que pour chaque $b' = k_1 \cdots k_i \in B'_n$

(9) $$i < 1{,}1 \log\log n.$$

En effet, le nombre des b' tels que $i \geqq 1{,}1 \log\log n$ est $o(n)$. Désignons pour l'abbréviation le nombre $\sqrt{\frac{n}{k_1 \cdots k_j}}$ par σ_j. Or, le nombre des b' pour les valeurs fixées de $i, k_1, \ldots, k_{i-1}$ est tout au plus $\sigma_{i-1} = \sqrt{\frac{n}{k_1 \cdots k_{i-1}}}$; pour les valeurs fixées de $i, k_1, \ldots, k_{i-2}$ il est tout au plus

$$\sum_{k_{i-1} < \sigma_{i-2}} \sigma_{i-1} = \sigma_{i-2} \sum_{k_{i-1} < \sigma_{i-2}} \frac{1}{\sqrt{k_{i-1}}} < \sigma_{i-2} \int_0^{\sigma_{i-2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= 2\sigma_{i-2}\sqrt{\sigma_{i-2}} = \frac{2n}{(k_1 \cdots k_{i-2})^{3/4}}.$$

Continuant ce raisonnement nous trouverons après i pas, que le nombre des b' pour i fixé est tout au plus $2^{\binom{i}{2}} n^{1-\frac{1}{2^i}} < \exp\left\{\frac{1{,}21}{2} \log 2 (\log\log n)^2\right\} \cdot \exp\{\log n \cdot (1 - 2^{-1{,}1 \log\log n})\}$. Il en résulte, en vertu de (9), que le nombre total des b' est tout au plus

$$1{,}1\, n \log\log n \cdot \exp\{(\log\log n)^2 - (\log n)^{1-1{,}1 \log 2}\} < n e^{-(\log n)^{\delta}}$$

pour $n \geqq n_0$ et pour δ positif, convenablement choisi. Donc $|B_n| \leqq |B'_n| = o(n)$, ce qui achève la démonstration.

(Reçu le 17 janvier 1959)

Concerning the numerical integration of periodic functions of several variables

By L. C. HSU in Changchun (China)

Certain types of approximation formulae concerning the numerical integration of periodic functions of several variables of the form

$$(1) \qquad J=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\ldots dx_m$$

have been proposed by KOROBOV [1], HSU and LIN [2], respectively. Very recently S. H. MIN [3] has established an approximation formula whose degree of approximation is best possible as far as the order is concerned.

The object of this note is to show that a simple approximation formula with best possible degree of approximation can also be obtained by means of the method proposed in [2]. In the statement of MIN's result it is required that the integrand function should possess continuous partial derivatives of orders exceeding the number of variables contained. However, in our formula such an additional restriction becomes unnecessary.

As in [2], let $f(X)\equiv f(x_1,\ldots,x_m)$ be a function of period 2π in each of the variables x_j $(j=1,\ldots,m)$, and let $f(X)$ have continuous partial derivatives of the orders up to p $(p>3)$:

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_m} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}\equiv f_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(X) \quad (\alpha_j\geqq 0,\ \alpha_1+\cdots+\alpha_m\leqq p).$$

Define, as a modulus of continuity of order p,

$$\omega_p(\varrho)=\max|f_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(x_1,\ldots,x_m)-f_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(x_1',\ldots,x_m')|,$$

where the "maximum" is taken over all the compositions $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ subject to the condition $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=p$ $(\alpha_j\geqq 0)$ and over all the points $(x_1,\ldots,x_m)$ and $(x_1',\ldots,x_m')$ with $\sum_j'(x_j-x_j')^2\leqq\varrho^2$.

By using the same device as in the proof of Theorem 1 in [2] we may establish the following

Lemma. *Let R denote a positive integer and let $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ be a set of non-negative integers such that $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_m$. Then for R large we have*

$$(2)\qquad \left| J - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt \right| = O\left(\left(\frac{1}{R}\right)^p \omega_p\left(\frac{1}{R}\right)\right),$$

where $\varphi(t) \equiv f(R^{\gamma_1} t, \ldots, R^{\gamma_m} t)$, and the constant factor involved in the order estimation $O(\cdot)$ is independent of R.

Here we just sketch how to prove the lemma. Consider all the linear combinations of $T_j = R^{\gamma_j}$ with integer coefficients; we easily find that

$$\inf_{\nu < R^2} | n_1 T_1 + \cdots + n_m T_m = R^{\gamma_m},$$

where the "infimum" is taken over all $(n_1, \ldots, n_m)$ subject to the condition

$$1 \leqq n_1^2 + \cdots + n_m^2 = \nu < R^2.$$

Then by exactly the same procedure as used in the derivation of (8) of [2] we may obtain

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = a_{0,\ldots,0}(R) + O\left(\left(\frac{1}{R}\right)^p \omega_p\left(\frac{1}{R}\right)\right),$$

with $a_{0,\ldots,0}(R) = C_{0,\ldots,0} = J$. Hence we have the lemma.

We now proceed to construct an approximation formula. Take $\gamma_j = m - j$ in the lemma, so that

$$(3)\qquad \varphi(t) \equiv f(R^{m-1} t,\ R^{m-2} t, \ldots, t).$$

Clearly $\varphi(t)$ is of period 2π in t. Suppose that $\varphi(t)$ has an absolutely convergent Fourier series

$$(4)\qquad \varphi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{int}.$$

Then we easily find that

$$(5)\quad \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \varphi\left(\frac{2k\pi}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{-\infty}^{\infty} C_n \sum_{k=1}^{N} \exp\left(\frac{2nk\pi i}{N}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)dt + \sum_{n\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, N)}' C_n,$$

where in Σ' is omitted the term C_0. Let us now estimate $|C_n|$ for $n = \pm N$, $\pm 2N, \ldots$. Suppose that all the partial derivatives of $f(x_1, \ldots, x_m)$ of order p are bounded in their absolute values. Then it follows that there is an absolute constant $A > 0$ such that

$$(6)\qquad \left(\frac{1}{R^{m-1}}\right)^p \left| \left(\frac{d}{dt}\right)^p \varphi(t) \right| < A \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

Evidently, successive application of integration by parts to the integral

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-int}\,dt$$

will lead to the following estimate

$$(7) \qquad |C_n| \leqq \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{-in}\right|^p \int_0^{2\pi} \left|\left(\frac{d}{dt}\right)^p \varphi(t)\cdot e^{-int}\right| dt \leqq \left|\frac{1}{n}\right|^p \cdot A\cdot R^{(m-1)p},$$

where we have utilized the periodicity of $\varphi^{(\nu)}(t)$ with $0 \leqq \nu \leqq p-1$. Thus we get

$$\left|\sum_{n\equiv 0 (\mathrm{mod}\, N)}' C_n\right| \leqq 2A\cdot\left(\frac{R^{m-1}}{N}\right)^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 2A\cdot\left(\frac{R^{m-1}}{N}\right)^p \zeta(p).$$

Finally, taking $N = R^m$ and using (5), we find

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \varphi\left(\frac{2k\pi}{N}\right) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt\right| \leqq 2A\cdot\zeta(p)\cdot\left(\frac{1}{R}\right)^p.$$

Comparing this with (2) and noticing that the absolute convergence of (4) is implied by (6) or (7), we are therefore led to the following

Theorem. *Let $N = R^m$ and let $\varphi(t)$ be defined by* (3) *and satisfy the boundedness condition* (6). *Then for N large we have*

$$(8) \qquad \left|\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f(X)\,dx_1\ldots dx_m - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{2k\pi}{R}, \frac{2k\pi}{R^2}, \ldots, \frac{2k\pi}{R^m}\right)\right| \leqq$$

$$\leqq 2A\cdot\zeta(p)\left(\frac{1}{N}\right)^{p/m} + O\left[\left(\frac{1}{N}\right)^{p/m} \omega_p\left(\frac{1}{R}\right)\right],$$

where the constants in $O(\cdot)$ depend on the function f, but are independent of p and N.

Apparently we have here already arrived at a best possible result as far as the order $O(N^{-p/m})$ is concerned. As a matter of fact, it has been mentioned by Gelfand etc. [4] that one can apply the method of Kolmogoroff [5] to show that the order estimate $O(N^{-p/m})$ cannot be improved upon anyway. As regards the numerical calculation of a general multiple integral it is known that Gnedenko [6] has proposed the problem (in certain connection with the Monte Carlo method) of improving the degree of approximation to the order $O(N^{-1})$. Now from our result we see that such a degree of approximation can actually be attained by assuming $p = m$; and on the other hand this will be not the case if it is assumed $p < m$.

References

[1] Н. М. Коробов, Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел, Доклады Академии Наук СССР, **115** (1957), 1062 1065.

[2] L. C. Hsu and L. W. Lin, Two new methods for the approximate calculation of multiple integrals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958). 279—290.

[3] S. H. Min, On the numerical integration of a kind of multiple integrals (Chinese, with English summary), *Acta Sci. Nat. Univ. Pekinensis*, **5** (1959), 127—130.

[4] И. М. Гельфанд, А. С. Фролов, Н. Ченцов, Изв. высших учебных заведений, Математика, **5** (1958).

[5] А. Н. Колмогоров, О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств, Доклады Академии Наук СССР, **108** (1956), 385—388.

[6] Б. В. Гнеденко, О некоторых задачах теории вероятностей, Украинский Матем. Журнал, **9** (1957). 377—388.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
NORTH-EAST PEOPLE'S UNIVERSITY (JILIN UNIVERSITY)
CHANGCHUN, CHINA

(Received June 10, 1959)

Ein spezieller Diskriminantensatz über Polynome

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged

Über einem Körper K mit von 2 und 3 verschiedener Charakteristik legen wir uns ein Polynom vierten Grades in der Normalform

$$F(x) = x^4 + px^2 + qx + r \qquad (p, q, r \in K) \tag{1}$$

vor. Üblicherweise werde

$$G(y) = y^3 - 2py^2 + (p^2 - 4r)y + q^2 \tag{2}$$

die kubische Resolvente von $F(x)$ genannt.

Anderseits betrachten wir über einem Erweiterungskörper von K ein Polynom

$$\begin{aligned} H(x, y) &= (ax^2 + bx + c)y^2 + (dx^2 + ex + f)y + (gx^2 + hx + k) = \\ &= (ay^2 + dy + g)x^2 + (by^2 + ey + h)x + (cy^2 + fy + k) = \\ &= ax^2y^2 + dx^2y + bxy^2 + gx^2 + exy + cy^2 + hx + fy + k. \end{aligned} \tag{3}$$

Es werde

$$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{pmatrix} \tag{4}$$

die Koeffizientenmatrix von $H(x, y)$ genannt. (Also ist das (i, j) Element von A der Koeffizient von $x^{3-i}y^{3-j}$ in $H(x, y)$ für $i = 1, 2, 3$ und $j = 1, 2, 3$.) Die nach y bzw. x gebildete Diskriminante von $H(x, y)$ werden als

$$H_y(x, y) = (dx^2 + ex + f)^2 - 4(ax^2 + bx + c)(gx^2 + hx + k) \tag{5}$$

bzw.

$$H_x(x, y) = (by^2 + ey + h)^2 - 4(ay^2 + dy + g)(cy^2 + fy + k) \tag{6}$$

bezeichnen.

Wir wollen diejenigen $H(x, y)$ bestimmen, für die

$$H_y(x, y) = F(x), \quad H_x(x, y) = G(y) \tag{7}$$

besteht. Man sieht, daß mit $H(x, y)$ zusammen auch $-H(x, y)$ passend ist, weshalb wir zwischen $H(x, y)$ und $-H(x, y)$ nicht zu unterscheiden brauchen.

Satz. *Unter den sämtlichen gewünschten Polynomen $H(x,y)$ gibt es (bis auf das Vorzeichen) genau eins vom dritten Grade, die übrigen sind vom vierten Grade. Ihre Koeffizientenmatrizes sind*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ -\frac{1}{4} & \frac{p}{2} & r-\frac{p^2}{4} \end{pmatrix} \tag{8}$$

bzw.

$$A=a\begin{pmatrix} 1 & -4\alpha^2-2p & -4q\alpha+(p^2-4r) \\ -2\alpha & -2q & -4q\alpha^2+2(p^2-4r)\alpha+2pq \\ \alpha^2 & -2p\alpha^2-2q\alpha-4r & (p^2-4r)\alpha^2+2pq\alpha+q^2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

wobei a und α in einem Erweiterungskörper von K liegen und der Bedingung

$$16a^2F(\alpha)=1 \tag{10}$$

unterworfen sind.

Bemerkung. Das der Matrix (8) entsprechende Polynom

$$H(x,y)=x^2y-\frac{1}{4}y^2+qx+\frac{p}{2}y-\frac{p^2-4r}{4} \tag{11}$$

nennen wir die *singuläre Lösung* unseres Problems. Dieses $H(x,y)$ liegt im Polynomring $K[x,y]$. Es kann sein, daß keine weitere Lösung $H(x,y)$ in $K[x,y]$ liegt. Das ist z. B. der Fall, wenn K der rationale Zahlkörper und $F(x)=x^4+1$ ist, da jetzt (10) als $16a^2(\alpha^4+1)=1$ lautet, aber diese Gleichung ist im rationalen Zahlkörper bekanntlich unlösbar. Wir bemerken auch, daß unser Satz dem Wesen nach in die Theorie der algebraischen Funktionen gehört und eine Anwendung auf die Hasseschen Charaktersummen (über endlichen Körpern zuläßt), worauf wir ein andermal zurückkommen wollen.

Um den Satz zu beweisen setzen wir (5) und (6) in (7_1) bzw. (7_2) ein. Nach Koeffizientenvergleich drücken sich dann die Bedingungen (7) so aus:

$$d^2-4ag=1, \qquad b^2-4ac=0, \tag{12}$$

$$2de-4ah-4bg=0, \qquad 2be-4af-4cd=1, \tag{13}$$

$$2df-2bh=p, \qquad e^2-4ak-2bh-4cg=0, \tag{14}$$

$$2ef-4bk-4ch=q, \qquad 2eh-4fg-4dk=p^2-4r, \tag{15}$$

$$f^2-4ck=r, \qquad h^2-4gk=q^2. \tag{16}$$

Und zwar entstehen (12), (13), (15), (16) so, daß man in (7) der Reihe nach die Koeffizienten von x^i bzw. y^i $(i=4,3,1,0)$ miteinander vergleicht. Bezüglich $i=2$ würden auf ähnlichem Wege zunächst die Gleichungen

$$e^2+2df-4ak-4bh-4cg=p, \quad e^2+2bh-4ak-4df-4cg=-2p$$

entstehen, aber man sieht, daß diese zwei Gleichungen mit dem System (14) gleichbedeutend sind.

Es genügt zu beweisen, daß die sämtlichen Lösungen des Gleichungssystems (12) bis (16) nach Einsetzen in (4) eben zu (8) und (9) führen.

Erstens bestimmen wir die Lösungen mit $a=0$. In diesem Fall geht (12) in $d^2=1$, d. h. $d=\pm 1$ über. Da aber $H(x\,y)$ und $-H(x,y)$ gleichberechtigt sind, so darf man hierfür $d=1$ nehmen. Tut man das, so bekommt man aus (12_1), (12_2), (13_1), (13_2), (14_1), (14_2), (15_1), (15_2) der Reihe nach

$$d=1,\ b=0,\ e=0,\ c=-\frac{1}{4},\ f=\frac{p}{2},\ g=0,\ h=q,\ k=r-\frac{p^2}{4}.$$

Diese Werte (mit $a=0$ zusammen) erfüllen auch (16_1) und (16_2). Das einsetzen in (4) führt eben zu (8). Somit ist die Hälfte des Satzes bewiesen.

Zweitens bestimmen wir die Lösungen mit $a\neq 0$. Bequemlichkeitshalber setzen wir

$$\varrho=\frac{1}{4a}. \tag{17}$$

Aus (12_1), (12_2), (13_1), (13_2), (14_2) entstehen dann der Reihe nach

$$g=(d^2-1)\varrho, \tag{18}$$

$$c=b^2\varrho, \tag{19}$$

$$h=-4b(d^2-1)\varrho^2+2de\varrho, \tag{20}$$

$$f=-4b^2d\varrho^2+2be\varrho-\varrho, \tag{21}$$

$$k=4b^2(d^2-1)\varrho^3-4bde\varrho^2+e^2\varrho. \tag{22}$$

Nach Einsetzen in (14_1), (15_1), (16_1) gehen diese in

$$p=-8b^2\varrho^2-2d\varrho, \tag{23}$$

$$q=-2e\varrho, \tag{24}$$

$$r=16b^4\varrho^4+8b^2d\varrho^3-4be\varrho^2+\varrho^2 \tag{25}$$

über. Wenn nun (17) bis (25) in (15_2), (16_2) eingesetzt werden, so gehen die letzteren in Erfüllung. Das bisherige bedeutet, daß das Gleichungssystem (12) bis (16) (im vorliegenden Fall $a\neq 0$) mit dem System (17) bis (25) äquivalent ist.

Wir setzen noch

$$\alpha=-2b\varrho. \tag{26}$$

Dann geht (23) in

$$2d\varrho=-2\alpha^2-p \tag{27}$$

über. Ferner läßt sich (25) wegen (26), (27) als

$$\alpha^4 + p\alpha^2 + q\alpha + r = \varrho^2 \tag{28}$$

schreiben. Hiernach und nach (17) berechnen sich $b, c, \ldots, k$ aus (18) bis (22) und aus (24), (26), (27) zu

$$\begin{aligned}
b &= -2a\alpha, \\
c &= a\alpha^2, \\
d &= -4a\alpha^2 - 2pa, \\
e &= -2qa, \\
f &= -2pa\alpha^2 - 2qa\alpha - 4ra, \\
g &= -4qa\alpha + (p^2 - 4r)a, \\
h &= -4qa\alpha^2 + 2(p^2 - 4r)a\alpha + 2pqa, \\
k &= (p^2 - 4r)a\alpha^2 + 2pqa\alpha + q^2 a.
\end{aligned}$$

Werden diese in (4) eingesetzt (und der Skalarfaktor a herausgehoben), so entsteht eben (9). Schließlich geht (28) wegen (17) in (10) über. Somit ist der Satz bewiesen.

(Eingegangen am 25. August 1959)

Die einstufig nichtregulären Ringe

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged

Die nullteilerfreien Ringe nennen wir auch *regulär.*

Einstufig nichtregulär nennen wir jeden nichtregulären Ring, dessen echte Unterringe regulär sind. Diese Ringe sind endlich, undzwar gilt der folgende:

Satz. *Die sämtlichen einstufig nichtregulären Ringe sind die Zeroringe von Primzahlordnung und die direkten Summen von zwei endlichen Primkörpern.*

Dabei nennen wir einen Zeroring einen Ring, dessen Quadrat 0 ist, ferner verstehen wir unter der Ordnung einer endlichen Struktur die Anzahl ihrer Elemente. Die Ordnung einer solchen Struktur S werde mit $O(S)$ bezeichnet. Stets bezeichnen p und q Primzahlen.

Ist R ein Zeroring mit $O(R)=p$, so enthält R Nullteiler, ferner hat R überhaupt keine echten Unterringe, weshalb R tatsächlich einstufig nichtregulär ist.

Ferner sei jetzt $R=K+L$ die direkte Summe von zwei Körpern K und L mit $O(K)=p$, $O(L)=q$. Zwei von 0 verschiedene Elemente von R haben (dann und) nur dann ein verschwindendes Produkt, wenn das eine in K, das andere in L liegt, also die zwei miteinander R erzeugen. Hiernach ist R wieder einstufig nichtregulär.

Umgekehrt bezeichnen wir fortan mit R einen einstufig nichtregulären Ring. Wir haben zu beweisen, daß R einer der vorher betrachteten Ringe ist. Freilich ist $R\neq 0$.

Erstens sei R endlich. Es bezeichne $\mathfrak{n}$ das Radikal von R. Nur die Fälle $\mathfrak{n}=R$, 0 sind möglich, da sonst $\mathfrak{n}$ ein echter Unterring von R mit Nullteilern wäre, entgegen der Voraussetzung.

Im Fall $\mathfrak{n}=R$ sind alle Elemente von R nilpotent. Sofort folgt hieraus die Existenz eines Elementes $\varrho(\neq 0)$ von R mit $\varrho^2=0$. Dabei läßt sich ϱ so wählen, daß seine additive Ordnung $o^+(\varrho)$ eine Primzahl p ist, denn um dies zu erreichen genügt es ϱ mit einer passenden ganzen rationalen Zahl zu multiplizieren. Wegen

$$\varrho^2=0, \quad o^+(\varrho)=p$$

ist der durch ϱ erzeugte Unterring von R ein Zeroring p-ter Ordnung. Da dieser nicht nullteilerfrei ist, so muß er sogar gleich R sein.

Im Fall $\mathfrak{n}=0$ ist R halbeinfach, also gilt nach dem Satz von WEDDERBURN—ARTIN eine Zerlegung

$$R=S_1+\cdots+S_k \qquad (k \geqq 1)$$

in eine direkte Summe von vollen Matrizenringen $S_1, \ldots, S_k$ über endlichen Körpern. Jedoch müssen diese Matrizenringe den Rang 1 haben, d. h. lauter Körper sein, denn sonst hätte R echte Unterringe mit Nullteilern. Da ferner R Nullteiler hat, so muß $k>1$ sein. Da endlich die echten Unterringe von R nullteilerfrei sind, so muß $k=2$ bestehen, auch müssen S_1, S_2 Primkörper sein.

Zweitens sei R unendlich. Hieraus leiten wir ziemlich mühsam einen Widerspruch ab, womit wir den Satz bewiesen haben werden.

Zuerst betrachten wir den Fall, daß R durch ein Element erzeugbar ist. Dann ist R das homomorphe Bild des durch ein Element erzeugten freien Ringes. Dieser läßt sich als $x\mathfrak{J}[x]$ annehmen, wobei $\mathfrak{J}$ den Ring der ganzen rationalen Zahlen und x eine Unbestimmte bezeichnet. (Also ist $x\mathfrak{J}[x]$ der Unterring des Polynomringes $\mathfrak{J}[x]$ bestehend aus den durch x teilbaren Elementen von diesem.) Die Ideale von $x\mathfrak{J}[x]$ sind $x\mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a}$ die Ideale von $\mathfrak{J}[x]$ bezeichnet.[1]) Folglich läßt sich nach dem Homomorphiesatz

$$R=x\mathfrak{J}[x]/x\mathfrak{a} \tag{1}$$

ansetzen. Freilich ist $\mathfrak{a}\neq 0$. Wir bezeichnen mit $d(x)(\in\mathfrak{J}[x])$ den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{a}$, so normiert, daß der Anfangskoeffizient positiv ist. Dann gilt

$$\mathfrak{a}=d(x)\mathfrak{a}_0, \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{a}_0$ ein primitives Ideal von $\mathfrak{J}[x]$ ist, dessen Elemente nämlich 1 zum größten gemeinsamen Teiler haben. Das ist bekanntlich gleichbedeutend damit, daß $\mathfrak{a}_0$ sowohl ein von 0 verschiedenes konstantes Element, als auch ein Hauptpolynom (d. h. ein Polynom mit dem Anfangskoeffizienten 1) enthält. Folglich gilt

$$\mathfrak{a}_0 \supseteqq (h(x), n), \tag{3}$$

wobei $h(x)$ ein in $\mathfrak{a}_0$ enthaltenes Hauptpolynom kleinsten Grades und n die in $\mathfrak{a}_0$ enthaltene kleinste natürliche Zahl bezeichnet. (Der Fall $h(x)=n=1$, $\mathfrak{a}_0=(1)$ kommt auch in Frage.) Da der Faktorring $x\mathfrak{J}[x]/x\mathfrak{a}_0$ offenbar endlich ist, muß $d(x)$ wegen (2) und der Annahme von 1 verschieden sein.

[1]) Vgl. RÉDEI, *Algebra* I (Leipzig, 1959), S. 470—471.

Für beliebige Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ üblicherweise die Menge der in $\mathfrak{B}$ nicht enthaltenen Elemente von $\mathfrak{A}$ und beweisen den folgenden:

H i f s s a t z. *Gelten*

$$f(x),\ g(x) \in x\mathfrak{J}[x]-x\mathfrak{a} \tag{4}$$

und

$$f(x)g(x) \in x\mathfrak{a}, \tag{5}$$

so gibt es Polynome $\mathfrak{F}(x)$ *und* $\mathfrak{G}(x)$ *in* $x\mathfrak{J}[x]$ *mit*

$$\mathfrak{F}(f(x))+\mathfrak{G}(g(x)) \equiv x \pmod{x\mathfrak{a}}. \tag{6}$$

Zum Beweis bezeichnen wir mit $\overline{\varphi(x)}$ für jedes $\varphi(x)$ $(\in x\mathfrak{J}[x])$ die Restklasse $\varphi(x)$ $(\mathrm{mod}\ x\mathfrak{a})$. Wegen (1) und (4) sind $\bar{f}(x)$, $\bar{g}(x)$ von 0 verschiedene Elemente von R, ferner ist ihr Produkt nach (5) gleich 0, also erzeugen sie den ganzen Ring R. Da insbesondere $\bar{x} \in R$ ist, so folgt hieraus der Hilfssatz sofort.

Es ist $x \nmid d(x)$. Denn ist $x \mid d(x)$, so setze man

$$f(x)=g(x)=pnd(x) \tag{7}$$

mit einer beliebigen Primzahl p. Wegen (2) und (3) sind dann für (7) die Bedingungen (4) und (5) erfüllt, weshalb sich der Hilfssatz anwenden läßt. Also entsteht nach Einsetzen von (7) in (6) und nochmaliger Berücksichtigung von (2):

$$\mathcal{H}(pnd(x)) \equiv x \pmod{xd(x)}$$

mit einem $\mathcal{H}(x)(\in x\mathfrak{J}[x])$. Hieraus folgt $d(x) \mid x$, also $d(x)=x$,

$$\mathcal{H}(pnx) \equiv x \pmod{x^2}.$$

Da dies falsch ist, so ist $x \nmid d(x)$ bewiesen.

$d(x)$ enthält keine mehrfachen Faktoren $(\neq 1)$. Gilt nämlich

$$u(x)^2 \mid d(x)$$

mit einem $u(x)$ $(\in \mathfrak{J}[x],\ \neq \pm 1)$, so sind (4) und (5) für

$$f(x)=g(x)=\frac{nxd(x)}{u(x)}$$

erfüllt. Nach Einsetzen in (6) folgt

$$\mathcal{H}\left(\frac{nxd(x)}{u(x)}\right) \equiv x \pmod{xd(x)\mathfrak{a}_0}$$

mit einem $\mathcal{H}(x)$ $(\in x\mathfrak{J}[x])$. Sofort ergibt dies $u(x) \mid x$. Da dies nach Vorigem falsch ist, so ist die Behauptung richtig.

$d(x)$ ist prim (d. h. eine Primzahl oder ein irreduzibles Hauptpolynom). Ist nämlich die Behauptung falsch, so hat $d(x)$ zwei verschiedene Primfaktoren $u(x)$, $v(x)$. Ist außerdem $n > 1$, so sind (4) und (5) für

$$f(x) = x d(x), \quad g(x) = \frac{n x d(x)}{v(x)}$$

erfüllt. Nach Einsetzen in (6) folgt ähnlich wie vorher $u(x) | x$. Da dies falsch ist, so muß $n = 1$, d. h. $\mathfrak{a}_0 = (1)$, $\mathfrak{a} = (d(x))$ sein. Für diesen Fall nehme man eine Primzahl p mit $p \nmid d(x)$ zu Hilfe. Dann sind (4) und (5) für

$$f(x) = \frac{p x d(x)}{u(x)}, \quad g(x) = \frac{p x d(x)}{v(x)}$$

erfüllt, also entsteht nach Einsetzen in (6)

$$\mathfrak{F}\left(\frac{p x d(x)}{u(x)}\right) + \mathfrak{G}\left(\frac{p x d(x)}{v(x)}\right) \equiv x \pmod{x d(x)},$$

weshalb

$$0 \equiv 1 \pmod{p, d(x)}$$

ist. Folglich muß $d(x)$ konstant, d. h. eine natürliche Zahl d sein. Für diesen restlichen Fall gehen die obigen $u(x)$, $v(x)$ in gewisse Primzahlen u, v $(uv | d)$ über. Offenbar sind (4) und (5) für

$$f(x) = \frac{d x^2}{u}, \quad g(x) = \frac{d x^2}{v}$$

erfüllt. Nach Einsetzen in (6) hat man

$$\mathfrak{F}\left(\frac{d x^2}{u}\right) + \mathfrak{G}\left(\frac{d x^2}{v}\right) \equiv x \pmod{d x}.$$

Da dies offenbar falsch ist, so ist die Behauptung bewiesen.

Da hiernach $d(x)$ prim und von x verschieden, also $(x d(x))$ ein Primideal von $x \mathfrak{J}[x]$ ist, anderseits R Nullteiler enthält, so folgt aus (1) und (2), daß notwendig $\mathfrak{a}_0 \neq (1)$ ist.

$\mathfrak{a}_0$ ist ein Primideal von $\mathfrak{J}[x]$. Sonst gäbe es nämlich zwei Polynome $u(x)$, $v(x)$ mit

$$u(x), v(x) \in \mathfrak{J}[x] - \mathfrak{a}_0, \quad u(x) v(x) \in \mathfrak{a}_0.$$

Da dann (4) und (5) für

$$f(x) = x d(x) u(x), \quad g(x) = x d(x) v(x)$$

erfüllt sind, so folgt aus (6) sofort $d(x) | 1$. Da dies falsch ist, so ist die Behauptung richtig.

Hiernach gilt

$$\mathfrak{a}_0 = (h(x), p)$$

mit einer Primzahl p und einem mod p irreduziblen Hauptpolynom $h(x)$. Nach (2) hat man

$$\mathfrak{a} = d(x)\,(h(x), p),$$

wobei nach Obigem $d(x)$ eine Primzahl oder ein nichtkonstantes Primpolynom ist.

Wir zeigen, daß die zweite Möglichkeit nicht zutrifft. Hierzu nehmen wir an, daß $d(x)$ nichtkonstant ist. Für jede ganze Zah $c(\neq 0)$ sind dann (4) und (5) mit

$$f(x) = x\,d(x), \quad g(x) = cpx$$

erfüllt. Nach (6) gilt also

$$\mathfrak{F}(x\,d(x)) + \mathfrak{G}(cpx) \equiv x \pmod{x\mathfrak{a}}.$$

Es sei α eine komplexe Zahl mit $d(\alpha) = 0$, also $\alpha \neq 0$. Dann folgt

$$\mathfrak{G}(cp\alpha) = \alpha.$$

Wenn α ganz (algebraisch) ist, so folgt hieraus $cp\alpha \mid \alpha$. Da aber dies falsch ist, so folgt, daß α nicht ganz ist. Wählt man nun c so, daß $cp\alpha$ ganz ist, so entsteht dennoch ein Widerspruch. Das beweist die Behauptung, also ist $d(x)$ eine Primzahl q. Somit hat man

$$\mathfrak{a} = q\,(h(x), p).$$

Es ist $q \neq p$, denn im Fall $q = p$ läßt sich der Hilfssatz mit

$$f(x) = g(x) = px$$

anwenden, woraus bei Einsetzen in (6) der Widerspruch p 1 entsteht. Also ist tatsächlich $p \neq q$. Da aber dann (4) und (5) für

$$f(x) = qx, \quad g(x) = x\,h(x)$$

erfüllt sind, so geht dabei (6) in

$$\mathfrak{F}(qx) + \mathfrak{G}(x\,h(x)) \equiv x \pmod{qx(h(x), p))}$$

über. Hieraus folgt zunächst $h(x) \neq x$, also folgt für eine komplexe Nullstelle $\alpha(\neq 0)$ von $h(x)$

$$\mathfrak{F}(q\alpha) \equiv \alpha \pmod{pq\alpha}.$$

Dies ist aber unmöglich, da $\alpha(\neq 0)$ ganz ist. Somit haben wir gezeigt, daß R nicht durch ein Element erzeugbar ist.

Im übriggebliebenen Fall bezeichnen ϱ und σ von 0 verschiedene Elemente von R mit

(8) $$\varrho\sigma = 0.$$

Indem wir mit $\{\varrho, \sigma\}$ den durch ϱ und σ erzeugten Unterring von R bezeichnen, so gilt dann

$$R = \{\varrho, \sigma\}, \tag{9}$$

da die rechte Seite Nullteiler hat, also kein echter Unterring von R sein kann. Aus (8) und (9) folgt, daß die Elemente von R sich als eine Summe von Gliedern von der Form

$$c\sigma^i\varrho^k \qquad (i, k \geqq 0;\ i+k \geqq 1;\ c \in \mathfrak{J}) \tag{10}$$

schreiben lassen.

Wir zeigen, daß auch

$$\sigma\varrho = 0 \tag{11}$$

gilt, d. h. R kommutativ ist. Ist nämlich $\sigma\varrho \neq 0$, so gilt wegen $\sigma\varrho \cdot \sigma = 0$ ähnlich wie (9) auch $R = \{\sigma\varrho, \sigma\}$. Also folgt wegen (8), daß sich die Elemente von R als eine Summe von Gliedern von der Form $c\sigma^i$ und $c\sigma^i\varrho$ $(i \geqq 1;\ c \in \mathfrak{J})$ schreiben lassen. Wendet man dies insbesondere auf das Element ϱ an und multipliziert die dadurch sich ergebende Gleichung von links mit ϱ, so entsteht wegen (8) $\varrho^2 = 0$. Dies bedeutet, daß (8) für $\sigma = \varrho$ erfüllt, also R wegen (9) durch das einzige Element ϱ erzeugt is. Da dies der Voraussetzung widerspricht, so ist hiermit (11) bewiesen.

Hiernach läßt sich das bei (10) gesagte dahin verschärfen, daß sich die Elemente von R in der Form

$$f(\varrho) + g(\sigma) \qquad (f(x), g(x) \in x\mathfrak{J}[x]) \tag{12}$$

schreiben lassen.

Nun bilden die $f(x)$ $(\in x\mathfrak{J}[x])$ mit $f(\varrho) = 0$ ein Ideal $\mathfrak{a}_\varrho$ von $x\mathfrak{J}[x]$. Dieses ist ein Primideal, denn sonst gäbe es zwei Polynome $u(x)$, $v(x)$ aus $x\mathfrak{J}[x] - \mathfrak{a}_\varrho$ mit $u(x)v(x) \in \mathfrak{a}_\varrho$. Das bedeutet $u(\varrho) \neq 0$, $v(\varrho) \neq 0$, $u(\varrho)v(\varrho) = 0$, also das Bestehen von $R = \{u(\varrho), v(\varrho)\}$. Dies hat zur Folge, daß R durch das einzige Element ϱ erzeugt ist. Da aber letzteres falsch ist, so ist $\mathfrak{a}_\varrho$ tatsächlich ein Primideal von $x\mathfrak{J}[x]$.

Genau so wie $\mathfrak{a}_\varrho$ ist auch (das entsprechend zu verstehende) $\mathfrak{a}_\sigma$ ein Primideal von $x\mathfrak{J}[x]$.

Lassen wir $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{G}(x)$ je ein Repräsentantensystem der Restklassen von $x\mathfrak{J}[x]$ mod $\mathfrak{a}_\varrho$ bzw. mod $\mathfrak{a}_\sigma$ voneinander unabhängig durchlaufen. Dann kommen alle Elemente von R nach (12) sogar schon unter den

$$\mathfrak{F}(\varrho) + \mathfrak{G}(\sigma) \tag{13}$$

vor.

Wir zeigen, daß jedes Element von R nur einmal unter diesen Elementen (13) vorkommt. Offenbar genügt es zu zeigen, daß aus der Annahme

$$\mathfrak{F}(\varrho)+\mathfrak{G}(\sigma)=0 \tag{14}$$

das Verschwinden beider Glieder der linken Seite folgt. Aus (14) folgt wegen (8) sofort $\varrho\mathfrak{F}(\varrho)=0$, d. h. $x\mathfrak{F}(x)\in\mathfrak{a}_\varrho$. Da $\mathfrak{a}_\varrho$ ein Primideal von $x\mathfrak{J}[x]$ ist, so folgt, daß x oder $\mathfrak{F}(x)$ in $\mathfrak{a}_\varrho$ gehört. Da aber aus $x\in\mathfrak{a}_\varrho$ offenbar $\mathfrak{F}(x)\in\mathfrak{a}_\varrho$ folgt, so gilt stets das letztere. Das bedeutet eben $\mathfrak{F}(\varrho)=0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Das Resultat besagt, daß eine direkte Summenzerlegung

$$R=S_1+S_2 \tag{15}$$

gilt, wobei S_1, S_2 mit den Faktorringen

$$x\mathfrak{J}[x]/\mathfrak{a}_\varrho,\quad x\mathfrak{J}[x]/\mathfrak{a}_\sigma$$

isomorphe Unterringe von R sind. Da R unendlich ist, so ist mindestens das eine von S_1 und S_2 ebenfalls unendlich. Da aber jeder unendliche Ring echte Unterringe hat, so folgt aus (15) sofort, daß R echte Unterringe mit Nullteilern besitzt. Mit diesem Widerspruch ist der Beweis des Satzes beendet.

(Eingegangen am 25. August 1959)

Über die orthogonalen Funktionen. VIII (Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz)

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Es sei $\{a_n\}$ eine gegebene, positive Zahlenfolge mit konvergentem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Jeder Indexfolge $\{n_i\}$ $(0=n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots)$ ordnen wir die Folge

$$A_k^2(\{n_i\})=a_{n_k+1}^2+\cdots+a_{n_{k+1}}^2 \qquad (k=1,2,\ldots)$$

zu. Mit I bezeichnen wir die Klasse derjenigen Indexfolgen $\{n_i\}$, für die die Folge $\{A_k(\{n_i\})\}$ monoton nichtwachsend ist.

Wir werden den folgenden Satz beweisen:

Satz I. *Ist die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

für jedes im Intervall $[a,b]$ orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergent, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2(\{n_i\}) \log^2 k<\infty \tag{2}$$

für jede Indexfolge $\{n_i\}\in I$.[1])

Ist die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ nichtwachsend, so gehört die Folge $\{n_i=i\}$ zu I, und so bekommt man dann, daß die Menchoff—Rademachersche Bedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \log^2 k<\infty$$

---

[1]) Aus dem Beweis des Satzes ergibt sich, daß (2) sogar für diejenigen Indexfolgen $\{n_i\}$ gilt, für die die Folge $\{A_k(\{n_i\})\}$ „quasimonoton" im folgenden Sinne ist: es gibt eine Indexfolge $\{k_l\}$ und zwei positive Konstanten $C_1<C_2$ derart, daß die Folge $\{A_{k_l}(\{n_i\})\}$ monoton nichtwachsend ist und $C_1 A_{k_l}(\{n_i\}) \leqq A_k(\{n_i\}) \leqq C_2 A_{k_l}(\{n_i\})$ für $k_l<k<k_{l+1}$ $(l=1,2,\ldots)$ besteht.

notwendig ist. Also ist der obige Satz eine Verallgemeinerung eines von meinen früheren Sätzen.[2])

B e w e i s. Ist die Bedingung (2) nicht erfüllt, so gibt es eine Indexfolge $\{n_i\}$ aus I, für die also die Folge $A_k = A_k(\{n_i\})$ monoton nichtwachsend ist und

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \log^2 k = \infty$$

gilt. Nach meinem erwähnten Satz gibt es eine Indexfolge $\{N_m\}$ $(0 = N_1 < < N_2 < \cdots < N_m < \cdots)$, ein in $[a, b]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen[3]) $\{\Phi_k(x)\}$ und eine Folge einfacher Mengen[4]) $E_m (\subseteqq [a, b])$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Zu jedem $x \in E_m$ gibt es einen von x abhängigen Index $\nu_m (< N_{m+1} - N_m)$ derart, daß die Funktionenwerte $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m+\nu_m}(x)$ gleiche Vorzeichen haben und die Ungleichung

$$(3) \qquad |A_{N_m} \Phi_{N_m}(x) + \cdots + A_{N_m+\nu_m} \Phi_{N_m+\nu_m}(x)| \geqq c$$

besteht, wo c eine von m und x unabhängige positive Konstante ist; die Mengen E_m sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$(4) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{mes}(E_m) = \infty \text{ [5])}$$

($\operatorname{mes}(H)$ bezeichnet das Lebesguesche Maß der Menge H).

[2]) K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130.

[3]) D. h. für jede Funktion $\Phi_k(x)$ kann man das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle derart zerlegen, daß die Funktion $\Phi_k(x)$ in jedem Teilintervall konstant ist.

[4]) D. h., E_m ist die Summe endlich vieler Intervalle.

[5]) Ist die Folge $\{A_k\}$ nur quasimonoton, so kann man den Beweis folgenderweise durchführen. Dann gibt es eine Indexfolge $\{k_l\}$ und zwei positive Konstanten $C_1 < C_2$ $(C_2 > 1)$ derart, daß die Folge $\{A_{k_l}\}$ monoton nichtwachsend ist und $C_1 A_{k_l} \leqq A_k \leqq C_2 A_{k_l}$ für $k_l < k < k_{l+1}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ besteht. Wir betrachten die Folge $\{\bar{A}_k\}$ $(\bar{A}_k = C_2 A_{k_l}$ für $k_l \leqq \leqq k < k_{l+1}$; $l = 1, 2, \ldots)$. Dann ist $\bar{A}_k \geqq A_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und so gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k^2 \log^2 k = \infty$. Da die Folge $\{\bar{A}_k\}$ monoton nichtwachsend ist, kann man nach meinem erwähnten Satz eine Indexfolge $\{N_m\}$ $(0 = N_1 < N_2 < \cdots < N_m < \cdots)$, ein in $[a, b]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\Phi_k(x)\}$ und eine Folge einfacher Mengen $E_m (\subseteqq [a, b])$ derart angeben, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Zu jedem $x \in E_m$ gibt es einen von x abhängigen Index $\nu_m (< N_{m+1} - N_m)$ derart, daß die Funktionenwerte $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m+\nu_m}(x)$ gleiche Vorzeichen haben und die Ungleichung

$$(3') \qquad |\bar{A}_{N_m} \Phi_{N_m}(x) + \cdots + \bar{A}_{N_m+\nu_m} \Phi_{N_m+\nu_m}(x)| \geqq \frac{C_2}{C_1} c$$

mit einer von x und m unabhängigen Konstante c besteht, die Mengen E_m stochastisch unabhängig sind und es gilt (4). Aus (3') folgt (3) auf Grund der Definition von $\bar{A}_k$.

Mit Hilfe von $\{\Phi_k(x)\}$ werden wir ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ definieren, für welches die Reihe (1) fast überall divergiert. Damit wird der Satz bewiesen werden.

Wir wählen zuerst eine Folge $\{b_n\}$, die die folgenden Eigenschaften hat: a) die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\varphi_n(x)$$

konvergiert fast überall; b) für

$$B_k^2=b_{n_k+1}^2+\cdots+b_{n_{k+1}}^2 \qquad (k=1,2,\ldots)$$

besteht die Ungleichung

$$B_k\geqq A_k \qquad (k=1,2,\ldots); \tag{5}$$

c) die Zahlen $\dfrac{b_n^2}{B_k^2}$ $(n_k<n\leqq n_{k+1};\ k=1,2,\ldots)$ sind rational.[6])

Jetzt werden wir ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ und eine Folge von einfachen Mengen $F_m(\subseteqq[a,b])$ definieren, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind: a) zu jedem $x\in F_m$ gibt es einen von x abhängigen Index $\nu_m(<N_{m+1}-N_m)$ derart, daß die Ungleichung

$$|b_{n_{N_m}+1}\varphi_{n_{N_m}+1}(x)+\cdots+b_{n_{N_m+\nu_m}}\varphi_{n_{N_m+\nu_m}}(x)|\geqq c \tag{6}$$

besteht; b) die Mengen F_m sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$\operatorname{mes}(F_m)=\operatorname{mes}(E_m). \tag{7}$$

Wir schreiben die endlich vielen rationalen Zahlen $\dfrac{b_n^2}{B_k^2}$ $(n_k<n\leqq n_{k+1};$ $k=1,2,\ldots,N_2-1)$ als Brüche von natürlichen Zahlen mit gemeinsamem Nenner auf:

$$\frac{b_n^2}{B_k^2}=\frac{p_n^{(1)}}{q_1}.$$

Wir teilen das Intervall $[a,b]$ in q_1 Teilintervalle gleicher Länge $I_r=[u_r,v_r]$ $(1\leqq r\leqq q_1)$ ein. Es sei für $n_k<n\leqq n_{k+1}$ $(k=1,2,\ldots,N_2-1)$

$$\varphi_n(x)=\frac{B_k}{b_n}\sum_{r=p_{n_k+1}^{(1)}+\cdots+p_{n-1}^{(1)}+1}^{p_{n_k+1}^{(1)}+\cdots+p_n^{(1)}}\Phi_k(I_r;\,x)$$

[6]) Diese Bedingungen sind erfüllt z. B., wenn b_n $(n=1,2,\ldots)$ rationale Zahlen mit $0\leqq b_n-a_n\leqq\dfrac{1}{n^2}$ $(n=1,2,\ldots)$ sind.

und

$$F_1 = \bigcup_{r=1}^{q_1} E_1(I_r).^{7)}$$

Die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots,n_{N_2})$ sind Treppenfunktionen. Sie sind normiert:

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = \frac{B_k^2}{b_n^2} \sum_{r=p_{n_k+1}^{(1)}+\cdots+p_{n-1}^{(1)}+1}^{p_{n_k+1}^{(1)}+\cdots+p_n^{(1)}} \int_{u_r}^{v_r} \Phi_k^2(I_r;x)dx =$$

$$= \frac{B_k^2}{b_n^2} p_n^{(1)} \frac{1}{q_1} \int_a^b \Phi_k^2(x)dx = 1.$$

Für $n \neq m$ $(n_k < n \leqq n_{k+1},\ n_l < m \leqq n_{l+1},\ 1 \leqq k, l < N_2)$ gilt

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \sum_r \int_{u_r}^{v_r} \Phi_k(I_r;x)\Phi_l(I_r;x)dx,$$

wo man über alle solche r zu summieren hat, für die im Intervall I_r weder $\varphi_n(x)$ noch $\varphi_m(x)$ identisch verschwindet. Jedes Glied der rechtsstehenden Summe ist 0, also sind die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{N_2})$ zueinander orthogonal. Da die Mengen $E_1(I_r)$ paarweise disjunkt sind, so hat man

$$\operatorname{mes}(F_1) = \sum_{r=1}^{q_1} \operatorname{mes}(E_1(I_r)) = \frac{\operatorname{mes}(E_1)}{b-a} \sum_{r=1}^{q_1} \operatorname{mes}(I_r) = \operatorname{mes}(E_1),$$

also besteht (7) für $m=1$. Ist $x \in F_1$, so gibt es ein $r(1 \leqq r \leqq q_1)$ so, daß $x \in E_1(I_r)$ gilt. Dann ist $y = \frac{b-a}{v_r}(x-u_r)+a \in E_1$ und so ergibt sich auf Grund von (3) und (5), daß es einen von y abhängigen Index $\nu_1(<N_2)$ derart gibt, daß die Funktionenwerte $\Phi_1(y), \ldots, \Phi_{\nu_1}(y)$ gleiche Vorzeichen haben und die Ungleichung

$$|B_1\Phi_1(y) + \cdots + B_{\nu_1}\Phi_{\nu_1}(y)| \geqq c$$

[7]) Es sei $f(x)$ eine in $[a,b]$ definierte Funktion und E eine meßbare Teilmenge von $[a,b]$. Für ein endliches Intervall $I=[u,v]$ wird

$$f(I;x) = \begin{cases} f\left((b-a)\dfrac{x-u}{v-u}+a\right) & \text{für } u<x<v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt; ferner ist $E(I)$ das Bild von E durch die Transformation $y = v\dfrac{x-a}{b-a}+u$. Offenbar ist $\operatorname{mes}(E(I)) = \dfrac{\operatorname{mes}(I)}{b-a}\operatorname{mes}(E)$.

besteht. Also gilt

$$|B_1 \Phi_1(I_r; x) + \cdots + B_{\nu_1} \Phi_{\nu_1}(I_r; x)| \geqq c.$$

Nach der Definition von $\varphi_n(x)$ ist aber

$$b_1 \varphi_1(x) + \cdots + b_{\nu_1} \varphi_{\nu_1}(x) = B_1 \Phi_1(I_r; x) + \cdots + B_{\nu_1} \Phi_{\nu_1}(I_r; x),$$

also ist (6) für $m = 1$ erfüllt.

Es sei $\mu (> 1)$ beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{N_\mu})$ und die einfachen Mengen F_m $(1 \leqq m < \mu)$ schon derart definiert sind, daß die Funktionen $\varphi_n(x)$ in $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden, (6), (7) für $m = 1, 2, \ldots, \mu - 1$ bestehen und die Mengen $F_1, \ldots, F_{\mu-1}$ stochastisch unabhängig sind.

Dann kann das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle J_r $(1 \leqq r \leqq s)$ derart zerlegt werden, daß in jedem J_r die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{N_\mu})$ konstant sind und jede Menge F_m $(1 \leqq m < \mu)$ die Summe gewisser J_r ist. Wir schreiben die endlich vielen rationalen Zahlen $\frac{b_n^2}{B_k^2}$ $(n_k < n \leqq n_{k+1};\ k = N_\mu, N_\mu + 1, \ldots, N_{\mu+1} - 1)$ als Brüche von natürlichen Zahlen mit gemeinsamem Nenner auf:

$$\frac{b_n^2}{B_k^2} = \frac{p_n^{(\mu)}}{q_\mu}$$

Wir teilen jedes J_r in q_μ Teilintervalle gleicher Länge $J_{r,\varrho} = [u_{r,\varrho}, v_{r,\varrho}]$ $(1 \leqq r \leqq s;\ 1 \leqq \varrho \leqq q_\mu)$ ein und wir setzen für $n_k < n \leqq n_{k+1}$ $(k = N_\mu, N_\mu + 1, \ldots, N_{\mu+1} - 1)$:

$$\varphi_n(x) = \frac{B_k}{b_n} \sum_{r=1}^{s} \sum_{\varrho = p_{n_k+1}^{(\mu)} + \cdots + p_{n-1}^{(\mu)} + 1}^{p_{n_k+1}^{(\mu)} + \cdots + p_n^{(\mu)}} \Phi_k(J_{r,\varrho}; x)$$

und

$$F_\mu = \bigcup_{r=1}^{s} \bigcup_{\varrho=1}^{q_\mu} E_\mu(J_{r,\varrho}).$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{N_{\mu+1}})$ in $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden. Da die Mengen $E_\mu(J_{r,\varrho})$ paarweise disjunkt sind, so hat man:

$$\operatorname{mes}(F_\mu) = \sum_{r=1}^{s} \sum_{\varrho=1}^{q_\mu} \operatorname{mes}(E_\mu(J_{r,\varrho})) = \frac{\operatorname{mes}(E_\mu)}{b-a} \sum_{r=1}^{s} \sum_{\varrho=1}^{q_\mu} \operatorname{mes}(J_{r,\varrho}) = \operatorname{mes}(E_\mu),$$

also besteht (7) für $m = \mu$. Ist $x \in F_\mu$, so gibt es solche r und ϱ $(1 \leqq r \leqq s,\ 1 \leqq \varrho \leqq q_\mu)$, daß $x \in E_\mu(J_{r,\varrho})$ gilt. Dann ist

$$y = \frac{b-a}{v_{r,\varrho}}(x - u_{r,\varrho}) + a \in E_\mu$$

und so ergibt sich auf Grund von (3) und (5), daß einen von y abhängigen Index $\nu_\mu(<N_\mu-N_{\mu-1})$ derart gibt, daß die Funktionenwerte $\Phi_{N_\mu}(y),\dots$ $\dots,\Phi_{N_\mu+\nu_\mu}(y)$ gleiche Vorzeichen haben und die Ungleichung

$$|B_{N_\mu}\Phi_{N_\mu}(y)+\cdots+B_{N_\mu+\nu_\mu}\Phi_{N_\mu+\nu_\mu}(y)|\geqq c$$

besteht. Also ist

$$|B_{N_\mu}\Phi_{N_\mu}(J_{r,\varrho};x)+\cdots+B_{N_\mu+\nu_\mu}\Phi_{N_\mu+\nu_\mu}(J_{r,\varrho};x)|\geqq c.$$

Nach der Definition von $\varphi_n(x)$ ist aber

$$b_{n_{N_\mu}+1}\varphi_{n_{N_\mu}+1}(x)+\cdots+b_{n_{N_\mu+\nu_\mu}}\varphi_{n_{N_\mu+\nu_\mu}}(x)=$$
$$=B_{N_\mu}\Phi_{N_\mu}(J_{r,\varrho};x)+\cdots+B_{N_\mu+\nu_\mu}\Phi_{N_\mu+\nu_\mu}(J_{r,\varrho};x),$$

also besteht (6) für $m=\mu$. Offensichtlich sind die Mengen $F_1,\dots,F_\mu$ stochastisch unabhängig.

Mit vollständiger Induktion ergibt sich also ein Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{F_m\}$ derart, daß die erwähnten Bedingungen erfüllt werden.

Ist $x\in\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}F_m$, so besteht (6) für unendlich viele m, folglich ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\varphi_n(x) \tag{8}$$

im Punkt x divergent. Auf Grund von (4), (7) und der stochastischen Unabhängigkeit der Folge $\{F_m\}$ ergibt sich mit Benützung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas (s. meine frühere Arbeit a. a. O.[2]), daß

$$\text{mes}\,(\overline{\lim_{m\to\infty}}F_m)=b-a$$

ist. Also divergiert die Reihe (8) fast überall. Auf Grund von c) ergibt sich endlich, daß die mit diesen $\varphi_n(x)$ gebildete Reihe (1) fast überall divergiert.

Damit haben wir Satz I bewiesen.

Mit derselben Methode kann auch eine notwendige Bedingung für die $(C,1)$-Summierbarkeit angegeben werden. Wir bezeichnen mit $\bar{I}$ die Klasse der Indexfolgen $\{n_i\}$, für die die Folge $\{A_k(\{2^{n_i}\})\}$ monoton nichtwachsend ist (oder mindestens „quasimonoton" ist, s. Fußnote[1]). Es gilt der folgende Satz:

S a t z II. *Ist die Orthogonalreihe* (1) *für jedes orthonormierte Funktionensystem* $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall* $(C,1)$*-summierbar, so gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k^2(\{2^{n_i}\})\log^2k<\infty \tag{9}$$

für jede Indexfolge $\{n_i\}\in\bar{I}$.

Wir nehmen an, daß (9) nicht erfüllt wird. Ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \tag{10}$$

divergent, dann folgt, daß die Rademachersche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x)$ fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar ist.[8]) Ist aber (10) konvergent, so kann man mit der obigen Methode ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ konstruieren derart, daß die Folge der 2^m-ten Partialsummen der mit diesen $\varphi_n(x)$ gebildeten Reihe (1) fast überall divergiert. Nach einem Satz von A. N. KOLMOGOROFF[9]) ist dann die Reihe (1) fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar.

Erfüllt die Folge $\{a_n\}$ die Bedingung $n a_n^2 \geqq (n+1) a_{n+1}^2$ $(n=1, 2, \ldots)$, so gehört die Folge $n_k = k$ $(k=1, 2, \ldots)$ zu $\bar{I}$. Für diese Indexfolge reduziert sich (9) auf die Bedingung von S. KACZMARZ und D. MENCHOFF:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 (\log \log n)^2 < \infty.$$

Also ist Satz II eine Verallgemeinerung eines von meinen früheren Sätzen.[10])

(Eingegangen am 18. September 1959)

8) A. ZYGMUND, On the convergence of lacunary trigonometric series, *Fundamenta Math.*, **16** (1930) 90—107.

9) A. N. KOLMOGOROFF, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, 5 (1924), 96—97.

10) K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. II (Summation), *Acta Sci. Math.*, 18 (1957), 149—168.

О ТИПАХ ЕВКЛИДОВЫХ НОРМ

Г. ПОЛЛАК (Сегед)

В этой работе мы будем употреблять термин „евклидовое кольцо" в несколько более широком смысле чем обычно. Именно, мы будем говорить, что область целостности R является евклидовым кольцом, если существует отображение φ кольца R в некоторое вполне упорядоченное множество, причем

$$\varphi(ab) \geqq \varphi(b) \qquad (a, b \in R, a \neq 0) \tag{1}$$

и

$$\left.\begin{array}{l}\text{для любых двух элементов } a, b \in R, a \neq 0 \text{ существует} \\ \text{такой } \quad q \in R, \quad \text{что} \quad \varphi(b-aq) < \varphi(a).\end{array}\right\} \tag{2}$$

Можно предположить без ограничения общности, что φ есть отображение на некоторое беспробельное множество порядковых чисел.[1]) Так и будем поступать во всех дальнейших рассуждениях. Такое отображение будет называться евклидовой нормой, образ же элемента a при этом отображении — евклидовым образом a. Далее, два отображения φ, ψ кольца R в упорядоченные множества будем называть эквивалентными, если

$$\varphi(a) < \varphi(b) \iff \psi(a) < \psi(b).$$

Ясно, что для любого отображения φ, удовлетворяющего (1) и (2), существует единственная евклидовая норма, эквивалентная с ним.

Мы назовем типом евклидовой нормы φ кольца R порядковый тип множества порядковых чисел, на которое φ отображает R. Введение этого понятия кажется нам целесообразным потому что задавать все евклидовые нормы некоторого кольца является весьма сложной задачей даже в таком простом случае, как случай кольца целых рациональных чисел. Поэтому приходится решать сперва частные задачи. Таковой является вопрос

---

[1]) Множество порядковых чисел называется беспробельным, если вместе с любим своим элементом β содержит всех $\alpha < \beta$.

о всех возможных типах евклидовых норм данного кольца. В настоящей работе решим эту проблему для колец целых рациональных чисел и целых чисел комплексных полей второй степени; для колец многочленов над некоторым полем окажется возможным задать все евклидовые нормы.

Прежде чем сформулировать теорему, относящуюся к кольцу целых рациональных чисел, докажем следующую вспомогательную теорему:

Если $a_1, \ldots, a_k$ — натуральные числа и $(a_1, \ldots, a_k) = d$, то существует такое положительное число N, что при любом натуральном числе $n \geqq N$ можно представить nd в форме

(3) $$nd = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k \qquad (x_i \geqq 0;\ i = 1, \ldots, k).$$

Достаточно доказать утверждение для $d = 1$. В этом случае всякий $n\,(>0)$ можно представить в виде

$$n = a_1y_1 + \cdots + a_ky_k$$

с целыми $y_1, \ldots, y_k$. Представляя $y_1, \ldots, y_{k-1}$ в форме

$$y_i = x_i + a_kq_i \quad (0 \leqq x_i \leqq a_k - 1;\ i = 1, \ldots, k-1)$$

и полагая $x_k = y_k + a_1q_1 + \cdots + a_{k-1}q_{k-1}$, находим

$$n = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k.$$

Теперь надо еще позаботиться о неотрицательности x_k. Это имеет место наверняка, если

$$n \geqq a_1x_1 + \cdots + a_{k-1}x_{k-1}$$

и тем более при

$$q \geqq (a_1 + \cdots + a_{k-1})(a_k - 1).$$

Следовательно $N = (a_1 + \cdots + a_{k-1})(a_k - 1)$ удовлетворяет выдвинутым требованиям. Тем самым вспомогательная теорема доказана[2]).

Теорема 1. Все евклидовые нормы кольца I целых рациональных чисел имеют тип $\omega \cdot \lambda$ $(1 \leqq \lambda \leqq \omega)$.

Доказательство. Пусть φ — евклидовая норма колца I. Обозначим через d_α наибольший общий делитель всех элементов кольца I, для которых $\varphi(a) \geqq \omega \cdot \alpha$, где α некоторое порядковое число. Предположим далее, что $d_\alpha \neq 0$ и $a_1, \ldots, a_k$ — такие натуральные числа, для которых

$$(a_1, \ldots, a_k) = d_\alpha; \quad \varphi(a_i) \geqq \omega \cdot \alpha \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Тогда для тех $nd_\alpha \neq 0$, которые могут быть представлены из чисел a_i в форме (3), имеет место

$$\varphi(nd_\alpha) \geqq \min \varphi(a_i).$$

[2]) Этим простым доказательством я обязан L. Rédei.

В самом деле, пусть $nd_\alpha \neq 0$ — число, обладающее минимальным евклидовым образом среди чисел, представимых в форме (3). Тогда в (3) по меньшей мере одно из x_i отличается от нуля; пусть таковым будет например x_1. Из (2) следует, что существует $q \in I$ с

$$\varphi(a_1 + qnd_\alpha) < \varphi(nd_\alpha).$$

Но из-за $x_1 \geqq 1$ число

$$|a_1 + qnd_\alpha| = |q| nd_\alpha \pm a_1$$

тоже представимо в форме (3) и таким образом из сделанного относительно nd_α предположения следует

$$\varphi(a_1 + qnd_\alpha) = \varphi(|a_1 + qnd_\alpha|) \geqq \varphi(nd_\alpha) \quad \text{или} \quad a_1 + qnd_\alpha = 0.$$

Первый случай противоречит выбору q и поэтому невозможен. Но из-за $x_1 \geqq 1$ имеем $nd_\alpha \geqq a_1$. Поэтому второй случай может иметь место только при $nd_\alpha = a_1$. Таким образом действительно $\min \varphi(nd_\alpha) = \min \varphi(a_i)$.

Итак, если какое-либо nd_α представимо в форме (3), то $\varphi(nd_\alpha) \geqq \omega \cdot \alpha$. Так как однако в силу вспомогательной теоремы за исключением конечного числа все nd_α могут быть представлены в таком виде, то $\varphi(nd_\alpha) < \omega \cdot \alpha$ может иметь место только для конечного числа положительных n. Отсюда имеем

$$d_\beta < d_\alpha \quad \text{при} \quad \beta < \alpha,$$

так как имеется бесконечно много $a \in I$, для которых $\omega \cdot \beta \leqq \varphi(a) < \omega \cdot \alpha$, а из них только конечное число делится на d_α. Следовательно ненулевые идеалы $(d_0), (d_1), \ldots, (d_\alpha), \ldots$ образуют убывающую последовательность, а такая последовательность в кольце I не может быть длиннее чем типа ω. Поэтому φ может быть в крайнем случае типа $\omega \cdot \omega$. Но нетрудно видеть, что отображение

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\pm(2m-1)) = m, \quad \varphi(\pm 2^k(2m-1)) = \omega \cdot k + m - 1$$

$(m = 1, 2, \ldots)$ является евклидовой нормой типа $\omega \cdot \omega$. Подобным же образом могут быть легко конструированы нормы типа $\omega \cdot n$ для любого $n < \omega$, $n \neq 0$. Тем самым теорема 1 доказана.

Из комплексных полей второй степени следует рассматривать только поля с дискриминантами $\mathbf{d} = -3, -4, -7, -8, -11$, так как кольцо целых чисел будет евклидовым только в этих случаях[3]). Обозначим эти кольца последовательно через $R_1, R_2, \ldots, R_5$. Известно, что для этих R_j отображение $\varphi(a) = |a|$ обладает свойствами (1), (2), т. е. в любом классе

[3]) См. Th. Motzkin, The euclidean algorithm, *Bulletin American Math. Soc.*, **55** (1949), 1142—1146.

вычетов $\mathrm{mod}\, a \,(\in R_j)$ существует элемент b с

(4) $$|b| < |a|.$$

Для того, чтобы стало возможным доказать теорему, подобную теореме 1, нам придется сначала выяснить, сколько таких элементов может содержаться в одном классе? Прежде всего ясно, что

(5) $$|b - qa| < |a|$$

может иметь место только при

(6) $$|q| < 2,$$

так как в противном случае было бы из-за (4)

$$|b - qa| \geqq |qa| - |b| \geqq 2|a| - |b| > |a|.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $b \neq 0$.

Рассмотрим теперь упомянутые кольца отдельно.

а) $j = 1$ ($\mathbf{d} = -3$). Из-за условия (6) теперь возможны только случаи

$$q = 0, \quad \pm 1, \quad \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \quad \pm\sqrt{-3}, \quad \frac{\pm 3 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Покажем, что в любом классе вычетов $\mathrm{mod}\, a$ имеется по меньшей мере три элемента, удовлетворяюшие (5). Введем для этой цели обозначение

$$e = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}.$$

Пусть комплексное число $\dfrac{b}{a}$ в тригонометрической форме имеет вид

$$\frac{b}{a} = \left|\frac{b}{a}\right| \left(\cos\left(\frac{k\pi}{3} + \alpha\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{3} + \alpha\right)\right) \quad \left(0 \leqq k \leqq 5,\ 0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{3}\right),$$

где k натуральное число. Тогда

$$|b - e^k a| = |a| \cdot \left|1 - \frac{b}{e^k a}\right| = |a| \left(1 - 2\left|\frac{b}{a}\right| \cos\alpha + \left|\frac{b}{a}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Но $\cos\alpha > \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. Отсюда и из (4)

$$0 < 1 - 2\left|\frac{b}{a}\right| \cos\alpha + \left|\frac{b}{a}\right|^2 < 1,$$

следовательно $|b-e^k a|<|a|$. Точно так же,

$$|b-e^{k+1}a|=|a|\left(1-2\left|\frac{b}{a}\right|\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\left|\frac{b}{a}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

и из (4) и $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\geqq\frac{1}{2}$ следует $|b-e^{k+1}a|<|a|$. Итак, $q=0$, e^k, e^{k+1} удовлетворяют (5), чем наше утверждение и доказано.

С другой стороны, если

$$(7_1)\qquad \left|b-\frac{3+\sqrt{-3}}{3}a\right|<\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)|a|,$$

то (5) удовлетворяют $q=0,\ 1,\ \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, но для остальных возможных значений имеем

$$|b-e^k\sqrt{-3}\,a|=\left|b-\frac{3+\sqrt{-3}}{6}a+\left(\frac{3+\sqrt{-3}}{6}-e^k\sqrt{-3}\right)a\right|>$$
$$>\left(\sqrt{3}-\left|\frac{3+\sqrt{-3}}{6}\right|-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)\right)|a|=|a|$$

и при $5\geqq k\geqq 2$, поскольку в этом случае аргумент комплексного числа $\sqrt{-3}\,e^{k+1}$ лежит между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, принимая кроме того во внимание, что $\frac{3+\sqrt{-3}}{6}=\frac{\sqrt{-3}}{3}e^5$, имеем

$$|b-e^k a|=\left|b-\frac{3+\sqrt{-3}}{6}a+\left(\frac{3+\sqrt{-3}}{6}-e^k\right)a\right|>\left(\frac{\sqrt{3}}{3}|e^5+\sqrt{-3}e^k|-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)\right)|a|=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}|1+\sqrt{-3}\,e^{k+1}|+1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)|a|\geqq|a|,$$

т. е. в этом случае имеется точно три элемента кольца R_i, удовлетворяющие (5).

б) $j=2$ ($\mathbf{d}=-4$). Теперь возможны случаи

$$q=0,\quad \pm 1,\quad \pm i,\quad \pm 1\pm i.$$

Легко видеть, что из них подходит по меньшей мере два. В самом деле, в силу (4) подходит $q=0$; если же

$$(8)\qquad |b\pm a|\geqq|a|,\quad |b\pm ia|\geqq|a|,$$

то имеем

$$|a|^2 \leqq |b \pm a|^2 = (b \pm a)(\bar{b} \pm \bar{a}) = |b|^2 + |a|^2 \pm (a\bar{b} + \bar{a}b),$$
$$|a|^2 \leqq |b \pm ia|^2 = (b \pm ia)(\bar{b} \mp i\bar{a}) = |b|^2 + |a|^2 \pm i(a\bar{b} - \bar{a}b),$$

где $\bar{a}$, $\bar{b}$ — числа, комплексно сопряженные с a, b. Отсюда

$$|b|^2 \geqq |a\bar{b} + \bar{a}b| = 2|\operatorname{Re} a\bar{b}|,$$
$$|b|^2 \geqq |i(a\bar{b} - \bar{a}b)| = 2|\operatorname{Im} a\bar{b}|$$

и сложка квадраты обоих неравенств

$$2|b|^4 \geqq 4|a\bar{b}|^2$$

или

$$|b|^2 \geqq 2|a|^2,$$

а это противоречит (4). Следовательно, из неравенств (8) по меньшей мере одно ложно, т. е. (5) выполняется каким-либо отличным от нуля q, что и требовалось.

С другой стороны, если b таково, что

$$(7_2) \qquad \left|b - \frac{a}{2}\right| < \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right)|a|,$$

то неравенству (5) удовлетворяет только $q = 0{,}1$, а для остальных возможных q получаем

$$|b + a| = \left|b - \frac{a}{2} + \frac{3}{2}a\right| \geqq \frac{3}{2}|a| - \left|b - \frac{a}{2}\right| > \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right)|a| > |a|,$$

$$|b \pm ia| = \left|b - \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2} \pm i\right)a\right| \geqq \frac{\sqrt{5}}{2}|a| - \left|b - \frac{a}{2}\right| > |a|,$$

$$|b - i^k(1+i)a| = \left|b - \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2} - i^k(1+i)\right)a\right| >$$
$$> \left(\left|\frac{1}{2} + i\right| - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right)\right)|a| = |a|.$$

Таким образом, при выполнении условия (7_2) неравенству (5) удовлетворяют точно два элемента кольца R_2.

в) $j = 3$ ($\mathbf{d} = -7$). Возможны значения

$$q = 0; \ \pm 1, \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-7}}{2}.$$

Если выполняется условие

$$(7_3)\qquad \left|b-\frac{\sqrt{-7}}{7}a\right|<\left(\frac{2\sqrt{14}}{7}-1\right)|a|,$$

то единственным подходящим значением q является 0. В самом деле, для остальных имеем

$$|b\pm a|=\left|b-\frac{\sqrt{-7}}{7}a+\left(\pm1+\frac{\sqrt{-7}}{7}\right)a\right|\geqq\frac{2\sqrt{14}}{7}|a|-\left|b-\frac{\sqrt{-7}}{7}a\right|>|a|,$$

$$\left|b-\frac{\pm1\pm\sqrt{-7}}{2}a\right|\geqq\left|b-\frac{\sqrt{-7}}{7}a-\frac{\pm7+(\pm7-2)\sqrt{-7}}{14}a\right|>$$

$$>\left(\left|\frac{7+5\sqrt{-7}}{14}\right|-\left(\frac{2\sqrt{14}}{7}-1\right)\right)|a|=|a|.$$

г) $j=4$ ($\mathbf{d}=-8$). Здесь следует рассмотреть случаи

$$q=0,\quad \pm1,\quad \pm\sqrt{-2},\quad \pm1\pm\sqrt{-2}.$$

Если выполняется неравенство

$$(7_4)\qquad \left|b-\frac{\sqrt{-2}}{4}a\right|<\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}-1\right)|a|,$$

то (5) удовлетворяет только $q=0$. Действительно, для перечисленных значений q получается

$$|b\pm a|=\left|b-\frac{\sqrt{-2}}{4}a+\left(\pm1+\frac{\sqrt{-2}}{4}\right)a\right|\geqq\frac{3\sqrt{2}}{4}|a|-\left|b-\frac{\sqrt{-2}}{4}a\right|>|a|,$$

$$|b\pm\sqrt{-2}a|=\left|b-\frac{\sqrt{-2}}{4}a+\frac{(\pm4+1)\sqrt{-2}}{4}a\right|\geqq$$

$$\geqq\frac{3\sqrt{2}}{4}|a|-\left|b-\frac{\sqrt{-2}}{4}a\right|>|a|,$$

$$|b+(\pm1\pm\sqrt{-2})a|=\left|b-\frac{\sqrt{-2}}{4}a+\left(\pm1+\frac{(\pm4+1)\sqrt{-2}}{4}\right)a\right|>$$

$$>\left(\left|1+\frac{3\sqrt{-2}}{4}\right|-\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}-1\right)\right)|a|>|a|.$$

д) $j=5$ ($\mathbf{d}=-11$). Теперь возможно

$$q=0,\quad \pm1,\quad \frac{\pm1\pm\sqrt{-11}}{2}.$$

Если

$$(7_5)\qquad \left|b-\frac{2\sqrt{-11}}{11}a\right|<\left(\frac{\sqrt{165}}{11}-1\right)|a|,$$

то опять никакое значение q кроме 0 не подходит, так как в этом случае

$$|b\pm a|=\left|b-\frac{2\sqrt{-11}}{11}a+\left(\pm 1+\frac{2\sqrt{-11}}{11}\right)a\right|\geqq$$

$$\geqq\frac{\sqrt{165}}{11}|a|-\left|b-\frac{2\sqrt{-11}}{11}a\right|>|a|,$$

$$\left|b-\frac{\pm 1\pm\sqrt{-11}}{2}a\right|=\left|b-\frac{2\sqrt{-11}}{11}a-\frac{\pm 11+(\pm 11-4)\sqrt{-11}}{22}a\right|>$$

$$>\left(\left|\frac{11+7\sqrt{-11}}{22}\right|-\left(\frac{\sqrt{165}}{11}-1\right)\right)|a|=|a|.$$

Таким образом мы нашли, что для каждого кольца $R_j\,(j=1,\ldots,5)$ можно найти элемент p_j из поля отношений кольца R_j и положительное число r_j так, что при выполнении условия

$$(7_j)\qquad |b-p_j a|<r_j|a|\qquad (b,a\in R_j)$$

неравенство (5) имеет ровно n_j решений ($n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=n_4=n_5=1$).

Теперь уже можем перейти к формулировке и доказательству теоремы, аналогичной теореме 1.

Теорема 2. Всевозможными типами евклидовых норм (евклидовых) колец целых алгебраических чисел R_j комплексных полей 2-ой степени являются предельные числа $\lambda\leqq\omega^{n_j}$.

Доказательство. Пусть φ — евклидовая норма типа $\alpha>\omega$ кольца R_j и пусть $x_0\in R_j$ с

$$(9)\qquad \varphi(x_0)\geqq\omega.$$

Рассмотрим числа $a\in R_j$, для которых

$$(10)\qquad |a|>\frac{\sqrt{1+\mathbf{d}_j}}{2r_j}|x_0|$$

и выберем из них некоторый элемент a_j с минимальным $\varphi(a_j)$. Последнее означает, что элементы $s\in R_j$, для которых $\varphi(s)<\varphi(a_j)$, не удовлетворяют (вместо a_j) неравенству (10). Следовательно

$$(11)\qquad \varphi(s)<\varphi(a_j)\Longrightarrow|s|<|a_j|.$$

Так как таких элементов s только конечное число, то

(12) $$\varphi(a_j) < \omega.$$

Прежде всего заметим, что при выполнении условия (10) всегда существуют решения неравенства (7_j) во всех классах вычетов $\bmod\, x_0$. В самом деле, пусть y — произвольный элемент кольца R_j. Положим

$$\frac{p_j a - y}{x_0} = u_j + v_j \sqrt{\mathbf{d}_j},$$

где u_j, v_j — рациональные числа, и выберем

$$t = t' + t'' \sqrt{\mathbf{d}_j} \in R_j$$

так, чтобы было $|t' - u_j| \leqq \frac{1}{2}$, $|t'' - v_j| \leqq \frac{1}{2}$. Тогда

$$|tx_0 + y - p_j a| = |x_0|\,|(t' - u_j) + (t'' - v_j)\sqrt{\mathbf{d}_j}| \leqq |x_0| \frac{\sqrt{1 + \mathbf{d}_j}}{2} < r_j |a|.$$

Если теперь $j \geqq 3$, то при надлежащем выборе t имеем

$$\varphi(tx_0 - qa_j) \geqq \varphi(a_j)$$

для всех $q \in R_j$. Действительно, для $q = 0$ это следует из (9), (1) и (12), а для остальных q из того, что, как было только что замечено, при $a = a_j$ можно найти такой $tx_0 \in R_j$, что tx_0 является решением неравенства (7_j). Но это противоречит тому, что φ является евклидовой нормой. Это и доказывает теорему для $j \geqq 3$.

В оставшейся части доказательства нам понадобится следующая

Лемма. Пусть R — евклидовое кольцо, φ — евклидовая норма в нем и $c \in R$, $c \neq 0$. Тогда отображение

$$\psi(a) = \varphi(ac) \qquad (a \in R)$$

удовлетворяет условиям (1), (2).

В самом деле, при $a \neq 0$

$$\psi(ab) = \varphi(abc) \geqq \varphi(bc) = \psi(b).$$

Далее, в силу (2) существует такой $q \in R$, что

$$\varphi(bc - acq) < \varphi(ac)$$

или, что то же самое,

$$\psi(b - aq) < \psi(a).$$

Тем самым лемма доказана.

Теперь рассмотрим случай $j=2$. Обозначим через d_λ наибольший общий делитель всех $x \in R_2$, для которых $\varphi(x) \geqq \omega \cdot \lambda$. Предположим, что евклидовая норма φ типа $\alpha > \omega^{n_j} = \omega \cdot \omega$. Тогда существует неотрицательное целое число n, для которого $d_n = d_{n+1}$, так как в R_2, как и в I (и вообще в любом кольце целых алгебраических чисел), тип убывающей последовательности ненулевых идеалов не может быть свыше ω. Достаточно рассмотреть случай $n=0$, $d_n=1$. Действительно, если для какого-нибудь $n>0$ имеет место $d_n = d_{n+1}$, то вместо φ будем рассматривать евклидовую норму χ, эквивалентную с отображением $\psi(a) = \varphi(ad_n)$. Обознача через d'_λ наибольший общий делитель всех $x \in R_2$, для которых $\chi(x) \geqq \omega \cdot \lambda$, будем иметь очевидно

$$d'_1 = d'_0 = 1.$$

Итак, достаточно показать невозможность равенства

$$d_1 = 1. \tag{13}$$

Предположим сначала, что существуют $x_1, x_2 \in R_2$ с

$$\varphi(x_1) \geqq \omega, \quad \varphi(x_2) \geqq \omega, \quad (x_1, x_2) = 1.$$

В качестве x_0 выберем элемент $x_1 x_2$. Тогда (в силу замечания, сделанного в начале доказательства) в классе вычетов $x \bmod x_0$, определенном соотношениями

$$x \equiv 0 \pmod{x_1}, \quad x \equiv a_2 \pmod{x_2}$$

существует элемент $t_1 x_1$, являющийся (в случае $a = a_2$) решением неравенства (7_2). Значит, неравенство (5) при $a = a_2$, $b = t_1 x_1$ имеет только два решения: $q=0$ и $q=1$. Но

$$\varphi(t_1 x_1) \geqq \omega > \varphi(a_2), \quad \varphi(t_1 x_1 - a_2) = \varphi(t_2 x_2) \geqq \omega > \varphi(a_2),$$

а при $q \neq 0,1$

$$|t_1 x_1 - q a_2| \geqq |a_2|$$

и следовательно в силу (11) тоже

$$\varphi(t_1 x_1 - q a_2) \geqq \varphi(a_2).$$

Таким образом для φ не выполняется (2), что противоречит предположению.

Теперь рассмотрим общий случай. Если имеет место (13), то существуют такие $x_1, \ldots, x_n \in R_2$, что

$$(x_1, \ldots, x_n) = 1, \quad \varphi(x_k) \geqq \omega \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Невозможность этого мы и покажем. Для $n=2$ она уже показана; предположим, что n является наименьшим таким числом, для которого (14) возможно. Тогда $n \geqq 3$. Пусть

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) = d.$$

Тогда кольцо R_2 имеет не более чем конечное число таких элементов r, для которых

$$\varphi(rd) < \omega.$$

В самом деле, если бы их было бесконечно много, то их евклидовые образы тоже образовали бы бесконечное множество, так как нетрудно видеть, что (при данной норме) каждое натуральное число может служить евклидовым образом только конечного числа элементов R_2. Но тогда для евклидовой нормы χ, эквивалентной отображению

$$\psi(r) = \varphi(rd)$$

мы имели бы

$$\left(\frac{x_1}{d}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{d}\right) = 1, \quad \chi\left(\frac{x_k}{d}\right) \geqq \omega \quad (k = 1, \ldots, n-1),$$

вопреки индукционному предположению. Поэтому и вследствие (14) можно выбрать такой r, что

$$\varphi(rd) \geqq \omega, \quad (rd, x_n) = 1.$$

Тем самым мы свели общий случай к случаю $n = 2$, уже опроверженному.

Остается случай $j = 1$. Прежде всего покажем, что если $x_1, \ldots, x_n \in R_1$ и

$$\varphi(x_k) \geqq \omega \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{15}$$

то можно найти такие $c_1, c_1' \in R_1$ ($|c_1|, |c_1'| > 1$), что

$$c_1 | x_k \quad \text{или} \quad c_1' | x_k \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{16}$$

Если $|(x_1, \ldots, x_n)| > 1$, то $c_1 = c_1' = (x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет (16). Поэтому можем принять $(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

Доказательство поведем по индукции. Сначала пусть $n = 3$ (при $n \leqq 2$ утверждение тривиально). В этом случае (16) означает, что x_1, x_2, x_3 не могут быть попарно взаимно просты. Предположим, что напротив,

$$(x_1, x_2) = (x_1, x_3) = (x_2, x_3) = 1.$$

Положим $x_0 = x_1 x_2 x_3$. Тогда в классе вычетов $x \bmod x_0$, определенном соотношениями

$$x \equiv 0 \pmod{x_1}, \quad x \equiv a_1 \pmod{x_2}, \quad x \equiv e a_1 \pmod{x_3},$$

существует элемент $t_1 x_1$, являющийся решением неравенства (7_1) при $a = a_1$. Но тогда из (15), (1) и (12) получаем

$$\varphi(t_1 x_1) > \varphi(a_1),$$
$$\varphi(t_1 x_1 - a_1) = \varphi(t_2 x_2) > \varphi(a_1),$$
$$\varphi(t_1 x_1 - e a_1) = \varphi(t_3 x_3) > \varphi(a_1).$$

Далее, так как неравенство (5) при $b=t_1x_1$, $a=a_1$ не имеет решений кроме $q=0,1,e$, то в силу (11) для остальных q имеем тоже

$$\varphi(t_1x_1-qa_1)\geqq\varphi(a_1).$$

Однако это противоречит (2) и следовательно для $n=3$ действительно должно иметь место (16).

Переходим теперь к случаю $n\geqq 4$ и предположим, что упомянутые c_1, c_1' существуют при $m<n$ вместо n, но для n таких уже нет. Обозначим через k число простых множителей элемента $x_1\dots x_n$ (принимая во внимание кратности). Если $k=n$, это значит, что элементы x_i — простые, но тогда любые три из них попарно просты, а это, как было доказано выше, невозможно. Поэтому предположим, что $k>n$ и при меньшем числе простых множителей искомые c_1, c_1' уже существуют, но для k уже нет таких.

Пусть c, c', c'' попарно взаимно простые элементы кольца R_1, для которых

$$|c|>1,\quad |c'|>1,\quad |c''|>1,$$

$$c\,x_{m_0},\quad c'|x_{m_1},\quad c''|x_{m_2}\qquad (m_p\neq m_q\quad \text{для}\quad p\neq q).$$

Такие элементы существуют, так как было предположено, что для $x_1,\dots,x_n$ (16) не имеет места. Пусть например $m_0=1$.

Рассмотрим евклидову норму χ, эквивалентную с отображением $\psi(a)=\varphi(ac)$. Ясно, что для элементов $\frac{x_1}{c}, x_2, \dots, x_n$ тоже не может иметь места (16) и так как число простых множетелей элемента $\frac{x_1}{c}x_2\dots x_n$ меньше k, то (согласно индукционному предположению относительно k) имеет место хотя бы одно из неравенств

$$\chi\left(\frac{x_1}{c}\right)<\omega,\quad \chi(x_2)<\omega,\ \dots,\ \chi(x_n)<\omega.$$

Иными словами, множество элементов x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\chi(x)<\chi\left(\frac{x_1}{c}\right),\quad \chi(x)<\chi(x_2),\ \dots,\ \chi(x)<\chi(x_n),$$

конечно. Но так как эта система эквивалентна системе

$$\varphi(xc)<\varphi(x_1),\quad \varphi(xc)<\varphi(x_2c),\ \dots,\ \varphi(xc)<\varphi(x_nc),$$

то (из-за (15)) неравенство

$$\varphi(xc)<\omega \tag{17}$$

тоже не может иметь более чем конечное число решений. Это остается в силе, если заменить в (17) c через c' или c'' (приведенные рассуждения могут быть повторены дословно). Поэтому можно найти такие элементы t, t', t', для которых

$$\varphi(tc) \geqq \omega, \quad \varphi(t'c') \geqq \omega, \quad \varphi(t''c'') \geqq \omega$$

и $tc, t'c', t''c''$ попарно взаимно просты. Это однако, как было доказано выше, невозможно. Тем самым доказано существование c_1, c_1', удовлетворяющих (16).

Легко видеть, что существуют также элементы c_1, c_1', удовлетворяющие условию

(18) $$\varphi(x) \geqq \omega \implies c_1|x \quad \text{или} \quad c_1'|x \qquad (|c_1|, |c_1'| > 1).$$

Действительно, рассмотрим конечное подмножество H кольца R_1, удовлетворяющее (15) и совокупность всех двоек c_1, c_1', удовлетворяющих (вместе с H) условию (16). Таких двоек имеется только конечное число. Если теперь заменяем H через $H'(\supset H)$, которое тоже удовлетворяет (15), то число подходящих двоек не возрастает. Повторяя это расширение H и соответствующее сужение множества двоек, после конечного числа шагов мы приходим к одной или нескольким парам, удовлетворяющим (16) при любом конечном подмножестве H. Ясно, что эти пары удовлетворяют также (18).

Покажем теперь, что для любого порядкового числа β, для которого $\omega \cdot \beta < \alpha$, можно найти такие элементы $c_{\beta+1}, c_{\beta+1}'$, что

(19) $$\varphi(x) \geqq \omega \cdot \beta + \omega \implies c_{\beta+1} d_\beta | x \quad \text{или} \quad c_{\beta+1}' d_\beta | x \qquad (|c_{\beta+1}|, |c_{\beta+1}'| > 1).$$

Для этой цели рассмотрим опять евклидовую норму χ, эквивалентную отображению $\psi(a) = \varphi(d_\beta a)$. Из определения d_β ясно, что

$$\varphi(x) \geqq \omega \cdot \beta + \omega \implies \chi\left(\frac{x}{d_\beta}\right) \geqq \omega.$$

С другой стороны, согласно уже доказанному существуют такие c, c', которые удовлетворяют (18) относительно евклидовой нормы χ. Эти же елементы удовлетворяют очевидно и (19).

В качестве следующего шага покажем, что

(20) $$|d_\omega| > 1.$$

Предположим, что напротив,

(21) $$d_\omega = 1.$$

Во всяком случае существуют такие элементы c_ω, c_ω', что

(22) $$\varphi(x) \geqq \omega \cdot \omega \implies c_\omega | x \quad \text{или} \quad c_\omega' | x \qquad (|c_\omega|, |c_\omega'| > 1)$$

(таковы например $c_\omega = c_1$, $c_\omega' = c_1'$). Далее очевидно, что таких пар только конечное число, ведь согласно (21) существуют такие элементы $x_1, \ldots, x_n$, что

$$(x_1, \ldots, x_n) = 1, \quad \varphi(x_m) \geqq \omega \cdot \omega \qquad (m = 1, \ldots, n)$$

и как c_ω, так и c'_ω должны быть делителями числа $x_1 \ldots x_n$. Обозначим через P произведение всех элементов $c_\omega \cdot c'_\omega$ и предположим, что в случае, когда P имеет меньше простых делителей, имеет место (20); покажем, что тогда это верно и при данном P. По определению $P \neq 1$; пусть $p|P$ ($|p|>1$, p простое в R_1) и рассмотрим евклидову норму χ, эквивалентную с отображением $\psi(a) = \varphi(ap)$. Обозначим через $\tilde{P}$ произведение всех таких элементов $\tilde{c}_\omega \cdot \tilde{c}'_\omega$, которые удовлетворяют условию

$$\chi(y) \geqq \omega \cdot \omega \Longrightarrow \tilde{c}_\omega | y \quad \text{или} \quad \tilde{c}'_\omega | y \qquad (|\tilde{c}_\omega|, |\tilde{c}'_\omega| > 1). \tag{23}$$

Покажем, что существует такой y, для которого

$$\varphi(yp) \geqq \omega \cdot \omega, \quad \chi(y) < \omega \cdot \omega. \tag{24}$$

В самом деле, если из $\varphi(yp) \geqq \omega \cdot \omega$ следует $\chi(y) \geqq \omega \cdot \omega$, то тем более

$$\varphi(y) \geqq \omega \cdot \omega \Longrightarrow \chi(y) \geqq \omega \cdot \omega.$$

Отсюда вытекает, что пара $\tilde{c}_\omega, \tilde{c}'_\omega$ вместе с (23) удовлетворяет также (22), т. е. $\tilde{P}|P$. С другой стороны пусть c_ω, c'_ω удовлетворяют (22), $p|c_\omega$, но pc_ω, c'_ω уже не удовлетворяют (22). Тогда существует такой $z \in R_1$, для которого

$$\varphi(z) \geqq \omega \cdot \omega, \quad pc_\omega \nmid z, \quad c'_\omega \nmid z.$$

Из последнего следует, что $c_\omega | z$, следовательно и $p|z$. Но тогда в силу предположения относительно неверности (24)

$$\chi\left(\frac{z}{p}\right) \geqq \omega \cdot \omega, \quad c_\omega \nmid \frac{z}{p}, \quad c'_\omega \nmid \frac{z}{p},$$

т. е. c_ω, c'_ω не удовлетворяют (23). Поэтому $\tilde{P}$ имеет меньше простых делителей чем P и значит, для χ уже имеет место (20). Так как для φ (20) не имеет места, то для какого-либо y (24) должно все-таки выполняться.

Отсюда следует, что порядковый тип множества всех порядковых чисел $\varphi(rp) < \omega \cdot \omega$ меньше чем $\omega \cdot \omega$. Действительно, если

$$\varphi(rp) < \omega \cdot \omega \leqq \varphi(yp),$$

то $\chi(r) < \chi(y)$ и так как отображение $\varphi(rp) \to \chi(r)$ подобное, то порядковый тип множества всех $\varphi(rp)$ не превосходит $\chi(y)$. Но это означает, что неравенствам

$$\omega \cdot m \leqq \varphi(rp) < \omega \cdot (m+1),$$

где $m = 1, 2, \ldots$, за исключением конечного числа значений m удовлетворяет только конечное число различных r и следовательно это имеет место начиная с некоторого $m = m_p$. Такое m_p можно найти для всех $p|P$. Среди них есть наибольшее:

$$M = \max_p m_p$$

и если $m \geqq M$, то существует только конечное число таких элементов r, для которых выполняется

$$(25) \qquad \omega \cdot m \leqq \varphi(r) < \omega \cdot (m+1), \quad (r, P) \neq 1.$$

С другой стороны ясно, что если c_m, c'_m, удовлетворяют (19) при $\beta = m-1$, то $c_\omega = c_m$, $c'_\omega = c'_m$ удовлетворяют (22), следовательно $c_m \cdot c'_m | P$, в противоречие сказанному о (25). Тем самым доказано (20).

Наконец, докажем, что

$$|d_{\omega \cdot (n+1)}| > |d_{\omega \cdot n}|,$$

где n — произвольное натуральное число и $d_{\omega \cdot (n+1)}$ имеет смысл.

В самом деле, рассмотрим опять евклидовую норму χ, эквивалентную с отображением $\psi(a) = \varphi(a d_{\omega \cdot n})$. Так как (по определению $d_{\omega \cdot n}$) порядковый тип множества всех порядковых чисел $\chi\left(\frac{x}{d_{\omega \cdot n}}\right)$, где $\omega \cdot \omega \cdot n \leqq \varphi(x) < \omega \cdot \omega \cdot (n+1)$, равен $\omega \cdot \omega$, то

$$\varphi(y) \geqq \omega \cdot \omega \cdot (n+1) \Longrightarrow \chi\left(\frac{y}{d_{\omega \cdot n}}\right) \geqq \omega \cdot \omega.$$

Поэтому применяя (20) к евклидовой норме χ получим, что все эти $\frac{y}{d_{\omega \cdot n}}$ не могут быть взаимно просты. Обознача их наибольший общий делитель через c, получим

$$|d_{\omega \cdot (n+1)}| = |c d_{\omega \cdot n}| > |d_{\omega \cdot n}|,$$

что и требовалось.

Таким образом, последовательность идеалов (d_ω), $(d_{\omega \cdot 2})$, ... монотонно убывает, следователно пересечение всех его членов равно нулевому идеалу. Итак, тип евклидовой нормы φ не может превзойти $\omega \cdot \omega \cdot \omega$.

Для кольца R_2 евклидовые нормы типа $\omega \cdot \omega$ и $\omega \cdot n \ (n > 1)$ могут быть конструированы точно так же, как для I. Для R_1 отображение, определенное соотношениями

$$\psi(0) = 0,$$

$$\psi(a) = \omega^2 \cdot n + \omega \cdot m + |b|^2, \quad \text{если} \quad a = 2^n (\sqrt{-3})^m b, \quad (b, 2) = (b, \sqrt{-3}) = 1$$

обладает свойствами (1), (2). Легко видеть, что эквивалентная с ψ евклидовая норма имеет тип ω^3. Подобным же образом можно конструировать евклидовые нормы меньшего типа. Этим доказательство теоремы 2 завершено.

Прежде чем перейти к вопросу о кольцах многочленов, заметим, что в определении евклидового кольца условие (1) можно заменить условием

$$\varphi(a)=\varphi(a') \quad \text{для ассоциированных} \quad a, a'. \tag{26}$$

Действительно, пусть выполняется (26) и пусть $\varphi(ab)$ минимально среди всех $\varphi(ax)$ $(x \neq 0)$. Тогда в силу (2) существует такой q, что

$$\varphi(a-abq)=\varphi(a(1-bq))<\varphi(ab),$$

но из-за выбора b это возможно только тогда, когда $1-bq=0$, т. е. когда ab ассоциировано с a. Это значит, что

$$\min \varphi(ax)=\varphi(ab)=\varphi(a).$$

Следовательно, из (26) вытекает (1). Обратное общеизвестно[4]).

Теорема 3. *Отображение φ кольца многочленов $K[x]$ над полем K удовлетворяет (2) тогда и только тогда, если $\varphi(0)<\varphi(f)$ для $f\neq 0$ и*

$$\operatorname{Grad} f<\operatorname{Grad} g \Longrightarrow \varphi(f)<\varphi(g).$$

Следствие. *Если K бесконечно мощности $\mathfrak{k}$, то всевозможными типами евклидовых норм кольца $K[x]$ являются все конфинальные с ω порядковые числа, мощность которых не превосходит $\mathfrak{k}$. Если же K конечно, то все евклидовые нормы кольца $K[x]$ типа ω.*

Доказательство. Если для φ выполняются условия теоремы, то выполнение (2) для случая, когда a константа, тривиально, а когда a многочлен степени $n \geqq 1$, оно следует из того, что среди всех $f \in K[x]$ с $\varphi(f)<\varphi(a)$ находятся все многочлены меньшей степени и последние образуют полную систему вычетов $\bmod a$.

Наоборот, пусть φ обладает свойством (2). Тогда $\varphi(0)<\varphi(f)$ для $f\neq 0$ тривально. Далее, пусть $f, g_0 \in K[x]$, $\operatorname{Grad} f<\operatorname{Grad} g_0$ и g_0 таково, что его евклидовый образ минимален среди евклидовых образов многочленов g с $\operatorname{Grad} g>\operatorname{Grad} f$. Вследствие (2) существует $q \in K[x]$, для которого имеем

$$\varphi(f-g_0 q)<\varphi(g_0). \tag{27}$$

Если бы $q\neq 0$, то имели бы

$$\operatorname{Grad}(f-g_0 q) \geqq \operatorname{Grad} g_0>\operatorname{Grad} f$$

[4]) Существование единицы мы предположили только ради простоты. Его можно было бы вывести из (2).

и следовательно из-за выбора g_0 не могло бы иметь место (27). Поэтому $q=0$ и (27) принимает вид $\varphi(f)<\varphi(g_0)$, что и доказывает теорему.

В силу теоремы каждую евклидовую норму кольца $K[x]$ можно получить следующим образом. Множество многочленов степени n (для каждого $n \geqq 0$) разобьем на классы так, чтобы ассоциированные попали в один и тот же класс, а 0 образовал отдельный класс. Множество полученных таким образом классов упорядочим вполне, причем так, чтобы первым элементом был класс $\{0\}$, и классы, состоящие из многочленов меньшей степени, опередили классов, состоящих из многочленов более высокой степени. Полученное вполне упорядоченное множество отобразим монотонным отображением λ на беспробельное множество порядковых чисел. Обознача через F класс, содержащий многочлен f, отображение

$$\varphi(f)=\lambda(F)$$

будет евклидовой нормой и если проделать все возможные классификации и упорядочения, то таким путем получим все различные евклидовые нормы.

Для доказательства следствия воспольвуемся этой конструкцией. Обозначим через C_n упорядоченное множество классов, образованных из многочленов степени n, через γ_n его порядковый тип и через γ тип евклидовой нормы φ. Так как, очевидно, $\gamma_0=2$, то

$$\gamma=2+\gamma_1+\gamma_2+\cdots. \tag{28}$$

В случае конечного K все γ_n конечны, следовательно $\gamma=\omega$. Если же K бесконечно, то из (28) видно, что γ конфинально с ω (то, что его мощность не превосходит мощности K, тривиально). Наоборот, пусть K бесконечно мощности $\mathfrak{k}$ и пусть γ — произвольное порядковое число мощности не выше $\mathfrak{k}$ и конфинальное с ω. Тогда γ можно представить в форме (28). Обозначим через $\mathfrak{c}_n$ мощность, принадлежащая γ_n. Так как мощность множества C_n^* классов ассоциированных полиномов степени $n \geqq 1$ равно $\mathfrak{k}$, а $\mathfrak{c}_n \leqq \mathfrak{k}$, то множество C_n^* можно разбить в классы так, чтобы мощность множества этих классов равнялась $\mathfrak{c}_n$, а потом упорядочить их по типу γ_n, что и требовалось.

(Поступило 31/VIII 1959 г.)

Bibliographie

Fabio Conforto, Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie (aus dem Nachlaß bearbeitet und herausgegeben von W. Gröbner, A. Andreotti und M. Rosati), XI + 276 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1956.

Der Gegenstand dieses Buches zeigt sehr gut, wie aus Entdeckungen speziellen Charakters durch verschiedenartige Verallgemeinerungen, geeignete Abstraktionen und Analogieschlüsse eine große mathematische Theorie entsteht. Ein solcher Weg führte vom Eulerschen Additionstheorem für elliptische Integrale über berühmte Ergebnisse von Abel, Jacobi (für die Umkehrfunktionen) und von anderen großen Analytikern des XIX. és XX. Jahrhunderts zum heutigen allgemeinen Begriff und zur Behandlung der elliptischen und automorphen Funktionen einerseits, der Abelschen Funktionen, ferner generalisierter Thetafunktionen andrerseits; Disziplinen, welche naturgemäß auch mit der Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Riemannschen Flächen in enger Beziehung stehen.

Während ein vor zehn Jahren erschienenes Werk von C. L. Siegel sich neben einem ähnlichen systematischen Aufbau der Theorie der Abelschen Funktionen hauptsächlich mit automorphen Funktionen beschäftigt, wird in dieser Arbeit eine solche Darstellung der *klassischen* (in erster Linie analytischen) Resultate gegeben, die neben einem lückenlosen logischen Aufbau auch durch moderne Methoden der Funktionentheorie (von mehreren komplexen Variablen) gewonnene Ergänzungen und Vertiefungen bietet. Erwähnt sei z. B. die Tatsache, daß der Integritätsbereich sämtlicher zu einer Riemannschen Matrix gehörigen intermediären (Jacobischen) Funktionen ein ZPE-Ring ist. (ZPE: eindeutige Zerlegbarkeit in Primelemente.)

Kapitel I beginnt mit einer systematischen Behandlung der periodischen meromorphen Funktionen $f(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ im allgemeinen, mit Einschluß der Definition der Abelschen Funktionen (als meromorphen, nicht ausgearteten Funktionen mit genau $2p$ unabhängigen Perioden), der Modulgruppe und Riemannscher Matrizen. Dann leitet man die sog. Periodenrelationen ab und zeigt, daß immer entsprechende Abelsche Funktionen konstruiert werden können; letztere lassen sich mit Hilfe des Satzes von Cousin als Quotienten zweier verallgemeinerter Thetareihen darstellen, wenn man die Lösung gewisser Differenzenprobleme besitzt. Es folgt noch eine Übersicht über die Klassifikation Abelscher Funktionenkörper.

Kapitel II enthält eine geometrische Diskussion der Abelschen Funktionen, genauer gesagt, die Untersuchung p-dimensionaler algebraischer Mannigfaltigkeiten, welche durch Parameterdarstellungen mittels Funktionen vom genannten Typ definiert sind. Aus dem ausführlichen (obgleich natürlich keineswegs abgeschlossenen) Stoff seien die Konstruktion eines singularitätsfreien projektiven Modells der Picardschen Mannigfaltigkeit (von C. L. Siegel), die Interpretation und Konsequenzen des Satzes von Appell—Humbert, ferner der Teil über die algebraische Korrespondenzen zwischen Picardschen Mannigfaltigkeiten hervorgehoben.

Das Buch wird gewiß wesentlich dazu beitragen, das Interesse in diesem klassischen Gebiet lebhaft zu erhalten. *M. Mikolás* (Budapest)

Hans Heinrich Ostmann, Additive Zahlentheorie (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge). **I. Allgemeine Untersuchungen** (Heft 7), 233 Seiten **II. Spezielle Zahlenmengen** (Heft 11), 136 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1956.

Eine Abgrenzung der additiven Zahlentheorie von anderen Kapiteln der Zahlentheorie wird — wie der Verf. es betont — „wohl niemals frei vom persönlichen Geschmack sein können". Die additive Zahlentheorie wird vom Verf. dadurch charakterisiert, daß sie sich mit der folgenden Art von Summenbildung von Mengen nichtnegativer ganzen Zahlen beschäftigt: Es sei Z die Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen, Σ die Menge aller Teilmengen von Z. Die Summe $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_r$ $(M_i \in \Sigma)$ wird als die Menge aller Zahlen n erklärt, die in der Form $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$ mit $a_k \in M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ darstellbar sind.

Die berühmten klassischen Probleme von Goldbach und Waring und auch die Partitionsprobleme gehören offenbar zu diesem Problemenkreis. Ob man die diophantischen Gleichungen als Teil der additiven Zahlentheorie betrachten soll, ist problematisch. Verf. behandelt in seinem Buche das Fermatsche Problem; bezüglich anderer diophantischen Probleme weist er aber nur auf das Ergebnisse-Heft von Th. Skolem aus dem Jahre 1938 hin.

Vor 1930 hat man nur die Summenmenge von speziellen Zahlenfolgen (Primzahlen, k-te Potenze u. s. w.) betrachtet; Schnirelman war der erste, der sich mit der Summe von beliebigen Zahlenfolgen beschäftigte. In seinen Untersuchungen spielte der Begriff der Dichte einer Zahlenfolge eine zentrale Rolle. Der Dichtebegriff erwies sich als sehr fruchtbar und wurde zum Ausgangspunkt einer selbstständigen Theorie, die sich auch schwer von der additiven Zahlentheorie abgrenzen läßt.

Band I des vorliegenden Werkes beschäftigt sich mit der allgemeinen Theorie der Summenbildung und der Dichte von Folgen nichtnegativer ganzen Zahlen, während in Band II die mit speziellen Zahlenfolgen verknüpften Probleme betrachtet werden. Obzwar geschichtlich der zweite Problemenkreis viel älter ist, ist die vom Verf. gewählte Anordnung die natürliche.

Band I: §§ 1—6 behandeln den oben erwähnten Summenbegriff. Die vom Verf. stammende Theorie von primitiven bzw. reduziblen Mengen ist ausführlich dargestellt. Weiter wird folgende Abbildung von Σ auf das Intervall (0, 1) betrachtet: jeder Menge $A = \{a_0, a_1, \ldots\} \in \Sigma$ wird die reelle Zahl $x(A) = \sum_k 1/2^{a_k+1}$ zugeordnet; dies ergibt eine Möglichkeit, gewissen Teilmengen M von Σ ein Maß (nämlich das Lebesguesche Maß der Menge der Bildpunkte $x(A), A \in M$, zuzuordnen.

§ 7 behandelt die Anzahlfunktion $A(x) =$ (Anzahl der in A enthaltenen Zahlen a_i mit $1 \leqq a_i \leqq x$), ferner Kompositionen bzw. Partitionen. §§ 8—13 behandeln verschiedene in der additiven Zahlentheorie übliche Dichtebegriffe; die Schnirelmansche Dichte $\delta(A) = \inf_{x \geqq 1} \frac{A(x)}{x}$, die „variierte" Schnirelmansche Dichte $\delta_0(A) = \inf_{x \geqq 1} \frac{A(x)+1}{x+1}$ (falls $0 \in A$), die asymptotische Dichte $\delta^*(A) = \liminf_{x \to +\infty} \frac{A(x)}{x}$, bzw., falls sie existiert, die „natürliche" Dichte $\delta_*(A) = \lim_{x \to +\infty} \frac{A(x)}{x}$. Den Mittelpunkt dieser Untersuchungen bildet der berühmte Satz von Mann, nach welchem stets $\delta(A+B) \geqq \delta(A) + \delta(B)$ gilt, falls $\delta(A) + \delta(B) \leqq 1$, $0 \in A$, $0 \in B$ ist. Es sei bemerkt, daß nur der allgemeinere Satz von Mann—Dyson formuliert ist. Dies ist zu bedauern, denn der Beweis des Satzes von Mann war ein bedeutendes Ereignis. Erinnern wir uns daran, was Landau 1936 schrieb: „dies ungelöste Problem möchte ich dem Leser ans Herz legen".

§§ 14—16 behandeln Basen und wesentliche Komponenten. Eine Menge B nennt man eine Basis endlicher Ordnung falls Z als eine endliche Summe $Z = B + B + \cdots + B$ darstellbar ist. Die Menge W heißt eine wesentliche Komponente, falls für alle $A \in \Sigma$ mit $0 < \delta_v(A) < 1$ gilt: $\delta_v(A + W) > \delta_v(A)$. Nach dem Satz von MANN ist jede Menge A mit $\delta(A) > 0$ eine wesentliche Komponente. Nach dem Satze von ERDÖS gilt mehr: jede Basis endlicher Ordnung ist eine wesentliche Komponente. Dadurch ist aber die Menge aller wesentlichen Komponenten nicht erschöpft; LINNIK hat ja eine wesentliche Komponente konstruiert, die keine Basis endlicher Ordnung ist. § 17 behandelt die Abbildung $x(A)$; es wird der berühmte Satz von BOREL über die Ziffernverteilung der q-adischen Darstellung fast aller reellen Zahlen bewiesen. Dieser Satz gehört zwar nicht zur additiven Zahlentheorie (bekanntlich ist es ein Spezialfall des starken Gesetzes der großen Zahlen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung), es können aber interessante Folgerungen daraus bezüglich der Struktur „fast aller" Folgen aus Σ gezogen werden. Verwandte Sätze, in denen der Hausdorffsche Dimensionsbegriff vorkommt, sind auch angegeben, z. B. der schöne Satz von VOLKMANN, nach dem die Dimension der Menge der Bildpunkte $x(C)$ von allen Teilmengen C einer Menge A gleich der asymptotischen Dichte von A ist.

Band II: § 18 is eine Ergänzung zu § 8. § 19 behandelt den vom Verf. eingeführten Begriff der Multiplamengen und Spezialfälle (abundante quadratfreie bzw. k-freie Zahlen, u. s. w.). § 20 behandelt multiplikative bzw. additive zahlentheoretische Funktionen; dieser § steht mit der additiven Zahlentheorie in ziemlich losem Zusammenhang. § 21 über Primzahlen und verwandte Mengen beginnt mit dem Primzahlsatz. Im allgemeinen sind die historischen Bemerkungen und Hinweise des Verfassers genau, hier findet sich aber eine bedauernswerte Ausnahme: der von A. SELBERG und P. ERDÖS stammende elementare Beweis des Primzahlsatzes wird allein SELBERG zugeschrieben. Der wohlbekannte Tatbestand (siehe z. B. das Referat von INGHAM in *Mathematical Reviews*, 1950) ist, daß der wesentliche erste Schritt der Ableitung des Primzahlsatzes aus der Selbergschen Formel (der Beweis von $\lim p_{n+1}/p_n = 1$) von ERDÖS stammt; sich auf das Resultat von ERDÖS stützend hat SELBERG den elementaren Beweis des Primzahlsatzes zu Ende geführt.

Es folgt die Zusammenfassung der Resultate des Goldbachschen Problemenkreises. Der Satz von I. M. VINOGRADOV — wohl der tiefste Satz der additiven Zahlentheorie — — wird ohne Beweis angegeben. Die Vinogradovsche Methode der Abschätzung von Exponentialsummen wird nur erwähnt. § 22 beschäftigt sich mit der Menge der k-ten Potenzen, hauptsächlich mit dem Waringschen Problem. Schade, daß der von LINNIK stammende elementare Beweis des Hilbertschen Satzes nicht dargestellt ist. Es folgt eine Zusammenfassung der bezüglich der Fermatschen Vermutung bekannten Ergebnisse. § 23 behandelt kurz einige weitere spezielle Ergebnisse (über arithmetische Folgen in Mengen u. s. w.).

Ein sehr sorgfältig zusammengestelltes Literaturverzeichnis, das mehr als 800 Arbeiten umfaßt, wurde beiden Bänden beigefügt.

Ein solches Werk zu schreiben ist heutzutage bei der großen Fülle von Resultaten eine sehr schwere Aufgabe geworden und man soll dem Verf. dankbar sein, daß er diese mühsame Arbeit unternommen hat. Er hätte vielleicht ungelöste Probleme in größerer Anzahl erwähnen können. In der Zahlentheorie gibt es ja besonders viele ungelöste, einfach formulierbare (obzwar meist schwere) Probleme.

Das Werk ist sehr klar geschrieben. Trotzdem ist es nicht leicht lesbar, da der Verf. der Kürze wegen ziemlich viele, obzwar wohlbedacht gewählte, aber nicht allgemein übliche Bezeichnungen eingeführt hat. Dem Anfänger wird es wohl auch Schwierigkeit bereiten, daß wichtige Ergebnisse, ihre ziemlich naheliegenden Verallgemeinerungen und hübsche aber keineswegs tiefe Resultate so gemischt nacheinander folgen, daß es nicht einfach ist eine klare Übersicht zu gewinnen. Dies ist eine Schwierigkeit, die bei vielen Büchern auftritt, die bestrebt sind, ein Gebiet der Mathematik systematisch und enzyklopädisch darzustellen und alle Resultate in möglichst allgemeiner Form zu bringen. Diese Bestrebung des Verf. ist jedenfalls gelungen und dadurch leistet sein Buch den auf dem Gebiet der Zahlentheorie tätigen Forschern eine bedeutende Hilfe.

A. Rényi (Budapest)

Jacques Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann) (Cahiers scientifiques, fasc. 25), VI + 367 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

The theory of von Neumann algebras (or W^*-algebras) was originated by the paper of von Neumann "Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren" [*Math. Annalen*, **102** (1929)], and the paper of von Neumann and Murray "On rings of operators" [*Annals of Math.*, **37** (1936)]; there it is indicated already that the theory connects with many unsolved problems concerning unitary representations of groups, quantum mechanics and structure theory of abstract algebras with no minimal condition. It connects also with the theory of continuous geometries and extended integration theory.

The theory has grown since with a splendid speed. The present book is the first systematic account on the subject. It will act as a traffic controller in a period of hasting and jostling evolution of the theory (the bibliography collects nearly two hundred papers). It will be a kind guide to the beginner and a beacon for the future development, suggesting further research also by indicating some unsolved problems.

The work is divided into three chapters: 1. Global theory, 2. Reduction theory, and 3. Complements.

Chapter 1 contains the basic results of the theory, presented in an adjusted and rearranged form with much care and with essentially refined procedures. It begins with the definition of von Neumann algebras and ends with their global decomposition according to type and finiteness. The von Neumann algebra in the author's sense is a *-algebra of operators on a Hilbert space which agrees with its bicommutor. (This definition differs slightly from that of the "ring" in the sense of von Neumann because a ring does net contain necessarily the identity.) In virtue of an improved dealing with the induced and reduced von Neumann algebras (§ 2, 1), the exposition of direct sums and tensor products of algebras, of the various topologies (uniform, weak, ultra weak, strong and ultra strong), and of the von Neumann and Kaplansky Density Theorems proceeds very smoothly.

The main results in this chapter are the relations between normal states (or normal homomorphisms) and ultra weakly continuous states (or spatial homomorphisms), and the relations between normal traces and Hilbert algebras. They produce the author's fundamental idea that the reduction of a von Neumann algebra into finite, semi-finite, infinite, and pure infinite types is done by the reduction of the normal trace on it. The substance of this new reduction method lies not only to avoid the more difficult dimension theory of projections, which is dealt with in chapter 3, but to point out the basic objects in the structure theory of algebras. Although very important (especially in connection with abstract algebra and continuous geometry), the present theory of the relations between dimensionality and trace is less primitive, less elementary and more artificial than the structure theory of Hilbert algebras. Moreover, the existence of traces on any concrete algebra, whose structure has been already known, is examined apriori without help of the dimension theory.

Chapters 2 and 3 are undoubtedly the highest expositions of the respective fields. Chapter 2 is constructed rather analogously to the original "Reduction theory" of von Neumann [*Annals of Math.*, 50 (1949)], but its details are much improved and released from some difficulties. The principal result is that a von Neumann algebra over a separable Hilbert space is essentially uniquely expressible with respect to its center as a direct integral of factors. The author does not explicitly explain the result in this form, but states it by separating it into three parts: § 3, Theorem 3; § 3, Lemma 1; and § 6, Theorem 2. § 3, Lemma 1 is just the Lemma 7 in von Neumann's paper. This Lemma is proved by making use of very deep results on analytical sets. In fact, it seems that all existing proofs use this tool (with the exception of an as yet unpublished paper of the reviewer).

The direct integrals of Hilbert spaces are constructed on general locally compact spaces, and the measurability is defined using explicitly the existence of orthonormal bases for measurable families. As a continuation of chapter I, the reduction theory of separable Hilbert algebras and traces are presented. Another method of reducing a maximal Hilbert algebra is presented among the exercises in chapter 3.

The main arguments concerning the dimensions of projections and traces of algebras in von Neumann's and Murray's first and second papers on rings of operators are dealt with (of course extended to general algebras) in the first four sections of chapter 3 (comparison of projections, classification of projections, complements for discrete algebras, mapping $\natural$), and in the last section (classical definition of algebra of finite type). Between these three sections: "Approximation theorem", "Binding function" and "Hyperfinite factors" are sandwiched.

Through the book, several notes written by smaller scripts deal with rather essential problems and one can not pass omitting them. Proofs are brief and elegant, but the beginner may need to pay much endeavour to read through.

M. Tomita (Okayama, Japan)

L. Rédei, Algebra, I. Teil, XV + 797 Seiten, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, 1959.

Das vorliegende Werk ist der erste Teil eines Lehrbuches der Algebra aus der Feder des Seniors der erfolgreichen algebraischen Schule in Ungarn. Es stellt eine vom Verfasser selbst besorgte, bearbeitete und erweiterte Übersetzung des 1954 erschienenen ungarischen Originals dar. Dieses Werk zeichnet sich dadurch aus, daß es in geschickter Weise den Charakter eines Lehrbuches mit dem einer Monographie vereinigt. Selbst ein Student in den ersten Semestern wird es mit Erfolg als Einführung in die Algebra benutzen können, denn der Verfasser stützt sich auf seine jahrzehntelange Erfahrung als akademischer Lehrer. Der Kenner wird nicht nur manches Neue finden, sondern sich auch oft an der eigenwilligen Darstellung wohlbekannter Dinge oder an interessanten Einzeluntersuchungen erfreuen.

Die folgende Inhaltsübersicht kann nur ersten Eindruck vermitteln, nicht aber die ganze Reichhaltigkeit des Werkes widerspiegeln.

Kapitel I (28 Seiten), *Mengentheoretische Grundlegung*, bringt die im ganzen Buch ständig benutzten Begriffe wie Abbildungen, Äquivalenzrelationen, Ordnung und Wohlordnung, Zornsches Lemma und transfinite Induktion. Als sehr zweckmäßig erweist sich im ganzen Buch die konsequente Benutzung der Schreibweise „$S \sim S'$ $(\alpha \to \alpha')$", um auszudrükken, daß die Abbildung $\alpha \to \alpha'$ einen Homomorphismus der Struktur S auf die Struktur S' darstellt.

Kapitel II (198 S.), *Strukturen*, behandelt zunächst, durch viele einprägsame Beispiele erläutert, die wichtigsten Strukturen, nämlich Halbgruppen, Gruppen, Moduln, Ringe, Schiefkörper, Körper und Verbände. Ferner kommen hier alle Arten relationstreuer Abbildungen zur Sprache, sowie die wichtigsten Konstruktionsverfahren für Strukturen, z. B. aus freien

Strukturen oder durch Komposition. Stets wird die Analogie zwischen den verschiedenen Strukturen besonders hervorgehoben; dies geschieht nicht nur, wie allgemein üblich, bei Homomorphismen und Faktorstrukturen sondern z. B. auch beim Erweiterungsproblem, das sowohl für Gruppen als auch für Ringe behandelt wird. Um in diesem Falle eine möglichst weitgehende Analogie zwischen Gruppen und Ringen zu erreichen, werden gewisse Paare von Abbildungen eines Ringes in sich eingeführt, die sog. Doppelhomothetismen. Dem Holomorph einer Gruppe werden die Holomorphe eines Ringes an die Seite gestellt. Ferner finden die Sätze von SCHREIER und JORDAN-HÖLDER in diesem Kapitel Platz. Das zum Beweis benutzte Lemma von ZASSENHAUS wird durch explizite Angabe des darin auftretenden Isomorphismus ergänzt.

Den *Operatorstrukturen* ist Kapitel III (80 S.) gewidmet. Die Mannigfaltigkeit der hierin behandelten Gegenstände zeigt dem Anfänger die Wichtigkeit des Begriffes einer Struktur mit Operatoren. Nach dem Satz von REMAK—KRULL—SCHMIDT kommen Vektorräume und Algebren zur Sprache. Als Beispiele werden verschränkte Produkte (allgemeiner als bei E. NOETHER) und monomiale Ringe näher betrachtet. Ferner finden sich Paragraphen über Polynomringe, lineare Abbildungen, alternierende Ringe und Determinanten, Normen und Spuren sowie Quaternionen.

Mit Kapitel IV (53 S.), *Teilbarkeitslehre in Ringen*, beginnt der spezielle Teil des Buches, in dem die besonderen Eigenschaften der vorher allgemein behandelten Strukturen näher untersucht werden. Bei Teilbarkeitsfragen beschränkt sich der Verfasser nicht ausschließlich auf kommutative Ringe. Behandelt werden Hauptidealringe, euklidische Ringe, Polynomringe über Schiefkörpern, ferner die Frage der Einbettbarkeit von nullteilerfreien Ringen in Ringe mit Einselement. Ein umfangreicher Paragraph ist den ganzen Quaternionen gewidmet.

Kapitel V (34 S.), *Endliche abelsche Gruppen*, enthält neben den Hauptsätzen über solche Gruppen und ihre Charaktere eine Verallgemeinerung der Möbiusschen Umkehrformel auf abelsche Gruppen, den interessanten Satz von HAJÓS und die Einführung der Zetafunktion einer endlichen abelschen Gruppe.

Kapitel VI (36 S.), *Operatormoduln*, bringt die grundlegenden Sätze über Elementarteiler und den Hauptsatz über abelsche Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden. Ferner werden Systeme linearer Gleichungen über Schiefkörpern behandelt, das Schursche Lemma und der Dichtigkeitssatz von CHEVALLEY—JACOBSON sowie schließlich die Struktursätze von WEDDERBURN—ARTIN.

Neben den üblichen Sätzen über Polynome in einer und mehreren Unbestimmten enthält Kapitel VII (42 S.), *Kommutative Polynomringe*, einen neuen Beweis der Waringschen Formel, den Hilbertschen Basissatz sowie Verfahren zur effektiven Aufstellung aller Ideale in $R[x]$ über einem Hauptidealring R. Ferner findet man Paragraphen über Tschirnhaussche Transformation von Idealen und über die durch ein Element erzeugbaren Ringe.

Kapitel VIII (87 S.), *Körpertheorie*, bringt zunächst die klassischen Ergebnisse von STEINITZ, dann den Satz von WEDDERBURN über endliche Schiefkörper, den Satz von KÖNIG—RADOS über die Anzahl der verschiedenen Nullstellen eines Polynoms über einem endlichen Körper, einiges über Kreisteilungspolynome (auch im Falle von Primzahlcharakteristik) sowie die Theorie der Oreschen Polynomringe und als Anwendung einen Beweis für die Existenz von Normalbasen in endlichen Körpern.

Kapitel IX (17 S.), *Angeordnete Strukturen*, enthält neben den Sätzen von ARTIN und SCHREIER über angeordnete Körper auch die neueren Untersuchungen von SZELE und JOHNSON über Schiefkörper bzw. Ringe.

Den *bewerteten Körpern* ist Kapitel X (67 S.) gewidmet. Es enthält die Theorie der

Bewertungen und ihrer Fortsetzungen sowie die Konstruktion der perfekten Hüllen, ferner die beiden Sätze von OSTROWSKI. Insbesondere wird in diesem Zusammenhang auch der Körper der reellen Zahlen konstruiert.

In Kapitel XI (77 S.), *Die Theorie von Galois*, wird zunächst die klassische Galoissche Theorie behandelt mit Anwendung auf die Frage der Auflösbarkeit von algebraischen Gleichungen. Sodann werden die Auflösungsformeln für Gleichungen 2., 3., und 4. Grades abgeleitet. Die Theorie der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal wird zunächst in dem üblichen Umfang besprochen, dann aber durch einen interessanten Paragraphen über merkwürdige Punkte eines Dreiecks bereichert. Ferner enthält dieses Kapitel Paragraphen über Gleichungen 3. und 4. Grades über endlichen Körpern, über Tschirnhaussche Transformationen, zyklische Körper, Kreisteilungskörper, Normalbasen sowie den Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes von MIRIMANOFF—HENSEL.

Schließlich enthält Kapitel XII (54 S.), *Endliche einstufig nichtkommutative Strukturen*, die vom Verfasser entwickelte Theorie der endlichen Gruppen, Ringe und Halbgruppen, deren entsprechende echte Unterstrukturen sämtlich kommutativ sind.

Zwei Umstände verdienen noch besondere Erwähnung. Obwohl es sich um ein durchaus modernes Buch handelt und die Einführung der allgemeinen grundlegenden Begriffe das Hauptanliegen ist, wird dem Leser doch stets die Nützlichkeit der abstrakten Theorie zur Lösung konkreter Probleme vor Augen geführt und seine Freude am interessanten Einzelergebnis geweckt. Ferner enthält das Buch für viele klassische Sätze neue und vereinfachte Beweise, die teils vom Verfasser selbst, teils von seinen Schülern stammen.

Viele Beispiele, zahlreiche Aufgaben und Hinweise auf ungelöste Probleme erhöhen noch den Wert dieses interessanten und vielseitigen Werkes.

R. Kochendörffer (Rostock)

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION

H. Arzeliès, La dynamique relativiste et ses applications, Fasc. 2, XXIV + 451 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1958. — 6000 fr.

F. Bachmann, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 96), XIII + 311 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1959. — DM 49,80

C. Berge, Théorie des graphes et ses applications (Collection universitaire de mathématique, No. 2), VIII + 278 pages, Paris, Dunod, 1958. — 3400 fr.

C. Berge, Espaces topologiques, fonctions multivoques (Collection universitaire de mathématique, No. 3), XI + 272 pages, Paris, Dunod, 1959. — 3400 fr.

N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Livre II: **Algèbre,** Chapitre 8: **Modules et anneaux semi-simples,** Chapitre 9: **Formes sesquilinéaires et formes quadratiques** (Actualités sci. et ind., 1261, 1272), 189 + 211 pages, Paris, Hermann, 1958, 1959.

E. Burger, Einführung in die Theorie der Spiele, 169 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1959. — DM 28,—

H. Cartan—G. Choquet—J. Dixmier—P. Dubreil—R. Godement—P. Lelong—L. Lesieur—A. Lichnerowicz—C. Pisot—A. Revuz—L. Schwartz—J.-P. Serre, Structures algébriques et structures topologiques (Monographies de l'Enseignement Mathématique, No. 7), 200 pages, Paris, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, et Genève, Institut de Mathématiques, Université, 1958. — Fr. s. 20,—

L. Cesari, Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 16), VII + 271 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1959. — DM 68,—

J. L. Destouches, Corpuscules et champs en théorie fonctionnelle (Les grands problèmes des sciences, IX), VIII + 163 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1958. — 4000 fr.

G. Doetsch, Introduction à l'utilisation pratique de la transformation de Laplace (traduit de l'allemand par M. Parodi), VIII + 198 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1959. — 3500 fr.

H. Freudenthal, Logique mathématique appliquée (Collection de logique mathématique, Série A XIV), IV + 57 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1958. — 1200 fr.

H. G. Garnir, Les problèmes aux limites de la physique mathématique (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. 23), 234 Seiten, Basel—Stuttgart, Birkhäuser-Verlag, 1958. — Fr. 29,—

R. Godement, Théorie des faisceaux (Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII), 300 pages, Paris, Hermann, 1958. — 3600 fr.

W. Hahn, Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 22), VIII + 142 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springen-Verlag, 1959. — DM 28,—

L. Holzer, Zahlentheorie, Teil II (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek, Bd. 14), VI + 127 Seiten, Leipzig, Teubner, 1959. — DM 9,—

L.-K. Hua, Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I 2, Heft 13, Teil I), 124 Seiten, Leipzig, Teubner, 1959. — DM 13,—

L.-K. Hua, Additive Primzahltheorie, VI + 174 Seiten, Leipzig, Teubner, 1959. — DM 48,—

K. Knopp, Elemente der Funktionentheorie (Sammlung Göschen, Bd. 1109), 5. Auflage, 144 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1959. — DM 3,60

J. Kuntzmann, Méthodes numériques, XVIII + 254 pages, Paris, Dunod, 1959. — 3600 fr.

H. Lebesgue, Notices d'histoire des mathématiques (Monographies de l'Enseignement Mathématique, No. 4), 116 pages, Genève, Institut de Mathématiques, Université, 1958. — Fr. s. 16,—

Mathematics in secondary modern schools (A report prepared for the Mathematical Association), VI + 221 pages, London, Bell, 1959.

A. D. Michal, Le calcul différentiel dans les espaces de Banach, Vol. I. **Fonctions analytiques. Equations intégrales** (Collection de monographies sur la théorie des fonctions), XIV + 150 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1958. — 3000 fr.

W. Müller, Theorie der elastischen Verformung (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 27), XI + 327 Seiten, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1959. — DM 31,50

M. Parodi, La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications (Traité de physique théorétique et de physique mathématique, XII), XII + 172 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1959. — 3700 fr.

H. R. Pitt, Tauberian theorems (Tata Institute of Fundamental Research, Monographs on Math. and Physics, No. 2), XII + 174 pages, London, Oxford University Press, 1958.

L. Robin, Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales (Collection technique et scientifique du C. N. E. T.), Tome 2, VIII + 384 pages, Tome 3, VIII + 289 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1958 et 1959. — 5300 et 6000 fr.

Th. Schneider, Introduction aux nombres transcendants (traduit de l'allemand par P. Eymard), VIII + 151 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1959. — 3500 fr.

A. Weil, Variétés kählériennes (Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VI), 176 pages, Paris, Hermann, 1958. — 2000 fr.