54858

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

373

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XIV.

1951—1952

SZEGED

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XIV.

1951—1952.

REDIGUNT:

L. KALMÁR, B. SZ.-NAGY, GY. SZ.-NAGY,
L. RÉDEI ET F. RIESZ

S Z E G E D.

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

14. KÖTET

1951—1952.

SZEGED.

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

INDEX. — TARTALOM.

Tomus XIV. — 1951/52. — 14. kötet.

BIBLIOGRAPHIE.

Felelős szerkesztő: Szőkefalvi-Nagy Béla

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 524228 Felelős vezető: Vincze György

An individual ergodic theorem for non-commutative transformations.

By NELSON DUNFORD in New Haven, Conn.

In a recent correspondence Professor H. E. ROBBINS has raised the following interesting question. Let Ω be a measure space of finite measure, let $p \geqq 1$, and let $L_p(\Omega)$ be the normed linear space consisting of those measurable functions f on Ω for which $|f| = \left(\int\limits_{\Omega} |f(\omega)|^p \, d\omega\right)^{1/p} < \infty$. Let φ_1, φ_2 be one-to-one measure preserving maps of Ω onto itself. Is it true that for any $f \in L_p(\Omega)$ the double limit

$$\lim_{m, n \to \infty} (m \cdot n)^{-1} \sum_{\nu_1=0}^{m-1} \sum_{\nu_2=0}^{n-1} f(\varphi_1^{\nu_1} \varphi_2^{\nu_2} \omega)$$

exists almost everywhere on Ω? ROBBINS has pointed out that this double sequence converges in the mean of order p. In fact, this follows readily from the mean ergodic theorem of F. RIESZ[1]). As far as the almost everywhere convergence is concerned, it appears that the known methods for proving the individual ergodic theorem fail unless the transformations φ_1, φ_2 commute. It is curious, however, that a proper combination of known ergodic theorems will yield an affirmative answer to ROBBINS' question in case $p > 1$. The question, as far as I know, is unanswered in the case $p = 1$. In this note we shall demonstrate the

Theorem. *Let $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ be one-to-one measure preserving maps of the measure space Ω onto itself and let $p > 1$. Then for every $f \in L_p(\Omega)$ the multiple sequence*

$$(1) \qquad (m_1 \cdots m_k)^{-1} \sum_{\nu_1=0}^{m_1-1} \cdots \sum_{\nu_k=0}^{m_k-1} f(\varphi^{\nu_1} \cdots \varphi^{\nu_k} \omega)$$

is convergent (as $m_1, \ldots, m_k \to \infty$ independently) almost everywhere on Ω, as well as in the mean of order p. Furthermore, this multiple sequence is dominated by a function in $L_p(\Omega)$.

---

[1]) F. RIESZ, Some mean ergodic theorems, *Journal London Math. Soc.*, **13** (1938), pp. 274–278.

For a given function $f \in L_p(\Omega)$ we shall write $\bar{f}$ for the function whose value at the place ω is $\bar{f}(\omega) = |f(\omega)|$, and reserve the symbol $|f|$ for the norm of f as a vector in $L_p(\Omega)$. If A is a transformation in $L_p(\Omega)$ we shall write $A(f, \omega)$ for the value of Af at the point $\omega \in \Omega$. We shall be concerned with the following transformations

$$T_i(f, \omega) = f(\varphi_i \omega), \qquad i = 1, \ldots, k,$$

$$U(i, m) = m^{-1} \sum_{\nu=0}^{m-1} T_i^{\nu}, \qquad i = 1, \ldots, k; \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$V(m_1, \ldots, m_k) = U(k, m_k) \ldots U(2, m_2)\, U(1, m_1)$$

With this terminology then, $V(m_1, \ldots, m_k)(f, \omega)$ is the multiple sequence (1). Since φ_i is measure preserving we have $|T_i f| = |f|$ and hence

(2) $$|U(i, m) f| \leqq |f|, \quad |V(m_1, \ldots, m_k) f| \leqq |f|.$$

By the mean ergodic theorem of F. Riesz we know that there is a projection operator E_i with

(3) $$\lim_m U(i, m) f = E_i f, \quad f \in L_p(\Omega), \quad i = 1, \ldots, k.$$

From (2) and (3) it follows immediately that

(4) $$\lim V(m_1, \ldots, m_k) f = E_k \ldots E_1 f, \quad f \in L_p(\Omega),$$

for indeed suppose this fact has been established for $k-1$ maps $\varphi_2, \ldots, \varphi_k$ and note that

$$\begin{aligned} |(U(k, m_k) \ldots U(1, m_1) - E_k \ldots E_1) f| &\leqq |U(k, m_k) \ldots U(2, m_2) \{U(1, m_1) - E_1\} f| + \\ &+ |\{U(k, m_k) \ldots U(2, m_2) - E_k \ldots E_2\} E_1 f| \leqq \\ &\leqq |\{U(1, m_1) - E_1\} f| + |\{U(k, m_k) \ldots U(2, m_2) - E_k \ldots E_2\} E_1 f| \end{aligned}$$

approaches zero by our induction hypothesis. In connection with his proof of equation (3) Riesz has shown that E_i projects $L_p(\Omega)$ onto the manifold $\mathfrak{M}_i$ of those f for which $T_i f = f$ and the complementary projection $E_i' = I - E_i$ projects $L_p(\Omega)$ onto the closure of the manifold $(I - T_i) L_p(\Omega)$. Thus if we define $\mathfrak{N}_i$ as the set of functions of the form $(I - T_i) f$ with $\sup_\omega |f(\omega)| < \infty$, we have

(5) $$\mathfrak{M}_i + \mathfrak{N}_i \text{ is dense in } L_p(\Omega),$$

a fact which will be needed later. Now let $g = (I - T_1) f \in \mathfrak{N}_1$ with $|f(\omega)| \leqq k$. Then $U(1, m)(g, \omega) = m^{-1}[f(\omega) - f(\varphi_1^m \omega)]$, so $|V(m_1, \ldots, m_k)(g, \omega)| \leqq 2k/m_1$, and so

(6) $$\lim V(m_1, \ldots, m_k)(g, \omega) = 0, \quad \omega \in \Omega, \quad g \in \mathfrak{N}_1.$$

For a function $f \in \mathfrak{M}_1$ we have $f(\varphi_1 \omega) = f(\omega)$, for almost all $\omega \in \Omega$ and thus $U(1, m)(f, \omega) = f(\omega)$ for almost all $\omega \in \Omega$ and all $m = 1, 2, \ldots$. Since the theorem is known[2]) to be true for $k=1$, we shall apply induction and assume that is has been proved for the case of $k-1$ transformations $\varphi_2, \dots, \varphi_k$ The induction hypothesis yields then for $f \in \mathfrak{M}_1$ the almost everywhere convergence of the multiple sequence

$$V(m_1, \dots, m_k)(f, \omega) = U(k, m_k) \dots U(2, m_2)(f, \omega).$$

This fact combined with (5) and (6) shows that

(7) For every f in a set dense in $L_p(\Omega)$ the sequence $V(m_1, \dots, m_k)(f, \Omega)$ converges almost everywhere on Ω.

Next we define the operator D_i (not linear) by the equation

$$D_i(f, \omega) = \operatorname*{lub}_{1 \leq m} U(i, m)(\bar{f}, \omega), \qquad i = 1, \dots, k.$$

It has been shown by N. WIENER[3]) that $D_i f \in L_p(\Omega)$ if $f \in L_p(\Omega)$. Hence if $g_1 = D_1(f)$, $g_i = D_i(g_{i-1})$, $i = 2, \dots, k$, it follows that $g_k \in L_p(\Omega)$. Since $U(i, m_i)$ is a positive operation, i. e., it takes positive functions into positive functions, we have

$$U(2, m_2)\, U(1, m_1)(\bar{f}, \omega) \leq U(2, m_2)(D_1(f), \omega) \leq$$
$$\leq D_2(g_1, \omega) = g_2(\omega), \quad \omega \in \Omega, m_1, \quad m_2 = 1, 2, \dots,$$
$$U(3, m_3)\, U(2, m_2)\, U(1, m_1)(\bar{f}, \omega) \leq g_3(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad m_1, m_2, m_3 = 1, 2, \dots,$$

etc. This yields

(8) For every $f \in L_p(\Omega)$ we have $|V(m_1, \dots, m_k)(f, \omega)| \leq g_k(\omega)$, and $g_k \in L_p(\Omega)$.

The weaker statement

(9) For every $f \in L_p(\Omega)$ we have $\sup\limits_{1 \leq m_1, \dots, m_k} |V(m_1, \dots, m_k)(f, \omega)| < \infty$,

together with (7) suffices to prove

(10) For every $f \in L_p(\Omega)$ the $\lim V(m_1, \dots m_k)(f, \omega)$ exists a. e. on Ω.

This final implication is proved in Lemma 7 of a paper by N. DUNFORD and D. S. MILLER[4]). In that lemma we simply take Γ_p to be the set of all $\gamma = (m_1, \dots, m_k)$ with $m_i \geq p$, $i = 1, \dots, k$, and define for $\gamma = (m_1, \dots, m_k) \in \Gamma_1$ the

---

[2]) The almost everywhere convergence has been proved by H. KHINTCHINE, Zu Birkhoff's Lösung des Ergodenproblems, *Math. Annalen*, 107 (1933), pp. 285—288. The mean convergence has been proved in the paper of F. RIESZ referred to above. The dominated convergence has been proved by N. WIENER, The ergodic theorem, *Duke Math. Journal*, 5 (1939), pp. 1—18.

[3]) Ibid.

[4]) N. DUNFORD and D. S. MILLER, On the ergodic theorem, *Transactions American Math. Soc.*, 60 (1946), pp. 538—549.

operator $T_\gamma \equiv V(m_1, \dots, m_k)$. Thus statements (4), (8), and (10) prove the theorem.

It should be mentioned that if f belongs to ZYGMUND'S class defined by $\int_\Omega |f(\omega)| \log^+ |f(\omega)| d\omega < \infty$, then $D_1(f) \in L_1(\Omega)$. This has been shown by N. WIENER[5]). Hence for such an f we see by the maximal ergodic theorem of YOSIDA and KAKUTANI[6]) that

$$|U(2, m_2) U(1, m_1)(f, \omega)| \leqq U(2, m_2)(g_1, \omega) \leqq g_2(\omega),$$

and $g_2(\omega) < \infty$ a. e. on Ω. Thus, since the only place where the hypothesis $p > 1$ entered was in the proof of (10), we may say that in case $k = 2$ we have the lim $V(m_1, m_2)(f, \omega)$ existing a. e. on Ω providing

$$\int_\Omega |f(\omega)| \log^+ |f(\omega)| d\omega < \infty.$$

This fact has also been proved by ZYGMUND (unpublished).

YALE UNIVERSITY
NEW HAVEN, CONN.

(Received August 16, 1949.)

5) Ibid.

6) K. YOSIDA and S. KAKUTANI, Birkhoff's ergodic theorem and the maximal ergodic theorem, *Proceedings Imperial Acad. Tokyo*, 15 (1939), pp. 165—168.

Farey series and their connection with the prime number problem. II.

By MIKLOS MIKOLÁS in Budapest.

In a previous paper of the same title[1]) we considered the asymptotical behaviour of sums of the type

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} f(\varrho_\nu),$$

where the summation is extended over all fractions of the Farey series of order x. By supposing that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n}{}' f\left(\frac{k}{n}\right) = A$$

exists, the relations

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} f(\varrho_\nu) \sim A\,\Phi(x) \sim \frac{3A}{\pi^2} x^2$$

have been established; we sharpened this result for functions $f(t)$ having a bounded derivative in $0 \leqq t \leqq 1$, and showed e. g. that, for many special $f(t)$ of this class, the order of the difference

$$R_f(x) = \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} f(\varrho_\nu) - A\,\Phi(x)$$

is connected with the validity of RIEMANN's hypothesis concerning the roots of the zeta-function.

Now we shall discuss in detail the case of the simplest functions $f(t)$ which are continuous for $0 < t \leqq 1$ (moreover having derivatives of arbitrary order in this interval), but become *infinite* in the left end-point $t = 0$; by applying the Euler-Maclaurin summation formula, we obtain in Part 1 the following relations:

---

[1]) MIKOLÁS [1]. (Numbers in brackets [ ] refer to the bibliography at the end of the paper.)

$$\text{(I)}\qquad \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \log \varrho_\nu = -\Phi(x) + \frac{1}{2}\psi(x) + O(xe^{-c_1(\log x)^\gamma}) =$$

$$= -\Phi(x) + \frac{1}{2}x + O(xe^{-c_2(\log x)^\gamma}),$$

where

$$\psi(x) = \sum_{\substack{p^m \leqq x \\ p \text{ prime}}} \log p$$

denotes TCHEBYCHEF's function, $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{4}{7}$, and $c_1 > 0, c_2 > 0$ are constants depending on the choice of γ only;

$$\text{(IIa)}\qquad \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \left(\frac{1}{\varrho_\nu}\right)^\gamma = \frac{1}{1-\lambda}\Phi(x) + \frac{\zeta(\lambda)}{(1+\lambda)\zeta(1+\lambda)}x^{1+\lambda} + O(x) =$$

$$= \frac{3}{\pi^2(1-\lambda)}x^2 + \frac{\zeta(\lambda)}{(1+\lambda)\zeta(1+\lambda)}x^{1+\lambda} + O(x\log x), \qquad \text{if } 0 < \lambda < 1;$$

$$\text{(IIb)}\qquad \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \left(\frac{1}{\varrho_\nu}\right)^\lambda = \begin{cases} \dfrac{\zeta(\lambda)}{(\lambda+1)\zeta(\lambda+1)}x^{\lambda+1} - \dfrac{3}{\pi^2(\lambda-1)}x^2 + O(x^\lambda), & \text{if } 1 < \lambda < 2, \\[2ex] \dfrac{\zeta(\lambda)}{(\lambda+1)\zeta(\lambda+1)}x^{\lambda+1} + O(x^\lambda), & \text{if } \lambda \geqq 2; \end{cases}$$

finally

$$\text{(III)}\qquad \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \frac{1}{\varrho_\nu} = \Phi(x)\left\{\log x + \left(C - \frac{1}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\right\} + O(x\log^2 x) =$$

$$= \frac{3}{\pi^2}x^2\left\{\log x + \left(C - \frac{1}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\right\} + O(x\log^2 x),$$

C denoting EULER's constant.

(I) will be of special interest, in view of the corollary

$$\left(\prod_{\nu=1}^{\Phi(x)} \varrho_\nu\right)^{\frac{1}{\Phi(x)}} \sim \frac{1}{e},$$

and because it will be proved:

RIEMANN's hypothesis is true if and only if the relation

$$\text{(IV)}\qquad \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} (\log \varrho_\nu + 1) - \frac{1}{2}\psi(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

holds for all positive values of ε.

In Part 2 we give a theorem of Tauberian type, which may be regarded as a converse of the relations (IIb):

Suppose that $f(t)$ is non-negative, decreasing for $0 < t \leqq 1$ and such that

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} f(\varrho_\nu) \sim Bx^\alpha,$$

B, a denoting constants with $B>0$, $a>2$, respectively. Then we have

$$f\left(\frac{1}{t}\right) \sim B\frac{a\zeta(a)}{\zeta(a-1)}t^{a-1}.$$

Our method is elementary; we do not need e. g. the complex integral formula

$$\text{(V)} \qquad \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int\limits_{(\alpha+\varepsilon)-iT}^{(\alpha+\varepsilon)+iT}\frac{x^s}{s^2}\frac{F(s)}{\zeta(s)}ds=\sum_{n=1}^{[x]}\sum_{\substack{k\leqq n\\(k,n)=1}}f\left(\frac{k}{n}\right)\log\frac{x}{n} \qquad (\varepsilon>0),$$

where $\alpha\geqq 2$ denotes the absolute convergence abscissa of

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Nevertheless, we mention (V) since, under suitable restrictions, its application gives the formula

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}f(\varrho_\nu)\sim\operatorname*{Res}_{s=\alpha}\frac{x^sF(s)}{s\zeta(s)},$$

which discloses the deeper ground of the above asymptotical results.

1. The cases $f(t)\equiv\log t$ and $f(t)\equiv\frac{1}{t^\lambda}$ $(\lambda>0)$.

In what follows fat numbers refer to the theorems or formulae of my paper [1].

Next let us apply[2])

Lemma 1. *If $f(t)$ is continuous, decreasing and non-negative for $0<t\leqq 1$, and if*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{1}f(t)\,dt=\int\limits_{0}^{1}f(t)dt$$

exists, then we have

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}f(\varrho_\nu)\sim\Phi(x)\int\limits_0^1 f(t)dt.$$

For $f(t)\equiv\log t$ we can write

$$\int\limits_{\frac{1}{v}}^{1}\log t\cdot dt=-1-\frac{\log v}{v}+\frac{1}{v}\to-1,$$

when $v\to+\infty$; consequently

---

[2]) See Mikolás [1], pp. 101—102.

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \log \varrho_\nu \sim -\Phi(x),$$

i. e.

$$\left(\prod_{\nu=1}^{\Phi(x)} \varrho_\nu\right)^{\frac{1}{\Phi(x)}} = \exp\left(\frac{1}{\Phi(x)}\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \log \varrho_\nu\right) = \exp(-1+o(1)) = \frac{1}{e}\cdot e^{o(1)} \to \frac{1}{e},$$

if $x \to +\infty$.

Lemma 2. *The geometrical mean of* F_x [3]) *is asymptotic to* $1/e$.

To improve the relation (1), we use STIRLING's formula in the following elegant form: [4])

$$(2) \qquad \log n! = n \log n - n + \frac{1}{2}\log n + \log\sqrt{2\pi} - \int_n^\infty \frac{P_1(t)}{t}\,dt$$

with

$$(3) \qquad P_1(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi t}{k\pi}.$$

We need still

Lemma 3 *Let* $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \textit{if is a prime or one of its powers,} \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$

We have for Tchebychef's function, defined by

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \Lambda(n) = \sum_{\substack{p^m \leq x \\ p \text{ prime}}} \log p,$$

the identities[5])

$$(4) \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{[x]} M\left(\frac{x}{n}\right) \log n = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \log\left[\frac{x}{n}\right]!$$

Proof. By the well-known identity[6])

$$(5) \qquad \Lambda(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log d$$

we can write

$$\sum_{n=1}^{x]} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log d = \sum_{\substack{d,\,\delta \\ d\delta \leq x}} \mu(\delta) \log d = \sum_{d=1}^{[x]} M\left(\frac{x}{d}\right) \log d = \sum_{\delta=1}^{[x]} \mu(\delta) \log\left[\frac{x}{\delta}\right]!$$

According to TCHUDAKOV's results[7]), we have the estimation

---

[3]) As usual, F_x denotes the Farey series of order x.

[4]) See e. g. KNOPP [1], p. 547.

[5]) $\mu(n)$ denotes the Möbius function, $M(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n)$.

[6]) See e. g. HARDY—WRIGHT [1], p. 253.

[7]) Cf. TCHUDAKOV [1], Theorem 3 (p. 599). — [2], pp. 421—422.

(6) $$\psi(x)=x+O(xe^{-c_1(\log x)^\gamma}),$$

where γ denotes any number with $\frac{1}{2}<\gamma<\frac{4}{7}$, and $c_1>0$ depends on the choice of γ only.

On the other hand, as is well-known, the relation

(7) $$\psi(x)-x=O(\sqrt{x}\log^2 x)$$

holds if and only if RIEMANN's hypothesis is true[8]).

Now we may formulate

Theorem 1.

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}\log\varrho_\nu=-\Phi(x)+\frac{1}{2}\psi(x)+O(xe^{-c_2(\log x)^\gamma})=$$
$$=-\Phi(x)+\frac{1}{2}x+O(xe^{-c_3(\log x)^\gamma}),$$

where γ has the meaning as in (6), and $c_2>0$, $c_3>0$ depend upon the choice of γ only.

Proof. We take γ as fixed. By using the identity (4) and (2), we can write

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}\log\varrho_\nu=\sum_{n=1}^{[x]}M\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n}=\sum_{n=1}^{[x]}M\left(\frac{x}{n}\right)(\log n!-n\log n)=$$
$$=\sum_{n=1}^{[x]}M\left(\frac{x}{n}\right)\left(-n+\frac{1}{2}\log n+\log\sqrt{2\pi}-\int_n^\infty\frac{P_1(t)}{t}dt\right).$$

Partial integration shows that

(8) $$\int_n^\infty\frac{P_1(t)}{t}dt=-\frac{1}{12n}+2\int_n^\infty\frac{P_3(t)}{t^3}dt=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(9) $$P_3(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin 2k\pi t}{(2k\pi)^3},$$

and so, in view of (5), (6), (4), (8), we obtain

(10) $$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}\log\varrho_\nu=-\Phi(x)+\frac{1}{2}\psi(x)+\log\sqrt{2\pi}+O\sum_{n=1}^{[x]}\frac{1}{n}\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right|.$$

By discussing the function

$$h(u)=\frac{1}{\sqrt{u}}e^{-c_2(\log x-\log u)^\gamma},$$

it is easy to verify that

(11) $$\frac{1}{\sqrt{u}}e^{-c_2\left(\log\frac{x}{u}\right)^\gamma}\leq e^{-c_2(\log x)^\gamma}$$

---

[8]) See LANDAU [2], vol. II., pp. 121, 156.

if $1 \leq u \leq \frac{x}{\xi}$, $\xi = \exp\left(\frac{c_2\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ (>1); by use of (19) and (11) it follows for the last sum under (10)

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n}\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right| &= O\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}\cdot\frac{x}{n}\,e^{-c_2\left(\log\frac{x}{n}\right)^\gamma} = \\
(12)\qquad &= x\left\{O\sum_{n\leq\frac{x}{\xi}}\frac{1}{n^2}e^{-c_2\left(\log\frac{x}{n}\right)^\gamma} + O\sum_{\frac{x}{\xi}<n\leq x}\frac{1}{n^2}e^{-c_2\left(\log\frac{x}{n}\right)^\gamma}\right\} = \\
&= x\left\{O\left(e^{-c_3(\log x)^\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + O\sum_{n>\frac{x}{\xi}}\frac{1}{n^2}\right\} = \\
&= x\left\{O\left(e^{-c_3(\log x)^\gamma}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right\} = O\left(xe^{-c_3(\log x)^\gamma}\right).
\end{aligned}
$$

(10), (12) and (6) involve indeed

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \log\varrho_\nu + \Phi(x) = \frac{1}{2}\psi(x) + O(xe^{-c_3(\log x)^\gamma}) = \frac{1}{2}x + O(xe^{-c_3(\log x)^\gamma}).$$

Theorem 2. *The relation*

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}(\log\varrho_\nu + 1) - \frac{1}{2}\psi(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}+c_4\frac{\log\log\log x}{\log\log x}}\right), \tag{13}$$

c_4 denoting a positive constant, is equivalent to Riemann's hypothesis; we may write $O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ (with an arbitrary $\varepsilon>0$) instead of the expression on the right-hand side, and x in place of $\psi(x)$.

Proof. If our assertion holds, (7) and (13) are clearly equivalent so that, in fact, $\psi(x)$ may be replaced by x because of

$$O(\sqrt{x}\log^2 x) = O\left(x^{\frac{1}{2}+2\frac{\log\log x}{\log x}}\right) = O\left(x^{\frac{1}{2}+c_4\frac{\log\log\log x}{\log\log x}}\right).$$

1° Next suppose that Riemann's hypothesis is true, then we have, according to (20)

$$M(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{c_4\frac{\log\log\log x}{\log\log x}}\right) = O\left(\sqrt{x}\cdot\exp\frac{c_4\log x\cdot\log\log\log x}{\log\log x}\right).$$

Since the last exponent is monotonically increasing for $x>x_0(>1)$, there are constants $K>0$ and $\xi\geq x_0$ such that

$$|M(y)| < K\sqrt{y}\cdot x^{c_4\frac{\log\log\log x}{\log\log x}}$$

whenever $1\leq y\leq x$, $x>\xi$.

Thus, by (10), we can write

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}(\log \varrho_\nu + 1) - \frac{1}{2}\psi(x) = \log\sqrt{2\pi} + O\sum_{n=1}^{[x]}\frac{1}{n}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}x^{c_4\frac{\log\log\log x}{\log\log x}} =$$
$$= O\left(x^{\frac{1}{2}+c_4\frac{\log\log\log x}{\log\log x}}\right).$$

2º Assume that (13), i. e. for every $\varepsilon>0$ the relation

(14) $$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}(\log\varphi_\nu + 1) - \frac{1}{2}\psi(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

is valid.

Since, by Lemma **1** **(38)** and (5),

$$\sum_{\substack{k=n\\(k,n)=1}}\log\frac{k}{n} + \varphi(n) - \frac{1}{2}\Lambda(n) = \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\left(\sum_{k=1}^{d}\log\frac{k}{d} + d - \frac{1}{2}\log d\right),$$

the application of Lemma **7** gives

(15) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\left(\sum_{\substack{k\leqq n\\(k,n)=1}}\log\frac{k}{n} + \varphi(n) - \frac{1}{2}\Lambda(n)\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}(\log n! - n\log n + n - \frac{1}{2}\log n);$$

this equality holds, however, for $\sigma>1$ because of

$$\log n! - n\log n + n - \frac{1}{2}\log n = O(1)$$

(cf. (2), (8)).

Considering (2), we obtain from (15)

(16) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\left(\sum_{\substack{k\leqq n\\(k,n)=1}}\log\frac{k}{n} + \varphi(n) - \frac{1}{2}\Lambda(n)\right) - \log\sqrt{2\pi} =$$
$$= -\frac{1}{\zeta(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_n^{\infty}\frac{P_1(t)}{t}dt.$$

Our hypothesis (14) implies, by virtue of Lemma **6**, that the series on the left-hand side is regular for $\sigma>\frac{1}{2}$; the series at the right of (16) is, by (8), (convergent and so) regular for $\sigma>0$. Thus, if we show that

(17) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_n^{\infty}\frac{P_1(t)}{t}dt \neq 0$$

for $\sigma>\frac{1}{2}$, it follows from (16) that $\zeta(s)$ has no zeros in this half-plane, i. e. that RIEMANN'S hypothesis holds.

To verify (17), we write (cf. (8.)

$$(18)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_n^{\infty}\frac{P_1(t)}{t}dt=-\frac{1}{12}\zeta(s+1)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s+1}}\,n\int_n^{\infty}\frac{P_3(t)}{t^3}dt=$$
$$=-\zeta(s+1)\left(\frac{1}{12}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^{s+1}}\right).$$

Using the condition

$$\sum\frac{b_n}{n^{s+1}}=\sum\frac{\mu(n)}{n^{s+1}}\cdot\sum\frac{1}{n^{s+1}}\,n\int_n^{\infty}\frac{P_3(t)}{t^3}dt$$

(the right-hand series are plainly absolutely convergent for $\sigma>0$), we obtain for the coefficients b_n (cf. Lemma **7**)

$$b_n=\sum_{\delta/n}\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)\delta\int_\delta^{\infty}\frac{P_3(t)}{t^3}dt$$

and so (cf. **(2)**, (9))

$$B(u)=\sum_{n=1}^{[u]}|b_n|\leqq\sum_{n=1}^{[u]}\sum_{\delta/n}\delta\left|\int_\delta^{\infty}\frac{P_3(t)}{t^3}dt\right|=\sum_{n=1}^{[u]}\left[\frac{u}{n}\right]n\left|\int_n^{\infty}\frac{P_1(t)}{t^3}dt\right|\leqq$$
$$\leqq\sum_{n=1}^{[u]}\left|\int_n^{\infty}\frac{P_3(t)}{t^3}dt\right|<u\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k\pi)^3}\cdot\sum_{n=1}^{[u]}\int_n^{\infty}\frac{dt}{t^3}<u\frac{\zeta(3)}{8\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=u\frac{\zeta(3)}{48\pi},$$

$$(19)\qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^{s+1}}\right|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{n^{\sigma+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}B(n)\left(\frac{1}{n^{\sigma+1}}-\frac{1}{(n+1)^{\sigma+1}}\right)=(\sigma+1)\int_1^{\infty}\frac{B(u)}{u^{\sigma+2}}du<$$
$$<(\sigma+1)\frac{\zeta(3)}{48\pi}\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{\sigma+1}}=\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\zeta(3)}{48\pi}\qquad(\sigma>0).$$

Finally, by (18) and (19), we have for $\sigma>\frac{1}{2}$ (cf. **(42)**)

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_n^{\infty}\frac{P_1(t)}{t}dt\right|\geqq|\zeta(s+1)|\left(\frac{1}{12}-2\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^{s+1}}\right|\right)>$$
$$>\frac{1}{12}|\zeta(s+1)|\left(1-\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\zeta(3)}{2\pi}\right)>\frac{|\zeta(s+1)|}{12}\left(1-\frac{3\zeta(3)}{2\pi}\right)=$$
$$=\frac{|\zeta(s+1)|}{12}(1-0.574\ldots)>0,$$

which completes the proof.

As another interesting example, we discuss the case where $f(t) \equiv \frac{1}{t^\lambda}$ $(\lambda > 0)$.

Let us suppose $0 < \lambda < 1$; then, by

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t^\lambda} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{1-\lambda}(1-\varepsilon^{1-\lambda}) = \frac{1}{1-\lambda},$$

Lemma 1 gives

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \frac{1}{\varrho_\nu^\lambda} \sim \frac{\Phi(x)}{1-\lambda}, \tag{20}$$

relation which holds for $\lambda \leqq 0$ too. (Cf. Theorem **2.**)

To find much sharper results, we use the relations

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} = \log n + C + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{21}$$

$$1+\frac{1}{2^\lambda}+\ldots+\frac{1}{n^\lambda} = \zeta(\lambda) - \frac{1}{\lambda-1}\cdot\frac{1}{n^{\lambda-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^\lambda} + O\left(\frac{1}{n^{\lambda+1}}\right) \quad (\lambda>0,\ \lambda \neq 1), \tag{22}$$

which can be obtained simply from the Euler—Maclaurin summation formula.

Theorem 3.

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \left(\frac{1}{\varrho_\nu}\right)^\lambda = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda}\Phi(x) + \frac{\zeta(\lambda)}{(1+\lambda)\zeta(1+\lambda)} x^{1+\lambda} + O(x) = \\ \quad = \frac{3}{\pi^2(1-\lambda)} x^2 + \frac{\zeta(\lambda)}{(1+\lambda)\zeta(1+\lambda)} x^{1+\lambda} + O(x \log x), & \text{if } 0<\lambda<1, \\ \frac{\zeta(\lambda)}{(\lambda+1)\zeta(\lambda+1)} x^{\lambda+1} - \frac{3}{\pi^2(\lambda-1)} x^2 + O(x^\lambda), & \text{if } 1<\lambda<2, \\ \frac{\zeta(\lambda)}{(\lambda+1)\zeta(\lambda+1)} x^{\lambda+1} + O(x^\lambda), & \text{if } \lambda \geqq 2. \end{cases}$$

Proof. Let $\lambda>0, \lambda \neq 1$.

In view of **(14)**, the use of (22) gives (cf. **(5)**, **(6)**)

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \left(\frac{1}{\varrho_\nu}\right)^\lambda &= \sum_{n=1}^{[x]} M\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k}\right)^\lambda = \\ &= \sum_{n=1}^{[x]} M\left(\frac{x}{n}\right) n^\lambda \left(\zeta(\lambda) - \frac{1}{\lambda-1}\cdot\frac{1}{n^{\lambda-1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^\lambda} + O\left(\frac{1}{n^{\lambda+1}}\right)\right) = \\ &= \zeta(\lambda) \sum_{n=1}^{[x]} M\left(\frac{x}{n}\right) n^\lambda - \frac{1}{\lambda-1}\Phi(x) + \frac{1}{2} + O \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n}\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right| = \\ &= \zeta(\lambda) \sum_{n=1}^{[x]} M\left(\frac{x}{n}\right) n^\lambda - \frac{1}{\lambda-1}\Phi(x) + O(x). \end{aligned} \tag{23}$$

Since, according to **(22)**,

$$\sum_{k=1}^{m} k^\lambda = \int_0^m u^\lambda du + \frac{1}{2} m^\lambda + O\int_0^m u^{\lambda-1} du = \frac{m^{\lambda+1}}{\lambda+1} + O(m^\lambda),$$

we have by **(1)**

$$(24)\quad \sum_{n=1}^{[x]} M\left(\frac{x}{n}\right) n^\lambda = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{n}\right]} k^\lambda = \frac{1}{\lambda+1} \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right]^{\lambda+1} + O\left(x^\lambda \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n^\lambda}\right).$$

By taking $\left[\frac{x}{n}\right] = \frac{x}{n} - \vartheta$ $(0 \leqq \vartheta = \vartheta(x, n) < 1)$, we see that

$$\sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right]^{\lambda+1} = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda+1} + O \sum_{n=1}^{[x]} \left(\frac{x}{n}\right)^\lambda =$$

$$= x^{\lambda+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{\lambda+1}} + x^{\lambda+1} O \sum_{n=[x]+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}} + O\left(x^\lambda \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n^\lambda}\right).$$

Hence, by **(40)** and (cf. **(27)**)

$$\sum_{n=[x]+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}} \sim \int_x^\infty \frac{du}{u^{\lambda+1}} = \frac{1}{\lambda x^\lambda},$$

it follows

$$(25)\quad \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right]^{\lambda+1} = \frac{x^{\lambda+1}}{\zeta(\lambda+1)} + O(x) + O\left(x^\lambda \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n^\lambda}\right),$$

so that (23), (24), (25) imply

$$(26)\quad \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \frac{1}{\varrho_\nu^\lambda} = \frac{\zeta(\lambda)}{(\lambda+1)\zeta(\lambda+1)} x^{\lambda+1} - \frac{1}{\lambda-1} \Phi(x) + O(x) + O\left(x^\lambda \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n^\lambda}\right).$$

But (cf. **(27)**)

$$\sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n^\lambda} \sim \begin{cases} \zeta(\lambda) & \text{for } \lambda > 1, \\ \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^\lambda} \sim \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} & \text{for } 0 < \lambda < 1, \end{cases}$$

and therefore we can write

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \frac{1}{\varrho_\nu^\lambda} - \frac{\zeta(\lambda)}{(\lambda+1)\zeta(\lambda+1)} x^{\lambda+1} - \frac{1}{\lambda-1} \Phi(x) = \begin{cases} O(x^\lambda), & \text{if } \lambda > 1, \\ O(x), & \text{if } 0 < \lambda < 1. \end{cases}$$

Using now **(7)**, we obtain the estimations in question.

Let us take, finally, $\lambda = 1$.

Theorem 4.

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \frac{1}{\varrho_\nu} = \Phi(x) \left\{\log x + \left(C - \frac{1}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\right\} + O(x \log^2 x) =$$

$$= \frac{3}{\pi^2} x^2 \left\{\log x + \left(C - \frac{1}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\right\} + O(x \log^2 x),$$

where C is Euler's constant.

Proof. Applying (4), (21), we get (cf. (5), (6))

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}\frac{1}{\varrho_\nu}=\sum_{n=1}^{[x]}M\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}=\sum_{n=1}^{[x]}M\left(\frac{x}{n}\right)n\left(\log n+C+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=$$

$$(27)\qquad =\sum_{n=1}^{[x]}M\left(\frac{x}{n}\right)n\log n+C\Phi(x)+\frac{1}{2}+O\sum_{n=1}^{[x]}\frac{1}{n}\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right|=$$

$$=\sum_{n=1}^{[x]}M\left(\frac{x}{n}\right)n\log n+C\Phi(x)+O(x).$$

Since, according to (27),

$$\sum_{k=1}^{n}k\log k=\sum_{k=1}^{m-1}(k+1)\log(k+1)=\int_0^{m-1}(u+1)\log(u+1)\,du+\frac{1}{2}m\log m+$$

$$+\frac{B_2}{2!}\{(\log m+1)-1\}+\frac{B_4}{4!}\left(1-\frac{1}{m^2}\right)-6\int_0^{m-1}\frac{P_5(u)}{(u+1)^4}du=$$

$$=\frac{1}{2}m^2\log m-\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{2}m\log m+\frac{1}{12}\log m+O(1),$$

we can write, by (4), for the first sum under (27)

$$\sum_{n=1}^{[x]}M\left(\frac{x}{n}\right)n\log n=\sum_{n=1}^{[x]}\mu(n)\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{n}\right]}k\log k=$$

$$=\sum_{n=1}^{[x]}\mu(n)\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{x}{n}\right]^2\log\left[\frac{x}{n}\right]-\frac{1}{4}\left[\frac{x}{n}\right]^2+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{n}\right]\log\left[\frac{x}{n}\right]+\frac{1}{12}\log\left[\frac{x}{n}\right]+O(1)\right\}.$$

By taking $\left[\frac{x}{n}\right]=\frac{x}{n}-\vartheta\quad(0\leq\vartheta=\vartheta(x,n)<1)$, we see that

$$\log\frac{x}{n}-\log\left[\frac{x}{n}\right]=\log\left(1+\frac{\vartheta}{\left[\frac{x}{n}\right]}\right)<\frac{1}{\left[\frac{x}{n}\right]},$$

$$\log\left[\frac{x}{n}\right]=\log x-\log n-\frac{\theta}{\left[\frac{x}{n}\right]}\quad(0\leq\theta=\theta(x,n)<1),$$

and therefore (cf. (5), (6), (4))

$$\sum_{n=1}^{[x]}M\left(\frac{x}{n}\right)n\log n=\sum_{n=1}^{[x]}\mu(n)\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{x}{n}\right]^2\left(\log x-\log n-\frac{\theta}{\left[\frac{x}{n}\right]}\right)-\frac{1}{4}\left[\frac{x}{n}\right]^2+\right.$$

$$(28)\qquad \left.+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{n}\right]\left(\log x-\log n-\frac{\theta}{\left[\frac{x}{n}\right]}\right)+\frac{1}{12}\left(\log x-\log n-\frac{\theta}{\left[\frac{x}{n}\right]}\right)+O(1)\right\}=$$

$$=\log x\left(\Phi(x)-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{[x]}\mu(n)\log n\left[\frac{x}{n}\right]^2+O\sum_{n=1}^{[x]}\left[\frac{x}{n}\right]-\frac{1}{2}\left(\Phi(x)-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{2}\psi(x)+O\sum_{n\leqq x}1+\frac{1}{12}M(x)\log x+O\sum_{n\leqq x}\log n+$$
$$+O\sum_{n\leqq x}1+O(x)=\left(\log x-\frac{1}{2}\right)\Phi(x)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{[x]}\mu(n)\log n\cdot\left[\frac{x}{n}\right]^2+O(x\log x).$$

Considering that (cf. **(40)**)

$$-\frac{d}{ds}\frac{1}{\zeta(s)}=\frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\log n}{n^s}\qquad(\sigma>1),$$

furthermore by (cf. **(27)**)

$$\sum_{n=[x]+1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}\sim\int_x^{\infty}\frac{\log t}{t^2}dt=\frac{\log x+1}{x},$$

and

$$\sum_{n=1}^{[x]}\frac{\log n}{n}\sim\int_1^x\frac{\log t}{t}dt=\frac{1}{2}\log^2 x,$$

we have under (28)

$$(29)\qquad \sum_{n=1}^{[x]}\mu(n)\log n\left[\frac{x}{n}\right]^2=\sum_{n=1}^{[x]}\mu(n)\log n\left(\frac{x}{n}-\vartheta\right)^2=$$
$$=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\log n}{n^2}-x^2\,O\sum_{n=[x]+1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}-2x\,O\sum_{n=1}^{[x]}\frac{\log n}{n}+O\sum_{n=1}^{[x]}\log n=$$
$$=x^2\frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}+O(x\log x)+O(x\log^2 x)+O(x\log x)=\frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}x^2+O(x\log^2 x).$$

Lastly, in view of (27), (28), (29), it follows

$$\sum_{\nu=1}^{q(x)}\frac{1}{\varrho_\nu}=C\Phi(x)+O(x)+\left(\log x-\frac{1}{2}\right)\Phi(x)+O(x\log x)-$$
$$-\frac{\zeta'(2)}{2\zeta^2(2)}x^2+O(x\log^2 x)=\left(\log x+C-\frac{1}{2}\right)\Phi(x)-\frac{\zeta'(2)}{2\zeta^2(2)}x^2+O(x\log^2 x),$$

which by

$$\Phi(x)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\log x)=\frac{x^2}{2\zeta(2)}+O(x\log x)$$

(cf. **(7)**), establishes the assertion.

2. A theorem of Tauberian type.

The question arises: how far the asymptotical behaviour of $f(t)$ is determined by that of $\Sigma f(\varrho_\nu)$, i. e. which asymptotical properties of $f(t)$ can be deduced, if an asymptotic formula for $\Sigma f(\varrho_\nu)$ is given?

From this point of view (as a converse of Theorem 3) the following result has a certain interest:

T h e o r e m 5. *Suppose that $f(t)$ is non-negative and decreasing for $0<t\leqq 1$, furthermore*

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} f(\varrho_\nu) \sim Ax^\alpha,$$

α, A denoting constants with $\alpha>2, A>0$, respectively. Then we have

$$f\left(\frac{1}{t}\right) \sim A\frac{\alpha\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha-1)}t^{\alpha-1}.$$

For proving this theorem we need the well-known[9])

L e m m a 4. *Let $h(x)$ be a function which is defined for $x\geqq 1$ and let us put*

(30) $$g(x) = \sum_{n=1}^{[x]} h\left(\frac{x}{n}\right).$$

Then we have for $x\geqq 1$,

(31) $$h(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right).$$

Conversely: if (31) is valid for all $x\geqq 1$, then (30) holds also.

P r o o f o f T h e o r e m 5.

1^0 Assume that $f(t)$ satisfies our conditions and

(32) $$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} f(\varrho_\nu) \sim Ax^\alpha \qquad (A>0,\ \alpha>2).$$

Put

(33) $$V(x) = \sum_{k=1}^{[x]} f\left(\frac{k}{[x]}\right),$$

(34) $$G(x) = \sum_{n=1}^{[x]} V(n) = \sum_{n=1}^{[x]}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right);$$

then **(4)** implies

(35) $$H(x) = \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} f(\varrho_\nu) = \sum_{n=1}^{[x]} M\left(\frac{x}{n}\right)V(n) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(x)\, G\left(\frac{x}{n}\right) \sim Ax^\alpha,$$

so that, in virtue of Lemma 4,

(36) $$G(x) = \sum_{n=1}^{[x]} H\left(\frac{x}{n}\right).$$

Let any $\varepsilon>0$ be given. According to (32), a number $\xi=\xi(\varepsilon)\geqq 1$ can be found such that for all $x\geqq\xi$

$$|H(x) - Ax^\alpha| < \varepsilon x^\alpha$$

[9]) See e. g. LANDAU [1], p. 579.

and therefore for $x \geqq \xi$; $n \leqq \frac{x}{\xi}$,

$$(37) \qquad \left| H\left(\frac{x}{n}\right) - A\frac{x^\alpha}{n^\alpha} \right| < \varepsilon \left(\frac{x}{n}\right)^\alpha.$$

Furthermore, by $H(x) = O(x^\alpha)$, there is a constant $B > 0$ such that

$$(38) \qquad \left| H\left(\frac{x}{n}\right) \right| < B\left(\frac{x}{n}\right)^\alpha \text{ when } \frac{x}{n} \geqq 1.$$

Now let $x \geqq \xi$ and let us write (cf. (36))

$$(39) \quad G(x) = \sum_{n \leqq \xi} A \cdot \frac{x^\alpha}{n^\alpha} + \sum_{n \leqq \frac{x}{\xi}} \left(H\left(\frac{x}{n}\right) - A \cdot \frac{x^\alpha}{n^\alpha} \right) + \sum_{\frac{x}{\xi} < n \leqq x} \left(H\left(\frac{x}{n}\right) - A\frac{x^\alpha}{n^\alpha} \right) =$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

Plainly:

$$(40) \qquad \Sigma_1 = A \cdot x^\alpha \cdot \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n^\alpha} = Ax^\alpha(\zeta(\alpha) + o(1)) = A\zeta(\alpha) \cdot x^\alpha + o(x^\alpha).$$

On the other hand, using (37) we get

$$(41) \quad |\Sigma_2| \leqq \sum_{n \leqq \frac{x}{\xi}} \left| H\left(\frac{x}{n}\right) - A \cdot \frac{x^\alpha}{n^\alpha} \right| < \varepsilon \sum_{n \leqq \frac{x}{\xi}} \left(\frac{x}{n}\right)^\alpha < \varepsilon x^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \varepsilon \zeta(\alpha) x^\alpha.$$

Finally, according to (38),

$$(42) \quad |\Sigma_3| < \sum_{\frac{x}{\xi} < n \leqq x} \left(\left| H\left(\frac{x}{n}\right) \right| + A \cdot \frac{x^\alpha}{n^\alpha} \right) \leqq K \sum_{\frac{x}{\xi} < n \leqq x} \left(\frac{x}{n}\right)^\alpha < K \sum_{\frac{x}{\xi} < n \leqq x} \xi^\alpha \leqq K\xi^\alpha x,$$

where $K = \text{Max}\,(A, B)$.

(39), (40), (41), (42) involve

$$\left| \frac{G(x)}{x^\alpha} - A \cdot \zeta(\alpha) \right| < |o(1)| + \varepsilon\zeta(\alpha) + \frac{K\ \xi^\alpha}{x^{\alpha+1}}.$$

We see that a number $\eta = \eta(\varepsilon) > \xi$ can be found such that the right-hand sum is less than $c\varepsilon$ (where c is a constant depending only on α), provided that $x \geqq \eta$; this implies

$$(43) \qquad G(x) \sim A\zeta(\alpha) \cdot x^\alpha.$$

2° We have by hypothesis

$$(44) \qquad V(n+1) - V(n) = \sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) + f(1) \geqq 0,$$

i. e. $V(n)$ $(\leqq 0)$ monotonically increasing.

Thus the inequalities

$$\sum_{x < n \leqq (1+\delta)x} V(n) \begin{cases} \leqq V(x+\delta x)\cdot(\delta x+1), \\ \geqq V(x)\cdot(\delta x-1) \end{cases}$$

hold for every positive δ.

On the other hand, by use of (43) we obtain

$$\sum_{x < n \leqq (1+\delta)x} V(n) = G(x+\delta x) - G(x) = A\zeta(\alpha)((x+\delta x)^\alpha - x^\alpha) +$$

$$+ o((1+\delta)^\alpha x^\alpha) + o(x^\alpha) = A\zeta(\alpha)((1+\delta)^\alpha - 1)x^\alpha + o(x^\alpha),$$

and therefore

$$\left.\begin{matrix} V(x+\delta x)\cdot(\delta x+1) \geqq \\ V(x)\cdot(\delta x-1) \leqq \end{matrix}\right\} A\zeta(\alpha)((1+\delta)^\alpha - 1)x^\alpha + o(x^\alpha).$$

Hence

(45) $$V(x) \leqq A\zeta(\alpha)x^\alpha \frac{(1+\delta)^\alpha - 1 + o(1)}{\delta x - 1} = A\zeta(\alpha)x^{\alpha-1}\frac{(1+\delta)^\alpha - 1 + o(1)}{\delta + o(1)} =$$

$$= A\zeta(\alpha)x^{\alpha-1}\frac{(1+\delta)^\alpha - 1}{\delta} + o(x^{\alpha-1});$$

we deduce similarly

$$V(x+\delta x) \geqq A\zeta(\alpha)x^{\alpha-1}\frac{(1+\delta)^\alpha - 1}{\delta} + o(x^{\alpha-1})$$

and, x being replaced by $\frac{1}{1+\delta}$, it follows

(46) $$V(x) \geqq A\zeta(\alpha)x^{\alpha-1}\frac{(1+\delta)^\alpha - 1}{\delta(1+\delta)^{\alpha-1}} + o(x^{\alpha-1}).$$

According to (45), we have

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{V(x)}{x^{\alpha-1}} \leqq A\zeta(\alpha)\frac{(1+\delta)^\alpha - 1}{\delta};$$

(46) shows that

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{V(x)}{x^{\alpha-1}} \geqq A\zeta(\alpha)\frac{(1+\delta)^\alpha - 1}{\delta(1+\delta)^{\alpha-1}}.$$

Let now $\delta \to +0$, we get

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{V(x)}{x^{\alpha-1}} \leqq A\alpha\zeta(\alpha),$$

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{V(x)}{x^{\alpha-1}} \geqq A\alpha\zeta(\alpha),$$

consequently

$$\lim_{x\to\infty}\frac{V(x)}{x^{\alpha-1}}=A\,\alpha\,\zeta(\alpha),$$

i. e.

(47) $$V(x)\sim A\,\alpha\,\zeta(\alpha)\,x^{\alpha-1}.$$

3^0. In virtue of (47) (cf. (33))

(48) $$\sum_{k=1}^{[x]} f\left(\frac{k}{[x]}\right)=A\,\alpha\,\zeta(\alpha)\,x^{\alpha-1}+o(x^{\alpha-1}),$$

furthermore

$$\sum_{k=1}^{[x]+1} f\left(\frac{k}{[x]+1}\right)=A\,\alpha\,\zeta(\alpha)\,x^{\alpha-1}+o(x^{\alpha-1}),$$

and so

(49) $$\sum_{k=1}^{[x]+1} f\left(\frac{k}{[x]+1}\right)-\sum_{k=1}^{[x]} f\left(\frac{k}{[x]}\right)=o(x^{\alpha-1}).$$

Since $f(t)$ is non-negative and decreasing in the interval $0<t\leq 1$, we can write

$$0\leq\sum_{k=1}^{[x]} f\left(\frac{k}{[x]}\right)\leq\sum_{k=1}^{[x]} f\left(\frac{k}{x}\right)\leq\sum_{k=1}^{[x]+1} f\left(\frac{k}{[x]+1}\right),$$

so that (cf. (48), (49))

(50) $$\sum_{k=1}^{[x]} f\left(\frac{k}{x}\right)-\sum_{k=1}^{[x]} f\left(\frac{k}{[x]}\right)\leq\sum_{k=1}^{[x]+1} f\left(\frac{k}{[x]+1}\right)-\sum_{k=1}^{[x]} f\left(\frac{k}{[x]}\right)=o(x^{\alpha-1}),$$
$$\sum_{k=1}^{[x]} f\left(\frac{k}{x}\right)=A\,\alpha\,\zeta(\alpha)\,x^{\alpha-1}+o(x^{\alpha-1}).$$

Let $q(t)\equiv f\left(\frac{1}{t}\right)$ for $0<t\leq 1$, then

$$F(x)=\sum_{k=1}^{[x]} f\left(\frac{k}{x}\right)=\sum_{k=1}^{[x]} q\left(\frac{x}{k}\right),$$

which implies, according to Lemma 4,

(51) $$q(x)=\sum_{n=1}^{[x]}\mu(n)\,F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Next we may argue as above (1^0), by writing

$$q(x)=\sum_{n\leq x}\mu(n)\,A\,\alpha\,\zeta(\alpha)\left(\frac{x}{n}\right)^{\alpha-1}+$$
$$+\sum_{n\leq\frac{x}{\xi}}\mu(n)\left(F\left(\frac{x}{n}\right)-A\,\alpha\,\zeta(\alpha)\,\frac{x^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}}\right)+\sum_{\frac{x}{\xi}<n\leq x}\mu(n)\left(F\left(\frac{x}{n}\right)-A\,\alpha\,\zeta(\alpha)\,\frac{x^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}}\right)$$

and applying (50) We obtain finally $(\alpha > 2)$

$$q(x = A\alpha\zeta(\alpha)x^{\alpha-1}\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n^{\alpha-1}} + o(x^{\alpha-1}),$$

and therefore (cf. (40))

$$q(x) = \frac{A\alpha\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha-1)}x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}),$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{A\alpha\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha-1)}x^{\alpha-1}.$$

Bibliography.

G. H. Hardy—E. M. Wright

[1] *An introduction to the theory of numbers* (Oxford, 1938).

K. Knopp

[1] *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 3. edition (Berlin, 1931).

E. Landau

[1] *Handbuch über die Verteilung der Primzahlen*, vol. I—II (Leipzig—Berlin, 1909),

[2] *Vorlesungen über Zahlentheorie*, vol. I—II (Leipzig, 1927).

M. Mikolás

[1] Farey series and their connection with the prime number problem. I, *these Acta*, **13** (1949), pp. 93—117.

N. Tchudakov

[1] On zeros of Dirichlet's L-functions, *Recueil Math. Moscou (Mat. Sbornik)*, **1** (1936), pp. 591—602.

[2] On the function $\zeta(s)$ and $\pi(x)$, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS*, **21** (1938), pp. 421—422.

(Received September 24, 1949.)

On factorisable simple groups.

By J. SZÉP in Szeged.

A group $\mathfrak{G}$ is called factorisable by its subgroups $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ if each element of $\mathfrak{G}$ may be written in the form $G=HK$ with H in $\mathfrak{H}$, K in $\mathfrak{K}$. The present paper contains a sufficient condition for a factorisable group $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ to be simple, if the orders of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ are relatively prime. Evidently $\mathfrak{H}\mathfrak{K}=\mathfrak{K}\mathfrak{H}$.

In the proof I shall use a result of my earlier paper[1]) which I formulate now as a

Lemma. *If in the finite group $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ the orders of the factors $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ are relatively prime, then every normal subgroup $\bar{\mathfrak{G}}$ of $\mathfrak{G}$ is of the form $\bar{\mathfrak{G}}=\bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}$, where $\bar{\mathfrak{H}}$ and $\bar{\mathfrak{K}}$ are normal subgroups of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ respectively.*

I shall now prove the following

Theorem. *If in the factorisable group $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ the orders of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ are relatively prime, if further the groups $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ are maximal subgroups in $\mathfrak{G}$, then the group $\mathfrak{G}$ is simple, except the case where $\mathfrak{H}$ or $\mathfrak{K}$ is a group of prime order; in the latter case at least one of the factors is a normal subgroup.*

Proof. It suffices to show that if $\mathfrak{G}$ is not simple, then either $\mathfrak{H}$ or $\mathfrak{K}$ is not maximal.

a) If the group $\mathfrak{G}$ has a normal subgroup $\bar{\mathfrak{G}}$ and $\bar{\mathfrak{G}}\neq\mathfrak{H}$, $\bar{\mathfrak{G}}\neq\mathfrak{K}$, then by our Lemma $\bar{\mathfrak{G}}=\bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}$ where $\bar{\mathfrak{H}}\subseteqq\mathfrak{H}$, $\bar{\mathfrak{K}}\subseteqq\mathfrak{K}$. Therefore the groups $\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}=$ $=\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{K}}=\bar{\mathfrak{K}}\mathfrak{H}=\mathfrak{H}'$ and $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}\bar{\mathfrak{H}}=\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{H}}=\bar{\mathfrak{H}}\mathfrak{K}=\mathfrak{K}'$ are subgroups of $\mathfrak{G}$ and at least one of them is proper.

b) If the group $\mathfrak{K}$ is a normal subgroup of $\mathfrak{G}$ and the order of $\mathfrak{H}$ is not a prime, then $\mathfrak{H}$ has an element H such that $\{H\}\subset\mathfrak{H}$, since $\{\mathfrak{K}, H\}\subset\mathfrak{G}$. The proof is the same if $\mathfrak{H}$ is a normal subgroup of $\mathfrak{G}$.

c) If the group $\mathfrak{H}$ is a maximal, but not a normal subgroup and if its order is a prime number, then $\mathfrak{K}$ is necessarily a normal subgroup of $\mathfrak{G}$. In fact, in this case the groups $K^{-1}\mathfrak{H}K$ are different, whenever K runs over all elements of $\mathfrak{K}$ and have only the unit element in common. Thus a known theorem of FROBENIUS[2]) implies the statement.

(Received April 1, 1950.)

---

[1]) J. SZÉP, On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, *these Acta,* **12 A** (1950), pp. 57—61.

[2]) See e. g. A. SPEISER, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung,* 3 ed. (Berlin, 1937), Theorem 180.

Conservative series to series transformation matrices.

By P. VERMES in London.

1. Introduction.

In a recent paper [9][1]) infinite matrices representing *regular* series to series summation methods have been discussed. The present paper is mainly concerned with *conservative* series to series summation matrices, a more general class of matrices. Regular matrices form a subclass of these matrices, and the results obtained in this paper are therefore valid also for this subclass.

The standard method of 'summing' a series of complex terms $u_0+u_1+\cdots$ with partial sums $s_k=u_0+u_1+\cdots+u_k$ is the *transformation of the sequence* s_k *by a matrix of complex elements* $P\equiv(p_{nk})$ *into a convergent sequence* $\sigma_n=\Sigma_k p_{nk}s_k$. The matrix is called *conservative* if the convergence of Σu_k implies that σ_n exists for $n\geqq 0$ and that σ_n tends to a finite limit (which may be different from Σu_k). A conservative sequence to sequence summation matrix is called a *K-matrix* [4, p. 388].

Another method is the *transformation of the series* Σu_k *into a convergent sequence* $\sigma_n=\Sigma_k g_{nk}u_k$ by a matrix $G\equiv(g_{nk})$. A conservative series to sequence summation matrix is called a *β-matrix* [4, 397]. *Sufficient and necessary conditions for G to be a β-matrix are* [4, 394—396]:

(1.1) $\qquad \Sigma_k|g_{nk}-g_{n,k+1}|\leqq M(G)$ for $n=0,1,2,\ldots,$

(1.2) $\qquad g_{nk}$ tends to a finite limit β_k as $n\to\infty$ for $k=0,1,2,\ldots$

We shall employ (1.1) and (1.2) as the *definition* of a β-matrix.

A third method is the *transformation of the series* Σu_k by the matrix $B\equiv(b_{nk})$ *into a convergent series* Σv_n, so that $v_n=\Sigma_k b_{nk}u_k$. If the matrix is *conservative*, i. e. if the convergence of Σu_k implies the existence of v_n for $n=0,1,2,\ldots$ and the convergence of Σv_n (where the two sums may differ), we shall call the matrix B a *δ-matrix*.

The following results will be proved in section 2: A necessary and sufficient condition for a matrix to be a δ-matrix is that the corresponding

[1]) Numbers in square brackets indicate references given at the end of this paper.

series to sequence method is conservative; the product of a β-matrix and a δ-matrix is a β-matrix; the sum and product of δ-matrices, addition and multiplication being associative; a norm can be defined for δ-matrices under which they form a non-commutative complex Banach algebra with unit element [5, 1.14, p. 12]

In section 3 we discuss the subclass of δ-matrices A which satisfy the condition $a_n = \lim_{k\to\infty} a_{nk} = 0$ for every n, this being necessary for a δ-matrix to be stronger than convergence. Denoting these matrices *δ_0-matrices*, we show that they form a subalgebra of the algebra of δ-matrices under the same norm. The sequence to sequence summation matrix corresponding to a δ_0-matrix is a K-matrix, and the correspondence is an isomorphism. The norm of K-matrices can therefore be introduced to δ_0-matrices. Considering the class $(\mathfrak{B})$ of series with bounded partial sums, if A and B are δ_0-matrices, they apply to every series of $(\mathfrak{B})$ and transform it into a series of $(\mathfrak{B})$, and $A(B(u_k)) = (AB)(u_k)$. A δ_0-matrix and the corresponding K-matrix are equivalent for series of $(\mathfrak{B})$, but examples are given of series of unbounded partial sums and of δ_0-matrices where the two methods are not equivalent.

In section 4 the following δ_0-matrices are studied:

$$\text{(i)}\quad a_{nk} = \binom{k}{n} t^{k-n} t'^{n},$$

$$\text{(ii)}\quad b_{nk} = \binom{n}{k} (1-t) t^{n-k} t'^{k},$$

$$\text{(iii)}\quad c_{nk} = \binom{n+k}{k} (1-t') t^{k} t'^{n}.$$

These matrices are δ_0-matrices when $|t| + |t'| < 1$, they sum the Taylor series $\Sigma u_k z^k$ of the function $f(z)$ in some partial star-domains to the value $f(\alpha z)$, α depending on the matrix. They also display a modified left- or right-translativity. The corresponding series to sequence and sequence to sequence matrices cannot be expressed in simple terms, so that the introduction of δ-matrices was essential. These matrices can be regarded as modified methods of Euler, Taylor and Laurent series continuation discussed in recent papers [3, 6, 9 and 10].

In section 5 special δ_0-matrices are constructed which are efficient for Taylor series at an infinity of isolated points outside its circle of convergence.

2. δ-matrices.

We first consider β-matrices G. The following properties follow from the definition and (1.1), (1.2):

(2.1) *If $\Sigma u_k = s$, then the G-sum of Σu_k is given by* $\beta_0 s + \Sigma(\beta_k - \beta_{k+1})(s_k - s)$.

This is proved in [4, 394—395].

(2.2) *The row limit* $\lim_{k\to\infty} g_{nk} = g_n$ *exists for every* n.

For $\Sigma_k(g_{nk}-g_{n,k+1})=g_{n0}-\lim_{k\to\infty} g_{nk}$ exists by (1. 1).

(2. 3) $\Sigma_k|\beta_k-\beta_{k+1}|\leq M(G)$.

For $\sum_{k=0}^{r}|\beta_k-\beta_{k+1}|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{r}|g_{nk}-g_{n,k+1}|\leq M(G)$, for every r.

(2. 4) *$\lim\beta_k=\beta$ exists.*

This follows from (2. 3) as (2. 2) followed from (1. 1).

(2. 5) *The elements of G are bounded.*

For $|g_{nk}|=\left|g_{n0}-\sum_{i=0}^{k-1}(g_{ni}-g_{n,i+1})\right|\leq K(G)+M(G$, where

$$K(G)=\sup_n|g_{n0}|.$$

The column limits β_k, their limit β, and the row limits g_n will be called *the characteristic numbers* of G.

We now consider the summation by series to series transformation of any series $u_0+u_1+\ldots$. Summability by the matrix B means that

(2. 6) $\qquad v_n=\Sigma_k b_{nk}u_k$ exists for $n=0,1,\ldots$, and $\Sigma v_n=s$.

Writing $v_0+v_1+\cdots+v_n=\sigma_n$ and $b_{0k}+b_{1k}+\cdots+b_{nk}=g_{nk}$, we have

(2. 7) $$\sigma_n=\Sigma_k g_{nk}u_k,$$

the existence being implied by (2. 6). Conversely, writing $g_{nk}-g_{n-1,k}=b_{nk}$ $(n=0,1,\ldots)$ and $g_{-1,k}=0$, we find that the existence of (2. 7) implies the existence of (2. 6). Hence we obtain

Lemma 2. 1. *If the matrices B and G are connected by the relation $g_{nk}=b_{0k}+b_{1k}+\cdots+b_{nk}$, then the series to series transformation by B and the series to sequence transformation by G are equivalent.*

An immediate consequence of the Lemma is:

Theorem 2. 1. *The matrix $B\equiv(b_{nk})$ is a δ-matrix if and only if G, given by $g_{nk}=b_{0k}+b_{1k}+\cdots+b_{nk}$, is a β-matrix.*

We shall call matrices, when they are related as in Theorem 2 1, *corresponding matrices.*

The following properties of β-matrices are easily obtained:

(2. 8) $\Sigma_k|b_{nk}-b_{n,k+1}|\leq 2M(G)$;

(2. 9) $\Sigma_n b_{nk}=\beta_k$ for every k (β_k is defined in (1. 2));

(2. 10) the row limit $\lim_{k\to\infty} b_{nk}=b_n$ exists for every n, and, writing $g_{-1}=0$, $b_n=g_n-g_{n-1}$ (g_n is defined in (2. 2));

(2. 11) $|b_{nk}|\leq 2K(G)+2M(G)$.

It follows from (2. 9) that $b_{nk}\to 0$ as $n\to\infty$ for every k, so that every

δ-matrix is a β-matrix with zero column limits. But not every β-matrix satisfying (2.8) and (2.9) is a δ-matrix, as shown by example (2.10) of [9].

The unit matrix I and the zero matrix O are δ-matrices.

Theorem 2. II. *The product GC of a β-matrix G and a δ-matrix C exists and is a β-matrix.*

Proof By (2.9), $\Sigma_j c_{jk}$ is convergent, and since G is a β-matrix, $(GC)_{nk} = \Sigma_j g_{nj} c_{jk}$ exists for every n and k, hence GC exists. Denoting the product matrix by F, we have

$$\lim_{n\to\infty} f_{nk} = \lim_{n\to\infty} \Sigma_j g_{nj} c_{jk} = G\text{-sum of } \Sigma_j c_{jk} \text{ exists for every } k,$$

so that F satisfies condition (1.2). If H is the β-matrix corresponding to C, with column limits γ_k, we have

$$f_{nk} = \Sigma_j g_{nj}(h_{jk} - h_{j-1,k}) = \Sigma_j (g_{nj} - g_{n,j+1}) h_{jk} + \lim_{j\to\infty} g_{nj} h_{jk}; \tag{2.12}$$

hence

$$f_{nk} - f_{n,k+1} = \Sigma_j (g_{nj} - g_{n,j+1})(h_{jk} - h_{j,k+1}) + g_n(\gamma_k - \gamma_{k+1}).$$

Using (1.1), (2.5) and (2.3) we obtain

$$\Sigma_k |f_{nk} - f_{n,k+1}| \le M(G)M(H) + \{K(G) + M(G)\} M(H), \tag{2.13}$$

so that F satisfies condition (1.1). This concludes the proof.

Corollary 2. II. 1: *The row limits of the product matrix are:*

$$f_n = g_n \gamma + \Sigma_j (g_{nj} - g_{n,j+1}) h_j.$$

This follows from (2.12), taking the limit of the right-hand side when $k \to \infty$. The series being dominated by $\sup|h_{jk}| \cdot \Sigma_j |g_{nj} - g_{n,j+1}|$, the order of summation and limit can be interchanged.

Corollary 2. II. 2. *The column limits of the product matrix are*

$$\varphi_k = \Sigma_j \beta_j c_{jk}.$$

For $$\varphi_k = \lim_{n\to\infty} \Sigma_j g_{nj} c_{jk} = G\text{-sum-}\Sigma_j c_{jk} = \beta_0 \gamma_k + \Sigma_j (\beta_j - \beta_{j+1})(h_{jk} - \gamma_k) =$$
$$= \beta_0 \gamma_k + \Sigma_j (h_{jk} - h_{j-1,k}) \beta_j - \lim_{j\to\infty} \beta_j h_{jk} - \beta_0 \gamma_k + \lim_{j\to\infty} \beta_j \gamma_k.$$

Corollary 2. II. 3. $\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \beta\gamma + \Sigma_j (\beta_j - \beta_{j+1}) h_j$.

For the previous corollary gives

$$\varphi_k = \Sigma_j (h_{jk} - h_{j-1,k}) \beta_j = \Sigma_j (\beta_j - \beta_{j+1}) h_{jk} + \lim_{j\to\infty} \beta_j h_{jk},$$

the last sum being dominated by $\sup|h_{jk}| \cdot \Sigma_j |\beta_j - \beta_{j-1}|$. Letting $k \to \infty$, we obtain the result.

Corollary 2. II. 4. *The elements of the product matrix are bounded, thus*

$$|f_{nk}| \le \{M(H) + K(H)\}\{2M(G) + K(G)\}.$$

This follows from (2.12), applying (1.1) and (2.5).

Theorem 2. III. *A sufficient and necessary condition for the matrix product GC to exist and be a β-matrix for every β-matrix G is that C should be a δ-matrix.*

The proof is the same as of [9, 2. V]. This result is parallel to a previous result on the product of a T-matrix and a γ-matrix [7], which can be extended to the product of a K-matrix and a β-matrix in a similar way as in theorem 2. II of the present paper.

Theorem 2. IV. *The product of two δ-matrices exists and is a δ-matrix.*

Proof. In the notation of theorem 2. II $F=GC$ is a β-matrix, and the corresponding δ-matrix A is given by

$$a_{nk}=f_{nk}-f_{n-1,k}=\Sigma_j(g_{nj}-g_{n-1,j})\,c_{jk}=\Sigma_j\,b_{nj}c_{jk}, \tag{2. 14}$$

which is the product of the δ-matrices B and C.

Corollary 2. IV. 1. *The row limits of the product matrix are*

$$a_n=b_n\gamma+\Sigma_j(b_{nj}-b_{n,j+1})\,h_j.$$

This follows from corollary 2. II. 1.

Corollary 2. IV. 2. *The elements of the product matrix are bounded, thus*

$$|a_{nk}|\leqq\{2M(H)+2K(H)\}\,\{2M(G)+K(G)\}.$$

This follows from corollary 2. II. IV.

Theorem 2. V. *The product of δ-matrices is associative.*

Proof. Let A, B, C be δ-matrices, F, G, H the corresponding β matrices respectively, $AB=D$, $GC=R$. We consider the double series

$$\Sigma_i\Sigma_j(a_{ni}-a_{n,i+1})\,(g_{ij}-g_{i,j+1})\,h_{jk} \tag{2. 15}$$

which converges absolutely. Summing as indicated, we obtain

$$\begin{aligned}
&\Sigma_i(a_{ni}-a_{n,i+1})\,\{\Sigma_j(h_{jk}-h_{j-1,k})\,g_{ij}-\lim_{j\to\infty} g_{ij}h_{jk}\}\\
&=\Sigma_i(a_{ni}-a_{n,i+1})\,\{\Sigma_j g_{ij}c_{jk}-g_i\gamma_k\}=\Sigma_i(a_{ni}-a_{n,i+1})\,(r_{ik}-g_i\gamma_k)\\
&=\Sigma_i(r_{ik}-r_{i-1,k})\,a_{ni}-\lim_{i\to\infty} a_{ni}r_{ik}-\gamma_k\Sigma_i(a_{ni}-a_{n,i+1})\,g_i\\
&=\Sigma_i\,a_{ni}(BC)_{ik}-a_n\varrho_k-\gamma_k\,\Sigma_i(a_{ni}-a_{n,i+1})\,g_i\\
&=[A(BC)]_{nk}-a_n\varrho_k-\gamma_k(d_n-a_n\beta) \quad \text{by corollary 2. IV. 1.}
\end{aligned}$$

Reversing the order of summation in (2. 15), we obtain

$$\begin{aligned}
&\Sigma_j h_{jk}\{\Sigma_i(g_{ij}-g_{i-1,j}-g_{i,j+1}+g_{i-1,j+1})\,a_{ni}-\lim_{i\to\infty} a_{ni}(g_{ij}-g_{i,j+1})\}\\
&=\Sigma_j h_{jk}\{\Sigma_i a_{ni}(b_{ij}-b_{i,j+1})-a_n(\beta_j-\beta_{j+1})\}\\
&=\Sigma_j h_{jk}(d_{nj}-d_{n,j+1})-a_n\,\Sigma_j(\beta_j-\beta_{j+1})\,h_{jk}\\
&=\Sigma_j(h_{jk}-h_{j-1,k})\,d_{nj}-\lim_{j\to\infty} d_{nj}h_{jk}-a_n\,\Sigma_j\beta_j c_{jk}+a_n\lim_{j\to\infty}\beta_j h_{jk}\\
&=\Sigma_j d_{nj}c_{jk}-d_n\gamma_k-a_n\varrho_k+a_n\gamma_k=[(AB)\,C]_{nk}-a_n\varrho_k-\gamma_k(d_n-a_n\beta),
\end{aligned}$$

showing that $[A(BC)]=[(AB)C]$.

Corollary 2. V. 1. *The product of a β-matrix on the left followed by δ-matrices is associative.*

This follows from the fact that if (a_{nk}) is a δ-matrix, so is $(a_{n-1,k})$, i. e. if a zero row is added to A. Hence all the double sums $\Sigma_i \Sigma_j a_{hi} b_{ij} c_{jk}$ for $h = 0, 1, \ldots, n$ can be inverted as well as their sum $\Sigma_i \Sigma_j f_{ni} b_{ij} c_{jk}$.

Theorem 2. VI. *Every finite linear combination of δ-matrices is a δ-matrix.*

Proof. If A and B are δ-matrices, F, G the corresponding β-matrices, x, y complex numbers, $xF + yG = H$, then $|h_{nk} - h_{n,k+1}| \leq |x(f_{nk} - f_{n,k+1})| + |y(g_{nk} - g_{n,k+1})|$, so that

$$\Sigma_k |h_{nk} - h_{n,k+1}| \leq |x| M(F) + |y| M(G), \tag{2.16}$$

and $\lim h_{nk}$ exists. Thus H is a β-matrix and $C = xA + yB$ a δ-matrix.

It follows from the last three theorems that δ-matrices form a non-commutative ring, with the unit matrix as unit element and the zero matrix as zero element. The ring contains *zero-divisors,* for example $AB = 0$ when $a_{0k} = 1$ for all k, all the other elements of A being zero, $b_{0k} = -1$, $b_{1k} = 1$, all the other elements of B being zero.

It is possible to define a *norm* for δ-matrices in the following way: If B is a δ-matrix, G the corresponding β-matrix, $N(G) = \sup_n \Sigma_k |g_{nk} - g_{n,k+1}|$, $K(G) = \sup_n g_{n0}$ (as in (2.5)), the norm of B is defined as the number

$$\|B\| = 2\{N(G) + K(G)\}. \tag{2.17}$$

The following properties of the norm are easily verified:

(2.18) (i) $\|B\| \geq 0$ and $\|B\| = 0$ if and only if B is the zero matrix.
(ii) $\|xB\| = |x| \|B\|$, x being a complex number.
(iii) $\|B + C\| \leq \|B\| + \|C\|$.
(iv) $\|BC\| \leq \|B\| \cdot \|C\|$.
(v) $|b_{nk}| \leq \|B\|$.

Here (i), (ii) follow from the definition of the norm, (iii) from (2.16), (v) from (2.11). To prove (iv), we use the notation in the proof of theorem 2. V. It follows from (2.13) that $N(F) \leq N(H)\{2N(G) + K(G)\}$. Also $f_{n0} = \Sigma_j g_{nj} c_{j0} = \Sigma_j (g_{nj} - g_{n,j+1}) h_{j0} + \lim_{j \to \infty} g_{nj} h_{j0}$, hence $K(F) \leq K(H)\{2N(G) + K(G)\}$, and (iv) follows by adding $N(F)$ and $K(F)$.

Theorem 2. VII. *With the given norm, δ-matrices form a non-commutative complex Banach algebra with unit element.* [5, 1.14, p. 2; 1.11, p. 10].

Proof. It is sufficient to prove that the space of δ-matrices is *complete* in the topology induced by the metric $d(B, C) = \|B - C\|$, i. e. that every Cauchy sequence $A(t)$ $(t = 1, 2, \ldots)$ of δ-matrices converges to a limit matrix A which is a δ-matrix. We first prove

Lemma 2. VII. 1. *If $\Sigma_t \|A(t)\|$ converges, then $\Sigma_t A(t) = A$ exists and is a δ-matrix.*

Proof. Let $F(t)$ be the β-matrix corresponding to $A(t)$. The sums $\Sigma_k |\Sigma_t \{f(t)_{nk} - f(t)_{n,k+1}\}| \leq \Sigma_t \Sigma_k |f(t)_{nk} - f(t)_{n,k+1}|$, $\Sigma_t f(t)_{nk}$ and $\lim_{n\to\infty} \Sigma_t f(t)_{nk} = \Sigma_t \lim_{n\to\infty} f(t)_{nk}$ are all dominated by the series $\Sigma_t \|A(t)\|$, hence the matrix $F = \Sigma_t F(t)$ exists and is a β-matrix, and $A = \Sigma_t A(t)$ is the corresponding δ-matrix.

Corollary to the lemma. *The characteristic numbers of the sum matrix are the sums of the corresponding characteristic numbers.*

This follows from the uniform convergence of all the series concerned.

Lemma 2. VII. 2. *The space of δ-matrices is complete under the given norm.*

Proof. Assuming that $A(t)$ is a Cauchy sequence, so that for $t, t' > T(\varepsilon)$, $\|A(t) - A(t')\| < \varepsilon$, we find that $|a(t)_{nk} - a(t')_{nk}| < \varepsilon$, hence $a(t)_{nk} \to a_{nk}$ as $t \to \infty$. Thus $A(t)$ tends in each element to a matrix $A = (a_{nk})$. Determining a sequence of positive integers $t_j > t_{j-1}$ such that $\|A(t_j) - A(t_{j-1})\| < 2^{-j}$, so that the series $\Sigma_j \|A(t_j) - A(t_{j-1})\|$ converges, we find that, by the previous lemma, the series $A(t_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \{A(t_j) - A(t_{j-1})\}$ converges, and its sum $\lim_{j\to\infty} A(t_j) = \lim_{t\to\infty} A(t)$ is a δ matrix. Since, for $t > T(\varepsilon)$, $\|A(t) - A\| \leq \varepsilon$, the convergence is strong. This proves the lemma, and therefore the theorem.

Corollary 2. VII. 1. *The norm of the limit matrix is the limit of the norms*

For $\big|\|A(t)\| - \|A(t')\|\big| \leq \|A(t) - A(t')\| < \varepsilon$, and hence $\big|\|A(t)\| - \|A\|\big| \leq \leq \|A(t) - A\| \leq \varepsilon$.

Corollary 2. VII. 2. *The characteristic numbers of the limit matrix are the limits of the corresponding characteristic numbers.*

This follows from the corollary to lemma 2. VII. 1.

It is known that in a Banach algebra with unit element the neighbourhood of the unit element consists of regular elements. If A is a δ-matrix such that $\|A - I\| < 1$, the reciprocal A^{-1} is the power series $I + (I - A) + (I - A)^2 + \ldots$, [5, Theorem 5.2.1, p. 92]. More generally if $\|A - \lambda I\| < |\lambda|$, A has a two-sided δ-matrix reciprocal, given by $\lambda^{-1}\{I + (I - A/\lambda) + (I - A/\lambda)^2 + \ldots\}$.

If all the column-sums β_k of a δ matrix B are equal to unity, the matrix is a regular series to series summation matrix, called an α-matrix [**9**, 541]. The α-matrices form a subclass of the algebra of δ-matrices which is not an algebra since the sum of two α-matrices is not an α-matrix. But if A is an α-matrix and $\|A - I\| < 1$, then A^{-1} obtained as the sum of a convergent power series is an α-matrix, since all the column-sums of the matrix $I - A$ are zero, and therefore, by Corollary 2. II. 2, so are the column-sums of $(I - A)^j$.

The same can be proved when $\|A-\lambda I\|<|\lambda|$, when the column-sums of the reciprocal are given by $\lambda^{-1}\Sigma(1-1/\lambda)^i$, giving unity.

A column vector $u_0, u_1, \ldots$ can be regarded as an infinite matrix with zero columns except the first column. It is easy to verify that such a matrix U is a δ-matrix if and only if Σu_k is convergent. In this sense, then *convergent series are elements of the algebra.* This gives the following theorem:

Theorem 2. VIII. *If the α-matrix A has a right reciprocal A^{-1} which is a δ-matrix, then A^{-1} is an α-matrix.*

Proof. If U is a column vector such that Σu_k is convergent, $V=A^{-1}U$ is a column vector such that Σv_n is convergent, since A^{-1} is a δ-matrix. Hence $AV=AA^{-1}U=U$, and A being an α-matrix, it follows that $\Sigma v_n=\Sigma u_k$. Thus A^{-1} sums every convergent series to its sum, and is therefore an α-matrix.

3. δ_0-matrices.

The class of δ-matrices so far considered is the class of matrices which transform convergent series into convergent series. Their use for generalized summation of series however requires more: they should transform at least one divergent series into a convergent series. In other words: they should be *'stronger than convergence'*. It is possible, at this stage, to exclude a wide class of trivial δ-matrices from further investigations by the following result:

Theorem 3. I. *A necessary condition that a δ-matrix $B\equiv(b_{nk})$ should be stronger than convergence is that*

$$(3.1) \qquad b_n=\lim_{k\to\infty} b_{nk}=0 \quad \textit{for} \quad n=0,1,2,\ldots.$$

The proof is based on the following lemma:

Lemma 3. I. *If $\Sigma_k|b_k-b_{k+1}|=M<\infty$, and* $\lim b_k\neq 0$, *then the convergence of $\Sigma b_k u_k$ implies the convergence of Σu_k.*

Proof of the lemma: By hypothesis there exist positive numbers r and R such that for $k\geq r$, $|b_k|\geq R$. Hence $\sum_r^\infty |1/b_k-1/b_{k+1}|\leq M/R^2$, and by a lemma due to ABEL and HADAMARD [4, 394], $\Sigma c_k/b_k$ converges whenever Σc_k converges. The lemma is proved by taking $c_k=b_k u_k$.

The theorem then follows from (2. 8) and (2. 10).

Corollary. *A necessary condition that a β-matrix $G\equiv(g_{nk})$ be stronger than convergence is that*

$$(3.2) \qquad g_n=\lim_{k\to\infty} g_{nk}=0 \quad \textit{for} \quad n=0,1,2,\ldots.$$

That the condition (3. 1) is not sufficient, is shown by the unit matrix.

We shall call a β-matrix satisfying (3. 2) a *β_0-matrix,* and a δ-matrix satisfying (3. 1) a *δ_0-matrix.* Obviously conditions (3. 1) and (3. 2) are equivalent: *If B is a δ_0-matrix, the corresponding matrix G is a β_0-matrix, and conversely.*

Theorem 3. II. *Under the norm (2. 17) δ_0-matrices form a non-commutative complex Banach algebra with unit element*

Proof. The sum of two δ_0-matrices is obviously a δ_0-matrix. That the product is a δ_0-matrix follows from corollary 2. IV. 1 since $b_n = 0$, $h_j = 0$ implies $a_n = 0$. The unit matrix and the zero matrix are δ_0-matrices. Theorem 2. VII, the two lemmas and the corollaries apply to δ_0-matrices, and show in particalar that the space is complete. This concludes the proof.

The column vectors U, regarded as infinite matrices, are δ_0-matrices if and only if Σu_k is convergent. In this sense, convergent series are elements of the algebra of δ_0-matrices.

A significant property of δ_0-matrices is revealed by investigating the corresponding sequence to sequence summation matrices. Such a matrix P is conservative, and called a K matrix, and is defined by [4, 385]

(3. 3) $\quad \Sigma_k |p_{nk}| \leq M(P)$ for $n = 0, 1, 2, \ldots,$

(3. 4) $\quad p_{nk}$ tends to a finite limit π_k as $n \to \infty$ for $k = 0, 1, 2, \ldots,$

(3. 5) $\quad \Sigma_k p_{nk} = p_n$ tends to a finite limit p as $n \to \infty$.

The corresponding series to sequence summation matrix G is given by

(3. 6) $$g_{nk} = p_{nk} + p_{n,k+1} + \cdots.$$

It is known that if P is a K-matrix, G is a β-matrix, and in fact it is a β_0-matrix. Conversely, if G is given, P is given by

(3. 7) $$p_{nk} = g_{nk} - g_{n,k+1}.$$

If G is a β-matrix, P given by (3. 7) is not necessarily a K-matrix [4, 399]. The correspondence between G and P, defined by (3. 7), is not one-to-one, for P is unaltered when g_{nk} is replaced by $g_{nk} + g'_n$, where g'_n is an arbitrary sequence. Starting with G, and using (3. 7) and (3. 6) in turn, the correspondence $G \to P \to G'$ gives

$$g'_{nk} = p_{nk} + p_{n,k+1} + \cdots = g_{nk} - g_{n,k+1} + g_{n,k+1} - g_{n,k+2} + \cdots = g_{nk} - g_n$$

and $G = G'$ if and only if $g_n = 0$. Using the one-one correspondence between δ_0- and β_0-matrices, we obtain

Theorem 3. III. *There is a one-to-one correspondence between δ_0 matrices B, and K-matrices P, expressed by either of the equivalent formulae*

(3. 8) $$p_{nk} = \sum_{j=0}^{n} (b_{jk} - b_{j,k+1}),$$

(3. 9) $$b_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} (p_{nj} - p_{n-1,j}) \quad \text{with } p_{-1,j} = 0.$$

Theorem 3. IV. *The correspondence in theorem 3. III is an isomorphism.*

Proof. If B, C are δ_0-matrices, G, H the corresponding β_0-matrices and P, Q the corresponding K-matrices, it follows from (3. 8) and (3. 9) that $B+C$ corresponds to $P+Q$ Again

$$(PH)_{nk}=\Sigma_j p_{nj}h_{jk}=\Sigma_j(g_{nj}-g_{n,j+1})\,h_{jk}=\Sigma_j g_{nj}(h_{jk}-h_{j-1,k}),$$

since $g_{nj}h_{jk}\to 0$ as $j\to\infty$. Thus $(PH)_{nk}=(GC)_{nk}$, and $PH=GC$ is a β_0-matrix, PQ is the corresponding K-matrix, and BC the corresponding δ_0-matrix. Thus PQ corresponds to BC. This concludes the proof of the theorem.

We can now introduce a new norm for δ_0-matrices. It is known that K-matrices form a Banach algebra under the norm

$$\|P\|=\sup_n \Sigma_k|p_{nk}|, \tag{3. 10}$$

and, using the last theorem, we can define the norm of a δ_0-matrix B as the norm of the corresponding K-matrix P, i. e.

$$\|B\|_K=\|P\|. \tag{3. 11}$$

The unit matrix is a K-matrix and the corresponding δ_0-matrix is the same matrix. In the same way, the zero matrix corresponds to itself. We have therefore $\|I\|_K=\|I\|=1$, whereas the δ-norm of I as defined in (2. 17) has the value 4. The norm (3. 11) for δ_0-matrices has the properties (2. 18) including the property (v) (which is not generally required in abstract algebras, but is essential for infinite matrices to establish completeness of the space).

We consider now series Σu_k with partial sums s_k, and use the following notations. We denote a sequence to sequence transformation by $P, Q, \ldots$:

$$\sigma_n=P(s_k)=\Sigma_k p_{nk}s_k\,;$$

a series to sequence transformation by $G, H, \ldots$:

$$\sigma_n=G(\Sigma u_k)=\Sigma_k g_{nk}u_k\,;$$

a series to series transformation by $B, C, \ldots$:

$$\Sigma v_n=B(\Sigma u_k)=\Sigma_n(\Sigma_k b_{nk}u_k).$$

We denote the class of series Σu_k, such that the *partial sums* s_k *are bounded*, by $(\mathfrak{B})$. It is known that a K-matrix P transforms every bounded sequence s_k into a bounded sequence σ_n. If G is the corresponding β_0-matrix, we have

$$P(s_k)=G(\Sigma u_k) \quad [4,\ 398-399]. \tag{3. 12}$$

Hence we obtain

Theorem 3. V. *Every δ_0-matrix B transforms every series Σu_k of $(\mathfrak{B})$ into a series Σv_n of $(\mathfrak{B})$.*

We also have

Theorem 3. VI. *If B and C are δ_0-matrices, and the series Σu_k belongs to $(\mathfrak{B})$ then $B[C(\Sigma u_k)]=(BC)(\Sigma u_k)$.*

Proof. If G, H are the corresponding β_0-matrices, P, Q the corresponding K-matrices, s_k the partial sums of Σu_k, we have $P[Q(s_k)]=(PQ)(s_k)$. Now

$Q(s_k)=H(\Sigma u_k)=\sigma_n$, and if $\sigma_n-\sigma_{n-1}=v_n$, $P[Q(s_k)]=P(\sigma_n)=B(\Sigma v_n)=$ $=B[C(\Sigma u_n)]$. Again, $(PQ)(s_k)=(BC)(\Sigma u_k)$. This proves the theorem.

It follows from the identity (3. 12) that the sequence to sequence and series to series summation methods are identical for all series of the class $(\mathfrak{B})$, That this is not the case for series with unbounded partial sums, is shown by the following examples:

(3. 13) $$u_k=(k+1)^2,\ b_{nk}=(-1)^k/(n+1)(n+2)(k+1)^3.$$

Here $g_{nk}=(-1)^k(n+1)/(n+2)(k+1)^3$ so that $\Sigma_k|g_{nk}-g_{n,k+1}|<2\Sigma(k+1)^{-3}$, and g_{nk} tends to a limit as $n\to\infty$, and to zero as $k\to\infty$. Hence B is a δ_0-matrix, and

$$\Sigma v_n=\Sigma_n\Sigma_k b_{nk}u_k=\Sigma_n\Sigma_k(-1)^k/(k+1)(n+1)(n+2)=\log 2,$$

so that the B-sum exists. Again $p_{nk}=g_{nk}-g_{n,k+1}=O(k^{-3})$, $s_k=O(k^3)$, hence $\Sigma_k p_{nk}s_k$ diverges, so that the P-sum does not exist.

(3. 14) $$u_k=(-1)^k(2k+1),\ b_{nk}=1/(n+1)(n+2)(k+1).$$

Here $\Sigma_k b_{nk}u_k$ diverges, so that the B-sum does not exist. Again

$$s_k=(-1)^k(k+1),\ g_{nk}=(n+1)/(n+2)(k+1),$$
$$p_{nk}=(n+1)/(n+2)(k+1)(k+2)$$

and $\Sigma_k p_{nk}s_k=\Sigma_k(-1)^k(n+1)/(k+2)(n+2)\to 1-\log 2$ as $n\to\infty$. Hence the P-sum exists.

4. Some examples of δ_0-matrices with applications to Taylor series.

When a δ_0-matrix B is applied to the Taylor series $\Sigma u_k z^k$ representing the function $f(z)$ in its circle on convergence, it cannot be expected that the generalized sum $S(z)$ shall be the 'right' value $f(z)$. The relation between the two values *for convergent series* with partial sums $s_k(z)\to f(z)$ can be expressed, using (2. 1), as $S(z)=\beta_0 f(z)+\Sigma(\beta_k-\beta_{k+1})\{s_k(z)-f(z)\}$, and the generalized sum is the analytic continuation of $S(z)$ in an open connected domain of summability containing the circle of convergence.

In this section we consider matrices for which the relation $f(z)\to S(z)$ is the simplest possible: $S(z)\equiv f(\alpha z)$, α being a complex number depending on the matrix, but independent of the series to which it is applied. Such matrices turn up as a natural generalization of matrices discussed by the author in a previous paper [9, sections 3, 4, 5]. The corresponding sequence to sequence summation matrices have recently also been discussed by other writers [3 and 6]. We restrict our attention to series to series methods, the corresponding sequence to sequence matrices having too complicated expressions to be of any use.

As in the case of regular summation methods, the domain of summability for general Taylor series can be defined, if the domain of summability $D(B)$ for the series Σz^k is known. For conservative methods we require a modified restatement of a theorem due to E. Borel [1, 197—200], which we give here without proof:

Theorem 4. I. *Let $f(z)$ be represented by the series $\Sigma u_k z^k$ in its principal star-domain. If $\varphi_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} z^k \to \varphi(z)$ as $n \to \infty$ uniformly in every closed region of a star-domain $D(B)$, then the B-sum of $\Sigma u_k z^k = \Sigma_n \Sigma_k b_{nk} u_k z^k$ exists in the partial star-domain corresponding to $D(B)$, and its value is $\int_\Gamma w^{-1} f(w)\, \varphi(z/w)\, dw$, Γ being a small circle about the origin, inside and on which $f(w)$ is regular.* (Star-domains are defined in [9, 3. 23, p. 551]).

In the particular case when $\varphi(z) \equiv 1/(1-\alpha z)$, the B-sum is

$$\int_\Gamma f(w)/(w-\alpha z)\, dw = f(\alpha z).$$

A natural generalization of the Taylor series continuation method [9, section 3; 3 and 6 the method $T(\alpha)$], is the matrix $A(t, t')$ depending on the two complex parameters t and t', given by

$$a_{nk} = a(t, t')_{nk} = \binom{k}{n} t^{k-n} t'^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4. 1}$$

Applying $A(t, t')$ to the series Σz^k, we obtain

$$v_n(z) \equiv \Sigma_k a_{nk} z^k = (t'/t)^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} (tz)^k,$$

$$\Sigma v_n(z) = (1-tz)^{-1} \Sigma (t'z)^n/(1-tz)^n = 1/(1-\alpha z) \quad (\alpha = t + t');$$

provided that

$$\text{(i)} \quad \left|\frac{1}{z}\right| > |t|, \quad \text{(ii)} \quad \left|\frac{1}{z} - t\right| > |t'|, \tag{4. 2}$$

which defines the domain $D(A)$.

$D(A)$ contains the unit circle in its inside, hence

$$A(t, t') \text{ is a } \delta_0\text{-matrix when } |t| + |t'| < 1, \tag{4. 3}$$

and we shall consider this case only.

Assuming (4. 3), the following types of summability domains may occur, (i) being always the inside of the circle with centre 0, radius $1/|t|$:

(a) $|t'| \geq |2t|$; $D(A)$ is the inside of the circle (ii) which is inside the circle (i);

(b) $|2t| > |t'| > |t|$, the circles (i) and (ii) intersect, and $D(A)$ is inside both circles;

(c) $|t'| = |t|$, $D(A)$ is the larger segment of circle (i) cut of by the line (ii) which is the perpendicular bisector of the radius joining the origin to the point $z = 1/t$;

(d) $|t'| < |t|$, the two circles intersect, and $D(A)$ is inside (i) and outside (ii).

In all cases $D(a)$ depends on t and $|t'|$, but not on $\arg(t')$. The union of all domains $D(t, t')$ for t, t' satisfying (4.3), is the whole open z-plane.

The question also arises, whether $A(t, t')$ is *'relatively conservative'*, i. e. whether it contains all points z such that αz is inside the circle of convergence. This requires that $D(A)$ contain the circle $|z| < 1/|\alpha|$, which is satisfied if and only if $|\alpha| \geq |t| + |t'|$, and since $\alpha = t + t'$, we must have $\arg(t) = \arg(t')$.

The method $A(t, t')$ has restricted translative properties [e. g. **9,** 3.11, 547]. Writing, if they exist, $v_n = \Sigma_k a_{nk} u_k$, $v'_n = \Sigma_k a_{n,k+1} u_k$, $\sigma_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$, $\sigma'_n = v'_0 + v'_1 + \ldots + v'_n$, we have $v'_n - t v_n = t' v_{n-1}$ for $n = 1, 2, \ldots$, $v'_0 - t v_0 = 0$, hence $\sigma'_n = t\sigma_n + t'\sigma_{n-1}$, so that when $\sigma_n \to S$, $\sigma'_n \to \alpha S$. Thus:

"*$A(t, t')$ sums the series $u_0 + u_1 + \ldots$ to the value S" implies that it sums the series $0 + u_0 + u_1 + \ldots$ to the value αS.* We may say that $A(t, t')$ *is translative to the left with factor α.*

The generalization of the Euler matrix on similar lines gives the matrix $B(t, t')$ as the transpose of $A(t', t)$ multiplied by $(1 - t')$, i. e.

(4.4) $$b_{nk} = b(t, t')_{nk} = \binom{n}{k} (1 - t') t'^{n-k} t^k.$$

Applying $B(t, t')$ to the series Σz^k, we obtain

$$v_n(z) = (1 - t') \Sigma_k \binom{n}{k} t'^{n-k} (tz)^k = (1 - t')(t' + tz)^n,$$

$$\Sigma v_n(z) = (1 - t')/(1 - t' - tz) = 1/(1 - \alpha z) \qquad (\alpha = t/(1 - t')),$$

provided that

(4.5) $$|z + t'/t| < 1/|t|,$$

defining $D(B)$ which is a circle. This contains the unit circle in its interior, i. e. *$B(t, t')$ is a δ_0-matrix when* $|t| + |t'| < 1$. The union of all domains $D(B)$ is the whole open z-plane.

The matrix is in addition *'relatively conservative'* if $D(B)$ contains the circle $|z| < 1/|\alpha|$, i. e. if $|1 - t'| \leq 1 - |t'|$; this requires that *t' be positive.*

Translative properties of $B(t, t')$ follow from the identity $t\sigma_n = \sigma'_{n+1} - t'\sigma'_n$, which can be established in the same way as for $A(t, t')$. When $\sigma'_n \to S'$, $\sigma_n \to S'(1 - t')/t = S'/\alpha$. Hence *$B(t, t')$ is translative to the right with factor* $1/\alpha$.

The generalization of the Laurent summation method [**9,** section 5] and [**6,** the method $S(\alpha)$] on similar lines gives the matrix $C(t, t')$ defined by

(4.6) $$c_{nk} = c(t, t')_{nk} = \binom{n+k}{k} (1 - t') t^k t'^n.$$

Applying $C(t, t')$ to the series Σz^k, we obtain

$$c_n(z) = (1-t')t'^n \Sigma_k \binom{n+k}{k} (tz)^k,$$

$$\Sigma c_n(z) = (1-t')(1-tz)^{-1}\Sigma_n t'^n/(1-tz)^n = 1/(1-\alpha z) \qquad (\alpha = t/(1-t'))$$

provided that

(4.7) (i) $|z| < 1/|t|$ (ii) $|z - 1/t| > |t'/t|$

This defines the domain $D(C)$ inside the circle (i) and outside the circle (ii). $D(C)$ contains the unit circle in its inside, i. e. *$C(t, t')$ is a δ_0-matrix when* $|t| + |t'| = 1$. The union of all domains $D(C)$ is the whole open z-plane.

The method is in addition *'relatively conservative'* if $D(C)$ contains the circle $|z| < 1/|\alpha|$, i. e. $|1-t'| \leq 1 - |t'|$. This requires that *t' be positive.*

The translative properties of $C(t, t')$ follow from the identity $t\sigma_n = \sigma'_n - t'\sigma'_{n-1}$, so that when $\sigma'_n \to S'$, then $\sigma_n \to S'(1-t')/t = S'/\alpha$. Hence *$C(t, t')$ is translative to the right with factor $1/\alpha$.*

5. δ_0-matrices, efficient at a countable infinity of isolated points.

Regular sequence to sequence summation methods which are efficient at isolated points have been given in [**2**, 53—55], and later extended to a finite number of points for series to sequence methods in [**8**, section 6, 11—13]. A further extension of these results is possible by constructing δ_0-matrices as elements of an abelian multiplicative group of infinite matrices.

The group is generated by the unit matrix I and the *diagonal vector*

$$E \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix}$$

The matrix A is given by

(5.1) $$A = I + e_1 E + e_2 E^2 + \dots,$$

where the e_j are complex numbers, satisfying the following condition:

(5.2) *the function $\varphi(w) = 1 + e_1 w + e_2 w^2 + \dots$ is regular and $\neq 0$ for $|w| \leq 1$.*

It follows from (5.2) that $\Sigma|e_j| < \infty$, and that if $1/\varphi(w) = 1 + d_1 w + d_2 w^2 + \dots$, then $\Sigma|d_j| < \infty$.

The reciprocal of A is the matrix

(5.3) $$A^{-1} = I + d_1 E + d_2 E^2 + \dots.$$

Both A and A^{-1} are δ_0-matrices, with $\|A\|_K \leq 2 + \Sigma|2e_j|$ and $\|A^{-1}\| \leq 2 + \Sigma|2d_j|$.

Theorem 5. 1. *The δ_0-matrix A, given by* (5. 1) *and* (5. 2), *is inefficient for all divergent series with bounded partial sums.*

Proof. If Σu_k is such a series, and if A is efficient for this series we have $\Sigma v_n = A(\Sigma u_k)$ is convergent, hence so is $A^{-1}(\Sigma v_n) = A^{-1}[A(\Sigma u_k)]$. But, by theorem 3. VI, the last expression is equal to $(A^{-1}A)(\Sigma u_k) = \Sigma u_k$, which is divergent.

Applying A to the series Σz^k, we obtain

$$v_n(z) = z^n(1 + e_1 z + e_2 z^2 + \ldots) = z^n \varphi(z),\ \Sigma v_n(z) = \varphi(z)/(1-z),$$

both series being convergent inside the unit circle, and, trivially, at those zeros of $\varphi(z)$ which are inside (or possibly on) its circle of convergence.

If, for example, $\varphi(w)$ is an integral function with an infinity of zeros $w_1, w_2, \ldots$ outside the unit circle, then A sums the series Σz^k to the value $\varphi(z)/(1-z)$ inside the unit circle, and to the value zero at the isolated points $z = w_1, w_2, \ldots$. A suitable function for construction is for example $f(w) \equiv \cos w$, and the corresponding matrix is the matrix

$$A = I - E^2/2! + E^4/4! - \ldots = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1/2! & 0 & 1/4! & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & -1/2! & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2! & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{Vmatrix}.$$

The behaviour of the matrix A (defined in (5. 1)), for other series than Σz^k outside the circle of convergence cannot be deducted from theorem 4. I. For each Taylor series the set of isolated points of summability may differ. For example if A is applied to the binomial series $\Sigma_k \binom{p+k}{k} z^k$ $(p=2, 3, \ldots)$, we obtain

$$v_n(z) \equiv \Sigma_k a_{nk} \binom{p+k}{k} z^k = (z^n/p!)\, d^p [z^p \varphi(z)]/dz^p,$$

so that A sums the series at points inside the circle of convergence to the value $[(1-z)p!]^{-1} d^p [z^p \varphi(z)]/dz^p$, and to the value 0 at those isolated zeros of the function $\varphi_p(z) \equiv d^p [z^p \varphi(z)]/dz^p$ which are inside (or possibly on) the of convergence of $\varphi(z)$.

I wish to express my thanks to Professor P. DIENES for suggesting theorems 2. I—IV. I am also indebted to Dr. L. S. BOSANQUET, who gave the proof of lemma 3. I, and to Dr. R. E. EDWARDS, wo suggested lemma 2. VII. 2 and simplified my original proof.

Added in proof (*March 12, 1951*): MEYER–KÖNIG [6, p. 257] remarks that the Taylor summability method was introduced by G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD as 'circle method' in a paper in the *Rendiconti Circolo Mat. Palermo*, **41** (1916), pp. 36—53. I found recently in the Hungarian textbook of M. BEKE: *Differentiál és Integrálszámítás*, vol. 2 (Budapest, 1916), pp. 433—435 another interesting way of considering analytic continuation as a generalized mean by sequence to sequence transformation. BEKE remarks that this method has been communicated to him verbally by M. FEKETE. FEKETE obtains the summability matrix in the following way:

If $f(z)=\Sigma u_k z^k$ has a radius of convergence R, and $0<|\alpha|<|z|<R$, α/z being positive, then the series can be continued to

$$\Sigma f^{(n)}(\alpha)(z-\alpha)^n/n!.$$

Denoting the partial sums of the two series by $s_k(z)=u_0+u_1 z+\ldots+u_k z^k$ and

$$\sigma_n(z)=f(\alpha)+f'(\alpha)(z-\alpha)+\ldots+f^{(n)}(\alpha)(z-\alpha)^n/n!,$$

we see that

$$\sigma_n(z)=\{(z-\alpha)^{n+1}/n!\}\, d^n\{g(\alpha)\}/d\alpha^n, \text{ where } g(\alpha)\equiv f(\alpha)/(z-\alpha).$$

But

$$g(\alpha)=(\Sigma u_k \alpha^k)(\Sigma \alpha^k/z^{k+1})=\Sigma \alpha^k s_k(z)/z^{k+1},$$

hence

$$\sigma_n(z)=(1-\alpha/z)^{n+1}\Sigma\binom{k}{n}(\alpha/z)^{k-n}s_k(z),$$

which is the transform of $s_k(z)$ by the upper semi-matrix

$$a_{nk}=\binom{k}{n}(\alpha/z)^{k-n}(1-\alpha/z)^{n+1}.$$

Since $a_{nk}\geqq 0$ and $\Sigma_k a_{nk}=1$, the method is a regular sequence to sequence summation method.

References.

1. E. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, 2nd ed. (Paris, 1928).
2. R. G. COOKE and P. DIENES, On the effective range of generalized limit processes, *Proceedings London Math. Soc.*, (2) **45** (1939), pp. 45–63.
3. V. F. COWLING, Summability and analytic continuation, *Proceedings American Math. Soc.*, **1** (1950), pp. 536–542.
4. P. DIENES, *The Taylor Series* (Oxford, 1931).
5. E. HILLE, *Functional Analysis and Semi-Groups* (New York, 1948).
6. W. MEYER-KÖNIG, Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren, *Mathematische Zeitschrift*, **52** (1949), pp. 257–304.
7. P. VERMES, Product of a T-matrix and a γ-matrix, *Journal London Math. Soc.*, **21** (1946), pp. 129–134.
8. ——— On γ-matrices and their application to the binomial series, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, (3), **8** (1947), pp. 1–13.
9. ——— Series to series transformations and analytic continuation by matrix methods, *American Journal of Math.*, **71** (1949), pp. 541–562.
10. ——— Certain classes of series to series transformation matrices, *American Journal of Math.*, **72** (1950), pp. 615–620.

UNIVERSITY OF LONDON, BIRKBECK COLLEGE.

(Received May 15, 1950.)

Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes. II.*)

Par MARC KRASNER et LÉO KALOUJNINE à Paris.

§ 3. Produit complet des groupes abstraits.

G étant un groupe abstrait, on va l'identifier à un groupe de permutations par la méthode bien connue, c'est-à-dire au moyen de sa représentation régulière; autrement dit on ne distinguera pas l'élément $a \in G$ de la permutation $x \to ax$ de l'ensemble G. De cette manière, un groupe abstrait G est envisagé comme un groupe transitif de permutations de l'ensemble G.

Ceci étant, soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ des groupes abstraits. On appellera *produit complet* de ces groupes le produit complet de leurs représentations régulières. Ce produit complet, qui est un groupe de permutations de l'ensemble produit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots \times \Gamma_s$, sera toujours noté par le même symbole:

$$\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$$

que le produit complet des groupes de permutations.

Quelquefois on aura à considérer ce groupe comme un groupe abstrait. Dans ce cas, il sera noté

$$\mathfrak{G}_{\text{abs}} = (\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s)_{\text{abs}}.$$

Dans le cas envisagé, en vertu de l'identification indiquée plus haut, M_i coïncide avec Γ_i. Ainsi,

$$A = [a(x^0), a(x^1), \ldots, a(x^{s-1})]$$

étant un tableau de $\mathfrak{G}$, l'argument x^{i-1} de $a(x^{i-1})$ parcourt $\Gamma^{i-1} = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \times \ldots \times \Gamma_{i-1}$. D'autre part, puisque $a(x^{i-1})$ est une permutation de l'ensemble Γ_i, appartenant à la représentation régulière du groupe Γ_i, en vertu de la même identification, $a(x^{i-1})$ peut être considéré comme un élément du groupe abstrait Γ_i. Alors, pour tout $x_i \in \Gamma_i$, le transformé $a(x^{i-1}) \cdot x_i$ de x_i par la permutation $a(x^{i-1})$ est égal au composé $a(x^{i-1})x_i$ de $a(x^{i-1})$ et de x_i dans

*) La première communication, comprenant l'introduction, les notations et les §§ 1—2, a paru dans *ces Acta*, 13 (1950), p. 208—230. La dernière communication paraîtra prochainement.

Γ_i. Ainsi, dans ce cas particulier, on peut supprimer le signe $\cdot$ dans les formules, et on a

$$[a(x^0), a(x^1), \ldots, a(x^{s-1})] \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_s) = (a(x^0)x_1, a(x^1)x_2, \ldots, a(x^{s-1})x_s)$$

et

$$[a, a(x_1), a(x_1, x_2), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})][b, b(x_1), b(x_1, x_2), \ldots, b(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})] =$$
$$= [ab, a(bx_1)\, b(x_1), a(bx_1, b(x_1)\, x_2)\, b(x_1, x_2), \ldots, a(bx_1, b(x_1)x_2, \ldots, b(x_1, x_2 \ldots x_{s-2})x_{s-1})\, b\,(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})].$$

D'ailleurs, sans parler du produit complet de groupes de permutations, on pourrait définir directement le produit complet des groupes abstraits, comme le groupe des tableaux

$$[a, a(x_1), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})] \ \ (x_i \in \Gamma_i,\ a(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}) \in \Gamma_i)$$

avec la loi de composition qu'on vient d'écrire.

Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ des groupes abstraits (dont aucun ne se réduit à son unité e_i) d'ordres finis $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Comme, pour la représentation régulière, e degré de Γ_i est égal à son ordre n_i, l'ordre de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ est

$$n_1 n_2^{n_1} n_3^{n_1 n_2} \ldots n_s^{n_1 n_2 \ldots n_{s-1}}.$$

Il est à remarquer, que si $s>1$, cet ordre est plus grand que le degré $n_1 n_2 \ldots n_s$ de $\mathfrak{G}$.

Ceci montre que si $i>1$, $(\mathfrak{G}^i)_{abs} \circ ({}^i\mathfrak{G})_{abs}$ n'est pas en général isomorphe à $\mathfrak{G}_{abs}$ (contrairement à ce qui se passe pour les groupes de permutations). En effet, si $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ sont d'ordre fini, on a

$$\text{ordre}\,((\mathfrak{G}_i)_{abs} \circ ({}^i\mathfrak{G})_{abs}) = \text{ordre}\,(\mathfrak{G}^i)_{abs}\,(\text{ordre}\,({}^i\mathfrak{G})_{abs})^{\text{degré}\,(\mathfrak{G}^i)\,abs} =$$
$$= \text{ordre}\ \mathfrak{G}^i\ (\text{ordre}\ {}^i\mathfrak{G})^{\text{ordre}\,\mathfrak{G}^i}$$

car

$$\text{degré}\ (\mathfrak{G}^i)_{abs} = \text{ordre}\ \mathfrak{G}^i,$$

tandis que

$$\text{ordre}\ \mathfrak{G}_{abs} = \text{ordre}\ \mathfrak{G} = \text{ordre}\ \mathfrak{G}^i\ (\text{ordre}\ {}^i\mathfrak{G})^{\text{degré}\ \mathfrak{G}^i}$$

et, par suite,

$$\text{ordre}\ \mathfrak{G}_{abs} < \text{ordre}\ ((\mathfrak{G}^i)_{abs} \circ ({}^i\mathfrak{G})_{abs}).$$

Par contre, si $i=1$, $(\mathfrak{G}^1)_{abs} \circ ({}^1\mathfrak{G})_{abs}$ et $\mathfrak{G}_{abs}$ sont isomorphes. En effet, dans ce cas, $(\mathfrak{G}^1)_{abs} = \Gamma_1$ et, par conséquent $(\mathfrak{G}^1)_{abs} \circ ({}^1\mathfrak{G})_{abs} = \Gamma_1 \circ ({}^1\mathfrak{G})_{abs}$. D'autre part (en vertu du § 2), $\mathfrak{G}_{abs} = (\Gamma_1 \circ {}^1\mathfrak{G})_{abs} \cong \Gamma_1 \circ {}^1\mathfrak{G}$. Or, $\Gamma_1 \circ ({}^1\mathfrak{G})_{abs}$ et $\Gamma_1 \circ {}^1\mathfrak{G}$ sont les produits complets de Γ_1 et du groupe ${}^1\mathfrak{G}$, considéré dans le premier cas comme un groupe de permutations de soi-même et dans le second comme un groupe de permutations de ${}^1M = {}^1\Gamma = \Gamma_2 \times \Gamma_3 \times \cdots \times \Gamma_s$. Mais, d'une manière générale, le produit complet $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ de deux groupes de permutations d'ensembles $M_1 \circ M_2$ ne dépend, à une isomorphie près, que des Γ_1, M_1 et Γ_2. En effet, l'ensemble des tableaux $A = [a(x^0), a(x^1)] = [a, a(x_1)] \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ ne dépend que des Γ_1, M_1 et Γ_2 en tant qu'ensembles, tandis que la loi de composition de ces tableaux ne dépend que de Γ_1, en tant que groupe de permutations de M_1, et de la loi de composition de Γ_2. On a donc bien

$$\mathfrak{G}_{\mathrm{abs}} = (\Gamma_1 \circ {}^1\mathfrak{G})_{\mathrm{abs}} \simeq \Gamma_1 \circ {}^1\mathfrak{G}_{\mathrm{abs}} \simeq \Gamma_1 \circ ({}^1\mathfrak{G})_{\mathrm{abs}} = (\mathfrak{G}^1)_{\mathrm{abs}} \circ ({}^1\mathfrak{G})_{\mathrm{abs}}$$

et par suite,

$$\mathfrak{G}_{\mathrm{abs}} = (\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s)_{\mathrm{abs}} \simeq (\Gamma_1 \circ (\Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s)_{\mathrm{abs}})_{\mathrm{abs}} \simeq (\Gamma_1 \circ (\Gamma_2 \circ (\Gamma_3 \circ \cdots)_{\mathrm{abs}})_{\mathrm{abs}})_{\mathrm{abs}}.$$

En particulier, comme $\mathfrak{G}_{\mathrm{abs}} \simeq (\Gamma_1 \circ (\Gamma_2 \circ \Gamma_3)_{\mathrm{abs}})_{\mathrm{abs}}$ n'est pas, en général, isomorphe à $((\mathfrak{G}^2)_{\mathrm{abs}} \circ ({}^2\mathfrak{G})_{\mathrm{abs}})_{\mathrm{abs}} = ((\Gamma_1 \circ \Gamma_2)_{\mathrm{abs}} \circ \Gamma_3)_{\mathrm{abs}}$, l'opération $(\Gamma_1 \circ \Gamma_2)_{\mathrm{abs}}$ n'est pas, en général, associative.

Le fait qu'un produit complet de groupes abstraits est un produit complet de groupes transitifs et *réguliers* de permutations, permet de préciser dans ce cas certaines propriétés des produits complets étudiées au § 2.

Supposons que $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ est le produit complet des groupes transitifs et *réguliers* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ de permutations des ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$.

Soit [1]) $A = [a(x^0), a(x^1), \ldots, a(x^{s-1})]$ un tableau de $\mathfrak{G}$; $\Gamma_j\ (j = 1, 2, \ldots, s)$ étant régulier, on ne peut avoir $a(m^{j-1}).m_j = m_j$ que si $a(m^{j-1})$ est l'unité e_j de Γ_j. Par suite, $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle\ (m \in M)$ est le groupe des tableaux

$$A = [a(x^0), a(x^1), \ldots, a(x^{s-1})]$$

tels que, pour tout $j \leq i$, on ait $a(m^{j-1}) = e_j$. Donc, tout $\sigma \in \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ conserve mod D_i tout élément de la forme $(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *)$. Si $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$, $\sigma \cdot m$ est de cette forme; donc tout $\tau \in \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ conserve $\sigma \cdot m$ (mod D_i) et on a $\sigma^{-1}\tau\sigma \cdot m \equiv \sigma^{-1}\cdot(\tau\sigma\cdot m) \equiv \sigma^{-1}\cdot(\sigma\cdot m) \equiv m\ (\mathrm{mod}\ D_i)$, d'où $\sigma^{-1}\mathfrak{G}_i\langle m\rangle\sigma = \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$. Ainsi, $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ est invariant dans $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$, et on a $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle = \mathfrak{G}_i^*\langle m\rangle$. Par conséquent,

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0\langle m\rangle \supset \mathfrak{G}_1\langle m\rangle \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_s\langle m\rangle$$

est une suite de composition (incomplète) de $\mathfrak{G}$ telle que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle / \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ soit isomorphe à Γ_i (l'isomorphie étant réalisée par $\sigma \longrightarrow \sigma_i(m^{i-1})$).

Soit [2]) G un sous-groupe de $\mathfrak{G}$. Le groupe $G_i\langle m\rangle = G \cap \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ est alors invariant dans $G_{i-1}\langle m\rangle$. Ainsi,

$$G = G_0\langle m\rangle \supset G_1\langle m\rangle \supset \cdots \supset G_s\langle m\rangle$$

est une suite de composition (incomplète) de G et $\sigma \longrightarrow \sigma_i(m^{i-1})$ réalise une isomorphie de $G_{i-1}\langle m\rangle / G_i\langle m\rangle$ sur le sous-groupe $\bar{\Gamma}_i$ de Γ_i (défini au § 2, alinéa 4).

En particulier ces deux énoncés s'appliquent au cas du produit complet des groupes abstraits.

Quand les Γ_i sont des groupes abstraits, il existe dans $M = \Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_s$ *un élément canonique*, à savoir l'élément

$$e = (e_1, e_2, \ldots, e_s),$$

---

1) Voir § 2, alinéa 3.

2) Voir § 2, alinéa 4.

qui n'est autre chose, quand on considère Γ comme le produit direct des groupes Γ_i, que l'unité de Γ. On notera $G_i\langle e\rangle$ simplement G_i, et la suite canonique

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_s$$

de G associée à e en sera dite *la suite canonique* tout court.

Nous avons défini au §2 (alinéa 4) deux m-identifications: une m-identification de $G_{i-1}\langle m\rangle/G_i\langle m\rangle$ avec un sous-ensemble $\overline{M}_i$ de M_i, qui identifie $x_i \in \overline{M}_i$ avec l'ensemble des $\sigma \in G_{i-1}\langle m\rangle$ tels que $(\sigma.m)_i = x_i$, et une m-identification de $G_{i-1}\langle m\rangle/G_i^*\langle m\rangle$ avec un sous-groupe $\overline{\Gamma}_i$ de Γ_i, qui identifie un $\sigma_i \in \Gamma_i$ avec l'ensemble des $\sigma \in G_{i-1}\langle m\rangle$ tels que $\sigma_i(m^{i-1}) = \sigma_i$. La seconde identification prolongeait la première en ce sens que si $X_i \in G_{i-1}\langle m\rangle/G_i\langle m\rangle$ et $\Sigma_i \in G_{i-1}\langle m\rangle/G_i^*\langle m\rangle$ sont identifiés respectivement avec $x_i \in M_i$ et $\sigma_i \in \Gamma_i$, $\Sigma_i X_i$ l'est avec $\sigma_i \cdot x_i$.

Dans le cas du produit complet des groupes abstraits, on a $M_i = \Gamma_i$ et $G_i^*\langle m\rangle = G_i\langle m\rangle$. Ainsi, toutes les deux m-identifications considérées sont des identifications de $G_{i-1}\langle m\rangle/G_i\langle m\rangle$ avec des sous-ensembles de Γ_i. Soient $\overline{X}_i, \overline{\overline{X}}_i$ les éléments de Γ_i avec lesquels un $X_i \in G_{i-1}\langle m\rangle/G_i\langle m\rangle$ s'identifie dans la première et dans la seconde m-identification; par définition, si $\sigma \in X_i$, on a $\overline{X}_i = \sigma_i(m^{i-1}) \cdot m_i = \sigma_i(m^{i-1}) m_i$, et, en vertu de ce qui précède, pour tous les $X_i, Y_i \in G_{i-1}\langle m\rangle/G_i\langle m\rangle$ on a

$$\overline{X_i Y_i} = \overline{\overline{X}}_i \cdot \overline{Y}_i = \overline{\overline{X}}_i \overline{Y}_i.$$

En particulier, si l'on pose dans cette égalité $Y_i = G_i\langle m\rangle$, on a $X_i Y_i = X_i$ et, puisque l'unité de G appartient à $G_i\langle m\rangle = Y_i$, on a $\overline{Y}_i = e_i(m^{i-1}) m_i = e_i m_i = m_i$; donc la formule précédente devient

$$\overline{X}_i = \overline{\overline{X}}_i m_i.$$

Ainsi en général $\overline{X}_i \neq \overline{\overline{X}}_i$, autrement dit, après l'identification habituelle de Γ_i avec sa représentation régulière, les deux m-identifications deviennent en général différentes. Toutefois, elles coïncident si $m_i = e_i$, et dans ce cas seulement. Par conséquent, les deux m-identifications de $G_{i-1}\langle m\rangle/G_i\langle m\rangle$ avec deux sous-ensembles de Γ_i coïncident, pour tous les $i = 1, 2, \ldots, s$, si, et seulement si, m est l'élément canonique $e = (e_1, e_2, \ldots, e_s)$ de $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_s$. Ainsi, si $m = e$, on a $\overline{M}_i = \overline{\Gamma}_i$, et il n'y a qu'une seule e-identification de G_{i-1}/G_i avec $\overline{\Gamma}_i$, qui sera dite *l'identification canonique de G_{i-1}/G_i avec $\overline{\Gamma}_i$*. Dorénavant, on n'emploiera pour les sous-groupes du produit complet des groupes abstraits que la suite canonique (associée à e).

Nous avons vu (§2, alinéa 4), que G est un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G}$ si, et seulement si $\overline{\Gamma}_i$ est, pour $i = 1, 2, \ldots, s$, un sous-groupe transitif de Γ_i. Or, Γ_i étant supposé régulier, aucun sous-groupe propre de Γ_i n'est transitif, d'où il résulte que G est transitif si, et seulement si $\overline{\Gamma}_i = \Gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Ainsi, *les sous-groupes transitifs G du produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ des groupes abstraits $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ sont caractérisés par* *le fait que, pour tout $i=1,2,\ldots,s$, l'homomorphisme $\sigma\longrightarrow\sigma_i(e^{i-1})$ applique sur Γ_i le terme G_{i-1} de la suite canonique*

$$G=G_0\supset G_1\supset\cdots\supset G_s$$

de G.

§. 4. Théorèmes d'immersion.

1. Soient G et F deux groupes abstraits, et soient

$$G=G_0\supset G_1\supset\ldots\supset G_s,\quad F=F_0\supset F_1\supset\ldots\supset F_s$$

deux suites de sous-groupes de G et de F. Supposons que les ensembles des classes à droite G_{i-1}/G_i et F_{i-1}/F_i ($i=1,2,\ldots,s$) soient identifiés d'une manière bien déterminée avec un même ensemble abstrait M_i. On notera m_i (resp. m_i') l'élément de M_i identifié avec la classe G_i (resp. la classe F_i).

A tout élément $\sigma\in G_{i-1}$ correspond dans la représentation de G_{i-1} à l'aide de G_i une certaine permutation de l'ensemble G_{i-1}/G_i et, par suite, en vertu de l'identification de G_{i-1}/G_i avec M_i, une certaine permutation σ_i^* de M_i. De même, à tout $\tau\in F_{i-1}$ correspond, de la même manière, une permutation τ_i^* de M_i. On désignera par Γ_i (resp. Φ_i) le groupe des permutations de M_i, qui correspondent aux éléments de G_{i-1} (resp. F_{i-1}).

Ces identifications étant posées, *un homomorphisme $\sigma\to\bar\sigma$ de G dans F sera dit un $(M_1,M_2,\ldots,M_s)$-homomorphisme, si, pour $i=1,2,\ldots,s$,*

a) l'image $\bar G_i$ de G_i est un sous-groupe de F_i (l'image d'une classe X_i dans G_{i-1} suivant G_i est alors contenue dans une certaine classe dans F_{i-1} suivant F_i, qui sera dite sa *classe correspondante* et qui sera désignée par $(\bar X_i)$);

b) toute classe $X_i\in G_{i-1}/G_i$ et sa classe correspondante $(\bar X_i)\in F_{i-1}/F_i$ sont identifiées avec un même élément de M_i;

c) Pour tout $\sigma\in G_{i-1}$, la permutation σ_i^* de M_i qui lui correspond est la même que celle $\bar\sigma_i^*$ qui correspond à son image $\bar\sigma$.

Il résulte de la définition précédente que s'il existe un $(M_1,M_2,\ldots,M_s)$-homomorphisme de G dans F, Γ_i est un sous-groupe de Φ_i ($i=1,2,\ldots,s$) et $m=m'$.

2. Soit G un groupe abstrait, et soit

$$G=G_0\supset G_1\supset\ldots\supset G_s$$

une suite de sous-groupes de G. Pour tout $i=1,2,\ldots,s$, choisissons, dans toute classe $X_i\in G_{i-1}/G_i$, un représentant $r(X_i)\in G_{i-1}$. (rX_i) sera dit une *fonction représentative des G_{i-1}/G_i dans G.*

Lemme 1. *Toute classe $X\in G/G_s$ s'écrit, et d'une seule manière, sous la forme*

$$X=r(X_1)\,r(X_2)\ldots r(X_s)\,G_s,$$

où les X_i sont des éléments convenables des G_{i-1}/G_i correspondants.

D é m o n s t r a t i o n. Démontrons ce lemme par induction par rapport à s. Supposons que chaque classe Y suivant G_{s-1} puisse être écrite, et d'une seule manière, sous la forme

$$Y = r(X_1)\,r(X_2)\ldots r(X_{s-1})\,G_{s-1}.$$

En particulier, ceci est vrai pour $Y = XG_{s-1}$; donc il existe des $X_i \in G_{i-1}/G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$ tels que $XG_{s-1} = r(X_1)\,r(X_2)\ldots r(X_{s-1})\,G_{s-1}$ et, si $XG_{s-1} = r(X'_1)\,r(X'_2)\ldots r(X'_{s-1})\,G_{s-1}$, on a $X'_i = X_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, s-1$. Donc, la classe $[r(X_1)\,r(X_2)\ldots r(X_{s-1})]^{-1}X$ suivant G_s est contenue dans G_{s-1}, et cette classe est un élément $X_s = r(X_s)\,G_s$ de G_{s-1}/G_s; par suite, on a

$$X = r(X_1)\,r(X_2)\ldots r(X_{s-1})\,X_s = r(X_1)\,r(X_2)\ldots r(X_{s-1})\,r(X_s)\,G_s.$$

Si
$$X = r(X_1)\,r(X_2)\ldots r(X_{s-1})\,r(X'_s)\,G_s,$$
on a
$$X'_s = r(X'_s)\,G_s = [r(X_1)\,r(X_2)\ldots r(X_{s-1})]^{-1}X = X_s, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

x_i étant un élément de M_i, on désignera par $\varrho(x_i)$ le représentant $r(X_i)$ de la classe $X_i \in G_{i-1}/G_i$ identifiée avec x_i. $\varrho(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s;\ x_i \in M_i)$ sera dit une *fonction représentative des M_i dans G.* En vertu du lemme précédent, toute classe $X \in G/G_s$ se met, et d'une seule manière, sous la forme

$$X = \varrho(x_1)\,\varrho(x_2)\ldots\varrho(x_s)\,G_s.$$

On appellera les x_i *les coordonnées de X.* M étant l'ensemble produit $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_s$ des M_i, la correspondance $X \to \theta \cdot X = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ est une application biunivoque de G/G_s sur M. Il est à remarquer que θ dépend de la fonction représentative $\varrho(x_i)$. D'autre part, la fonction représentative détermine θ univoquement. Par suite, quand on aura à considérer plusieurs fonctions représentatives $\varrho(x_i)$, $\varrho'(x_i)$, $\varrho''(x_i), \ldots$, on notera les applications θ qui leur correspondent par $\theta_\varrho, \theta_{\varrho'}, \theta_{\varrho''}, \ldots$. On omettra l'indice quand il n'y aura pas de confusion possible. L'image $(\theta \cdot X)^i = (x_1, x_2, \ldots x_i) \in M^i$ de $\theta \cdot X$ par $x \to x^i$ ne dépend évidemment que de XG_i, et inversement, car $XG_i = \varrho(x_1)\,\varrho(x_2)\ldots\varrho(x_i)\,G_i$.

Considérons la représentation de G à l'aide de son sous-groupe G_s. A la permutation $X \to \sigma X$ $(\sigma \in G,\ X \in G/G_s)$ de G/G_s, image de σ par cette représentation, correspond, par l'application θ, la permutation $\bar\sigma = \theta\sigma\theta^{-1} = \{\theta \cdot X \to \theta \cdot \sigma X\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_s) \to ((\theta \cdot \sigma X)_1, (\theta \cdot \sigma X)_2, \ldots, (\theta \cdot \sigma X)_s)\}$ de M. Montrons que $\bar\sigma$ *est une permutation de M satisfaisant aux conditions* 1 *et* 2 *du* § 1 *relativement aux groupes de permutations $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ des ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$,* et que, par conséquent, $\bar\sigma$ *est un élément du produit complet* $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$.

En effet, $(\sigma X)\,G_i$ ne dépend, pour σ fixe, que de XG_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ et, par suite, $(\theta \cdot \sigma X)^i$ ne dépend que de $(\theta \cdot X)^i$, ce qui montre que la condition 1 est remplie.

Considérons tous les $X \in G/G_s$, tels que $(\theta \cdot X)^{i-1}$ soit un élément fixe $t^{i-1} = (t_1, t_2, \ldots, t_{i-1})$ de M^{i-1}. Pour tout X de cette famille, XG_i a la forme

$$XG_i = \varrho(t_1)\,\varrho(t_2)\ldots\varrho(t_{i-1})\,X_i$$

où $X_i = \varrho(x_i)G_i$ est un élément de G_{i-1}/G_i. Donc x_i est l'élément de M_i identifié avec X_i. Il existe, en vertu du lemme précédent, un élément $(t'_1, t'_2, \ldots, t'_{i-1})$ de M^{i-1} (ne dépendant, pour un σ fixe, que de $t^{i-1} = (t_1, t_2, \ldots, t_{i-1})$), tel qu'on ait

$$\sigma\varrho(t_1)\,\varrho(t_2)\ldots\varrho(t_{i-1})\,G_{i-1} = \varrho(t'_1)\,\varrho(t'_2)\ldots\varrho(t'_{i-1})\,G_{i-1},$$

d'où

$$\sigma\varrho(t_1)\,\varrho(t_2)\ldots\varrho(t_{i-1}) = \varrho(t'_1)\,\varrho(t'_2)\ldots\varrho(t'_{i-1})\,\sigma_i(t^{i-1}),$$

où $\sigma_i(t^{i-1})$ est un élément de G_{i-1}, ne dépendant que de σ et de t^{i-1}. On a

$$\sigma XG_i = \varrho(t'_1)\,\varrho(t'_2)\ldots\varrho(t'_{i-1})\,\sigma_i(t^{i-1})\,X_i,$$

et $\sigma_i(t^{i-1})\,X_i$ est un élément de G_{i-1}/G_i. Ainsi,

$$(\theta\cdot\sigma X)^i = (t'_1, t'_2, \ldots, t'_{i-1}, x'_i)$$

où x'_i est l'élément de M_i identifié avec $\sigma_i(t^{i-1})\,X_i$; visiblement $\bar\sigma_i(t^{i-1})$, c'est-à-dire la permutation induite par σ de la i-ième coordonnée des $x \in M$ tels que $x^{i-1} = t^{i-1}$, est précisément $x_i \to x'_i$. Mais c'est la permutation $(\sigma_i(t^{i-1}))^*$ de M_i qui correspond à la permutation $X_i \to \sigma_i(t^{i-1})\,X_i$ $(X_i \in G_{i-1}/G_i)$ de G_{i-1}/G_i induite dans G_{i-1}/G_i par $\sigma_i(t^{i-1}) \in G_{i-1}$. $(\sigma_i(t^{i-1}))^* = \bar\sigma_i(t^{i-1})$ est donc un élément de Γ_i ne dépendant que de t^{i-1}, ce qui montre que $\bar\sigma$ satisfait à la condition 2.

Ainsi, étant donné, pour tout i, une identification fixe de G_{i-1}/G_i avec l'ensemble M_i (ce qui définit, pour chaque i, un groupe de permutations Γ_i de M_i), *le choix d'une fonction représentative des M_i dans G détermine univoquement un homomorphisme*

$$\sigma \to \bar\sigma = \theta\,\{X \to \sigma X\}\,\theta^{-1} \qquad (X \in G/G_s)$$

de G dans le produit complet

$$\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$$

de ces groupes Γ_i. Cet homomorphisme sera dit le ϱ-homomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$.

Le noyau de cet homomorphisme est le plus grand sous-groupe $G^*_{s,0}$ de G_s invariant dans G. *C'est donc un isomorphisme si, et seulement si G_s est anti-invariant dans G.*

L'image $\bar G$ de G par un ϱ-homomorphisme est un sous-groupe *transitif* de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$.

3. Une fonction représentative sera dite *normée*, si, pour $i = 1, 2, \ldots, s$, le représentant $\varrho(m_i)$ de l'élément $m_i \in M_i$ identifié avec G_i est l'unité de G. Si $\varrho(x_i)$ est une fonction représentative normée des M_i dans G, le ϱ-homomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ sera aussi dit *normé*.

Considérons l'élément $m = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ de M, et appelons le *l'élément distingué de M*. Au §2 nous avons défini une suite

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0\langle m\rangle \supset \mathfrak{G}_1\langle m\rangle \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_s\langle m\rangle$$

de sous-groupes de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$, associée à m, ainsi qu'une identification, dite m-identification, de $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle/\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ avec M_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Ces identifications étant posées, montrons que, *si ϱ est une fonction représentative normée, le ϱ-homomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ est un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphisme.*

a) pour $i = 1, 2, \ldots, s$, on a $\bar{G}_i = \mathfrak{G}_i<m> \cap \bar{G} = \bar{G}_i<m>$ (où $\bar{G}_i$ est l'image de G_i par le ϱ-homomorphisme), donc en particulier $\bar{G}_i \subset \mathfrak{G}_i<m>$.

En effet, on a

$$G_i = \varrho(m_1)\,\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_i)\,G_i$$

car, pour tout i, $\varrho(m_i)$ est l'unité de G.

Ainsi, on a $(\theta\cdot X)^i = m^i$ si, et seulement si $X \in G/G_s$ est contenu dans G_i. On a $\theta\cdot G_s = m$. D'autre part, comme pour tout $X \in G/G_s$ on a $\bar{\sigma}\cdot(\theta\cdot X) = \theta\cdot(\sigma X)$, on voit que $(\bar{\sigma}\cdot m)^i = (\theta\cdot\sigma G_s)^i$. Ainsi, on a $(\bar{\sigma}\cdot m)^i = m^i$ si, et seulement si $\sigma G_s \subset G_i$, c'est-à-dire $\sigma \in G_i$. Comme, par definition de $\mathfrak{G}_i<m>$, on a $\bar{\sigma} \in \mathfrak{G}_i<m>$ si, et seulement si $(\bar{\sigma}\cdot m)^i = m^i$, on voit que $\bar{G}_i<m> = \mathfrak{G}_i<m> \cap \bar{G}$ est l'image $\bar{G}_i$ de G_i par l'homomorphisme $\sigma \longrightarrow \bar{\sigma}$.

b) L'image $\bar{X}_i$ d'une classe $X_i \in G_{i-1}/G_i$ identifiée avec un $x_i \in M_i$ est contenue dans la classe dans $\mathfrak{G}_{i-1}<m>$ suivant $\mathfrak{G}_i<m>$, identifiée avec le même élément x_i.

En effet, soit $\sigma \in X_i$ et soit $X = \sigma G_s$. x_i étant l'élément de M_i identifié avec X_i, on a

$$X_i = \varrho(x_i)\,G_i = \varrho(m_1)\,\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_{i-1})\,\varrho(x_i)\,G_i$$

(car tous les $\varrho(m_i)$ coïncident avec l'unité de G), d'où $\theta\cdot X = (m_1, m_2, \cdots, m_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *)$ et $(\theta\cdot X)_i = x_i$. De $\bar{\sigma}\cdot m = \theta\cdot\sigma G_s = \theta\cdot X$ il résulte que $(\bar{\sigma}\cdot m)_i = (\theta\cdot X)_i = x_i$. Par suite, en vertu de la définition de la m-identification, $\bar{\sigma}$ se trouve dans une classe suivant $\mathfrak{G}_i<m>$ identifiée avec x_i, ce qui prouve l'affirmation.

c) Si $\sigma \in G_{i-1}$, les permutations σ_i^* et $\bar{\sigma}_i^*$ de M_i qui correspondent aux σ, $\bar{\sigma}$, coïncident.

En effet, la permutation σ_i^* de M_i correspondant à un $\sigma \in G_{i-1}$ est visiblement $(\theta\cdot X)_i \longrightarrow (\theta\cdot\sigma X)_i = (\bar{\sigma}\cdot(\theta\cdot X))_i$, où X parcourt G_{i-1}/G_s.

D'autre part, la permutation $\bar{\sigma}_i^*$ de M_i qui correspond à $\bar{\sigma}$ (on a déjà montré que $\bar{\sigma}$ appartient à $\mathfrak{G}_{i-1}<m>$) est, par définition, $x_i \longrightarrow (\bar{\sigma}\cdot x)_i$, où x parcourt l'ensemble des éléments de M, tels que $x^{i-1} = m^{i-1}$. Or, si $X \in G/G_s$, on a $(\theta\cdot X)^{i-1} = m^{i-1}$ si, et seulement si $X \in G_{i-1}/G_s$, ce qui montre que $\sigma_i^* = \bar{\sigma}_i^*$ [3]).

[3]) Ainsi, la condition: "la fonction représentative $\varrho(x_i)$ des M_i dans G est normée" est une condition suffisante pour que le ϱ-homomorpisme de G dans $\mathfrak{G}$ soit un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphisme.

Elle n'est pas nécessaire. La condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire $\varrho(x_i)$ pour que le ϱ-homomorphisme soit un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphisme est la suivante: "pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, l'élément $\varrho(m_1)\,\varrho(m_2)\ldots\varrho(m_{i-1})$ de G appartient au plus grand sous-groupe de G_i invariant dans G_{i-1}".

D'autre part, si la fonction représentative $\varrho(x_i)$ est quelconque on peut montrer que le ϱ-homomorphisme ne diffère d'un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphisme que par un automorphisme intérieur convenable de $\bar{G}$.

4. Soit $\overline{\Gamma}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ un groupe de permutations de M_i contenant Γ_i. On a vu au § 1 que $\widetilde{\mathfrak{G}} = \overline{\Gamma}_1 \circ \overline{\Gamma}_2 \circ \cdots \circ \overline{\Gamma}_s$ est un sur-groupe de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$. ϱ étant une fonction représentative des M_i dans G, le ϱ-homomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ est donc aussi un homomorphisme de G dans $\widetilde{\mathfrak{G}}$, et l'image $\overline{G}$ de G par cet homomorphisme est un sous-groupe transitif de $\widetilde{\mathfrak{G}}$. Si ϱ est une fonction représentative normée, c'est visiblement aussi un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphisme de G dans $\widetilde{\mathfrak{G}}$.

Résumant les résultats du § 2, alinéas 3 et 4, et ceux qu'on vient de développer dans le présent paragraphe, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème 1. *Tout sous-groupe transitif G du produit complet*

$$\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$$

des groupes de permutations $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ des ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$ possède une suite de sous-groupes

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_s,$$

telle que 1) *G_s est anti-invariant dans G,* 2) *la représentation de G_{i-1} à l'aide de son sous-groupe G_i est, après une identification canonique convenable de G_{i-1}/G_i avec M_i, un sous-groupe transitif $\overline{\Gamma}_i$ de Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$.*

Inversement, si H est un groupe abstrait possédant une suite de sous-groupes

$$H = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_s$$

telle que 1) *H_s est anti-invariant dans H,* 2) *pour tout i, la représentation de H_{i-1} à l'aide de son sous-groupe H_i peut être identifiée, par une identification de H_{i-1}/H_i avec M_i, avec un sous-groupe de Γ_i, alors H est, $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphe à un sous-groupe transitif du produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$.*

Remarque I. Le théorème montre que $\mathfrak{G}$ est, en quelque sorte, un *groupe universel* pour les groupes possédant les propriétés 1 et 2 (énoncées dans le théorème).

Remarque II. Si le groupe H_s n'est pas anti-invariant dans H, H est $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphe à un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G}$, et le noyau de cet homomorphisme est le plus grand sous-groupe $H^*_{s,0}$ de H_s invariant dans H.[4])

---

[4]) O. Ore a démontré dans son travail "Theory of monomial groups", *Transactions Amer. Math. Soc.*, 51 (1942), p. 15-64, que si $G \supset M \supset N$ est une suite de sous-groupes d'un groupe G, telle que N soit invariant dans M, il existe un homomorphisme de G dans un groupe qui n'est autre chose, (si l'on emploie notre terminologie) que le produit complet du groupe $S_{G/M}$ de toutes les permutations de G/M et de la représentation régulière du groupe abstrait M/N.

Ce résultat est un cas particulier du nôtre, quand on pose $s = 2, H_1 = M, H_2 = N$, $M_1 = G/M$, $\Gamma_1 = S_{G/M}$, $M_2 = M/N$, $\Gamma_2 =$ la représentation régulière de M/N.

D'ailleurs, la démonstration de O. Ore n'est pas, au fond, différente, dans ce cas particulier, de la nôtre, et, $\overline{\Gamma}_1$ étant la représentation de G à l'aide de M, elle montre implicitement que G est homomorphe avec un sous-groupe de $\overline{\Gamma}_1 \circ \Gamma_2$.

Remarque III. Les alinéas 3 et 4 du présent paragraphe montrent que si l'on choisit une fonction représentative ϱ des M_i dans H, l'homomorphisme de H dans $\mathfrak{G}$ (qui est une *immersion* quand H_s est anti-invariant dans H) peut être effectué d'une manière canonique.

Remarque IV. Les groupes $\overline{\Gamma}_i$ peuvent être définis pour n'importe quel sous-groupe G de $\mathfrak{G}$, et leur transitivité pour tout i, est la condition nécéssaire et suffisante pour la transitivité de G.

5. Soit G un groupe abstrait et soit

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$$

une suite de composition (incomplète) de G. Identifions, d'une manière bien déterminée, chaque groupe G_{i-1}/G_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ avec un groupe abstrait Γ_i. De cette manière, en particulier, l'ensemble G_{i-1}/G_i est identifié avec l'ensemble Γ_i, et si l'on prolonge cette identification aux permutations de ces ensembles, la représentation régulière de G_{i-1}/G_i est identifiée avec celle de Γ_i.

On peut donc considérer cette identification comme un cas particulier de l'alinéa 1 du présent paragraphe, en prenant comme M_i l'ensemble Γ_i. Alors le groupe Γ_i de l'alinéa 1 n'est autre chose que la représentation régulière du groupe qu'on a désigné ici par la même lettre. Ainsi, la permutation σ_i^* de Γ_i qui correspond à un $\sigma \in G_{i-1}$ coïncide, dans ce cas, avec l'élément de la représentation régulière de Γ_i identifié avec σG_i.

Toutefois, l'identification de G_{i-1}/G_i avec l'ensemble $M_i = \Gamma_i$ n'est pas quelconque, comme c'était le cas dans l'alinéa 1, car l'élément m_i de $M_i = \Gamma_i$ identifié avec G_i n'est pas arbitraire mais est l'unité e_i de Γ_i.

Soit

$$F = F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_s$$

une suite de composition (incomplète) d'un autre groupe abstrait F, telle que le groupe F_{i-1}/F_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ soit isomorphe avec Γ_i et soit identifié, d'une manière bien déterminée, avec ce groupe, Alors, comme on a vu, l'ensemble F_{i-1}/F_i est identifié, d'une manière bien déterminée, avec l'ensemble $M_i = \Gamma_i$.

Cela étant, un homomorphisme $\sigma \to \bar{\sigma}$ de G dans F sera dit un $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-homomorphisme, si, avec de tels M_i, il est un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphisme. Plus précisément, $\sigma \to \bar{\sigma}$ est un $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-homomorphisme si:

a) l'image $\overline{G}_i$ de G_i est un sous-groupe de F_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$,

b) une classe X_i dans G_{i-1} suivant G_i et la classe $(\overline{X}_i)$ dans F_{i-1} suivant F_i, qui contient l'image $\overline{X}_i$ de X_i, sont identifiées avec le même élément de Γ_i.

La condition qui, dans notre cas, correspond à la condition *c*) de l'alinéa 1, est une conséquence de la condition *b*). En effet si l'on pose $X_i = \sigma G_i$ et $(\overline{X}_i) = \bar{\sigma} F_i$, σ_i^* et $\bar{\sigma}_i^*$ sont les représentations régulières des éléments de Γ_i identifiés avec X_i et $(\overline{X}_i)$, c'est-à-dire avec le même élément de Γ_i.

$\varrho(x_i)$ $(i=1,2,\ldots,s;\ x\in\Gamma_i)$ étant une fonction représentative des Γ_i dans G, il résulte du Théorème 1 qu'il existe un homomorphisme, dit ϱ-homomorphisme, de G dans le produit complet $\mathfrak{G}=\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\cdots\circ\Gamma_s$ des groupes *abstraits* $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_s$. Si ϱ est une fonction représentative normée et si

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0\supset\mathfrak{G}_1\supset\ldots\supset\mathfrak{G}_s$$

est la suite canonique de $\mathfrak{G}$, le ϱ-homomorphisme est un $(\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_s)$-homomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ (considéré avec sa suite et ses identifications canoniques).

Si G_s est anti-invariant dans G, le ϱ-homomorphisme est, comme on a vu, un ϱ-isomorphisme.

Résumons les résultats du § 3 et celui qu'on vient d'obtenir dans le théorème suivant.

Théorème 2. *Tout sous-groupe transitif G du produit complet*

$$\mathfrak{G}=\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\cdots\circ\Gamma_s$$

des groupes abstraits $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_s$ possède une suite de composition (incomplète)

$$G=G_0\supset G_1\supset G_2\supset\ldots\supset G_s$$

(à savoir sa suite canonique définie au § 3) telle que

1) G_s est anti-invariant dans G,

2) G_{i-1}/G_i devient, après l'identification canonique (définie au § 3), le groupe (Γ_i $i=1,2,\ldots,s$).

Inversement, si H est un groupe abstrait possèdant une suite de composition (incomplète)

$$H=H_0\supset H_1\supset H_2\supset\ldots\supset H_s$$

telle que

1) H_s soit anti-invariant dans H,

2) H_{i-1}/H_i soit isomorphe à un groupe abstrait Γ_i $(i=1,2,\ldots,s)$, alors H est isomorphe à un sous-groupe transitif du produit complet $\mathfrak{G}=\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots.\Gamma_s$ des groupes abstraits $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_s$.

Si l'on identifie, d'une manière bien déterminée, H_{i-1}/H_i avec Γ_i, il existe des isomorphismes de H avec des sous-groupes transitifs de $\mathfrak{G}$ qui sont des $(\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_s)$-isomorphismes.

Remarque I. Le théorème montre que $\mathfrak{G}$ est, en quelque sorte, un *groupe universel pour les groupes possédant les propriétés* 1 *et* 2 (du théorème).

Si pour tout $i=1,2,\ldots,s$, le groupe quotient H_{i-1}/H_i est d'ordre fini n_i, l'ordre d'un tel groupe H divise $n_1 n_2^{n_1} n_3^{n_1 n_2}\cdots n_s^{n_1 n_2\cdots n_{s-1}}$ et il existe parmi ces groupes un, et un seul groupe, à savoir le groupe $\mathfrak{G}_{\text{abs}}$, dont l'ordre est égal à $n_1 n_2^{n_1} n_3^{n_1 n_2}\cdots n_s^{n_1 n_2\cdots n_{s-1}}$.

Remarque II. Si le groupe H_s n'est pas anti-invariant dans H, H est $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-homomorphe à un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G}$, et le plus grand sous-groupe $H^*_{s,0}$ de H_s invariant dans H est le noyau de cet homomorphisme.

Remarque III. Si l'on choisit une fonction représentative ϱ des Γ_i dans G, l'homomorphisme (respectivement l'isomorphisme) de H dans $\mathfrak{G}$ peut être effectué d'une manière canonique.

Remarque IV. Les groupes $\overline{\Gamma}_i$ peuvent être définis pour n'importe quel sous-groupe G de $\mathfrak{G}$, et $\overline{\Gamma}_i = \Gamma_i$ est la condition nécessaire et suffisante pour la transitivité de G.

Remarque V. *Si $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ sont des groupes simples, $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ est le groupe universel pour les groupes ayant une suite de composition (complète) dont la suite des groupes quotients commence par $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, et dont le s-ième terme est anti-invariant.*

Remarque VI. En particulier, sous les mêmes hypothèses que dans la remarque V, tout groupe H ayant une suite de composition de longueur s, dont la suite des groupes quotients soit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, est isomorphe à un sous-groupe transitif $\overline{H}$ de $\mathfrak{G}$, et ceci de la manière que la suite de composition considérée de H soit appliquée sur la suite canonique de $\overline{H}$.

§ 5. Théorèmes de transformation.

Étant donné une suite

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_s$$

de sous-groupes G_i d'un groupe abstrait G, identifions les ensembles G_{i-1}/G_i avec des ensembles abstraits M_i et les représentations de G_{i-1} à l'aide de G_i avec des groupes de permutations Γ_i des ensembles M_i, comme cela a été expliqué au § 4, alinéa 1.

Nous supposerons en outre que G_s soit anti-invariant dans G. Nous avons montré au § 4 qu'il est possible, à l'aide d'une fonction représentative $\varrho(x_i)$ des M_i dans G, d'immerger G dans le produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$, et ceci par un procédé que nous avons appelé le ϱ-isomorphisme. Quand $\varrho(x_i)$ est une fonction représentative normée, ce ϱ-isomorphisme est un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme par rapport à la suite

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0\langle m \rangle \supset \mathfrak{G}_1\langle m \rangle \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_s\langle m \rangle,$$

associée à l'élément distingué m de M, et aux m-identifications de $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m \rangle / \mathfrak{G}_i\langle m \rangle$ correspondantes [5]).

---

[5]) D'ailleurs, au cours de ce paragraphe, cet élément $m = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ sera supposé fixé une fois pour toutes. Ainsi, quand on parlera d'un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme d'un groupe G dans $\mathfrak{G}$, on supposera toujours, sans l'indiquer explicitement que:

Dans le présent paragraphe nous indiquerons d'une part les relations entre les ϱ-isomorphismes pour des fonctions représentatives normées différentes, d'autre part nous déterminerons l'ensemble de tous les $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphismes de G dans $\mathfrak{G}$.

1. $\varrho(x_i)$ et $\tau(x_i)$ étant deux fonctions représentatives des M_i dans G, soient $\eta_\varrho = \{\sigma \to \bar{\sigma}\}$ et $\eta_\tau = \{\sigma \to \bar{\bar{\sigma}}\}$ le ϱ-et le τ-homomorphismes de G dans $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$. Montrons que *$\eta_\varrho$ ne diffère de η_τ que par un automorpisme intérieur de $\mathfrak{G}$*, c'est-à-dire qu'il existe un élément $\lambda \in \mathfrak{G}$ tel que, pour tout $\sigma \in G$ on ait $\lambda \bar{\sigma} \lambda^{-1} = \bar{\bar{\sigma}}$.

En effet, soient θ_ϱ et θ_τ les applications de G/G_s sur $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_s$, définies respectivement par les fonctions représentatives $\varrho(x_i)$ et $\tau(x_i)$. θ_ϱ ne diffère de θ_τ que par une permutation λ de l'ensemble M ($\theta_\tau = \lambda \theta_\varrho$, autrement dit, pour tout $X \in G/G_s$, on a $\theta_\tau \cdot X = \lambda \cdot (\theta_\varrho \cdot X)$). Il est bien connu qu'alors pour tout $\sigma \in G$ on a $\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \bar{\sigma} \lambda^{-1}$. Montrons que *$\lambda$ satisfait aux conditions* 1 *et* 2 *du* § 1 relativement aux groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, et que, par suite, λ appartient à $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$.

On a vu que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$ et pour tout $X \in G/G_i$, $(\theta_\varrho \cdot X)^i$ et $(\theta_\tau \cdot X)^i$ ne dépendent que de XG_i, et inversement. Par suite, $(\lambda \cdot (\theta_\varrho X))^i = (\theta_\tau \cdot X)^i$ ne dépend que de $(\theta_\varrho \cdot X)^i$, donc λ satisfait à la condition 1.

D'autre part, soit X un élément arbitraire de G/G_s tel que $(\theta_\varrho \cdot X)^{i-1}$ soit un élément fixe $t^{i-1} = (t_1, t_2, \ldots, t_{i-1})$ de M^{i-1}. Alors, en vertu de la condition 1, $(\theta_\tau \cdot X)^{i-1}$ est un élément fixe $(t')^{i-1} = (t'_1, t'_2, \ldots, t'_{i-1})$ de M^{i-1}, ne dépendant que de t^{i-1}. Soient

$\theta_\varrho \cdot X = (t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *)$ et $\theta_\tau \cdot X = (t'_1, t'_2, \ldots, t'_{i-1}, x'_i, *, *, \ldots, *)$.
On a

$$XG_{i-1} = \varrho(t_1)\, \varrho(t_2) \ldots \varrho(t_{i-1})\, G_{i-1} = \tau(t'_1)\, \tau(t'_2) \ldots \tau(t'_{i-1})\, G_{i-1},$$

d'où

$$\varrho(t_1)\, \varrho(t_2) \ldots \varrho(t_{i-1}) = \tau(t'_1)\, \tau(t'_2) \ldots \tau(t'_{i-1})\, \Lambda_i(t^{i-1}),$$

où $\Lambda_i(t^{i-1})$ est un élément de G_{i-1} ne dépendant que de t^{i-1}.

Soient X_i et X'_i les classes dans G_{i-1} suivant G_i identifiées avec x_i et x'_i. On a d'une part

---

a) G possède une suite $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ de sous-groupes et G_{i-1}/G_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) est identifié avec M_i de façon que G_i soit identifié avec m_i. (m sera dit l'élément distingué dans cette chaîne d'identifications),

b) il s'agit, d'un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme relatif à cette suite de sous-groupes de G, avec les identifications considérées des G_{i-1}/G_i avec les M_i correspondants, et à la suite canonique associée à m de l'image $\bar{G}$ de G, les identifications des $\bar{G}_{i-1}<m>/\bar{G}<m>$ étant les m-identifications.

c) Quand on suppose en plus que G est un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, on supposera que la suite $G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ coïncide avec la suite canonique de G associée à m, et que les identifications des G_{i-1}/G_i avec les M_i correspondants sont les m-identifications.

$$XG_i = \varrho(t_1)\varrho(t_2)\ldots\varrho(t_{i-1})X_i = \tau(t'_1)\tau(t'_2)\ldots\tau(t'_i)\Lambda(t^{i-1})X_i,$$

d'autre part

$$XG_i = \tau(t'_1)\tau(t'_2)\ldots\tau(t'_{i-1})X'_i;$$

d'où l'on conclut que x'_i est l'élément de M_i identifié avec $\Lambda(t^{i-1})X_i$ et que la permutation $x_i \to x'_i$ de M_i est celle qui correspond à la permutation

$$X_i \to \Lambda(t^{i-1})X_i$$

de G_{i-1}/G_i. Elle est donc un élément de Γ_i ne dépendant que de t^{i-1}. Ainsi, la condition 2 est remplie.

Soient maintenant $\varrho(x_i)$ et $\tau(x_i)$ deux fonctions représentatives normées, et soit $m = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ l'élément distingué de M, c'est-à-dire l'élément dont les coordonnées m_i sont identifiées avec les $G_i \in G_{i-1}/G_i$ correspondants. Alors, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$ et pour tout $x_i \in M_i$, la classe $X_i \in G_{i-1}/G_i$ s'écrit sous chacune des formes

$$X_i = \varrho(m_1)\varrho(m_2)\ldots\varrho(m_{i-1})X_i = \tau(m_1)\tau(m_2)\ldots\tau(m_{i-1})X_i.$$

Si $X \in G/G_s$ est tel que $XG_i = X_i \in G_{i-1}/G_i$, on a

$$(\theta_\varrho \cdot X)^i = (\theta_\tau \cdot X)^i = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i).$$

Par suite, dans le cas des fonctions $\varrho(x_i)$ et $\tau(x_i)$ normées, la permutation $\lambda = \theta_\tau\theta_\varrho^{-1}$ de M, dont on sait déjà qu'elle appartient à $\mathfrak{G}$, conserve mod D_i tout élément de la forme $(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *)$ et, en vertu du § 3 (alinéa 5), λ appartient à $\mathfrak{G}_i^*\langle m\rangle$ (le plus grand sous-groupe de $G_i\langle m\rangle$ invariant dans $G_{i-1}\langle m\rangle$). Comme ceci doit avoir lieu pour $i = 1, 2, \ldots, s$, on a $\lambda \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i^*\langle m\rangle$.

Posons la définition suivante: Si $\mathfrak{G}$ est le produit complet $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ des groupes de permutations $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ des ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$, et si m est un élément de $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_s$, l'automorphisme intérieur $\{\sigma \to \lambda\sigma\lambda^{-1}\}$ de $\mathfrak{G}$ réalisé par un élément $\lambda \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i^*\langle m\rangle$ sera dit *propre* par rapport à m.

Deux sous-groupes H et H' de $\mathfrak{G}$ seront dits *proprement conjugués* par rapport à m, s'il existe un automorphisme intérieur propre par rapport à m qui applique H sur H'.

Si $\mathfrak{G}$ est un produit complet de groupes abstraits, $\bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i^*\langle m\rangle = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ coïncide avec $\mathfrak{G}_s\langle m\rangle$. D'autre part, en se bornant dans ce cas à l'élément canonique $m = e$ (voir § 3), on parlera *d'automorphismes intérieurs propres* tout court, quand il s'agira d'automorphismes intérieurs propres par rapport à e (ce sont des automorphismes intérieurs réalisés par des éléments λ appartenant à $\mathfrak{G}_s$).

Ceci posé, nous pouvons formuler de la manière suivante les résultats qu'on vient de démontrer:

Théorème 3. *Quand ϱ parcourt l'ensemble des fonctions représentatives normées des M_i dans G, les ϱ-isomorphismes de G dans $\mathfrak{G}$ ne diffèrent que par des automorphismes intérieurs propres de $\mathfrak{G}$ par rapport à l'élément distingué m.*

Remarque I. En particulier, *les images de G par ces ϱ-isomorphismes sont des sous-groupes de $\mathfrak{G}$ proprement conjugués par rapport à m.*

Remarque II. Si, la suite $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_s$ est une suite de composition (incomplète) de G, les ϱ-isomorphismes normés de G dans le produit complet $\mathfrak{G}$ des groupes abstraits $\Gamma_i \simeq G_{i-1}/G_i$ ne diffèrent que par des automorphismes propres de $\mathfrak{G}$, et les images de G dans $\mathfrak{G}$ sont des sous-groupes proprement conjugués de $\mathfrak{G}$.

2. $\varrho(x_i)$ et $\varrho'(x_i)$ étant deux fonctions représentatives normées des M_i dans G, on a, pour $i = 1, 2, \ldots, s$ et pour tout $x_i \in M_i$,

$$\varrho'(x_i) = \varrho(x_i)\,\mu_{x_i} \quad \text{où} \quad \mu_{x_i} \in G_i,$$

et, en particulier, μ_{m_i} est l'unité de G, car ϱ et ϱ' ont été supposées normées. Montrons qu'on a le

Lemme 2: *Pour que le ϱ-isomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ coïncide avec le ϱ'-isomorphisme, il est nécessaire et suffisant que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$ et pour tout $x_i \in M_i$, $\mu_{x_i} = \varrho(x_i)^{-1}\varrho'(x_i)$ appartienne au plus grand sous-groupe $\mathfrak{G}^*_{s,i}$ de $\mathfrak{G}_s$ invariant dans $\mathfrak{G}_i$.*

En effet, pour que les deux isomorphismes coïncident, il faut et il suffit que pour tout $X \in G/G_s$ on ait $\theta_\varrho . X = \theta_{\varrho'} . X$. Or, soient $\theta_\varrho . X = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ et $\theta_{\varrho'} . X = (x'_1, x_2, \ldots, x'_s)$. On a donc

$$X = \varrho(x_1)\,\varrho(x_2) \cdots \varrho(x_s)\,G_s \quad \text{et} \quad X = \varrho'(x'_1)\,\varrho'(x'_2) \cdots \varrho'(x'_s)\,G_s,$$

d'où

$$X = \varrho(x'_1)\,\mu_{x'_1}\,\varrho(x'_2)\,\mu_{x'_2} \cdots \varrho(x'_s)\,\mu_{x'_s}\,G_s.$$

Pour $i = 1, 2, \ldots, s$

$$\mu_{x'_i}\,\varrho(x'_{i+1})\mu_{x'_{i+1}} \cdots \varrho(x'_\cdot)\,\mu_{x'_s}\,G_s$$

appartient à $G_i/G_\cdot$, et, si $\mu_{x'_i}$ appartient au plus grand sous-groupe de G_s invariant das G_i, on a

$$\mu_{x'_i}[\varrho(x'_{i+1})\,M_{x'_{i+1}} \cdots \varrho(x'_s)\,\mu_{x'_s}]\,G_s = \varrho(x'_{i+1})\,M_{x_{i+1}} \cdots \varrho(x'_s)\,\mu_{x'_s}\,G_s.$$

On en conclut que, si la condition énoncée est remplie, on a

$$X = \varrho(x'_1)\,\varrho(x'_2) \cdots \varrho(x'_s)\,G_s,$$

d'où $$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_s) = (x_1, x_2, \ldots, x_s) \qquad \text{(Lemme 1).}$$

La condition est donc suffisante. D'ailleurs il est visible que si notre condition (μ_{x_i} appartient au plus grand sous-groupe de G_s invariant dans G_i) est satisfaite seulement pour les $i > j$, on a (ϱ et ϱ étant supposées normées) $\theta_\varrho . X = \theta_{\varrho'} . X$ pour tout $X \in G_j/G_s$.

Inversement, supposons que la condition énoncée ne soit pas remplie, et soit j le plus grand des indices $i=1,2,\ldots,s-1$ (μ_{x_s} remplit la condition automatiquement) tel qu'il existe un $z_j \in M_j$ pour lequel μ_{z_j} ne se trouve pas dans le plus grand sous-groupe de G_s invariant dans G_j. Par suite, il existe un $Y \in G_j/G_s$ tel que $\mu_{z_j} Y \neq Y$. Il est à remarquer qu'en vertu de notre hypothèse sur j, on a $\theta_\varrho . Y = \theta_{\varrho'} . Y$, c'est-à-dire que, si

$$Y = \varrho(x_{j+1}) \cdots \varrho(x_s) G_s, \text{ on a aussi } Y = \varrho'(x_{j+1}) \cdots \varrho'(x_s) G_s.$$

Soit $Z \in G/G_s$ la classe $\varrho(z_j) Y$. On a

$$Z = \varrho(m_1)\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_{j-1})\varrho(z_j) Y$$

et

$$\theta_\varrho . Z = (m_1, m_2, \ldots, m_{j-1}, z_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_s).$$

Supposons qu'on ait $\theta_\varrho . Z = \theta_{\varrho'} . Z$; nous allons montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction.

En effet, on aurait

$$Z = \varrho'(m_1)\varrho'(m_2)\cdots\varrho'(m_{j-1})\varrho'(z_j)\varrho'(x_{j+1})\cdots\varrho'(x_s) G_s =$$
$$= \varrho(m_1)\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_{j-1})\varrho(z_j)\mu_{z_j} Y.$$

Ainsi, on a $\varrho(m_1)\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_{j-1})\varrho(z_j) Y = \varrho(m_1)\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_{j-1})\varrho(z_j)\mu_{z_j} Y$ et par suite $\mu_{z_j} Y = Y$, contrairement à l'hypothèse $\mu_{z_j} Y \neq Y$. Ainsi $\theta_\varrho . Z \neq \theta_{\varrho'} . Z$, et la condition énoncée est nécessaire.

3. Soit F un autre groupe et soit

$$F = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_s$$

une suite de sous-groupes de F telle qui F_s soit anti-invariant dans F et que F_{i-1}/F_i soit identifié avec M_i. Ceci posé, supposons que F est $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphe avec G, et soit η un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme de G sur F. η permet d'établir une correspondance biunivoque entre les fonctions représentatives des M_i dans G et celles des M_i dans F. Il suffit pour cela d'associer à une fonction représentative $\varrho(x_i)$ $(i=1,2,\ldots,s;\ x_i \in M_i)$ des M_i dans G, la fonction

$$\varrho^*(x_i) = \varrho^\eta(x_i) = \eta \cdot \varrho(x_i),$$

qui est bien une fonction représentative des M_i dans F. Évidemment $\varrho^*(x_i)$ est normée si, et seulement si $\varrho(x_i)$ l'est.

Soient η_ϱ le ϱ-isomorphisme de G et η_{ϱ^*} le ϱ^*-isomorphisme de F dans $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$. Montrons qu'on a $\eta_\varrho = \eta_{\varrho^*} \eta$, ou, autrement dit:

Lemme 3. *Quel que soit $\sigma \in G$, son image $\eta_\varrho \cdot \sigma$ par η_ϱ est le même que l'image $\eta_{\varrho^*}(\eta \cdot \sigma)$ de $\eta \cdot \sigma$ par η_{ϱ^*}.*

Démonstration. Soit $X \in G/G_s$, et soit $X^* = \eta \cdot X$. Comme $\eta \cdot G_s = F_s$, X^* parcourt F/F_s quand X parcourt G/G_s, et $X \longrightarrow X^*$ est une correspondance biunivoque.

Si $\theta_\varrho \cdot X = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, on a $X = \varrho(x_1)\varrho(x_2)\cdots\varrho(x_s) G_s$, d'où

$$X^* = \eta \cdot X = [\eta \cdot \varrho(x_1)]\,[\eta \cdot \varrho(x_2)] \cdots [\eta \cdot \varrho(x_s)]\,[\eta \cdot G_s] = \varrho^*(x_1)\,\varrho^*(x_2) \cdots \varrho^*(x_s)\,F_s$$

et

$$\theta_{\varrho^*} \cdot X^* = (x_1, x_2, \ldots, x_s) = \theta_\varrho \cdot X.$$

Si $\sigma \in G$ et si l'on pose $\sigma^* = \eta \cdot \sigma$, on a $\sigma^* X^* = [\eta \cdot \sigma]\,[\eta \cdot X] = \eta \cdot \sigma X = (\sigma X)^*$, d'où $\theta_{\varrho^*} \cdot \sigma^* X^* = \theta_\varrho \cdot \sigma X$. Or, $\eta_\varrho \cdot \sigma$ est la permutation $\theta_\varrho \cdot X \to \theta_\varrho \cdot \sigma X$ de M, et $\eta_{\varrho^*} \cdot \sigma^*$ est la permutation $\theta_{\varrho^*} \cdot X^* \to \theta_{\varrho^*} \cdot \sigma^* X^*$ du même ensemble. En vertu de ce qui précède, ces deux permutations de M coïncident, et on a bien

$$\eta_{\varrho^*}\eta = \eta_\varrho. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce lemme nous sera fort utile dans la suite.

Un sous-groupe transitif $\bar{G}$ de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ sera dit représentatif s'il est l'image par le ϱ-isomorphisme d'un groupe G à l'aide d'une fonction représentative normée $\varrho(x_i)$.

Soit donc $\bar{G}$ un sous-groupe représentatif de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ et soit η_ϱ le ϱ-isomorphisme normé d'un groupe G sur $\bar{G}$. Nous savons que η_ϱ est un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme de G sur $\bar{G}$.

Soit $\bar{\varrho}(x_i)$ la fonction représentative des M_i dans $\bar{G}$, qui correspond à $\varrho(x_i)$ par l'application η_ϱ ($\bar{\varrho}(x_i) = \eta_\varrho \cdot \varrho(x_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$ et pour tout $x_i \in M_i$). Considérons le $\bar{\varrho}$-isomorphisme $\eta_{\bar{\varrho}}$ de $\bar{G}$ dans $\mathfrak{G}$. En vertu du Lemme 3, pour tout $\sigma \in G$ on a $\eta_\varrho \cdot \sigma = \eta_{\bar{\varrho}} \cdot (\eta_\varrho \cdot \sigma)$, c'est-à-dire que si $\bar{\sigma} = \eta_\varrho \cdot \sigma$, on a $\bar{\sigma} = \eta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{\sigma}$, et ceci pour tout $\bar{\sigma} \in \bar{G}$.

Nous voyons par conséquent que *le $\bar{\varrho}$-isomorphisme de $\bar{G}$ dans $\mathfrak{G}$*, défini à l'aide de la fonction représentative normée $\bar{\varrho}(x_i)$, *est l'isomorphisme identique*[6]). Ainsi, dans tout sous-groupe représentatif $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}$, on peut définir une fonction représentative normée $\bar{\varrho}(x_i)$ des M_i dans $\bar{G}$, telle que le $\bar{\varrho}$-isomorphisme de $\bar{G}$ dans $\mathfrak{G}$ soit l'isomorphisme identique. Une telle fonction représentative normée sera dite une *fonction superposante*. Par abus de langage, on dira que $\bar{G}$ *contient* une fonction superposante. Inversement, si un sous-groupe transitif $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}$ contient une fonction superposante $\bar{\varrho}(x_i)$, $\bar{G}$ est représentatif, puisqu'il est sa propre image par le $\bar{\varrho}$-isomorphisme. Par suite, on a le

Lemme 4. *Un sous-groupe transitif $\bar{G}$ de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ est représentatif si, et seulement s'il contient une fonction superposante.*

Soit $\bar{G}$ un sous-groupe représentatif de $\mathfrak{G}$. Une classe $\bar{X} \in \bar{G}/\bar{G}_s\langle m\rangle$ est l'ensemble $\sigma\bar{G}_s\langle m\rangle$ de tous les $\sigma \in \bar{G}$, tels que $\sigma \cdot m = \sigma \cdot (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ soit un même élément $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ de $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_s$, qui sera dit *l'élément correspondant* de $\bar{X}$.

$\bar{\varrho}(x_i)$ étant une fonction représentative normée des M_i dans $\bar{G}$, montrons que $\bar{\varrho}(x_i)$ *est une fonction superposante si, et seulement si pour tout*

6) Par suite, en un certain sens, les ϱ-isomorphismes normés de G sont des "projections" de G dans $\mathfrak{G}$.

$\overline{X} \in \overline{G}/\overline{G}_s<m>$, $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \overline{X}$ *coïncide avec l'élément* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ *correspondant à* X.

En effet, l'image σ' d'un élément σ de $\overline{G}$ par le $\bar{\varrho}$-isomorphisme est, par définition, la permutation $\sigma' = \{\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \overline{Y} \to \theta_{\bar{\varrho}} \cdot \sigma \overline{Y}\}$ $(\overline{Y} \in \overline{G}/\overline{G}_s<m>)$ de M.

Soit en particulier $\overline{Y} = \overline{G}_s<m>$. On a $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \overline{G}_s<m> = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$, car $\bar{\varrho}$ a été supposée normée. Par suite, σ' applique $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ sur $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \sigma \overline{G}_s<m>$. Si $\bar{\varrho}(x_i)$ est une fonction superposante, σ' coïncide avec σ et, par suite, $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \sigma \overline{G}_s<m>$ coïncide avec $\sigma \cdot m = \sigma \cdot (m_1, m_2, \ldots, m_s)$. Mais $\sigma \cdot m$ est l'élément x correspondant à la classe $\sigma \overline{G}_s<m> = \overline{X}$. La condition énoncée est donc nécessaire.

Inversement, supposons que cette condition soit remplie. Soit $y = (y_1, y_2, \ldots, y_s)$ un élément quelconque de M, et soit $\overline{Y} \in \overline{G}/\overline{G}_s<m>$ la classe de $\overline{G}$ suivant $\overline{G}_s<m>$ à laquelle correspond y. Visiblement, $\sigma \cdot y$ $(\sigma \in \overline{G})$ correspond à la classe $\sigma \overline{Y}$. (Ceci résulte du fait classique, indiqué au début de l'introduction, que $y \to \overline{Y}$ réalise la similitude de $\overline{G}$ avec sa représentation à l'aide de $\overline{G}_s<m>$). La condition énoncée étant supposée remplie, on a $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \overline{Y} = y$ et $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \sigma \overline{Y} = \sigma \cdot y$, et par suite,

$$\sigma' = \{\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \overline{Y} \to \theta_{\bar{\varrho}} \cdot \sigma \overline{Y}\} = \{y \to \sigma \cdot y\},$$

où y parcourt M. Donc $\sigma' = \sigma$, et $\bar{\varrho}(x_i)$ est une fonction superposante. La condition est donc suffisante. C. Q. F. D.

$\overline{G}$ étant un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ et $\overline{\overline{G}}$ étant un sur-groupe de $\overline{G}$ ($\overline{\overline{G}}$ est donc également transitif), $\overline{G}_{i-1}<m>/\overline{G}_i<m>$ et $\overline{\overline{G}}_{i-1}<m>/\overline{\overline{G}}_i<m>$ sont m-identifiés avec l'ensemble M_i tout entier $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Par conséquent, toute fonction représentative $\bar{\varrho}(x_i)$ des M_i dans $\overline{G}$ est automatiquement une fonction représentative des M_i dans $\overline{\overline{G}}$. En particulier, c'est une fonction représentative du groupe $\mathfrak{G}$ tout entier.

Soit $\overline{X}$ une classe suivant $\overline{G}_s<m>$ dans $\overline{G}$, et soit $\overline{\overline{X}} = \overline{X}\,\overline{\overline{G}}_s<m>$ la classe suivant $\overline{\overline{G}}_s<m>$, qui la contient. Alors, d'une part, tous les $\sigma \in \overline{\overline{X}}$ transforment m en un même élément $\bar{\bar{x}}$ de M, qui est égal, en particulier, au transformé $\bar{x}$ de m par les $\sigma \in \overline{X}$. D'autre part, si $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, on a

$$\overline{X} = \bar{\varrho}(x_1)\,\bar{\varrho}(x_2) \ldots \bar{\varrho}(x_s)\ \overline{G}_s<m>,$$

d'où résulte

$$\overline{\overline{X}} = \bar{\varrho}(x_1)\,\bar{\varrho}(x_2) \ldots \bar{\varrho}(x_s)\ \overline{G}_s<m>\,\overline{\overline{G}}_s<m> = \bar{\varrho}(x_1)\,\bar{\varrho}(x_2) \ldots \bar{\varrho}(x_s)\,\overline{\overline{G}}_s<m>,$$

et on a

$$\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \overline{\overline{X}} = (x_1, x_2, \ldots, x_s) = \theta_{\bar{\varrho}} \cdot \overline{X}.$$

Si $\bar{\varrho}(x_i)$ est une fonction superposante de $\overline{G}$, on a, pour tout $\overline{X} \in \overline{G}/\overline{G}_s<m>$, $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \overline{X} = \bar{x}$; d'où, puisque $\overline{\overline{X}} = \overline{X}\,\overline{\overline{G}}_s<m>$ parcourt $\overline{\overline{G}}/\overline{\overline{G}}_s<m>$ quand $\overline{X}$ parcourt $\overline{G}/\overline{G}_s<m>$, et puisque on a $\bar{\bar{x}} = \bar{x}$ et $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \overline{\overline{X}} = \theta_{\bar{\varrho}} \cdot \overline{X}$, il résulte, pour tout $\overline{\overline{X}} \in \overline{\overline{G}}/\overline{\overline{G}}_s<m>$, l'égalité $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \overline{\overline{X}} = \bar{\bar{x}}$. En vertu du critère précédent, ceci montre que $\bar{\varrho}(x_i)$ est aussi une fonction superposante de $\bar{\bar{G}}$, et $\bar{\bar{G}}$ est représentatif.

Nous voyons donc que *tout sur-groupe d'un groupe représentatif est également représentatif.* En particulier, $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ *est représentatif, et toute fonction superposante d'un sous-groupe représentatif* $\bar{G}$ *de* $\mathfrak{G}$ *est une fonction superposante de* $\mathfrak{G}$. Pour déterminer les sous-groupes représentatifs de $\mathfrak{G}$, il suffit donc de déterminer toutes les fonctions superposantes de $\mathfrak{G}$.

Lemme 5. *Pour qu'une fonction représentative normée* $\varrho(x_i)$ *des* M_i *dans* $\mathfrak{G}$ *soit une fonction superposante, il faut et il suffit que pour* $i = 1, 2, \ldots, s$, *et pour tout* $x_i \in M_i$, $\varrho(x_i)$ *soit une permutation de* M, *telle qu'on ait, pour tout* $(z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots, z_s) \in {}^iM$,

$$\varrho(x_i)\cdot(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i, z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots, z_s) = (m_1, \ldots, m_{i-1}, x_i, z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots, z_s).$$

Démonstration. Supposons que la condition énoncée soit remplie.

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ un élément quelconque de M. En vertu de la condition énoncée, on a

$$\varrho(x_1)\,\varrho(x_2),\ldots,\varrho(x_s)\cdot(m_1, m_2, \ldots, m_s) = \varrho(x_1)\,\varrho(x_2)\ldots\varrho(x_{s-1})\cdot(m_1, m_2, \ldots, m_{s-1}, x_s) =$$
$$= \varrho(x_1)\,\varrho(x_2)\ldots\varrho(x_{s-2})\cdot(m_1, m_2, \ldots, m_{s-2}, x_{s-1}, x_s) = \ldots$$
$$= \varrho(x_1)\cdot(m_1, x_2, \ldots, x_s) = (x_1, x_2, \ldots, x_s) = x,$$

et, par conséquent, l'élément de M correspondant à la classe $X = \varrho(x_1)\,\varrho(x_2)\ldots\varrho(x_s)\,G_s\langle m\rangle$ est x. D'autre part, on a également $\theta_\varrho\cdot X = (x_1, x_2, \ldots, x_s) = x$, et, par suite, $\varrho(x_i)$ est une fonction superposante. Ainsi, la condition énoncée est suffisante.

Inversement, supposons que $\varrho(x_i)$ soit une fonction superposante. Comme, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$ et pour tout $x_i \in M_i$, $\varrho(x_i)$ est sa propre image par le ϱ-isomorphisme, on a

$$\varrho(x_i) = \{\theta_\varrho\cdot X \longrightarrow \theta_\varrho\cdot\varrho(x_i)X\} \quad (X \in G/G_s\langle m\rangle).$$

En particulier, ceci est vrai pour les classes Z contenues dans $G_i\langle m\rangle$. Donc

$$\theta_\varrho\cdot\varrho(x_i)Z = \varrho(x_i)\cdot(\theta_\varrho\cdot Z).$$

$\varrho(x_i)$ étant supposée normée, on a, pour tout $Z \in G_i\langle m\rangle / G_s\langle m\rangle$,

$$\theta_\varrho\cdot Z = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, m_i, z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots, z_s),$$

où $(z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots, z_s)$ parcourt ${}^iM$ quand Z parcourt $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle / \mathfrak{G}_s\langle m\rangle$; on a

$$Z = \varrho(m_1)\,\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_i)\,\varrho(z_{i+1})\cdots\varrho(z_s)\,\mathfrak{G}_s\langle m\rangle.$$

Comme tout $\varrho(m_i)$ coïncide avec l'unité de $\mathfrak{G}$, on a

$$\varrho(x_i)\,Z = \varrho(x_i)\,\varrho(m_1)\,\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_i)\,\varrho(z_{i+1})\cdots\varrho(z_s)\,\mathfrak{G}_s\langle m\rangle =$$
$$= \varrho(m_1)\,\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_i)\,\varrho(x_i)\,\varrho(z_{i+1})\cdots\varrho(z_s)\,\mathfrak{G}_s\langle m\rangle,$$

d'où

$$\theta_\varrho\cdot\varrho(x_i)\,Z = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \ldots, z_s),$$

ce qui montre que

$$\varrho(x_i)\cdot(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, m_i, z_{i+1}, \ldots, z_s) = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \ldots, z_s).$$

C. Q. F. D.

Nous dirons qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$ est *normale* par rapport à m, si ${}^i\sigma(m^i)$ est la permutation identique de ${}^iM$ (ceci équivaut précisément à la condition que, pour tout $(z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots, z_s) \in {}^iM$,

$$\sigma(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i, z_{i+1}, \ldots, z_s) = (m_1, \ldots, m_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \ldots, z).$$[7])

Avec cette convention, nous pouvons formuler le résultat du présent alinéa sous la forme du théorème suivant:

Théorème 4. *Un sous-groupe transitif G du produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ est représentatif si, et seulement si, pour $i = 1, 2, \ldots, s$, toute classe de $G_{i-1}\langle m\rangle$ suivant $G_i\langle m\rangle$ possède une permutation normale (par rapport à m).*

4. Nous savons que, pour une fonction représentative normée, le ϱ-isomorphisme d'un groupe G dans $\mathfrak{G}$ est un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme. Dans l'alinéa 1 du présent paragraphe nous avons montré que, pour deux fonctions représentatives normées $\varrho(x_i)$ et $\tau(x_i)$, les images de G dans $\mathfrak{G}$ par le ϱ-isomorphisme et par le τ-isomorphisme ne diffèrent que par un automorphisme intérieur propre de $\mathfrak{G}$.

Nous allons montrer plus généralement qu'*on obtient toujours des $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphismes de G dans $\mathfrak{G}$ en effectuant d'abord un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme fixe de G dans $\mathfrak{G}$* (l'existence d'un tel $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme est assurée, en vertu du théorème de l'immersion, par un ϱ-isomorphisme relatif à une fonction représentative normée $\varrho(x_i)$ des M_i dans G), *et en effectuant ensuite un automorphisme intérieur propre de $\mathfrak{G}$, et que de cette manière on les obtient tous.*[8])

Si l'on passe à l'image $\bar{G}$ de G par un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$, il est visible que le résultat à démontrer équivaut au théorème suivant.

Théorème 5. I. *Si $\bar{G}$ est un sous-groupe transitif du produit complet $\mathfrak{G}$, et si $\lambda \in \mathfrak{G}$ appartient à $\bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i^*\langle m\rangle$, l'application $\bar{\sigma} \longrightarrow \lambda\bar{\sigma}\lambda^{-1}$ $(\bar{\sigma} \in G)$ est un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme de $\bar{G}$ sur $\lambda\bar{G}\lambda^{-1}$.*

II. *Si $\bar{G}$ et $\bar{\bar{G}}$ sont deux sous-groupes transitifs de $\mathfrak{G}$, et si $\eta = \{\bar{\sigma} \longrightarrow \bar{\bar{\sigma}}\}$*

---

[7]) Remarquons que cette condition est automatiquement remplie par les $\sigma \in \mathfrak{G}_{s-1}\langle m\rangle$.

[8]) Nous tenons à souligner qu'il *n'est pas en général vrai* que tous les $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphismes de G dans $\mathfrak{G}$ peuvent être obtenus par des ϱ-isomorphismes pour des choix convenables des fonctions représentatives normées $\varrho(x_i)$. Les ϱ-isomorphismes ne constituent qu'une classe particulièrement importante des $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphismes de G dans $\mathfrak{G}$. On le verra dans l'alinéa suivant.

$(\bar{\sigma} \in \bar{G};\ \bar{\bar{\sigma}} \in \bar{\bar{G}})$ *est un* $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$*-isomorphisme de* $\bar{G}$ *sur* $\bar{\bar{G}}$*, il existe un* $\lambda \in \bigcap\limits_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i^* < m >$, *tel que l'isomorphisme* η *soit réalisé par l'automorphisme intérieur de* $\mathfrak{G}$ *correspondant à* λ *(c'est-à-dire que pour to t* $\bar{\sigma} \in \bar{G}$ *on ait* $\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \bar{\sigma} \lambda^{-1}$*).*

Démonstration. I. Soit $(\lambda) = \{\sigma \rightarrow \lambda\sigma\lambda^{-1}\}$ un automorphisme intérieur propre de $\mathfrak{G}$. Montrons que (λ) est un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme. Il est visible qu'alors (λ) induit un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme de $\bar{G}$ sur $G = \lambda \bar{G} \lambda^{-1}$.

Puisque λ appartient à $\mathfrak{G}_i^* < m >$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$, on a

$$\lambda \cdot (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *) = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *).$$

Ainsi, si X_i est la classe dans $\mathfrak{G}_{i-1} < m >$ suivant $\mathfrak{G}_i < m >$ m-identifiée avec x_i, la classe $(\lambda) \cdot X_i = \lambda X_i \lambda^{-1} = \lambda X_i$ est m-identifiée avec le même élément x_i, et coïncide, par suite, avec X_i. Donc, (λ) satisfait aux conditions *a)* (pour $X_i = \mathfrak{G}_i < m >$) et *b)* de la définition des $(M_1, M_2, \ldots, M\ )$-isomorphismes.

En outre, si $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1} < m >$, on a

$$[(\lambda) \cdot \sigma]\, X_i = [(\lambda) \cdot \sigma]\, [(\lambda) \cdot X_i] = (\lambda) \cdot \sigma X_i = \sigma X_i$$

(car $(\lambda) \cdot X_i = X_i$ et $\sigma X_i \in \mathfrak{G}_{i-1} < m >\ \mathfrak{G}_i < m >$), donc la permutation de M_i qui correspond à $(\lambda) \cdot \sigma$ est la même que celle qui correspond à σ, et (λ) satisfait également à la condition *c)* de la définition des $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphismes.

II. Choisissons une fonction représentative normée $\bar{\varrho}(x_i)$ des M_i dans $\bar{G}$, et soit $\bar{\bar{\varrho}}(x_i) = \eta \cdot \bar{\varrho}(x_i)$ la fonction représentative normée des M_i dans $\bar{\bar{G}}$, image de $\varrho(x_i)$ par un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme η de $\bar{G}$ sur $\bar{\bar{G}}$. En vertu du Lemme 3, les images de $\bar{G}$ dans $\mathfrak{G}$ par le $\bar{\varrho}$-isomorphisme $\eta_{\bar{\varrho}}$ et de $\bar{\bar{G}}$, dans $\mathfrak{G}$ par le $\bar{\bar{\varrho}}$-isomorphisme $\eta_{\bar{\bar{\varrho}}}$ coïncident. (Cette image commune est un certain sous-groupes $\bar{\bar{\bar{G}}}$ de $\mathfrak{G}$) et, plus généralement, on a $\eta = \eta_{\bar{\bar{\varrho}}}^{-1}\, \eta_{\bar{\varrho}}$; il suffit donc de démontrer que les isomorphismes $\eta_{\bar{\varrho}}$ et $\eta_{\bar{\bar{\varrho}}}$ sont induits par des automorphismes intérieurs propres de $\mathfrak{G}$.

Comme $\mathfrak{G}$ est un groupe représentatif, il contient une fonction superposante $\tau(x_i)$. Le τ-isomorphisme η_τ de $\mathfrak{G}$ est l'isomorphisme identique de $\mathfrak{G}$ sur lui-même et induit, par conséquent, l'isomorphisme identique sur $\bar{G}$. Par suite, pour tout $\bar{\ } \in G$ on a $\eta_\tau \cdot \bar{\sigma} = \bar{\sigma}$.

Nous avons vu que $\bar{\varrho}(x_i)$ est également une fonction représentative normée de $\mathfrak{G}$. Soit $\tilde{\eta}_{\bar{\varrho}}$ le $\bar{\varrho}$-isomorphisme de $\mathfrak{G}$ dans lui-même. Sa restriction à $\bar{G}$ est $\eta_{\bar{\varrho}}$. En vertu du résultat de l'alinéa 1 du présent paragraphe, η_τ ne diffère de $\tilde{\eta}_\varrho$ que par un automorphisme intérieur propre (λ_1) de $\mathfrak{G}$. On a donc $\tilde{\eta}_\varrho = (\lambda_1)\, \eta_\tau$ et, pour tout $\bar{\sigma} \in G$,

$$\eta_\varrho \cdot \bar{\sigma} = \tilde{\eta}_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{\sigma} = (\lambda_1)\, \eta_\tau \cdot \bar{\sigma} = (\lambda_1) \cdot (\eta_\tau \cdot \bar{\sigma}) = (\lambda_1) \cdot \bar{\sigma}.$$

On démontre de la même manière l'existence d'un automorphisme intérieur propre (λ_2) de $\mathfrak{G}$, tel que pour tout $\bar{\bar{\sigma}} \in \bar{\bar{G}}$ on ait $\eta_{\bar{\bar{\sigma}}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} = (\lambda_2) \cdot \bar{\bar{\sigma}}$. Il en résulte que $\eta = (\lambda_2)^{-1} (\lambda_1) = (\lambda_2^{-1} \lambda_1)$. C. Q. F. D.

Considérons les groupes satisfaisant (pour $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ et pour $m \in M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_s$ fixe) aux conditions du présent paragraphe. Soit C^* une classe de tels groupes $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphes. Si C est l'ensemble des groupes de cette classe C^* qui sont des sous-groupes de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$, en vertu du théorème précédent, C est une classe des sous-groupes proprement conjugués (relativement à m) de $\mathfrak{G}$, car deux sous-groupes transitifs de $\mathfrak{G}$ sont $(M_1, M_2, \ldots M_s)$-isomorphes si, et seulement s'ils sont proprement conjugués.

Ainsi, $C^* \longrightarrow C$ établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble $Q^*(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s; m)$ des classes de tels groupes $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphes et l'ensemble $Q(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s; m)$ des classes de sous-groupes transitifs proprement conjugués (relativement à m) de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$. D'ailleurs, si G est un groupe appartenant à une classe C^*, et si $\varrho(x_i)$ est une fonction représentative normée des M_i dans G, l'image de G par le ϱ-isomorphisme, qui est $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphe à G, se trouve dans la classe C de sous-groupes de $\mathfrak{G}$ proprement conjugués qui correspond à C^*. En particulier, les images des $G \in C$ par leurs ϱ-isomorphismes normés appartiennent à C.

5. Montrons qu'il existe des sous-groupes du produit complet qui ne sont pas représentatifs.

Considérons le produit complet $\mathfrak{P}_3$ de trois groupes cycliques $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$ de p éléments. Soit G le groupe des tableaux $A = [a, a(x_1), a(x_1, x_2)]$ tels que $a(x_1)$ et $a(x_1, x_2)$ soient des constantes $b \in \Gamma_2$ et $c \in \Gamma_3$ (G est le groupe qui a été identifié au § 2 avec $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3$). Le nombre des groupes représentatifs parmi les groupes proprement conjugués de G ne dépasse pas celui des fonctions représentatives normées des $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ dans G. Or, remarquons que l'ordre de G_1 est p^2, celui de G_2 est p, et celui de G_3 est 1. Ainsi, si $\varrho(x_i)$ parcourt l'ensemble des fonctions représentatives normées des Γ_i dans G, $\varrho(e_i)$ prend une seule valeur (unité e de G), et si $x_i \neq e_i$, $\varrho(x_i)$ prend p^{3-i} valeurs. Par suite, le nombre de ces fonctions est

$$(p^2)^{p-1} p^{p-1} 1^{p-1} = (p^3)^{p-1} = p^{3(p-1)}.$$

D'autre part, un $\lambda = [l, l(x_1), l(x_1, x_2)]$ induit un automorphisme intérieur propre de $\mathfrak{P}_3$ si, et seulement si

$$l = e_1, l(e_1) = e_2, l(e_1, e_2) = e_3.$$

Le nombre de tels λ est donc

$$p^{p-1} p^{p^2-1} = p^{p^2+p-2}.$$

Le nombre des groupes proprement conjugués distincts de G est le quotient de ce nombre par celui des $\lambda \in \mathfrak{G}_3$ qui sont dans le normalisateur $N(G$ de G. Or, un

$$\lambda = [l, l(x_1), l(x_1, x_2)]$$

est dans $N(G)$ si, et seulement si, pour tout $\sigma=[a,b,c]\in G$, il existe un $\sigma'=[a',b',c']\in G$, tel que $\lambda\sigma=\sigma'\lambda$, et inversement.

Or, on a, vu la commutativité des Γ_i,

$$\lambda\sigma=[l,l(x_1),l(x_1,x_2)]\,[a,b,c]=[la,l(ax_1)\,b,l(ax_1,bx_2)\,c],$$
$$\sigma'\lambda=[a',b',c']\,[l,l(x_1),l(x_1,x_2)]=[la',l(x_1)\,b',l(x_1,x_2)\,c'].$$

Donc il faut et il suffit que pour tout $(x_1,x_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2$ on ait

$$la=la',\quad l(ax_1)\,b=l(x_1)\,b',\quad l(ax_1,bx_2)\,c=l(x_1,x_2)\,c'.$$

Donc on a $a'=a$; si $a=e_1$, on n'a qu'à prendre $b'=b$; si $a\neq e_1$, a est un élément générateur de Γ_1, et $l(ax_1)\,l(x_1)^{-1}$ doit être la constante $\bar b=b'\,b^{-1}$ indépendante de x_1. Par suite, si $\bar b$ est la puissance a^j $(j=1,2,\dots,p)$ de a, on a, si $x_1=a^t$,

$$l(x_1)=l(a^t)=\bar b\,l(a^{t-1})=\bar b^2\,l(a^{t-2})=\dots=\bar b^t\,l(e_1)=\bar b^t=a^{jt}=x_1^j.$$

Ceci étant satisfait, il suffit de prendre $b'=ba^j$, pour satisfaire à la seconde égalité. Enfin, la troisième égalité entraîne, a,b étant des éléments générateurs des Γ_1,Γ_2, que $l(ax_1,x_2)\,l(x_1,x_2)^{-1}$ et $l(x_1,bx_2)\,l(x_1,x_2)^{-1}$ doivent être deux constantes τ et $\bar\tau$, appartenant à Γ_3; indépendantes de x_1,x_2. Par suite, si $\tau=a^{j_1}$, et si $\bar\tau=b^{j_2}$, on a comme précédemment, en posant $x_1=a^{t_1}$, $x_2=b^{t_2}$,

$$l(x_1,x_2)=l(a^{t_1},x_2)=\tau^{t_1}\,l(e_1,x_2)=\tau^{t_1}\,l(e_1,b^{t_2})=$$
$$=\tau^{t_1}\bar\tau^{t_2}\,l(e_1,e_2)=\tau^{t_1}\bar\tau^{t_2}=a^{j_1t_1}\,b^{j_2t_2}=x_1^{j_1}x_2^{j_2}.$$

Inversement, ceci étant, il suffit pour satisfaire à la troisième égalité de prendre $c'=a^{j_1}b^{j_2}c$.

Ainsi, l'ordre cherché de $\mathfrak{G}_3\cap N(G)$ est p^3, et ainsi, le nombre des groupes proprement conjugués de G est

$$p^{p^2+p-2}:p^3=p^{p^2+p-5};$$

si $p\geqq 3$, on a

$$p^2+p-5\geqq 4p-5\geqq 3p-2>3(p-1)$$

et p^{p^2+p-5} est plus grand que le nombre des groupes représentatifs proprement conjugués de G. Il existe donc bien des groupes qui ne sont pas représentatifs.

6. Soit G un groupe abstrait es $\tau(x_i)$ une fonction représentative normée fixe des M_i dans G, et soit $\bar G$ l'image de G dans $\mathfrak{G}=\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\dots\circ\Gamma_s$ par le τ-isomorphisme η_τ. $\varrho(x_i)$ étant une autre fonction représentative normée des M_i dans G, nous savons que η_ϱ ne diffère de η_τ que par un automorphisme intérieur propre $(\lambda)=\{\sigma\to\lambda\sigma\lambda^{-1}\}$ de G.

Dans le présent alinéa nous allons déterminer explicitement, à partir de l'image $\bar G$ de G dans $\mathfrak{G}$, l'ensemble Λ des $\lambda\in\bigcap_{i=1}^{s}\mathfrak{G}^*\langle m\rangle$ provenant du passage de $\tau(x_i)$ *à toutes* les fonctions représentatives normées $\varrho(x)$ des M_i dans G.

A cet effet, introduisons tout d'abord quelques groupes dont on aura besoin dans la suite et démontrons à leurs propos un lemme.

$\varrho(x_i)$ étant une fonction représentative normée, soit G' l'image de G dans $\mathfrak{G}$ par le ϱ-isomorphisme. Considérons, pour tout $i=1,2,\ldots,s$, le groupe $G'_i<m>$. L'image de ce groupe $G'_i<m>$ par l'application[9])

$$\sigma' \to {}^i\sigma'(m^i) \qquad (\sigma' \in G'_i<m>)^{10})$$

qui est un sous-groupe de ${}^i\mathfrak{G} = \Gamma_{i+1} \circ \Gamma_{i+2} \circ \cdots \circ \Gamma_s$ homomorphe à $G'_i<m>$ (car tout $\sigma' \in G'_i<m>$ conserve m^i) sera désignée par $P_i(G')$.[11])

L e m m e 6. *$\varrho'(x_i)$, $\varrho''(x_i)$ étant deux fonctions représentatives normées des M_i dans G, et G', G'' étant les images de G dans $\mathfrak{G}$ par le ϱ'-isomorphisme $\eta_{\varrho'}$ et par le ϱ''-isomorphisme $\eta_{\varrho''}$, si pour tout $j>l$ et pour tout $x_j \in M_j$ on a $\varrho'(x_j)=\varrho''(x_j)$, alors $P_l(G')=P_l(G'')$.*[12])

D é m o n s t r a t i o n. Si σ' est un élément de $G'_l<m>$, on a par définition

$$\sigma' \cdot (m^l, {}^lx) = (m^l, {}^l\sigma'(m^l) \cdot {}^lx).$$

Par conséquent, si σ' (resp. σ'') sont les images d'un $\sigma \in G_l$ par le ϱ'-isomorphisme (resp. par le ϱ''-isomorphisme), on a ${}^l\sigma'(m^l) = {}^l\sigma''(m^l)$, si σ' et σ'' induisent une même application sur la classe m^l (mod D_l) dans M. Or, il suffit pour cela, puisque on a $\sigma' = \theta_{\varrho'}\{X \to \sigma X\}\theta_{\varrho'}^{-1}$ et $\sigma'' = \theta_{\varrho''}\{X \to X\}\theta_{\varrho''}^{-1}$ $(X \in G/G_s)$, que les images réciproques de m^l par $\theta_{\varrho'}$ et $\theta_{\varrho''}$ coïncident, et que $\theta_{\varrho'}$ et $\theta_{\varrho''}$ induisent une même application de cette image réciproque. Mais, puisque $\varrho'(x_i)$ et $\varrho''(x_i)$ sont normées, les images réciproques de m^l par $\theta_{\varrho'}$ et par $\theta_{\varrho''}$ coïncident toutes les deux avec G_l/G_s. D'autre part, on a vu que dans ces conditions, si $X \in G_l/G_s$, $\theta_{\varrho'} \cdot X$ et $\theta_{\varrho''} \cdot X$ ne dépendent que de $\varrho'(x_j)$ (resp. de $\varrho''(x_j)$) pour $j>l$; car alors, si

$$\theta_{\varrho'} \cdot X = (m_1, m_2, \ldots, m_l, x_{l+1}, \ldots, x_s),$$

on a

$$X = \varrho'(m_1)\,\varrho'(m_2)\ldots\varrho'(m_l)\,\varrho'(x_{l+1})\ldots\varrho'(x_s)\,G_s = \varrho'(x_{l+1})\ldots\varrho'(x_s)\,G_s.$$

Comme pour tout $j>l$, $\varrho''(x_j)=\varrho'(x_j)$, on a pour tout $X \in G_l/G_s$, $\theta_{\varrho'} \cdot X = \theta_{\varrho''} \cdot X$, ce qui démontre le lemme.

Nous dirons que deux fonctions représentatives normées $\bar\varrho(x_i)$ et $\bar{\bar\varrho}(x_i)$ des M_i dans G sont *contigües à l'étage j* si leurs valeurs ne sont différentes que sur M_j, c'est-à-dire que si $\bar\varrho(x_i) = \bar{\bar\varrho}(x_i)$ pour $i \neq j$.

Il est visible, que deux fonctions représentatives normées $\varrho(x_i)$ et $\varrho'(x_i)$ quelconques peuvent être reliées par une chaîne

$$\varrho(x_i) = \varrho_0(x_i),\ \varrho_1(x_i), \ldots, \varrho_s(x_i) = \varrho'(x_i)$$

---

9) Voir § 1, p. 218.

10) Si, dans la notation par les tableaux, on a $\sigma' = [a, a(x_1), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})]$, ${}^i\sigma'(m^i)$ est le tableau

$$[a(m_1, m_2, \ldots, m_i), a(m_1, m_2, \ldots, m_i, x_{i+1}), a(m_1, m_2, \ldots, m_i, x_{i+1} \ldots x_{s+1})] \in {}^i\mathfrak{G}.$$

11) Il est à remarquer que $P_s(G')$ se réduit toujours à l'élément unité.

12) Si l'on considère la fonction représentative $\nu(x_k) = \varrho(x_k)$ $(k=i+1, i+2, \ldots, s)$ des M_k, $k>i$, dans G_i, on remarque sans peine que $P_i(G')$ est tout simplement l'image de G_i dans ${}^i\mathfrak{G} = \Gamma_{i+1} \circ \Gamma_{i+1} \circ \ldots \circ \Gamma_s$ par le ν-isomorphisme.

de fonctions représentatives normées $\varrho_j(x)$, telle que $\varrho_{j-1}(x_i)$ et $\varrho_j(x_i)$ soient contigües à l'étage j pour $j=1, 2, \ldots, s$, et que cette chaîne est univoquement déterminée.

Si λ_j est la permutation $\theta_{\varrho_{j-1}}\cdot X \longrightarrow \theta_{\varrho_j}\cdot X$ $(X \in G/G_s)$ de M, qui provient du passage de $\varrho_{j-1}(x_i)$ à $\varrho_j(x_i)$, la permutation $\theta_\varrho \cdot X \longrightarrow \theta_{\varrho'}\cdot X$ qui provient du passage de $\varrho(x_i)$ à $\varrho'(x_i)$ est évidemment $\lambda_s \lambda_{s-1} \ldots \lambda_2 \lambda_1$.

Déterminons chacun des λ_j. Soient $\vartheta(x_i)$ et $\vartheta'(x_i)$ deux fonctions représentatives normées des M_i dans G, contigües à l'étage j. On a donc $\vartheta(x_i) = \vartheta'(x_i)$ pour $i \neq j$ et $\vartheta(x_j) = \vartheta'(x_j)\,\mu_{x_j}$.

μ_{x_j} appartient à G_j et, puisque $\vartheta(x_i)$ et $\vartheta'(x_i)$ sont normées, μ_{m_j} est l'unité de G. λ étant l'élément de $\bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i^* <m>$ provenant du passage de $\vartheta(x_i)$ à $\vartheta'(x_i)$, on a vu que $\theta_{\vartheta'}\cdot X = \lambda\cdot(\theta_\vartheta \cdot X)$. Ainsi, pour déterminer λ, il suffit d'examiner la relation entre les applications θ_ϑ et $\theta_{\vartheta'}$ de G/G_s sur M.

Soit $X \in G/G_s$, et soient

$$\theta_\vartheta \cdot X = (x_1, x_2, \ldots, x_s), \quad \theta_{\vartheta'}\cdot X = (x_1', x_2', \ldots x_s').$$

On a alors d'une part

$$X = \vartheta'(x_1')\,\vartheta'(x_0') \ldots \vartheta'(x_s')\,G_s =$$
$$= \vartheta(x_1')\,\vartheta(x_2') \ldots \vartheta(x_{j-1}')\,\vartheta(x_j')\,\mu_{x_j}^{-1}\,\vartheta(x_{j+1}') \ldots \vartheta(x_s')\,G_s$$

et d'autre part

$$X = \vartheta(x_1)\,\vartheta(x_2) \ldots \vartheta(x_{j-1})\,\vartheta(x_j)\,\vartheta(x_{j+1}) \ldots \vartheta(x_s)\,G_s.$$

Nous voyons donc que

$$x_1' = x_1,\ x_2' = x_2, \ldots, x_j' = x_j$$

et que

$$\vartheta(x_{j+1})\,\vartheta(x_{j+2}) \ldots \vartheta(x_s)\,G_s = \mu_{x_j}^{-1}\vartheta(x_{j+1}')\,\vartheta(x_{j+2}') \ldots \vartheta(x_s')\,G_s,$$

ou

$$\mu_{x_j}\,\vartheta(x_{j+1})\,\vartheta(x_{j+2}) \ldots \vartheta(x_s)\,G_s = \vartheta(x_{j+1}')\,\vartheta(x_{j+2}') \ldots \vartheta(x_s')\,G_s.$$

$\vartheta(x_i)$ étant normée, la dernière égalité équivaut à

$$\vartheta(m_1) \ldots \vartheta(m_j)\,\vartheta(x_{j+1}') \ldots \vartheta(x_s')\,G_s = \mu_{x_j}\,\vartheta(m_1) \ldots \vartheta(m_j)\,\vartheta(x_{j+1}) \ldots \vartheta(x_s) G_s.$$

Ainsi, si $\bar\mu_{x_j} \in \mathfrak{G}$ est l'image de μ_{x_j} par le ϑ-isomorphisme η_ϑ de G dans $\mathfrak{G}$, on a

$$(m_1, m_2, \ldots, m_j, x_{j+1}', \ldots, x_s') = \bar\mu_{x_j}\cdot(m_1, m_2, \ldots m_j, x_{j+1}, \ldots, x_s)$$

et

$${}^j(x') = (x_{j+1}', x_{j+2}', \ldots, x_s') = {}^j\bar\mu_{x_j}(m^j)\cdot(x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_s) = {}^j\bar\mu_{x_j}(m^j)\cdot{}^jx.$$

Par suite, pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s) = (x^j, {}^jx) \in M$ on a

$$\lambda\cdot x = \lambda\cdot(x^j, {}^jx) = \lambda\,(x_1, x_2, \ldots, x_j, {}^jx) = (x_1, x_2, \ldots, x_j, {}^j\bar\mu_{x_j}(m^j)\cdot{}^jx),$$

ce qui détermine la permutation $\lambda = \theta_{\vartheta'}\theta_\vartheta^{-1}$ cherchée.

Remarquons que comme, pour $x_j = m_j$, μ_{m_j} est l'unité de G, $\bar\mu_{m_j}$ est la permutation identique de M. On a donc $\lambda\cdot(x_1, x_2, \ldots, x_{-1}, m_j, x_{j+1}, \ldots, x_s) =$

$=(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, m_j, x_{j+1}, \ldots, x_s)$. D'autre part, puisque pour tout $x_j \in M_j$, μ_{x_j} appartient à G_j, $\bar{\mu}_{x_j}(m_j)$ est un élément de $P_j(G')$ (en désignant par G' l'image de G dans $\mathfrak{G}$ par le ϑ-isomorphisme η_ϑ).

Nous pouvons formuler ce résultat intermédiaire comme suit :

La permutation λ de M qui provient du passage d'une fonction représentative normée $\vartheta(x_i)$ contigüe à $\vartheta'(x_i)$ à l'étage j, possède les propriétés suivantes :

1. *λ conserve* $\operatorname{mod} D_j$ *tout $x \in M$* (λ appartient donc à ${}^j\Delta$).

2. *Pour tout $z^j \in M^j$ tel que $(z^j)_j = x_j$* (c'est-à-dire tel que les éléments z de z^j, considérés comme une classe $\operatorname{mod} D_j$ dans M, soient de la forme $(z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}, x_j, y_{j+1}, y_{j+2}, \ldots, y_s)$), *$\lambda$ induit dans la classe z^j une même permutation des j-restes ${}^jz = (y_{j+1}, y_{j+2}, \ldots, y_s)$ de $z \in z^j$. Cette permutation induite est un élément de $P_j(G')$, à savoir c'est la permutation* ${}^j\bar{\mu}_{x_j}(n^j)$. (Rappelons que ${}^j\bar{\mu}_{x_j}$ est la restriction à la classe m^j (mod D_j dans M) de l'image $\bar{\mu}_{x_j}$ de l'élément $\mu_{xj} = \vartheta'(x_j)^{-1}\vartheta(x_j)$ de G).

3. *λ induit la permutation identique dans toute classe z^j, telle que $(z^j)_j = m_j$.*

Ainsi, la permutation $\lambda = \{\theta_\vartheta \cdot X \longrightarrow \theta_{\vartheta'} \cdot X\}$ de M, si on la considère, en vertu des identifications du § 2 (alinéa 1), comme un élément de $\mathfrak{G}^j \circ {}^j\mathfrak{G}$, est représentée par un tableau $[d, d(x^j)]$ tel que $d \cdot x^j = x^j$, donc d est l'unité $e^j = (e_1, e_2, \ldots, e_j)$ de $\mathfrak{G}^j$, et que $d(x^j) \cdot {}^jx = d(x_1, x_2, \ldots, x_j) \cdot {}^jx = {}^j\bar{\mu}_{x_j} \cdot {}^jx$, ce qui est une permutation de ${}^jM$ appartenant à $P_j(G')$ dépendant de x^j, mais ne dépendant *effectivement* que de la j-ième coordonnée x_j de x^j. En outre, $d(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, m_j)$ est, comme on a vu, la permutation identique de ${}^jM$.

Si $\vartheta(x_i)$ est une fonction représentative normée fixe et si $\vartheta'(x_i)$ parcourt l'ensemble des fonctions représentatives normées contigües à $\vartheta(x_i)$ à l'étage j, les permutations λ parcourent l'ensemble des éléments de $\mathfrak{G}$ possédant les propriétés énumérées ci-dessus. L'ensemble de ces éléments constitue un sous-groupe de $\mathfrak{G}$ qu'on désignera par $\Delta_j^\vartheta(G)$. D'ailleurs, comme G et ϑ n'interviennent dans les conditions énumérées que par l'intermédiaire de $G' = \eta_\vartheta \cdot G$, on notera le même groupe aussi par $\Delta_j(G')$.

On peut formuler les propriétés qui caractérisent les éléments de $\Delta_j^\vartheta(G)$ également sous la forme équivalente suivante:

a) λ conserve tout $x \in M$ mod D_j et, pour tout $x_j \in M_s$, ${}^j\lambda(x^j)$ appartient à $P_j(G')$ (condition 1 et une partie de la condition 2),

b) ${}^{j-1}\lambda(x^{j-1})$ est un élément de ${}^{j-1}\mathfrak{G}$ indépendant de x^{j-1} (condition 2),

c) ${}^j\lambda(m^j)$ est la permutation identique de ${}^jM$ (condition 3).

Par suite, $\Delta_j^\vartheta(G)$ est l'intersection des groupes des $\lambda \in \mathfrak{G}$ satisfaisant séparément aux conditions *a*), *b*) et *c*).

Les $\lambda \in \mathfrak{G}$ satisfaisant à la condition *a*) sont les $\lambda \in {}^j\Delta$ tels que, pour tout $x^j \in M^j$, on ait ${}^j\lambda(x^j) \in P_j(G')$. Ces éléments constituent le groupe qu'on a désigné au § 2 par

$$({}^j\mathfrak{I}; P_j(G'))$$

et qu'on y a appelé le prolongement de $P_j(G')$ dans ${}^j\mathfrak{I}$.

Les $\lambda \in \mathfrak{G}$ satisfaisant à la condition *b*) sont ceux qui, considérés de la manière indiquée au § 2 comme éléments de $\mathfrak{G}^{j-1} \circ {}^{j-1}\mathfrak{G}$, donc représentées par les tableaux $\lambda = [\lambda^{j-1}, {}^{j-1}\lambda(x^{j-1})]$, ont leurs secondes composantes dans ce tableau indépendantes de x^{j-1}. Ils forment donc, le sous-groupe de ce groupe qu'on a identifié au § 2 avec le produit direct $\mathfrak{G}^{j-1} \times {}^{j-1}\mathfrak{G}$ des groupes $\mathfrak{G}^{j-1}, {}^{j-1}\mathfrak{G}$.

Enfin, la condition *c*), qu'on a déjà rencontré au cours du présent paragraphe, signifie que λ appartient au plus grand sous-groupe $\mathfrak{G}^{*}_{s,j}<m>$ de $\mathfrak{G}_j<m>$ invariant dans $\mathfrak{G}_j<m>$. Ainsi,

$$\Lambda_j(G') = \Lambda_j^{\varrho}(G) = ({}^j\mathfrak{I}; P_j(G')) \cap (\mathfrak{G}^{j-1} \times {}^{j-1}\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{G}^{*}_{s,j}<m>.$$

Revenons à notre passage $\varrho(x_i) \longrightarrow \varrho'(x_i)$, où $\varrho'(x_i)$ est une fonction représentative normée quelconque. La chaîne

$$\varrho(x_i) = \varrho_0(x_i), \varrho_1(x_i), \ldots, \varrho_s(x_i) = \varrho'(x_i)$$

étant celle définie précédemment (c'est-à-dire $\varrho_{j-1}(x_i)$ et $\varrho_j(x_i)$ étant contigües à l'étage j), remarquons qu'on obtient tous les $\varrho'(x_i)$ possibles, en faisant parcourir (pour $j = 1, 2, \ldots, s$) à $\varrho_j(x_i)$, pour $\varrho_{j-1}(x_i)$ déjà construit, l'ensemble des fonctions représentatives contigües à l'étage j avec $\varrho_{j-1}(x_i)$. $\varrho'(x_i)$ (et, par suite, aussi les $\varrho_j(x_i)$) étant fixés, soit $\overline{G}^{(j)}$ ($\overline{G}^{(0)} = \overline{G}$) l'image de G dans $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ par le ϱ_j-isomorphisme η_{ϱ_j}. Comme, pour tout $i > j$ et pour tout $x_i \in M_i$, on a $\varrho_j(x_i) = \varrho(x_i)$, on a, en vertu du Lemme 5, $P_j(\overline{G}^{(j)}) = P_j(G)$, d'où il resulte que

$$\Lambda_j^{\varrho_j}(G) = \Lambda_j(G^{(j)}) = \Lambda_j(G).$$

Ainsi, λ_j étant l'élément de $\mathfrak{G}$ qui provient du passage $\varrho_{j-1}(x_i) \longrightarrow \varrho_j(x_i)$, quand $\varrho_j(x_i)$ parcourt l'ensemble des fonctions représentatives normées contigües à l'étage j avec $\varrho_{j-1}(x_i)$, quel que soit $\varrho_{j-1}(x_i)$, λ_j parcourt le même ensemble $\Lambda_j(G)$. Par suite, *quand* $\varrho'(x_i)$ *parcourt l'ensemble des fonctions représentatives normées,* $\lambda = \{\theta_\varrho . X \longrightarrow \theta_{\varrho'} . X\}$ $(X \in G/G_s)$ *parcourt l'ensemble*

$$\Lambda(\overline{G}) = \Lambda_s(G)\, \Lambda_{s-1}(G) \cdots \Lambda_2(G)\, \Lambda_1(\overline{G})$$

(où, d'ailleurs, $\Lambda_s(\overline{G})$ se réduit à l'unité).

En particulier, soit G un sous-groupe représentatif de $\mathfrak{G}$ et soit $\tau(x_i)$ une fonction superposante des M_i dans G. Le η_τ-isomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ est l'identité, et on a $\overline{G} = G$. Soit $\varrho(x_i)$ une fonction représentative normée quelconque des M_i dans G, et soit λ la permutation de M qui provient du passage de $\tau(x_i)$ à $\varrho(x_i)$. L'automorphisme intérieur $(\lambda) = \{\sigma \longrightarrow \lambda\sigma\lambda^{-1}\}$ induit alors, puisque on a $\eta_r . \sigma = \sigma$ ($\sigma \in G$), précisément le ϱ-isomorphisme de G sur $\lambda G \lambda^{-1}$. Nous avons donc le théorème suivant:

Théorème 6. *L'ensemble des ϱ-isomorphismes normés d'un sous-groupe représentatif G de $\mathfrak{G}$ est celui des isomorphismes de G induits par les automorphismes intérieurs $(\lambda) = \{\sigma \to \lambda\sigma\lambda^{-1}\}$ de $\mathfrak{G}$ engendrés par les éléments λ du sous-ensemble suivant de $\mathfrak{G}$:*

$$\Lambda(G) = \Lambda_s(G)\, \Lambda_{s-1}(G) \cdots \Lambda_2(G)\, \Lambda_1(G).$$

7. Dans le paragraphe suivant nous nous servirons des résultats exposés dans le présent paragraphe pour le cas de $s = 2$. Dans ce cas particulier, ces résultats se présentent sous une forme beaucoup plus simple.

Supposons donc tout d'abord, que $\mathfrak{G}$ soit le produit complet de deux groupes de permutations Γ_1, Γ_2, et soit G un sous-groupe représentatif de $\mathfrak{G}$, image d'un groupe G par un ϱ-isomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$. Alors, $\bar{G}_1 <m>$ est l'ensemble des éléments de $\bar{G}$ qui, écrits sous la forme de tableaux $A = [a, a(x_1)]$ sont tels que $a \cdot m_1 = m_1$. $a(m_1)$ est la permutation de M_2 qui correspond à A par la m-identification et, par définition, quand A parcourt $\bar{G}_1 <m>$, cette permutation parcourt $\bar{\Gamma}_2$. Donc $P_1(\bar{G}) = \bar{\Gamma}_2$, $\Lambda_1(\bar{G})$ est l'ensemble des tableaux $[l, l(x_1)]$ tels que $l = e_1$, $l(m_1) = e_2$ et, pour tout $x_1 \in M_1$, $l(x_1) \in \bar{\Gamma}_2$.

Ainsi, *dans ce cas $\Lambda(\bar{G}) = \Lambda_1(\bar{G})$ est un groupe.*

En particulier, si Γ_1 et Γ_2 sont des groupes abstraits, on a $\bar{\Gamma}_2 = \Gamma_2$ et $\Lambda = \Lambda_1(\bar{G})$ *coïncide* visiblement *avec* $\mathfrak{G}_2$. *Ce groupe ne dépend donc pas du choix du groupe* G. Ainsi, si G est un sous-groupe transitif du produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ de deux groupes abstraits $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$, et si $\varrho(x_i)$ est une fonction représentative normée des Γ_1, Γ_2 dans G, on sait que le ϱ-isomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ est induit par un automorphisme intérieur $\sigma \to \lambda_0 \sigma \lambda_0^{-1}$ de $\mathfrak{G}$, où $\lambda_0 \in \mathfrak{G}_2$.

Par suite, quand $\varrho'(x_i)$ parcourt l'ensemble des fonctions représentatives normées, les éléments de $\mathfrak{G}$ qui les induisent, parcourent $\Lambda(\bar{G})\lambda_0 = \mathfrak{G}_2 \lambda_0 = \mathfrak{G}_2$ (où $\bar{G} = \eta_\varrho \cdot G$). En particulier, il existe un ϱ'-isomorphisme qui est induit par l'automorphisme intérieur identique de $\mathfrak{G}$. $\varrho'(x_i)$ est alors une fonction superposante de G et G est représentatif. Ainsi, *tout sous-groupe transitif G du produit complet $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ de deux groupes abstraits Γ_1, Γ_2 est représentatif, et tout (Γ_1, Γ_2)-isomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ est un ϱ-isomorphisme pour quelque fonction représentative normée $\varrho(x_i)$ de Γ_1, Γ_2 dans G.*

(Reçu le 20 janvier 1949)

Bibliographie.

Joseph Fels Ritt, Differential algebra (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXXIII), VIII + 184 pages, New York, American Mathematical Society, 1950.

The subject of this interesting book has its origin in an algebraic foundation of differential equations given by the author in his earlier book *Differential equations from the algebraic standpoint,* published in 1932 in the same Publications. Since that time a number of new contributions were made by several authors under the leading of Prof. Ritt, giving thereby „fresh substance and new color to the subject." Therefore, one may be very greatful to the author for having presented an up-to-date discussion of the subject in this accurately and clearly written excellent book.

In the theory, there is a base field $\mathcal{F}$ of characteristic 0 in which an operation $'$ called differentiation is defined such that $(a+b)' = a' + b'$ and $(ab)' = a'b + ab'$. This differential field $\mathcal{F}$ serves for the coefficient domain of so-called differential polynomials (d. p.), involving a finite number of indeterminates $y_1, \ldots, y_n$ and their derivatives $y_i^{(j)}(j = 1, 2, \ldots)$. An algebraic ideal in the ring of these d. p. is called a differential ideal if it is closed under differentiation. The notion of perfect ideals is fundamental in the investigations a perfect deal is one which coincides with its own radical, i. e., it contains all d p. which have a power in the ideal. For perfect ideals the analogue of Hilbert's basis theorem holds. This is the Ritt—Raudenbush basis theorem which states that every perfect ideal has a finite base, a fact which occupies a central position in the discussions. (This implies at once that any infinite system of simultaneous differential equations in finitely many unknowns is equivalent to a finite system.)

Chapter II is devoted to algebraic differential manifolds. A theory analogous to the known case of polynomial ideals is developed; for example it is shown that each differential manifold is the union of a finite number of irreducible ones. The next chapter deals with some structural problems concerning a single d. p. and then applications are made to systems of pure algebraic equations. In three chapters the author discusses constructive methods, the special case of analytical functions and the intersections of differential manifolds. The following chapter contains an interesting existence theorem due to Riquier and the final Chapter 9 is concerned with an algebraic discussion of partial differential equations. It is shown that many of the previous results retain their validity even in this case.

We are convinced that this valuable work will exert an influence in a considerable extent to the future development of the theory of differential algebra.

L. Fuchs.

O. F. G. Schilling, The theory of valuations (Mathematical Surveys, Number IV), VIII + 254 pages, New York, American Mathematical Society, 1950.

The recognition of the analogy between the theory of algebraic number fields and the theory of algebraic functions of a single variable may be considered as a source of the present subject. It was K. Hensel who discovered the p-adic numbers corresponding to the power series expansions in a point of a Riemann surface. The first systematic valuation-theoretic discussion is due to J. Kürschák. Of the numerous authors whose ideas are of fundamental importance in the valuation theory we mention only the names of A. Ostrowski, W. Krull, C. Chevalley and the author himself

The present book contains a clear and systematic development of the theory of valuations and its applications to several questions of algebra. The advantage of a unified valuation-theoretic treatment is well exhausted, making clear the power of the methods in the simplifications of certain discussions. The book presents a very rich material in a clear style.

The beginning chapter deals with the definitions and basic properties, defined for the non-commutative case. One of the most important concepts is the rank 1 valuation, with the characterizing property of having a value group satisfying the archimedean axiom. Then a general method is given how to extend a field of rank 1 valuation so as to obtain a larger field which is complete with respect to this valuation. Of fundamental importance is Hensel's reducibility lemma, on which a large part of valuation theory is based. The ramification theory of valuations, in Chapter 3, generalizes Hilbert's ramification theory of algebraic number fields. Among several interesting results some existence theorems for certain fields with a prescribed Galois group are proved. Next the ideal theory of algebraic number fields and fields of algebraic functions of one variable is treated from the viewpoint of valuations; the ideal theory for the infinite case is also included. Then the classical ideal-theoretic results are extended to simple algebras of finite rank over a complete field. Chapter 6 is devoted to an extensive discussion of the local class field theory treated by means of the theory of algebras. In the final chapter the author investigates the structure of complete fields by topological methods. Two appendices are added, one on the infinite Galois theory and one collecting the needed facts on algebras over a field. Each chapter closes with a bibliography which enhances the value of this excellent work.

L. Fuchs.

Produit complet de groupes de permutations et problème d'extension de groupes III.*)

Par Marc Krasner et Léo Kaloujnine à Paris.

§ 6. Le problème de Schreier.

1. Soient Γ, g deux groupes abstraits. Dans tout ce paragraphe on notera les éléments de Γ par des minuscules grecques et ceux de g par des minuscules latines. En particulier, les unités de Γ et de g seront désignées par ε et par e.

Soit G un groupe qui possède un sous-groupe invariant $\overline{G}$, tel que $\overline{G}$ soit isomorphe au groupe g et tel que $G/\overline{G}$ soit isomorphe à Γ. Etant donné un isomorphisme de $\overline{G}$ sur g et un isomorphisme de $G/\overline{G}$ sur Γ, on identifie $\overline{G}$ avec g et $G/\overline{G}$ avec Γ en identifiant les éléments qui se correspondent par ces isomorphismes donnés. Le groupe G, avec ces identifications, est dit *une extension de* g par Γ. Une extension de g par Γ est donc définie à un (Γ, g)-isomorphisme près.

Le problème de Schreier consiste

1) *à construire à partir de g et de Γ un ensemble Ω d'extensions G de g par Γ, tel que toute extension G' de g par Γ soit (Γ, g)-isomorphe à au moins un $G \in \Omega$ (on parlera dans ce cas d'un système complet d'extensions de g par Γ);*

2) *à déterminer un critère de (Γ, g)-isomorphie de deux extensions appartenant à Ω.*

A une différence de terminologie et de notations près, la méthode de Schreier pour résoudre ce problème est la suivante[1]):

G étant une extension de g par Γ, on va supposer, pour plus de simplicité, que $\overline{G}$ coïncide avec g. Soit $\varrho(\xi)$ une fonction représentative de Γ dans G.[2]) La donnée de $\varrho(\xi)$ definit deux autres fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ $(\alpha, \xi \in \Gamma)$. $\omega(\xi)$ est, pour tout $\xi \in \Gamma$, l'automorphisme $x \to \varrho(\xi)^{-1} x \varrho(\xi) = x^{\omega(\xi)}$

*) Les parties I et II ont paru dans *ces Acta*, **13** (1950), p. 208—230, et **14** (1951), p. 39—66.

1) Pour plus de détails voir le livre de H. Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig, 1937).

2) $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_t$ étant une chaîne de sous-groupes d'un groupe G telle que G_{i-1}/G_i soit, pour tout i, identifié avec un ensemble M_i, si $i_1, i_2, \ldots, i_t$ est une suite par-

induit sur le sous-groupe invariant g de G par l'automorphisme intérieur $(\varrho(\xi)^{-1})$ de G; $c(\alpha, \xi)$ est, pour tous les $\alpha, \xi \in \Gamma$, le produit $\varrho(\alpha\xi)^{-1}\varrho(\alpha)\varrho(\xi)$ ($c(\alpha, \xi)$ est donc une fonction, définie sur $\Gamma\times\Gamma$ et à valeurs dans g). Dans l'ensemble produit $\Gamma\times g$, dans lequel on a identifié tout $x \in g$ avec (ε, x) et tout $\xi \in \Gamma$ avec l'ensemble $\{\xi\}\times g$, SCHREIER définit à l'aide des fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ une loi de composition, et démontre que $\Gamma\times g$, organisé par cette loi de composition, est un groupe H isomorphe à G. Si, en particulier, $\varrho(\xi)$ est une fonction représentative normée (c'est-à-dire si $\varrho(\varepsilon) = e$), ce groupe H est (Γ, g)-isomorphe à G, et un (Γ, g)-isomorphisme est réalisé par l'application $\varrho(\xi)x \to (\xi. x)$ de G sur H. Dans le cas général d'une fonction représentative $\varrho(\xi)$ non nécessairement normée on peut également établir un (Γ, g)-isomorphisme de G sur H, en modifient convenablement, dans $\Gamma\times g$, l'identification de g avec $\{\varepsilon\}\times g$.

D'autre part, la loi de composition sur $\Gamma\times g$ ainsi définie par SCHREIER à l'aide des fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ a un sens quelle que soit la fonction $\omega(\xi)$ (définie sur Γ et à valeurs dans le groupe des automorphismes de g) et la fonction $c(\alpha, \xi)$ (définie sur l'ensemble $\Gamma\times\Gamma$ et à valeurs dans g). Mais, en général, l'ensemble $\Gamma\times g$, organisé par une telle loi de composition, n'est pas un groupe, mais seulement un quasi-groupe (loop)[3)][4)]. Pour que la structure, définie à partir des $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$, soit un groupe, il faut et il suffit que les fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ satisfassent à certaines conditions (qui traduisent l'associativité de la loi de composition). SCHREIER a explicité ces conditions. Deux fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ satisfaisant à ces conditions s'appellent un *système de facteurs (de Schreier)*.

Si $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ constituent un système S de facteurs, ils définissent sur $\Gamma\times g$ une structure de groupe H_S. Schreier démontre qu'avec une identification convenable de g avec $\{\varepsilon\}\times g$, H_S est une extension de g par Γ, et

---

tielle de $1, 2, \ldots, s$, on dira qu'on a défini une *fonction représentative* des M_{i_q} $(q = 1, 2, \ldots, t)$ dans G quand on aura defini, pour tout $q = 1, 2, \ldots, t$ et pour tout $x_{i_q} \in M_{i_q}$, un élément $\varrho(x_{i_q})$ de la classe à droite suivant G_{i_q} dans $G_{i_q} - 1$ identifiée avec x_{i_q}. $\varrho(x_{i_q})$ sera dite *normée* si, pour tout $q = 1, 2, \ldots, t$, $\varrho(m_{i_q})$ (ou m_{i_q} est identifié avec G_{i_q}) est l'unité de G. Il est à remarquer qu'en vertu du lemme 2 (§ 5), le ϱ-isomorphisme η_ϱ ne dépend pas de $\varrho(x_s)$, car $G^*_{s,s} = G_s$. Ainsi, il est entièrement défini par la donnée de la fonction représentative $\bar{\varrho}(x_i)$ des $M_1, M_2, \ldots M_{s-1}$ seulement dans G, et sera dit aussi le $\bar{\varrho}$-isomorphisme.

3) Rappelons qu'un quasi-groupe est une structure algébrique satisfaisant aux axiomes des groupes à l'exception de l'associativité.

4) On peut même supposer que les $\omega(\xi)$ sont des endomorphismes (et non forcément des automorphismes) de g, auquel cas on n'obtient sur $\Gamma\times g$ que la structure d'un monoïde. Nous employons ce mot "monoïde" non au sens de BOURBAKI [qui désigne ainsi, dans son *Algèbre* I (Paris, 1942) un ensemble organisé par une loi de composition (binaire) associative et partout définie], mais au sens d'un ensemble organisé par une loi de composition (binaire) *non nécessairement associative*. Le monoïde au sens de BOURBAKI a déjà un nom, celui de *demi-groupe*, qui nous paraît tout à fait satisfaisant.

que $\omega(\xi)$ et $\omega(\alpha, \xi)$ sont des fonctions ainsi notées pour la fonction représentative $\varrho(\xi) = (\xi, e)$ de Γ dans H_S.

La théorie de Schreier fait donc correspondre à chaque fonction représentative $\varrho(\xi)$ de Γ dans quelque extension G de g par Γ (considérée à un (Γ, g)-isomorphisme près) un système de facteurs S_ϱ. Tous les systèmes de facteurs peuvent s'obtenir de cette manière. Inversement, à chaque système de facteurs S, cette théorie fait correspondre une extension bien déterminée H_S (dont le support est l'ensemble $\Gamma \times g$) de g par Γ. Si, pour quelque fonction représentative $\varrho(\xi)$ de Γ dans G, on a $S = S_\varrho$, H_S est (Γ, g)-isomorphe à G.

Pour deux systèmes de facteurs S et S' différents, H_S et $H_{S'}$ sont deux groupes distincts. H_S et $H_{S'}$ sont (Γ, g)-isomorphes si, et seulement si $S' = S_\varrho$ pour quelque fonction représentative $\varrho(\xi)$ de Γ dans H_S. Schreier explicite la condition à laquelle doivent satisfaire S et S' pour qu'il en soit ainsi, ce qui achève la résolution de son problème par sa méthode.

Ainsi, dans la théorie de Schreier, un système complet Ω d'extensions de g par Γ est un ensemble de groupes, définis sur le support fixe $\Gamma \times g$ à l'aide des différents systèmes de facteurs. Ω est le sous-ensemble d'un ensemble $\overline{\Omega}$ de quasi-groupes définis sur $\Gamma \times g$ par des fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ quelconques. Les conditions, explicitées par Schreier (auxquelles doivent satisfaire $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ pour être un système de facteurs) servent précisément à caractériser l'ensemble Ω dans $\overline{\Omega}$.

2. $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ étant le produit complet des groupes abstraits $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, nous appelons un sous-groupe transitif $\overline{G}$ de $\mathfrak{G}$ *schreierien* si $\overline{G}_s$ se réduit à l'unité e de $\mathfrak{G}$.

Montrons qu'*un sous-groupe schreierien représentatif $\overline{G}$ de $\mathfrak{G}$ possède une et une seule fonction superposante.*

En effet, en vertu du lemme 2, deux fonctions représentatives normées $\bar\varrho(x_i)$ et $\bar\varrho'(x_i)$ des Γ_i dans $\overline{G}$ fournissent une même immersion de $\overline{G}$ dans $\mathfrak{G}$ si, et seulement si, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, et pour tout $x_i \in \Gamma_i$, $\bar\varrho(x_i)^{-1}\bar\varrho'(x_i)$ appartient au plus grand sous-groupe $\overline{G}_{s,i}$ de $\overline{G}_s$ invariant dans $\overline{G}_i$. Or, $\overline{G}$ étant schreierien, $\overline{G}_s$, et à fortiori $\overline{G}_{s,i}$, se réduisent à l'unité de $\mathfrak{G}$, et on doit avoir $\bar\varrho'(x_i) = \bar\varrho(x_i)$. Ainsi, il n'y a qu'une fonction représentative normée au plus, qui réalise une immersion donnée de $\overline{G}$ dans $\mathfrak{G}$. En particulier, il y a au plus une fonction superposante et, si $\overline{G}$ est représentatif, il y en a bien une.

Remarquons qu'en vertu du § 5 (alinéa 6), pour $s = 2$, tout sous-groupe transitif, donc en particulier, tout sous-groupe schreierien de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ est représentatif.

3. Ceci posé, notre théorème d'immersion (§ 4, alinéa 5) (pour le cas des suites de composition) et les résultats du § 5 nous permettent de donner une autre solution du problème de Schreier qui est, en quelque sorte, duale à la précédente.

Si G est une extension de g par Γ, et si $\varrho(\xi)$ est une fonction représentative normée de Γ dans G, G est (Γ, g)-isomorphe à son image $\overline{G}$ dans $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$ par le ϱ-isomorphisme η_ϱ, et, en vertu du Lemme 1, l'image $\bar{\varrho}(\xi)$ de $\varrho(\xi)$ par η_ϱ est une fonction superposante de $\overline{G}$. $\overline{G}$ est, visiblement, un sous-groupe schreierien de $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$. D'ailleurs, si $\overline{G}$ est un sous-groupe schreierien quelconque de $\Gamma \circ g$, et si $\bar{\varrho}(\xi)$ en est une fonction superposante, le $\bar{\varrho}$-isomorphisme l'applique identiquement sur lui-même. Ainsi, le théorème d'immersion fait correspondre à toute extension G de g par Γ, quand on y choisit une fonction représentative $\varrho(\xi)$, un couple formé d'un sous-groupe schreierien de $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$ et de son unique fonction superposante. Les images ainsi obtenus parcourent l'ensemble de tous les sous-groupes schreieriens de $\mathfrak{G}$ et de leurs fonctions superposantes. D'autre part, le théorème 5 montre que deux sous-groupes schreieriens de $\mathfrak{G}$ sont (Γ, g)-isomorphes si, et seulement s'ils sont proprement conjugués.

Dès lors, pour donner une solution du problème de Schreier, il suffit de caractériser explicitement les sous-groupes schreieriens $\overline{G}$ de $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$. Or, la donnée de $\overline{G}$ équivaut (en vertu de l'unicité de sa fonction superposante) à la donnée de $\overline{G}_1$ et de sa fonction superposante $\bar{\varrho}(\xi)$, car $\overline{G} = \bigcup_{\xi \in \Gamma} \varrho(\xi)\overline{G}_1$. $\overline{G}_1$ est un sous-groupe de ${}^1\varDelta$ tel que $\overline{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \overline{G}_2$ se réduise à l'unité, et qui est, par l'identification canonique, identifié avec g; et $\bar{\varrho}(\xi)$ est une fonction représentative de Γ dans $\mathfrak{G}$. Quand $\overline{G}_1$ parcourt *tous les* sous-groupes des $\mathfrak{G}$ de cette forme, et quand $\bar{\varrho}(\xi)$ parcourt *toutes* les fonctions de cette forme, $\overline{T} = \bigcup_{\xi \in \Gamma} \bar{\varrho}(\xi)\overline{G}_1$ parcourt une certaine catégorie de sous-ensembles de $\mathfrak{G}$. Les sous-groupes schreieriens $\overline{G}$ de $\mathfrak{G}$, avec leurs fonctions superposantes sont parmi les ensembles $\overline{T}$ de cette catégorie avec la fonction $\bar{\varrho}(\xi)$ qui a servi à les définir. Si un tel $\overline{T}$ est un sous-groupe $\overline{G}$ de $\mathfrak{G}$, il est visiblement transitif, car pour ce groupe on a $\overline{\Gamma}_1 = \Gamma_1 = \Gamma$ et $\overline{\Gamma}_2 = \Gamma_2 = g$, et schreierien, car $\overline{G}_2$ se réduit à l'unité de $\mathfrak{G}$. Ainsi, pour trouver tous les sous-groupes schreieriens de $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$, chacune prise une seule fois, il suffit de caractériser, parmi les systèmes $\overline{G}_1$, $\bar{\varrho}(\xi)$ de la forme considérée, ceux d'entre eux pour lesquels $\overline{T} = \bigcup_{\xi \in \Gamma} \bar{\varrho}(\xi)\overline{G}_1$ est un groupe dont $\bar{\varrho}(\xi)$ est une fonction superposante.

Or, si $\overline{G}$ est un groupe de la forme considérée, son élément que l'identification canonique identifie avec un $x \in g$ est, écrit comme un tableau, de la forme

$$\bar{x} = [\varepsilon, a_x(\xi)].^{5)}$$

5) Il est à remarquer que $\overline{G}_1$ n'est autre chose que l'ensemble des valeurs de l'unique fonction représentative de g dans $\overline{G}_1$ et que $\bar{x}$ est précisément sa valeur pour x. Ainsi, puisque la donnée d'une fonction représentative $\varrho(\xi)$, $\bar{\varrho}(x)$ des Γ, g dans $\overline{G}$ détermine $\overline{G} = \{\varrho(\xi)\ \varrho(x)\}_{(\xi, x) \in \Gamma \times g}$, quand $\overline{G}$ est un sous-groupe schreierien de $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$, on peut résoudre le problème de Schreier en caractérisant les fonctions superposantes

Comme l'identification canonique applique cet élément sur $a_x(\varepsilon)$, on a donc $a_x(\varepsilon)=x$. Puisque, d'autre part, $x\to\bar{x}$ est un isomorphisme, on a

$$[\varepsilon, a_{xy}(\xi)]=[\varepsilon, a_x(\xi)]\,[\varepsilon, a_y(\xi)]=[\varepsilon, a_x(\xi)\,a_y(\xi)],$$

d'où, pour tout $\xi\in\Gamma$ et pour tous $x, y\in g$, on a

$$a_{xy}(\xi)=a_x(\xi)\,a_y(\xi).$$

Donc, pour tout $\xi\in\Gamma$, $x\to a_x(\xi)$ est un endomorphisme $\omega(\xi)$ de g. En particulier, $\omega(\varepsilon)$ est l'automorphisme identique 1_g de g.

Inversement, si $\omega(\xi)$ est une fonction définie sur Γ et dont les valeurs sont des endomorphismes de g, l'ensemble des $\bar{x}=[\varepsilon, x^{\omega(\xi)}]$[5a]) est un sous-groupe $\bar{G}_1$ de ${}^1\varDelta$ tel que $\bar{G}_1\cap\mathfrak{G}_2$ se réduit à l'unité. Si en plus on a $\omega(\varepsilon)=1_g$, l'identification canonique applique $\bar{x}$ sur x. Comme $\bar{G}_1$ et $\omega(\xi)$ se déterminent mutuellement, on voit que la donnée de $\bar{G}_1$ équivaut à celle de $\omega(\xi)$, et que $\omega(\xi)$ parcourt toutes les fonctions de la forme indiquée quand $\bar{G}_1$ parcourt tous les sous-groupes considérés de ${}^1\varDelta$.

$\bar{\varrho}(\xi)$ étant une fonction représentative de Γ dans $\mathfrak{G}$, $\bar{\varrho}(\alpha)$, quand on l'écrit comme un tableau, est visiblement de la forme $[\alpha, a_\alpha(\xi)]$. Si l'on pose, pour tous $\alpha, \xi\in\Gamma$, $c(\alpha, \xi)=a_\alpha(\xi)$, on voit que la donnée de $\bar{\varrho}(\xi)$ équivaut à celle d'une fonction $c(\alpha, \xi)$, définie sur $\Gamma\times\Gamma$ et à valeurs dans g, et, quand $\bar{\varrho}(\xi)$ parcourt toutes les fonctions représentatives de Γ dans $\mathfrak{G}$, $c(\alpha, \xi)$ parcourt toutes les fonctions définies sur $\Gamma\times\Gamma$ et à valeurs dans g. La signification immédiate des fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ dans notre théorie est, visiblement, la suivante: $\mathfrak{G}$ contient une extension canonique $\bar{G}^*$ de g par Γ, à savoir celle qui a été identifiée avec $\Gamma\times g$ au § 2, et qui est formée par les tableaux $[\alpha, a(\xi)]$ tels que $a(\xi)$ soit une constante $a\in g$. L'élément $\bar{x}^*=[\varepsilon, a_x^*(\xi)]$ de $\bar{G}^*$ identifié avec x est, donc, tel que, pour tout $\xi\in\Gamma$, on a $a_x^*(\xi)=x$. Par suite, $\omega(\xi)$ est l'endomorphisme qui transforme la ξ-composante $a_x^*(\xi)$ de $\bar{x}^*$ en celle $a_x(\xi)$ de $\bar{x}$. D'autre part, la fonction superposante de $\bar{G}^*$ est $\bar{\varrho}^*(\xi)=[\xi, e]$. Donc,

$$\bar{\varrho}(\alpha)=[\alpha, c(\alpha, \xi)]=[\alpha, e]\,[\varepsilon, c(\alpha, \xi)]=\bar{\varrho}^*(\alpha)\,[\varepsilon, c(\alpha, \xi)].$$

Ainsi, pour tout $\alpha\in\Gamma$, $[\varepsilon, c(\alpha, \xi)]$ est le facteur à droite, par lequel il faut

---

des sous-groupes schreieriens de $\mathfrak{G}$ dans l'ensemble des fonctions représentatifs (ou même, seulement superposantes) des Γ, g dans $\mathfrak{G}$. C'est, d'ailleurs, ainsi que nous envisageons plus bas, au dernier alinéa de ce paragraphe, la généralisation du problème de Schreier au cas $s>2$. Nous avons adopté un point le vue légèrement différent dans notre exposé ci-dessus, afin de mettre clairement en évidence la dualité de notre méthode à celle de Schreier.

[5a]) On écrit, comme c'est habituel dans la théorie d'opérateurs, x^ω au lieu de $\omega . x$. Il est à remarquer que, vu la convention habituelle pour la composition d'applications $\omega_1\omega_2\cdot x=\omega_1\cdot(\omega_2\cdot x)$, on a $x^{\omega_1\omega_2}=(x^{\omega_2})^{\omega_1}$. Rappelons aussi que si (c) est un automorphisme intérieur d'un groupe g induit par un $c\in g$, et si ω est un autre automorphisme du groupe, on a $\omega(c)\omega^{-1}=(c^\omega)$.

multiplier $\bar{\varrho}^*(\alpha)$ pour obtenir $\bar{\varrho}(\alpha)$. On dira que $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ est le *système des fonctions associé au couple* $\bar{G}_1$, $\bar{\varrho}(\xi)$.

Pour que $\bar{T} = \bigcup_{\xi \in \Gamma} \bar{\varrho}(\xi)\bar{G}_1$ soit un groupe et pour que $\bar{\varrho}(\xi)$ en soit la fonction superposante, il faut et il suffit que les $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ correspondantes satisfassent à certaines conditions. Quand on explicite ces conditions on trouve qu'elles coïncident avec les conditions de SCHREIER pour que $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ soit un système de facteurs normé de SCHREIER.

Après coup, on constate aussi que, si ces conditions sont satisfaites, $\omega(\xi)$ est toujours un automorphisme (et non seulement un endomorphisme) de g, et que *le couple* $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ *est, en plus de son signification directe, le système de facteurs de Schreier relatif à la fonction représentative* $\bar{\varrho}(\xi)$ *de* Γ *dans* $\bar{G}$ (qui est précisément la fonction superposante de $\bar{G}$). Si $\bar{G}$ est l'image, par un ϱ-isomorphisme η_ϱ normé, d'une extension G de g par Γ, $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ est aussi le système de facteurs relatif à la fonction représentative normée $\varrho(x_i)$ de Γ dans G. On a donc

$$\bar{\varrho}(\alpha)^{-1}[\varepsilon, a_x(\xi)]\,\bar{\varrho}(\alpha) = [\varepsilon, a_{x\omega(\alpha)}(\xi)]$$

et

$$\bar{\varrho}(\alpha\beta)^{-1}\,\bar{\varrho}(\alpha)\,\bar{\varrho}(\beta) = [\varepsilon, a_{c(\alpha,\beta)}(\xi)].$$

Ainsi, dans le cas où $\bar{T}$ est un groupe, la signification des $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ dans notre méthode et dans celle de SCHREIER coïncident. Cette coïncidence fournit une dualité entre les propriétés internes des sous-groupes schreieriens de $\Gamma \circ g$ et leurs propriétés externes par rapport au sous-groupe canonique $\Gamma \times g$ de $\Gamma \circ g$.

D'ailleurs, cette coïncidence n'est pas un effet de hasard, car le calcul effectif d'un ϱ-isomorphisme montre comment le système de facteurs de la fonction $\varrho(\xi)$ intervient dans l'expression de l'image de G, écrit sous forme d'un groupe de tableaux. On aboutit ainsi *à une correspondance biunivoque entre les systèmes de facteurs de Schreier et les sous-groupes schreieriens de* $\Gamma \circ g$. Ceci montre, en particulier, que les immersions dans $\Gamma \circ g$ de deux extensions de g par Γ conduisent à un même groupe si, et seulement si les fonctions représentatives réalisant ces immersions ont un même système de facteurs.

Mais quand le couple $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ n'est pas un système de facteurs, les significations de ces fonctions dans la théorie de SCHREIER et dans la nôtre sont essentiellement différentes. Les conditions de SCHREIER s'y présentent de deux manières en quelque sorte duales: Dans la théorie de Schreier elles expriment qu'une loi de composition d'un monoïde *à support fixe* $\Gamma \times g$ est telle que ce monoïde soit un groupe, extension de g par Γ (en particulier, si l'on a supposé déjà que, pour tout $\xi \in \Gamma$, $\omega(\xi)$ est un automorphisme de g, les conditions de SCHREIER expriment que cette loi de composition est associative). Par contre, dans notre théorie, les mêmes conditions expriment qu'un sous-ensemble $\bar{T}$ du *monoïde fixe* $\Gamma \circ g$ (qui est un groupe) est fermé par rapport à sa loi de composition (auquel cas il est surement une extension de g par Γ) et qu'une fonction $\bar{\varrho}(\xi)$ à valeurs dans $\Gamma \circ g$ en est une fonction superposante. Ainsi, dans notre théorie, le système complet Ω d'extensions de g par Γ est l'ensemble des sous-groupes schreieriens de $\Gamma \circ g$. Ω est un sous-ensemble de l'ensemble $\bar{\Omega}$ de tous les sous-ensembles de la forme $\bar{T} = \bigcup_{\xi \in \Gamma} \bar{\varrho}(\xi)\, \bar{G}_1$. Les conditions de SCHREIER servent à caractériser Ω dans $\bar{\Omega}$. On voit clairement la dualité de deux méthodes.

Le fait que deux sous-groupes transitifs de $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$ sont (Γ, g)-isomorphes si, et seulement si l'un est le transformé de l'autre par un $\lambda \in \mathfrak{G}_2$, permet, en calculant l'effet de la transformation par un $\lambda \in \mathfrak{G}_2$ sur la fonction superposante et sur les éléments $\bar{x}$ d'un sous-groupe schreierien $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}$, d'établir le critère de Schreier pour l'équivalence des systèmes de facteurs. Ce critère se présente également d'une manière en quelque sorte duale à celle de Schreier.

4. Complétons ce qu'on vient d'esquisser, en démontrant ce qui a été énoncé.

Soit $\omega(\xi)$ une fonction définie sur Γ et dont les valeurs sont des endomorphismes de g telle que $\omega(\varepsilon)$ soit l'automorphisme identique, et soit $c(\alpha, \xi)$ une fonction définie sur l'ensemble $\Gamma \times \Gamma$ et à valeurs dans g. Considérons l'ensemble $\bar{G}_1$ des tableaux de la forme

$$\bar{x} = [\varepsilon, a_x(\xi) = x^{\omega(\xi)}] \qquad (x \in g)$$

$\bar{G}_1$ est un groupe. $\bar{\varrho}(\alpha)$ $(\alpha \in \Gamma)$ étant le tableau $[\alpha, a_\alpha(\xi) = c(\alpha, \xi)]$, posons $\bar{T} = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \bar{\varrho}(\alpha\ \bar{G}_1$. *Supposons que $\bar{T}$ soit un groupe $\bar{G}$.* Alors on a, visiblement, $\bar{G} \cap \mathfrak{G}_1 = \bar{G} \cap {}^1\!\Delta = \bar{G}_1$ et $\bar{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$ se réduit à l'unité de $\mathfrak{G}$. Les identifications canoniques appliquent $\bar{x}$ sur $a_x(\varepsilon) = x^{\omega(\varepsilon)} = x$ et $\bar{\varrho}(\alpha)\bar{G}_1$ sur $(\bar{\varrho}(\alpha))_1 = \alpha$. Par suite, on a $\bar{\Gamma}_1 = \Gamma$ et $\bar{\Gamma}_2 = g$, et ainsi, $\bar{G}$ est, dans ce cas, un sous-groupe transitif et schreierien de $\mathfrak{G}$, donc est une extention de g par Γ.

$\bar{G}$ étant transitif, quelque soit $\xi \in \Gamma$, il existe, pour tout $y \in g$, un $\sigma = [\alpha, a(x)] \in \bar{G}$, qui transforme (ξ, e) en (ξ, y). On a donc $\alpha\xi = \xi$ et $a(\xi)\, e = y$. Ainsi $\alpha = \varepsilon$, d'où on conclut que σ appartient à $\bar{G}_1$ et est égal à $\bar{x}$ pour quelque $x \in g$. Par suite, on a $a(\xi) = x^{\omega(\xi)}$ et il existe, pour tout $y \in g$, un $x \in g$ tel que $y = x^{\omega(\xi)}$. Donc, pour tout $\xi \in \Gamma$, *$\omega(\xi)$ n'est pas seulement un endomorphisme, mais un automorphisme de g.*

$\bar{G}_1$ étant invariant dans $\bar{G}$, quelque soit $\alpha \in \Gamma$, il existe, pour tout $x \in g$, un $x' \in g$ (dépendant en principe de α et de x) tel qu'on ait

$$\bar{x}\bar{\varrho}(\alpha) = \bar{\varrho}(\alpha)\bar{x}',$$

c'est-à-dire que

$$[\alpha, x^{\omega(\alpha\xi)} c(\alpha, \xi)] = [\varepsilon, x^{\omega(\xi)}]\, [\alpha, c(\alpha, \xi)] = [\alpha, c(\alpha, \xi)]\, [\varepsilon, x'^{\omega(\xi)}] = [\alpha, c(\alpha, \xi)\, x'^{\omega(\xi)}].$$

Donc, pour tout $\xi \in \Gamma$, on a

$$x^{\omega(\alpha\xi)} c(\alpha, \xi) = c(\alpha, \xi)\, x'^{\omega(\xi)};$$

autrement dit, (c) étant l'automorphisme intérieur $x \to cxc^{-1}$ de g induit par $c \in g$, on a

$$x^{\omega(\alpha\xi)} = (x'^{\omega(\xi)})^{(c(\alpha,\xi))} = x'^{(c(\alpha,\xi))\,\omega(\xi)}.$$

En particulier, si l'on pose $\xi = \varepsilon$, on a

$$x^{\omega(\alpha)} = x'^{(c(\alpha,\varepsilon))\,\omega(\varepsilon)} = x'^{(c(\alpha,\varepsilon))},$$

car $\omega(\varepsilon) = 1_g$, d'où

$$x' = (x^{\omega(\alpha)})^{(c(\alpha,\varepsilon))^{-1}} = x^{(c(\alpha,\varepsilon)^{-1})\,\omega(\alpha)},$$

et pour tous $\alpha, \xi \in \Gamma$ et $x \in g$, on a

$$x^{\omega(\alpha\xi)} = [x^{(c(\alpha,\varepsilon)^{-1})\,\omega(\alpha)}]^{(c(\alpha,\xi))\,\omega(\xi)} = x^{(c(\alpha,\xi))\,\omega(\xi)\,(c(\alpha,\varepsilon)^{-1})\,\omega(\alpha)};$$

d'où, pour tous $\alpha, \xi \in \Gamma$, on a

$$\omega(\alpha\xi) = (c(\alpha,\xi))\,\omega(\xi)\,(c(\alpha,\varepsilon)^{-1})\,\omega(\alpha),$$

ce qui équivaut à la condition

$$\text{(A')} \qquad \boxed{\omega(\xi)\,(c(\alpha,\varepsilon))^{-1}\,\omega(\alpha) = (c(\alpha,\xi))^{-1}\,\omega(\alpha\xi)}\,.$$

D'autre part, on a pour tous $\alpha, \beta \in \Gamma$,

$$\bar{\varrho}(\alpha)\,\bar{\varrho}(\beta) \equiv \bar{\varrho}(\alpha\beta) \qquad (\text{mod } \bar{G}_1).$$

Il existe donc un $x \in g$ (dépendant des α, β) tel que

$$\bar{\varrho}(\alpha)\,\bar{\varrho}(\beta) = \bar{\varrho}(\alpha\beta)\,\bar{x},$$

ou, d'une manière explicite,

$$[\alpha\beta, c(\alpha,\beta\xi)\,c(\beta,\xi)] = [\alpha, c(\alpha,\xi)]\,[\beta, c(\beta,\xi)] = [\alpha\beta, c(\alpha\beta,\xi)]\,[\varepsilon, x^{\omega(\xi)}] =$$
$$= [\alpha\beta, c(\alpha\beta,\xi)\,x^{\omega(\xi)}].$$

Autrement dit, on a, pour tout $\xi \in \Gamma$,

$$c(\alpha,\beta\xi)\,c(\beta,\xi) = c(\alpha\beta,\xi)\,x^{\omega(\xi)}.$$

En particulier, si $\xi = \varepsilon$, on a

$$c(\alpha,\beta)\,c(\beta,\varepsilon) = c(\alpha\beta,\varepsilon)\,x^{\omega(\varepsilon)} = c(\alpha\beta,\varepsilon)\,x.$$

c'est-à-dire

$$x = c(\alpha\beta,\varepsilon)^{-1}\,c(\alpha,\beta)\,c(\beta,\varepsilon),$$

et on obtient, pour tous $\alpha, \beta, \xi \in \Gamma$, la condition

$$\text{(B')} \qquad \boxed{c(\alpha,\beta\xi)\,c(\beta,\xi) = c(\alpha\beta,\xi)\,[c(\alpha\beta,\varepsilon)^{-1}\,c(\alpha,\beta)\,c(\beta,\varepsilon)]^{\omega(\xi)}}\,.$$

En particulier, si $\alpha = \beta = \varepsilon$, cette condition s'écrit

$$c(\varepsilon,\xi)\,c(\varepsilon,\xi) = c(\varepsilon,\xi)\,[c(\varepsilon,\varepsilon)^{-1}\,c(\varepsilon,\varepsilon)\,c(\varepsilon,\varepsilon)]^{\omega(\xi)},$$

ce qui équivaut à

$$c(\varepsilon,\xi) = c(\varepsilon,\varepsilon)^{\omega(\xi)}.$$

Inversement, montrons que si $\omega(\xi)$ et $c(\alpha,\xi)$ satisfont aux conditions (A') et (B′), $\bar{T}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{G}$. En effet, il est visible que (A′) entraîne, pour tout $\alpha \in \Gamma$, $\bar{G}_1 \bar{\varrho}(\alpha) \subseteqq \bar{\varrho}(\alpha)\, \bar{G}_1$ et que (B′) entraîne que, pour tous $\alpha, \beta \in \Gamma$, on a $\bar{\varrho}(\alpha)\, \bar{\varrho}(\beta) \in \bar{\varrho}(\alpha\beta)\, \bar{G}_1$. Dès lors, on a

$$\bar{T}\bar{T} = (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} \bar{\varrho}(\alpha \cdot \bar{G}_1)) (\bigcup_{\beta \in \Gamma} \bar{\varrho}(\beta)\, \bar{G}_1) = \bigcup_{(\alpha,\beta) \in \Gamma \times \Gamma} \bar{\varrho}(\alpha)\, \bar{G}_1 \bar{\varrho}(\beta)\, \bar{G}_1 \subseteqq$$

$$\subseteqq \bigcup_{(\alpha,\beta) \in \Gamma \times \Gamma} \bar{\varrho}(\alpha)\, \bar{\varrho}(\beta)\, \bar{G}_1 \bar{G}_1 \subseteqq \bigcup_{(\alpha,\beta) \in \Gamma \times \Gamma} \bar{\varrho}(\alpha\beta) \bar{G}_1 \bar{G}_1 \bar{G}_1 = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bar{\varrho}(\gamma)\, \bar{G}_1 = \bar{T}.$$

D'autre part, pour montrer que l'inverse de tout $\sigma \in \bar{T}$ y appartient, il suffit, étant donné que $\bar{G}_1$ est, par hypothèse, un groupe, de montrer que tout $\bar{\varrho}(\alpha)^{-1}$ est dans $\bar{T}$, c'est-à-dire qu'il est de la forme $\varrho(\alpha^{-1})\, \bar{x}$ pour quelque $x \in g$ (dépendant, évidemment, de α). Or, l'égalité $\bar{\varrho}(\alpha)^{-1} = \bar{\varrho}(\alpha^{-1}) \bar{x}$ équivaut à

$$[\alpha^{-1}, c(\alpha, \alpha^{-1}\xi)^{-1}] = [\alpha^{-1}, c(\alpha^{-1}, \xi)]\, [\varepsilon, x^{\omega(\xi)}] = [\alpha^{-1}, c(\alpha^{-1}, \xi)\, x^{\omega(\xi)}],$$

c'est-à-dire, pour tout $\xi \in \Gamma$, à l'égalité

$$c(\alpha, \alpha^{-1}\xi)^{-1} = c(\alpha^{-1}, \xi)\, x^{\omega(\xi)},$$

ou

$$c(\alpha, \alpha^{-1}\xi)\, c(\alpha^{-1}, \xi) = x^{-\omega(\xi)}.$$

En particulier, pour $\xi = \varepsilon$, cette égalité s'écrit

$$c(\alpha, \alpha^{-1})\, c(\alpha^{-1}, \varepsilon) = x^{-1},$$

et, si l'on prend $x = [c(\alpha, \alpha^{-1})\, c(\alpha^{-1}, \varepsilon)]^{-1}$ déterminé par cette égalité, la condition considérée s'écrit

$$c(\alpha, \alpha^{-1}\xi)\, c(\alpha^{-1}, \xi) = [c(\alpha, \alpha^{-1})\, c(\alpha^{-1}, \varepsilon)]^{\omega(\xi)}.$$

Or, si l'on pose $\beta = \alpha^{-1}$, la condition (B′) s'écrit

$$c(\alpha, \alpha^{-1}\xi)\, c(\alpha^{-1}, \xi) = c(\varepsilon, \xi)\, [c(\varepsilon, \varepsilon)^{-1}\, c(\alpha, \alpha^{-1})\, c(\alpha^{-1}, \varepsilon)]^{\omega(\xi)}$$

et, à l'aide de sa conséquence $c(\varepsilon, \xi) = c(\varepsilon, \varepsilon)^{\omega(\xi)}$, devient

$$c(\alpha, \alpha^{-1}\xi)\, c(\alpha^{-1}, \xi) = [c(\varepsilon, \varepsilon)\, c(\varepsilon, \varepsilon)^{-1}\, c(\alpha, \alpha^{-1})\, c(\alpha^{-1}, \varepsilon)]^{\omega(\xi)} = [c(\alpha, \alpha^{-1})\, c(\alpha^{-1}, \varepsilon)]^{\omega(\xi)}.$$

Ainsi, la condition pour que $\varrho(\alpha)^{-1}$ appartienne à $\bar{T}$, est une conséquence de la condition (B′), et $\bar{T}$ est bien un groupe $\bar{G}$ quand (A′) et (B′) sont satisfaites.

Nous avons vu que le fait que $\bar{T}$ est un groupe entraîne que, pour tout $\xi \in \Gamma$, $\omega(\xi)$ est un automorphisme de g. Ainsi, ce fait est une conséquence des conditions (A′) et (B′). On peut, d'ailleurs, voir qu'il résulte déjà directement de la condition (A′), où l'on pose $\alpha = \xi^{-1}$.

5. En vertu du théorème 4, $\bar{\varrho}(\xi)$ $(\xi \in \Gamma)$ est une fonction superposante de $\mathfrak{G}$ (et, quand $\bar{T}$ est un groupe $\bar{G}$, de $\bar{G}$) si, et seulement si $\bar{\varrho}(\alpha)$ conserve la seconde coordonnée x de tout élément de $\Gamma \times g$ qui est de la forme (ε, x). Or, on a $\bar{\varrho}(\alpha) \cdot (\varepsilon, x) = [\alpha, c(\alpha, \xi)] \cdot (\varepsilon, x) = [\alpha\varepsilon, c(\alpha, \varepsilon)\, x]$. Ainsi, la condition nécessaire est suffisante pour que $\bar{\varrho}(\xi)$ soit une fonction superposante est

(C) $\qquad$ pour tout $\alpha \in \Gamma$, $c(\alpha, \varepsilon) = e$ [6])

Si cette condition est satisfaite, les conditions (A′) et (B′) se simplifient et deviennent

(A) $$\omega(\xi)\,\omega(\alpha) = (c(\alpha, \xi))^{-1}\,\omega(\alpha\xi)$$

et

(B) $$c(\alpha, \beta\xi)\,c(\beta, \xi) = c(\alpha\beta, \xi)\,c(\alpha, \beta)^{\omega(\xi)}.$$

On reconnaît les conditions de SCHREIER. $\bar{T}$ *est un groupe* $\bar{G}$ *et* $\bar{\varrho}(\xi)$ *en est la fonction superposante si, et seulement si* $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ *est un système de facteurs de Schreier* (conditions (A) et (B)), *qui est normé* (condition (C)).

6. Soient G une extension de g par Γ et $\varrho(\xi)$ une fonction représentative de Γ dans G. Soit

$$\omega(\xi) = \{x \rightarrow \varrho(\xi)^{-1} x \varrho(\xi)\} \qquad (x \in g)$$

et $c(\alpha, \xi) = \varrho(\alpha\xi)^{-1}\varrho(\alpha)\varrho(\xi)$ le système de facteurs de cette fonction $\varrho(\xi)$. Calculons le ϱ-isomorphisme η_ϱ de G dans $\Gamma \circ g$.

Soient $\sigma = \varrho(\alpha)a \in G$ et $X = \varrho(\xi)x \in G/G_\varepsilon = G$ $((\alpha, \xi \in \Gamma;\ a, x \in g)$. Alors on a

$$\theta_\varrho \cdot X = (\xi, x)$$

et

$$\sigma X = \varrho(\alpha)\,a\,\varrho(\xi)\,x = \varrho(\alpha)\,\varrho(\xi)\,a^{\omega(\xi)}x = \varrho(\alpha\xi)\,c(\alpha, \xi)\,a^{\omega(\xi)}x.$$

Par suite, on a

$$\theta_\varrho \cdot \sigma X = (\alpha\xi, c(\alpha, \xi)\,a^{\omega(\xi)}x) = [\alpha, c(\alpha, \xi)\,a^{\omega(\xi)}] \cdot (\xi, x).$$

Ainsi, l'image dans $\mathfrak{G}$ de σ par η_ϱ, mis sous la forme de tableau, est

$$\eta_\varrho \cdot \sigma = [\alpha, c(\alpha, \xi)\,a^{\omega(\xi)}].$$

Soit $\bar{G} = \eta_\varrho \cdot G$ l'image de G par η_ϱ. Alors, $\bar{G}_1 = \bar{G} \cap {}^1\Delta$ est l'ensemble des éléments

$$\bar{x} = \eta_\varrho \cdot \varrho(\varepsilon)x = [\varepsilon, c(\varepsilon, \xi)\,x^{\omega(\xi)}]$$

$\bar{x}$ est appliqué par l'isomorphisme canonique sur $c(\varepsilon\ \varepsilon)\,x^{\omega(\varepsilon)}$. Si $\varrho(\xi)$ est une fonction représentative normée, on a

$$\omega(\varepsilon) = \{x \rightarrow exe^{-1}\} = 1_g \text{ et } c(\varepsilon, \xi) = \varrho(\xi)^{-1}\varrho(\varepsilon)\varrho(\xi) = \varrho(\xi)^{-1}e\varrho(\xi) = e.$$

Par suite, dans ce cas, on a

$$\bar{x} = [\varepsilon, x^{\omega(\xi)}],$$

et l'identification canonique applique $\bar{x}$ sur $ex^{1_g} = x$. D'autre part, on a

$$\bar{\varrho}(\alpha) = \eta_\varrho \cdot \varrho(\alpha) = \eta_\varrho \cdot \varrho(\alpha)e = [\alpha, c(\alpha, \xi)\,e^{\omega(\xi)}] = [\alpha, c(\alpha, \xi)]_\varrho;$$

on voit donc que, si $\varrho(\xi)$ est une fonction représentative normée de Γ dans G, *le système de facteurs de* $\varrho(\xi)$ *coïncide avec le système de fonctions* $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ *associé, dans notre méthode, à l'image* $\bar{G}$ *de* G *par le* ϱ*-isomorphisme.*

---

[6]) On sait que si $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ est un système de facteurs de SCHREIER, cette condition est nécessaire et suffisante pour qu'il soit normé.

D'autre part, nous savons que tout sous-groupe schreierien de $\Gamma \circ g$ est représentatif et est sa propre image à l'aide de son unique fonction superposante. On voit ainsi, *que le système de fonctions $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ associé à $\overline{G}$ est le système de facteurs de toute fonction représentative $\varrho(\xi)$, qui immerge dans $\Gamma \circ g$ une extension G de g par Γ de manière à l'appliquer sur $\overline{G}$. En particulier, c'est le système de facteurs associé à la fonction superposante $\overline{\varrho}(\xi)$ de G* (ce qui se vérifie aussi facilement par le calcul direct).

7. Soient $\overline{G}$ et $\overline{\overline{G}}$ deux sous-groupes schreieriens de $\mathfrak{G}$, et soient $\overline{\omega}(\xi)$, $\overline{c}(\alpha, \xi)$ et $\overline{\overline{\omega}}(\xi)$, $\overline{\overline{c}}(\alpha, \xi)$ les systèmes de fonctions qui leur sont associés. $\overline{G}$ et $\overline{\overline{G}}$ sont (Γ, g)-isomorphes si, et seulement s'il existe un $\lambda \in \mathfrak{G}_2$ tel que $\overline{\overline{G}} = \lambda \overline{G} \lambda^{-1}$.

Par définition, $\mathfrak{G}_2$ est le groupe des tableaux de la forme

$$[\varepsilon, l(\xi)]$$

tels que $l(\varepsilon) = e$. Si λ est un tel tableau, l'élément de $\overline{\overline{G}}_1$, où $\overline{\overline{G}}_1 = \overline{\overline{G}} \cap {}^1\Delta = \lambda \overline{G} \lambda^{-1} \cap \lambda\, {}^1\Delta \lambda^{-1} = \lambda(\overline{G} \cap {}^1\Delta)\lambda^{-1} = \lambda \overline{G}_1 \lambda^{-1}$, identifié canoniquement avec x, est

$$[\varepsilon, x^{\overline{\overline{\omega}}(\xi)}] = \overline{\overline{x}} = \lambda \overline{x} \lambda^{-1} = [\varepsilon, l(\xi)]\,[\varepsilon, x^{\overline{\omega}(\xi)}]\,[\varepsilon, l(\xi)^{-1}] = [\varepsilon, l(\xi)\, x^{\overline{\omega}(\xi)}\, l(\xi)^{-1}] =$$
$$= [\varepsilon, [x^{\overline{\omega}(\xi)}]^{(l(\xi))}] = [\varepsilon, x^{(l(\xi))\overline{\omega}(\xi)}].$$

Donc, on a

(E₁) $$\boxed{\overline{\overline{\omega}}(\xi) = (l(\xi))\,\overline{\omega}(\xi)}.$$

D'autre part, la fonction superposante $\overline{\overline{\varrho}}(\alpha)$ de $\overline{\overline{G}}$ est l'image par (λ) de quelque fonctions représentatives normée, d'ailleurs bien déterminée

$$\overline{\varrho}'(\alpha) = \overline{\varrho}(\alpha)\, x_\alpha = [\alpha, \overline{c}(\alpha, \xi)]\,[\varepsilon, x_\alpha^{\overline{\omega}(\xi)}] = [\alpha, \overline{c}(\alpha, \xi)\, x_\alpha^{\overline{\omega}(\xi)}] \quad (x_\alpha \in g)$$

de Γ dans $\overline{G}$.

On a

$$\lambda \overline{\varrho}'(\alpha) \lambda^{-1} = [\varepsilon, l(\xi)]\,[\alpha, \overline{c}(\alpha, \xi)\, x_\alpha^{\overline{\omega}(\xi)}]\,[\varepsilon, l(\xi)^{-1}] = [\alpha, l(\alpha\xi)\, \overline{c}(\alpha, \xi)\, x_\alpha^{\overline{\omega}(\xi)}\, l(\xi)^{-1}].$$

Donc

$$\overline{\overline{c}}(\alpha, \xi) = l(\alpha\xi)\, \overline{c}(\alpha, \xi)\, x_\alpha^{\overline{\omega}(\xi)}\, l(\xi)^{-1}.$$

Mais, pour que $\overline{\overline{\varrho}}(\alpha)$ soit une fonction superposante, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in \Gamma$, on ait

$$\overline{\overline{c}}(\alpha, \varepsilon) = e;$$

autrement dit, puisque $\overline{\varrho}(\xi)$ est déjà supposée une fonction superposante, c'est-à-dire telle que $\overline{c}(\alpha, \varepsilon) = e$, on a

$$l(\alpha)\, \overline{c}(\alpha, \varepsilon)\, x_\alpha^{\overline{\omega}(\varepsilon)}\, l(\varepsilon)^{-1} = l(\alpha)\, x_\alpha = e,$$

ce qui équivaut à

$$x_\alpha = l(\alpha)^{-1}$$

et à

(E₂) $$\boxed{\overline{\overline{c}}(\alpha, \xi) = l(\alpha\xi)\, \overline{c}(\alpha, \xi)\, l(\alpha)^{-\overline{\omega}(\xi)}\, l(\xi)^{-1}}$$

Inversement, si deux systèmes de fonctions $\bar{\omega}, \bar{c}$ et $\bar{\bar{\omega}}, \bar{\bar{c}}$, satisfaisant aux conditions A), B), C) de l'alinéa 5 de ce §, sont tels qu'il existe une fonction $l(\xi)$ définie sur Γ et à valeurs dans g et telle que $l(\varepsilon)=e$, de manière que $\bar{\omega}, \bar{\bar{\omega}}, \bar{c}, \bar{\bar{c}}$ et $l(\xi)$ satisfassent aux conditions E_1, E_2, les groupes schreieriens auxquelles ces systèmes sont associés sont *(Γ, g)-isomorphes.* Plus précisément, on a $\bar{\bar{G}}=\lambda\bar{G}\lambda^{-1}$, où $\lambda=[\varepsilon, l(\xi)]$; et $\bar{G}$ est appliqué sur $\bar{\bar{G}}$ par le $\bar{\varrho}'$-isomorphisme, où

$$\bar{\varrho}'(\xi)=\bar{\varrho}(\xi)\, l(\xi)^{-1}.$$

De tels systèmes de facteurs de Schreier $\bar{\omega}, \bar{c}$ et $\bar{\bar{\omega}}, \bar{\bar{c}}$ sont dits *équivalents.* On voit qu'on retrouve par notre méthode le critère d'équivalence de Schreier.

8. Le système de facteurs

$$\bar{\bar{\omega}}(\xi)=(l(\xi))\,\bar{\omega}(\xi),\quad \bar{\bar{c}}(\alpha,\xi)=l(\alpha\xi)\,\bar{c}(\alpha,\xi)\,l(\alpha)^{-\omega(\xi)}\,l(\xi)^{-1}$$

sera dit le transformé de $\bar{\omega}(\xi), \bar{c}(\alpha,\xi)$ par

$$\lambda=[\varepsilon, l(\xi)]\in\mathfrak{G}_2.$$

Visiblement, $\lambda\in\mathfrak{G}_2$ conserve le système des facteurs $\bar{\omega}(\xi), \bar{c}(\alpha,\xi)$ associé à un sous-groupe schreierien $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}=\Gamma\circ g$ si, et seulement si $\lambda\bar{G}\lambda^{-1}=\bar{G}$, autrement dit si, et seulement si λ appartient au normalisateur $N(\bar{G})$ de $\bar{G}$ dans $\mathfrak{G}$. Ainsi, les $\lambda\in\mathfrak{G}_2$ qui conservent $\bar{\omega}(\xi), \bar{c}(\alpha,\xi)$ forment un groupe, à savoir

$$N^*(\bar{G})=N(\bar{G})\cap\mathfrak{G}_2,$$

et deux éléments λ, λ' transforment $\bar{\omega}(\xi), \bar{c}(\alpha,\xi)$ en un même système si, et seulement s'ils appartiennent à une même classe à droite suivant $N^*(\bar{G})$.

Ainsi, l'ensemble des transformés d'un système de facteurs normé est en correspondance biunivoque avec l'ensemble $S(\bar{G})=\mathfrak{G}_2/N^*(\bar{G})$ des classes à droite dans $\mathfrak{G}_2$ suivant le normalisateur $N^*(\bar{G})$ dans $\mathfrak{G}_2$ du sous-groupe $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}$, auquel est associé ce système de facteurs.

9. $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ étant des groupes abstraits, soit G un groupe possédant une suite de composition (incomplète)

$$G=G_0\supset G_1\supset\cdots\supset G_s$$

telle que, pour tout entier $i=1, 2, \ldots, s$, G_{i-1}/G_i soit isomorphe à Γ_i et que G_s se réduise à l'unité de G. Quand on identifie, de quelque manière bien déterminée, chaque G_{i-1}/G_i avec Γ_i, on dit que G, considéré avec ces identifications, est une *$(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-extension.* Si la suite de composition considérée de G en est une suite normale, autrement dit si tout G_i est invariant dans G, G (considéré toujours avec les identifications indiquées) est dit une *$(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-extension spéciale.* Pour $s=2$, ces deux notions se confondent avec celle de l'extension de Γ_2 par Γ_1, mais pour $s>2$, la seconde est un cas particulier de la première.

On peut se poser un problème analogue à celui de Schreier: construire explicitement un ensemble Ω de $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-extensions tel que toute

$(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-extension soit isomorphe à quelque élément de cet ensemble, et donner un critère explicite de la $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-isomorphie dans cet ensemble. En principe, par la méthode analogue à celle qu'on a employé pour $s=2$, il est possible, pour toute valeur de s, de donner la solution de ce problème, mais ceci au prix de calculs qui deviennent vite inextricables. Comme pour $s=2$, l'ensemble des groupes dont il s'agit est celui des sous-groupes schreieriens représentatifs de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$, car, si $\varrho(x_i)$ est une fonction représentative normée des Γ_i dans une $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-extension G, l'image $\bar{G}$ de G par le ϱ-isomorphisme est un tel sous-groupe de $\mathfrak{G}$, qui est $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-isomorphe à G. Contrairement au cas $s=2$, les sous-groupes schreieriens de $\mathfrak{G}$ ne sont pes toujours représentatifs, mais chaque sous-groupe schreierien représentatif $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}$ possède une et un seule fonction superposante $\bar{\varrho}(x_i)$. On a évidemment

$$\bar{G} = \{\bar{\varrho}(x_1)\,\bar{\varrho}(x_2)\cdots\bar{\varrho}(x_3)\}_{x=(x_1, x_2, \ldots, x_s)\in\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2\times\ldots\times\Gamma_s},$$

et, si

$$\bar{\varrho}(\alpha_i) = [a_{\alpha_i}, a_{\alpha_i}(x_1), a_{\alpha_i}(x_1, x_2), \ldots, a_{\alpha_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})]$$

où $\alpha_i \in \Gamma_i$, on a (§. 5, alinéa 3)

$$\begin{aligned} a_{\alpha_i}(e_1, e_2, \ldots, e_{j-1}) &= e_j && \text{si } j<i,\\ a_{\alpha_i}(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}) &= \alpha_i, &&\\ a_{\alpha_i}(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, \alpha_i, \ldots, x_{j-1}) &= e_j && \text{si } j>i. \end{aligned}$$

Si l'on prend une fonction superposante quelconque $\bar{\varrho}(x_i)$ des Γ_i dans $\mathfrak{G}$, $\bar{G} = \{\bar{\varrho}(x_1)\,\bar{\varrho}(x_2)\ldots\bar{\varrho}(x_s)\}_{x\in\Gamma}$ n'est pas en général un groupe. Pour que cela arrive, il faut et il suffit que les fonctions $a_{\alpha_j}(x^{j-1})$ satisfassent à certaines égalités, dont le calcul ne présente d'autres difficultés que la longueur, qui le rend vite inextricable. D'ailleurs, si l'on ne considère que des $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-extensions spéciales, l'ensemble qu'on a à construire, pour résoudre le problème de SCHREIER pour de telles extensions plus particulières, est celui des sous-groupes schreieriens $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}$ tels que, pour tout $i=1, 2, \ldots, s$, $\bar{G}_i$ soit invariant dans $\bar{G}$ (de tels sous-groupes schreieriens seront dits *spéciaux*), donc contenu dans ${}^i\Delta$. Par conséquent, sa fonction superposante $\bar{\varrho}(x_i)$ a, dans ce cas, la forme

$$\bar{\varrho}(\alpha_i) = [e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, a_{\alpha_i}(x^{i-1}), a_{\alpha_i}(x^i), \ldots, a_{\alpha_i}(x^{s-1})]$$

où $a_{\alpha_i}(e^{i-1}) = \alpha_i$ et $a_{\alpha_i}(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, \alpha_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}) = e_j$ pour $j>i$. Il s'agit donc, dans ce cas particulier, de trouver parmi de telles fonctions $a_{\alpha_i}(x^{i-1+f})$ $(i=1, 2, \ldots, s; f=1, 2, \ldots, s-i)$ celles, pour lesquelles $\bar{\varrho}(x_i)$ est une fonction superposante d'un sous-groupe schreierien spécial de $\mathfrak{G}$. Nous avons fait le calcul pour $s=3$; mais nous ne croyons pas utile d'en donner ici le résultat, qui, sous sa forme actuelle, a une apparence trop compliquée, et le lecteur, s'il s'arme de quelque patience, peut l'obtenir facilement lui-même. Mais nous sommes persuadés qu'il existe un algorithme (que nous n'avons pas pu trouver jusqu'à présent), qui permettrait de mettre ce calcul et ses résultats, pour un s quelconque, sous une forme simple dépendant de s comme d'un paramètre. Peut-être consiste-t-il en introduction d'un langage généralisant, d'une manière convenable, celui de la topologie combinatoire.

De même que pour $s=2$, si $\bar{\varrho}(x_i)$ est une fonction superposante d'un sous-groupe schreierien $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}$, les fonctions $a_{\alpha_i}(x^{i-1})$ ont, à la fois, une signification externe (position de $\bar{G}$ par rapport à $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_s$) et interne (composition des $\bar{\varrho}(x_i)$).

Deux sous-groupes schreieriens représentatifs $\bar{G}$ et $\bar{\bar{G}}$ de $\mathfrak{G}$ sont $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-isomorphes si, et seulement si $\bar{\bar{G}}$ est le transformé de $\bar{G}$ par un $\lambda \in G_s$ appartenant à l'ensemble $\Lambda(\bar{G})$, dont la détermination, à partir de $\bar{G}$ est faite par notre théorème 6, ce qui en montre l'importance. D'autre part, la détermination de la fonction superposante de $\lambda \bar{G} \lambda^{-1}$ ($\lambda \in \Lambda(\bar{G})$) à partir de celle de $\bar{G}$, c'est-à dire le calcul de la "transformation" des $a_{\alpha_i}(x^{i-1})$, produite par un tel λ, ne présente pas d'autres difficultés que celle de longueur.

Il nous semble qu'il y a là un vaste champ de recherches.

(Reçu le 20 janvier 1949)

Remarks on factorizable groups.

By NOBORU ITÔ in Nagoya (Japan).

Recently J. SZÉP[1]) obtained some results on factorizable groups. His results permit a slight and easily provable generalization which we wish to remark in this note.

(I) *Let* $\mathfrak{G}$ *be a factorizable group such that*

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{A}$$

where $\mathfrak{S}$ *is nilpotent and* $\mathfrak{A}$ *abelian. Then* $\mathfrak{G}$ *is solvable.*

Proof. An induction argument can be used with respect to the order of $\mathfrak{G}$; thus we may assume that every proper factor group of $\mathfrak{G}$ is solvable, and we have only to prove the existence of a solvable normal subgroup of $\mathfrak{G}$.

We can suppose that $\mathfrak{S}$ is a maximal subgroup of $\mathfrak{G}$. In fact, if a proper subgroup $\mathfrak{H}$ of $\mathfrak{G}$ contains $\mathfrak{S}$ properly, $\mathfrak{H}=\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{A}\cap\mathfrak{H}$. Therefore $\mathfrak{H}$ is solvable by our induction hypothesis. Further $\mathfrak{H}$ contains a normal subgroup $\mathfrak{N}$ of $\mathfrak{G}$. which is seen by a result of J. SZÉP and L. RÉDEI[2]). Since $\mathfrak{H}$ is solvable and $\mathfrak{H}\supset\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$ is solvable. Then $\mathfrak{G}$ is solvable.

Further we san suppose that $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{A}$ have relatively prime orders. In fact, if p is a common prime factor of the order of $\mathfrak{S}$ and that of $\mathfrak{A}$, we consider any p-Sylow subgroup $\mathfrak{S}_p$ of $\mathfrak{G}$. Let $S\cdot A\neq e$ be an element of the center of $\mathfrak{S}_p$, S and A being elements of $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{A}$ respectively, and let P be any element of the center of a p-Sylow subgroup of $\mathfrak{S}$ which is contained in $\mathfrak{S}_p$. Then $P^{-1}\cdot S\cdot A\cdot P=S\cdot P^{-1}\cdot A\cdot P=S\cdot A$, whence $P^{-1}\cdot A\cdot P=A$. Therefore if $A\neq e$, the centralizer $\mathfrak{Z}(P)$ of P in $\mathfrak{G}$ contains $\mathfrak{S}$ properly. Since $\mathfrak{S}$ is maximal, $\mathfrak{Z}(P)=\mathfrak{G}$ and $\{P\}$ is an abelian normal subgroup of $\mathfrak{G}$. Then $\mathfrak{G}$ is solvable. If $A=e$, the centralizer $\mathfrak{Z}(S)$ of S in $\mathfrak{G}$ contains $\mathfrak{S}$ properly. Since $\mathfrak{S}$ is maximal, $\mathfrak{Z}(S)=\mathfrak{G}$ and $\{S\}$ is an abelian normal subgroup of $\mathfrak{G}$. Then $\mathfrak{G}$ is solvable.

Let p be a prime factor of the order of S. Then we can suppose that $\mathfrak{G}$ has no p-normality in the sense of O. GRÜN[3]). In fact, if $\mathfrak{G}$ is p-normal, then, by a theorem of O. GRÜN, the p-factor commutator subgroup of $\mathfrak{G}$ is isomorphic to that of the normalizer $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p))$ of the center $\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p)$ of a p-Sylow subgroup of $\mathfrak{G}$. Since $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p))\supset\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{S}$ is maximal, $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p))=\mathfrak{G}$ or $=\mathfrak{S}$. If $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p))=\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p)$ is an abelian normal subgroup of $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{G}$ is

[1]) J. SZÉP, On factorisable, not simple groups, *these Acta*, **13** (1950), pp. 239—241.

[2]) J. SZÉP and L. RÉDEI, On factorisable groups, *these Acta*, **13** (1950), pp. 235—238.

[3]) H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*. I. (Leipzig, 1937), p. 135.

solvable. If $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p)) = \mathfrak{S}$, then $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p)) \neq \mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p))'(p)$, where $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p))'(p)$ is the p-commutator subgroup of $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p))$. Therefore $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}'(p)$, where $\mathfrak{G}'(p)$ is the p-commutator subgroup of $\mathfrak{G}$. Since $\mathfrak{G}'(p) \supset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}'(p) = (\mathfrak{G}'(p) \cap \mathfrak{S}) \cdot \mathfrak{A}$ and therefore $\mathfrak{G}'(p)$ solvable by induction hypothesis. Hence $\mathfrak{G}$ is solvable.

Last we can suppose that $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_p$ is a p-group. In fact, since $\mathfrak{G}$ is not p-normal, $\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p)$ is contained in at least two distinct p-Sylow subgroups of $\mathfrak{G}$ one of which may be $\mathfrak{S}_p$ itself. Therefore $\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p)$ is contained in at least two distinct conjugate subgroups of $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ one of which may be $\mathfrak{S}$ itself. Let $\mathfrak{S}^A$ be the other subgroup, where A is an element of $\mathfrak{A}$. Since $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p)) \supset \mathfrak{S}$ and $\mathfrak{S}$ is maximal, $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p)) = \mathfrak{G}$ or $= \mathfrak{S}$. If $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p)) = \mathfrak{G}$, then $\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p)$ is an abelian normal subgroup of $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{G}$ is solvable. If $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p)) = \mathfrak{S}$, then $\mathfrak{H}_p(\mathfrak{S}) = \mathfrak{H}_p^A(\mathfrak{S})$, since $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p)) \supset \mathfrak{H}_p(\mathfrak{S})$ and $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_p)) \supset \mathfrak{H}_p^A(\mathfrak{S})$, where $\mathfrak{H}_p(\mathfrak{S})$ is the p-Sylow complement of $\mathfrak{S}$, and since $\mathfrak{S}$ is nilpotent. Then the normalizer $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}_p(\mathfrak{S}))$ of $\mathfrak{H}_p(\mathfrak{S})$ contains $\mathfrak{S}$ properly and coincides with $\mathfrak{G}$. Then $\mathfrak{H}_p(\mathfrak{S})$ is a nilpotent normal subgroup of $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{G}$ is solvable.

Then, by a theorem of W. BURNSIDE[4]), $\mathfrak{G}$ is not simple. Let $\mathfrak{N}$ be a proper normal subgroup of $\mathfrak{G}$ distinct from $\{e\}$. If $\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{N} \neq \mathfrak{G}$, then $\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{S} \cdot (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{N})$ and $\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{N}$ is solvable by induction hypothesis. Therefore $\mathfrak{N}$ is a solvable normal subgroup of $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{G}$ is solvable. If $\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, then the index of $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$ is a power of p and $\mathfrak{N}$ contains $\mathfrak{A}$. Then $\mathfrak{N} = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}) \cdot \mathfrak{A}$ and $\mathfrak{N}$ is solvable by induction hypothesis. Therefore $\mathfrak{N}$ is a solvable normal subgroup of $\mathfrak{G}$, whence $\mathfrak{G}$ is solvable, q. e. d.

(II) *Let $\mathfrak{G}$ be a factorizable group such that*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{P}$$

where $\mathfrak{S}$ is nilpotent and $\mathfrak{P}$ is a p-group. Then $\mathfrak{G}$ is solvable.

Proof. The induction argument can be used with respect to the order of $\mathfrak{G}$; thus we may assume that every proper factor group of $\mathfrak{G}$ is solvable, and we have only to prove the existence of a solvable normal subgroup of $\mathfrak{G}$.

By a theorem of W. BURNSIDE, $\mathfrak{G}$ is not simple. Let $\mathfrak{N}$ be a proper normal subgroup of $\mathfrak{G}$ distinct from $\{e\}$. If $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{N} \neq \mathfrak{G}$, then $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{N} = (\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}) \cdot \mathfrak{P}$ and $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{N}$ is solvable by induction hypothesis. Therefore $\mathfrak{N}$ is a solvable normal subgroup of $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{G}$ is solvable. If $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, then the index of $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$ is a power of p. Let $\mathfrak{H}_p(\mathfrak{S})$ be a p-Sylow complement of $\mathfrak{S}$. Then $\mathfrak{N} = \mathfrak{H}_p(\mathfrak{S}) \cdot \mathfrak{S}_p(\mathfrak{N})$ where $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{N})$ is a p-Sylow subgroup of $\mathfrak{N}$ and $\mathfrak{N}$ is solvable by our induction hypothesis. Therefore $\mathfrak{N}$ is a solvable normal subgroup of $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{G}$ is solvable. q. e. d.

MATHEMATICAL INSTITUTE,
NAGOYA UNIVERSITY.

(Received May 23, 1951.)

---

4) A. SPEISER, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (Berlin, 1923), p. 136.

Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Reihen.

Von KÁROLY TANDORI in Budapest.

Einleitung.

Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Raume $L^2(a, b)$ definiertes System von orthogonalen und normierten Funktionen und sei

$$(1) \qquad K_n^r(t, x) = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r \varphi_k(t) \varphi_k(x),$$

wo

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{n!}$$

ist. Die Lebesgueschen Funktionen

$$L_n^r(x) = \int_a^b |K_n^r(t, x)|\, dt$$

spielen in der Theorie der (C, r)-Summierbarkeit der Orthogonalreihen eine entscheidende Rolle.

Es sei nämlich

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$$

die Entwicklung einer Funktion $f(x) \in L^2(a, b)$, für welche also $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$ gilt. Sei ferner $E \subset [a, b]$ eine Menge von positivem Maß und $\{v_n\}$ eine monoton gegen Unendlich strebende Folge positiver Zahlen. S. KACZMARZ hat den folgenden Satz ausgesprochen:

Ist r eine positive ganze Zahl und ist $L_n^r(x) \leqq v_n^2$ auf der Menge E, gilt außerdem auch

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 v_k^2 < \infty,$$

so ist die Orthogonalreihe (2) *in E fast überall $(C, \alpha > 0)$-summierbar*[1]).

[1]) S. KACZMARZ, Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux, *Studia Math.*, **1** (1929), S. 100—103; Notes on orthogonal series I., *ebenda*, 5 (1934), S. 26—28.

Die Beweisführung von KACZMARZ scheint aber insofern eine gewisse Lücke zu enthalten, da KACZMARZ sich wesentlich auf die Bedingung stützt, daß man eine Indizesfolge $\{n_k\}$ finden kann derart, daß für *alle* ganze k die Beziehung $k \leq v_{n_k}^2 < k+1$ gilt; diese Bedingung ist aber unter der einzigen Annahme, daß $\{v_n\}$ monoton gegen Unendlich wächst, im allgemeinen nicht erfüllt. S. KACZMARZ beweist also tatsächlich etwas weniger, als es im Satze ausgesprochen wird. Wir werden jedoch zeigen, daß der Kaczmarzsche Satz auch in seiner ursprünglichen Fassung, ohne der im Beweis auftretenden einschränkenden Annahme richtig ist. Dabei hat unser Beweis den relativen Vorteil, daß wir nur mit Cesàroschen Mittel rechnen, wogegen KACZMARZ auch zum Beweis des etwas engeren Satzes die Heranziehung der Rieszschen typischen Mittel benötigt. Auch die Annahme, daß r eine ganze Zahl sei, scheint überflüssig zu sein.

Da nach einem Kaczmarz—Zygmundschen Satz[2]) für die Entwicklungen der L^2-integrierbaren Funktionen die Konvergenz der $(C, \alpha > 0)$-Mittel verschiedener Ordnung untereinander fast überall gleichwertig sind, genügt zu zeigen, daß die Reihe (2) unter den Voraussetzungen des Satzes für $r = 1, 2, \ldots$ fast überall (C, r)-summierbar ist, für nicht ganze r aber die Reihe (2) fast überall (C, r')-summierbar ist, wo r' eine ganze Zahl $> r$ bedeutet.

1. Hilfssätze über Cesàrosche Mittel.

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ eine beliebige Zahlenreihe. Unter dem n-ten (C, α)-Mittel versteht man die Summe

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha c_k.$$

Es ist bekannt[3]), daß für die Koeffizienten A_n^α die folgenden Beziehungen gelten:

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!} \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \qquad \alpha \neq -1, -2, \ldots; \tag{4}$$

$$A_l^\alpha - A_{l-1}^\alpha = A_l^{\alpha-1}; \tag{5}$$

$$A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha A_k^\beta; \tag{6}$$

$$A_l^\alpha = 0, \quad l = -1, -2, \ldots; \tag{7}$$

$$A_0^\alpha = 1; \tag{8}$$

$$A_l^{-1} = 0, \quad l \neq 0; \tag{9}$$

$$A_{n+1}^\alpha > A_n^\alpha > 0, \quad \alpha > -1. \tag{10}$$

---

[2]) S. KACZMARZ, Über die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen, *Math. Zeitschrift*, **23** (1925), S. 263–270; A. ZYGMUND, Une remarque sur un théorème de M. Kaczmarz, *Math. Zeitschrift*, **25** (1926), S. 297–298.

[3]) Siehe z. B. A. ZYGMUND, *Trigonometrical series* (Warszawa—Lwów, 1935), S. 41–43

Hierbei bedeuten α, β belibige reelle Zahlen, l eine ganze und n eine natürliche Zahl.

Mit Hilfe der Summen

(11) $$s_n^0 = c_0 + c_1 + \ldots + c_n, \quad s_n^k = s_0^{k-1} + s_1^{k-1} + \ldots + s_n^{k-1}$$

läßt sich σ_n^k in der Form

(12) $$\sigma_n^k = \frac{s_n^k}{A_n^k}$$

darstellen, ferner besteht auch die folgende Beziehung:

(13) $$\sigma^{\alpha+\beta} = \frac{1}{A_n^{\alpha+\beta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} A_k^\alpha \sigma_k^\alpha.$$

Hilfssatz 1. *Sind p, q und r natürliche Zahlen $j = \min(p, q)$, so gilt*

(14) $$\sum_{k=0}^{j} A_{p-k}^r A_{q-k}^r c_k = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{\mu} \left(\sum_{k=0}^{\min(j,(q-\mu)^+)} \sigma_k^r A_k^r A_{p-k}^{r-\mu} A_{q-k-\mu}^{\mu-1} \right),$$

wo $(q-\mu)^+$ den positiven Teil von $q-\mu$ bedeutet.

Mit einer Abelschen Transformation erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{j} A_{p-k}^r A_{q-k}^r c_k = \sum_{k=0}^{j-1} s_k^0 \Delta^1 (A_{p-k}^r A_{q-k}^r) + s_j^0 A_{p-j}^r A_{q-j}^r,$$

wo

$$\Delta^1 (A_{p-k}^r A_{q-k}^r) = A_{p-k}^r A_{q-k}^r - A_{p-k-1}^r A_{q-k-1}^r.$$

Wegen $j = \min(p, q)$ und (7) ist $A_{p-j-1}^r A_{q-j-1}^r = 0$, daher $A_{p-j}^r A_{q-j}^r = \Delta^1 (A_{p-j}^r A_{q-j}^r)$, folglich

$$\sum_{k=0}^{j} A_{p-k}^r A_{q-k}^r c_k = \sum_{k=0}^{j} s_k^0 \Delta^1 (A_{p-k}^r A_{q-k}^r).$$

Wenn wir dieses Verfahren r-mal wiederholen und die Bezeichnung

$$\Delta^{\mu+1} (A_{p-k}^r A_{p-k}^r) = \Delta^\mu (A_{p-k}^r A_{q-k}^r) - \Delta^\mu (A_{p-k-1}^r A_{q-k-1}^r)$$

einführen, so folgt wegen $j = \min(p, q)$ und (7): $\Delta^\mu (A_{p-j-1}^r A_{q-j-1}^r) = 0$, also $\Delta^\mu (A_{p-j}^r A_{q-j}^r) = \Delta^{\mu+1} (A_{p-j}^r A_{q-j}^r)$ für alle μ, weshalb sich

(15) $$\sum_{k=0}^{j} A_{p-k}^r A_{q-k}^r c_k = \sum_{k=0}^{j} s_k^r \Delta^{r+1} (A_{p-k}^r A_{q-k}^r)$$

ergibt. Es läßt sich leicht zeigen, daß

$$\Delta^{r+1} (A_{p-k}^r A_{q-k}^r) = \sum_{\mu=0}^{r+1} \binom{r+1}{\mu} \Delta^\mu (A_{p-k}^r) \Delta^{r+1-\mu} (A_{q-k-\mu}^r).$$

Beachten wir (5), so erhalten wir

$$\Delta^{r+1} (A_{p-k}^r A_{q-k}^r) = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{\mu} A_{p-k}^{r-\mu} A_{q-k-\mu}^{\mu-1}.$$

Setzen wir diesen Wert in (15) ein und beachten dabei (12), so folgt durch Umkehrung der Summierung nach den Indizes k und μ:

$$\sum_{k=0}^{j} A_{p-k}^{r} A_{q-k}^{r} c_k = \sum_{\mu=0}^{r+1} \binom{r+1}{\mu} \left(\sum_{k=0}^{j} \sigma_k^{r} A_k^{r} A_{p-k}^{r-\mu} A_{q-k-\mu}^{\mu-1} \right).$$

Da nach (7) $A_{q-k-\mu}^{\mu-1}=0$, wenn $q-k-\mu<0$, so genügt es bei der Summation nach k nur jene Glieder zu beachten, für welche $k \leqq (q-\mu)^+$. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. *Seien $\{\lambda_n\}$ eine beliebige Zahlenfolge ($\lambda_n \neq 0$), r eine natürliche Zahl, $\Delta\left(\frac{1}{\lambda_s}\right)=\frac{1}{\lambda_s}-\frac{1}{\lambda_{s+1}}$, und $\overset{*}{\sigma}{}_k^{\mu}$ das n-te (C,μ)-Mittel der Reihe*

$$\text{(17)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_k .$$

Dann gilt

$$\text{(16)} \quad \sigma_n^r = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r \overset{*}{\sigma}{}_k^0 \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + \sum_{\mu=1}^{r} \frac{1}{A_n^r} \left(\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^{\mu} \overset{*}{\sigma}{}_k^{\mu} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right)\right) + \frac{\overset{*}{\sigma}{}_n^r}{\lambda_{n+r+1}}.$$

Mittels einer Abelschen Transformation ergibt sich

$$\sigma_n^r = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^r}{\lambda_k} c_k \lambda_k = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n-1} \overset{*}{s}{}_k^0 \Delta\left(\frac{A_{n-k}^r}{\lambda_k}\right) + \overset{*}{s}{}_n^0 \frac{A_{n-n}^r}{A_n^r \lambda_n}.$$

Wegen (7) ist wieder $\frac{A_{n-k}^r}{\lambda_k} = \Delta\left(\frac{A_{n-k}^r}{\lambda_k}\right)$ für $k=n$, mithin

$$\sigma_n^r = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} \overset{*}{s}{}_k^0 \Delta\left(\frac{A_{n-k}^r}{\lambda_k}\right).$$

Da

$$\Delta\left(\frac{A_{n-k}^r}{\lambda_k}\right) = A_{n-k}^r \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + \frac{1}{\lambda_{k+1}} \Delta(A_{n-k}^r),$$

man kann auf Grund von (5) schreiben:

$$\sigma_n^r = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r \overset{*}{s}{}_k^0 \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-1} \overset{*}{s}{}_k^0 \frac{1}{\lambda^{k+1}}.$$

Wenden wir auf das rechts stehende zweite Glied wieder die Abelsche Transformation an, so folgt genau wie früher:

$$\frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-1} \overset{*}{s}{}_k^0 \frac{1}{\lambda_{k+1}} = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-1} \overset{*}{s}{}_k^1 \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) + \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-2} \overset{*}{s}{}_k^1 \frac{1}{\lambda_{k+2}},$$

also

$$\sigma_n^r = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r \overset{*}{s}{}_k^0 \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-1} \overset{*}{s}{}_k^1 \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) + \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-2} \overset{*}{s}{}_k^1 \frac{1}{\lambda_{k+2}}.$$

Wenn wir die Abelsche Transformation auf das letzte Glied auf der obigen

Weise noch $(r-1)$-mal anwenden, so erhalten wir

$$\sigma_n^r = \frac{1}{A_n^r}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r s_k^{*0} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + \sum_{\mu=1}^{r}\left(\frac{1}{A_n^r}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-\mu} s_k^{*\mu} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{A_n^r}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{-1} s_k^{*r} \frac{1}{\lambda_{k+r+1}},$$

wo die $s_n^{*\mu}$ der Reihe (17) nach der Muster von (11) zugeordneten Summen bedeuten, d. h.

$$s_n^{*0} = c_0\lambda_0 + c_1\lambda_1 + \cdots + c_n\lambda_n, \quad s_n^{*k} = s_0^{*k-1} + s_1^{*k-1} + \cdots s_n^{*k-1}.$$

Daraus ergibt sich nach (12), (8) und (9) die behauptete Beziehung (16).

Hilfssatz 3. *Sei $\{w_n\}$ eine monoton ins Unendliche wachsende positive Zahlenfolge und sei $E \subset [a, b]$ eine Menge von positivem Maß. Ist $L_n^\alpha(x) \leqq w_n$ auf der Menge E, so gilt auf E auch $L_n^{\alpha+\beta} \leqq w_n$ für alle $\beta \geqq 0$.*

Nach (1) und (13) ist

$$K_n^{\alpha+\beta}(t, x) = \frac{1}{A_n^{\alpha+\beta}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} A_k^\alpha K_k^\alpha(t, x)$$

Ferner ist $A_{n-k}^{\beta-1}$ nach (4), bzw., wenn $\beta=0$ ist, nach (3) und (9) positiv. Daraus folgt

$$L_n^{\alpha+\beta}(x) = \int_a^b |K_n^{\alpha+\beta}(t, x)|\, dt \leqq \frac{1}{A_n^{\alpha+\beta}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} A_k^\alpha \int_a^b |K_n^\alpha(t, x)|\, dt.$$

Aus der Monotonität von $\{w_n\}$ ergibt sich auf Grund von (6) die Behauptung.

3. Sätze über die Cesàroschen Mittel der Orthogonalreihen.

Satz 1. *Es sei $E \subset [a, b]$ eine Menge von positivem Maß, $\{v_n\}$ eine monoton ins Unendliche wachsende positive Zahlenfolge und r eine natürliche Zahl Ist $L_n^r(x) \leqq v_n^2$ auf E und ist*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < \infty,$$

so gilt auf E fast überall $\sigma_n^r(x) = O(v_n)$, wo $\sigma_n^r(x)$ das n-te (C, r)-Mittel der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \varphi_k(x)$$

bedeutet[4]).

[4]) Diesen Satz hat S. Kaczmarz mit der Benützung der Rieszschen typischen Mittel bewiesen (l. c. erste Arbeit, S. 113—118). Unser Beweis ist ähnlich zu dem Kaczmarzschen, aber hier rechnen wir nur mit Cesàroschen Mitteln. Der Grundgedanke der Beweisführung stammt von A. Kolmogoroff, G. Seliverstoff und A. Plessner [siehe A. Kolmogoroff et G. Seliverstoff, Sur la convergence des séries de Fourier, *Comptes Rendus Acad Sci. Paris,* **178** (1925), S. 303—305; A Plessner, Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *Journal für die reine und angewandte Math.,* **155** (1925), S. 15–25].

Ohne Enschränkung der Allgemeinheit kann $b_0 = 0$ angenommen werden. Wir betrachten die Funktion

$$g_n(x) = \max_{0 \leqq k \leqq n} \frac{\sigma_k^r(x)}{v_k} = \frac{\sigma_p^r(x)}{v_p},$$

wo $p = p(x, n)$ offenbar eine (ganzwertige) meßbare Funktion von n und x ist. Wegen $b_0 = 0$ ist $g_n(x) \geqq 0$. Wenn wir zeigen, daß die Folge

$$I_n = \int_E g_n(x)\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

unter einer von n unabhängigen Schranke bleibt, dann folgt nach einem bekannten Satz von B. LEVI[5]), daß die Folge der $g_n(x)$ auf E fast überall endlich bleibt, m. a. W., daß

(18) $$\sigma_n^r(x) \leqq B_1(x) v_n$$

ist, wo $B_1(x)$ eine auf E fast überall endliche positive Funktion bedeutet.

Sei $f(x)$ eine quadratisch integrierbare Funktion, für welche

$$b_k = \int_a^b f(t)\varphi_k(t)\,dt \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Dann gilt

$$\sigma_n^r(x) = \int_a^b f(t) K_n^r(t, x)\,dt,$$

mithin

$$J_n = \int_E dx \int_a^b f(t) \frac{K_p^r(t, x)}{v_p}\,dt = \int_a^b dt\, f(t) \int_E \frac{K_p^r(t, x)}{v_p}\,dx.$$

Daraus folgt nach der Schwarzschen Ungleichung:

(19) $$J_n^2 \leqq \int_a^b f^2(t)\,dt \int_a^b \left[\int_E \frac{K_p^r(t, x)}{v_p}\,dx \right]^2 dt.$$

Es ist mit $q = p(y, n)$

$$\int_a^b \left[\int_E \frac{K_p^r(t, x)}{v_p}\,dx \right]^2 dt = \int_a^b dt \left[\int_E \frac{K_p^r(t, x)}{v_p}\,dx \int_E \frac{K_q^r(t, y)}{v_q}\,dy \right] =$$

$$= \int_E \int_E \int_a^b \frac{K_p^r(t, x)\, K_q^r(t, y)}{v_p v_q}\,dt\,dx\,dy,$$

wo wir zunächst nach t integrieren. Aus der Orthonormalität der Funktionen $\varphi_n(x)$ ergibt sich dann

$$J_n^2 \leqq A \int_E \int_E \left\{ \frac{1}{v_p v_q} \frac{1}{A_p^r} \frac{1}{A_q^r} \sum_{k=0}^{j} A_{p-k}^r A_{q-k}^r \varphi_k(x) \varphi_k(y) \right\} dx\,dy,$$

---

[5]) Siehe z. B. S. KACZMARZ - H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa-Lwów, 1935), S. 8.

wo $j = \min(p, q)$ und $A = \int_a^b f^2(t)\,dt$ bedeutet. Wir haben zu zeigen, daß dieses Doppelintegral unter einer von n unabhängigen Schranke bleibt.

Setzen wir in der Formel (14) $c_k = \varphi_k(x)\varphi_k(y)$, so läßt sich dieses Integral in der Form

$$\int_E\int_E \frac{1}{v_p v_q}\,\frac{1}{A_p^r}\,\frac{1}{A_q^r}\left[\sum_{\mu=0}^{r+1}\binom{r+1}{\mu}\left(\sum_{k=0}^{\min(j,(q-\mu)^+)} K_k^r(x,y) A_k^r A_{p-k}^{r-\mu} A_{q-k-\mu}^{\mu-1}\right)\right] dx\,dy$$

schreiben. Wegen der Annahme $b_0 = 0$ ist $K_0^r(x,y) \equiv 0$, also genügt über k nur von 1 zu summieren, daher ist

$$(20)\quad J_n^2 \leqq A \sum_{\mu=0}^{r+1}\binom{r+1}{\mu}\int_E\int_E \frac{1}{v_p v_q}\left(\sum_{k=1}^{\min(j,(q-\mu)^+)} |K_k^r(x,y)|\, A_k^r\, \frac{A_{p-k}^{r-\mu}}{A_q^r}\,\frac{A_{q-k-\mu}^{\mu-1}}{A_q^r}\right) dx\,dy.$$

Wir dürfen hier $p \neq 0$, $q \neq 0$ auf der Produktmenge $E \times E$ annehmen, da im entgegengesetzten Fall der Integrand verschwindet.

Wir betrachten nun jedes Glied der in (20) stehenden Summe einzeln ohne den Faktor $\binom{r+1}{\mu}$:

$$(21)\qquad \int_E\int_E \frac{1}{v_p v_q}\left(\sum_{k=1}^{\min(j,(q-\mu)^+)} |K_k^r(x,y)|\, A_k^r\, \frac{A_{p-k}^{r-\mu}}{A_p^r}\,\frac{A_{q-k-\mu}^{\mu-1}}{A_q^r}\right) dx\,dy.$$

Ist $0 < \mu < r+1$, so kann die asymptotische Abschätzung (4) und (8) angewendet werden, wonach das Produkt

$$\frac{A_{p-k}^{r-\mu}}{A_p^r}\,\frac{A_{q-k-\mu}^{\mu-1}}{A_q^r}$$

folgenderweise abgeschätzt werden kann:

1° Es ist $O\left(\frac{(p-k)^{r-\mu}}{p^r}\,\frac{(q-k-\mu)^{\mu-1}}{q^r}\right)$, wenn $1 \leqq k < \min(j, (q-\mu)^+)$;

2° Es ist $O\left(\frac{(p-k)^{r-\mu}}{p^r}\,\frac{1}{q^r}\right)$, wenn $1 \leqq k = \min(j, (q-\mu)^+) = q-\mu$;

3° Es ist $O\left(\frac{1}{p^r}\,\frac{(q-k-\mu)^{\mu-1}}{q^r}\right)$, wenn $1 \leqq k = \min(j, (q-\mu)^+) = p$.

In allen drei Fällen ist also

$$\frac{A_{p-k}^{r-\mu}}{A_p^r}\,\frac{A_{q-k-\mu}^{\mu-1}}{A_q^r} = O\left(\frac{1}{j^{r+1}}\right) \qquad (0 < \mu < r+1).$$

Dann ist aber das Integral (21) nicht größer als

$$A_1 \int_E\int_E \frac{1}{v_p v_q}\,\frac{1}{j^{r+1}} \sum_{k=1}^{\min(j,(q-\mu)^+)} |K_k^r(x,y)|\, k^r\, dx\,dy \leqq A_1 \int_E\int_E \frac{1}{v_j^2}\,\frac{1}{j^{r+1}} \sum_{k=1}^{j} |K_k^r(x,y)|\, k^r\, dx\,dy,$$

wo A_1 eine absolute Konstante bedeutet. Wegen $j=\min(p, q)$ ist weiter das Integral (21) nicht größer als

$$\begin{aligned} &2A_1 \int_E \int_E \frac{1}{v_p^2} \frac{1}{p^{r+1}} \sum_{k=1}^{p} |K_k^r(x, y)| k^r \, dx \, dy \leqq \\ (22) \qquad &\leqq 2A_1 \int_E \frac{1}{v_p^2} \frac{1}{p^{r+1}} \left(\sum_{k=1}^{p} k^r \int_a^b |K_k^r(x, y)| \, dy \right) dx \leqq 2A_1 \int_E \frac{1}{p^{r+1}} \sum_{k=1}^{p} k^r \, dx = O(1), \end{aligned}$$

da nach Annahme $L_k^r(x) = \int_a^b |K_k^r(x, y)| \, dy \leqq v_k^2$ und die Folge $\{v_n\}$ monoton zunehmend ist.

Es bleibt noch übrig die zu den Indizes $\mu=0$ und $\mu=r+1$ gehörenden Glieder der Summe (20) abzuschätzen. Es ist leicht zu zeigen, daß diese auch unter einer von n unabhängigen Schranke bleiben. Für $\mu=0$ haben wir den Ausdruck

$$(23) \qquad \frac{1}{v_p v_q} \sum_{k=1}^{\min(j, q)} |K_k^r(x, y)| A_k^r \frac{A_{p-k}^r}{A_p^r} \frac{A_{q-k}^{-1}}{A_q^r},$$

dieser verschwindet nach (9) für $j \neq q$, und für $j=q$ ist er nach (8), (9), (10) nicht größer als

$$\frac{1}{v_j^2} |K_j^r(x, y)|.$$

Allerdings ist also das über $E \times E$ erstreckte Doppelintegral von (23) nicht größer als

$$2 \int_E \frac{dx}{v_p^2} \int_a^b |K_p^r(x, y)| \, dy = O(1).$$

Auf derselben Weise läßt sich die von n unabhängige Beschränktheit des zum Index $\mu=r+1$ gehörenden Gliedes von (20) zeigen. Daraus und aus (22) folgt die gleichmäßige Beschränktheit der rechten Seite von (20), w. z. b. w.

Wenn wir dieses Verfahren auf die Funktionen

$$\bar{g}_n(x) = \max_{0 \leqq k \leqq n} \left(-\frac{\sigma_k^r(x)}{v_k} \right)$$

anwenden, dann ergibt sich, daß die Folge $\{\bar{g}_n(x)\}$ fast überall auf E endlich ist; daher ist

$$\sigma_n^r(x) \geqq B_2(x) v_n,$$

wo $B_2(x)$ eine auf E fast überall endliche und negative Funktion ist. Daraus und aus (18) folgt unsere Behauptung.

Satz 2. *Sei $E \subset [a, b]$ eine Menge von positivem Maß, $\{v_n\}$, $\{\lambda_n\}$ monoton gegen Unendlich konvergierende, positive Zahlenfolgen und $v_n = o(\lambda_n)$*

Bezeichne $\sigma_n^{*r}(x)$ für ganze positive r das n-te (C, r)-Mittel der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k \varphi_k(x). \tag{24}$$

Ist $\sigma_n^{*r}(x) = O(v_n)$ auf E fast überall und gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \lambda_k^2 < \infty, \tag{25}$$

so ist die Reihe (2) auf E fast überall (C, r) summierbar.

Bezeichne $\sigma_n^r(x)$ das n-te (C, r)-Mittel der Reihe (2); es ergibt sich aus dem Hilfssatze 2, wenn man darin $c_k = a_k \varphi_k(x)$ setzt,

$$\sigma_n^r(x) = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r \sigma_k^{*0}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + \tag{26}$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{r} \frac{1}{A^r}\left(\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^{\mu} \sigma_k^{*\mu}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right)\right) + \frac{\sigma_n^{*r}(x)}{\lambda_{k+r+1}}.$$

Aus dieser Formel ausgehend zeigen wir, daß auf E fast überall die Beziehung

$$\sigma_n^r(x) = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r \sigma_k^{*0}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + o(1) \tag{27}$$

besteht. Zunächst ist es klar, daß das dritte Glied auf der rechten Seite von (26) auf E fast überall gegen 0 konvergiert.

Wir betrachten nun ein Glied der zweiten Summe in (26):

$$\frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^{\mu} \sigma_k^{*\mu}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right).$$

Wir zeigen, daß diese Summe fast überall gegen 0 konvergiert.[6] Die Summe

$$\frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^{\mu} \sigma_k^{*\mu}(x) \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right)$$

ist fast überall endlich. Sie ist nämlich wegen (4) sicher nicht größer als

$$\sum_{k=0}^{n} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right),$$

und die Endlichkeit der rechten Seite folgt fast überall aus dem erwähnten B. Levischen Satz, da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) \int_a^b |\sigma_k^{*\mu}(x)|\, dx \leq \sqrt{b-a} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) \sqrt{\int_a^b (\sigma_k^{*\mu}(x))^2 dx} \leq$$

$$\leq \sqrt{b-a} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) \sqrt{\sum_{l=0}^{k} \left(\frac{A_{k-l}^{\mu}}{A_k^{\mu}}\right)^2 a_l^2 \lambda_l^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{b-a} \sqrt{\sum_{l=0}^{\infty} a_l^2 \lambda_l^2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) < \infty$$

[6]) Die Idee der Beweisführung stammt von G. Alexits.

ist, wo wir die aus (10) folgende Beziehung $A_{k-1}^{\mu}/A_k^{\mu} \leqq 1$ beachtet haben.

Offenbar ist $\Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right) = \frac{1}{\xi_k}\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right)$, wo $\xi_k \leqq \xi_{k+1} \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und es sei $x \in [a, b]$ ein Punkt, in welchem

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) = M < \infty$$

besteht. Wählen wir ν so groß, daß $\frac{1}{\xi_n} \leqq \frac{\varepsilon}{2M}$ für $n > \nu$, so gilt bei Beachtung von (4) für genügend große n:

$$\left|\frac{1}{A_n^r}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^{\mu} \sigma_k^{*\mu}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right)\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{A_n^r}\sum_{k=0}^{\nu} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^{\mu} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right) + \sum_{k=\nu+1}^{n} \frac{1}{\xi_k} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{A_n^r}\sum_{k=0}^{\nu} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^{\mu} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right) + \frac{1}{\xi_{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Damit ist gezeigt, daß jedes Glied der zweiten Summe (26) fast überall gegen 0 strebt, folglich ist (27) richtig. Auf Grund von (27) läßt sich also auf E fast überall

$$(28)\quad \sigma_m^r(x) - \sigma_n^r(x) = \frac{1}{A_m^r}\sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{r} \sigma_k^{*0}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) - \frac{1}{A_n^r}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r} \sigma_k^{*0}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + o(1)$$

schreiben. Da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) \int_a^b |\sigma_k^{*0}(x)|\, dx \leqq$$

$$\leqq \sqrt{b-a}\sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) \sqrt{\int_a^b (\sigma_k^{*0}(x))^2\, dx} \leqq \sqrt{b-a}\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \lambda_k^2}\, \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) < \infty,$$

es ergibt sich nach dem öfters erwähnten Levischen Satz die Konvergenz fast überall der Reihe

$$(29)\quad \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^{*0}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right).$$

Daraus folgt, daß auch die in (28) rechst stehende Differenz fast überall gegen 0 konvergiert, da diese nichts anderes, als die Differenz der m-ten und n-ten (C, r)-Mittel $(r>0)$ der Reihe (29) ist. Est gilt also auf E fast überall $\sigma_m^r(x) - \sigma_n^r(x) \to 0$, womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

Satz 3. *Ist $r>0$ beliebig und $L_n^r(x) \leqq v_n^2$ auf der Menge E, gilt außerdem (3), so ist die Orthogonalreihe (2) auf E fast überall $(C, \alpha>0)$-summierbar.*

Aus (3) folgt nämlich die Existenz einer monoton gegen Unendlich konvergierenden, positiven Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ mit $v_n = o(\lambda_n)$ derart, daß auch (25) besteht. Z. B. ist

$$\lambda_k = v_k \Big/ \left(\sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu^2 v_\nu^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

eine derartige Folge. Es folgt aus Satz 1 für ganze $r > 0$, daß auf E fast überall $\sigma_n^{*r}(x) = O(v_n)$ ist; aus Satz 2 folgt dann die (C, r)-Summierbarkeit der Reihe (2) auf E fast überall. Ist r nicht ganz, so gibt es nach dem Hilfssatze 3 ein ganzes $r' > r$ mit

$$L_n^{r'}(x) \leqq v_n^2$$

auf E und es folgt dann nach Satz 2 die (C, r')-Summierbarkeit auf E fast überall.

Damit ist alles Angekündigte bewiesen.

Wir bemerken endlich, daß *alle unsere Beweise auch für den Fall* $r = 0$, *d. h. für die gewöhnliche Konvergenz gelten.* Damit ist also auch dieser Fall erledigt, den S. KACZMARZ abgesondert behandelt[7]). Übrigens enthält sein Beweis auch für diesen Fall eine ähnliche Lücke, wie im Falle der (C, α)-Summierbarkeit positiver Ordnung.

III. MATHEMATISCHES KATHEDER,
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BUDAPEST.

(Eingegangen am 2. Juni 1951.)

---

[7]) l. c. (1), erste Arbeit, S. 100—103.

Beweis eines Abbildungssatzes von Béla Sz.-Nagy.

Von St. Vincze und P. Szüsz in Budapest.

Seien X und Y Mengen von Punkten eines metrischen Raumes. Eine Abbildung $y=f(x)$ von X auf Y heißt dehnungsbeschränkt, wenn das Verhältnis der Entfernungen

$$\varrho(y,y'):\varrho(x,x')$$

eine gewisse Schranke niemals überschreitet; dabei sind x und x' zwei beliebige Punkte von X und $y=f(x), y'=f(x')$.

Béla Sz.-Nagy hat die Frage aufgeworfen, ob jeder konvexe Körper K im n-dimensionalen euklidischen Raum E_n als dehnungsbeschränktes Abbild einer abgeschlossenen n-dimensionalen (Voll)-Kugel C_n dargestellt werden kann? Er hat diese Frage bejahend, undzwar mit dem folgenden Satz beantwortet:

Satz. *Es sei O ein Punkt im Inneren des konvexen Körpers K und es bedeute C_n die (volle) Einheitskugel um O. Dann ist die „von O aus in allen Richtungen homothetische" Abbildung von C_n auf K dehnungsbeschränkt.*

Wenn man die Punkte $x, y, \ldots$ mit den Vektoren $X=\overrightarrow{Ox}$, $Y=\overrightarrow{Oy}, \ldots$ repräsentiert, was im folgenden stets geschehen soll, dann kann man diese Abbildung mit der folgenden Formel definieren:

$$Y=R(X_e)X,$$

wobei

$$X_e=\frac{X}{|X|}$$

den Einheitsvektor von X und $R(X_e)$ die Länge des Radiusvektors von O zum Rand von K in der Richtung von X_e bedeuten.

Verfasser, denen Herr Sz.-Nagy sein obiges Ergebnis mitteilte, haben dafür unabhängig einen elementaren Beweis gefunden, der auch gewisse Verallgemeinerungen gestattet, insbesondere auch auf unendlichdimensionale euklidische, d. h. Hilbertsche Räume, während der Beweis des Herrn Sz.-Nagy die Kompaktheit des Raumes wesentlich ausnützt. Wir werden darüber hinaus zeigen, daß die inverse Abbildung auch dehnungsbeschränkt ist. So gelangt in der vorliegenden Note, mit der freundlichen Übereinstimmung des Herrn SZ.-NAGY, sein Satz mit unserem Beweis zur Veröffentlichung, undzwar sogleich in der angedeuteten verallgemeinerten Form. An dieser Stelle möchten wir Herrn BÉLA SZ.-NAGY für seine wertvollen Bemerkungen unseren Dank ausdrücken.

§ 1.

Zuerst beweisen wir den

Satz 1. *Es sei $R(X_e)$ eine für alle Einheitsvektoren des n-dimensionalen Raumes E_n, d. h. auf der Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel definierte Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt:*

$$0 < m \leqq R(X_e) \leqq M, \tag{1}$$

$$\left| \frac{R(X_e') - R(X_e)}{\widehat{X_e' X_e}} \right| \leqq L, \tag{2}$$

wo $\widehat{X_e' X_e}$ die sphärische Distanz bedeutet, d. h. $\widehat{X_e' X_e} = \arccos (X_e', X_e)$.

Dann gelten für die n-dimensionale Vektorfunktion

$$f(X) = R\left(\frac{X}{|X|}\right) X \quad (\textit{für } X \neq 0), \quad f(0) = 0$$

die Ungleichungen

$$\frac{m}{1 + \dfrac{\pi}{mL}} \leqq \frac{|f(X') - f(X)|}{|X' - X|} \leqq M + \pi L. \tag{3}$$

Durch $Y = f(X)$ wird offenbar die n-dimensionale (volle) Einheitskugel C_n stetig auf einen n-dimensionalen Bereich abgebildet. Die Bedingung (2) ist damit gleichbedeutend, daß die Oberfläche S_n von C_n dehnungsbeschränkt abgebildet wird. Dies folgt unmittelbar aus der Identität

$$|f(X_e') - f(X_e)|^2 = R(X_e')^2 + R(X_e)^2 - 2R(X_e')\, R(X_e) \cdot (X_e', X_e) =$$
$$= (R(X_e') - R(X_e))^2 + R(X_e')\, R(X_e)\, |X_e' - X_e|^2.$$

So besagt also unser Satz 1 in anderen Worten: *Aus* (1) *und aus der Dehnungsbeschränktheit unserer Abbildung auf der Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel auch die Dehnungsbeschränktheit im Inneren der Einheitskugel folgt.*

In § 2 beweisen wir unseren Satz; in § 3 zeigen wir, wie aus Satz 1 der Satz von B. Sz.-Nagy folgt.

§ 2.

Es genügt, den Beweis für $n = 2$ zu führen. Man kann nämlich das Koordinatensystem so wählen, daß der O Punkt fest bleibt und die Vektoren X_e' und X_e in der Ebene zweier Koordinatenachsen liegen; dabei bleiben die Größen m, M und L invariant.

Es sei also $n=2$ und wir schreiben aus Zweckmäßigkeitsgründen komplexe Zahlen statt ebene Vektoren. In dieser Formulierung lautet unser Satz:

Ist $R(\vartheta)$ eine nach 2π periodische Funktion, für die

$$0 < m \leqq R(\vartheta) \leqq M \tag{1'}$$

und

$$\left| \frac{R(\vartheta_2) - R(\vartheta_1)}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \right| \leqq L \tag{2'}$$

ist, so gelten für die Funktion

$$f(z) = R(\vartheta)\, r e^{i\vartheta} \qquad (z = re^{i\vartheta})$$

die Ungleichungen

$$\frac{m}{1+\dfrac{\pi}{mL}} \leqq \left| \frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| \leqq M + \pi L. \tag{3'}$$

Beweis: *a*) Aus Homogenitätsgründen dürfen wir

$$|z_1| \leqq 1, \qquad |z_2| = 1 \tag{4}$$

annehmen. Es sei $z_1 = r_1 e^{i\vartheta_1}$, $z_2 = e^{i\vartheta_2}$; die Winkel ϑ_1, ϑ_2 sollen so normiert werden, daß $|\vartheta_2 - \vartheta_1| \leqq \pi$ ist.

Offenbar gilt

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqq \left| f(z_2) - f(z_2)\frac{R(\vartheta_1)}{R(\vartheta_2)} \right| + \left| f(z_2)\frac{R(\vartheta_1)}{R(\vartheta_2)} - f(z_1) \right|.$$

Es ist aber

$$\left| f(z_2) - f(z_2)\frac{R(\vartheta_1)}{R(\vartheta_2)} \right| = |R(\vartheta_2) - R(\vartheta_1)| \leqq L|\vartheta_2 - \vartheta_1|$$

und

$$\left| f(z_2)\frac{R(\vartheta_1)}{R(\vartheta_2)} - f(z_1) \right| = R(\vartheta_1)|z_2 - z_1| \leqq M|z_2 - z_1|,$$

also

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqq M|z_2 - z_1| + L|\vartheta_2 - \vartheta_1|.$$

Nun ist im Falle $0 \leqq |\vartheta_2 - \vartheta_1| \leqq \frac{\pi}{2}$ wegen (4)

$$|z_2 - z_1| \geqq \sin|\vartheta_2 - \vartheta_1| \geqq \frac{2}{\pi}|\vartheta_2 - \vartheta_1|$$

und im Falle $\frac{\pi}{2} < |\vartheta_2 - \vartheta_1| \leqq \pi$ auf triviale Weise

$$|z_2 - z_1| \geqq 1 \geqq \frac{|\vartheta_2 - \vartheta_1|}{\pi},$$

also gilt in jedem Falle

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| \leqq M + \pi L.$$

b) Die Funktion $\bar{R}(\vartheta)=1:R(\vartheta)$ genügt analogen Bedingungen, wie $R(\vartheta)$ selbst, undzwar ist

$$\frac{1}{M}\leqq\bar{R}(\vartheta)\leqq\frac{1}{m}$$

und

$$\left|\frac{\bar{R}(\vartheta_2)-\bar{R}(\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1}\right|=\frac{1}{R(\vartheta_1)R(\vartheta_2)}\left|\frac{R(\vartheta_2)-R(\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1}\right|\leqq\frac{L}{m^2}.$$

Also, wenn man

$$f^{-1}(z)=\bar{R}(\vartheta)\cdot re^{i\vartheta}\qquad(z=re^{i\vartheta})$$

setzt, dann folgt aus dem unter *a*) bewiesenen, daß

$$\left|\frac{f^{-1}(z_2)-f^{-1}(z_1)}{z_2-z_1}\right|\leqq\frac{1}{m}+\frac{\pi L}{m^2}$$

ist. Da aber $f^{-1}(z)$ offenbar die inverse Funktion von $f(z)$ ist, folgt hieraus

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\right|\geqq\frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{\pi L}{m^2}}.$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 3.

Nun werden wir zeigen, wie aus unserem Satz 1 der Satz von Sz.-Nagy folgt. Dazu genügt es folgendes zu beweisen:

Satz 2. *Ist $Y=R(X_e)X_e$ die Gleichung der Oberfläche eines konvexen Körpers mit*

$$0<m\leqq R(X_e)\leqq M,$$

so genügt die Funktion $R(X_e)$ der Bedingung (2) *mit*

$$L=\frac{M}{m}\sqrt{M^2-m^2}.$$

Im Beweis dürfen wir uns wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den zweidimensionalen Fall beschränken. Wir betrachten also eine konvexe Kurve $z=R(\vartheta)e^{i\vartheta}$ mit $0<m\leqq R(\vartheta)\leqq M$. Es seinen z_1, z_2 zwei beliebige Punkte auf dieser Kurve; die entsprechenden Winkel ϑ_1, ϑ_2 sollen so normiert werden, daß $|\vartheta_1|\leqq\pi$, $|\vartheta_2|\leqq\pi$.

Es bezeichne δ die Distanz der Punkte z_1 und z_2, d die Distanz des Punktes O von der Geraden g durch z_1 und z_2, ϑ_0 die Richtung des Lotes durch O auf g. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\vartheta_0=0$ annehmen; dann ist offenbar $|\vartheta_2-\vartheta_1|\leqq\pi$. Es ist

$$\delta^2=R^2(\vartheta_1)+R^2(\vartheta_2)-2R(\vartheta_1)R(\vartheta_2)\cos(\vartheta_2-\vartheta_1),$$

daher

$$(R(\vartheta_2)-R(\vartheta_1))^2=\delta^2-4R(\vartheta_1)R(\vartheta_2)\sin^2\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2}. \tag{5}$$

Es ist weiter

$$\frac{1}{2}\delta\, d=\frac{1}{2}R(\vartheta_1)R(\vartheta_2)\sin|\vartheta_2-\vartheta_1|=R(\vartheta_1)R(\vartheta_2)\sin\frac{|\vartheta_2-\vartheta_1|}{2}\cos\frac{|\vartheta_2-\vartheta_1|}{2};$$

daraus und aus (5) folgt

$$|R(\vartheta_2)-R(\vartheta_1)|^2=4\frac{R^2(\vartheta_1)R^2(\vartheta_2)}{d^2}\cos^2\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2}\sin^2\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2}-4R(\vartheta_1)R(\vartheta_2)\sin^2\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2}.$$

Wir setzen

$$D(\vartheta_1,\vartheta_2)=\frac{R(\vartheta_2)-R(\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1}$$

und erhalten wegen $|\sin x|\leqq|x|$:

$$D^2(\vartheta_1,\vartheta_2)\leqq\left(\frac{R(\vartheta_2)-R(\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1}\right)^2=\frac{R^2(\vartheta_1)R^2(\vartheta_2)}{d^2}\cos^2\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2}-R(\vartheta_1)R(\vartheta_2).$$

Nun gibt es zwei Fälle, je nachdem ϑ_1 und ϑ_2 das gleiche Vorzeichen haben oder nicht. Im ersten Falle ist *wegen der Konvexität* $d\geqq m$. Im zweiten Falle können wir annehmen, daß $0\leqq|\vartheta_1|\leqq\vartheta_2$. Dann ist wegen $0\leqq|\vartheta_1|\leqq\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2}\leqq\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{d}{\cos\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2}}\geqq\frac{d}{\cos\vartheta_1}=R(\vartheta_1)\geqq m.$$

Es gilt also in jedem Falle

$$D^2(\vartheta_1,\vartheta_2)\leqq M^2\left(\frac{M^2}{m^2}-1\right),$$

$$D(\vartheta_1,\vartheta_2)\leqq\frac{M}{m}\sqrt{M^2-m^2},$$

w. z. b. w.

Wir bemerken noch, daß die gefundene Schranke die möglichst beste ist. Sie wird bei einer paßend gewählter Kurve (Rechteck mit den Seiten $2m$ und $m+\sqrt{M^2-m^2}$) erreicht.

(Eingegangen am 20. Mai 1951.)

Ein Beitrag zur Theorie der geometrischen Konstruktionen.

Von RICHARD OBLÁTH in Budapest.

Die Reduktion der zur Ausführung der geometrischen Konstruktionen notwendigen Hilfsmittel beschäftigt die Geometer schon seit Jahrhunderten. Schon die Mathematiker der Renaissance trachteten die Konstruktionen mit einer einzigen Zirkelöffnung zu vollziehen. MOHR („Euclides Danicus") und MASCHERONI („Geometria del compasso") lösten die quadratischen Aufgaben mit dem Zirkel allein. PONCELET und STEINER haben bewiesen, daß das blosse Lineal zur Ausführung sämtlicher quadratischen Konstruktionen ausreicht, wenn ein fester Kreis mit seinem Mittelpunkte gezeichnet vorliegt. D. HILBERT hat in seinen Vorlesungen gezeigt, daß der Mittelpunkt unentbehrlich ist. Das gilt — wie D. CAUER bewiesen hat [1]) — selbst für zwei ausserhalb einander liegende Kreise. CAUER zeigte zugleich, daß zwei sich schneidende (bzw konzentrische), oder drei beliebig gegebene Kreise die Kenntnis des Mittelpunktes ersetzen. F. SEVERI [2]) und unabhängig von ihm mehrere andere Forscher (undzwar Verfasser und GY. SZ.-NAGY in vollständig elementarer Weise) haben bewiesen, daß statt des STEINERschen Kreises ein beliebig kleiner Bogen genügt. YANAGIHARA [3]) reduzierte in diesem Sinne auch die CAUERschen Sätze.

In der vorliegenden Note geben wir eine weitere Reduktion an, denn wir beweisen den folgenden

S a t z. *Zur linearen Ausführung sämtlicher quadratischen Konstruktionen genügt ein beliebig kleiner Kreisbogen, wenn an demselben beide Drittelungspunkte bezeichnet sind.*

---

1) D. CAUER, Über die Konstruktion des Mittelpunktes eines Kreises mit dem Lineal allein, *Math. Annalen*, **73** (1913), S. 90—94; Berichtigung, *Ebenda*, **74** (1913), S. 462—464.

2) F. SEVERI, Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso, *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, **18** (1904), S. 256; R. OBLÁTH, Bemerkungen zur Theorie der geometrischen Konstruktionen, *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, **26** (1915), S. 295—298; GY. (J.) SZ.-NAGY, Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen, *The Tôhoku Math. Journal*, **40** (1934), S. 76—78.

3) K. YANAGIHARA, Note on the construction problems in elementary geometry, *The Tôhoku Math. Journal*, **24** (1925), S. 125—127.

Aus den aufgezählten Ergebnissen erhellt, daß der Beweis durch die lineare Konstruktion des Kreismittelpunktes geleistet ist. Wir benützen den elementaren Satz, wonach die Verbindungslinie des Schnittpunktes zweier Kreistangenten mit dem Halbierungspunkte des Bogens zwischen den Berührungspunkten ein Durchmesser des Kreises ist.

PP' sei der vorgegebene Kreisbogen, und P_1, P_2 die beiden Drittelungspunkte von P aus gerechnet. Zur linearen Konstruktion der Tangente genügt auf Grund des Pascalschen Satzes die Kenntnis von 5 Peripheriepunkten. Die Mittelpunkte der Bogen PP_2 und P_1P' sind P_1 bzw. P_2. Die Tangenten in den Punkten P, P_1, P_2, P' lassen sich also linear konstruieren. Wenn der Schnittpunkt der Tangenten in P und P_2 mit Q_1, derjenigen in P_1 und P' mit Q_2 bezeichnet wird dann sind die Geraden P_1Q_1 und P_2Q_2 Durchmesser des Kreises, ihr Schnittpunkt ist mithin der gesuchte Kreismittelpunkt.

In diesem Zusammenhange wollen wir noch eine Bemerkung machen. GY. SZ.-NAGY[4]) erwähnt in seiner ausgezeichneten Monographie, daß HJELMSLEV die Geldmünze, d. h. Kreisperipherie, deren Mittelpunkt unbekannt ist als Konstruktionsmittel benützt, und fügt hinzu, daß man mit diesem Mittel viele quadratische Konstruktionen ausführen kann, aber nicht alle. Wenn aber neben der Münze auch der Gebrauch des Lineals gestattet ist, dann genügen diese Hilfsmittel zur Konstruktion *sämtlicher* quadratischen Aufgaben. Es genügt sogar ein Bruchstück der Münze, wenn nur ein beliebig kleines Stück der Peripherie unversehrt ist. Den Beweis ergibt der bereits angeführte Satz von YANAGIHARA, da die Kenntnis zweier sich schneidender Kreisbogen den Mittelpunkt ersetzen kann. Man darf dann sogar auf den ferneren Gebrauch der Münze verzichten.

(Eingegangen am 24. März 1951.)

---

[4]) SZŐKEFALVI-NAGY GYULA, *A geometriai szerkesztések elmélete* (Kolozsvár, 1943), S. 31; J. HJELMSLEV, Konstruktion ved Passer med fast Indstilling, uden Brug af Lineal, *Mat. Tidskrift*, A 1938, S. 77—85.

An individual ergodic theorem for non-commutative transformations.

By A. ZYGMUND in Chicago, Ill.

This note contains a proof of an individual ergodic theorem for a non-commutative family of measure preserving flows.*)

§ 1.

Theorem 1. *Let S be a set of finite Lebesgue measure, and $U_1^{\lambda_1}$, $U_2^{\lambda_2}, \dots U_k^{\lambda_k}$ a set of one-parameter measure preserving transformations of S onto itself. Let $f(x)$ be a real-valued function defined on S, measurable and such that the integral*

(1) $$\int_S f(x)\{\log^+ f(x)\}^{k-1}\,dx$$

is finite. Then the limit

(2) $$\lim_{\Lambda_1,\dots,\Lambda_k\to\infty} \frac{1}{\Lambda_1\dots\Lambda_k}\int_0^{\Lambda_1}\cdots\int_0^{\Lambda_k} f(U_1^{\lambda_1}U_2^{\lambda_2}\cdots U_k^{\lambda_k}x)\,d\lambda_1\cdots d\lambda_k$$

exists and is finite for almost every $x\in S$.

I omit the familiar conditions concerning the measurability of $f(U_1^{\lambda_1}\cdots U_k^{\lambda_k}x)$ in the product space of the λ's and of x. They guarantee, in particular, the existence of the integrals in (2) for almost all $x\in S$.

We may assume that $f\geqq 0$. By $\bar f(\xi)$ we shall denote the *decreasing real* rearrangement of $f(x)$. Thus, if $M(y)$ denotes the measure of the set of points where $f(x)\geqq y$, then $\bar f(\xi)$ is the inverse function of $M(y)$, e. g. normalized by the condition that $2\bar f(\xi)=\bar f(\xi+0)+\bar f(\xi-0)$ for all ξ. We need the following result of PITT([1]) which we state as

*) See also N. DUNFORD, An individual ergodic theorem for non-commutative transformations, *these Acta*, **14** (1951), pp. 1–4.

[1]) H. R. PITT, Some generalizations of the ergodic theorem, *Proceedings Cambridge Philosophical Society*, **38** (1942), pp. 325–343, esp. p. 326.

Lemma 1. *Let T^λ be a one parameter group of measure-preserving transformations of S, and let $f(x)$ be a non-negative and integrable function of $x \in S$. Let*

$$F(x) = \sup_{\Lambda > 0} \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda f(T^\lambda x)\, d\lambda$$

Then

$$\bar{F}(y) \leqq \frac{1}{y} \int_0^y \bar{f}(\xi)\, d\xi \qquad (y>0). \tag{3}$$

A few simple consequences of Lemma 1 will be stated here as

Lemma 2. *Under the assumptions of Lemma 1,*

$$\int_S F^p(x)\, dx \leqq A_p \int_S f^p(x)\, dx \qquad (p>1), \tag{4}$$

$$\Big(\int_S F^\alpha(x)\, dx\Big)^{1/\alpha} \leqq A_\alpha \int_S f(x)\, dx \qquad (0<\alpha<1), \tag{5}$$

$$\int_S F(x)\, \{\log^+ F(x)\}^\beta\, dx \leqq 2 \int_S f(x)\, \{\log^+ f(x)\}^{\beta+1}\, dx + A_\beta \qquad (\beta = 0, 1, 2, \dots). \tag{6}$$

All the constants A here and hereafter (not necessarily the same at every occurrence) depend only on the variables displayed in the subscripts and (in some cases) on the number $a =$ measure of S. Inequality (4) will not be needed in the sequel and is stated here merely to give a perspective to the remaining inequalities. It is a familiar consequence of (2), for

$$\Big\{\int_S F^p(x)\, dx\Big\}^{1/p} = \Big\{\int_0^a \bar{F}^p(y)\, dy\Big\}^{1/p} \leqq \Big\{\int_0^a \Big[\frac{1}{y}\int_0^y \bar{f}(\xi)\, d\xi\Big]^p dy\Big\}^{1/p} \leqq$$

$$\leqq A_p \Big\{\int_0^a \bar{f}^p(y)\, dy\Big\}^{1/p} = A_p \Big\{\int_S f^p(x)\, dx\Big\}^{1/p},$$

and the relation between the third and fourth members here is the very well known inequality of Hardy. Similarly we establish inequality (5)[2]). It will be needed for any fixed value of α, e. g. for $\alpha = \frac{1}{2}$, in which case the factor A_α can be written A.

To prove (6), let $\omega(u)$ be any function of $u \geqq 0$, non-negative, non-decreasing and convex. Then

$$\begin{aligned} \int_S \omega[F(x)]\, dx &= \int_0^a \omega[\bar{F}(x)]\, dx \leqq \int_0^a \omega\Big[\frac{1}{y}\int_0^y \bar{f}(\xi)\, d\xi\Big] dy \leqq \\ &\leqq \int_0^a \frac{dy}{y} \int_0^y \omega[\bar{f}(\xi)]\, d\xi = \int_0^a \omega[\bar{f}(\xi)]\, d\xi \int_\xi^a \frac{dy}{y} = \int_0^a \omega[\bar{f}(\xi)) \log(a/\xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{7}$$

[2]) See e. g. A. Zygmund, *Trigonometrical series* (Warszawa-Lwów, 1935), p. 245.

the inequality between the third and fourth member being that of JENSEN For a given $\xi>0$ we now distinguish two possibilities

$$1^0 \quad \bar{f}(\xi)\geqq(a/\xi)^{1/2}, \quad 2^0 \quad \bar{f}(\xi)<(a/\xi)^{1/2}.$$

In case 1^0, $a/\xi\leqq \bar{f}^2(\xi)$; in particular $\bar{f}(\xi)\geqq 1$. Hence

$$\omega[\bar{f}(\xi)]\log(a/\xi)\leqq 2\omega[\bar{f}(\xi)]\log\bar{f}(\xi)=2\omega[\bar{f}(\xi)]\log^+\bar{f}(\xi).$$

It follows that the last integral in (7) does not exceed

$$2\int_0^a \omega[\bar{f}(\xi)]\log^+|f(\xi)|\,d\xi+\int_0^a \omega[(a/\xi)^{1/2}]\log(a/\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

The function $\omega(u)=u(\log^+u)^\beta$ is non-decreasing for $u\geqq 0$ if $\beta\geqq 0$, and is also convex if $\beta=0$ or $\beta\geqq 1$. Moreover, the second integral in (8) is then finite. This proves (6). (Remark. If only $\beta>0$, the function $u(\log^+u)^\beta$ is convex for $u\geqq e$, and a minor modification of the proof gives (6) for $\beta>0$, provided the factor 2 on the right is replaced by A_β. We can even assume that $\beta>-1$, if we replace the function $\log^+F$ by $\log(2+F)$. The cases $\beta=0,1,2,\cdots$ are, however the only ones we shall need for the proof of the theorem).

Lemma 3. *Let $f(x)\geqq 0$ satisfy the assumptions of the Theorem, and let*

$$F^*(x)=\sup_{\Lambda_1,\ldots\Lambda_k>0}\frac{1}{\Lambda_1\cdots\Lambda_k}\int_0^{\Lambda_1}\cdots\int_0^{\Lambda_k} f(U_1^{\lambda_1}\cdots U_k^{\lambda_k}x)\,d\lambda_1\cdots d\lambda_k. \tag{8'}$$

Then

$$\left\{\int_S [F^*(x)]^\alpha dx\right\}^{1/\alpha}\leqq A_{\alpha,k}\int_S f(x)\left\{\log^+ f(x)\right\}^{k-1}dx+A_{\alpha,k} \quad (0<\alpha<1). \tag{9}$$

For let us set

$$F_1(x)=\sup_{\Lambda_1>0}\frac{1}{\Lambda_1}\int_0^{\Lambda_1} f(U_1^{\lambda_1}x)\,d\lambda_1,$$

$$F_2(x)=\sup_{\Lambda_2>0}\frac{1}{\Lambda_2}\int_0^{\Lambda_2} F_1(U_2^{\lambda_2}x)\,d\lambda_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_k(x)=\sup_{\Lambda_k>0}\frac{1}{\Lambda_k}\int_0^{\Lambda_k} F_{k-1}(U_k^{\lambda_k}x)\,d\lambda_k.$$

We note that

$$\frac{1}{\Lambda_1 \cdots \Lambda_k}\int_0^{\Lambda_1}\cdots\int_0^{\Lambda_k} f(U_1^{\lambda_1}\cdots U_k^{\lambda_k}x)\,d\lambda_1\cdots d\lambda_k \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\Lambda_2\cdots\Lambda_k}\int_0^{\Lambda_2}\cdots\int_0^{\Lambda_k} F_1(U_2^{\lambda_2}\cdots U_k^{\lambda_k})\,d\lambda_2\cdots d\lambda_k \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\Lambda_3\cdots\Lambda_k}\int_0^{\Lambda_3}\cdots\int_0^{\Lambda_k} F_2(U_3^{\lambda_3}\cdots U_k^{\lambda_k})\,d\lambda_3\cdots d\lambda_k \leqq \cdots \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\Lambda_k}\int_0^{\Lambda_k} F_{k-1}(U_k^{\lambda_k}x)\,d\lambda_k \leqq F_k(x).$$

Thus it is enough to prove (9) with F^* replaced by F_k. The new inequality, however, follows from (5) and (6). For

$$\Big(\int_S F_k^\alpha\,dx\Big)^{1/\alpha} \leqq A_\alpha \int_S F_{k-1}\,dx \leqq A_\alpha \int_S F_{k-2}\log^+ F_{k-2}\,dx + A_\alpha \leqq$$

$$\leqq A_\alpha \int_S F_{k-3}(\log^+ F_{k-3})^2\,dx + A_\alpha \leqq \cdots \leqq A_{\alpha,k}\int_S F_1(\log^+ F_1)^{k-2}\,dx + A_{\alpha,k} \leqq$$

$$\leqq A_{\alpha,k}\int_S f(\log^+ f)^{k-1}\,dx + A_{\alpha,k}.$$

The inequality (9) shows that under the assumption of the Theorem, the function F^* is finite almost everywhere. We shall deduce from it the existence of the limit (2) almost everywhere.

First of all we observe that it is enough to prove the existence of the limit (2) for f bounded (and non-negative). For let us replace in (9) α by $\frac{1}{2}$, and f by Mf, where M is a positive constant, and let us temporarily denote the second $A_{\alpha,k} = A_k$ in (9) by A'_k. Then dividing by M we get

$$\text{(10)} \qquad \Big(\int_S F^{*\frac{1}{2}}\,dx\Big)^2 \leqq A_k \int_S f\cdot(\log^+ Mf)^{k-1}\,dx + A'_k/M.$$

Let us select and fix M so large that $A'_k/M < \varepsilon/2$, and suppose that f is such that the first term on the right of (10) is also $< \frac{1}{2}\varepsilon$. Then $\int F^{*\frac{1}{2}}\,dx < \varepsilon^{1/2}$, and so the set of points x for which $F^* \geqq \varepsilon^{1/2}$ is of measure $< \varepsilon^{1/4}$. Suppose now that the existence of the limit (2) is established, almost everywhere, for any bounded f. Let us take a number $N > 0$, and let us make the decomposition $f = f_1 + f_2$, where $f_1(x) = \mathrm{Min}\,\{N, f(x)\}$. The finiteness of the integral (1) implies that of $\int_S f\cdot\{\log^+(fM)\}^{k-1}dx$, and so, if N is fixed sufficiently large, we shall have

$$A_k\int_S f_2\cdot\{\log^+(f_2M)\}^{k-1}\,dx < \frac{1}{2}\,\varepsilon.$$

The limit (2) exists, by assumption, almost everywhere if f there is replaced by f_1. It f is replaced by f_2, the upper bound of the resulting expression can exceed $\varepsilon^{1/4}$ only in a set of measure $<\varepsilon^{1/4}$. It follows that the limit (2) for $f=f_1+f_2$ exists almost everywhere.

Thus the problem is reduced to proving the existence of the limit (2) for f bounded, say $f\leqq 1$, and here again we borrow an idea from PITT[8]. The proof in the case $k=2$ is already perfectly typical, and we may confine attention to this case and write U^λ, V^μ for $U_1^{\lambda_1}$, $U_2^{\lambda_2}$. We know (we take this result for granted) that

$$g(x)=\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{1}{\Lambda}\int_0^\Lambda f(U^\lambda x)\,d\lambda$$

exists for almost every $x\in S$. Hence, given any $\varepsilon>0$, we can find a set E, $|E|<\varepsilon$, such that

$$\left|\frac{1}{\Lambda}\int_0^\Lambda f(U^\lambda x)\,d\lambda-g(x)\right|<\varepsilon \qquad \text{for} \qquad x\in S-E, \Lambda>\Lambda_0(\varepsilon).$$

Let us replace here x by $V^\mu x$. Then

$$\left|\frac{1}{\Lambda}\int_0^\Lambda f(U^\lambda V^\mu x)\,d\lambda-g(V^\mu x)\right|<\varepsilon, \quad \text{if } V^\mu x\in S-E,$$

$$\left|\frac{1}{\Lambda}\int_0^\Lambda f(U^\lambda V^\mu x)\,dx-g(V^\mu x)\right|<2, \quad \text{if } V^\mu x\in E.$$

Hence, if we denote by $h(x)$ the characteristic function of E, we get

$$\left|\frac{1}{\Lambda M}\int_0^\Lambda\int_0^M f(U^\lambda V^\mu x)\,d\lambda\,d\mu-\frac{1}{M}\int_0^M g(V^\mu x)\,d\mu\right|\leqq\varepsilon+\frac{2}{M}\int_0^M h(V^\mu x)\,d\mu.$$

Let

$$H(x)=\sup M^{-1}\int_0^M h(V^\mu x)\,d\mu.$$

The inequality

$$\bar{H}(y)\leqq y^{-1}\int_0^y \bar{h}(\xi)\,d\xi$$

shows that the set of y's for which $\bar{H}(y)\geqq\varepsilon^{1/2}$, and so also the set of points x for which $H(x)\geqq\varepsilon^{1/2}$, is of measure $\leqq\varepsilon^{1/2}$. It follows that for $\Lambda\geqq\Lambda_0$ and for all M we have the inequality

---

[8] l. c. [1])

$$\left| \frac{1}{\Lambda M} \int_0^\Lambda \int_0^M f(U^\lambda V^\mu x)\, d\lambda\, d\mu - \frac{1}{M} \int_0^M g(V^\mu x)\, d\mu \right| \leqq \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}$$

outside a set of measure $\leqq \varepsilon^{1/2}$, and independent of Λ, M.

Let us now observe that $M^{-1}\int_0^M g(V^\mu x)\, d\mu$ tends to a finite limit $g_1(x)$ almost everywhere, and so

$$\left| \frac{1}{M} \int_0^M g(V^\mu x)\, d\mu - g_1(x) \right| < \varepsilon$$

for x outside a set of measure $\leqq \varepsilon$ and independent of $M \geqq M_0(\varepsilon)$. Combining this with the previous inequality we finally obtain that

$$\left| \frac{1}{\Lambda M} \int_0^\Lambda \int_0^M f(U^\lambda V^\mu x)\, d\lambda\, d\mu - g_1(x) \right| < 2\varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}$$

for $\Lambda \geqq \Lambda_0, M \geqq M_0$, and outside a set independent of Λ, M and of measure $\leqq \varepsilon + \varepsilon^{1/2}$. This completes the proof of the Theorem.

R e m a r k s. It is clear that if $f \varepsilon L^p, p > 1$, the function F^* of Lemma 3 also belongs to L^p, and $\int_S F^p(x)\, dx \leqq A_{p,k} \int_S f^p\, dx$. If $f(x)\{\log^+ f(x)\}^k$ is integrable, so is F^*, and

$$\int_S F(x)\, dx \leqq A_k \int_S f(x)\{\log^+ f(x)\}^k\, dx + A_k.$$

If $U_1^{\lambda_1}, \ldots, U_k^{\lambda_k}$ are commutative, we can complete Theorem 1 as follows.

T h e o r e m 2. *Let S and $U_1^{\lambda_1}, \ldots, U_k^{\lambda_k}$ be the same as in Theorem 1. Let $L_1(t), \ldots, L_k(t)$ be positive functions defined for $t > 0$, non-decreasing, tending to 0 and $+\infty$ with t. Let l be a number not less than 1 and suppose that $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ satisfy the conditions*

$$l^{-1}L_1(t) \leqq \Lambda_1 \leqq l L_1(t), \ldots, l^{-1}L_k(t) \leqq \Lambda_k \leqq l L_k(t). \tag{11}$$

Then for any function $f(x)$ integrable over S the limit (2) exists and is finite for almost every x.

It is enough to prove the following

L e m m a 4. *Under the assumptions of Theorem 2, the function $F^*(x)$ defined in (8′) under conditions (11) and for $f \geqq 0$ satisfies the inequality*

$$\left\{ \int_S F^{*\alpha}(x)\, dx \right\}^{1/\alpha} \leqq A_{k,l,\alpha} \int_S f(x)\, dx \qquad (0 < \alpha < 1). \tag{12}$$

For then we make the usual decomposition $f = f_1 + f_2$, where f_1 is bounded and $\int_S f_2\, dx$ small.

Lemma 4 will follow if we prove the following result analogous to Lemma 1 (compare also inequality (5)).

Lemma 5. *Let $f \geqq 0$. Under the assumptions of Theorem 2 and under conditions* (11), *we have*

$$(13) \qquad \bar{F}^*(y) \leqq (A_k/y)\int_0^y \bar{f}(\xi)\,d\xi \qquad (y>0).$$

Without entering into a detailed proof of the lemma, one may stress the following points. The familiar proofs, like WIENER's or PITT's, of the ergodic theorem of BIRKHOFF are based on covering lemmas, like VITALI's or SIERPINSKI's. In our case we need the following covering lemma, in which for simplicity we consider sets of points (λ, μ) in the plane.

Lemma 6. *Let $h(t)$ and $k(t)$ be two positive functions defined for $t>0$, non-decreasing and tending to 0 and $+\infty$ with t. Let E be a plane set whose outer measure $|E|$ is finite and positive. Suppose that to every point $(\lambda,\mu)\in E$ corresponds a rectangle $R=R_{\lambda,\mu}$ with lower left corner at (λ,μ), with sides parallel to the axes, and of lengths contained respectively between $l^{-1}h(t)$ and $lh(t)$, and between $l^{-1}k(t)$ and $lk(t)$, where $t=t(\lambda,\mu)$ varies with the point. Then there is a finite number of rectangles R_{λ_1,μ_1}, $R_{\lambda_2,\mu_2},\ldots,R_{\lambda_n,\mu_n}$ such that*

$$(14) \qquad \sum_{j=1}^{n} |R_{\lambda_j,\mu_j}| \geqq A\,|E|.$$

For $l=1$, the proof is known[4]) (there only rectangles with center at (λ,μ) are considered, but the proof remains unaffected). The constant A_l is then an absolute constant A. For $l>1$ the result then follows immediately by considering rectangles $R'_{\lambda,\mu}$ with lower left corner at (λ,μ) and with sides $l^{-1}h(t)$ and $l^{-1}k(t)$, since obviously $|R|>|R'|$.

If we assume that for every $(\lambda,\mu)\in E$ there are rectangles R with t arbitrarily small, then applying the lemma a large (but finite) number of times we may cover E, except for a subset of arbitrarily small measure with rectangles R of the family. From this it follows without difficulty that the integral of any $f(\lambda,\mu)\in L$ is at almost every point differentiable with respect to rectangles R.[5])

From Lemma 6, one easily obtains the following result which is an analogue of PITT's Lemma 2[6]).

Lemma 7. *Let $\Lambda_0>0$, and let $g(\lambda_1,\lambda_2)$ be non-negative and integrable over any finite portion of the quadrant $\lambda_1\geqq 0, \lambda_2\geqq 0$. Let Λ_1, Λ_2 be the func-*

---

[4]) See A. ZYGMUND, On the summability of multiple Fourier series, *American Journal of Math.*, **69** (1947), p. 838.

[5]) The fact is not new; it is explicitly stated in B. JESSEN, J. MARCINKIEWICZ and A. ZYGMUND, Note on the differentiability of multiple integrals, *Fundamenta Math.*, **25** (1935), pp. 217—234.

[6]) l. c. [1]), p. 327.

tions of Theorem 2 (for $k=2$) and suppose that for almost all (μ_1, μ_2)

$$\sup_{0<\Lambda_1,\Lambda_2\leqq\Lambda_0} \frac{1}{\Lambda_1\Lambda_2}\int_0^{\Lambda_1}\int_0^{\Lambda_2} g(\mu_1+\lambda_1, \mu_2+\lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \geqq \alpha.$$

Then

$$\liminf_{\Lambda_1,\Lambda_2\to+\infty} \frac{1}{\Lambda_1\Lambda_2}\int_0^{\Lambda_1}\int_0^{\Lambda_2} g(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \geqq A\alpha.$$

Lemma 5 follows from Lemma 7 exactly as in the case of one variable[7]), if one uses Lemma 6 and the differentiability theorem mentioned on the preceding page.

There is an intermediate result between Theorems 1 and 2, the analogue of which for differentiability of integrals is given in JESSEN, MARCINKIEWICZ and ZYGMUND[8]). The assumption is that $f(x)$ is measurable, and the integral

$$\int_S |f(x)|\,\{\log^+|f(x)|\}^r\, dx$$

finite, where r is an integer satisfying the inequality

$$0 \leqq r \leqq k-1.$$

In that case, the limit (2) still exists almost everywhere, provided $k-r$ of the Λ_j satisfy conditions (11) while the remaining Λ's tend to $+\infty$ independently of one another. There is no need to give the details of the proof.

(Received March 27, 1951.)

[7]) See PITT, l. c., pp. 327–328.

[8]) l. c. [5]).

Zur Theorie der endlichen einfachen Gruppen.

Von J. SZÉP in Szeged.

Die bisherigen Untersuchungen über die (endlichen) einfachen Gruppen sind im allgemeinen von zweierlei Natur. Teils handelt es sich um strukturelle Fragen bezüglich bekannter einfacher Gruppen, teils werden notwendige Bedingungen für die Einfachheit der Gruppen aufgestellt. In dieser Arbeit beweise ich einen Satz, der bezüglich der faktorisierbaren Gruppen (mit weniger Ausnahme) eine notwendige und hinreichende Bedingung der Einfachheit aufstellt. Dabei nennen wir eine Gruppe $\mathfrak{G}$ faktorisierbar, wenn sie zwei Untergruppen $\mathfrak{H}, \mathfrak{K} (\neq \mathfrak{G})$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ enthält. Jede solche Gleichung $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ nennen wir eine Faktorisation von $\mathfrak{G}$.

Gewisse nur hinreichende Bedingungen für die Einfachheit von faktorisierbaren Gruppen habe ich schon früher aufgestellt.[1])

Satz. *Eine faktorisierbare Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann einfach, wenn sie keine Faktorisation $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ hat, in der der Durchschnitt $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}$ einen Normalteiler $(\neq 1)$ von $\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{K}$ enthält. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, daß in allen Faktorisationen der eine Faktor maximal, von konstanter Ordnung, einfach und nicht faktorisierbar ist, dann läßt sich nämlich aus der Nichteinfachheit von $\mathfrak{G}$ nicht auf eine Faktorisation von $\mathfrak{G}$ von der obigen Eigenschaft schließen.*

Bemerkung. Ich kenne nur den trivialen Ausnahmefall, wo $\mathfrak{G}$ von der Ordnung pq ist (p, q Primzahlen).

Die Richtigkeit der Behauptung „nur dann" ist eine direkte Folgerung des Satzes.[2])

Wenn in der faktorisierbaren Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ $\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{K}$ einen Normalteiler $\mathfrak{D}'$ hat, wofür $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{D} \supseteqq \mathfrak{D}' \neq 1$ gilt, dann ist $\mathfrak{G}$ nichteinfach.

Zum Beweis der Behauptung „dann" nehmen wir an, daß $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N} (\neq \mathfrak{G}, 1)$ enthält und dabei für $\mathfrak{G}$ nicht der Ausnahmefall des

[1]) J. SZÉP, On factorisable simple groups, *diese Acta,* **14** (1951), S. 22; Über endliche einfache Gruppen. (Zu erscheinen in den Berichten des I. Ungarischen Mathematischen Kongreßes 1950.)

[2]) J. SZÉP and L. RÉDEI, On factorisable groups, *diese Acta,* **13** (1950), S 235 - 238

Satzes vorliegt. Offenbar sind $\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{H}$ Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Gilt dabei $\overline{\mathfrak{H}}, \overline{\mathfrak{K}} \neq \mathfrak{G}$, so ist wegen $\mathfrak{N} \subseteq \overline{\mathfrak{H}} \cap \overline{\mathfrak{K}}$ $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{H}}\overline{\mathfrak{K}}$ eine Faktorisation von $\mathfrak{G}$ von der behaupteten Eigenschaft (jetzt ist nämlich $\mathfrak{N}$ sogar in beiden Faktoren $\overline{\mathfrak{H}}$ $\overline{\mathfrak{K}}$ normal enthalten). Somit is der Satz in diesem Fall richtig, weshalb wir im folgenden

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{H}$$

annehmen dürfen. Gilt dabei $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{D} \neq 1$, so ist die Behauptung wieder richtig, da $\mathfrak{D}$ normal in $\mathfrak{H}$ ist. Deshalb dürfen wir auch

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N} = 1$$

annehmen. Wir unterscheiden die folgenden Fälle 1—3:

Fall 1. Enthält $\mathfrak{H}$ einen Normalteiler $\mathfrak{M}$ ($\neq \mathfrak{H}, 1$), so liefert die Untergruppe $\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\mathfrak{N}$ eine gewünschte Faktorisation $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\overline{\mathfrak{N}}$, da hier $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \cap \overline{\mathfrak{N}}$ normal in $\mathfrak{H}$ ist.

Fall 2. Es sei $\mathfrak{H}$ einfach aber nicht maximal. Dann gibt es eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{H}}$ mit $\mathfrak{G} \supset \overline{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$. Hierfür gilt $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{H}}\mathfrak{N}$, wodurch eine Zurückführung auf einen oben erledigten Fall geschehen ist.

Fall 3. Endlich sei $\mathfrak{H}$ einfach und faktorisierbar. Wir nehmen eine Faktorisation $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \cdot \mathfrak{H}''$. Dann gilt die Faktorisation $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}'\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{H}''\mathfrak{N}$, dabei ist $\mathfrak{N}$ in beiden Faktoren normal, womit der Satz bewiesen ist.

(Eingegangen am 1. August 1951.)

Über Ringerweiterungen.

Von I. SZÉLPÁL in Szeged.

Nach einem Satz von BAER[1]) gibt es Abelsche Gruppen, die in irgendwelchen Abelschen Gruppen nur als direkter Faktor enthalten werden können. BAER gibt sogar alle diese Gruppen an.

In der Theorie der Ringe[2]) könnte man ähnlich fragen, ob es Ringe R gibt, die nur als direkter Summand in irgendeinem Ring enthalten sein können. Die Antwort fällt im allgemeinen negativ aus, wie das die folgende einfache Bemerkung zeigt. Man betrachte den vollen Matrizenring R_2 über R von Range 4. Die Elemente

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in R)$$

von R_2 bilden einen zu R isomorphen Ring R', der offenbar kein direkter Summand, sogar kein Ideal in R_2 ist, sei es denn, daß R ein Zeroring ist (Zeroring heißt ein Ring, in dem alle Elementenprodukte verschwinden).

Nun kann es vielleicht nicht uninteressant sein, daß man sehr einfach auch weitere Ringe S über R angeben kann, in denen R ebenfalls kein Ideal ist, und dabei auch die Zeroringe keinen Ausnahmefall bilden, so daß dann allgemein gilt der folgende:

Satz 1. *Zu jedem Ring R ($\neq 0$) gibt es einen Erweiterungsring S, in dem R kein Ideal ist.*

Wir bemerken hierzu, daß der von uns anzugebende Erweiterungsring S gegenüber dem obigen R_2 auch die Eigenschaft hat, daß er für kommutative R ebenfalls kommutativ ist.

Außerdem zeigen wir die folgenden Sätze:

Satz 2. *Zu jedem Ring R gibt es einen Ring S, so daß S zwei zu R isomorphe Ringe enthält, von denen der eine ein Ideal, der andere kein Ideal in S ist.*

Satz 3. *Wir können jeden Ring R auch so in einen Ring S einbetten daß S zwei zu R isomorphe Ringe enthält, von denen keiner ein Ideal in S ist.*

---

[1]) R. BAER, Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group, *Bulletin American Math. Soc.*, 46 (1940), S. 800—806.

[2]) Es sind nicht nur kommutative Ringe gemeint.

Wir werden diese Sätze mit direkter Konstruktion beweisen. Um Satz 1 zu beweisen, betrachten wir die Menge S der Tripel (ϱ, m_1, m_2), wobei $\varrho \in R$ gilt und m_1, m_2 ganze Zahlen sind. Wir definieren

$$(\varrho, m_1, m_2) + (\varrho', m_1', m_2') = (\varrho + \varrho', m_1 + m_1', m_2 + m_2'),$$
$$(\varrho, m_1, m_2) \cdot (\varrho', m_1', m_2') =$$
$$= (\varrho\varrho', \ m_1 m_1', \ m_1'\varrho + m_2'\varrho + m_1\varrho' + m_2\varrho' + m_1 m_2' + m_2 m_1' + m_2 m_2').$$

Es ist klar, daß hierdurch S zu einem Ring gemacht wurde. Man sieht auch, daß die Elemente $(\varrho, 0, 0)$ einen zu R isomorphen Unterring in S bilden; deshalb läßt sich R als ein Unterring von S auffassen. Da nun aber mit $\varrho \neq 0$

$$(\varrho, 0, 0)\,(0, 0, 1) = (0, 0, \varrho) \,\bar{\in}\, R$$

gilt, so ist R in der Tat kein Ideal in S.

Zum Beweis von Satz 2 setzen wir in der Menge S der Tripel $(\varrho_1, \varrho_2, m)$ $(\varrho_1, \varrho_2 \in R$; m ganz rational$)$

$$(\varrho_1, \varrho_2, m) + (\varrho_1', \varrho_2', m') = (\varrho_1 + \varrho_1', \varrho_2 + \varrho_2', m + m')$$
$$(\varrho_1, \varrho_2, m)\,(\varrho_1', \varrho_2', m') = (\varrho_1\varrho_1', \varrho_1\varrho_2' + m'\varrho_1 + \varrho_2\varrho_1' + \varrho_2\varrho_2' + m'\varrho_2 + m\varrho_1' + m\varrho_2', mm').$$

Wieder ist S ein Ring und die Elemente von der Form $(\varrho, 0, 0)$ und $(0, \varrho, 0)$ bilden je einen zu R isomorphen Unterring R_1, R_2 von S. Da

$$(\varrho, 0, 0)\,(\varrho_1, \varrho_2, m) = (\varrho\varrho_1, \varrho\varrho_2 + m\varrho, 0) \,\bar{\in}\, R_1$$

gilt, so ist R_1 kein Ideal in S

Dagegen gilt

$$(0, \varrho, 0)\,(\varrho_1, \varrho_2, m) = (0, \varrho\varrho_1 + \varrho\varrho_2 + m\varrho, 0) \in R_2$$

weshalb R_2 ein Ideal in S ist.

Der Beweis von Satz 3 entsteht aus dem vorigen durch die kleine Abänderung, daß wir jetzt

$$(\varrho_1, \varrho_2, m)\,(\varrho_1', \varrho_2', m') = (\varrho_1\varrho_1' + \varrho_1\varrho_2', \varrho_2\varrho_1' + \varrho_2\varrho_2', m\varrho_1' + m\varrho_2' + m'\varrho_1 + m'\varrho_2 + mm')$$

setzen[3]). Dann ist S wieder ein Ring mit den zwei Unterringen R_1, R_2 wie zuvor, die aber jetzt wegen

$$(\varrho, 0, 0)\,(\varrho_1, \varrho_2, m) = (\varrho\varrho_1 + \varrho\varrho_2, 0, m\varrho) \,\bar{\in}\, R_1$$
$$(0, \varrho, 0)\,(\varrho_1, \varrho_2, m) = (0, \varrho\varrho_1 + \varrho\varrho_2, m\varrho) \,\bar{\in}\, R_2$$

keine Ideale sind.

Wir bemerken, daß wenn wir uns auf solche Ausgangs- und Erweiterungsringe beschränken, die nur Elemente von endlicher (additiver) Ordnung enthalten, dann gelten diese Sätze nicht mehr. Darauf werden wir an einer anderen Stelle zurückkommen.

(Eingegangen am 1. September 1951.)

---

[3]) Diese drei Konstruktionen sind einfache Beispiele für das schiefe Produkt von L. Rédei. Vgl. L. Rédei: Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie. *Journal f. d. reine und angewandte Math.*, 188 (1950), S. 201—227.

Du prolongement des représentations locales des groupes topologiques.

Par TUDOR GANEA à Bucarest.

1. Le théorème, déjà classique, de O. SCHREIER, concernant la structure globale des groupes topologiques localement isomorphes, peut être déduit facilement de la proposition suivante:

Soit φ une représentation locale, dans un groupe abstrait H, d'un voisinage connexe de l'élément neutre d'un groupe topologique connexe, localement connexe et simplement connexe G. Il existe alors une représentation unique du groupe G dans H, qui prolonge φ [3, p. 49, Th. 3]*).

L'objet de cette note est de mettre en évidence qu'aucune des conditions imposées au groupe G, dans l'énoncé ci-dessus, n'est nécessaire afin d'assurer l'existence d'un prolongement à toute représentation locale, définie dans G. Les quelques théorèmes et exemples qui suivent, sont destinés à dégager certaines circonstances plus générales dans lesquelles de tels prolongements sont possibles.

Les résultats principaux de ce travail sont exprimés par les théorèmes (3. 1) et (4. 3). Le premier fournit une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un prolongement de toute représentation locale d'un groupe topologique G; d'après le second, un tel prolongement est possible ou non simultanément pour G et pour son groupe complété $\hat{G}$. Grâce à ces théorèmes, les exemples considérés mettent finalement en évidence que chacune des conditions: connexion, connexion locale, connexion simple, est plus restrictive que la condition correspondante formulée dans cette note.

2. La terminologie utilisée est empruntée à [2]. Sauf mention contraire, les groupes topologiques dont il s'agit ne sont pas supposés séparés, et leurs sous-groupes ne sont pas supposés fermés.

2. 1. D é f i n i t i o n. *Une représentation locale du groupe topologique G est un triplet (V, φ, H), où V désigne un voisinage de l'élément neutre*

---

*) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'article.

dans G, H un groupe abstrait et φ une application de V dans H, telle que $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ pour tout couple de points $x, y \in V$ avec $xy \in V$; [3, p. 48, Def. 2].

Une représentation Φ du groupe topologique G dans le groupe abstrait H prolonge la représentation locale (V, φ, H), s'il existe un voisinage $W \subset V$ de l'élément neutre dans G, tel que $\Phi(x)=\varphi(x)$, pour tout point $x \in W$.

S'il existe, un tel prolongement est nécessairement unique lorsque le groupe G est engendré par chacun des voisinages de son élément neutre.

2.2. Lemme. *Soit H un sous-groupe partout dense du groupe topologique G. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *H est engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans H;*

(ii) *G est engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans G.*

En effet, (i) entraîne (ii) selon [2, p 12, Prop. 8].

Réciproquement, V désignant une partie ouverte dans G, soit $V \cap H$ un sous-groupe ouvert dans H. Il en résulte [1]):

$$e \in V = V \cap G = V \cap \overline{H} \subset \overline{V \cap H},$$

donc $\overline{V \cap H}$ est un sous-groupe ouvert dans G et (ii) entraîne $\overline{V \cap H}=G$. Le sous-groupe $V \cap H$ est aussi fermé dans H [2, p. 10, Prop. 4], donc [1]):

$$V \cap H = \overline{V \cap H} \cap H = G \cap H = H.$$

2.3. Définition. *Le groupe topologique G est localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre e, s'il existe un système fondamental $\mathfrak{F}$ de voisinages de e dans G, tel que*

Pour tout voisinage N de e dans G et pour tout $W \in \mathfrak{F}$, tout point $x \in W$ peut être joint à e par une N_d-chaîne [2]) dont tous les points sont dans W.

Cette dénomination est justifiée par la

2.4. Proposition. *Soit W un voisinage de e dans G, dont tout point se laisse joindre à e par une N_d-chaîne à points dans W. Pour tout $x \in W$ il existe alors une suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que [3]):*

$$x = \prod_{k=1}^{n} x_k, \quad x_i \in N \quad \text{et} \quad \prod_{k=i}^{n} x_k \in W \qquad \text{pour } i=1, \ldots, n.$$

En effet, $(y_j)_{1 \leq j \leq m}$ désignant une N_d-chaîne à points dans W, joignant x à e, la suite $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ s'obtient en posant $n=m-1$ et $x_i = y_{m-i+1} y_{m-i}^{-1}$ pour $i=1, \ldots, n$.

---

1) Les barres désignent les adhérences par rapport à G.

2) Une N_d-chaîne joignant x à e est une suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $x_1 = e$, $x_n = x$ et $x_{i+1} x_i^{-1} \in N$ pour $i=1, \ldots, n-1$; cf. [1, p. 112, Déf. 3 & 2, p. 24, Déf. 1]. En utilisant des N_s-chaînes satisfaisant à la condition $x_i^{-1} x_{i+1} \in N$, on obtient une définition équivalente à (2.3).

3) $\prod_{v=p}^{q} a_v = a_p \ldots a_q$ pour $p<q$, et $\prod_{v=p}^{p} a_v = a_p$.

2.5. Lemme. *Soit H un sous-groupe partout dense du groupe topologique G. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *H est localement engendré par tout voisinage de e dans H;*

(ii) *G est localement engendré par tout voisinage de e dans G.*

Démonstration. Soit V un voisinage arbitraire de e dans G, donc $V \cap H$ un voisinage arbitraire de e dans H.

D'après (i), il existe un voisinage $W \subset V$ de e dans G, tel que tout point de $W \cap H$ se laisse joindre à e par une $(N \cap H)_d$-chaîne à points dans $W \cap H$, quel que soit le voisinage N de e dans G. Soit N un voisinage quelconque de e dans G et $x \in W$; il existe $y \in N^{-1}x \cap W \cap H$, donc aussi une $(N \cap H)_d$-chaîne $(x_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ à points dans $W \cap H$, joignant y à e. En posant $x_{n+1} = x$, la suite $(x_i)_{1 \leqq i \leqq n+1}$ est alors une N_d-chaîne à points dans W, joignant x à e.

Réciproquement, d'après (ii), il existe un voisinage $W \subset V$ de e dans G, dont tout point se laisse joindre à e par une N_d-chaîne à points dans W, quel que soit le voisinage N de e dans G. Soit M un voisinage quelconque de e dans G et $x \in W \cap H$; soit N un voisinage de e dans G tel que $N^2 N^{-1} \subset M$. Il existe alors une N_d-chaîne $(y_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ à points dans W, joignant x à e. Soit $x_1 = e = y_1$, $x_n = x = y_n$ et $x_i \in N y_i \cap W \cap H$ pour $i = 2, \ldots, n-1$. Pour $i = 1, \ldots, n-1$, il en résulte:

$$x_{i+1} x_i^{-1} \in H \quad \text{et} \quad x_{i+1} x_i^{-1} = x_{i+1} y_{i+1}^{-1} \cdot y_{i+1} y_i^{-1} \cdot y_i x_i^{-1} \in N^2 N^{-1} \subset M,$$

donc la suite $(x_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ est une $(M \cap H)_d$-chaîne à points dans $W \cap H$, joignant x à e.

2.6. Corollaire *Tout sous-groupe partout dense H d'un groupe topologique connexe et localement connexe G, est engendré et localement engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre dans H.*

En effet, G est alors engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans G [2, p. 11, Prop. 5]. De plus, tout point d'un voisinage connexe W de l'élément neutre dans G, se laisse joindre à e par une N_d-chaîne à points dans W, quel que soit le voisinage N de e dans G [1, p. 112, Prop. 3]. G est donc aussi localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans G et (2.6) résulte de (2.2) et (2.5).

2.7. Définition. *Un groupe de recouvrement du groupe topologique G est une paire $(\mathfrak{G}, f)$, où $\mathfrak{G}$ désigne un groupe topologique engendré et localement engendré par tout voisinage de son élément neutre et f est un homomorphisme*[4]) *de $\mathfrak{G}$ sur G à noyau*[5]) *discret.*

Le groupe de recouvrement $(\mathfrak{G}, f)$ du groupe topologique G est dégénéré si le noyau de l'homomorphisme f est réduit à l'élément neutre du groupe $\mathfrak{G}$.

---

[4]) Un homomorphisme de groupes topologiques est toujours une application ouverte et continue [2, p. 16, Th. 3].

[5]) Le noyau de l'homomorphisme $f: \mathfrak{G} \to G$ est le sous-groupe distingué $f^{-1}(e)$ de $\mathfrak{G}$, e désignant l'élément neutre de G.

2.8. Si le groupe topologique G admet un groupe de recouvrement, G est engendré et localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans G, et réciproquement si G est engendré et localement engendré par tout voisinage de son élément neutre, G admet au moins un groupe de recouvrement dégénéré.

2.9. Soit f un homomorphisme à noyau discret, du groupe topologique $\mathfrak{G}$ sur le groupe topologique G. Si l'un quelconque des deux groupes G, $\mathfrak{G}$ est séparé, localement engendré par chacun des voisinages de son élément neutre, ou localement connexe, le second jouit de la même propriété[6]). En particulier, si $\mathfrak{G}$ est engendré et G localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre respectif, $(\mathfrak{G}, f)$ est un groupe de recouvrement de G; si de plus l'un des groupes G, $\mathfrak{G}$ est localement connexe, les deux sont nécessairement connexes et $(\mathfrak{G}, f)$ devient un groupe de recouvrement au sens classique [3, p. 59, Cor. 2 & 3, p. 53, Def. 2].

3. Le lien entre l'existence d'un prolongement à toute représentation locale du groupe G et la famille de ses groupes de recouvrement est fourni par le suivant

3.1. Théorème. *Soit G un groupe topologique engendré et localement engendré par chacun des voisinages de son élément neutre. Pour que toute représentation locale de G puisse être prolongée en une représentation du groupe G entier, il faut et il suffit que tout groupe de recouvrement de G soit dégénéré.*

Démonstration. Soit $(\mathfrak{G}, f)$ un groupe de recouvrement de G. Le noyau de f étant discret, il existe un voisinage symétrique U de l'élément neutre dans $\mathfrak{G}$, tel que f soit univalent sur U^2. $V = f(U)$ est un voisinage de l'élément neutre dans G et, en posant

$$\varphi(x) = U \cap f^{-1}(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in V,$$

$(V, \varphi, \mathfrak{G})$ est une représentation locale de G, qui admet par hypothèse un prolongement $\Phi: G \to \mathfrak{G}$. La représentation $f \circ \Phi$ coïncide sur un voisinage $W \subset V$ de e dans G, donc sur tout le groupe G avec l'application identique de G sur soi. Le groupe $\mathfrak{G}$ étant engendré par tout voisinage de son élément neutre, de

$$\Phi(W) = \varphi(W) = U \cap f^{-1}(W)$$

résulte $\Phi(G) = \mathfrak{G}$ et l'univalence de f sur $\mathfrak{G}$ en découle.

Réciproquement, soit (V, φ, H) une représentation locale de G dans le groupe abstrait H. Soit $W \subset V$ un voisinage de l'élément neutre e dans G, dont tout point se laisse joindre à e par une N_d-chaîne à points dans W,

---

[6]) Pour la séparation, voir [2, p. 13, Th. 2 & 2, p. 10, Prop. 3 (Rectif. Fasc. III)]; pour les deux autres propriétés, l'énoncé résulte de ce que les groupes $\mathfrak{G}$ et G sont localement isomorphes [2, p. 13, Prop. 9].

quel que soit le voisinage N de e dans G; soit enfin R un voisinage ouvert et symétrique de e dans G, contenu dans W. Soit $\mathfrak{G}$ le sous-groupe du groupe produit $G \times H$, engendré par le graphe de la restriction de φ à R; soient aussi f la restriction à $\mathfrak{G}$ de la projection $G \times H \rightarrow G$ et ψ la restriction à $\mathfrak{G}$ de la projection $G \times H \rightarrow H$. Puisque G est engendré par tout voisinage de son élément neutre et f est une représentation, $f(\mathfrak{G}) \supset R$ entraîne $f(\mathfrak{G}) = G$. Les graphes des restrictions de φ aux voisinages de e dans G, contenus dans R, vérifient[7]) les axiomes [2, p. 5] d'un système fondamental de voisinages de l'élément neutre dans $\mathfrak{G}$. Muni de la topologie ainsi définie [2, p. 4, Prop. 1], $\mathfrak{G}$ devient un groupe topologique et f un homomorphisme à noyau discret, de $\mathfrak{G}$ sur G.

De plus, $\mathfrak{G}$ est engendré par tout voisinage de son élément neutre. En désignant, en effet, par N un voisinage quelconque de e dans G, contenu dans R, d'après (2. 4) il existe pour tout $x \in R \subset W$ une suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que:

$$x = \prod_{k=1}^{n} x_k, \quad x_i \in N \subset R \subset W \quad \text{et} \quad \prod_{k=i}^{n} x_k \in W \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n.$$

Par récurrence, et puisque $W \subset V$, il en résulte

$$\varphi(x) = \varphi\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \varphi(x_k),$$

donc tout générateur $(x, \varphi(x))$, avec $x \in R$, de $\mathfrak{G}$ est un produit d'éléments du voisinage de l'élément neutre dans $\mathfrak{G}$, constitué par le graphe de la restriction de φ à N. A la suite de (2. 9), puisque de plus G est localement engendré par tout voisinage de son élément neutre, $(\mathfrak{G}, f)$ est un groupe de recouvrement de G. Par hypothèse, ce groupe de recouvrement est dégénéré, donc f est univalent sur $\mathfrak{G}$. Pour $x \in R$, $f^{-1}(x) = (x, \varphi(x))$ donc $\Phi = \psi \circ f^{-1}$ est une représentation de G dans H, qui prolonge (V, φ, H).

3. 2. C o r o l l a i r e. *Soit G un groupe topologique connexe, localement connexe et simplement connexe. Toute représentation locale de G dans un groupe abstrait admet un prolongement sur tout le groupe G;* cf. [3, p. 49. Th. 3].

---

[7]) La vérification des trois premiers axiomes de [2, p. 5] est aisée. Pour vérifier le quatrième, soit $P \subset R$ un voisinage quelconque de e dans G, et supposons d'abord $a \in R = R^{-1}$; R étant ouvert dans G, il existe un voisinage Q de e dans G, tel que

$$Q \subset aPa^{-1} \cap Ra^{-1} \cap R;$$

pour $y \in Q$ il en résulte $y = axa^{-1}$ avec $x \in P$ et $ax \in R$, donc

$$\varphi(y) = \varphi(axa^{-1}) = \varphi(ax)\,\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)\,\varphi(x)\,(\varphi(a))^{-1},$$

donc pour tout $y \in Q$ il existe $x \in P$ tel que

$$(y, \varphi(y)) = (axa^{-1}, \varphi(a)\,\varphi(x)\,(\varphi(a))^{-1}) = (a, \varphi(a))\,(x, \varphi(x))\,(a, \varphi(a))^{-1}.$$

Le cas $a \in G$, donc $a = a_1 \ldots a_n$ avec $a_i \in R$, résulte par application répétée du cas $a \in R$

En effet, tout groupe de recouvrement de G, étant d'après (2. 9) un espace de recouvrement de G, est dégénéré dû à la connexion simple de G [3, p. 44, Def. 1], et (3. 2) résulte de (3. 1).

3. 3. Remarque. L'idée de démonstration employée dans (3. 1) est empruntée à [6, p. 81, Th. 18]. Elle conduit à une démonstration de (3. 2) différente de celle de [3, p. 49, Th. 2], ne faisant pas usage du principe de monodromie [3, p. 46, Th. 2].

4. Une des conséquences du théorème (3. 1) est que l'existence d'un prolongement de toute représentation locale du groupe topologique G a lieu en même temps que l'existence d'un prolongement de toute représentation locale du groupe complété $\hat{G}$ de G.

4. 1. Lemme. *Soient $\mathfrak{G}$ et G deux groupes topologiques séparés, et f un homomorphisme à noyau discret, de $\mathfrak{G}$ sur G. Si le groupe topologique G admet un groupe complété, il en est de même pour le groupe topologique $\mathfrak{G}$. En désignant alors par $\hat{\mathfrak{G}}$ et $\hat{G}$ les groupes complétés respectifs, il existe un homomorphisme $\hat{f}$, à noyau discret, de $\hat{\mathfrak{G}}$ sur $\hat{G}$, qui prolonge[8]) f.*

Démonstration. Soit d'abord $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy [1, p. 99, Def. 3] pour la structure uniforme droite $\mathfrak{G}_d$ du groupe $\mathfrak{G}$, [2, p. 24, Def. 1], et U un voisinage symétrique de l'élément neutre dans $\mathfrak{G}$, tel que f soit univalent sur U^2. Il existe $A \in \mathfrak{F}$ tel que $AA^{-1} \subset U$, donc $A \subset Ua$ avec $a \in A \subset \mathfrak{G}$. Soit V un voisinage de l'élément neutre dans $\mathfrak{G}$, tel que

$$V \subset a^{-1} U^2 a \cap U.$$

$f(V)$ est alors un voisinage de l'élément neutre dans G. Puisque $f(\mathfrak{F})$ est une base de filtre de Cauchy sur G_d [2, p. 25, Prop. 3 & 1, p. 100, Prop. 5], et puisque G admet par hypothèse un groupe complété, d'après [2, p. 30, Th. 1] il existe $B \in \mathfrak{F}$ tel que

$$f(B^{-1}B) = (f(B))^{-1} f(B) \subset f(V).$$

En posant $C = A \cap B \in \mathfrak{F}$ [1, p. 20, Def. 1] et en désignant par π le noyau de homomorphisme f, il résulte

$$C^{-1}C \subset B^{-1}B \subset V\pi \quad \text{et} \quad C^{-1}C \subset A^{-1}A \subset a^{-1} U^2 a.$$

L'univalence de f sur $a^{-1}U^2a$ et $V \subset a^{-1}U^2a$ entraînent

$$V\pi \cap a^{-1}U^2a \subset V \quad \text{donc} \quad C^{-1}C \subset V \subset U.$$

Il est ainsi prouvé que l'image de $\mathfrak{F}$ par la symétrie $x \to x^{-1}$ de $\mathfrak{G}$ sur soi, est encore un filtre de Cauchy sur $\mathfrak{G}_d$, donc $\mathfrak{G}$ admet, d'après [2, p. 30, Th. 1], un groupe complété.

Soient à présent $\hat{\mathfrak{G}}$ et $\hat{G}$ les groupes complétés de $\mathfrak{G}$ et G respectivement. Il existe une représentation continue $\hat{f}$ de $\hat{\mathfrak{G}}$ dans $\hat{G}$, qui prolonge[8]) f; cf.

---

[8]) En identifiant $\mathfrak{G}$ et G à des sous-groupes partout denses de $\hat{\mathfrak{G}}$ et $\hat{G}$ respectivement; cf. [2, p. 27].

[2, p. 29, Rem.]. Soit U un voisinage symétrique de l'élément neutre dans $\mathfrak{G}$, tel que f soit univalent sur U^2; $V=f(U)$ est alors un voisinage de l'élément neutre dans G. Puisque U et V sont partout denses dans[9]) $\overline{U}$ et $\overline{V}$, qui sont complets [1, p. 101, Prop. 6], et puisque la restriction de f à U est un isomorphisme de l'espace uniforme[10]) U sur l'espace uniforme[10]) V, il existe [1, p. 105, Prop. 8] un isomorphisme F de l'espace uniforme[11]) $\overline{U}$ sur l'espace uniforme[11]) $\overline{V}$, qui prolonge la restriction de f à U. L'unicité des prolongements continus [1, p. 38, Th. 1] entraîne

$$(*)\qquad \hat{f}(x)=F(x) \quad \text{pour tout} \quad x\in\overline{U}\subset\hat{\mathfrak{G}}.$$

Puisque $\overline{U}$ et $\overline{V}$ sont des voisinages de l'élément neutre dans $\hat{\mathfrak{G}}$ et $\hat{G}$ respectivement [2, p. 30, Prop. 7], à la suite de (*) la restriction de $\hat{f}$ à $\overline{U}$ est le prolongement d'un isomorphisme local de $\hat{\mathfrak{G}}$ à $\hat{G}$, [2, p. 8, Prop. 3]. Il en résulte que $\hat{f}$ est un homomorphisme à noyau discret de $\hat{\mathfrak{G}}$ dans $\hat{G}$. Puisque $\hat{f}(\hat{\mathfrak{G}})$ est un sous-groupe ouvert, donc aussi fermé [2, p. 10, Prop. 4] dans $\hat{G}$, contenant le sous-groupe partout dense G de $\hat{G}$, il résulte finalement

$$\hat{f}(\hat{\mathfrak{G}})=\hat{G}.$$

4.2. Proposition. *Soit H un sous-groupe partout dense du groupe topologique G. Si H est engendré et localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans H, et si toute représentation locale de H dans un groupe abstrait admet un prolongement sur H, le groupe G jouit des mêmes propriétés.*

En effet, selon (2.2) et (2.5), G est aussi engendré et localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans G. Soit $(\mathfrak{G}, g)$ un groupe de recouvrement de G; soit $\mathfrak{H}=g^{-1}(H)$ et h la restriction de g à $\mathfrak{H}$. Le groupe $\mathfrak{H}$ est partout dense dans $\mathfrak{G}$, donc d'après (2.2) et (2.5), il est engendré et localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans $\mathfrak{H}$. De plus h est un homomorphisme à noyau discret de $\mathfrak{H}$ sur H, donc $(\mathfrak{H}, h)$ est un groupe de recouvrement de H. A la suite de (3.1), le noyau de h est reduit à l'élément neutre de $\mathfrak{H}$; puisque le noyau de g coïncide avec celui de h, le groupe de recouvrement $(\mathfrak{G}, g)$ est dégénéré et (4.2) résulte de (3.1).

4.3. Théorème. *Soit G un groupe topologique séparé, admettant un groupe complété $\hat{G}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

---

9) Les barres désignent les adhérences par rapport aux groupes complétés $\hat{\mathfrak{G}}$ ou $\hat{G}$, selon le cas.

10) Il s'agit de la structure uniforme induite par la structure uniforme droite $\mathfrak{G}_d$, respectivement G_d, des groupes $\mathfrak{G}$ et G.

11) Il s'agit de la structure uniforme induite par la structure uniforme droite $\hat{\mathfrak{G}}_d$, respectivement $\hat{G}_d$, des groupes $\hat{\mathfrak{G}}$ et $\hat{G}$.

(i) *G est engendré et localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans G, et toute représentation locale de G dans un groupe abstrait admet un prolongement sur tout le groupe G;*

(ii) *$\hat{G}$ est engendré et localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans $\hat{G}$, et toute représentation locale de $\hat{G}$ dans un groupe abstrait admet un prolongement sur tout le groupe $\hat{G}$.*

Démonstration. Puisque G est un sous-groupe partout dense dans[8]) $\hat{G}$, (i) entraîne (ii) selon (4. 2).

Réciproquement, à la suite de (2. 2), (2. 5) et (ii), G est engendré et localement engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre dans G. Soit $(\mathfrak{G}, f)$ un groupe de recouvrement de G. D'après (4. 1), le groupe topologique $\mathfrak{G}$ admet un groupe complété $\hat{\mathfrak{G}}$, et il existe un homomorphisme $\hat{f}$ à noyau discret, de $\hat{\mathfrak{G}}$ sur $\hat{G}$, qui prolonge f. Puisque $\mathfrak{G}$ est partout dense dans $\hat{\mathfrak{G}}$, à la suite de (2. 2) et (2. 5), $\hat{\mathfrak{G}}$ est aussi engendré et localement engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre dans $\hat{\mathfrak{G}}$: $(\hat{\mathfrak{G}}, \hat{f})$ est donc un groupe de recouvrement de $\hat{G}$. D'après (3. 1) et (ii), ce groupe de recouvrement est dégénéré, et puisque le noyau de l'homomorphisme f est contenu dans celui de $\hat{f}$, le groupe de recouvrement $(\mathfrak{G}, f)$ de G est aussi dégénéré. (i) est à présent une conséquence de (3. 1).

4. 4. Corollaire. *Soit G un groupe topologique séparé et complet. Soient H et K deux sous-groupes de G, ayant même adhérence dans G. Si H est engendré et localement engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre dans H, et si toute représentation locale de H dans un groupe abstrait admet un prolongement sur tout le groupe H, le groupe K jouit des mêmes propriétés.*

4. 5. Corollaire. *Soit H un sous-groupe partout dense d'un groupe séparé, connexe, localement connexe, simplement connexe et complet, donc en particulier localement compact* [2, p. 27, Prop. 4]. *H est alors engendré et localement engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre dans H, et toute représentation locale de H dans un groupe abstrait admet un prolongement sur le groupe H entier.*

5. Les résultats précédents permettent à présent de prouver qu'aucune des conditions : connexion, connexion locale et (surtout) connexion simple, n'est nécessaire afin d'assurer l'existence d'un prolongement à toute représentation locale d'un groupe topologique.

5. 1. Proposition. *Il existe trois groupes topologiques séparés G_1, G_2, G_3, chacun engendré et localement engendré par tout voisinage de son élément neutre, et tels que:*

(i) *Toute représentation locale de G_j dans un groupe abstrait admet un prolongement sur tout le groupe G_j, pour $j = 1, 2, 3$;*

(ii) *G_1 est totalement discontinu, G_2 est connexe sans être localement connexe, G_3 est connexe et localement connexe sans être simplement connexe (au sens de* [3, p. 44, Def. 1]).

D é m o n s t r a t i o n. Soit G_1 le groupe des nombres rationnels, muni de la topologie de sous-groupe partout dense du groupe topologique additif des nombres réels R^1. Puisque R^1 est simplement connexe et localement compact, G_1 jouit des propriétés énoncées en vertu de (4. 5).

Il existe une solution discontinue de l'équation fonctionnelle réelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$, à graphe connexe [5, p. 118, Th. 5]. Soit G_2 le graphe d'une telle solution. G_2 est un sous-groupe connexe, partout dense du groupe topologique additif plan R^2 [5, p. 116, Th. 1], et n'est pas localement connexe [5, p. 119, Prop. 3]. Puisque R^2 est simplement connexe et localement compact, G_2 jouit des propriétés énoncées en vertu de (4. 5).

Soit G_3 la somme directe de G_2 et du sous-groupe de R^2 constitué par les points d'abscisse nulle et ordonnée rationnelle. Muni de la topologie induite par celle de R^2, G_3 est un groupe connexe et localement connexe [5, p. 119, Prop. 7]. Puisqu'il est partout dense dans R^2, qui est simplement connexe et localement compact, à la suite de (4. 5) il ne reste plus qu'à prouver que G_3 n'est pas simplement connexe. A cet effet, soient P et N les parties de G_3 se projetant sur le demi-axe réel positif fermé et sur le demi-axe réel négatif fermé, respectivement. P et N sont fermés dans G_3 et connexes; de plus $G_3=P\cup N$ et $P\cap N$ est l'ensemble des points de R^2 à abscisse nulle et ordonnée rationnelle, donc $P\cap N$ n'est pas connexe. Il est ainsi prouvé que G_3 n'est pas unicohérent[12]), et puisque G_3 est un espace métrique, (5. 1) résulte finalement du

5. 2. L e m m e. *Un espace métrique, connexe, localement connexe et simplement connexe (selon* [3, p. 44, Def. 1]) *E est unicohérent*[12]).

En effet, en désignant par θ l'application de R^1 sur la circonférence T^1, définie par $\theta(t)=e^{it}$ pour tout $t\in R^1$ $(i=\sqrt{-1})$, (R^1, θ) est un espace de recouvrement de T^1 [3, p. 58, Prop. 3]. Etant donnée à présent une application continue quelconque f de E dans T^1, en vertu de la connexion simple de E et de [3, p. 50, Prop. 1], il existe une application continue φ de E dans R^1, telle que $f(x)=\theta\circ\varphi(x)=e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x\in E$. L'unicohérence de E résulte finalement de [4, p. 70, Th. 3].

6. S'il existe, l'espace de recouvrement simplement connexe d'un groupe topologique séparé, connexe et localement connexe G, admet une structure de groupe topologique, muni de laquelle il devient un groupe de recouvrement de G [3, p. 53, Prop. 5]. Tout autre espace de recouvrement de G est aussi,

---

[12]) Un espace connexe E est unicohérent si, quelles que soient ses parties connexes et fermées A et B, $E=A\cup B$ entraîne la connexion de $A\cap B$ [4, p. 69].

dans ce cas, un groupe de recouvrement de G, isomorphe à un groupe quotient du groupe de recouvrement simplement connexe de G.

Le groupe topologique G_3, considéré ci-dessus, fournit un exemple d'un groupe connexe et localement connexe, n'étant point simplement connexe, n'admettant point d'espace de recouvrement simplement connexe, et dont nul espace de recouvrement non-dégénéré ne peut être muni, en vertu de (5. 1) et (3. 1), d'une structure de groupe de recouvrement de G_3.

Ces propriétés du groupe G_3 mettent de plus en évidence que la dégénérescence de tout groupe de recouvrement d'un groupe connexe et localement connexe, n'entraîne pas, en général, la connexion simple de ce groupe.

Bibliographie.

1. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique*, Livre III, *Topologie Générale*, chap. I & II (Paris, 1940).
2. —— *Eléments de Mathématique*, Livre III, *Topologie Générale*, chap. III & IV (Paris, 1942).
3. C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*, I (Princeton, 1946).
4. S. Eilenberg, Transformations continues en circonférence et la topologie du plan, *Fundamenta Math.*, **26** (1936), p. 61—112.
5. F. B. Jones, Connected and disconnected plane sets and the functional equation $f(x)+f(y)=f(x+y)$, *Bulletin American Math. Soc.*, **48** (1942), p. 115—120.
6. L. Pontrjagin, *Topological Groups* (Princeton, 1946).

(Reçu le 30 juin 1951)

Perturbations des transformations linéaires fermées.

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

La plupart des recherches sur les perturbations des transformations linéaires concerne les transformations autoadjointes de l'espace de Hilbert, ce qui est bien naturel vu l'importance de leurs applications à la Physique. Il n'est peut-être pourtant pas sans intérêt d'examiner en quelle mesure les raisonnements qu'on a employés dans ces recherches s'adaptent au cas des transformations linéaires de types plus généraux, de l'espace de Hilbert, ou même d'un espace de Banach.

Dans cette Note, il s'agira des transformations linéaires *fermées* quelconques. On étudiera d'abord la question de l'invariance de cette propriété lors de perturbations, puis on envisagera le problème ordinaire de la théorie des perturbations: le comportement du spectre. La méthode des transformations résolvantes, dont l'auteur s'est servi dans l'étude des perturbations des transformations autoadjointes[1]), peut être appliquée et l'on obtient, notamment pour la perturbation d'une partie isolée du spectre et en particulier pour celle d'un point isolé du spectre de multiplicité "principale" 1, des résultats analogues à ceux obtenus dans le cas des transformations autoadjointes.

1. Invariance de la fermeture.

Soit T une transformation linéaire d'un espace de Banach $\mathfrak{B}$ en un espace de Banach $\mathfrak{B}'$, ayant pour domaine de définition l'ensemble linéaire $\mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{B}$. On l'appelle *fermée*, si les hypothèses

$$f_n \in \mathfrak{D}, \qquad f_n \to f, \qquad Tf_n \to g$$

entraînent que

$$f \in \mathfrak{D}, \qquad Tf = g.$$

[1]) BÉLA SZ.-NAGY, Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, *Commentarii Math. Helvetici*, **19** (1947), p. 347—366; une première rédaction de ce Mémoire, en langue hongroise, a été publiée dans *Matematikai és Természettudományi Értesitő*, **61** (1942).

Toute transformation linéaire T qui est continue et pour laquelle $\mathfrak{D}=\mathfrak{B}$, est fermée. Inversement, d'après un théorème de Banach[2]), toute transformation linéaire fermée T, pour laquelle $\mathfrak{D}=\mathfrak{B}$, est aussi continue. D'autre part, toutes les transformations linéaires continues sont bornées, et inversement.

Les transformations autoadjointes non bornées de l'espace de Hilbert fournissent des exemples des transformations linéaires fermées non bornées. Mais il y a des transformations linéaires qui ne sont pas fermées, et même qui ne peuvent être prolongées de sorte qu'elles deviennent fermées. Pour que la transformation linéaire T admette un prolongement fermé, il faut et il suffit que les hypothèses

(1) $$f_n \in \mathfrak{D}, \qquad f_n \to 0, \qquad Tf_n \to g$$

entraînent que

(2) $$g=0.$$

Lorsque'on fait varier une transformation linéaire fermée "relativement" peu, elle reste fermée: c'est ce qui est affirmé par le

Théorème 1. *Soient T_0 et T deux transformations linéaires de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}'$, ayant le même domaine de définition $\mathfrak{D}\subseteqq\mathfrak{B}$; de plus soit T_0 fermée. Pour que T soit aussi fermée, il suffit de supposer qu'il existe des constantes θ_1 et θ_2 dont $\theta_2<1$, telles qu'on ait*

(3) $$\|(T-T_0)f\| \leqq \theta_1\|f\|+\theta_2\|T_0 f\|$$

pour tout $f\in\mathfrak{D}$.

Démonstration. Il résulte de l'inégalité (3) que

(4) $$\|Tf\| \leqq \|T_0f\|+\|(T-T_0)f\| \leqq \theta_1\|f\|+(1+\theta_2)\|T_0f\|,$$

et que

$$\|Tf\| \geqq \|T_0f\|-\|(T-T_0)f\| \geqq -\theta_1\|f\|+(1-\theta_2)\|T_0f\|,$$

d'où

(5) $$\|T_0f\| \leqq (1-\theta_2)^{-1}[\|Tf\|+\theta_1\|f\|].$$

Afin de démontrer que T est fermée, envisageons une suite quelconque d'éléments $f_n\in\mathfrak{D}$ telle que $f_n\to f$ et $Tf_n\to g$. En vertu de (5), on aura

$$\|T_0(f_n-f_m)\| \leqq (1-\theta_2)^{-1}[\|T(f_n-f_m)\|+\theta_1\|f_n-f_m\|]\to 0$$

pour $m,n\to\infty$, ce qui entraîne que la suite $\{T_0f_n\}$ est aussi convergente. Or T_0 était supposée formée, et par conséquent on a

$$f\in\mathfrak{D}, \qquad T_0f_n\to T_0f.$$

En appliquant l'inégalité (4) il résulte que

$$\|T(f_n-f)\| \leqq \theta_1\|f_n-f\|+(1+\theta_2)\|T_0(f_n-f)\|\to 0$$

---

[2]) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Warszawa, 1932), p. 41.

pour $n \to \infty$, donc $Tf_m \to Tf$, c'est-à-dire que

$$g = Tf,$$

ce qui achève la démonstration.

Tandis que l'inégalité (3) présentait une condition suffisante pour que T soit fermée, l'inégalité (4) dérivée de (3) est une condition nécessaire pour que T soit aussi fermée, où même pour que T admette un prolongement fermé. C'est ce qui est exprimé par le

Théorème 2. *Soient T_0 et T deux transformations linéaires de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}'$, ayant le même domaine de définition $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$; supposons de plus que T_0 est fermée et que T admet un prolongement fermé. Il y a alors des constantes $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ telles qne*

$$\|Tf\| \leqq \alpha\|f\| + \beta\|T_0 f\|$$

pour tout $f \in \mathfrak{D}$.

Démonstration. Introduisons dans $\mathfrak{D}$ la nouvelle norme

$$\mathbf{|} f \mathbf{|} = \|f\| + \|T_0\|; \tag{6}$$

avec cette définition de la norme, $\mathfrak{D}$ devient un espace linéaire normé *complet*, donc un espace de Banach, que nous désignerons par $\boldsymbol{D}$. (Le fait que $\boldsymbol{D}$ est complet, découle immédiatement du fait que T_0 est fermée.)

Montrons que T, considérée comme une transformation linéaire de l'espace $\boldsymbol{D}$ en l'espace $\mathfrak{B}'$, est fermée. Comme T est partout définie dans $\boldsymbol{D}$, il suffit de montrer que T admet, dans $\boldsymbol{D}$, un prolongement linéaire fermé, c'est-à-dire que, en désignant la convergence dans $\boldsymbol{D}$ par $\twoheadrightarrow$, les hypothèses

$$f_n \in \boldsymbol{D}, \qquad f_n \twoheadrightarrow 0, \qquad Tf_n \to g$$

entraînent que

$$g = 0.$$

Or $f_n \twoheadrightarrow 0$ entraîne que $f_n \to 0$, et comme on a supposé que T admet un prolongement fermé dans $\mathfrak{B}$, on a nécessairement $g = 0$.

Donc, dans $\boldsymbol{D}$, T est fermée, et comme elle est partout définie dans $\boldsymbol{D}$, elle est aussi bornée dans $\boldsymbol{D}$, c'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que

$$\|Tf\| \leqq M \mathbf{|} f \mathbf{|}$$

pour tout $f \in \boldsymbol{D}$, ou, ce qui revient au même,

$$\|Tf\| \leqq M(\|f\| + \|T_0 f\|)$$

pour tout $f \in \mathfrak{D}$, ce qu'il fallait démontrer.

Les théorèmes suivants 3 et 4 concernent des perturbations analytiques et sont les analogues des théorèmes 1 et 2.

Théorème 3. *Soient $T_0, T_1, T_2, \ldots$ des transformations linéaires de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}'$, ayant toutes le même domaine $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$; de plus soit T_0 fermée. Supposons* *encore qu'il existe des constantes $a, b, p \geqq 0$ telles que*

(7) $$\|T_k f\| \leqq p^{k-1}(a\|f\| + b\,|T_0 f|) \qquad (k = 1, 2, \ldots)\,[3].$$

Dans ces conditions, la série

$$T_0 f + \varepsilon T_1 f + \varepsilon^2 T_2 f + \cdots + \varepsilon^k T_k f + \cdots$$

converge pour tout $f \in \mathfrak{D}$ et pour $|\varepsilon| < p^{-1}$; en désignant sa somme par $T(\varepsilon)f$, on a défini une transformation linéaire $T(\varepsilon)$ de domaine $\mathfrak{D}$. Pour

$$|\varepsilon| < (p+b)^{-1}$$

cette transformation $T(\varepsilon)$ est fermée.

Démonstration. L'existence de $T(\varepsilon)$ pour $|\varepsilon| < p^{-1}$ et sa linéarité sont manifestes. On a, pour $|\varepsilon| < p^{-1}$ et pour $f \in \mathfrak{D}$,

$$\|(T(\varepsilon) - T_0)f\| \leqq \sum_1^\infty |\varepsilon|^k \|T_k f\| \leqq \sum_1^\infty |\varepsilon|^k p^{k-1}(a\|f\| + b\|T_0 f\|) = \theta_1\|f\| + \theta_2\|T_0 f\|$$

où

$$\theta_1 = \frac{|\varepsilon|a}{1 - |\varepsilon|p}, \qquad \theta_2 = \frac{|\varepsilon|b}{1 - |\varepsilon|p}.$$

Lorsque $|\varepsilon| < (p+b)^{-1}$, on a $\theta_2 < 1$; en appliquant le théorème 1, on conclut à ce que $T(\varepsilon)$ est fermée.

Théorème 4. *Soient $T_0, T_1, T_2, \ldots$ des transformations linéaires de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}'$, ayant le même domaine de définition $\mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{B}$; soit T_0 fermée. Supposons que la série*

$$T_0 f + \varepsilon T_1 f + \varepsilon^2 T_2 f + \cdots$$

converge pour $|\varepsilon| < \varrho$ et pour tout $f \in \mathfrak{D}$, et qu'elle définisse ainsi une transformation linéaire $T(\varepsilon)$; supposons de plus que $T(\varepsilon)$ est fermée ou du moins qu'elle admet un prolongement fermé.

Il y a alors des constantes $a, b, p \geqq 0$ telles que les inégalités (7) sont vérifiées pour tout $f \in \mathfrak{D}$.

Démonstration. Faisons de $\mathfrak{D}$ un espace complet $\boldsymbol{D}$ en introduisant la norme (6). En vertu du théorème 2, $T(\varepsilon)$ est bornée dans $\boldsymbol{D}$; montrons qu'il en est de même de ses coefficients T_k. Cela est vrai pour $T_0 = T(0)$; supposons qu'on l'ait déjà démontré pour tous les $k < n$. Alors, pour tout ε tel que $|\varepsilon| < \varrho$, $\varepsilon \neq 0$, la transformation

$$S_n(\varepsilon) = \varepsilon^{-n}\left[T(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k T_k\right]$$

est aussi bornée dans $\boldsymbol{D}$. En fixant ϱ_1 entre 0 et ϱ, la série

$$\sum_{k=0}^\infty \varrho_1^k T_k f$$

[3]) Lorsque $p = 0$, on pose $p^0 = 1$.

converge pour tout $f \in \mathfrak{D}$, et par conséquent $\varrho_1^k T_k f \to 0$, donc

$$\|\varrho_1^k T_k f\| \leqq M_f \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

M_f étant une constante ne dépendant que de l'élément $f \in \mathfrak{D}$. Il s'ensuit que, pour $|\varepsilon| < \varrho_1$, $\varepsilon \neq 0$ on a

$$\|S_n(\varepsilon)f - T_n f\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon^{k-n} T_k f \right\| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varepsilon|^{k-n} \varrho_1^{-k} M_f = \frac{|\varepsilon| M_f}{\varrho_1^n(\varrho_1 - |\varepsilon|)};$$

par conséquent

$$S_n(\varepsilon)f \to T_n f,$$

lorsque $\varepsilon \to 0$. Or on sait que la limite d'une suite fortement (ou même faiblement) convergente de transformations linéaires bornées est elle-même bornée, donc T_n est aussi bornée.

Ainsi, on a démontré par récurrence que les T_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, considérées comme transformations de $\boldsymbol{D}$ en $\mathfrak{B}'$, sont bornées donc continues. Il en est alors de même quant aux transformations $\varrho_1^k T_k$. Or celles-ci forment une suite convergeant (fortement) vers 0; par conséquent elles sont uniformément bornées:

$$\|\varrho_1^k T_k f\| \leqq M \|f\| \qquad (f \in \boldsymbol{D};\ k = 1, 2, \ldots),$$

la constante M ne dépendant ni de f ni de k. En écrivant ces inégalités sous la forme

$$\|T_k f\| \leqq \varrho_1^{-k} M(\|f\| + \|T_0 f\|) \qquad (f \in \mathfrak{D};\ n = 1, 2, \ldots),$$

on a démontré le théorème avec $a = b = M\varrho_1^{-1}$ et $p = \varrho_1^{-1}$.

2. Rappel de quelques faits concernant le spectre.

Soit T une transformation linéaire fermée de l'espace $\mathfrak{B}$ en lui-même, ayant son domaine $\mathfrak{D}$ partout dense dans $\mathfrak{B}$. Soit $\varrho(T)$ l'ensemble résolvant de T, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs complexes z pour lesquelles la transformation

$$R_z = (T - zI)^{-1}$$

existe, a son domaine dense dans $\mathfrak{B}$, et est bornée; vu que R_z est aussi fermée puisque T et $T - zI$ le sont, son domaine coïncide avec l'espace entier. L'ensemble $\varrho(T)$ est ouvert (et éventuellement vide); son complémentaire $\sigma(T)$, le *spectre* de T, est donc un ensemble fermé.

Supposons que $\sigma(T)$ peut être décomposé en deux parties isolées σ, σ', et cela de sorte qu'on peut tracer une courbe simple fermée rectifiable C, passant dans $\varrho(T)$ et ayant σ dans son intérieur et σ' à son extérieur. L'espace $\mathfrak{B}$ peut alors être décomposé en somme vectorielle de deux sous-espaces disjoints $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, chacun réduisant la transformation T, et tels que les parties de T dans $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ ont pour leur spectre respectivement les ensembles σ et σ'. Cette décomposition est déterminée d'une manière univoque, et la projection (parallèle) de $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{M}$ dans la direction $\mathfrak{M}'$ est fournie par la formule

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int_C R_z\, dz$$

où l'on parcourt C dans le sens positif, l'intégrale étant définie comme la limite (au sens de la convergence en norme des transformations) des sommes du type de Cauchy—Riemann. On a donc $P^2 = P$, $\mathfrak{M} = P\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}' = (I-P)\mathfrak{B}$. Appelons $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ les *sous-espaces spectraux* correspondant respectivement aux parties isolées σ, σ' du spectre. $\mathfrak{M}$ comprend en particulier tous les éléments propres correspondant aux valeurs propres λ intérieures à C, c'est-à-dire les solutions f de l'équation

(8) $$(T-\lambda I)f = 0;$$

d'une manière plus générale, $\mathfrak{M}$ comprend tous les éléments "principaux" f correspondant à λ, c'est-à-dire pour lesquels

(9) $$\lim_{n\to\infty} \|(T-\lambda I)^n f\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Les solutions f de (8) forment le *sous-espace propre* correspondant à la valeur propre λ; appelons sa dimension la *multiplicité propre* de λ. Convenons d'appeler le sous-espace déterminé par les solutions f de (9) le *sous-espace principal* correspondant à λ, et sa dimension la *multiplicité principale* de λ; celle-ci étant en général supérieure à la multiplicité propre. Si λ est un point isolé du spectre, le sous-espace spectral correspondant coïncide avec le sous-espace principal correspondant.

Il résulte de la relation évidente

$$TR_z = [T-zI) + zI]R_z = I + zR_z$$

que

(10) $$TP = -\frac{1}{2\pi i}\int_C TR_z\, dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_C zR_z dz$$

(le fait qu'il est légitime de faire entrer T sous le signe d'intégrale découle de l'hypothèse que T est fermée).

Soit $\mathfrak{B}^*$ le dual de l'espace $\mathfrak{B}$, constitué par les fonctionnelles conjuguées-linéaires f^* de $\mathfrak{B}$; désignons par

$$(f^*, f) \text{ ou par } \overline{(f, f^*)}$$

la valeur que la fonctionnelle f^* fait correspondre à l'élément f de $\mathfrak{B}$. Les éléments $f^* \in \mathfrak{B}^*$ auxquels on peut attacher des éléments $g^* \in \mathfrak{B}^*$ de façon qu'on ait

$$(f^*, Tf) = (g^*, f)$$

pour tout $f \in \mathfrak{D}$, forment le domaine de définition de la transformation "adjointe" T^*: on a par définition $T^* f^* = g^*$. Si T est bornée, T^* est partout définie dans $\mathfrak{B}^*$ et a la même borne que T. Pour tout $z \in \varrho(T)$ on a

$$[(T-zI)^{-1}]^* = (T^*-\bar{z}I)^{-1},$$

$\bar{z}$ désignant la valeur complexe conjuguée à z. Il en resulte que si la courbe C passe dans $\varrho(T)$, son image symétrique par rapport à l'axe réel, $\bar{C}$, passe dans $\varrho(T^*)$ et qu'on a

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{C}}(T^*-\zeta I)^{-1}d\zeta = \left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{C}(T-zI)^{-1}dz\right]^* = P^*;$$

P^* est donc égale à la projection qui correspond à la transformation T^* et à la partie de son spectre qui est à l'intérieur de $\bar{C}$. Si $P \neq O$, on a aussi $P^* \neq O$, donc si le spectre de T n'est pas vide dans l'intérieur de C, le spectre de T^* n'est pas vide non plus dans l'intérieur de $\bar{C}$.

En particulier, si λ est un point isolé de $\sigma(T)$, $\bar{\lambda}$ sera un point isolé de $\sigma(T^*)$. De plus, si λ est de multiplicité principale finie n, il en est de même quant à $\bar{\lambda}$. En effet, en désignant par P la projection sur le sous-espace spectral $\mathfrak{M}$ correspondant à λ (qui est, dans ce cas, le même que le sous-espace principal correspondant à λ), on a

$$Pf = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$$

où $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ est une base de $\mathfrak{M}$ et où les coefficients c_k sont des fonctionnelles linéaires en l'élément variable f: donc il existe des éléments $\varphi_k^* \in \mathfrak{B}^*$ tels que

$$\bar{c}_k = (\varphi_k^*, f);$$

ces éléments sont évidemment aussi linéairement indépendants. Il en résulte que, pour tout $f \in \mathfrak{B}$ et pour tout $f^* \in \mathfrak{B}^*$, on a

$$(f^*, Pf) = \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k (f^*, \varphi^k) = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k^*, f)(f^*, \varphi_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} (f^*, \varphi_k)\varphi_k^*, f\right),$$

donc

$$P^* f^* = \sum_{k=1}^{n} (f^*, \varphi_k)\, \varphi_k^*, \tag{11}$$

c'est-à-dire que le sous-espace spectral (ou principal) $\mathfrak{M}^*$ correspondant à T^* et à la valeur $\bar{\lambda}$, est déterminé par les éléments linéairement indépendants φ_k^*, ce qui prouve que $\mathfrak{M}^*$ est aussi de dimension n.

Si $n=1$, il n'y a qu'un seul φ et un seul φ^*: en posant $f^* = \varphi^*$ dans (11) on voit que

$$(\varphi^*, \varphi) = 1. \tag{12}$$

λ et $\bar{\lambda}$ sont alors des valeurs propres simples de T et T^*; φ et φ^* sont des éléments propres correspondants qu'on peut normer en exigeant, outre (12), que

$$\|\varphi\| = \|\varphi^*\|. \tag{13}$$

Tout ce qui vient d'être dit est plus ou moins connu, ou bien découle d'une manière presque évidente de faits connus.[4])

Voici encore un lemme qui nous sera utile dans ce qui suit:

Lemme. *Soient P et Q des projections parallèles de l'espace $\mathfrak{B}$ sur ses sous-espaces $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$. Si l'on a $\|P-Q\|<1$, les sous-espaces $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ sont de même dimension*[5]).

Démonstration. Grâce à l'hypothèse que $\|P-Q\|<1$, la transformation $I-(P-Q)$ admet une inverse partout définie et bornée; donc $I-P+Q$ applique $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{B}$ tout entier: $(I-P+Q)\,\mathfrak{B}=\mathfrak{B}$. Il s'ensuit que $P(I-P+Q)\mathfrak{B}=P\mathfrak{B}$, donc $PQ\mathfrak{B}=P\mathfrak{B}$, $P\mathfrak{Q}=\mathfrak{P}$. La projection P applique donc le sous-espace $\mathfrak{Q}$ sur le sous-espace $\mathfrak{P}$ tout entier. On a de plus, pour tout $g\in\mathfrak{Q}$,

$$\|P\|\cdot\|g\|\geqq\|Pg\|=\|Qg+(P-Q)g\|=\|g+(P-Q)g\|\geqq$$
$$\geqq\|g\|-\|(P-Q)g\|\geqq(1-\|P-Q\|)\,\|g\|,$$

donc, pour deux éléments quelconques $g_1, g_2\in\mathfrak{Q}$:

$$\|P\|\geqq\frac{\|Pg_2-Pg_1\|}{\|g_2-g_1\|}\geqq 1-\|P-Q\|;$$

d'où il s'ensuit que P applique $\mathfrak{Q}$ sur $\mathfrak{P}$ d'une manière linéaire, biunivoque et bicontinue. Cela prouve que $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ sont de même dimension.

3. Perturbations du spectre.

Soit T_0 une transformation linéaire fermée de l'espace $\mathfrak{B}$ en lui-même, ayant son domaine $\mathfrak{D}$ dense dans $\mathfrak{B}$. Supposons que son spectre $\sigma(T_0)$ se décompose en deux parties isolées complémentaires, σ_0 et σ_0', et cela de sorte qu'il y ait une courbe fermée rectifiable C, passant dans l'ensemble résolvant $\varrho(T_0)$, et ayant σ_0 dans son intérieur et σ_0' à son extérieur.

Comme

$$R_z=(T_0-zI)^{-1}$$

est une fonction analytique régulière de z dans $\varrho(T_0)$, $\|R_z\|$ est une fonction continue, donc, *si z parcourt C, on a*

$$(14)\qquad M=\max\|R_z\|<\infty,\qquad N=\max\|T_0R_z\|=\max\|I+zR_z\|<\infty.$$

[4]) Nous citons F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913), p. 113–121, et parmi les contributions récentes, N. Dunford, Spectral theory. I. Convergence to projections, *Transactions American Math. Society*, 54 (1943), p. 185–217, et A. E. Taylor, Spectral theory of closed distributive operations, *Acta Math.*, 84 (1951), p. 189–224.

[5]) Pour l'espace hilbertien, ce lemme était démontré l. c. [1]).

Si l'espace est hilbertien et si la transformation T_0 est normale, on a

$$M=\max\left|\frac{1}{\lambda-z}\right|,\qquad N=\max\left|1+\frac{z}{\lambda-z}\right|$$

où z et λ parcourent respectivement la courbe C et le spectre de T_0, donc M est la réciproque de la distance d de C à $\sigma(T_0)$. Dans le cas général, on peut affirmer seulement que $M\geqq\frac{1}{d}$, ce qui découle immédiatement du fait connu que, avec un point z, tous les points ζ tels que $|\zeta-z|<\|R_\zeta\|^{-1}$ appartiennent à $\varrho(T_0)$.

Cela étant, envisageons la transformation "perturbée"

$$T(\varepsilon)=T_0+\varepsilon T_1+\varepsilon^2 T_2+\dots$$

où ε est un paramètre réel ou complexe; les coefficients T_k sont des transformations de $\mathfrak{B}$, ayant le même domaine $\mathfrak{D}$, et satisfaisant aux inégalités

$$\|T_k f\|\leqq p^{k-1}(a\|f\|+b\|T_0 f\|)\qquad (k=1,2,\dots). \tag{15}$$

D'après le théorème 3, $T(\varepsilon)$ est, du moins si $|\varepsilon|<(p+b)^{-1}$, fermée et de domaine $\mathfrak{D}$. Vu que R_z prend ses valeurs dans $\mathfrak{D}$, les transformations $T_k R_z$ sont partout définies dans $\mathfrak{B}$; grâce à (15) on a, pour tout $g\in\mathfrak{B}$,

$$\|T_k R_z g\|\leqq p^{k-1}(a\|R_z g\|+b\|T_0 R_z g\|)\qquad (k=1,2,\dots).$$

Il résulte de (14) que, pour z situé sur C,

$$\|T_k R_z\|\leqq p^{k-1}\alpha\qquad (k=1,2,\dots)$$

où

$$\alpha=aM+bN. \tag{16}$$

On voit tout comme dans le Mémoire cité[1]) que, pour $|\varepsilon|<(p+\alpha)^{-1}$, l'ensemble résolvant de $T(\varepsilon)$ comprend tous les points z de C, et qu'on a

$$R_z(\varepsilon)=[T(\varepsilon)-zI]^{-1}=R_z\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k T_k R_z\right]^\nu=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n R_{z,n}$$

où $R_{z,0}=R_z$ et

$$\|R_{z,n}\|\leqq M\alpha(p+\alpha)^{k-1}\qquad (k=1,2,\dots). \tag{17}$$

En désignant par $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ et $\mathfrak{M}'(\varepsilon)$ les sous-espaces spectraux correspondant respectivement aux parties de $\sigma\big(T(\varepsilon)\big)$ situées dans l'intérieur et à l'extérieur de C, la projection spectrale correspondante $P(\varepsilon)$ s'exprimera par

$$P(\varepsilon)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C R_z(\varepsilon)\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n P_n \tag{18}$$

où

$$P_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_C R_{z,n}\,dz.$$

En désignant par λ_0 une valeur complexe fixée quelconque, on a de plus (cf. (10)):

$$[T(\varepsilon)-\lambda_0 I]\,P(\varepsilon)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C (z-\lambda_0)\,R_z(\varepsilon)\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n B_n \tag{19}$$

où

$$B_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_C (z-\lambda_0)\,R_{z,n}\,dz \qquad (n=1,2\ldots).$$

De (17) il découle que

$$\|P_n\|\leqq\frac{|C|}{2\pi}M\alpha(p+\alpha)^{n-1},\quad \|B_n\|\leqq\frac{|C|}{2\pi}\Delta M\alpha(p+\alpha)^{n-1}\quad(n=1,2,\ldots) \tag{20}$$

où $|C|$ et Δ désignent respectivement la longueur d'arc de C et la distance maximum de λ_0 aux points de C.

Dès que

$$|\varepsilon|<\left(p+\alpha+\frac{|C|}{2\pi}M\alpha\right)^{-1},$$

on aura

$$\|P(\varepsilon)-P_0\|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}|\varepsilon|^n\|P_n\|\leqq\frac{|C|}{2\pi}M\alpha\frac{|\varepsilon|}{1-|\varepsilon|(p+\alpha)}<1,$$

ce qui entraîne, d'après le lemme démontré plus haut, que *les sous-espaces $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ et $\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}(0)$ sont de même dimension.*

Envisageons en particulier la perturbation d'un *point isolé* λ_0 du spectre de T_0. Si la distance de λ_0 au reste de $\sigma(T_0)$ est égale à d, on prendra pour C par exemple le cercle de centre λ_0 et de rayon $r=\frac{d}{2}$; on aura alors $\frac{|C|}{2\pi}=\Delta=r$. Quant aux valeurs M et N, on aura en tout cas

$$N=\max_{z\in C}\|I+(z-\lambda_0)R_z+\lambda_0 R_z\|\leqq 1+(r+|\lambda_0|)M,$$

$$M\geqq\frac{1}{r}; \tag{21}$$

dans (21) il y a égalité par exemple si l'espace est hilbertien et si la transformation T_0 est normale.

Si la multiplicité principale de λ_0 comme point de $\sigma(T_0)$ est *finie*, soit égale à m, c'est-à-dire si le sous-espace $\mathfrak{M}_0$ est de dimension m, il en sera de même du sous-espace $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ pour

$$|\varepsilon|<(p+\alpha+rM\alpha)^{-1},$$

et par conséquent il n'y aura qu'un nombre fini de points de $\sigma(T(\varepsilon))$ dans l'intérieur du cercle C, la somme des multiplicités principales de ces points étant égale à m.[6])

Le cas le plus simple se présente si $m=1$. Il n'y aura alors qu'un *seul* point de $\sigma(T(\varepsilon))$ dans l'intérieur de C, soit $\lambda(\varepsilon)$, et lui aussi de multiplicité principale 1. Les valeurs conjuguées $\bar{\lambda}_0$, $\overline{\lambda(\varepsilon)}$ sont alors également de multiplicité principale 1 par rapport aux transformations adjointes T_0^*, $T^*(\varepsilon)$. Soient φ_0 un élément propre de T_0 correspondant à λ_0 et φ_0^* un élément propre de T_0^* correspondant à $\bar{\lambda}_0$; on peut les choisir de sorte que

$$(\varphi_0^*, \varphi_0)=1, \qquad \|\varphi_0\|=\|\varphi_0^*\|;$$

alors

$$\omega_0=\|\varphi_0^*\|\,\|\varphi_0\|\geqq|(\varphi_0^*,\varphi_0)|=1. \text{ [7]} \tag{22}$$

Posons

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{P(\varepsilon)\varphi_0}{(P(\varepsilon)\varphi_0,\varphi_0^*)^{1/2}}, \quad \varphi^*(\varepsilon)=\frac{P^*(\varepsilon)\varphi_0^*}{(\varphi_0^*,P(\varepsilon)\varphi_0)^{1/2}},$$

la racine carrée étant choisie de sorte qu'elle soit une fonction analytique de ε se réduisant à 1 pour $\varepsilon=0$. $\varphi(\varepsilon)$ et $\varphi^*(\varepsilon)$ sont des éléments propres correspondant respectivement à $T(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)$ et à $T^*(\varepsilon), \overline{\lambda(\varepsilon)}$; on a de plus

$$(\varphi(\varepsilon),\varphi^*(\varepsilon))=\frac{(P(\varepsilon)\varphi_0,P^*(\varepsilon)\varphi_0^*)}{(P(\varepsilon)\varphi_0,\varphi_0^*)}=\frac{(P^2(\varepsilon)\varphi_0,\varphi_0^*)}{(P(\varepsilon)\varphi_0,\varphi_0^*)}=1. \text{ [8]}$$

D'autre part, on a

$$T(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)=\lambda(\varepsilon)\varphi(\varepsilon),$$

d'où

$$\lambda(\varepsilon)-\lambda_0=\frac{([T(\varepsilon)-\lambda_0 I]\varphi(\varepsilon),\varphi_0^*)}{(\varphi(\varepsilon),\varphi_0^*)}.$$

En faisant usage da (18) et de (19) et en observant que $B_0=(T_0-\lambda_0 I)P_0= =O$, on obtient les développements, d'abord formels,

$$\varphi(\varepsilon)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(P_k\varphi_0,\varphi_0^*)\right]^{\nu}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l P_l\varphi_0, \tag{23}$$

$$\lambda(\varepsilon)-\lambda_0=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(P_k\varphi_0,\varphi_0^*)\right]^{\nu}\cdot\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l(B_l\varphi_0,\varphi_0^*). \tag{24}$$

Vu que $\|P_0\varphi_0\|=\|\varphi_0\|=\omega\leqq\omega rM$, et que pour $n=1,2,\ldots$:

$$\|P_n\varphi_0\|\leqq rM\alpha(p+\alpha)^{n-1}\omega, \qquad \|B_n\varphi_0\|\leqq r^2M\alpha(p+\alpha)^{n-1}\omega$$

---

[6]) Comme il s'agit d'une transformation de l'espace $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ de dimension finie m, on n'a qu'à renvoyer à des faits bien connus de l'algèbre linéaire.

[7]) Si l'espace est hilbertien et si la transformation T_0 est normale, on a $\varphi_0=\varphi_0^*$, et alors $\omega^2=1$.

[8]) De plus on a

$$(\varphi(\varepsilon),\varphi_0^*)=(P(\varepsilon)\varphi_0,\varphi_0^*)^{1/2}=(\varphi_0,\varphi^*(\varepsilon)).$$

en vertu de (20), les coefficients des développements (23) et (24) sont majorés par les coefficients respectifs des développements

$$\frac{\omega r M(1-\varepsilon p)}{[1-\varepsilon(p+\alpha)]^{1/2}\,[1-\varepsilon(p+\alpha+\omega^2 r M\alpha)]^{1/2}}=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}\right|\left[\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\omega^2 r M\alpha(p+\alpha)^{k-1}\right]^{\nu}.\,\omega r M\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\alpha(p+\alpha)^{l-1}\right)$$

et

$$\frac{\varepsilon\omega^2 r^2 M\alpha}{1-\varepsilon(p+\alpha+\omega^2 r M\alpha)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\omega^2 r M\alpha(p+\alpha)^{k-1}\right]^{\nu}.\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\omega^2 r^2 M\alpha(p+\alpha)^{l-1}.$$

Ces développements-ci étant valables et absolument convergents pour

$$|\varepsilon|<(p+\alpha+\omega^2 r M\alpha)^{-1}.$$

il s'ensuit que pour ces valeurs de ε, les développements (23) et (24) sont valables eux aussi et qu'on les peut réarranger suivant les puissances de ε:

$$\varphi(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\varphi_n,\quad \lambda(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\lambda_n.$$

En comparant les coefficients de ces séries aux coefficients des séries entières des fonctions majorantes, on voit que, pour $n\geqq 1$,

$$\|\varphi_n\|\leqq\omega r M(p+\alpha+\omega^2 r M\alpha)^n$$

et

$$|\lambda_n|\leqq\omega^2 r^2 M\alpha(p+\alpha+\omega^2 r M\alpha)^{n-1}.$$

Puisque $\|P_n^*\|=\|P_n\|$, on a un développement analogue pour $\varphi^*(\varepsilon)$:

$$\varphi^*(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\varepsilon}^n\varphi_n^*,$$

dont les coefficients φ_n^* vérifient les mêmes inégalités que nous venons d'obtenir pour les φ_n.

Résumons: *Si λ_0 est un point isolé du spectre de T_0, de multiplicité principale* 1, *la transformation perturbée $T(\varepsilon)$ aura, pour $|\varepsilon|$ assez petit, un seul point du spectre dans le voisinage de λ_0, et ce point $\lambda(\varepsilon)$ sera aussi de multiplicité principale* 1. *$\lambda(\varepsilon)$ et les éléments propres correspondants $\varphi(\varepsilon)$ de $T(\varepsilon)$ et $\varphi^*(\varepsilon)$ de $T^*(\varepsilon)$, normés par la condition $(\varphi^*(\varepsilon), \varphi(\varepsilon))$, peuvent être développés en séries entières de ε (respectivement de $\bar{\varepsilon}$). Pour ces séries, on a obtenu des évaluations de leur rayon de convergence et de l'ordre de grandeur de leurs coefficients.*

Ce résultat n'est plus valable en général si la multiplicité principale de λ_0 est supérieure à 1. Voici trois exemples simples où il s'agit de transformations linéaires de l'espace euclidien complexe à deux dimensions, transformations que nous représentons par leurs matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix}0&1\\ \varepsilon&0\end{pmatrix},\qquad b)\ \begin{pmatrix}0&\varepsilon^2\\ \varepsilon&0\end{pmatrix},\qquad c)\ \begin{pmatrix}0&\varepsilon\\ 0&0\end{pmatrix}.$$

Dans tous ces exemples, le spectre de la transformation non perturbée ($\varepsilon = 0$) est constitué du seul point $\lambda = 0$ et celui-ci est de multiplicité principale 2; sa multiplicité propre est égale à 1 dans l'exemple *a*), et à 2 dans les exemples *b*) et *c*). Le spectre de la transformation perturbée ($\varepsilon \neq 0$) est constitué, dans l'exemple *a*), des points $\lambda = \pm \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, et dans l'exemple *b*), des points $\lambda = \pm \varepsilon^{\frac{3}{2}}$; aucun d'eux n'est une fonction analytique régulière de ε au point $\varepsilon = 0$. Dans l'exemple *c*), le spectre de la transformation perturbée est constitué du seul point $\lambda = 0$, mais celui-ci sera de multiplicité propre 1.

Remarquons, pour terminer, et sans entrer dans les détails, qu'il est possible de calculer les coefficients des séries $\lambda(\varepsilon)$, $\varphi(\varepsilon)$, $\varphi^*(\varepsilon)$, de proche en proche, par une méthode analogue à celle employée dans le cas des transformations autoadjointes.

(Reçu le 1 juillet 1951)

Bibliographie.

E. Zwinggi, Versicherungsmathematik (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften), 199 Seiten, Birkhäuser, Basel, 1945.

Dieses Lehrbuch der Versicherungsmathematik ist aus Verlesungen entstanden, die Vertasser an der Universität Basel gehalten hat. Zweck und Gebrauch des Buches erhellen aus den folgenden Worten des Verfassers: „der Studierende erfährt, welche Teile der Versicherungsmathematik für die spätere praktische Anwendung von unmittelbarer Bedeutung sind, und der Praktiker kann sehen, aus welchen Voraussetzungen heraus die Verfahren fließen, die er laufend gebraucht." Dieser Zweck wird durch die klare Darstellung erreicht. Numerische Beispiele und Tabellen werden, trotz der die Praxis berücksichtigenden Darstellung nicht behandelt.

Der erste Teil, welcher sich mit den Rechnungsgrundlagen befaßt, behandelt auch die Ausscheideordnung. Man geht von der Loewyschen Theorie aus; diese ist nicht nur für Mortalitäts- und Invalidentabellen, sondern auch für die Krankenversicherung geeignet. Im zweiten Teil wird das Aequivalenzprinzip und der Begriff des Deckungskapitals dargestellt. Der dritte und umfangreichste Teil befaßt sich mit der Versicherung auf ein Leben mit individueller Prämie. Nach Fragen, die sich auf Sterbetafeln beziehen, beschäftigt man sich mit Kentnissen über die Prämien und über das Deckungskapital der wichtigsten Versicherungsformen; Gewinnermittlung und Gewinnverteilung werden hier auch gestreift. Die folgenden Teile behandeln die Versicherungen auf ein Leben mit Durchschnittsbeiträgen, Versicherungen auf mehrere Leben, sowie die Variation der Rechnungsgrundlagen, die analytischen und die mechanischen Ausgleichungsverfahren. Am Ende ist ein ausführliches Literaturverzeichnis zusammengestellt.

St. Vincze.

Eduard Stiefel, Lehrbuch der darstellenden Geometrie (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Band VI), 173 Seiten, Basel, Verlag Birkhäuser, 1947.

Das vorliegende Buch besteht aus vier Teilen: Elementare darstellende Geometrie; Reziprozität, Kurven und Flächen zweiter Ordnung; Projektive darstellende Geometrie; sphärische darstellende Geometric; Konforme Abbildungen. Ein Anhang enthält topologische Gesichtspunkte. Der erste Teil bringt das Mongesche Projektionsverfahren in zugeordneten Normalrißen, die orthogonale Axonometrie, die konstruktive Behandlung gekrümmter Flächen, sowie die kotierte Projektion. Da Verf. nur die prinzipiellen Grundlagen darstellt, ist dieser Teil im Vergleich zu anderen Darstellungen wesentlich kürzer, was eine bedeutende Übersichtlichkeit in der Darstellung zur Folge hat. Zu diesem Teil sei bloß erwähnt, daß Verf. bei der Behandlung gekrümmter Flächen differenzialgeometrischen Schwierigkeiten dadurch aus dem Wege geht, daß er sich auf Rotations-, Schraub-, und Regelflächen beschränkt. Daß Verf. im zweiten Teil bei der Behandlung der Gebilde zweiter Ordnung, abweichend von den meisten Darstellungen, nicht die Affinitäten und Kollineationen benutzt, sondern von der ebenen Reziprozität ausgeht, hat bedeutende Vereinfachungen und Eleganz in der Darstellung zur Folge, die wohl jeder

Leser des Buches begrüßen wird. Der dritte Teil verdient vielleicht die meiste Beachtung. Im Mittelpunkt steht hier die Perspektive eines Gegenstandes. Sie ist keine Zentralprojektion, sondern folgendermaßen erklärbar. Verbindet man mit dem abzubildenden räumlichen Gegenstand ein kartesiches Achsenkreuz x, y, z mit dem Anfangspunkt O, so werden die Ebenen Oxy, Oxz und Oyz projektiv auf ein und dieselbe Ebene (Bildebene) so abgebildet, daß dabei die (die projektive Abbildung der einzelnen Ebenen festlegenden) Abbidungen der Einheits- und Fernpunkte der entsprechenden Achsen wieder ein Achsenkreuz auf der Bildebene ergeben. Dadurch läßt sich zu jedem räumlichen Punkt der Bildpunkt finden. Die Abbildung ist ferner geradentreu. Als Hauptsatz folgt dann, daß jede Perspektive eines Gegenstandes durch projektive Abbildung aus der Zentralprojektion des Gegenstandes gewonnen werden kann. Aus diesem Satze folgen durch Spezialisierung des Achsenkreuzes die verschiedenen bekannten axonometrischen Darstellungen. Auf Grund dieses Satzes ist ferner der Pohlkesche Satz entbehrlich. In diesem Teil findet sich eine klare Darstellung der auch in der Anwendung wichtigen Photogrammetrie. Im vierten Teil werden stereographische und konforme Abbildungen der Kugeloberfläche erörtert. Der Anhang weist darauf hin, wie die topologischen Abbildungen in der Darstellenden Geometrie verwertet werden können. Die Perspektive eines Gegenstandes wird zu einer als stetige Perspektive bezeichneten Abbildung erweitert. Es ergibt sich dabei folgender Zusammenhang mit der Gewebegeometrie: Ein Achsenkreuz und seine Koordinatenlinien ergeben dann eine stetige Perspektive, wenn die drei Bildenkurvenscharen der Koordinatenlinien ein Sechseckgewebe bilden. Der Hauptsatz der Perspektive überträgt sich nun in der Form, daß jede stetige Perspektive eines Gegenstandes aus einer Parallelprojektion desselben durch topologische Verzerrung entsteht.

Das Buch wird nicht nur dem Studierenden eine verläßliche Einführung bilden, sondern es wird auch von Kennern des Gegenstandes mit Genuß gelesen.

O. Varga (Debrecen).

Otto Haupt, Differential- und Integralrechnung. Unter Mitarbeit von **Georg Aumann.** Zweite, völlig neubearbeitete Auflage unter Mitwirkung von **Christian Pauc,** Bd. II.: **Differentialrechnung** (Göschens Lehrbücherei, Bd. 25), 209 S., Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1950.

Auch dieser zweite Band wurde fast völlig neugeschrieben. Folgende Unterschiede gegenüber der ersten Auflage scheinen wesentlicher zu sein: Ein elementarer Beweis von W. Buckel für die Transzendenz der Exponentialfunktion wurde eingeschaltet. Die Theorie der linearen Abhängigkeit von Funktionen einer Veränderlichen wurde wesentlich ergänzt. Die klassischen Kriterien für Maxima und Minima wurden aufgenommen. Die Approximationsgüte des Taylorschen Polynoms einer Funktion und einer Menge von gleichgradig differenzierbaren Funktionen wird untersucht. Aufgenommen wurde auch der Satz von Rothe über den Grenzwert des ϑ im Lagrangeschen Restglied der Taylorformel[1]). Die Lehre der gliedweisen Differentiation von Funktionenfolgen wird auf einen Satz von M. Müller gegründet, und die Theorie der Asymptoten auf einen Hilfssatz von F. Lettenmeyer. Die Kapiteln über Interpolation, freie und gebundene Ableitungen, Differenzenquotienten höherer Ordnung wurden in mehreren Hinsichten ergänzt. Der verallgemeinerte Eindeutigkeitssatz der Differentialrechnung wird in seiner von C. Carathéodory stammenden Form bewiesen. Aus dem ersten Bande wurde das Kapitel über Limeswertmengen übernommen. Die Differenzierbar-

[1]) Es ist allerdings zu bemerken, daß die Chr. Pauc zugeschriebene Anmerkung über die Überflüßigkeit der Stetigkeit der betreffenden Ableitung in der Voraussetzung dieses Satzes schon in einer Arbeit von P. Szász [*Math. Zeitschrift,* **25** (1926), S. 117 ff.] enthalten ist.

keit monotoner Funktionen wir jetzt aus den Denjoyschen Sätzen gewonnen, die ihrerseits aus den Sätzen über das Kontingent von Punktmengen gefolgert werden. Obwohl der äußerst elegante Rieszsche Beweis nicht verallgemeinerungsfähig und deshalb weniger lehrreich ist, weist die vorliegende Behandlungsweise eine andere didaktische Schwierigkeit auf. Sie beruht nämlich ganz wesentlich auf dem tief liegenden Dichtesatz, der erst im dritten Bande bewiesen wird; die im Anhang angefügte kurze Zusammenfassung der Lebesgueschen Maßtheorie ist schwerlich fähig diese Lücke auszufüllen. — Die Lehre der Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlichen wurde durch Aufnahme von Ergebnissen von W. Wilkosz und A. Ostrowski erweitert, letztere gestatten eine neue Formulierung des Satzes über die Vertauschbarkeit der partiellen Differentiationen. Es wird dann der Zusammammenhang von freier, stetiger und gleichmäßiger Differenzierbarkeit untersucht. Nach einem kurzen Hinweis auf Ergebnisse von W. Buckel über Differenzenquotienten höherer Ordnung von Funktionen mehrerer Veränderlichen folgt eine wesentlich erweiterte Theorie der differenzierbaren Abbildungen.

Ákos Császár.

Raymond Louis Wilder, Topology of Manifolds (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXXII), IX+402 pages, New York, American Mathematical Society, 1949.

On appelle invariant positionnel d'un espace Y dans un espace X, tel que $X \supset Y$, chaque propriété du couple (X, Y) qui est conservée, si l'on remplace Y par un autre sous-espace Y' de X, qui est homéomorphe à Y. Par exemple, c'est un fait banal que le cercle décompose le plan en deux domaines; mais que cette propriété du cercle soit un invariant positionnel dans le plan, c'est précisément le contenu du théorème de Jordan. Une sorte de réciproque de ce theorème fut démontrée par Schoenflies: Un ensemble plan C est une courbe de Jordan, si son complémentaire est la réunion de deux domaines, et si chaque point de C est accessible de chacun de ces domaines.

Ce livre est consacré à une étude approfondie des invariants positionnels, et notamment à une généralisation à plusieurs dimensions des travaux de Schoenflies et de ses successeurs.

Le théorème de Jordan fut généralisé à l'espace euclidien à n dimensions, R^n, grâce à la théorie d'homologie (dualité d'Alexander). Dans le cadre de cette théorie on démontre le théorème de Jordan—Brouwer: Une variété compacte à $n-1$ dimensions, plongée dans R^n, le décompose en deux domaines. Au contraire, le théorème de Schoenflies que nous avons énoncé ci-dessus, ne peut être généralisé de la même façon, c'est-à-dire en remplaçant le cercle par une variété compacte, car cela demanderait une caractérisation homologique ou homotopique des variétés, problème qui paraît être inabordable aujourd'hui. Nous devons à M. Wilder d'avoir posé correctement la question: Quels sont les invariants positionnels d'une variété généralisée plongée dans une variété généralisée? Les variétés généralisées (en abrégé: vg) sont définies par les propriétés homologiques suivantes: Une vg V est un espace localement compact tel que 1⁰ dim $V=n<+\infty$, 2⁰ V est localement connexe en dimension $0, \ldots, n-1$, 3⁰ le $(n-1)$-ième nombre de Betti local est 1 en tout point de V. (Remarquons que pour $n \leqq 2$ chaque vg est une variété; pour $n \geqq 3$ cela n'est plus le cas.) Pour les vg M. Wilder établit une théorie aussi complète et symétrique que celle de Schoenflies concernant les espaces de dimension $\leqq 2$.

Les chapitres I—IV traitent des notions fondamentales pour les chapitres ultérieurs; en outre l'auteur expose plusieurs théorèmes concernant le caractère topologique du cercle, du segment et des variétés à deux dimensions. Les propriétés fondamentales de la sphère à n dimensions sont établies; l'auteur introduit ici l'homologie mod 2, et le lecteur peut se familiariser avec les méthodes algébriques de la topologie. Le chapitre V développe l'homologie et la cohomologie de Čech; le groupe des coefficients est toujours un corps. Cette thèorie est appliquée aux problèmes locaux dans le chapitre suivant, et elle est utilisée dans la théorie des continus au chapitre VII. Les vg sont définies au chapitre VIII; la théorie de la dualité de Poincaré et d'Alexander—Pontrjagin est développée pour ces espaces. Certains types particuliers de vg sont étudiés dans le chapitre suivant, enfin, dans le chapitre X, la théorie des invariants positionnels est abordée. Un grand nombre de résultats figurant dans les chapitres X—XIII sont dûs à l'auteur et n'ont pas été publiés auparavant. Le livre se termine par un chapitre sur des problèmes non résolus. Divers lexiques ajoutés à la fin facilitent le travail du lecteur.

Comme nous le voyons, les derniers chapitres du livre s'adressent aus spécialistes. Mais la majeure partie est consacrée au développement des notions fondamentales; ces parties sont exposées d'un point de vue didactique.

I. Fáry.

J. L. Walsh, The location of critical points of analytic and harmonic functions (American Mathematical Society Colloquium Publications, vol 34), VIII + 384 pages, New York, American Mathematical Society, 1950.

Das vorliegende Werk faßt die Ergebnisse über die Lage der kritischen Punkte der analytischen und harmonischen Funktionen zusammen. Die kritischen Punkte einer analytischen Funktion sind die Nullstellen ihrer Derivierten. Die kritischen Punkte einer harmonischen Funktion der reellen Veränderlichen x und y sind die Punkte der Ebene, wo ihre beiden ersten partiellen Differentialquotienten verschwinden.

Das Hauptproblem dieses Werkes ist Bereiche zu bestimmen, die sämtliche kritische Punkte, oder mindestens einen kritischen Punkt, oder aber keinen kritischen Punkt enlhalten. Die angeführten Ergebnisse stammen meistens aus den eigenen Untersuchungen des Verfassers, und wurden bisher in keinem Lehrbuch dargestellt.

Das Buch enthält neun Kapitel. Die ersten fünf Kapitel fassen die wichtigsten Ergebnisse über die kritischen Punkte der ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen zusammen. Diese Kapitel haben natürlich viel gemeinsam mit dem unlängst erschienenen schönen Werk von M. Marden, *The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable* (Math. Surveys, 1949). Im Werk von Walsh handelt es sich besonders eingehend um die kritischen Punkte der rationalen Funktionen mit einer Symmetrie der Lage ihrer Nullstellen und Pole in bezug auf einen Punkt, auf eine Gerade, oder auf einen Kreis. Hier befindet sich u. a. die interessante Ersetzung des Jensenschen Kreises bei Polynomen mit einem einzigen Jensenschen Kreis durch eine Kreislinse. Über die kritischen Punkte der Extremalpolynome wird aber nicht gesprochen.

Im siebenten Kapitel werden die Sätze über die kritischen Punkte der rationalen Funktionen auf analytische Funktionen verallgemeinert. So wird bewiesen, daß die Sätze von Gauss—Lucas, von Jensen und von Walsh über Polynome gelten auch für ganze Funktionen vom Geschlecht Null. Der Satz von Bôcher über rationale Funktionen wird auf den Quotienten von zwei ganzen Funktionen vom Geschlecht Null übetragen. Es handelt sich besonders um die kritischen Punkte der einfach und doppelt periodischen Funktionen.

Die letzten Kapitel wenden die früheren Methoden und Ergebnissse für die Untersuchung der kritischen Punkte der Greenschen bzw. harmonischen Funktionen an. Dabei zeigen die Greenschen Funktionen zu den Polynomen, die allgemeinen harmonischen Funktionen zu den gebrochenen rationalen Funktionen, analoge Eigenschaften bezüglich der Lage ihrer kritischen Punkte.

Gy. Sz.-N.

Ludwig Schläfli, Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Band I, 392 Seiten. Herausgegeben vom Steiner-Schläfli-Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Basel, Verlag Birkhäuser, 1950.

Als das Hauptwerk des schweizerischen Mathematikers L. Schläfli (1814—1895) kann seine große Jugendarbeit „Theorie der vielfachen Kontinuität“ angesehen werden, die neben einer strengen Begründung der n-dimensionalen Geometrie u. a. die Entdeckung der n-dimensionalen regulären Polytope enthält. Diese Arbeit entstand vor 1853, zu einer Zeit, wo (wie Herr H. S. M. Coxeter an einer Stelle bemerkt) außer Cayley, Grassmann und Möbius vielleicht noch niemand an die Möglichkeit einer mehrdimensionalen Geometrie dachte. Im Leben von Schläfli sind nur ein französischer und ein englischer Auszug dieser Arbeit erschienen, die kein Interesse erweckt haben. Die regulären Polytope wurden in den letzten zwei Jahrzehnten des XIX. Jahrhunderts unabhängig voneinander von mehreren Geometern neu entdeckt. Schläflis Arbeit wurde erst sechs Jahre nach seinem Tode durch die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft herausgegeben und erst nach dieser Zeit wurde Schläfli als der eigentliche Begründer der mehrdimensionalen Geometrie und der Theorie der regulären Polytope allgemein anerkannt.

Schläflis Interesse beschränkte sich aber von weitem nicht auf die mehrdimensionale Geometrie. Vielmehr kann er als einer der vielseitigsten Mathematikern des XIX. Jahrhunderts angesehen werden, der verschiedene Zweige der Algebra, der Analysis und der Geometrie mit wichtigen Ergebnissen bereicherte.

Die vollständige Ausgabe seiner gesammelten Abhandlungen wird in großem Maß dazu beitragen, ein richtiges Bild von Schläflis mathematischen Ergebnissen zu erschaffen. Diese Ausgabe hat aber viel mehr Wert als einen bloß historischen. Denn Schläflis meisterhaft gefaßte, leicht verständliche und durchweg fesselnde Abhandlungen strömen eine Frische aus sich, die diesen klassischen Werken auch heute noch eine Aktualität verleihen. So kann z. B. die Theorie der vielfachen Kontinuität als eine durchaus moderne Behandlung der mehrdimensionalen Geometrie betrachtet werden, von der noch heute eine Fülle von Anregungen zu gewinnen ist.

Die Abhandlungen folgen in chronologischer Reihenfolge. Das vorliegende erste Band enthält neben kleineren Arbeiten die Theorie der vielfachen Kontinuität, die mit etwa 230 Seiten mehr als die Hälfte des Bandes umfaßt. Die meisten Abhandlungen sind mit Bemerkungen von L. Kollros, J. J. Burckhardt und Hadwiger versehen, die u. a. Hinweise auf die neueste Literatur enthalten.

L. Fejes Tóth (Veszprém).

Gustav Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation. Band I. **Theorie der Laplace-Transformation** (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. 14), 581 Seiten, Basel, Birkhäuser, 1950.

Seit dem Erscheinen der im 10. Bande dieser *Acta* besprochenen „Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation“ des Verf. ist die Erforschung dieser wichtigen Funktionen-Umwandlung bedeutend vertieft, ihre Anwendung an Stelle der Operatorenrechnung bei der Lösung von Funktionen-Gleichungen, insbesondere von Anfangs- und Randwertproblemen beträchtlich entwickelt worden, so daß sie bereits Eingang in Vorlesungen an technischen Hochschulen gefunden hat. Während D. V. Widders zehn Jahre jüngere Monographie, welche die umfassendere Stieltjessche Variante behandelt, von rein theoretischem Interesse ist, beabsichtig der Verf. seine genannte Monographie zu einem Handbuch zu erweitern und legt im vorligenden ersten Bande die Theorie der ursprünglichen Transformation vor.

Die Einteilung des Gegenstandes (allgemeine und funktionentheoretische Eigenschaften der Transformation, Umkehrformeln, Darstellbarkeitsbedingungen, asymptotisches

Verhalten der transformierten bzw. zu transformierenden Funktionen) ist im allgemeinen beibehalten bzw durch einige Umstellungen verbessert worden. So werden z. B. die in den Anwendungen wichtigen Abbildungen von Operationen bereits im zweiten, die im Unendlichen regulären Transformierten erst im zehnten Kapitel behandelt. Erwähnenswerter sind aber die bedeutenden Erweiterungen von früher behandelten Gegenständen und eine Einflechtung neuer, teilweise unveröffentlichte Ergebnisse behandelnden Abschnitte. Unter den ersten sollen hier nur die Vertiefung des benützten Integralbegriffes, die stärkere Berücksichtigung der zweiseitigen Transformation, die funktionentheoretische Auswertung des komplexen Umkehrintegrals, die Parsevalsche Gleichnung und die Transformation der L^2-Funktionen erwähnt werden. Die neuen Ergebnisse werden durch die Darstellung der „unvollständigen" Transformierten durch ein komplexes Integral über die vollständige; das somit zungängliche Konvergenzproblem; die damit zusammenhängende Summation durch arithmetische Mittel, sowie die Mehrzahl der Sätze Abelscher Art für das komplexe Umkehrintegral vertreten. Letztere bilden die Grundlage für neue asymptotische Methoden, welche im zweiten, den Anwendungen zu widmenden Band behandelt werden.

Die teils erschöpfende, teils Ausblicke bietende Behandlung der Theorie, gepaart mit einer strengen und doch übersichtlichen Darstellung sowie mit reichen literarischen und historischen Nachweisen, lassen es vermuten, daß das vollständige Handbuch ein Standardwerk der Laplace-Transformation wird.

T. Szentmártony.

Dietrich Voelker und Gustav Doetsch, Die zweidimensionale Laplace-Transformation. Eine Einführung in ihre Anwendung zur Lösung von Randwertproblemen nebst Tabellen von Korrespondenzen (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. 12), 259 Seiten, Basel, Birkhäuser, 1950.

Gewisse Randwertprobleme von partiellen Differentialgleichungen können — statt der symbolischen oder Operatorenrechnung — folgenderweise streng behandelt werden. Man unterwirft die Gleichung einer Laplace-Transformation (L. T.) in bezug auf eine der Veränderlichen, löst die bezüglich der Bildfunktion nach der zweiten Veränderlichen so entstehende (bei insgesamt zwei Veränderlichen gewöhnliche Differential-) Gleichung mit der Transformationsveränderlichen als Parameter und kehrt schließlich durch die inverse Transformation auf die gesuchte Funktion in den ursprünglichen Veränderlichen zurück. Der zweite Schritt kann dabei in vielen Fällen durch eine *zweite* L. T. bzw. ihre Umkehrung erledigt werden.

Zweck des vorliegenden, größtenteils aus nichtveröffentlichtem Material bestehenden Buches ist, die Vorteile jenes Verfahrens zu zeigen, welches an Stelle dieser *zweifachen*, unmittelbar eine zweidimensionale oder *doppelte* L. T. und ihre Umkehrung anwendet. Und zwar zunächst am Beispiel der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung sowie der Wärmeleitungs-, Wellen-, Telegraphen- und inhomogenen Potientialgleichung. Die Benützung einer doppelten *einseitigen* L. T. läßt allerdings nur Randwertprobleme bezüglich des ersten Quadranten der Veränderlichen zu. Sie gibt aber — der zweifachen L. T. gegenüber — deutlich die Verträglichkeitsbedingungen der vorschreibbaren Randbedingungen an. In diesem Sinne wird nun die allgemeine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und die Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen behandelt.

Das interessante, sorgfältig ausgearbeitete, mit Rechentechnik natürlich stark belastete Buch schließt mit einer Tabellensammlung von fast 750 Korrespondenzen. Von vielen ähnlichen abweichend sind in dieser dem praktischen Bedarf entsprechend nur die, den einfachsten Operation an den zu transformierenden Funktionen entsprechenden Korrespondenzen nach der zu transformierenden Funktionen geordnet. Alle anderen sind gemäß der transformierten Funktionen angegeben.

T. Szentmártony.

Stefan Bergmann, The kernel function and conformal mapping (Mathematical Surveys, Number V), VIII and 161 pages, New York, American Mathematical Society, 1950.

Le but de cet ouvrage est de passer en revue plusieurs applications de la théorie des fonctions-noyaux. Le livre entier (mis à part les chapitres III, X, XI) est consacré aux fonctions holomorphes ou harmoniques dans un domaine du plan. Les chapitres I et II introduisent (dans ce cas particulier) les notions fondamentales: systèmes orthonormaux complets, fonctions-noyaux et leurs propriétés "reproductrices", problèmes extrémaux associés. Dans les chapitres suivants, ces notions sont mises en oeuvre pour l'étude de questions classiques (qui se trouvent ainsi, affirme l'Auteur, à la portée du calcul numérique moderne). Chapitre IV: métrique riemannienne conformément invariante d'un domaine. Chapitre V: fonctions de Green. de Neumann, mesures harmoniques (l'Auteur étudie avec soin le cas d'un ordre de connexion fini > 1). Chapitre VI: représentation conforme des domaines multiplement connexes sur des domaines canoniques. Chapitre VII: orthogonalisation sur la fontière. Chapitre VIII: méthodes variationnelles de Hadamard et de Schiffer. Au chapitre IX, on indique comment la connaissance de la fonction-noyau permet, non seulement de calculer les fonctions classiques, mais de prouver leur existence. Les chapitres X et XI appliquent les mêmes idées à certaines équations aux dérivées partielles elliptiques et aux fonctions holomorphes de deux variables complexes.

Chaque chapitre est l'occasion d'applications variées (fonctions bornées, constante de Robin, etc.). Parfois, ces applications sont développées en détail. Souvent, de raisonnements sont laissés au lecteur. Souvent aussi, il s'agit de simples allusions. Le lecteur non spécialiste ne peut pas toujours aisément discerner quelles hypothèses exactes de régularité sont faites sur les fonctions ou les domaines envisagés. L'Auteur, visiblement, répugne aux théories trop générales; et, dans chaque chapitre, il donne sa préférence aux méthodes qui sont particulières au cas étudié. Seul le plus court chapitre (4 pages) est consacré à l'espace hilbertien; il ne contient guère que des allusions, et n'est pratiquement pas utilisé dans la suite; d'ailleurs, le lecteur n'est pas supposé connaitre la théorie de l'espace hilbertien; la partie élémentaire de cette théorie aide pourtant, semble-t-il, à la compréhension du sujet; mais peut-être cette opinion est-elle due à une déformation professionnelle du rapporteur.

J. Dixmier (Paris).

Remarks on power series.*) (Rectification.)

By G. Pólya in Stanford (California).

Section 2 on pp. 201—202 should be completely deleted with reference to theorem 11 and its proof on p. 271 of A. Ostrowski's important paper: Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen, *Math. Zeitschrift,* **8** (1920), pp. 241—298. I am sorry that I have so completely forgotten this passage which I almost certainly saw thirty years ago.

(Received January 21, 1951.)

*) *These Acta,* **12 B** (1950), pp. 199—203.

Délmagyarország nyomda, Szeged 2587 Felelős vezető: Priskin Sándor

Sur un théorème d'Harish-Chandra.

Par J. DIXMIER à Dijon.

Le théorème qui fait l'objet principal de cet article a été démontré récemment par HARISH-CHANDRA ([5], th. 4). La démonstration donnée ici suit celle d'HARISH-CHANDRA dans ses points essentiels. Cependant, plusieurs simplifications de détail rendent l'exposé plus rapide que celui de [5], et permettent d'éviter l'usage des sous-algèbres de Cartan; en outre, le résultat obtenu est un peu plus général que celui de [5]. On verra aussi que certaines considérations très simples, nécessaires pour la démonstration précédente, permettent d'obtenir d'autres résultats de [5] (liés au th. 5 de [5]), établis par HARISH-CHANDRA au moyen de procédés moins élémentaires. Ces derniers résultats ont été publiés en même temps par R. GODEMENT [3], et notre démonstration est d'ailleurs voisine de celle de [3]. En fait, nous démontrons un résultat un peu plus général que ceux de [3] et [5].

Sauf mention expresse du contraire, toutes les algèbres et tous les espaces vectoriels considérés sont sur le corps complexe. L'unité d'une algèbre est toujours désignée par 1.

1. Quelques résultats connus sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.

Le mode de présentation de certains des résultats qui suivent m'a été suggéré par H. CARTAN et J. P. SERRE.

1. Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie. Soit T l'algèbre tensorielle ([2]) de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$. Soit I l'idéal bilatère de T engendré par les éléments de la forme $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 - [a_1, a_2], a_1 \in \mathfrak{a}, a_2 \in \mathfrak{a}$. Soit S le sous-espace de T formé des tenseurs symétriques. Alors, *T est la somme directe de S et I* (cf. [4], th. 1; cette propriété est aussi une conséquence facile des résultats de [1] et [6], établis sans le théorème d'ADO). Considérons l'algèbre associative $A = T/I$ (nous noterons aa' le produit de deux éléments a, a' de A). L'application canonique de T sur A applique biunivoquement S sur A. En particulier, on peut identifier désormais $\mathfrak{a} \subset S$ à un sous-espace de A; A est engendré par $\mathfrak{a}$ et 1. D'autre part, toute représentation ν de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ se prolonge de manière unique en une représentation unitaire ν' de l'algèbre associative T, qui s'annule sur les $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 - [a_1, a_2]$, donc sur I, de sorte que ν' définit par passage au quotient une représentation unitaire ν_1 de l'algèbre associative A; ν_1 est la seule représentation unitaire de A prolongeant ν; réciproquement, toute représentation de l'algèbre associative A fournit, par restriction à $\mathfrak{a}$, une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. La recherche des représentations de $\mathfrak{a}$ équivaut donc à celle des représentations de A. L'algèbre A s'appelle *l'algèbre enveloppante de* $\mathfrak{a}$.

2. Sur l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$, introduisons l'unique structure d'algèbre de Lie commutative. L'idéal I correspondant dans T est l'idéal bilatère engendré par les $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1$, $a_1 \in \mathfrak{a}$, $a_2 \in \mathfrak{a}$; nous le désignerons par I'. L'algèbre T est la somme directe de S et I'. Si nous identifions cette fois l'algèbre commutative T/I' à S, S se trouve muni d'une structure multiplicative qui fait de S *l'algèbre symétrique* bien connue de $\mathfrak{a}$ (algèbre de polynômes).

Revenons à l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ initiale. Soit γ la restriction à S de l'application canonique de T sur A. On a vu que γ est un isomorphisme de l'espace S sur l'espace A. Mais γ n'est pas un isomorphisme d'algèbre (S est commutative, A ne l'est pas en général). Il existe cependant entre les structures multiplicatives de S et A une relation simple que nous allons préciser.

Soit S^r l'ensemble des éléments homogènes de degré r de S. On a: $S^r S^{r'} \subset S^{r+r'}$: S est une algèbre *graduée*. Soit $A^r = \gamma(S^r)$. Nous dirons que les éléments de A^r sont les éléments symétriques homogènes de degré r de A. L'espace A est la somme directe des A^r; A^0 est l'ensemble des multiples scalaires de 1; et $A^1 = \mathfrak{a}$. Soit $A_r = A^0 + A^1 + \cdots + A^r$; on voit aisément que A_r est l'ensemble des éléments de A qui peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de r éléments de $\mathfrak{a}$ au plus. Donc $A_r A_{r'} \subset A_{r+r'}$: A est une algèbre *filtrée* par les A_r (mais non graduée par les A^r). Un élément $a \neq 0$ de A sera dit de degré r s'il est contenu dans A_r mais non dans A_{r-1}, autrement dit si sa composante symétrique homogène non nulle de degré maximum est de degré r. Ainsi, γ conserve le degré. Ceci posé, soient $s \in S$, $s' \in S$, avec $d^0 : s \leqq r$, $d^0 : s' \leqq r'$; alors *$\gamma(s)\gamma(s')$ et $\gamma(ss')$ sont congrus modulo $A_{r+r'-1}$* (cf. [4], p. 906). On peut aussi exprimer ce résultat de la manière suivante. Construisons *l'algèbre graduée B associée à l'algèbre filtrée A*: soit B_r l'espace A_r/A_{r-1}, pour $r = 0, 1, 2, \ldots$ (on pose $A_{-1} = 0$), et soit B la somme directe des B_r; le produit dans A définit, par passage au quotient, une application bilinéaire de $B_r \times B_{r'}$ dans $B_{r+r'}$; d'où, par linéarité, une application bilinéaire de $B \times B$ dans B; autrement dit, B se trouve munie d'une structure d'algèbre, graduée par les B_r. Il y a un isomorphisme canonique évident de l'espace B_r sur l'espace A^r donc sur l'espace S^r; d'où un isomorphisme canonique de l'espace B sur l'espace S, qui, d'après ce qui précède, est un isomorphisme *d'algèbres*.

2. Sous-algèbres de $\mathfrak{a}$ et sous-algèbres de A.

1. Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, A son algèbre enveloppante, $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$, G la sous-algèbre de A engendrée par $\mathfrak{g}$. Soit G' l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Il existe un homomorphisme φ de G' sur G tel que $\varphi(1)=1$, $\varphi(g)=g$ pour $g\in\mathfrak{g}$. Soit $(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une base de $\mathfrak{a}$ telle que $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ soit une base de $\mathfrak{g}$. Les $g_{i_1}g_{i_2}\ldots g_{i_r}$ (calculés dans G'); où $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ est une suite croissante (au sens large) quelconque d'entiers compris entre 1 et n, forment une base de l'espace G', et leurs images par φ sont linéairement indépendantes dans A (cf. [1], [4], [6]); donc φ est biunivoque. (Ceci est exactement la démonstration de [5], lemme 21). Nous identifierons désormais G' à G par l'isomorphisme φ.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{a}=\mathfrak{g}+\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}=0$. Soit $H\subset A$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$. L'application bilinéaire $(g,h)\to gh$ de $G\times H$ dans A définit une application linéaire θ de $G\otimes H$ dans A telle que $\theta(g\otimes h)=gh$. On peut supposer que $g_{n+1}, g_{n+2}, \ldots, g_m$ forment une base de $\mathfrak{h}$. Les $g_{i_1}g_{i_2}\ldots g_{i_r}\otimes \otimes g_{j_1}g_{j_2}\ldots g_{j_s}$ (où $(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ est une suite croissante quelconque d'entiers compris entre $n+1$ et m) forment une base de $G\otimes H$; or, les $g_{i_1}g_{i_2}\ldots g_{i_r}g_{j_1}g_{j_2}\ldots g_{j_s}$ forment une base de A. Donc θ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $G\otimes H$ sur l'espace vectoriel A.

Soient I_1 un idéal à gauche de H, I l'idéal à gauche de A engendré par I_1. Montrons que $\theta(G\otimes I_1)=I$. Un élément de $G\otimes I_1$ est de la forme $\sum_i g^i\otimes h^i$ avec $g^i\in G, h^i\in I_1$; or $\theta(\sum_i g^i\otimes h^i)=\sum_i g^i h^i\in I$. Réciproquement, un élément de I est de la forme $\sum_i a^i h^i$, avec $h^i\in I_1$, $a^i\in A$, donc $a^i=\sum_j g^i_j h^i_j$, $g^i_j\in G, h^i_j\in H$ d'après ce qui précède; or $\theta^{-1}(\sum_i\sum_j g^i_j h^i_j h^i)=\sum_i\sum_j g^i_j\otimes h^i_j h^i \in G\otimes I_1$.

Ceci nous permet d'identifier, ce que nous ferons désormais, l'espace A/I à l'espace $G\otimes H/G\otimes I_1=G\otimes(H/I_1)$.

2. Pour $a\in\mathfrak{a}$, $a'\in A$, posons $\nu_1(a)a'=[a,a']=aa'-a'a$; ν_1 est une représentation de $\mathfrak{a}$ qui s'effectue dans l'espace A et se réduit, dans $\mathfrak{a}$ à la représentation adjointe usuelle. Pour a fixé, $\nu_1(a)$ est une dérivation de A.

On suppose désormais que $\mathfrak{g}$ est un *idéal* de $\mathfrak{a}$. Alors, $\mathfrak{g}$ est stable pour ν_1, donc aussi G. Les restrictions des $\nu_1(a)$ à G, qui sont des dérivations de G, définissent une représentation ν_2 de $\mathfrak{a}$. La restriction de ν_2 à $\mathfrak{h}$ est une représentation ν de $\mathfrak{h}$ qui s'effectue dans l'espace G.

Soient $a\to a^*$ et $h\to \bar{h}$ les applications canoniques de A dans $A^*=A/I$ et de H dans $\bar{H}=H/I_1$. Soient ν_I et ν_{I_1} les représentations canoniques de A et H dans A^* et $\bar{H}$ respectivement. Nous identifions désormais une représentation d'une algèbre de Lie et la représentation correspondante de son algèbre enveloppante. Alors, on a, pour $h_1 \in \mathfrak{h}, g \in G, h \in H$:

$$\nu_I(h_1)(g \otimes \bar{h}) = \nu_I(h_1)((gh)^*) = (h_1 gh)^* = ([h_1, g]h + gh_1 h)^*$$
$$= [h_1, g] \otimes \bar{h} + g \otimes \overline{h_1 h} = \nu(h_1) g \otimes \bar{h} + g \otimes \nu_{I_1}(h_1)\bar{h}$$

donc

$$\nu_I(h_1) = \nu(h_1) \otimes 1 + 1 \otimes \nu_{I_1}(h_1). \tag{1}$$

3. Remarques sur les représentations des algèbres de Lie.

1. Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie, H son algèbre enveloppante. Soit Δ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{h}$. La représentation nulle s'effectuant dans un espace de dimension 1 définit un élément δ_0 de Δ. Une fois pour toutes, nous choisirons, pour tout $\delta \in \Delta$, 1. une représentation ν_δ de classe δ de $\mathfrak{h}$, s'effectuant dans un espace U_δ; 2. un sous-espace U'_δ de U_δ de dimension 1; l'ensemble des $h \in H$ tels que $\nu_\delta(h) U'_\delta = 0$ est un idéal à gauche maximal I_δ de H; H/I_δ est de dimension finie; 3. un élément $h_\delta \in H$ tel que $\nu_\delta(h_\delta)$ soit un projecteur sur U'_δ (théorème de Burnside).

Soit ν une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un espace V. Pour $\delta \in \Delta$, on désigne par V_δ l'espace engendré par les sous-espaces stables de V dans lesquels ν induit une représentation de classe δ. Les éléments de V_{δ_0} sont les éléments annulés par ν, encore appelés *invariants*. V_δ est stable pour ν. Si $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ sont des éléments distincts de Δ, il existe $h \in H$ tel que $\nu(h)$ se réduise à 1 dans V_{δ_1}, à 0 dans les V_{δ_i}, $i > 1$ (théorème de Burnside généralisé); il en résulte que la somme $\sum V_\delta$ est directe.

Si W est un sous-espace stable de V, on a $W_\delta = V_\delta \cap W$. Soient d'autre part $v \to v^*$ l'application canonique de V sur $V^* = V/W$, et ν^* la représentation induite par ν dans V^*. Si $v \in V_\delta$, on a $v^* \in (V^*)_\delta$, donc $(V^*)_\delta \supset (V_\delta)^*$. Si de plus $V = \sum V_\delta$, on a $V^* = \sum (V_\delta)^*$, donc, la somme $\sum (V^*)_\delta$ étant directe, $(V^*)_\delta = (V_\delta)^*$.

Si $V = \sum_\iota V^\iota$ est une décomposition de V en somme directe de sous-espaces stables pour ν, on a $V_\delta = \sum_\iota (V_\delta \cap V^\iota) = \sum_\iota (V^\iota)_\delta$.

Si $v \in \sum V_\delta$, le sous-espace $W = \nu(H)v$ est de dimension finie. Réciproquement, si W est de dimension finie, et si $\mathfrak{h}$ est semi-simple, on a $v \in \sum V_\delta$; en effet, W, qui est stable pour ν, est alors complètement réductible.

2. Soit $\delta \in \Delta$. La représentation $-{}^t(\nu_\delta)$ qui s'effectue dans l'espace dual de U_δ, définit un élément de Δ que nous désignerons par δ^*. Ceci posé, considérons, dans $W = V \otimes U_{\delta^*}$, la représentation $\nu \otimes 1 + 1 \otimes \nu_{\delta^*}$. Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ une base de U_{δ^*}. Alors, si $w = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i \in W_{\delta_0}$, le sous-espace V' de V engendré par les v_i est stable, et ν induit dans V' une représentation de classe δ, ou bien $V' = 0$. Réciproquement, si ν induit dans un sous-espace stable V' de V une représentation de classe δ, on peut choisir une base $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de V' telle que $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i \in W_{\delta_0}$.

3. Soit V^δ l'ensemble des $v \in V$ tels que $\nu(I_\delta)v = 0$. On a: $V^\delta \subset V_\delta$. En outre, $\nu(h_\delta)$ se réduit, sur V_δ, à un projecteur sur V^δ. En effet: α) si $v \in V_\delta$, $\nu(h_\delta)v \in V^\delta$; car il suffit de le prouver quand v appartient à un sous-espace stable W de V_δ dans lequel ν induit une représentation de classe δ; et $\nu(h_\delta)$ se réduit dans W à un projecteur sur un sous-espace W' de dimension 1 de W qui est tel que $\nu(I_\delta)W' = 0$, donc tel que $W' \subset V^\delta$; β) si $v \in V^\delta$, $v \neq 0$, il existe un isomorphisme entre $\nu(H)v$ muni de la représentation induite par ν, et U_δ muni de ν_δ, et cet isomorphisme transforme U'_δ en la variété à une dimension engendrée par v; donc $\nu(h_\delta)v = v$.

Ceci posé, soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des éléments de $\sum V_\delta$; $v'_1, v'_2, \ldots, v'_p$ des éléments de V^δ. *Il existe $h \in H$ tel que $\nu(h)v_i \in V^\delta$, $\nu(h)v'_j = v'_j$*: en effet, on peut se ramener au cas où $v_i \in V_{\delta_i}$; soit $h' \in H$ tel que $\nu(h')$ se réduise à 1 dans V_δ, à 0 dans les $V_{\delta_i} \neq V_\delta$; alors $h = h_\delta h'$ répond à la question.

4. Si V est une algèbre, et si $\nu(h)$ est, pour tout $h \in \mathfrak{h}$, une dérivation de V, chaque V_δ est un V_{δ_0}-module (à gauche, par exemple). Car soient $h \in \mathfrak{h}$, $v \in V_\delta$, $v_0 \in V_{\delta_0}$; on a: $\nu(h)(v_0 v) = v_0(\nu(h)v)$; donc, si ν induit dans $\nu(H)v$ une représentation de classe δ, on a $\nu(H)(v_0 v) = 0$, ou bien la représentation induite dans $\nu(H)(v_0 v)$ est de classe δ; donc $v_0 v \in V_\delta$. En particulier, V_{δ_0} est une sous-algèbre de V. Pour $v \in \sum V_\delta$, désignons par v^0 la composante de v dans V_{δ_0}; l'application $v \to v^0$ est un projecteur de $\sum V_\delta$ sur V_{δ_0}; si $v_0 \in V_{\delta_0}$ et $v \in V_\delta$, on a $v_0 v \in V_\delta$, donc $(v_0 v)^0 = 0 = v_0 v^0$ si $\delta \neq \delta_0$, et $(v_0 v)^0 = v_0 v = v_0 v^0$ si $\delta = \delta_0$; donc, si $v_0 \in V_{\delta_0}$ et $v \in \sum V_\delta$, on a: $(v_0 v)^0 = v_0 v^0$. De même: $(v v_0)^0 = v^0 v_0$.

4. **Etude des V_δ dans certains cas particuliers.**

1. Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie *semi-simple*. Soit ν une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un espace V de dimension finie. Soit $S \supset V$ l'algèbre symétrique de V. Pour $h \in \mathfrak{h}$, $\nu(h)$ se prolonge d'une manière unique en une dérivation $\tilde{\nu}(h)$ de S, et $\tilde{\nu}$ est encore une représentation de $\mathfrak{h}$: car, si $h_1 \in \mathfrak{h}$, $[\tilde{\nu}(h), \tilde{\nu}(h_1)]$ et $\tilde{\nu}([h, h_1])$ sont deux dérivations de S qui coïncident sur V, donc sont identiques. Soit S^r l'ensemble des éléments homogènes de degré r de S. S^1 est stable pour $\tilde{\nu}$, donc aussi S^r. Comme $S = \sum_{1}^{\infty} S^r$ et que $\dim S^r < +\infty$, on voit que $S = \sum_\delta S_\delta$, et $S_\delta = \sum_r (S_\delta \cap S^r)$. Soit $\bar{S} = S^1 + S^2 + \ldots$. Soit $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ une base de l'idéal engendré par l'algèbre $S_{\delta_0} \cap \bar{S}$ dans S. On peut évidemment supposer que les s_i appartiennent à $S_{\delta_0} \cap \bar{S}$ et sont homogènes. Nous allons voir que S_{δ_0} est *l'algèbre* engendrée par $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Soit $s \in S_{\delta_0} \cap \bar{S}$. L'élément s est une somme de produits $s_i s_i'$, où on peut supposer les $s_i' \in S$ homogènes, avec $d^0 : s_i' < d^0 : s$; donc $s = s^0$ est somme de produits $(s_i s_i')^0 = s_i s_i'^0$, avec des $s_i'^0 \in S_{\delta_0}$ homogènes, et $d^0 : s_i'^0 < d^0 : s$. Si les $s_i'^0$ sont des scalaires, s est bien dans l'algèbre engendrée par les s_i. Sinon, $s_i'^0 \in S_{\delta_0} \cap \bar{S}$, et on recommence le même raisonnement. Par récurrence sur le degré de s, notre assertion est démontrée. Ceci est le théorème fondamental de la théorie des invariants, et la démonstration ci-dessus, classique dans son principe, m'a été indiquée par R. GODEMENT.

L e m m e 1. *Chaque S_δ est un S_{δ_0}-module de type fini.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit T l'algèbre symétrique de U_{δ^*}, $\tilde{\nu}_{\delta^*}$ la représentation (dans T) prolongée de ν_{δ^*} (dans U_{δ^*}). Soit $\tilde{\xi} = \tilde{\nu} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{\nu}_{\delta^*}$ dans $S \otimes T$, algèbre symétrique (bigraduée) de la somme directe $V + U_{\delta^*}$; $\tilde{\xi}(h)$ n'est autre que la dérivation de $S \otimes T$ prolongeant l'endomorphisme $\xi(h)$ de $V + U_{\delta^*}$ qui est défini par $\nu(h)$ dans V, $\nu_{\delta^*}(h)$ dans U_{δ^*}. Considérons un système fini de générateurs de $(S \otimes T)_{\delta_0}$. Comme les projecteurs de la bigraduation sont permutables aux $\tilde{\xi}(h)$ on peut supposer ces générateurs doublement homogènes. Soient $j_1, j_2, \ldots, j_l$ ceux dont le deuxième degré est 1; $w_1, w_2, \ldots, w_q$ étant une base de U_{δ^*}, on a: $j_i = \sum_{k=1}^{q} s_k^i \otimes w_k$, avec $s_k^i \in S$. Alors, $s_k^i \in S_\delta$, donc le S_{δ_0}-module M engendré par les s_k^i est contenu dans S_δ. Montrons que $S_\delta = M$. Pour cela, soit S' un sous-espace de S stable pour $\tilde{\nu}$ dans lequel $\tilde{\nu}$ induit une représentation de classe δ, et montrons que $S' \subset M$; comme les S^r sont stables pour $\tilde{\nu}$, on peut supposer $S' \subset S^r$ pour un certain r; pour une base $s_1, s_2, \ldots, s_q$ de S' bien choisie, $\sum_{i=1}^{q} s_i \otimes w_i$ est un élément de $(S \otimes T)_{\delta_0}$, doublement homogène de bidegré $(r, 1)$, donc de la forme $\sum_{k=1}^{l} n_k j_k$, où les n_k sont des éléments de $(S \otimes T)_{\delta_0}$ de bidegré $(r', 0)$, c'est-à-dire des éléments de S_{δ_0}. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{q} s_i \otimes w_i = \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{q} n_k \, (s_i^k \otimes w_i) = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{l} n_k s_i^k \right) \otimes w_i$$

donc $s_i = \sum_{k=1}^{l} n_k s_i^k \in M$.

2. Revenons aux notations du § 2: $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie, somme directe d'une sous-algèbre *semi-simple* $\mathfrak{h}$ et d'un idéal $\mathfrak{g}$. Considérons la représentation ν de $\mathfrak{h}$ dans l'espace G qui a été définie au § 2. Soit Y l'ensemble des éléments de G permutables à $\mathfrak{h}$. On a: $Y = G_{\delta_0}$.

Lemme 2. *$G=\sum G_\delta$, et chaque G_δ est un Y-module (à gauche) de type fini.*

Démonstration. Soit G^r l'ensemble des éléments symétriques homogènes de degré r de G. Soit $G_r=G^0+\cdots+G^r$. Il est immédiat que les G^r sont stables pour ν. Donc, si γ désigne l'application canonique (définie au § 1) de l'algèbre symétrique S de $\mathfrak{g}$ sur G, les $\overset{-1}{\gamma}\circ\nu(h)\circ\gamma=\tilde{\nu}(h)$ sont des dérivations de S, qui ne sont autres que les dérivations uniques prolongeant $\nu(h)$ sur $\mathfrak{g}$; γ est un isomorphisme de l'espace S muni de la représentation $\tilde{\nu}$ sur l'espace G muni de la représentation ν. On a: $S=\sum S_\delta$, et chaque S_δ est un S_{δ_0}-module de type fini (lemme 1). Donc $G=\sum G_\delta$ (ce qui était immédiat directement). Soient d'autre part $s_1, s_2, \ldots, s_p$ des générateurs homogènes du S_{δ_0}-module S_δ. Les $\gamma(s_i)$ sont dans G_δ, soit $M\subset G_\delta$ le G_{δ_0}-module à gauche (par exemple) qu'ils engendrent; montrons que $G_\delta=M$. Comme $G_\delta=$ $=\sum(G_\delta\cap G^r)$, il suffit de prouver que $G_\delta\cap G^r\subset M$. Ceci est évident pour $r=-1$. Supposons $G_\delta\cap G^i\subset M$ pour $i<r$, et prouvons que $G_\delta\cap G^r\subset M$. Un élément de $G_\delta\cap G^r$ est de la forme $\gamma(s)$, avec $s\in S_\delta\cap S^r$; s est une somme d'éléments de la forme $s'_i s_i$, les s'_i étant des éléments homogènes de S_{δ_0} tels que $d^\circ s_i+d^\circ s'_i=r$: $s=\sum s'_i s_i$. Or $\gamma(s'_i s_i)\equiv\gamma(s'_i)\gamma(s_i)$ (mod G_{r-1}). Donc $\gamma(s)\equiv\sum\gamma(s'_i)\gamma(s_i)$ (mod G_{r-1}). Il suffit alors d'observer que $\gamma(s'_i)\in G_{\delta_0}$, que $\gamma(s)-\sum\gamma(s'_i)\gamma(s_i)\in\sum_{i<r}G_\delta\cap G^i$, et d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

Corollaire 1. *Soit U un espace de dimension finie dans lequel s'effectue une représentation ϱ de $\mathfrak{h}$. Considérons, dans $G\otimes U$, la représentation $\xi=\nu\otimes 1+1\otimes\varrho$. Alors, $G\otimes U=\sum(G\otimes U)_\delta$ et tout $(G\otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0}-module (à gauche) de type fini.*

Démonstration 1. Le lemme 2 entraîne aussitôt que, pour tout élément $g\otimes u$, $\xi(H)(g\otimes u)$ est de dimension finie. Donc $G\otimes U=\sum(G\otimes U)_\delta$.

2. Soient $\delta\in\Delta$, $\delta'\in\Delta$. Montrons que $(G_{\delta'}\otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0}-module de type fini. Soit $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ un système de générateurs du G_{δ_0}-module $G_{\delta'}$. Les $\nu(H)g_i\otimes U$ sont de dimension finie, stables, et engendrent le G_{δ_0}-module $G_{\delta'}\otimes U$. Or, $(G_{\delta'}\otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0}-module contenant les $(\nu(H)g_i\otimes U)_\delta$; il en résulte que $(G_{\delta'}\otimes U)_\delta$ est engendré, en tant que G_{δ_0}-module, par les $(\nu(H)g_i\otimes U)_\delta$, donc est de type fini.

3. Montrons que $(G\otimes U)_{\delta_0}$ est un G_{δ_0}-module de type fini. Soit $U=\sum_{i=1}^{n}U_i$, chaque U_i étant irréductible; soit δ_i la classe de la représentation induite par ϱ dans U_i. On a: $G\otimes U=\sum_{\delta,i}G_\delta\otimes U_i$, la somme étant directe et chaque $G_\delta\otimes U_i$ étant stable pour ξ. Donc $(G\otimes U)_{\delta_0}=$

$= \sum_{\delta, i} (G_\delta \otimes U_i)_{\delta_0}$. Or, $(G_\delta \otimes U_i)_{\delta_0} = 0$ sauf si $\delta = \delta_i^*$. Donc $(G \otimes U)_{\delta_0} = \sum_{i=1}^{n} (G_{\delta_i^*} \otimes U_i)_{\delta_0}$, et est un G_{δ_0}-module de type fini d'après 2.

4. Montrons que $(G \otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0}-module de type fini. Soit V un espace dans lequel s'effectue une représentation σ de $\mathfrak{h}$ de classe δ^*. Considérons, dans $G \otimes U \otimes V$, la représentation $\xi \otimes 1 + 1 \otimes \sigma$. D'après 3, le G_{δ_0}-module $(G \otimes U \otimes V)_{\delta_0}$ admet un système fini de générateurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit $e_1, e_2, \ldots, e_p$ une base de V, et soit $x_i = \sum_{j=1}^{p} y_i^j \otimes e_j$, où $y_i^j \in G \otimes U$. Un raisonnement déjà fait prouve que les y_i^j forment un système de générateurs du G_{δ_0}-module $(G \otimes U)_\delta$.

Utilisant toujours les notations du § 2 on a alors le corollaire suivant:

Corollaire 2. *Considérons la restriction de ν_l à H, qui s'effectue dans l'espace A^*. Si H/I_1 est de dimension finie, on a $A^* = \sum (A^*)_\delta$, et chaque $(A^*)_\delta$ est un Y-module (à gauche) de type fini.*

Ceci résulte aussitôt du corollaire 1 et de la formule (1) du § 1.

5. **Préliminaires sur les algèbres associatives.**

1. Lemme 3. *Soit A une algèbre à élément unité, B une sous-algèbre de A contenant 1, I un idéal à gauche de A. Supposons vérifiée la condition suivante:*

(C_1) $\begin{cases} \textit{Si } a_1, a_2, \textit{ sont des éléments de } A, \textit{ il existe } a \equiv 1 \pmod I \textit{ tel que} \\ aa_1 \in B, aa_2 \in B. \end{cases}$

Alors, si L est un idéal à gauche maximal de A contenant I, $L \cap B$ est un idéal à gauche maximal de B, et la correspondance $L \to L \cap B$ est biunivoque.

Démonstration. Soit M un idéal à gauche de B tel que $L \cap B \subset M$, $M \neq L \cap B$. Soit $m \in M$, $m \notin L \cap B$. Comme L est maximal, il existe un $a \in A$ avec $am \equiv 1 \pmod L$. Soit $a_1 \equiv 1 \pmod I$ avec $a_1 a \in B$. On a: $a_1 am \in M$, et $a_1 am \equiv 1 \pmod{L + I = L}$, donc $a_1 am \equiv 1 \pmod M$, donc $M = B$. Ainsi, $L \cap B$ est un idéal à gauche maximal de B.

Soient maintenant L, L' deux idéaux à gauche maximaux de A contenant I tels que $L \cap B = L' \cap B$. Supposons $L \neq L'$. Alors, $1 = l + l'$ avec $l \in L, l' \in L'$. Soit $a \equiv 1 \pmod I$ tel que $al \in B, al' \in B$. On a: $a = al + al' \in L \cap B + L' \cap B = L \cap B$. Donc $1 \in L \cap B + I \subset L$, ce qui est absurde.

2. Soient maintenant A une algèbre à élément unité, I un idéal à gauche, B l'ensemble des $a \in A$ tels que $Ia \subset I$. B est une sous-algèbre de A contenant I et le centre Z de A. I est un idéal *bilatère* de B. Soit $a \to a^*$ l'application canonique de A sur *l'espace* $A^* = A/I$; sa restriction à B est un homomorphisme de B sur *l'algèbre* $B^* = B/I$. Soient de plus J un idéal bilatère de A, et $K = I + J$ (idéal a gauche); $K \cap B$ est un idéal bilatère de B. Soit $a \to a^+$ l'application canonique de A sur $A^+ = A\,K$. Soit Ω l'ensemble des idéaux à gauche maximaux de A contenant K.

Lemme 4. *Supposons vérifiés par A, I, B les conditions (C_1) et (C_2): B^+ est de dimension finie.*

Alors, les représentations irréductibles ν_L de A définies canoniquement par les $L \in \Omega$ sont toutes équivalentes à un nombre fini d'entre elles. En outre $\nu_L(z)$ est scalaire pour $z \in Z$.

Démonstration. Soit $b \to b^\sim$ l'homomorphisme canonique de B sur $B^\sim = B/K \cap B$. Les $L \cap B$, $L \in \Omega$, sont des idéaux à gauche maximaux de B contenant $K \cap B$; donc les $(L \cap B)^\sim$ sont des idéaux à gauche maximaux de $B^\sim$. Soit $\nu_L^\sim$ le représentation irréductible de $B^\sim$ définie canoniquement par $(L \cap B)^\sim$. D'après (C_2), $B^\sim$ est de dimension finie, donc il existe un sous-ensemble fini Ω' de Ω tel que toute $\nu_L^\sim$, $L \in \Omega$, soit équivalente à une $\nu_{L'}^\sim$, $L' \in \Omega'$. Ceci posé, soit $L \in \Omega$. Il existe $L' \in \Omega'$ tel que $\nu_L^\sim$ et $\nu_{L'}^\sim$ soient équivalentes. Donc il existe $b_0 \in B, b_0 \notin L$, tel que:

$$b \in B \text{ et } b^\sim b_0^\sim \in (L \cap B)^\sim \Longleftrightarrow b \in B \text{ et } b^\sim \in (L' \cap B)^\sim.$$

Soit M l'ensemble des $a \in A$ tels que $ab_0 \in L$. M est un idéal à gauche maximal de A contenant I et J donc K, donc $M \in \Omega$ et ν_L est équivalente à ν_M. Enfin

$$a \in M \cap B \Longleftrightarrow a \in B \text{ et } ab_0 \in L \Longleftrightarrow a \in B \text{ et } (ab_0)^\sim \in (L \cap B)^\sim$$
$$\Longleftrightarrow a \in B \text{ et } a^\sim \in (L' \cap B)^\sim \Longleftrightarrow a \in L' \cap B.$$

Donc $L' \cap B = M \cap B$ et par suite $L' = M$, de sorte que ν_L est équivalente à $\nu_{L'}$. Ceci démontre la première assertion.

Si maintenant $z \in Z$, on a $z \in B$, et $z^\sim$ appartient au centre de B. Donc $\nu_L^\sim(z^\sim)$ permute aux opérateurs de $\nu_L^\sim$, qui est irréductible et s'effectue dans un espace de dimension finie. Donc il existe un scalaire $\xi(z)$ tel que $z^\sim 1^\sim \equiv \xi(z) 1^\sim$ (mod $(L \cap B)^\sim$), d'où $z - \xi(z) \in L$. Alors, pour tout $a \in A$, on a modulo L: $za = az \equiv a\xi(z) = \xi(z)a$, donc $\nu_L(z) = \xi(z)\cdot 1$.

6. **Le théorème d'Harish-Chandra.**

Comme plus haut, soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}$ un idéal de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre semi-simple de $\mathfrak{a}$, tels que $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = 0$. Soient A l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}$, $G \subset A$ et $H \subset A$ les algèbres enveloppantes de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$. Soient Z le centre de A, et Y l'ensemble des éléments de G permutables à $\mathfrak{h}$. Soit enfin Δ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{h}$. Si π est une représentation de $\mathfrak{a}$ dans un espace V, et si $\delta \in \Delta$, les notations $V_\delta, I_\delta, \ldots,$ concernent la restriction de π à $\mathfrak{h}$.

Théorème 1. *Soient $\delta_1 \in \mathcal{J}$ et χ un homomorphisme de Y dans le corps complexe.*

a) *Il existe seulement un nombre fini de représentations irréductibles inéquivalentes π de A telles que, V étant l'espace de π, on ait $V_{\delta_1} \neq 0$ et $\pi(y) = \chi(y) \cdot 1$ pour $y \in Y$.*

b) *Si π est une telle représentation, on a $V = \sum V_\delta$, et* $\dim V_\delta < +\infty$ *pour tout δ.*

c) *$\pi(z)$ est scalaire pour $z \in Z$.*

Démonstration. Soit J l'idéal bilatère de A engendré par les $y - \chi(y)$, $y \in Y$. Le noyau de π contient J.

Soit I l'idéal à gauche de A engendré par I_{δ_1}. Puisque $V_{\delta_1} \neq 0$, il existe un $v \in V^{\delta_1}$, $v \neq 0$; on a $\pi(I_{\delta_1})v = 0$, donc $\pi(I)v = 0$. Soit L l'idéal à gauche maximal de A formé des $a \in A$ tels que $\pi(a)v = 0$. On a $L \supset I$ et $L \supset J$, donc $L \supset I + J = K$, et π est équivalente à ν_L.

Soient $a \to a^*$, $a \to a^+$ et $a \to a^\wedge$ les applications canoniques de A sur $A^* = A/I$, $A^+ = A/K$ et $A^\wedge = A/L$; ν_K est un quotient de ν_I, ν_L un quotient de ν_K.

Comme H/I_{δ_1} est de dimension finie, la corollaire 2 du lemme 2 prouve que $A^* = \sum (A^*)_\delta$ et que chaque $(A^*)_\delta$ est un Y-module de type fini. En passant au quotient, et observant que tout élément de Y est congru modulo J à un scalaire, on voit que $A^+ = \sum (A^+)_\delta$ et que chaque $(A^+)_\delta$ est de dimension finie. On en déduit enfin que $A^\wedge = \sum (A^\wedge)_\delta$ et que chaque $(A^\wedge)_\delta$ est de dimension finie, ce qui est le b du théorème.

Pour prouver le a et le c du théorème, nous allons prouver que nous sommes dans les conditions du lemme 4 (avec les mêmes notations). Introduisant l'algèbre B de ce lemme, on a, si $a \in A$:

$$a^* \in B^* \Longleftrightarrow a \in B \Longrightarrow Ia \supset I \Longleftrightarrow (Ia)^* = 0$$
$$\Longleftrightarrow \nu_I(I)a^* = 0 \Longleftrightarrow \nu_I(I_{\delta_1}a^*) = 0 \Longleftrightarrow a^* \in (A^*)^{\delta_1}$$

donc $B^* = (A^*)^{\delta_1}$. Donc $B^+ \subset (A^+)_{\delta_1}$ est de dimension finie, ce qui est la condition (C_2). Enfin, soient a_1, a_2 des éléments de A; comme $A^* = \sum (A^*)_\delta$, il existe un $a \in A$ tel que

$$\nu_I(a)a_1^* \in (A^*)^{\delta_1}, \qquad \nu_I(a)a_2^* \in (A^*)^{\delta_1}, \qquad \nu_I(a)1^* = 1^*,$$

c'est-à-dire $aa_1 \in B$, $aa_2 \in B$, $a \equiv 1 \pmod{I}$, ce qui prouve (C_1), et achève la démonstration du théorème.

Le cas considéré par Harish-Chandra est le suivant: soient $\mathfrak{a}_0$ une algèbre de Lie réelle, $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre semi-simple, Γ une application linéaire de $\mathfrak{h}_0$ dans $\mathfrak{a}_0$ telles que:

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{h}_0 + \Gamma(\mathfrak{h}_0) \qquad \mathfrak{h}_0 \cap \Gamma(\mathfrak{h}_0) = 0$$
$$[h_1, \Gamma(h_2)] = \Gamma([h_1, h_2]) \qquad [\Gamma(h_1), \Gamma(h_2)] = -[h_1, h_2]$$

pour $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}_0$. Soient $\mathfrak{a}$ la complexification de $\mathfrak{a}_0$, et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{a}$ la complexification de $\mathfrak{h}_0$. On étend Γ à $\mathfrak{h}$ par linéarité, et on pose: $\gamma(h)=\frac{1}{2}(h+i\Gamma(h))$ pour $h\in\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}=\gamma(\mathfrak{h})$. On prouve alors aisément que $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{a}$, et que $\mathfrak{a}=\mathfrak{g}+\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}=0$. En outre, il est facile de voir que Y est le centre de G.

7. Caractères.

Soient toujours $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, A son algèbre enveloppante, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre semi-simple de $\mathfrak{a}$, $H\subset A$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$. Soit ν la représentation de $\mathfrak{h}$ dans l'espace A définie par $\nu(h)a=[h,a]$ pour $h\in\mathfrak{h}, a\in A$; on a vu très simplement que $A=\sum A_\delta$. A_{δ_0} est l'ensemble Y des éléments de A permutables à $\mathfrak{h}$. Soit $A'=\sum_{\delta\neq\delta_0} A_\delta$.

Lemme 5. *A' est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments $[h, a]$, $h\in H$, $a\in A$.*

Démonstration. 1. Montrons que tout élément de A' est combinaison linéaire d'éléments de la forme $[h, a]$. Il suffit de le montrer pour tout élément d'un A_δ, $\delta\neq\delta_0$, donc pour tout élément d'un sous-espace U de A, stable pour ν, dans lequel ν induit une représentation de classe $\delta\neq\delta_0$. Considérons les combinaisons linéaires d'éléments de la forme $\nu(h)u=[h, u]$, $h\in\mathfrak{h}$, $u\in U$; ils forment un sous-espace U' de U, stable pour ν, et $\neq 0$ parce que $\delta\neq\delta_0$. Donc $U'=U$ ce qui prouve notre assertion.

2. Réciproquement, montrons que tout élément de la forme $[h, a]$ est contenu dans A'. Supposons d'abord $h\in\mathfrak{h}$. Soit $a=\sum a_\delta$, avec $a_\delta\in A_\delta$. Comme les A_δ sont stables pour ν, on a $[h, a_\delta]=\nu(h)a_\delta\in A_\delta$, et $[h,a_{\delta_0}]=0$. Donc $[h, a]\in A'$. Si maintenant $h=h_1h_2\ldots h_n$, avec $h_i\in\mathfrak{h}$, on a:

$$[h, a]=(h_1h_2\ldots h_n a-h_2\ldots h_n a h_1)+(h_2\ldots h_n a h_1-h_3\ldots h_n a h_1 h_2)+$$
$$+\cdots+(h_n a h_1\ldots h_{n-1}-a h_1\ldots h_n)\in A'$$

ce qui prouve notre assertion.

Ceci posé, désignons, pour $a\in A$, par a^0 sa composante dans $A_{\delta_0}=Y$. D'après le lemme 5 et le n° 4 du § 3, on a le théorème suivant:

Théorème 2. *Si $a\in A, h\in H, y\in Y$, on a $(ah)^0=(ha)^0$, $(ay)^0=a^0y$, $(ya)^0=ya^0$.*

Il est alors évident qu'une forme linéaire χ sur A telle que $\chi(ah)=$ $=\chi(ha)$ pour $a\in A$, $h\in H$, est déterminée par sa restriction à Y, ceci au moyen de la formule $\chi(a)=\chi(a^0)$. Le cas considéré par Harish-Chandra et Godement est celui où $\mathfrak{h}=\mathfrak{a}$. Appelons caractère de A une forme linéaire χ sur A telle que $\chi(aa')=\chi(a'a)$ pour $a\in A, a'\in A$, et telle que la restriction de χ au centre Z de A soit un homomorphisme de Z dans le corps complexe. On voit qu'il y a une correspondance biunivoque évidente entre les caractères de A et les homomorphismes de Z dans le corps complexe.

Bibliographie.

[1] G. Birkhoff, Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices, *Annals of Math.*, **38** (1937), p. 526—532.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. III. (Paris, 1948).

[3] R. Godement, Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires, *Journal de Math.*, **30** (1951), p. 1—110.

[4] Harish-Chandra, On representations of Lie algebras, *Annals of Math.*, **50** (1949), p. 900—915.

[5] Harish-Chandra, On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), p. 28—96.

[6] E. Witt, Treue Darstellung Liescher Ringe, *Journal für Math.*, **177** (1937), p. 152—160.

(Reçu le 15 novembre 1951)

On abelian groups every multiple of which is a direct summand.

To Professor Reinhold Baer on his 50th birthday.

By A. KERTÉSZ and T. SZELE in Debrecen (Hungary).

§ 1. Introduction.

In a previous paper [3] one of us has determined all groups every subgroup of which is a direct summand.[1]) These groups are exactly the elementary abelian torsion groups.[2])[3]) The concept of endomorphic image being a notion of intermediate character between those of a subgroup and of a direct summand, the problem mentioned splits up into the following two problems:

Problem I. Determine all groups every endomorphic image of which is a direct summand.

Problem II. Determine all groups every subgroup of which is an endomorphic image of the group.

These problems seem to be very difficult, even in the case of abelian groups. The present paper is devoted to Problem I in case of abelian groups, and this problem will be solved completely for torsion groups as well as for torsion-free groups. There will also be given a class of mixed groups, containing all solutions of Problem I; however, we cannot decide for the moment whether each group of this class has the property involved in Problem I.

---

1) The numbers in brackets refer to the Bibliography at the end of this paper.

2) For notation and terminology see § 2.

3) We are indebted to Professor R. BAER who has kindly informed us of this result being closely related to one of his results (Theorem 3, p. 504 in [2]). In fact, the concept of "retract" and that of direct summand being identical for abelian groups, the result of BAER and that of [3] coincide in case of abelian groups. For arbitrary groups, however, it is not a priori evident that exactly the same groups exhaust the solutions of both problems. This follows only from the fact that a group which is an "absolute retract" in the sense of BAER, as well as a group every subgroup of which is a direct summand, is proved in [2] resp. [3] to be necessarily commutative.

As a matter of fact, our main result (Theorem 1) gives the complete solution of describing all *abelian* groups with the

Property (P): Every multiple of the group is a direct summand of the group.

By a multiple of an additive abelian group G we mean the subgroup nG for some natural number n, i. e. the set of all elements ng with $g \in G$. Therefore property (P) means that the endomorphic image of the group G under the special endomorphism $g \rightarrow ng$ is a direct summand of G for each natural number n. We shall see that for torsion-free groups the groups of property (P) are identical with the solutions of Problem I, and that for torsion groups also the latter are easy to select from among the former. In case of mixed groups, however, we have not yet succeeded completely in effectuating this selection.

Among the abelian groups of the property (P) described completely by Theorem 1, we can distinguish essentially three main categories: the elementary torsion groups, the algebraically closed groups, and some mixed groups which we shall call — by virtue of a generalization given later of the concept of direct sum — "p-direct sums over their torsion subgroups". The groups of the first two categories are well-known. On the other hand, the third category is that of an interesting class of mixed groups which seems to be new, and deserves, for this as well as for other reasons, further investigation. Let us mention but one of their properties: these groups are the simplest and most lucid example of a mixed group the torsion subgroup of which is not a direct summand of the group (see Corollary of Theorem 3). The examples hitherto known in mathematical literature are namely based on more complicated constructions or are groups given by defining relations.

Our investigations are yielding in the way of an additional result also the determination of all mixed abelian groups G, the torsion subgroup T of which is an elementary group, and the factor group G/T algebraically closed (Theorem 3).

§ 2. Preliminaries.

In what follows, by a *group* we shall mean always an additively written *abelian* group with more than one element. Groups will be denoted by Latin capital letters and their elements by $x, a, b, \ldots, g$. The other small Latin letters are reserved for rational integers (in particular p and q for prime numbers). We shall denote the endomorphisms of a group by small Greek letters. A subgroup generated by the elements $a, b, \ldots$ of a group is denoted by $\{a, b, \ldots\}$. A group every element of which is of finite order, is called a *torsion group*. In the contrary case, when every non-zero element of the group is of infinite order, the group is called *torsion-free*. A group which is neither a torsion group nor torsion-free is said to be a *mixed group*. All elements of finite order of a mixed group form a subgroup which we call *the torsion subgroup of the group.*

Let p be an arbitrary prime number. If the group G contains an element of order p, then p is called an *actual prime* for G. The set of all actual primes for G will be called the *actual prime system* of G. If $pG=G$ for each prime p, then G is called *algebraically closed.* Obviously the algebraically closed groups G are exactly those, in which the equation $nx=a$ has a solution $x\in G$ for any $a\in G$ and $n>0$. It is easy to see that any homomorphic image of an algebraically closed group is at the same time itself an algebraically closed group. According to an important theorem of R. BAER *an algebraically closed group is always a direct summand of every containing group* [1].

In what follows, we shall need a generalization of the concept of the direct sum which, for a finite number of summands, coincides with the usual direct sum, and which has plaid already an important role in investigations on mixed groups with commutative ring of endomorphisms [5].

A group G will be called a *direct sum* of its subgroups U_ν, if there exist endomorphisms ε_ν of G such that

1) $\varepsilon_\nu G = U_\nu$;

2) $\varepsilon_\mu \varepsilon_\nu = \begin{cases} \varepsilon_\mu & \text{if } \mu=\nu; \\ 0 & \text{if } \mu \neq \nu; \end{cases}$

3) $g\in G$ and $\varepsilon_\nu g = 0$ for every ν implies $g=0$.

Among the direct sums of the groups U_ν there exists a "greatest" one G_c satisfying the additional requirement:

4) For any choice of a system of representative elements $g_\nu \in U_\nu$ there exists an element g of G such that $\varepsilon_\nu g = g_\nu$ holds for every ν.

This group G_c having the properties 1)—4) is obviously uniquely determined (up to an isomorphism) by the groups U_ν, and will be called the *complete direct sum* of the U_ν's. We denote it by

$$G_c = \sum_\nu U_\nu. \tag{1}$$

The group G_c may also be described as the set of all possible "vectors" $\langle \ldots, g_\nu, \ldots \rangle$ which contain exactly one component g_ν from each group U_ν and which are added component-wise. Clearly any direct sum of the groups U_ν is a subgroup of (1).

On the other hand, among all direct sums of the groups U_ν there exists a "smallest" one G_d, which is a subgroup of any direct sum. This is characterized as the direct sum satisfying

4*) For any element $g\in G$, there are only a finite number of ν's with $\varepsilon_\nu g \neq 0$.

This group

$$G_d = \sum_{\nu}^{*} U_\nu \tag{2}$$

determined uniquely by the groups U_ν as the group satisfying 1), 2), 3) and 4*), is called the *discrete direct sum* of the U_ν's. The group (2) may also be described as the set of all vectors $\langle \ldots, g_\nu, \ldots \rangle$ having only a finite number of components $\neq 0$.

In terms of the complete and discrete direct sums the direct sums of the U_ν's may be characterized as the groups G for which $G_d \subseteq G \subseteq G_c$. For a finite number of U_ν's we have $G_d = G_c$; thus in this case there exists only one direct sum of the U_ν's. Therefore the concept of the direct summand in the generalized sense is the same as that in the old sense.

Let us mention an important example. It is well known that a torsion group T may be represented as the discrete direct sum of its uniquely determined primary components T_p, where T_p is a p-group, i. e. a group containing only elements of p-power order:

$$T = \sum^{*} T_p. \tag{3}$$

Therefore the complete direct sum

$$\bar{T} = \sum T_p \tag{4}$$

is uniquely determined be T; it may be called the *complete p-direct sum over T*. In accordance with this, the groups between T and $\bar{T}$ (T and $\bar{T}$ included), in other words, the direct sums of the groups T_p, may be called the *p-direct sums over T*. It is obvious that, if the actual prime system of T contains an infinity of primes, then all of these, except T, are mixed groups and their torsion subgroup is just T.

We denote by R the additive group of all rational numbers, by $C(p^m)$ the cyclic group of order p^m for an arbitrary natural number m, and by $C(p^\infty)$ the additive group of all rational numbers mod 1 whose denominators are powers of p. It is known [4] that any algebraically closed group A can be represented in the form

$$A = \sum^{*} C(p_\nu^\infty) + \sum^{*} R \tag{5}$$

where the p_ν's are arbitrary primes (distinct or not) and one of the two Σ^*'s of the right member may vanish.

The torsion group T is called an *elementary group* if the order of each element in T is a square-free number. Each primary component of such a group is of the form

$$T_p = \sum^{*} C(p), \tag{6}$$

so that an elementary group T can be represented as a discrete direct sum

$$T = \sum^{*} C(p_\nu) \tag{7}$$

where the p_ν's are arbitrary primes (distinct or not).

§ 3. The main result.

Theorem 1. *An abelian group G has the property* (P) — *i. e. nG is a direct summand of G for any natural number n — if and only if G can be represented as a direct sum*

(8) $$G = A + B$$

where:

a) *A is an algebraically closed group or $A = 0$;*

b) *B is a p-direct sum over its torsion subgroup $T \neq 0$ or $B = 0$;*

c) *T is an elementary group;*

d) *the factor group B/T is algebraically closed.*

Remarks. The direct summand A of G as well as the torsion subgroup T of B is completely described by (5) resp. (7). We show that there exist groups B with the properties b)—d) and we give an oversight on all of them. Indeed, the complete p-direct sum over the group (3), i. e. the group (4) — T being now an arbitrary elementary group — has the property that the factor group $\bar{T}/T$ is algebraically closed. To prove this we must show that if the "vector" $c = \langle \ldots, c_k, \ldots \rangle (c_k \in T_{p_k})$ is an arbitrary element of $\bar{T}$ and q is a prime, then there exists an $x \in \bar{T}$ such that $c - qx \in T$. This is obvious, since one may plainly construct a "vector" x with $c - qx = 0$ or $c - qx \in T_{p_j}$, according as $q \neq p_k, (k = 1, 2, 3, \ldots)$ or $q = p_j$. Now, for a given elementary group T, the determination of all groups B with the properties c) and d) is naturally equivalent to giving all algebraically closed subgroups B/T of the algebraically closed group $\bar{T}/T$. Since the group $\bar{T}/T$ is torsion-free, this process becomes easier by taking into account that if S is an arbitrary subgroup of $\bar{T}/T$ and if we adjoin to S all those elements e of $\bar{T}/T$ for which $re \in S$ with some natural number r, then we obtain an algebraically closed subgroup S_0 of $\bar{T}/T$.

The groups G given by (8) are in general mixed groups. According to Theorem 1 *the only torsion-free groups with the property* (P) *are the groups of type*

(9) $$\sum{}^{*} R,$$

i. e. the algebraically closed torsion-free groups, and *the only torsion groups with the property* (P) *are the groups of type*

(10) $$\sum{}^{*} C(p_\mu^{\alpha}) + \sum{}^{*} C(q_\nu),$$

i. e. the direct sums of an algebraically closed torsion group and of an elementary group. (This is the case $B = T$, with a torsion group A.)

Proof of the necessity of the conditions a)—d) *of Theorem* 1. We shall show that if pG is a direct summand of the group G for any prime p, then G is a group given by (8) with the properties a)—d).

Consider the union A of all algebraically closed subgroups of G. Clearly A itself *is an algebraically closed subgroup of* G and so, by the theorem of BAER mentioned in § 2, the direct decomposition (8) holds with *a suitable group* B *which contains no algebraically closed subgroup* $\neq 0$. Now we state that B contains the subgroup pB as a direct summand for each prime p. Indeed, by our hypothesis and by (8),

$$G = pG + D = A + pB + D, \tag{11}$$

where, because of $D \cong G/pG$,

$$pD = 0. \tag{12}$$

Hence

$$pG = p^2 G,$$

and consequently, by $B \cong G/A$,

$$pB = p^2 B. \tag{13}$$

Now we can show that for the group $H = pB + D$, pH is a direct summand of H. This follows immediately from

$$pB + D = p(pB + D) + D$$

which is a consequence of (12) and (13). On the other hand, by (8) and (11)

$$B \cong G/A \cong pB + D = H$$

and so our assertion on B is proved.

In what follows, let $p_1, p_2, p_3, \ldots$ denote the sequence of *all* primes. Then we have, by the property of B just proved,

$$B = p_k B \dotplus U_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{14}$$

where, because of $U_k \cong B/p_k B$,

$$U_k = \sum{}^{\bullet} C(p_k) \quad \text{or} \quad U_k = 0 \tag{15}$$

according as p_k is an actual prime for B or not. From (14) and (15) we obtain

$$p_k B = p_k (p_k B) \tag{16}$$

which of course is the same as (13). Now we are going to show that in (14) the direct summand U_k too is defined invariantly as the subset of B containing all elements of B of order p_k, and the zero. In order to prove this, it is sufficient to show, that $p_k B$ does not contain any element of order p_k. As a matter of fact, in case of $p_k B$ containing an element c_1 of order p_k, by (16) there would exist a chain $c_1, c_2, c_3, \ldots$ of elements of B, for which

$$c_1 \neq 0, \quad p_k c_1 = 0, \quad p_k c_2 = c_1, \quad p_k c_3 = c_2, \ldots.$$

In that case however $\{c_1, c_2, c_3, \ldots\} \cong C(p_k^\infty)$ would be an algebraically closed subgroup of B, which is impossible.

From the above statement thus proved, there follows also that the primary component T_{p_k} of the torsion group T of the group B coincides with the group U_k in (15). This being true for an arbitrary prime p_k, we obtain that T is an elementary group, i. e. the statement c) of Theorem 1 is true for the group B.

Now we can show that B is a p-direct sum over T. By the uniqueness proved above of both terms on the right hand of (14) we conclude that each element b of B may be written in exactly one way as the sum of an element $\varepsilon_k b$ in U_k and of an element in $p_k B$. It is clear that the mapping $b \rightarrow \varepsilon_k b$ is an endomorphism of B. The endomorphisms thus defined possess obviously the following properties:

1) $\varepsilon_k B = U_k$;

2) $\varepsilon_i \varepsilon_k = \begin{cases} \varepsilon_i & \text{if } i = k; \\ 0 & \text{if } i \neq k; \end{cases}$

3) if $b \in B$ and $\varepsilon_k b = 0$ for every k, then $b = 0$.

Only the third statement requires a proof. $\varepsilon_k b = 0$ being equivalent to $b \in p_k B$, it is sufficient to show that the cross cut of the groups $p_1 B, p_2 B, p_3 B, \ldots$ contains the only element 0. Assume this is not true and let c be an element of infinite order or of prime number order common to all groups $p_k B$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Then there exists, by (16), a chain of elements $c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \ldots$ of B for each natural number k such that

$$p_k c_1^{(k)} = c,\ p_k c_2^{(k)} = c_1^{(k)},\ p_k c_3^{(k)} = c_2^{(k)}, \ldots$$

Clearly $\{c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, \ldots, c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \ldots, \ldots\}$ is a subgroup of type R or of type $C(p^\infty)$ of B according as c is an element of infinite order or of order p. This is however a contradiction, since B contains no algebraically closed subgroup $\neq 0$. This completes the proof of the statement b) of Theorem 1.

Finally consider the factor group B/T. We have, by $U_k \subseteq T$ and by (14),

$$p_k B \cong B/U_k \sim B/T.$$

Hence it follows from (16)

$$p_k(B/T) = B/T$$

for every prime number p_k, i. e. also d) of Theorem 1 holds for the group B.

Proof of the sufficiency of the conditions a)—d) *of Theorem* 1. We are going to show that if G is a group given by (8) and having the properties a)—d) of Theorem 1, then nG is a direct summand of G for each natural number n. We have by $nA = A$

$$nG = A + nB$$

and so it is enough to show that nB is a direct summand of B. Let $n = p_1^{l_1} \ldots p_r^{l_r}$ be the prime power decomposition of n. Then we prove the validity of

$$B = (U_1 + \cdots + U_r) + nB. \tag{17}$$

Clearly

$$nB \cap (U_1 + \cdots + U_r) = 0$$

as the group $U_1 + \cdots + U_r$ contains only elements of order which is a divisor of $p_1 \ldots p_r$ while nB contains no such element $\neq 0$. On the other hand, we have to show that any element $b \in B$ has a representation

$$b = d + nb' \tag{18}$$

with $d \in U_1 + \cdots + U_r$ and $b' \in B$. From condition d) we infer the existence of an element $b_0 \in B$ such that

$$b - nb_0 = d_0 \in T. \tag{19}$$

Now, according to

$$T = (U_1 + \cdots + U_r) + T',$$

the representation

$$d_0 = d + d' \qquad (d \in U_1 + \cdots + U_r, d' \in T') \tag{20}$$

holds. Here $d' = nd''$ with $d'' \in T'$ (the order of d' being prime to n), consequently, by (19) and (20), the validity of (18) is proved with $b' = b_0 + d''$. This completes the proof of (17) and at the same time that of Theorem 1.

§ 4. On abelian groups every endomorphic image of which is a direct summand.

Concerning Problem I mentioned in § 1, we prove the following

Theorem 2. *In order that an abelian group G may contain each of its endomorphic images as a direct summand, it is necessary that G be a group described in Theorem* 1, *with the additional property:*

e) *There exist no elements $a \in A, b \in B$ with the same finite order > 1 (i. e. the actual prime systems of A and B contain no prime in common).*

Remarks. Condition e) says that for the torsion subgroup (10) of G $p_\mu \neq q_\nu$ holds. — We conjecture that the conditions a)—e) for the group G are always sufficient for every endomorphic image of G to be a direct summand of G. For the moment, however, we can prove this only in case of G being either a torsion-free group (i. e. a group of type (9)), or a torsion group (i. e. a group of type (10) with $p_\mu \neq q_\nu$). In these cases the mentioned property of G is an immediate consequence of the fact that an arbitrary endomorphic image of an algebraically closed group is itself algebraically closed (i. e., in virtue of the theorem of Baer quoted in § 2, a direct summand), and that every subgroup of an elementary group is a direct summand. It is an open question whether the groups B, characterized by the conditions b)—d) of Theorem 1, always have each of their endomorphic images as a direct summand. At present we know only that the answer to this question is affirmative whenever B is a complete p-direct sum.

Proof of Theorem 2. Let G be a group every endomorphic image of which is a direct summand. Then by Theorem 1 G is a group with the properties a)—d). Now we suppose that the condition e) is not true for G. Then there exists a prime p_k which is actual for both groups A and B. This means, by (8), (5), (14) and (15), that G can be represented in the form

$$G = C(p_k) + C(p_k^\infty) + H.$$

Hence there exists an endomorphism of G which maps G onto the subgroup of order p_k of $C(p_k^\infty)$. In this case, however, the endomorphic image is not a direct summand of G. This contradiction proves the validity of Theorem 2.

§ 5. On a special class of mixed groups.

In conclusion we give a full oversight on all mixed groups G the torsion subgroup T of which is an elementary group so that G/T is algebraically closed, and we show that these groups form a part of the class of groups G described by Theorem 1. More exactly, there holds the following

Theorem 3. *If the torsion subgroup T of an abelian mixed group G is elementary and the factor group G/T is algebraically closed, then*

$$G = A + B, \tag{21}$$

where A is an algebraically closed torsion-free group (i. e. a group of type (9)) or $A = 0$, and B is a p-direct sum over T such that B/T is algebraically closed.

Remarks. It is well known that each primary component (6) of an elementary group T can be uniquely characterized by the cardinal number of its direct summands $C(p)$. Accordingly the group T itself is completely described by a system of cardinal numbers as its invariants. Similarly, the algebraically closed torsion-free group G/T is in abstracto uniquely determined by the cardinal number of the direct components R in the representation (9). The question remains however open, whether or not the group B described in Theorem 3 is (up to an isomorphism) uniquely determined by the full system of invariants of T and B/T.

Since the group B contains obviously no algebraically closed subgroup $\neq 0$ (the equation $px = b \in B$ being not solvable for each element $b \neq 0$ in B with a suitable prime p), the main assertion of Theorem 3 is the following: *if the torsion subgroup T of an abelian mixed group B containing no algebraically closed subgroup $\neq 0$ is an elementary group and B/T is algebraically closed, then B is a p-direct sum over T.* — On the other hand, the p-direct sums B over an elementary torsion group T with algebraically closed B/T (especially the complete p-direct sum $\overline{T}$ defined by (4)), are very simple examples of mixed groups, the torsion subgroup of which is not a direct summand. As a matter of fact, if for such a group B the representation $B=T+V$ would hold, then by $V\cong B/T$, V would be an algebraically closed subgroup of B which is impossible.

Proof of Theorem 3. Let G be a mixed group the torsion subgroup T of which is elementary and suppose that G/T is algebraically closed. The union A of all algebraically closed subgroups of G being itself an algebraically closed subgroup, the decomposition (21) holds with a suitable group B which contains no algebraically closed subgroup $\neq 0$. The torsion subgroup T of G being elementary, A must be a torsion-free group. Therefore T is a subgroup of B. Now we state that B/T is algebraically closed. This follows immediately from

$$G/T=(A+B)/T\cong A+(B/T)$$

and from the fact that G/T and A are algebraically closed.

In what follows, we have only to prove that B is a p-direct sum over T. Let p_k be an arbitrary prime and U_k the p_k-primary component of T or $U_k=0$ in case of p_k being no actual prime for B. Clearly

$$p_k B\cap U_k=0. \tag{22}$$

On the other hand, B/T being algebraically closed, for any element $b\in B$ there exists an element $b'\in B$ such that

$$b-pb'=d\in T. \tag{23}$$

Now, according to $T=U_k+T'$, the representation $d=d_k+d'$ $(d_k\in U_k,\ d'\in T')$ holds. Here $d'=pd''(d''\in T')$, consequently, by (23),

$$b=d+pb'=d_k+d'+pb'=$$
$$=d_k+p(b'+d'')\in\{U_k,\ p_kB\}.$$

Thus, owing to (22), we have shown that

$$B=p_kB+U_k. \tag{24}$$

where on the right hand both direct summands are uniquely determined by p_k. The equation (24) being the same as the equation (14), from this point onwards the proof is identical with the next to last paragraph of the proof of the necessity of the conditions of Theorem 1 in § 3.

Bibliography.

[1] R. Baer, The subgroup of the elements of finite order of an abelian group, *Annals of Math.*, (2) **37** (1936), pp. 766—781.

[2] R. Baer, Absolute retracts in group theory, *Bulletin American Math. Soc.*, **52** (1946), pp. 501—506.

[3] A. Kertész. On groups every subgroup of which is a direct summand, *Publicationes Math. Debrecen*, **2** (1951), pp. 74—75.

[4] T. Szele, Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), pp. 167—192.

[5] T. Szele and J. Szendrei, On abelian groups with commutative endomorphism ring, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1952), pp. 309—324

(Received March 5, 1952.)

A remark on the Jacobson radical.

By L. FUCHS in Budapest.

In this note we shall give a group-theoretic characterization of the Jacobson radical[1]) of a ring with identity.

1. We shall need an obvious generalization of the Φ-subgroup[2]) of a group to groups with operator domains.

Let G be a non-trivial group, commutative or not, and let G have a (right) operator domain Ω. The Ω-subgroup generated by the elements $a, b, \ldots$ of G will be denoted by $\{a, b, \ldots\}_\Omega$. If $\{a, b, \ldots\}_\Omega = G$, we say that $a, b, \ldots$ form an Ω-generator-system of G. Just as in the case of groups without operators, it is easy to see that the set $\Phi(\Omega)$ of all the elements of G which may be omitted from each Ω-generator-system of G is a subgroup. Moreover, $\Phi(\Omega)$ is an Ω-subgroup, for $x \in \Phi(\Omega)$ and $\alpha \in \Omega$ imply $x\alpha \in \Phi(\Omega)$. In fact, if $\{x\alpha, K\}_\Omega = G$ for a certain subset K of G, then $\{x, K\}_\Omega = G$ and therefore $\{K\}_\Omega = G$, i. e. $x\alpha \in \Phi(\Omega)$. This uniquely determined subgroup $\Phi(\Omega)$ of G will be called the $\Phi(\Omega)$-subgroup of G. One may easily conclude that $\Phi(\Omega)$ is the intersection of the whole group G with all maximal Ω-subgroups of G.

2. Now let R be a ring with an identity 1 and consider the additive group R^+ of R as an operator-group with the right operator domain $R = \Omega$. The R-subgroups of R^+ are just the right ideals of the ring R.

Recall that the Jacobson radical of a ring R is defined as the union of all right ideals of R containing only right quasi-regular elements, and a right quasi-regular element a may be defined by the property of having the form $x + ax$ for some $x \in R$, or, in rings with identity, of being contained in the right ideal[3]) $(1+a)_r$.

---

[1]) The Jacobson radical of a ring was introduced in N. JACOBSON, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *American Journal of Math.*, **67** (1945), pp. 300–320.

[2]) For the Φ-subgroup of a group see: H. ZASSENHAUS, *The theory of groups* (New York, 1949), pp. 47–48.

[3]) If K is a subset of R, the right ideal generated by K will be denoted by $(K)_r$. The sign $\subset$ will denote inclusion, not necessarily a proper one.

We are going to prove the following

Theorem[4]). *The $\Phi(R)$-subgroup of R^+ is equal to the Jacobson radical J of the ring R.*

First proof. N. JACOBSON has proved[5]) that in rings with identity the Jacobson radical J coincides with the intersection of all maximal right ideals of the ring R. Since the maximal right ideals of R are obviously the maximal R-subgroups of R^+, by the last remark in 1 we are led to our assertion.

We shall give even another proof of our theorem, a proof which is based immediately on the definitions and does not make use of any previous result on the Jacobson radical.

Second proof. Let the right ideal $(a)_r$ contain an element b which is not right quasi-regular and consider the right ideal $A=(a, 1+b)_r$. Since $bx \in (a)_r$ and $x+bx \in (1+b)_r$ for each $x \in R$, we obtain that $x=(x+bx)-bx$ belongs to A and hence $A=R$. But $(1+b)_r \neq R$, that is, from the R-generator-system $a, 1+b$ the element a can not be omitted, considering that b does not belong to $(1+b)_r$, b being not a right quasi-regular element. This proves that $\Phi(R) \subset J$.

Conversely, let all the elements of $(a)_r$ be right quasi-regular and $R=(a, K)_r=(a)_r+(K)_r$ for some subset K of R. Since R has an identity 1, we get $-b+r=1$ for some $b \in (a)_r$ and $r \in (K)_r$. Clearly, for this b we have $R=(b, K)_r$. Now take into account that by hypothesis b is a right quasi-regular element and besides that $(K)_r$ contains $r=1+b$, consequently, $b \in (1+b)_r \subset (K)_r$. Therefore it follows that b may be deleted and hence $(K)_r=R$. This shows that $J \subset \Phi(R)$ and hence the proof of the theorem is completed.

Finally let us remark that if we omit the hypothesis of the existence of 1 in R, the theorem in general fails to hold. For example, in the ring of all even rational integers modulo 4, consisting of the elements 0 and 2, the Jacobson radical is the whole ring, while the $\Phi(R)$-subgroup consists of the single element 0.

(Received January 12, 1952.)

---

4) Professor L. RÉDEI has kindly called my attention to the fact that this theorem also holds if the ring is assumed only to have a one-sided unit element. The proof remains the same.

5) See JACOBSON, loc. cit. 1), in particular p. 311.

On immediate inclusion in partially ordered sets and the construction of homology groups for metric lattices.

By DAVID ELLIS in Gainesville (Florida, U. S. A.).

1. Introduction. The notion of immediate inclusion ("covering") is defined in any partially ordered set and thus any partially ordered set gives rise to an immediate inclusion set. In this note, we obtain conditions on a binary relation which characterize the immediate inclusion relations arising from partial orderings. We next point out characterizations of modularity and distributivity in lattices in terms of immediate inclusion. In the last section, we discuss the possibility of generalizing the homology theory of complexes to apply to certain types of normed lattices where the "dimension function" is not necessarily integer-valued.

2. The immediate inclusion relation of a partial ordering. Let P be a set partially ordered by $\leqq$; that is,

PO1 $a \leqq a$,
PO2 $a \leqq b$ and $b \leqq a$ imply $a = b$,
PO3 $a \leqq b$ and $b \leqq c$ imply $a \leqq c$.

We define as usual: $a < b$ if $a \leqq b$ and $a \neq b$; $a \geqq b$ if $b \leqq a$; $a > b$ if $a \geqq b$ and $a \neq b$. We write $a \rightarrow b$, read "a is immediately included in b (or a immediately precedes b)", provided $a < b$ and $a \leqq c \leqq b$ implies $a = c$ or $b = c$.

Lemma 2.1. *If P is a partially ordered set and $\rightarrow$ is the immediate inclusion relation of P, then ($a \rightleftharpoons b$ means $a \rightarrow b$ or $a = b$):*

II1 $a \rightleftharpoons x_1 \rightleftharpoons x_2 \rightleftharpoons \cdots \rightleftharpoons x_\beta \rightleftharpoons a$ *implies $x_\alpha = a$ for all $\alpha \leqq \beta$, where β is any ordinal number;*

II2 $a \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_\beta \rightarrow b$ *implies $a \not\rightarrow b$ where β is a non-zero ordinal number.*

Proof. II1 follows from PO2, PO3, and transfinite induction since $x_\alpha \rightarrow x_\beta$ implies $x_\alpha \leqq x_\beta$. II2 is immediate from the definition of $\rightarrow$, PO3, and transfinite induction.

Lemma 2.2. *If P is a set and $\rightarrow$ is a binary relation on P satisfying* II1 *and* II2 *and if one defines $a<b$ if and only if there is a well-ordered terminating sequence $x_1, x_2, \ldots, x_\beta$ (β is any ordinal number, the sequence need not be countable) with $a \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_\beta \rightarrow b$, then P is partially ordered by $\leqq$ and the immediate inclusion relation arising from $\leqq$ coincides with $\rightarrow$.*

Proof. PO1 follows from definition of $a \leqq b$ as $a<b$ or $a=b$. PO2 is obtained from II1 since $a \leqq b$ and $b \leqq a$ imply a chain of the form $a \rightrightarrows x_1 \rightrightarrows x_2 \rightrightarrows \cdots \rightrightarrows x_\beta \rightrightarrows b \rightrightarrows y_1 \rightrightarrows y_2 \rightrightarrows \cdots \rightrightarrows y_\gamma \rightrightarrows a$. PO3 is immediate from the definition of $\leqq$. The coincidence of $\rightarrow$ and the immediate inclusion relation of $\leqq$ is now obtained immediately from II2.

Theorem 2.1. *A binary relation defined on a set is the immediate inclusion relation of a partial ordering of the set if and only if conditions* II1 *and* II2 *are satisfied.*

It is clear that an isomorphism between two partially ordered sets is necessarily an isomorphism for their immediate inclusion relations. One enquires as to the existence of partially ordered sets for which every II isomorphism is a PO isomorphism. A partial answer is given in

Theorem 2.2. *If P and P' are partially ordered sets in which every ordered pair of elements are joined by a well-ordered principal chain (a chain in which no further interpolation is possible) then every* II *isomorphism of P and P' is a* PO *isomorphism.*

3. Immediacy characterizations of modularity and distributivity in lattices. The possession of meets and joins in a partially ordered set is not closely governed by the immediacy of precession. One may, of course, have lattices in which no pair of elements are immediately ordered. It is somewhat surprising then that the algebraic properties of modularity and distributivity may be characterized in terms of immediate inclusion. In this section, L denotes an arbitrary lattice.

Lemma 3.1. (Birkhoff [1], p. 66) *If L is modular then*

B $\quad a \wedge b \rightarrow a$ *and* $a \wedge b \rightarrow b$ *imply* $a \rightarrow a \vee b$ *and* $b \rightarrow a \vee b$, *and dually.*

Since modularity is a hereditary property we have

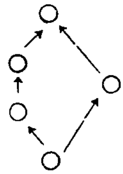
Lemma 3.2. *If L is modular then condition* B *subsists in every sublattice of L.*

One easily constructs examples to show that condition B itself is not hereditary. Thus, to obtain the desired characterization of modularity, we must require condition B for every sublattice.

Theorem 3.1. *A necessary and sufficient condition that L be modular is that condition* B *subsist for every sublattice of L.*

Proof. The necessity is given by Lemma 3. 2. To establish sufficiency we note that if L is not modular, it contains the non-modular picture

(1)

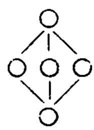


as a sublattice and condition B fails in this sublattice.

Lemma 3. 3. *If L is distributive and $a_1, a_2, \ldots, a_n$* (n a positive integer) *are distinct immediate predecessors of a then the meets of $a_1, a_2, \ldots, a_n$ taken k at a time are distinct; $k=1, 2, \ldots, n$. The dual proposition is also valid.*

Proof. The proposition is obvious for $n=1, 2$. Its falsity for $n=3$ implies the non-distributive picture

(2)



as a sublattice. The proof is completed by induction, for supposing the proposition valid for $n \leqq k$ ($k \geqq 3$) but false for $n=k+1$ leads to a non-modular sublattice. The dual proposition follows from the self-duality of distributive lattices.

For use in the next section we write down the

Corollary. *If L is distributive and an element has n distinct immediate predecessors (immediate successors) then L contains a descending chain (an ascending chain) of at least n distinct elements.*

We shall refer to the property of a lattice expressed in Lemma 3. 3 as condition D.

Theorem 3. 2. *A modular lattice L is distributive if and only if condition* D *subsists in every sublattice.*

Proof. Since distributivity is hereditary, Lemma 3. 3 shows the "only if" part. Suppose L is not distributive. Then L contains the non-distributive picture (2) as a sublattice and condition D fails in this sublattice.

If we strengthen condition D to

D′ *If $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are distinct immediate predecessors of a, then condition* D *holds and the chain $a, a_1, a_1 \wedge a_2, a_1 \wedge a_2 \wedge a_3, \ldots, \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$ is principal; and dually,*

we may obtain from Theorems 3. 1 and 3. 2 a characterization of distributivity without the presumption of modularity.

Theorem 3.3. *L is distributive if and only if condition* D′ *subsists in every sublattice.*

4. Homology groups of normed lattices. The notion of "is a face of" in the theory of complexes may be thought of as immediate inclusion in the set-theoretic ordering of the complex. This suggests the possibility of defining the notion of homology group for suitably restricted normed lattices in much te same manner as for complexes. We restrict attention to distributive normed lattices and discrete coefficient groups (although the use of topological coefficient groups appears to offer no additional difficulty). A discussion of homology groups for complexes may be found in (3) and the notion of a normed lattice as used here may be found in (2).

Since we wish to consider general chains, it is necessary that L be star-finite. We interpret "is a face of" as immediate inclusion and thus the Corollary to Lemma 3.3 assures that L will be star-finite if we impose the finite ascending chain condition on L. The imposition of the finite descending chain condition on L would, of course, make L closure-finite. In the remainder of the paper, L denotes a distributive normed lattice with the finite ascending chain condition. This condition also assures that L has last element corresponding to the entire complex. We define $L^p = \{x \in L \,\|\, |x| = p\}$ and suppose that each L^p has a fixed well-ordering of ordinal type β_p so that L^p may be written $L^p = \{x^p_\alpha\}$; $\alpha < \beta_p$. Let G be an additive Abelian group. We shall employ the tensor convention for the formal summation on a repeated greek index placed once covariantly and once contravariantly. G^p is the set of all formal sums $g^\alpha x^p_\alpha, g^\alpha \in G$. G^p forms, of course, an Abelian group as the direct product of β_p replicas of G and G^p is called the group of p-chains of L over G. We define $\left\{\begin{matrix} q & \beta \\ p & \alpha \end{matrix}\right\}$ to be 0 unless $x^q_\beta \to x^p_\alpha$ or $x^p_\alpha \to x^q_\beta$ in which case the symbol must be 1 or -1. These symbols may be called the incidence numbers. One requires $\left\{\begin{matrix} q & \beta \\ p & \alpha \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} p & \alpha \\ q & \beta \end{matrix}\right\}$. One next defines boundary operators. For $q < p$ let $C^p \in G^p$, $C^p = g^\alpha x^p_\alpha$ and define

$$\partial_q C^p = \left\{\begin{matrix} q & \beta \\ p & \alpha \end{matrix}\right\} g^\alpha x^q_\beta.$$

One sees that ∂_q is a homomorphism of G^p into G^q. The image of G^p is J^q_p, the group of p-bounding q-chains of L over G. The kernel of this homomorphism is written Z^p_q and is the group of p-cycles for G^q.

We would now be in a position to define homology groups except that it may happen that J^q_p is not necessarily a subgroup of Z^r_q for $r < q < p$! Let us examine this possibility.

Remark. For a given α and γ and $r<q<p$ there are at most two $x_\beta^q \in G^q$ with $\begin{Bmatrix} q & \beta \\ p & \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r & \gamma \\ q & \beta \end{Bmatrix} \neq 0$ (β not summed). Otherwise, we would have a non-distributive sublattice of L. The only cases for discussion then are those where there is exactly one or are exactly two such x_β^q.

Remark. If there are exactly two x_β^q as in the preceding remark, then $q-r=p-q$. This follows immediately from the norm condition $|a \vee b| + |a \wedge b| = |a| + |b|$. We assume then that L has the additional property: If $q-r=p-q$, $r<q<p$ there are either two or none of the x_β^q as in the above remarks. If $q-r \neq p-q$ we assume there are no such x_β^q. One may then show by repeated transfinite inductions that the incidence numbers may be so chosen that for a given α and γ and $r<q<p$,

$$\begin{Bmatrix} q & \beta \\ p & \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r & \gamma \\ q & \beta \end{Bmatrix} = 0 \qquad (\beta \text{ summed}).$$

Assuming the requirement of the last remark to be in effect, we have $\partial_r \partial_q C^p = 0$ for $r<q<p$ so that every boundary in L^q is a cycle and $J_p^q \subset Z_r^q$.

The homology group H_{pr}^q may then be defined for $r<q<p$ as the factor group Z_r^q/J_p^q. (As usual, if G were a topological group we would take closures (topological) before taking factor groups.)

One sees then that there is a natural generalization of the notion of homology group from a complex to a suitably restricted normed lattice in which "dimensions" are not necessarily integral. Of course, H_{pr}^q as well as J_p^q and Z_r^q are invariants (up to isomorphism) under isometric isomorphisms of the lattices generating them. The moot (and unanswered) question is: What is the most general class (algebraically defined) of isometric correspondences between lattices of the type under consideration under which the homology groups are invariant? This amounts, in the case of complexes, to the Poincaré question as to the algebraic relations subsisting between arbitrary polyhedral decompositions of homeomorphic spaces.

References.

[1] Garret Birkhoff, *Lattice Theory* (revised edition, New-York, 1948).

[2] L. M. Blumenthal and D. O. Ellis, Notes on lattices, *Duke Math. Journal*, **16** (1949), pp, 585—590.

[3] S. Lefschetz, *Abstract complexes*, Lectures in Topology (University of Michigan Press, 1941), pp. 1–28.

(Received September 13, 1951.)

Verwendung einer klassischen Konfiguration Johann Bolyai's bei der Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene.

Von PAUL SZÁSZ in Budapest.

Nachdem L. GÉRARD[1]) die hyperbolische Trigonometrie in der Ebene mit Vermeidung der *hyperbolischen Parallelen* und des *Grenzkreises* unmittelbar hergeleitet hat, ist H. LIEBMANN[2]) eine Herleitung ohne Zuhilfenahme des Raumes, gerade mit den genannten klassischen Hilfsmitteln geglückt. Seitdem sind mehrere unmittelbare Herleitungen enstanden.[3]) Eine Darstellungsweise wie die von H. LIEBMANN, hat aber aus historischen und methodischen Gründen — wir glauben es — immer noch sein Interesse.

In vorliegender Note wird die LIEBMANNsche Herleitung vereinfacht, indem wir statt der übrigen Formeln der *Streckentrigonometrie* ausser der unten angeführten Formel (4), die klassische Konfiguration von J. BOLYAI[4]) zur Bestimmung des Parallelwinkels als Funktion des Lotes einerseits, und einen Kunstgriff von M. RÉTHY[5]) andererseits verwenden. Anstatt der Rektifikation des Kreisbogens wird der Satz[6]) benützt, laut welchem der Grenzwert

$$K(r) = \lim \frac{s}{\sigma} \qquad (\sigma \to 0) \tag{1}$$

[1]) L. GÉRARD, Sur la géométrie non euclidienne, *Thèse* (Paris, 1892), Chapitre I, ferner mit demselben Titel, *Nouvelles Annales de Mathématique,* (3) **12** (1893), S. 74—84.

[2]) H. LIEBMANN, Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Klasse,* **59** (1907), S. 187—210.

[3]) Siehe z. B. PAUL SZÁSZ, Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene, diese *Acta,* **12 A** (1950), S. 44—52.

[4]) J. BOLYAI, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, etc.,* (Marosvásárhely, 1832), besonders § 29; siehe P. STÄCKEL, *Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen,* II (Leipzig und Berlin, 1913), S. 197.

[5]) M. RÉTHY, Bolyai János „ujj más világának" ismertetése, *Matematikai és Fizikai Lapok,* **12** (1903), S. 1—29, 303—320, insbesondere S. 15—16. Ich möchte an dieser Stelle ein Zitat in meiner Arbeit[3]) richtigzustellen. Der im § 5 meiner Arbeit zitierte Kunstgriff ist erst in dieser Arbeit von RÉTHY zu finden.

[6]) PAUL SZÁSZ, a. a. O. § 1, Satz II.

existiert, wobei σ die Maßzahl eines Zentriwinkels im Kreise mit dem Radius r und s die entsprechende Sehne bedeutet.

Aus der zitierten Arbeit von H. LIEBMANN entnehmen wir die Gleichung des Grenzkreises in rechtwinkligen Koordinaten, wenn ein Punkt auf ihm als Koordinatenanfang und die zugehörige Grenzkreisachse als Abszisse gewählt wird. Diese Gleichung lautet

(2) $$e^x = \operatorname{ch} y.$$ [7]

Hierbei sind x und y *natürliche Maßzahlen*, d. h. *die Längeneinheit ist so gewählt, daß für zwei konzentrische Grenzkreisbogen* $\widehat{AB} > \widehat{A'B'}$ *zwischen denselben Achsen* AA' *und* BB' *im Falle* $\overline{AA'} = \overline{BB'} = 1$ *das Verhältnis* $\widehat{AB} : \widehat{A'B'} = e$ *ausfällt.* Diese Wahl der Längeneinheit wird im folgenden beibehalten.

Zwei Strecken heißen *komplementär*, wenn die Summe der entsprechenden Parallelwinkel ein Rechter ist. Für Komplementärstrecken l, m ergibt sich mit Hilfe von (2)

(3) $$\operatorname{cth} l = \operatorname{ch} m.$$ [8]

H. LIEBMANN[9] hat noch auf Grund von (2) gezeigt, daß im rechtwinkligen Dreieck zwischen der Hypotenuse c, einer Kathete a und dem gegenüberliegenden Winkel $\lambda = \Pi(l)$ (der zum Lote l als Parallelwinkel angehört) die Beziehung

(4) $$\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c} = \frac{1}{\operatorname{ch} l}$$

besteht. Von diesen Formeln (3) und (4) wird im folgenden auch Gebrauch gemacht.

Die vorkommenden Winkel werden in *analytischen Maßzahlen* angegeben, d. h. *die Einheit für die Winkelmessung wird so gewählt, daß sich für den rechten Winkel die Maßzahl* $\frac{\pi}{2}$ *ergibt.*

§ 1. Bestimmung des Parallelwinkels als Funktion des Lotes.

Satz. *Gehören die Spitzwinkel* λ *und* $\frac{\lambda}{2}$ *den Loten* l *bzw.* l_1 *als Parallelwinkel an, so ist*

(5) $$\operatorname{sh} l_1 = e^l.$$

Beweis. Wir stellen die oben zitierte Konfiguration von J. BOLYAI unwesentlich modifiziert her. Der Scheitel des Winkels λ sei mit P, die un-

[7]) H. LIEBMANN, a. a. O. S. 191, Formel (4).
[8]) H. LIEBMANN, a. a. O. S. 192, Formel (6).
[9]) H. LIEBMANN, a. a. O. S. 194, Formel (1).

endlich fernen Punkte seiner Schenkel mit Ω_1 bzw. Ω_2 bezeichnet. Auf der Halbgerade $P\Omega_1$ sei die Strecke $\overline{PQ}=2l$ abgetragen und bezeichne M ihren Mittelpunkt. Nach der Bedeutung von l ist $M\Omega_2 \perp P\Omega_1$ und $\sphericalangle PQ\Omega_2 = = \sphericalangle QP\Omega_2 = \lambda$. Von P bzw. Q aus seien auf die Gerade $\Omega_1\Omega_2$ die Lote $\overline{PT}$, resp. $\overline{QT'}$ gefällt. Dann wird $\sphericalangle TP\Omega_1 = \sphericalangle TP\Omega_2 = \frac{\lambda}{2}$, weil beide Winkel dem Lote $\overline{PT}$ als Parallelwinkel angehören und die Summe $\sphericalangle \Omega_1 P \Omega_2 = \lambda$ haben. Weiter wird $\sphericalangle T'Q\Omega_1 = \sphericalangle T'Q\Omega_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2}$, da die beiden Winkel dem Lote $\overline{QT'}$ als Parallelwinkel entsprechen mit der Summe $\sphericalangle \Omega_1 Q \Omega_2 = = \pi - \lambda$. Also ist $\overline{PT} = l_1$ und $\overline{QT'} = \bar{l}_1$ das Komplement von l_1. Die Gerade $\Omega_1\Omega_2$ sei von dem Grenzkreise durch P mit dem Mittelpunkt Ω_1 in R, von dem durch P und Q mit dem Mittelpunkt Ω_2 in S, endlich von dem Grenzkreise durch Q mit dem Mittelpunkt Ω_1 in U geschnitten, und man setze

$$\overline{TR} = \overline{TS} = t, \quad \overline{T'S} = \overline{T'U} = u.$$

Aus der Konstruktion folgt dann

$$\overline{RU} = \overline{PQ} = 2l, \quad \overline{RS} = 2t, \quad \overline{US} = 2u$$

und $\overline{RS} = \overline{RU} + \overline{US}$, also ist

$$t = l + u.$$

Daraus ergibt sich auf Grund von (2)

$$\operatorname{ch} l_1 = e^l \operatorname{ch} \bar{l}_1.$$

Nach (3) ist aber

$$\operatorname{ch} \bar{l}_1 = \operatorname{cth} l_1$$

da doch $\bar{l}_1$ und l_1 Komplementärstrecken sind, und aus diesen beiden Gleichungen folgt die Behauptung unter (5). W. z. b. w.

Im Besitze dieses Satzes, können wir den Parallelwinkel λ als Funktion des Lotes l, wie folgt, bestimmen.

Die Winkel

$$\lambda, \frac{\lambda}{2}, \ldots, \frac{\lambda}{2^n}, \ldots$$

sollen als Parallelwinkel den Loten

$$l, l_1, \ldots, l_n, \ldots$$

entsprechen.[10]) Wegen $\operatorname{ch} l > 1$ kann ein Spitzwinkel φ durch die Gleichung

$$\frac{1}{\operatorname{ch} l} = \sin \varphi \tag{6}$$

definiert werden. Dann ist

$$\operatorname{sh}^2 l = \frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1 = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi},$$

[10]) Vgl. H. Liebmann, a. a. O. S. 206.

d. h.

$$\operatorname{sh} l = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) ergibt sich nun auf Grund von (5)

$$\operatorname{sh} l_1 = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

woraus folgt

$$\operatorname{ch}^2 l_1 = 1 + \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

also

$$\frac{1}{\operatorname{ch} l_1} = \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich jetzt in ähnlicher Weise

$$\frac{1}{\operatorname{ch} l_2} = \sin\frac{\varphi}{4},$$

u. s. w. Es gilt also allgemein

$$\frac{1}{\operatorname{ch} l_n} = \sin\frac{\varphi}{2^n}. \tag{8}$$

Wir nehmen nun ein gleichschenkliges Dreieck ABB' mit $\sphericalangle BAB' = \frac{\lambda}{2^n}$, $\overline{AB} = \overline{AB'} = r$, $\overline{BB'} = s_n$. Bezeichnet C den Mittelpunkt von $\overline{BB'}$ so ist $\sphericalangle BAC = \frac{\lambda}{2^{n+1}}$, $\overline{BC} = \frac{s_n}{2}$. Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist laut (4)

$$\operatorname{sh}\frac{s_n}{2} = \frac{\operatorname{sh} r}{\operatorname{ch} l_{n+1}},$$

also besteht mit Rücksicht auf (8)

$$\operatorname{sh}\frac{s_n}{2} = \operatorname{sh} r \sin\frac{\varphi}{2^{n+1}}.$$

Hieraus folgt für $n \to +\infty$

$$2^n s_n \to \varphi \operatorname{sh} r.$$

Andererseits gilt auf Grund von (1) für $n \to +\infty$ die Limesbeziehung

$$2^n s_n \to \lambda K(r),$$

und es entsteht somit

$$\varphi = \frac{K(r)}{\operatorname{sh} r}\lambda. \tag{9}$$

Für $\lambda \to \frac{\pi}{2}$ strebt aber $l \to 0$, also nach (6) gleichzeitig $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, aus (9) folgt deshalb

$$\frac{K(r)}{\operatorname{sh} r} = 1$$

d. h. $\varphi = \lambda$. Demnach geht (6) in die Formel

$$\frac{1}{\operatorname{ch} l} = \sin \lambda \tag{10}$$

über.

Damit ist λ als Funktion von l bestimmt.

§ 2. Die Grundformeln der hyperbolischen Trigonometrie.

Für ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c, einer Kathete a und dem gegenüberliegenden Winkel λ gilt nach (4) und (10) die Formel

$$\sin \lambda = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c}. \tag{I}$$

Daraus folgt für das allgemeine Dreieck mit den Seiten a, b, c und gegenüberliegenden Winkel λ, μ, ν offenbar

$$\sin \lambda : \sin \mu : \sin \nu = \operatorname{sh} a : \operatorname{sh} b : \operatorname{sh} c. \tag{I*}$$

Die Beziehung zwischen einer Kathete a, dem gegenüberliegenden Winkel λ, und dem anderen Spitzwinkel μ eines rechtwinkligen Dreiecks, können wir nun mit Hilfe des zitierten Kunstgriffes von M. RÉTHY bekommen. Wird nämlich das rechtwinklige Dreieck mit seinem Spiegelbild in Bezug auf die andere Kathete ergänzt, so gilt in dem so erhaltenen allgemeinen Dreieck laut (I*)

$$\frac{\sin 2\lambda}{\sin \mu} = \frac{\operatorname{sh} 2a}{\operatorname{sh} c},$$

und daraus ergibt sich mit Rücksicht auf (I)

$$\frac{\cos \lambda}{\sin \mu} = \operatorname{ch} a. \tag{II}$$

Die Formeln (I) und (II) haben schon die ganze hyperbolische Trigonometrie zur Folge.

(*Eingegangen am 27. Februar 1952.*)

Über die Lage der kritischen Punkte rationaler Funktionen.

Von GYULA SZ.-NAGY in Szeged.

1. Es werden im folgenden rationale Funktionen n-ten Grades

$$R(z)=\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_n z^n}{\beta_0+\beta_1 z+\cdots+\beta_n z^n} \qquad (|\alpha_n|+|\beta_n|\neq 0) \tag{1}$$

betrachtet, die *irreduzibel* sind, d. h. für die die Polynome $f(z)$ und $g(z)$ keinen gemeinsamen Polynomteiler besitzen. Unter dem *Index* m von $R(z)$ wird die größte der ganzen Zahlen $k\leqq n-1$ verstanden, für die

$$\alpha_k\beta_n-\beta_k\alpha_n\neq 0 \tag{2}$$

gilt. (Polynome und ihre Reziproken haben insbesondere den Index 0.)

Die Z-Stellen der Funktion $R(z)$ sind die Nullstellen des Polynoms

$$f(z)-Zg(z)=(\alpha_0-Z\beta_0)+(\alpha_1-Z\beta_1)z+\cdots+(\alpha_n-Z\beta_n)z^n. \tag{3}$$

Im Falle $\alpha_n-Z\beta_n\neq 0$ hat $R(z)$ n endliche Z-Stellen (jede nach ihrer Vielfachheit gerechnet). Ist aber $\alpha_n-Z\beta_n=0$, also $Z=U=\lim\limits_{z=\infty}R(z)$, so hat die Funktion $R(z)$ nur m endliche U-Stellen $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Der Punkt $z=\infty$ ist eine $(n-m)$-fache U-Stelle von $R(z)$. Dieser Wert U und die Punkte $u_1, u_2, \ldots, u_m$ werden *außergewöhnlich* genannt. Man hat $U=\frac{\alpha_n}{\beta_n}$, $U=\infty$ bzw. $U=0$, je nachdem $\alpha_n\beta_n\neq 0$, $\beta_n=0$, bzw. $\alpha_n=0$.

Wir setzen

$$\begin{aligned} f_0(z)&=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_m z^m, & f_1(z)&=\alpha_{m+1}z^{m+1}+\alpha_{m+2}z^{m+2}+\cdots+\alpha_n z^n,\\ g_0(z)&=\beta_0+\beta_1 z\ \cdots+\beta_m z^m, & g_1(z)&=\beta_{m+1}z^{m+1}+\beta_{m+2}z^{m+2}+\cdots+\beta_n z^n. \end{aligned} \tag{4}$$

Aus der Definition von m folgt die Proportionalität

$$\alpha_{m+1}:\alpha_{m+2}:\cdots:\alpha_n=\beta_{m+1}:\beta_{m+2}:\cdots:\beta_n,$$

so daß $f_1(z)$ und $g_1(z)$ sich nur in einem konstanten Faktor unterscheiden. Deshalb ist

$$\begin{vmatrix} f' & f \\ g' & g \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f_0'+f_1' & f_0+f_1 \\ g_0'+g_1' & g_0+g_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f_0' & f_0 \\ g_0' & g_0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_0' & f_1 \\ g_0' & g_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1' & f_0 \\ g_1' & g_0 \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt, daß die höchste Potenz von z im Polynom

(5) $$D(z)=f'(z)\,g(z)-g'(z)f(z)$$

den Exponenten $n+m-1$ und den Koeffizienten $(m-n)(\alpha_m\beta_n-\beta_m\alpha_n)\neq 0$ besitzt. Wir nennen $D(z)$ *das kritische Polynom* und seine Nullstellen *die kritischen Punkte von* $R(z)$. Die rationale Funktion $R(z)$ n-ten Grades und vom Index m hat also $n+m-1$ kritische Punkte (mit Vielfachheiten gerechnet).

Aus der Identität

(6) $$R'(z)=\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g^2(z)}=\frac{D(z)}{g^2(z)}$$

folgt, daß jede endliche Nullstelle der Derivierten $R'(z)$ ein kritischer Punkt ist.

Ein kritischer Punkt z_0 der Funktion $R(z)$ ist nur dann keine Nullstelle der Derivierten $R'(z)$, wenn er ein mehrfacher Pol von $R(z)$ ist. Im Punkt z_0 verschwindet nämlich $R'(z)$ nur dann nicht, wenn $g(z_0)=0$ ist. Dann folgt aber aus der Gleichung $D(z_0)=f'(z_0)g(z_0)-g'(z_0)f(z_0)=0$, daß $g'(z)=0$ ist, weil beide Gleichungen $g(z_0)=0$ und $f(z_0)=0$ wegen der Irreduzibilität von $R(z)$ nicht bestehen können.

Ein kritischer Punkt der rationalen Funktion $R(z)$, der kein mehrfacher Pol von $R(z)$ ist, ist also eine Nullstelle der Derivierten $R'(z)$.

Der Punkt $z=\infty$ ist dann eine Nullstelle von $R'(z)$, wenn $D(z)$ einen kleineren Grad besitzt, als $g^2(z)$.

2. Die eingeführten Begriffe sind für eine Klasse der rationalen Funktionen charakteristisch im folgenden Sinne:

Sind a, b, c, d der Ungleichung $\Delta=ad-bc\neq 0$ genügende, sonst beliebige Zahlen, so hat jede rationale Funktion in der Schar

(7) $$S(z)\doteq\frac{aR(z)+b}{cR(z)+d}=\frac{af(z)+bg(z)}{cf(z)+dg(z)}=\frac{F(z)}{G(z)}$$

denselben Grad, denselben Index, dieselben außergewöhnlichen Punkte und dieselben kritischen Punkte. Die A-Stellen der Funktion $R(z)$ stimmen mit den $B=\dfrac{aA+b}{cA+d}$-Stellen der Funktion $S(z)$ überein.

Der Grad von $S(z)$ ist nicht kleiner als n, weil (wegen $\Delta\neq 0$) $a\alpha_n+b\beta_n$, $c\alpha_n+d\beta_n$ gleichzeitig nur dann verschwinden, wenn α_n und β_n beide verschwinden, was aber wegen $|\alpha_n|+|\beta_n|\neq 0$ nicht zutrifft.

Aus der Identität

$$\begin{vmatrix} a\alpha_k+b\beta_k & a\alpha_n+b\beta_n \\ c\alpha_k+d\beta_k & c\alpha_n+d\beta_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha_k & \alpha_n \\ \beta_k & \beta_n \end{vmatrix}$$

folgt, daß die Funktionen $R(z)$ und $S(z)$ denselben Index haben.

Wegen der Identität $F'(z)G(z)-G'(z)F(z)=(ad-bc)D(z)$ stimmen die kritischen Punkte der Funktionen $R(z)$ und $S(z)$ überein. Die übrigen Behauptungen sind klar.

Sind $f(z)$ und $g(z)$ beliebige teilerfremde Polynome, a und b ($|a|+|b|\neq 0$) beliebige Zahlen, so gibt es unter den Gradzahlen der Polynome $af(z)+bg(z)$ offenbar zwei und nur zwei verschiedene. Die größere ist der Grad, die kleinere ist der Index der rationalen Funktion $R(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$.

3. Die Gleichung (6) läßt sich auch in der Form

$$\frac{R'(z)}{R(z)}=\frac{D(z)}{f(z)g(z)}=\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{g'(z)}{g(z)} \tag{8}$$

schreiben. Für beliebige Konstanten A und B ($\neq A$) ergibt sich die Identität

$$\frac{f'(z)-Ag'(z)}{f(z)-Ag(z)}-\frac{f'(z)-Bg'(z)}{f(z)-Bg(z)}=\frac{(A-B)\,D(z)}{[f(z)-Ag(z)]\,[f(z)-Bg(z)]}. \tag{9}$$

Die Lage der Nullstellen der Derivierten einer gebrochenen rationalen Funktion oder die Lage der kritischen Punkte wurde in der Literatur[1]) fast ausschließlich in bezug auf die Nullstellen und Pole der Funktion untersucht. In dieser Arbeit wird auf Grund der Gleichung (9) gezeigt, daß diese zwei Punktgruppen sich durch die Punktgruppen der A-Stellen und B-Stellen ($B\neq A$) ersetzen lassen. Dabei wird sich auch die Rolle der Gruppe der außergewöhnlichen Punkte erhellen.

Ist z_0 ein kritischer Punkt der Funktion (1) und ist $R(z_0)=C$, so ist z_0 eine mindestens zweifache C-Stelle von $R(z)$, weil im Punkt z_0 die Funktion $R(z)-C$ und ihre Derivierte verschwinden. Sind

$$h_a(z)=f(z)-Ag(z)\equiv\alpha\prod_{k=1}^{n}(z-a_k),$$

$$h_b(z)=f(z)-Bg(z)\equiv\beta\prod_{k=1}^{n}(z-b_k),\qquad h_u(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-u_k)$$

und bezeichnet z_0 einen kritischen Punkt, der von den mehrfachen Nullstellen der Polynome $h_a(z)$ und $h_b(z)$ bzw. $h_a(z)$ und $h_u(z)$ verschieden ist, so erhält man aus (9) die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-b_k}=0 \text{ bzw. } \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-a_k}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z_0-u_k}=0. \tag{10}$$

Daraus folgt die folgende Form eines Satzes von Walsh[2]):

[1]) Vgl. J. Dieudonné, La théorie analytique des polynomes d'une variable (à coefficients quelconques), *Mémorial des Sciences Math.*, Fasc. **93** (1938), S. 48—56; M. Marden, *The geometry of the zeros of polynomial in a complex veriable* (New York, 1949), S. 67—82; L. J. Walsh, *The location of critical points of analytic and harmonic functions* (New York, 1950), S. 89—216.

[2]) J. L. Walsh, On the location of the roots of the Jacobian of two binary forms, and of the derivative of a rational function, *Transactions American Math. Soc.*, **19** (1918), S. 291—298.

Ein von den mehrfachen A- und B-Stellen verschiedener kritischer Punkt der rationalen Funktion $R(z)$ ist eine Gleichgewichtslage eines materiellen Punktes der Ebene, auf den die A- bzw. B-Stellen dem Abstand umgekehrt proportionale abstoßende bzw. anziehende Kräfte ausüben. Dies gilt auch dann, wenn B durch den außergewöhnlichen Wert U von $R(z)$ ersetzt wird.

Hat nähmlich die Summe dieser Kräfte in der Richtung der reellen bzw. imaginären Achse die Komponente X bzw. Y, so ist der reelle bzw. imaginäre Teil der Gleichung (10) zu X bzw. Y proportional.

4. Bezeichnen a_k^*, b_k^*, u_k^* die Spiegelbilder der Punkt a_k, b_k, u_k in bezug auf den Punkt z_0, ist also $a_k^*-z_0=-(a_k-z_0)$, $b_k^*-z_0=-(b_k-z_0)$, $u_k^*-z=-(u_k-z_0)$, so nimmt (10) die Form an:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-a_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-b_k^*}=0,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-a_k^*}+\sum\frac{1}{z_0-b_k}=0,$$

$$\text{bzw.}\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-a_k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z_0-u_k^*}=0.$$

Sind

$$h_a^*(z)=\alpha\prod_{k=1}^{n}(z-a_k^*),\ h_b^*(z)=\beta\prod_{k=1}^{n}(z-b_k^*)\ \text{ und }\ h_u^*(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-u_k),$$ so ist z_0 eine Nullstelle der Derivierten der Polynome $h_a(z)\,h_b^*(z)$, $h_a^*(z)\,h_b(z)$, $h_a(z)\,h_u^*(z)$, $h_a^*(z)\,h_u(z)$. Nach dem Satz von GAUSS und LUCAS liegt z_0 in der konvexen Hülle der Nullstellen jedes Polynoms. Es gibt also durch z_0 keine Gerade, von der die Punktgruppen der A-Stellen und B-Stellen oder diejenigen der A- und U-Stellen getrennt wären.

5. Der Polarpunkt ζ_0 eines Punktes z_0 der komplexen Ebene bezüglich der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wird bekanntlich durch die Gleichung

$$\frac{n}{z_0-\zeta_0}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-a_k}\tag{11}$$

definiert. Auf Grund der ersten Gleichung von (10) ist der Polarpunkt eines kritischen Punktes z_0 der rationalen Funktion $R(z)$ bezüglich ihrer A-Stellen derselbe, wie bezüglich ihrer B-Stellen, wenn z_0 keine A- oder B-Stelle ist und wenn $A\neq U$ und $B\neq U$ sind. Der Polarpunkt z_0 bezüglich der U-Stellen bleibt nur dann derselbe, wenn man den außergewöhnlichen Punkten $u_1, u_2, \ldots, u_m$ den Punkt $z=\infty$ $(n-m)$-fach hinzurechnet.

Nach einem LAGUERREschen Satz werden die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von jedem Kreis durch das Punktpaar z_0 und ζ_0 getrennt. Daraus folgt der Satz:

Sind A und B keine außergewöhnlichen Werte einer rationalen Funktion $R(z)$ und enthält der Kreisbereich K_1 bzw. K_2 die A- bzw. B-Stellen von $R(z)$, so besitzt $R(z)$ außerhalb beider Kreisbereiche keinen kritischen Punkt. Haben K_1 und K_2 keinen Punkt gemeinsam und hat $R(z)$ den Grad n und den Index $n-1$, so enthalten beide Bereiche je $n-1$ kritische Punkte.

Für den Polarpunkt ζ_a bzw. ζ_b des kritischen Punktes z_0 bezüglich der A-bzw. B-Stellen nach (10) gilt $\zeta_a = \zeta_b$. Diese Gleichheit kann aber nicht bestehen, wenn z_0 außerhalb beider Bereiche K_1 und K_2 liegt, weil dann ζ_a zu K_1, ζ_b zu K_2 gehört.

Die kritischen Punkte der Funktionen $R(z)$ und

$$S(z) = \frac{R(z)-A}{R(z)-B} = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{z-b_k}$$

stimmen überein. Haben K_1 und K_2 keinen Punkt gemeinsam und verändern sich die Punkte a_k in K_1 und die Punkte b_k in K_2 stetig, so verändern sich die zugehörigen kritischen Punkte stetig uud kein kritischer Punkt kann den Rand von K_1 oder K_2 überschreiten. Widrigenfalls gäbe es eine rationale Funktion, die einen kritischen Punkt außerhalb beider Bereiche K_1 und K_2 besitzt. Bei der Veränderung der Punkte a_k und b_k in K_1 bzw. K_2 hat also die zugehörige Funktion in K_1 bzw. in K_2 ebensoviel kritische Punkte, wie die Funktion $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n$, wo a bzw. b ein beliebiger Punkt von K_1 bzw. K_2 ist. Diese Funktion hat in K_1 und K_2 je $n-1$ kritische Punkte, weil sie das kritische Polynom

$$D(z) = (b-a)(z-a)^{n-1}(z-b)^{n-1}$$

besitzt.

Es gilt die folgende Form eines Satzes von WALSH[3]):

Enthält der Kreisbereich K_1 bzw. K_2 jede A-Stelle bzw. jeden außergewöhnlichen Punkt einer rationalen Funktion $R(z)$ n-ten Grades und vom Index m, so fällt jeder kritische Punkt von $R(z)$ in mindestens einen der Bereiche

$$K_1,\ K_2,\ K_3 = \frac{nK_2 - mK_1}{n-m}.$$

Der Bereich K_3 besteht aus den Punkten $z_3 = \frac{nz_2 - mz_1}{n-m}$, wenn z_1 bzw. z_2 ein beliebiger Punkt von K_1 bzw. K_2 ist. Haben K_1 und K_2 keinen Punkt gemeinsam, so enthält K_1, K_2 bzw. K_3 $n-1$, $m-1$ bzw. 1 kritische Punkte.

Für den Polarpunkt ζ_1 bzw. ζ_2 eines kritischen Punktes z_0 bezüglich der A-Stellen bzw. der endlichen U-Stellen erhält man aus (10) die Gleichungen

$$\frac{n}{z_0-\zeta_1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_0-a_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{z_0-u_k} = \frac{m}{z_0-\zeta_2},\ z_0 = \frac{n\zeta_2 - m\zeta_1}{n-m}.$$

Liegt z_0 außerhalb beider Bereiche K_1 und K_2, so gehört ζ_1 zu K_1, ζ_2 zu K_2. Folglich ist z_0 ein Punkt von K_3.

---

[3]) J. L. WALSH, On the location of the roots of the Jacobian of two binary forms and of the derivative of a rational function, *Transactions American Math. Soc.*, **22** (1921), S. 101–116. Vgl. das Buch von WALSH, Fußnote[1]), S. 104.

Haben K_1 und K_2 keinen Punkt gemeinsam, so haben auch K_1 und K_3, sowie K_2 und K_3 keinen Punkt gemeinsam. Dies folgt aus der Gleichung von z_3. Verändern sich die Punkte a_k in K_1 und die Punkte u_k in K_2 stetig, so verändern sich die kritischen Punkte stetig, ohne den Rand von K_1, K_2 und K_3 zu überschreiten. $R(z)$ hat deshalb in K_1, K_2 bzw. K_3 ebensoviel kritische Punkte, wie $\frac{(z-a)^n}{(z-u)^m}$ wo a bzw. u einen beliebigen Punkt von K_1 bzw. K_2 bezeichnet. Für diese Funktion ist $D(z)=(n-m)(z-a)^{n-1}(z-u)^{m-1}\left(z-\frac{nu-ma}{n-m}\right)$. Damit ist der Satz bewiesen.

6. Ein Satz von J. DIEUDONNÉ[4]) gilt auch in der Form:

Enthält ein Kreisbereich K jede A-Stelle ($A \neq U$) einer rationalen Funktion $R(z)$, so enthält er mindestens einen kritischen Punkt.

Eine mehrfache A-Stelle ist auch ein kritischer Punkt. Man kann also annehmen, daß die A-Stellen, also die Nullstellen des Polynoms $f(z)-Ag(z)\equiv \equiv h(z)$ einfach sind.

Sind $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ ($\nu=n+m-1$) die kritischen Punkte und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die A-Stellen der Funktion $R(z)$ n-ten Grades und vom Index m, so hat man

$$D(z)=f'(z)g(z)-g'(z)f(z)\equiv h'(z)g(z)-g'(z)h(z),$$

$$\frac{D'(z)}{D(z)}=\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{z-z_k}=\frac{h''(z)\,g(z)-g''(z)\,h(z)}{h'(z)\,g(z)-g'(z)\,h(z)}.$$

Der Polarpunkt ζ_p des Punktes a_p bezüglich der kritischen Punkte genügt der Gleichung

$$Z_p\equiv\frac{\nu}{a_p-\zeta_p}=\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{a_p-z_k}=\frac{D'(a_p)}{D(a_p)}=\frac{h''(a_p)}{h'(a_p)}.$$

Die Zahlen $Z_p (p=1, 2, \ldots, n)$ sind Residua der rationalen Funktion

$$H(z)=\frac{h''(z)}{h(z)};$$

ihre Summe verschwindet, weil $z=\infty$ kein Pol von $R(z)$ ist.

Zum Beweis des Satzes können wir annehmen, daß K die obere Halbebene ist, weil dies durch eine lineare Transformation erreicht werden kann. Wäre dann der Satz unrichtig, so wäre jeder kritische Punkt im Innern der unteren Halbebene gelegen. Dann wären auch die Polarpunkte ζ_p unterhalb der rellen Achse gelegen, weil die kritischen Punkte von jedem Kreis durch das Punktpaar a_p und $\zeta_p (p=1, 2, \ldots, n)$ getrennt werden. Deshalb hätten die Zahlen ζ_p und Z_p negative Imaginärteile. Die Summe der Residua von

[4]) J. DIEUDONNÉ, Sur quelques points de la théorie des zéros des polynomes, *Bulletin des Sciences Math.*, (2) 58 (1934), S. 273—296.

$R(z)$ kann also nicht verschwinden. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des Satzes.

Daraus erhält man im Falle $n=2$ bzw. $n=3$:

Jede rationale Funktion zweiten Grades, die in den Punkten a_1 und $a_2 (\neq a_1)$ denselben Wert annimmt, hat im Kreis mit dem Durchmesser (a_1, a_2) mindestens einen kritischen Punkt.

Jede rationale Funktion dritten Grades, die in den Punkten a_1, a_2, a_3 denselben Wert besitzt, hat im Umkreis des Dreiecks mit den Eckpunkten a_1, a_2, a_3 mindestens einen kritischen Punkt.

(*Eingegangen am 21. Oktober 1951.*)

On a theorem of L. Rédei and J. Szép concerning p-groups.

By NOBORU ITÔ in Nagoya (Japan).

In their recent paper[1]) L. RÉDEI and J. SZÉP obtained the following interesting result on p-groups: Let G be a p-group such that $G=\{H, A\}$, where H is a subgroup of G and A is an element of G. If $D(G)$[2]) contains $D(\{H, A^{p^2}\})$ properly then $D(G)$ also contains $D(\{H, A^p\})$ properly. Further they have made the following two conjectures: (1) The index of $(\{H, A^p\})$ in G is greater than that of $\{H, A^{p^2}\}$ in $\{H, A^p\}$. (2) The index of $D(\{H, A^p\})$ in $D(G)$ is greater than that of $D(\{H, A^{p^2}\})$ in $D(\{H, A^p\})$.

Now, in this note, we want to generalize a little more the above theorem of L. RÉDEI and J. SZÉP (§ 1) and settle negatively the above conjectures of them (§ 2).

§ 1.

Theorem. *Let G be a p-group and let F and H be the Frattini subgroup and any subgroup of G, respectively. If $D(G)$ contains $D(H)$ properly, then $D(G)$ also contains $D(FH)$ properly.*

Proof. We prove this assertion by an induction argument with respect to the index of H in G and the order of G.

First we can assume that H contains $D(G)$. In fact, if H does not contain $D(G)$, $HD(G)$ contains H properly, therefore, $HD(G)$ contains a subgroup K, in which H has the index p. Since H is normal in K, H contains $D(K)$. Further since the index of K in G is smaller than that of H in G and $D(G)$ contains $D(K)$ properly, $D(G)$ contains $D(FK)$ properly by the induction hypothesis. Since $D(KF)$ contains $D(HF)$, $D(G)$ contains $D(HF)$ properly. Therefore we can assume that H contains $D(G)$, that is, we can assume that H is normal in G.

Secondly we can assume that $D(H)$ is equal to E. In fact, if $D(H)$ is different from E, let us consider the factor group $G/D(H)$. Since the Frattini

[1]) L. RÉDEI—J. SZÉP, Über die endlichen nilpotenten Gruppen, *Monatshefte für Math.*, 55 (1951), pp. 200—205.

[2]) We denote by $D(X)$ the commutator subgroup of the group X.

subgroup $F(G/D(H))$ of $G/D(H)$ is equal to $F/D(H)$ and the order of $G/D(H)$ is smaller than that of G, $D(G)$ contains $D(FH)$ properly by the induction hypothesis. Therefore we can assume that $D(H)$ is equal to E, that is, H is abelian.

Thirdly we can assume that $D(G)$ is of order p. In fact, if $D(G)$ is not of order p, $D(G)$ contains properly a central subgroup C of order p and G/C is not abelian. Since the Frattini subgroup $F(G/C)$ of G/C is equal to F/C and the order of G/C is smaller than that of G, $D(G)$ contains $D(FH)$ properly by the induction hypothesis. Therefore we can assume that $D(G)$ is of order p. In particular the centre $Z(G)$ of G contains $D(G)$, that is, G is of class 2.

Finally, in a p-group G of class 2 such that $D(G)$ is of type $(p, p, \ldots, p)$, the subgroup $W(G)$, which is generated by all the p-th powers of the elements of G, is contained in $Z(G)$. In fact, $(A^p, B) = (A, B)^p = E$ for any elements A, B of G. Therefore in such a group $Z(G)$ contains $W(G)$, whence $Z(G)$ contains F, and FH is abelian. Thus we complete the proof of our assertion.

§ 2.

Now here are the counter-examples to the conjectures (1) and (2) of Rédei and Szép.

Example 1. Let G be a group of order p^{p^2+2} such that $G=\{A, B_1, B_2, \ldots, B_{p^2}\}$, where $A^{p^2}=B_1^p=B_2^p=\cdots=B_{p^2}^p=E$ and $A^{-1}B_1A=B_2, \ldots, A^{-1}B_{p^2}A=B_1$. Put $H=\{B_1, B_2, \ldots, B_p\}$. Then *a*) the index of $\{H, A^p\}$ in G is equal to p and that of H in $\{H, A^p\}$ is equal to p^{p^2-p+1}; *b*) the index of $D(\{H, A^p\})$ in $D(G)$ is equal to p^{p-1} and the order of $D(\{H, A^p\})$ is equal to $p^{p(p-1)}$

Example 2.[3]) Let G be a group of order p^{2p+2} such that $G=$ $=\{A, B_1, \ldots, B_{2p-1}, B_{2p}\}$, where $A^{p^2}=B_1^p=\cdots=B_{2p-1}^p=B_{2p}^p=E$ and $A^{-1}B_1A=B_1, B_2, \ldots, A^{-1}B_{2p-1}A=B_{2p-1}B_{2p}$, $A^{-1}B_{2p}A=B_{2p}$. Put $H=$ $=\{B_1, \ldots, B_p\}$. Then *a*) the index of $\{H, A^p\}$ in G is equal to p and that of H in $\{H, A^p\}$ is equal to p^{p+1}; *b*) the index of $D(\{H, A^p\})$ in $D(G)$ is equal to p^{p-1} and the order of $D(\{H, A^p\})$ is equal to p^p.

Mathematical Institute,
Nagoya University.

(Received 27 February, 1952.)

---

3) This example is due to Mr. M. Nagata.

A theorem on the normalcy of completely continuous operators.

By TSE-PEI CHIANG in Peking (China).

Let A be a completely continuous operator in a Hilbert space $\mathfrak{H}$, and let the eigenvalues of the operator A and of the non-negative selfadjoint operator A^*A be denoted by α_i and $\varkappa_i$ $(i=1,2,\ldots)$ respectively, which are so arranged that

(1) $$|\alpha_1|\geqq|\alpha_2|\geqq\cdots,\quad \varkappa_1\geqq\varkappa_2\geqq\cdots.$$

Long ago I. SCHUR [1] proved the following inequalities

(2) $$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu\leqq\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_\nu \qquad (\nu=1,2\ldots),$$

where

(3) $$\lambda_i=|\alpha_i|^2\quad (i=1,2,\ldots).$$

Recently H. WEYL [2] showed that the inequalities

(4) $$\varphi(\lambda_1)+\varphi(\lambda_2)+\cdots+\varphi(\lambda_\nu)\leqq\varphi(\varkappa_1)+\varphi(\varkappa_2)+\cdots+\varphi(\varkappa_\nu)\quad(\nu=1,2,\ldots)$$

hold for every function $\varphi(x)$ which is defined on $[0,\infty)$ and increasing, such that $\varphi(e^\xi)$ is a convex function of ξ. More recently G. PÓLYA [3] gave an elementary proof of Weyl's inequality. These facts led me to extend a theorem of HARDY-LITTLEWOOD-PÓLYA [4] (see theorem 1). By means of this extension it can be shown that if $\psi(x)$ is any strictly increasing convex function defined on $[0,\infty)$, then the condition

(N) $$\varliminf_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\psi(\varkappa_i)-\sum_{i=1}^{n}\psi(\lambda_i)\right)=0$$

implies the normalcy of the operator A (see theorem 2). Of course this class of functions $\psi(x)$ is much narrower than the class of functions $\varphi(x)$ figuring in Weyl's theorem. We remark that our theorem is not true for the class of functions $\varphi(x)$. A counter example will be given at the end of this paper.

We start with the

Definition. A sequence of numbers $\alpha_1', \alpha_2', \ldots$ is said to be quasi-majorised by a sequence of numbers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ if the following conditions are satisfied

(i) $\alpha_i' \geqq 0, \qquad \alpha_i \geqq 0 \qquad (i=1,2,\ldots),$

(ii) $\alpha_1' \geqq \alpha_2' \geqq \ldots, \qquad \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots,$

(iii) $\alpha_1' + \alpha_2' + \ldots + \alpha_\nu' \leqq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$

(iv) $$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i'\right] = 0.$$

Theorem I. *Let $\{\alpha_i'\}$ and $\{\alpha_i\}$ be two sequences of numbers, such that $\alpha_i' \geqq 0$, $\alpha_i \geqq 0$ $(i=1,2,\ldots)$ and*

$$\alpha_1' \geqq \alpha_2' \geqq \ldots, \quad \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots .$$

The sequence $\{\alpha_i'\}$ is quasi-majorised by the sequence $\{\alpha_i\}$ if and only if there exist two sequences of positive integers

$$n_1 \leqq n_2 \leqq \ldots, \quad \nu_1 < \nu_2 < \ldots \quad \textit{with} \quad n_i \leqq \nu_i \qquad (i=1,2,\ldots),$$

so that for every positive integer k we can find ν_k^2 non-negative numbers

(5) $$p_{\mu\nu}^{(k)} \geqq 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, \nu_k)$$

such that

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_k} p_{\mu\nu}^{(k)} = 1 \;\; (\mu = 1, 2, \ldots, \nu_k), \qquad \sum_{\mu=1}^{\nu_k} p_{\mu\nu}^{(k)} = 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \nu_k)$$

and

(6) $$\alpha_\mu' = \sum_{\nu=1}^{\nu_k} p_{\mu\nu}^{(k)} \alpha_\nu \;\; (1 \leqq \mu \leqq \nu_k,\ \mu \neq n_k) \quad \alpha_{n_k}' \leqq \sum_{\nu=1}^{\nu_k} p_{n_k\nu}^{(k)} \alpha_\nu,$$

furthermore

(7) $$\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{\nu_k} p_{n_k\nu}\alpha_\nu - \alpha_{n_k}'\right] = 0.$$

Proof. That the condition is sufficient, is evident. To prove the necessity we need the following lemmas.

Lemma I. *Suppose $\alpha_l - \alpha_l'$ is the first negative difference among the differences $\alpha_i - \alpha_i'$ $(i=1,2,\ldots)$, and $\alpha_k - \alpha_k'$ the last positive difference which precedes $\alpha_l - \alpha_l'$, i. e.*

$$\alpha_\nu' \leqq \alpha_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1),$$
$$\alpha_k' < \alpha_k, \ \alpha_{k+1}' = \alpha_{k+1}, \ldots, \ \alpha_{l-1}' = \alpha_{l-1}, \ \alpha_l' > \alpha_l .$$

If we take

(8) $$\alpha_k = \varrho + \tau, \ \alpha_l = \varrho - \tau,$$

and define σ by

(9) $$\sigma = \max(|\alpha_k' - \varrho|, \ |\alpha_l' - \varrho|),$$

then $0 \leqq \sigma < \tau \leqq \varrho$, and the sequence of numbers $\{\alpha_i'\}$ is quasi-majorised by *the sequence of numbers* $\{\alpha_i''\}$ *which is defined as*

$$\text{(T)}\qquad \begin{cases} \alpha_k'' = \dfrac{\tau+\sigma}{2\tau}\alpha_k + \dfrac{\tau-\sigma}{2\tau}\alpha_l, \\[2mm] \alpha_l'' = \dfrac{\tau-\sigma}{2\tau}\alpha_k + \dfrac{\tau+\sigma}{2\tau}\alpha_l, \\[2mm] \alpha_\nu'' = \alpha_\nu \qquad (\nu \neq k,\ \nu \neq l). \end{cases}$$

Moreover, for the sequence $\{\alpha_i''\}$ *so defined, at least one of the equalities* $\alpha_k'' = \alpha_k'$, $\alpha_l'' = \alpha_l'$ *is true.*

This has been proved by HARDY, LITTLEWOOD and PÓLYA [3, p. 47—48] when both sequences are supposed to be null after a finite number of terms. However their proof remains valid for the present lemma almost word for word.

Suppose $\alpha_1 - \alpha_1' > 0$. Then, if we apply the transformation T (see above lemma) to the sequence $\{\alpha_i\}$ successively, the first element α_1 must be affected after a finite number of times. For, if not, we shall have

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \geqq \alpha_1 - \alpha_1' \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

which contradicts to the hypothesis that $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i'\right) = 0.$

Let m be the least number of times for the first element α_1 to be affected in the successive application of the transformations T. Then the sequence $\{\alpha_i^*\}$ arising from $\{\alpha_i\}$ by the m-times successive application of the transformations T, will enjoy the following properties:

1) $\{\alpha_i'\}$ is quasi-majorised by $\{\alpha_i^*\}$.

2) There exist n^2 non-negative numbers

$$p_{\mu\nu} \geqq 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

with

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} = 1 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n), \qquad \sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu\nu} = 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so that

$$\alpha_\mu^* = \sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu}\alpha_\nu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n), \quad \alpha_\mu^* = \alpha_\mu \qquad (\mu = n+1, n+2, \ldots).$$

3) $$\begin{cases} \alpha_\mu' = \alpha_\mu^* \quad (1 \leqq \mu \leqq n,\ \mu \neq 1,\ \mu \neq n_0), \\ \alpha_1' \leqq \alpha_1^*, \quad \alpha_{n_0}' \leqq \alpha_{n_0}^*, \end{cases}$$

where n_0 is an integer, $1 < n_0 \leqq n$. Moreover, at least one of the equalities $\alpha_1' = \alpha_1^*$, $\alpha_{n_0}' = \alpha_{n_0}^*$ is true.

4) $$\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i - \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i' \geqq \alpha_1 - \alpha_1' \qquad (1 \leqq \nu < n).$$

Thus we have proved the

Lemma 2. *Let the sequence $\{\alpha_i'\}$ be quasi-majorised by the sequence $\{\alpha_i\}$. If $\alpha_1-\alpha_1'>0$ and if $\alpha_l-\alpha_l'$ is the first which is negative among the differences $\alpha_i-\alpha_i'$ $(i=1, 2, \ldots)$, then there exist n^2 $(n\geqq l)$ non-negative numbers $p_{\mu\nu}\geqq 0$ $(\mu, \nu=1, 2, \ldots, n)$ with*

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu}=1 \quad (\mu=1, 2, \ldots, n), \quad \sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu\nu}=1 \quad (\nu=1, 2, \ldots, n),$$

such that

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_\mu'=\sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu}\,\alpha_\nu \quad (\mu \neq 1, \mu \neq n_0), \\ \alpha_1' \leqq \sum_{\nu=1}^{n} p_{1\nu}\,\alpha_\nu, \\ \alpha_{n_0}' \leqq \sum_{\nu=1}^{n} p_{n_0\nu}\,\alpha_\nu, \end{array}\right. \tag{11}$$

where n_0 is a certain positive integer, $1<n_0\leqq n$, and

$$\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i-\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i' \geqq \alpha_1-\alpha_1' \qquad (1\leqq \nu<n). \tag{12}$$

Moreover, among the two inequalities in (11), *at least one equality sign holds.*

We now proceed to the proof of the necessity part of theorem I.

By means of lemma 2, the sequence of transformation matrices

$$(p_{\mu\nu}^{(k)})_{\mu,\nu=1,2,\ldots,\nu_k} \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{13}$$

required in the theorem, is obtained subsequently. It remains to show

$$\lim_{k=\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{\nu_k} p_{n_k\nu}^{(k)}\,\alpha_\nu-\alpha_{n_k}'\right)=0. \tag{14}$$

To prove this, we suppose to the contrary that

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left(\sum_{\nu=1}^{\nu_k} p_{n_k\nu}^{(k)}\alpha_\nu-\alpha_{n_k}'\right)=d>0,$$

i. e.

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_k} p_{n_k\nu}^{(k)}\alpha_\nu-\alpha_{n_k}' \geqq \frac{d}{2} \qquad (k\geqq N_0),$$

where N_0 is a certain fixed positive integer. Then we shall have

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i' \geqq \frac{d}{2} \qquad (n\geqq \nu_{N_0}),$$

which is evidently contrary to the hypothesis. This completes the proof of the theorem.

Theorem 2. *Let $\psi(x)$ be a strictly increasing convex function defined on $[0,\infty)$. Then the condition*

$$\text{(N)} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\psi(x_i)-\sum_{i=1}^{n}\psi(\lambda_i)\right)=0.$$

implies the normalcy of the operator A.

Proof. We have [2]

$$(15)\qquad \begin{array}{l} \psi(\lambda_1)\geqq\psi(\lambda_2)\geqq\cdots, \qquad\qquad \psi(x_1)\geqq\psi(x_2)\geqq\cdots, \\ \psi(\lambda_1)+\psi(\lambda_2)+\cdots+\psi(\lambda_\nu)\leqq\psi(x_1)+\psi(x_2)+\cdots+\psi(x_\nu) \quad (\nu=1,2,\ldots). \end{array}$$

Let

$$(16)\qquad \alpha_i'=\psi(\lambda_i)-\psi(0),\quad \alpha_i=\psi(x_i)-\psi(0) \qquad (i=1,2,\ldots).$$

Then the sequence of numbers $\{\alpha_i'\}$ is quasi-majorised by the sequence of numbers $\{\alpha_i\}$, and by theorem I, there exist two sequences of positive integers

$$n_1\leqq n_2\leqq\cdots,\ \nu_1<\nu_2<\cdots \text{ with } n_i\leqq\nu_i \qquad (i=1,2\ldots)$$

so that, for every positive integer k, we can find ν_k^2 non-negative numbers $p_{\mu\nu}^{(k)}\geqq 0$ $(\mu,\nu=1,2,\ldots,\nu_k)$ with

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_k}p_{\mu\nu}^{(k)}=1 \quad (\mu=1,2,\ldots,\nu_k),\quad \sum_{\mu=1}^{\nu_k}p_{\mu\nu}^{(k)}=1 \qquad (\nu=1,2,\ldots,\nu_k),$$

and

$$(17)\qquad \begin{cases} \alpha_\mu' = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu_k}p_{\mu\nu}^{(k)}\alpha_\nu \quad (1\leqq\mu\leqq\nu_k,\quad \mu\neq n_k), \\ \alpha_{n_k}'\leqq \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu_k}p_{n_k\nu}^{(k)}\alpha_\nu, \\ \displaystyle\lim_{k=\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{\nu_k}p_{n_k\nu}^{(k)}\alpha_\nu-\alpha_{n_k}'\right)=0, \end{cases}$$

i. e.

$$(18)\qquad \begin{cases} \psi(\lambda_\mu) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu_k}p_{\mu\nu}^{(k)}\psi(x_\nu) \quad (1\leqq\mu\leqq\nu_k,\quad \mu\neq n_k), \\ \psi(\lambda_{n_k})\leqq \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu_k}p_{n_k\nu}^{(k)}\psi(x_\nu), \\ \displaystyle\lim_{k=\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{\nu_k}p_{n_k\nu}^{(k)}\psi(x_\nu)-\psi(\lambda_{n_k})\right)=0, \end{cases}$$

or

$$(19)\qquad \begin{cases} \psi(\lambda_\mu)=\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu_k}p_{\mu\nu}^{(k)}\psi(x_\nu) \quad (1\leqq\mu\leqq\nu_k,\quad \mu\neq n_k), \\ \psi(\lambda_{n_k})+\theta_k=\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu_k}p_{n_k\nu}^{(k)}\psi(x_\nu), \end{cases}$$

where $\theta_k = \sum_{\nu=1}^{\nu_k} p_{n_k\nu}^{(k)} \psi(\varkappa_\nu) - \psi(\lambda_{n_k})$. Hence $\theta_k \geqq 0$, and $\lim_{k=\infty} \theta_k = 0$. Since the inverse function ψ^{-1} of the function ψ is concave and also strictly increasing, we have

$$(20)\qquad \begin{cases} \psi^{-1}\psi(\lambda_\mu) \geqq \sum_{\nu=1}^{\nu_k} p_{\mu\nu}^{(k)} \psi^{-1}\psi(\varkappa_\nu) & (1 \leqq \mu \leqq \nu_k, \quad \mu \neq n_k), \\ \psi^{-1}(\psi(\lambda_{n_k}) + \theta_k) \geqq \sum_{\nu=1}^{\nu_k} p_{n_k\nu}^{(k)} \psi^{-1}\psi(\varkappa_\nu), \end{cases}$$

i. e.

$$(21)\qquad \begin{cases} \lambda_\mu \geqq \sum_{\nu=1}^{\nu_k} p_{\mu\nu}^{(k)} \varkappa_\nu & (1 \leqq \mu \leqq \nu_k, \quad \mu \neq n_k), \\ \lambda_{n_k} + \theta_k' \geqq \sum_{\nu=1}^{\nu_k} p_{n_k\nu}^{(k)} \varkappa_\nu, \end{cases}$$

where $\theta_k' = \psi^{-1}(\psi(\lambda_{n_k}) + \theta_k) - \lambda_{n_k}$. Hence $\theta_k' \geqq 0$ and $\lim_{k\to\infty} \theta_k' = 0$. It follows, by summing up these ν_k inequalities,

$$(22)\qquad \theta_k' + \sum_{\mu=1}^{\nu_k} \lambda_\mu \geqq \sum_{\mu=1}^{\nu_k} \varkappa_\mu,$$

i. e.

$$(23)\qquad \theta_k' \geqq \sum_{\mu=1}^{\nu_k} \varkappa_\mu - \sum_{\mu=1}^{\nu_k} \lambda_\mu.$$

On the other hand

$$(24)\qquad \sum_{\mu=1}^{\nu_k} \varkappa_\mu - \sum_{\mu=1}^{\nu_k} \lambda_\mu \geqq 0.$$

Hence

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{\mu=1}^{\nu_k} \varkappa_\mu - \sum_{\mu=1}^{\nu_k} \lambda_\mu \right) = 0.$$

That is to say

$$(N_1)\qquad \varliminf_{n\to\infty} \left(\sum_{\mu=1}^{n} \varkappa_\mu - \sum_{\mu=1}^{n} \lambda_\mu \right) = 0.$$

Thus the proof of the theorem 2 will be complete, if we are able to prove that the condition (N_1) implies the normalcy of the operator A. For this, we need several lemmas.

Lemma 3. *Let α be an eigenvalue of order ν of the operator A. Then there exists a set of ν orthonormal vectors $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$, so that*

$$A\varphi_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_{\mu j} \varphi_j \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \nu)$$

with $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \cdots = \alpha_{\nu\nu} = \alpha$.

Lemma 4. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ be a set of m orthonormal vectors and*

$$A\xi_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} \beta_{\mu\nu}\xi_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Suppose γ is an eigenvalue of order n of the operator A, and that the characteristic function of the matrix

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & & & \\ \beta_{21} & \beta_{22} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \ldots & \beta_{mm} \end{pmatrix}$$

and $(x-\gamma)^n$ are relatively prime. Then there exist n vectors $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, so that

1) *$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ is a set of $m+n$ orthonormal vectors,*

2) *$A\eta_i = \sum_{j=1}^{m+i} \nu_{m+i,\, j}\,\eta_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ with*

$$\nu_{m+1,\, m+1} = \nu_{m+2,\, m+2} = \cdots = \nu_{m+n,\, m+n} = \gamma.$$

By lemmas 3, 4, there exists an orthonormal system of vectors $\omega_1, \omega_2, \ldots$, such that the closed linear manifold $\mathfrak{M}$ generated from these vectors is invariant under the transformation A, and

$$A\omega_i = \alpha_{i1}\omega_1 + \alpha_{i2}\omega_2 + \cdots + a_{ii}\omega_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

with $a_{ii} = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$. But

$$\sum_{i=1}^{n} (A^*A\omega_i, \omega_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

i. e.

$$\sum_{i=1}^{n} (A\omega_i, A\omega_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

or

$$\sum_{\substack{i \geqq j \\ i, j = 1, 2, \ldots, n}} |a_{ij}|^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

or

$$\sum_{\substack{i > j \\ i, j = 1, 2, \ldots, n}} |a_{ij}|^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{26}$$

From (26) and the condition (N_1) it results immediately

$$\sum_{i > j} |a_{ij}|^2 = 0.$$

Hence $a_{ij} = 0$ $(i > j;\ i, j = 1, 2, \ldots)$ and

$$A\omega_i = \alpha_i\omega_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Let $\mathfrak{N}$ be the orthogonal complement of $\mathfrak{M}$. If ω is any vector of unit norm in $\mathfrak{N}$, then we have

$$\sum_{i=1}^{n}(A^*A\omega_i, \omega_i)+(A^*A\omega, \omega) \leqq \sum_{i=1}^{n+1}\varkappa_i \qquad (n=1,2,\ldots),$$

i. e.

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i+(A^*A\omega, \omega) \leqq \sum_{i=1}^{n+1}\varkappa_i \qquad (n=1,2,\ldots),$$

or

$$(27) \qquad (A^*A\omega, \omega) \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)+\varkappa_{n+1} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Condition (N_1) and (27) together with that $\lim_{n\to\infty}\varkappa_n=0$ imply

$$(A^*A\omega, \omega)=0; \quad (A\omega, A\omega)=0.$$

Hence $A\omega=0$ for every $\omega\in\mathfrak{N}$. This proves the normalcy of the operator A.

*

We conclude this paper by giving an example to show that theorem 2 is no longer true, if the function $\psi(\varkappa)$ is supposed to be strictly increasing on $[0,\infty)$, so that $\psi(e^\xi)$ is a convex function of ξ. Let

$$\psi(\varkappa)=\begin{cases}\varkappa, & (0\leqq\varkappa\leqq 1),\\ \dfrac{\log\varkappa}{\log 2}+1 & (1<\varkappa<\infty).\end{cases}$$

Then

$$\psi(e^\xi)=\begin{cases}e^\xi & (-\infty<\xi\leqq 0),\\ \dfrac{\xi}{\log 2}+1 & (0\leqq\xi<\infty).\end{cases}$$

Evidently $\psi(\varkappa)$ is a strictly increasing function defined on $[0,\infty)$, and $\psi(e^\xi)$ is a convex function of ξ. Suppose A is linear operator in the 2-dimensional Euclidean space. Using matrix notation, we let

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ & \sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Thus

$$A^*=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \\ 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix} \qquad A^*A=\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 3\end{pmatrix}.$$

The eigenvalues of A are $\alpha_1=\alpha_2=\sqrt{2}$ (hence $\lambda_1=\lambda_2=2$) and the eigenvalues of A^*A are $\varkappa_1=4$, $\varkappa_2=1$. Now

$$\psi(\lambda_1)+\psi(\lambda_2)=2\psi(2)=2\left(\frac{\log 2}{\log 2}+1\right)=4,$$

$$\psi(\varkappa_1)+\psi(\varkappa_2)=\psi(4)+\psi(1)=\left(\frac{\log 4}{\log 2}+1\right)+1=4.$$

Hence $\psi(\lambda_1)+\psi(\lambda_2)=\psi(\varkappa_1)+\psi(\varkappa_2)$. But A is not normal. This gives a counter example.

Bibliography.

[1] Schur, I., Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution, mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, *Math. Annalen,* **66** (1909), pp. 488—510.

[2] Weyl, H., Inequalities Between the Two Kinds of Eigenvalues of a Linear Transformation, *Proceedings National Academy of Sciences U. S. A.,* **35** (1949), pp. 408—411.

[3] Pólya, G., Remark on Weyl's Note: Inequalities Between the Two Kinds of Eigenvalues of a Linear Transformation, *ibid.,* **36** (1950), pp. 49—51.

[4] Hardy G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G., *Inequalities* (Cambridge, 1934).

Department of Mathematics,
Peking University,
Peking, China.

(Received August 10, 1951.)

Beweis einer Vandiver'schen Vermutung bezüglich des zweiten Falles des letzten Fermat'schen Satzes.

Von PETER DÉNES in Budapest.

Es seien p eine ungerade Primzahl, $\Omega(\zeta)$ der Kreiskörper der p-ten Einheitswurzeln, $\zeta = e^{2\pi i/p}$, $\lambda = 1-\zeta$, $\mathfrak{l} = [\lambda]$, $\Lambda = (1-\zeta)(1-\zeta^{-1})$, ε_0 eine Einheit in $\Omega(\zeta)$.

VANDIVER[1]) bewies den folgenden Satz: *Unter den Bedingungen:*

1°. *Der zweite Faktor der Klassenzahl von $\Omega(\zeta)$ ist nicht durch p teilbar;*

2°. *Keiner der Bernoullischen Zahlen B_{np} $\left(n = 1,\ldots, \frac{p-3}{2}\right)$ ist durch p^3 teilbar;*

ist die Fermat'sche Gleichung im zweiten Fall

$$\xi^p + \eta^p = \varepsilon_0 \cdot \Lambda^{mp} \psi^p \tag{1}$$

mit nicht verschwindenden, relativ primen Zahlen ξ, η, ψ des reellen Unterkörpers $\Omega(\zeta+\zeta^{-1})$ von $\Omega(\zeta)$ unlösbar.

In einer späteren Arbeit gab VANDIVER[2]) seiner Ansicht Ausdruck, daß *die Bedingung der Teilerfremdheit der Zahlen ξ, η, ψ im obigen Satz weglassen werden kann,* er bewies jedoch diese Vermutung nicht.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir diese Vandiver'sche Vermutung beweisen.

Es soll also angenommen werden, daß die Zahlen ξ, η keinen gemeinsamen Zahlenfaktor, aber den gemeinsamen Idealfaktor $\mathfrak{d}$ als größten gemeinsamen Teiler besitzen:

$$[\xi, \eta] = \mathfrak{d};$$

$\mathfrak{d}$ ist ein Ideal des Unterkörpers $\Omega(\zeta+\zeta^{-1})$.

Die Gleichung (1) zerfällt in die bekannten Faktoren:

$$\begin{cases} \xi+\eta = \mathfrak{l}^{2mp-p+1}\mathfrak{j}_0^p\mathfrak{d} \\ \xi+\eta\zeta^i = \mathfrak{l}\mathfrak{j}_i^p\mathfrak{d} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1), \end{cases} \tag{2}$$

---

1) H. S. VANDIVER, On Fermat's last theorem, *Transactions American Math. Soc.*, **31** (1929), pp. 613—642.

2) H. S. VANDIVER, Summary of results and proofs on Fermat's last theorem, V, *Proceedings National Acad. Sci. USA*, **16** (1930), pp. 298—304.

in welchen $\mathfrak{j}_0, \mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_{p-1}$ zueinander und zu $\mathfrak{l}$ prime Ideale in $\Omega(\zeta)$ sind. Hätten nämlich etwa $\mathfrak{j}_i$ und $\mathfrak{j}_k$ das von dem Einheitsideal verschiedene Ideal $\mathfrak{a}$ als gemeinsamen Faktor, so erhalten wir aus der Differenz der i-ten und k-ten Gleichung in (2), daß auch

$$\frac{\xi}{\mathfrak{d}} \quad \text{und} \quad \frac{\eta}{\mathfrak{d}}$$

durch $\mathfrak{a}$ teilbar sein müßten; dies ist jedoch unmöglich, da $\frac{\xi}{\mathfrak{d}}$ und $\frac{\eta}{\mathfrak{d}}$ relativ prim sind.

Es bestehen mit Rücksicht auf die erste Gleichung in (2) die folgenden Kongruenzen:

$$\frac{\xi+\eta\zeta^i}{1-\zeta^i} = \frac{\xi+\eta}{1-\zeta^i} - \eta \equiv -\eta \pmod{\mathfrak{l}^p} \qquad (i=1,2,\ldots,p-1).$$

Bedeuten i und k zwei beliebige Zahlen aus $1, 2, \ldots, p-1$ und a eine positive ganze Zahl, $a \leqq p$, so ist

$$(3) \qquad \left(\frac{\xi+\eta\zeta^i}{1-\zeta^i}\right)^a \left(\frac{\xi+\eta\zeta^k}{1-\zeta^k}\right)^{p-a} \equiv -\eta^p \pmod{\mathfrak{l}^p}.$$

Aus (2) und (3) folgt, daß das Hauptideal

$$\mathfrak{j}_i^{ap}\,\mathfrak{j}_k^{(p-a)p}\,\mathfrak{d}^p \qquad (i, k=1,2,\ldots,p-1)$$

einer primären Zahl in $\Omega(\zeta)$ gleich ist[3]). Gemäß Lemma 1 der zitierten Arbeit von Vandiver[1]) ist ein Ideal, dessen p-te Potenz eine primäre Zahl ist, selbst ein Hauptideal, falls der zweite Faktor der Klassenzahl von $\Omega(\zeta)$ prim zu p ist:

$$(4) \qquad \mathfrak{j}_i^{a}\,\mathfrak{j}_k^{p-a}\,\mathfrak{d} \sim 1 \qquad (i, k=1,2,\ldots,p-1).$$

Zufolge der Gleichungen (2) gilt außerdem

$$(5) \qquad \mathfrak{j}_k^{p}\,\mathfrak{d} \sim 1 \qquad (k=1,2,\ldots,p-1)$$

und wenn man in (4) $a=1$ setzt, ergibt sich aus (4) und (5):

$$(6) \qquad \mathfrak{j}_i \sim \mathfrak{j}_k \qquad (i, k=1,2,\ldots,p-1).$$

Wir nehmen jetzt in Betracht, daß nach (1), (2)

$$(7) \qquad [\psi] = \mathfrak{d} \prod_{i=0}^{p-1} \mathfrak{j}_i \sim 1$$

ist, woraus wegen (5) und (6)

$$(8) \qquad \mathfrak{j}_0 \sim \mathfrak{j}_k \qquad (k=1,2,\ldots,p-1)$$

folgt. $\mathfrak{j}_0$ ist zufolge (2) reell, gehört also zu einer Idealklasse C_0 des Körpers $\Omega(\zeta+\zeta^{-1})$. Ist $\mathfrak{t}$ ein reelles Ideal der Klasse C_0^{-1}, welches keinen Hauptidealteiler

[3]) Eine Zahl α des Körpers $\Omega(\zeta)$ heißt primär, wenn es eine Zahl β im $\Omega(\zeta)$ gibt, welche die Kongruenz $\alpha \equiv \beta^p \pmod{\mathfrak{l}^p}$ erfüllt.

besitzt, so sind zufolge (8) die $\mathfrak{t}\mathfrak{j}_k$ Hauptideale in $\Omega(\zeta)$:

(9) $$[\varrho_k] = \mathfrak{t}\mathfrak{j}_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Die $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{p-1}$ bezeichnen zahlenteilerfremde Zahlen des Körpers $\Omega(\zeta)$, welche Eigenschaft daraus folgt, daß die Ideale $\mathfrak{j}_0, \mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_{p-1}$ relativ prim sind und $\mathfrak{t}$ keinen Hauptidealteiler besitzt.

Nach der Definition kann ϱ_0 reell angenommen werden, dagegen kann man die Zahlen ϱ_k und ϱ_{p-k} $\left(k = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$ konjugiert imaginär wählen.

Bezeichnet k eine von $0, i$ und $p-i$ verschiedene Zahl, $k, i < p$, so können wir aus (2) mittels (9) die folgenden drei Gleichungen bilden:

(10) $$\begin{cases} \dfrac{\xi+\eta}{\xi+\eta\zeta^k} = \beta_0 \lambda^{(2m-1)p} \dfrac{\varrho_0^p}{\varrho_k^p}, \\[2mm] \dfrac{\xi+\eta\zeta^i}{\xi+\eta\zeta^k} = \beta_i \dfrac{\varrho_i^p}{\varrho_k^p}, \\[2mm] \dfrac{\xi+\eta\zeta^{-i}}{\xi+\eta\zeta^k} = \beta_{p-i} \dfrac{\varrho_{p-i}^p}{\varrho_k^p}, \end{cases}$$

wo $\beta_0, \beta_i, \beta_{p-i}$ Einheiten in $\Omega(\zeta)$ sind. Aus diesen folgt

(11) $$\varrho_i^p - \vartheta_i \varrho_{p-i}^p = \vartheta_0 \lambda^{(2m-1)p} \varrho_0^p$$

mit den Einheiten

$$\vartheta_0 = (1+\zeta^i) \frac{\beta_0}{\beta_i},$$

(12) $$\vartheta_i = -\zeta^i \frac{\beta_{p-i}}{\beta_i} = \frac{\xi+\eta\zeta^{-i}}{1-\zeta^{-i}} \, \frac{1-\zeta^i}{\xi+\eta\zeta^i} \, \frac{\varrho_i^p}{\varrho_{p-i}^p}.$$

Wir zeigen jetzt, daß $\vartheta_i = 1$ ist. Wird die Gleichung (12) als eine Kongruenz nach dem Modul $\mathfrak{l}^p$ untersucht, so ergibt sich ϑ_i primär. Da eine Einheit des Körpers $\Omega(\zeta)$ das Produkt einer reellen Einheit und einer Einheitswurzel ist, ist jede primäre Einheit in $\Omega(\zeta)$ reell. Demzufolge erzeugt die Substitution $(s = \zeta : \zeta^{-1})$ aus (11) die Gleichung

$$\varrho_{p-i}^p - \vartheta_i \varrho_i^p = -\vartheta_0 \lambda^{(2m-1)p} \varrho_0^p,$$

was mit (11) zusammen

$$\vartheta_i = 1$$

ergibt. Dann lautet (11) so:

(13) $$\varrho_i^p - \varrho_{p-i}^p = \vartheta_0 \lambda^{(2m-1)p} \varrho_0^p,$$

welche Gleichung wieder in p Faktoren zerfällt:

(14) $$\begin{cases} \varrho_i - \varrho_{p-i} = \mathfrak{l}^{(2m-2)p+1} \mathfrak{t} \mathfrak{g}_{i0}^p \\ \varrho_i - \varrho_{p-i}\zeta^j = \mathfrak{l} \mathfrak{t} \mathfrak{g}_{ij}^p \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} j = 1, 2, \ldots, p-1 \\ i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2} \end{matrix}\right),$$

in welchen $\mathfrak{g}_{i0}, \ldots, \mathfrak{g}_{i,p-1}$ $\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$ zueinander und zu $\mathfrak{l}$ prime. Ideale des reellen Unterkörpers $\Omega(\zeta + \zeta^{-1})$ von $\Omega(\zeta)$ sind, weil ihre Werte sich durch Anwendung der Substitution $(s = \zeta : \zeta^{-1})$ auf die Gleichungen (14) nicht ändern.

Da ϱ_i und ϱ_{p-i} in (13) zur p-ten Potenz vorkommen, können dieselben durch Multiplikation mit einer Einheitswurzel semiprimär gemacht werden, d. h. sie sind nach dem Modul $\mathfrak{l}^2$ mit einer ganzen rationalen Zahl kongruent. Da ferner ϱ_i und ϱ_{p-i} konjugiert imaginär sind, sind sie nach $\mathfrak{l}^2$ mit derselben ganzen rationalen Zahl kongruent, also ist ihre Differenz mindenstens durch $\mathfrak{l}^2$ teilbar. Das ergibt

$$(2m-2)p + 1 > 1,$$

d. h. $m > 1$, woraus

$$\varrho_i - \varrho_{p-i} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}^{2p+1}} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right) \tag{15}$$

folgt.

Wegen

$$\frac{\varrho_i - \varrho_{p-i}\zeta^j}{\varrho_k - \varrho_{p-k}\zeta^j} = \frac{\mathfrak{g}_{ij}^p}{\mathfrak{g}_{kj}^p} \qquad \left(\begin{matrix} j = 1, 2, \ldots, p-1 \\ i, k = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2} \end{matrix}\right),$$

sind die Ideale $\frac{\mathfrak{g}_{ij}}{\mathfrak{g}_{kj}}$ zufolge der Voraussetzung 1° Hauptideale, da dieselben reell und ihre p-te Potenzen Hauptideale sind; es gilt also für $j = 1$

$$\frac{\varrho_i - \varrho_{p-i}\zeta}{\varrho_k - \varrho_{p-k}\zeta} = \delta_{ik} \frac{\varphi_i^p}{\varphi_k^p} \qquad \left(i, k = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right),$$

wo δ_{ik} Einheiten und φ_i, φ_k Zahlen in $\Omega(\zeta)$ sind, woraus wegen (15)

$$\frac{\varrho_i}{\varrho_k} \equiv \frac{\varrho_{p-i}}{\varrho_{p-k}} \equiv \delta_{ik} \frac{\varphi_i^p}{\varphi_k^p} \pmod{\mathfrak{l}^{2p}} \qquad \left(i, k = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right) \tag{16}$$

folgt.

Aus (10) können wir ferner die folgenden reellen Gleichungen bilden:

$$\frac{\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2}{(\xi + \eta\zeta^k)(\xi + \eta\zeta^{-k})} = \Theta_0 \Lambda^{(2m-1)p} \frac{\varrho_0^{2p}}{\varrho_k^p \varrho_{p-k}^p} \tag{17}$$

$$\frac{\xi^2 + \xi\eta(\zeta^i + \zeta^{-i}) + \eta^2}{(\xi + \eta\zeta^k)(\xi + \eta\zeta^{-k})} = \Theta_i \frac{\varrho_i^p \varrho_{p-i}^p}{\varrho_k^p \varrho_{p-k}^p} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right), \tag{18}$$

in welchen $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_{\frac{p-1}{2}}$ reelle Einheiten in $\Omega(\zeta)$ sind. Indem wir $k > 2$ wählen und aus den drei Gleichungen (17) und (18) (für $i = 1, 2$) die Zahlen $\xi^2 + \eta^2$

und $\xi\eta$ eliminieren, erhalten wir mit den Bezeichungen $\sigma_0 = \varrho_0^2, \sigma_1 = \varrho_1\varrho_{p-1}$, $\sigma_2 = \varrho_2\varrho_{p-2}$ eine Gleichung

$$\sigma_1^p + e_2\sigma_2^p = e_0\Lambda^{(2m-1)p}\sigma_0^p, \tag{19}$$

wo e_0 und e_2 reelle Einheiten in $\Omega(\zeta)$ sind. Mittels (16) und (19) kann man die Kongruenz

$$e_2 \equiv -\frac{\sigma_1^p}{\sigma_2^p} \equiv -\delta_{1,2}^{2p}\frac{\varphi_1^{2p^2}}{\varphi_2^{2p^2}} \pmod{\mathfrak{l}^{2p}}$$

aufstellen und nach Lemma 2 von VANDIVER[1]) können wir folgern, daß

$$e_2\cdot\delta_{1,2}^{-2p}$$

und demzufolge auch die Einheit e_2 die p-te Potenz einer Einheit des Körpers $\Omega(\zeta)$ ist, welche in der Gleichung (19) zur p-ten Potenz vorkommt und deshalb als eine reelle Einheit angenommen werden kann. Die Gleichung (19) gestaltet sich hierdurch

$$\sigma_1^p + \sigma_2'^p = e_0\Lambda^{(2m-1)p}\sigma_0^p, \tag{20}$$

wo $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2'$ reelle Zahlen des Körpers $\Omega(\zeta)$ sind.

Die Gleichung (20) hat dieselbe Form, wie die Gleichung (1) und da $m>1$ war, ist auch $2m-1>1$. Das Ideal $\frac{[\sigma_0]}{\mathfrak{t}^2}$ besitzt dabei zufolge der Gleichungen (7) und (9) wenigere Primidealteiler, als das Ideal $\frac{[\psi]}{\mathfrak{d}}$, mit Ausnahme des Falles $\mathfrak{j}_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$.

Die Wiederholung der angewandten Methode auf die Gleichung (20) würde wieder eine zu (20) ähnliche Gleichung mit den Zahlen $\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*$ ergeben, deren größter gemeinsamer Idealteiler $\mathfrak{t}^*$ ist. Das Ideal $\frac{[\sigma_0^*]}{\mathfrak{t}^*}$ kann aber wieder nur wenigere Primidealteiler haben, als das Ideal $\frac{[\sigma_0]}{\mathfrak{t}^2}$, mit Ausnahme des Falles $\mathfrak{j}_i^* = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$, Die Fortsetzung dieses Abstieges muß also entweder zu einem Widerspruch führen, da das Ideal $\frac{[\psi]}{\mathfrak{d}}$ nur eine endliche Anzahl von Primidealteiler besitzt, oder zu den Gleichungen

$$\sigma_1^{**} + \sigma_2^{**}\zeta^i = \mathfrak{l}\mathfrak{t}^{**} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

In diesem Falle ist das Ideal $\mathfrak{t}^{**}$ ein Hauptideal. Da ferner $\sigma_1^{**}, \sigma_2^{**}$ keinen gemeinsamen Zahlenteiler haben, so ist $\mathfrak{t}^{**} = 1$ und wir haben die Gleichungen

$$\frac{\sigma_1^{**} + \sigma_2^{**}\zeta^i}{1-\zeta^i} = E_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1), \tag{21}$$

wo $E_1, \ldots, E_{p-1}$ Einheiten in $\Omega(\zeta)$ sind. Weiter folgt, wie aus (2),

$$E_i \equiv -\sigma_2^{**} \pmod{\mathfrak{l}^p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1);$$

da σ_2^{**} eine reelle Zahl ist, ist E_i semiprimär, folglich auch reell. Hiedurch gelten die zu (21) konjugiert imaginären Gleichungen

$$\frac{\sigma_1^{**}+\sigma_2^{**}\zeta^{-i}}{1-\zeta^{-i}}=E_i \qquad (i=1,2,\ldots,p-1),$$

welche mit (21) die unmöglichen Gleichungen

$$(\sigma_1^{**}+\sigma_2^{**})(1+\zeta^{i})(1+\zeta^{-i})=0 \quad (i=1,2,\ldots,p-1)$$

ergeben. Damit ist unser Beweis vollzogen.

(Eingegangen am 16. November 1950.)

Bibliographie.

Rózsa Péter, Rekursive Funktionen, 206 Seiten und eine Tabelle, Budapest, Akadémiai Kiadó (Akademischer Verlag), 1951.

Eine arithmetische Funktion, d. h. eine Funktion einer oder mehrerer nichtnegativen ganzen Zahlen, deren Werte ebenfalls nichtnegative ganze Zahlen sind, nennt man *rekursiv*, falls sie von der Konstanten 0 und der Funktion $x+1$ ausgehend durch endlich viele Substitutionen (d. h. Bildung einer Funktion von Funktionen) und Rekursionen gewinnen läßt. Dabei kann man den Begriff der Rekursion auf verschiedene Weisen abgrenzen; so entstehen verschiedene Klassen von rekursiven Funktionen. Die einfachste solche Klasse ist die der *primitiv-rekursiven Funktionen;* diese Klasse entsteht, falls man unter Rekursion die Bildung einer Funktion $\varphi(n, x, y, \ldots)$ aus bereits bekannten Funktionen $\alpha(x, y, \ldots)$ und $\beta(n, x, y, \ldots, m)$ mittels der Definition (primitive Rekursion)

$$\varphi(0, x, y, \ldots) = \alpha(x, y, \ldots),$$
$$\varphi(n+1, x, y, \ldots) = \beta(n, x, y, \ldots, \varphi(n, x, y, \ldots))$$

versteht. Einige mögliche Verallgemeinerungen: auf der rechten Seite der zweiten Gleichung können statt $\varphi(n, x, y, \ldots)$ mehrere Werte der Funktion φ stehen, wobei der erste Argument stets kleiner als $n+1$ ist *(Wertverlaufsrekursion);* oder solche Werte der Funktion φ, in welchen statt $x, y, \ldots$ beliebige bereits bekannte Funktionen von $n, x, y, \ldots$ und sogar auch von weiteren solchen Werten von φ stehen, deren erste Argument stets gleich n ist, die übrigen können wiederum Werte von φ (aber mit der gleichen Einschränkung) enthalten usw. *(eingeschachtelte Rekursion);* statt φ können mehrere Funktionen gleichzeitig durch eine Rekursion definiert werden *(simultane Rekursion);* statt n kann die Rekursion nach mehreren Variablen laufen *(mehrfache Rekursion);* statt Verminderung des ersten Arguments $n+1$ auf n kann die Funktion φ für eine beliebige Argumentfolge mittels ihres Wertes für eine frühere Argumentfolge bei einer gewissen Wohlordnung aller Argumentfolgen definiert werden *(transfinite Rekursion).* In die rekursive Definition von φ können auch solche Funktionen eingehen, deren gewisse Argumente nicht die nichtnegativen ganzen Zahlen, sondern die arithmetischen Funktionen, oder sogar Funktionen von variablen arithmetischen Funktionen usw. durchlaufen, und die selbst wiederum durch eine Rekursion (selbstverständlich nach einem ihrer Zahlenargumenten) definiert werden *(Rekursion höherer Stufe).* Alle diese Verallgemeinerungen, und auch ihre Kombinationen, sind Spezialfälle der *allgemeinen Rekursion,* worunter man die Definition einer Funktion durch ein Gleichungssystem versteht, welches es ermöglicht, den Wert der zu definierenden Funktion an einer beliebig numerisch gegebenen Stelle mittels genau zu definierenden Substitutionsoperationen in endlich vielen Schritten eindeutig zu bestimmen.

Rekursionen verschiedener Art wurden seit langem zur Definition von speziellen arithmetischen Funktionen oder Zahlenfolgen verwendet. Ihre Bedeutung ist aber viel größer:

die rekursive Funktionen sind wichtige Hilfsmittel verschiedener Untersuchungen, insbesondere in der mathematischen Logik. Sie wurden z. B. durch DEDEKIND und PEANO zu einer axiomatischen Aufbau der Arithmetik verwendet; durch SKOLEM zur Elimination der Begriffe „alle" und „es gibt" aus gewissen arithmetischen Definitionen und Beweisführungen; durch HILBERT zu einem Ansatz zum Beweis der Cantorschen Vermutung, oder wenigstens ihrer Unwiderlegbarkeit (die später von GÖDEL in einer wesentlich veränderter Form durchgeführt wurde); durch GÖDEL zum Beweis seines berühmten Satzes über innerhalb eines gegebenen Axiomensystems unentscheidbare Probleme; durch KLEENE zur Präzisierung des Begriffes eines endlichen Prozesses; durch ACKERMANN zu einem Beweis der Widerspuchsfreiheit der Arithmetik; durch SPECKER und GOODSTEIN zu einer konstruktiven Verschärfung gewisser Begriffe der Analysis usw. In diesen Untersuchungen wurden verschiedene Klassen rekursiver Funktionen verwendet und oft spielt die Klarstellung der Beziehung zwischen solchen Klassen eine entscheidende Rolle. In dieser Hinsicht hat die Verfasserin des vorliegenden Buches große Verdienste geleistet. Daher begrüßt man mit Freude, daß die erste Monographie der Theorie der rekursiven Funktionen von ihrem Feder stammt.

Nach Angabe von rekursiven Definitionen einiger für die Zahlentheorie, Kombinatorik, Analysis und Mengenlehre wichtigen arithmetischen Funktionen werden im vorliegenden Buche unter anderen die oben geschilderten Klassen von rekursiven Funktionen definiert und ihre Beziehungen in hohem Maße klargestellt. Insbesondere wird es gezeigt, welche von jenen Klassen identisch sind, welche Rekursionsarten von der einer oder anderen Klasse hinausführen und auf welche einfachste Normalformen lassen sich die Definitionen einer beliebigen Funktion der einzelnen Klassen zurückführen. Auch auf eine Untersuchung von I. BERECZKI betreffend der Beziehung zwischen der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen und einer spezielleren Funktionsklasse, die der sogenannten elementaren Funktionen (die in mehreren Anwendungen die rekursiven Funktionen ersetzen können), wird eingegangen. Besonders ausführlich wird über die Untersuchungen von KLEENE, SKOLEM und MARKOV über die Möglichkeit einer Darstellung aller allgemein-rekursiven Funktionen durch primitiv-rekursive, mittels des Begriffes der kleinsten Zahl die einer gewissen Bedingung genügt, berichtet. Ein besonderer Paragraph wird der Geschichte und den Anwendungen der rekursiven Funktionen gewidmet; jedoch werden die Anwendungen auf gewisse Unentscheidbarkeitsfragen in zwei weiteren Paragraphen und die auf Konstruktivitätsfragen in der Analysis in einer weiteren Paragraphen behandelt.

Das Buch ist ein vorzügliches Nachschlagewerk für den Spezialisten der Theorie der rekursiven Funktionen und der mathematischen Logik. Die Zielsetzung der Verf. geht aber darüber hinaus. Sie will offenbar neue Freunde für die Theorie der rekursiven Funktionen erwerben. Diesem Zweck dient in erster Linie die Herabsetzung des Anspruches an Vorkenntnissen. Von der mathematischen Logik wird überhaupt nichts vorausgesetzt und auch aus der elementaren Zahlentheorie, Analysis und Mengenlehre nur sehr weniges. Dem gleichen Zweck dient auch die Behandlungsweise: statt formaler Durchführung komplizierter allgemeiner Beweisen werden an typischen Spezialfällen die Methoden gezeigt, die auch im allgemeinen Fall zum Ziele führen. Auf Grund derselben kann den allgemeinen Beweis der Leser selbst — allerdings eine gewisse logische Schulung vorausgesetzt — rekonstruieren, wenn er will.

Das treffliche Buch hätte wohl eine schönere typographische Ausstattung und eine gründlichere Korrektur von sprachlichen und Druckfehlern verdient.

L. Kalmár.

Szász Pál, A differenciál- és integrálszámítás elemei. Teljesen átdolgozott és lényegesen bővített második kiadás Fejér Lipót előszavával, két kötet, XVI+703+VIII+606 oldal, Budapest, Közoktatásügyi kiadóvállalat, 1951.

Pál Szász, Elemente der Differential- und Integralrechnung. Zweite, völlig neubearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage, mit einem Vorworte von Leopold Fejér, zwei Bänder, XVI+703+VIII+606 Seiten, Budapest, Verlag für öffentlichen Unterricht, 1951.

Die in 1935 erschienene erste Auflage des Lehrbuchs von P. Szász (besprochen in *diesen Acta,* Bd. **8** (1936/37), S. 68—69) hat sich zum Unterricht in den ungarischen Hochschulen wohl bewährt, so daß sie schon vor dem Kriege vergriffen war. Diese zweite Auflage wurde durch jahrelang dauernde Arbeit des Verfassers bis in die Einzelheiten vollkommen neugeschrieben, so daß man von einem neuen Buch sprechen kann.

Durch Hinzunahme neuer Kapitel wurde der Inhalt des Buches in solchem Maße erweitert, daß er die üblichen Rahmen der Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung und auch die der meisten Lehrbücher nicht nur erreicht, sondern von vielen Standpunkten aus wesentlich überschreitet. Zu erwähnen sind in dieser Hinsicht die Aufnahme des Jordanschen Inhalts und der mehrfachen (Riemannschen) Integrale, die in der ersten Auflage noch nicht behandelt wurden, und das Kapitel über komplexe Funktionentheorie, das fast alles enthält, das man in Spezialvorlesungen über dieses Gebiet vorzulesen pflegt. Neben dem Kapitel über Fouriersche Reihen wurden die Elemente der Theorie der allgemeinen trigonometrischen Reihen (mit den Sätzen von Riemann, Cantor, Du Bois-Reymond) aufgenommen. Ganz besonderes Interesse verdienen aber die Kapitel über *rationale und trigonometrische Polynome, Interpolation, orthogonale Polynomfolgen und Interpolationsfolgen,* in welchen eine Reihe neuester Ergebnisse der von L. Fejér gegründeten ungarischen mathematischen Schule — teilweise zum ersten Male — bearbeitet wird. Wir erwähnen nur neben zahlreichen Ergebnissen von L. Fejér die Sätze von J. Egerváry, P. Erdős, G. Grünwald, A. Haar, M. Riesz, G. Szegő und P. Turán.

Das charakteristische Merkmal der ersten Auflage, daß die Behandlung der allgemeinen Theorie durch völlig ausgearbeitete Beispiele, Spezialfälle und Aufgaben illustriert und unterstützt wird, bleibt hier unverändert. Dabei wurde der streng logische Aufbau der Grundlagen durch Umarbeitung der einleitenden Kapitel noch mehr hervorgehoben. Viele methodische Änderungen — unter anderen die Einführung der irrationalen Zahlen durch unendliche Dezimalbrüche — erzielen die Erleichterung des Verständnisses.

Sowohl die Auswahl des Stoffes, als die Art der Behandlung verleihen auch dieser zweiten Auflage ein eigenartiges Gepräge. Durch diesen Umstand wird die Äußerung von L. Fejér im Vorwort dieser Auflage begründet: „Ich bin überzeugt, daß auch diese neue Auflage der Arbeit von P. Szász in jedem Lande eine freundliche Annahme finden würde."

Ákos Császár

A. J. Chintschin, Drei Perlen der Zahlentheorie, 62 Seiten, Berlin, Akademie-Verlag, 1951.

Deutsche Übersetzung der in *diesen Acta* [Bd. **11** (1948), S. 256] schon besprochenen russischen Originalausgabe. Die Übersetzung erfolgte auf Grund deren 2. Auflage (1948), in der der Beweis des Satzes von van der Waerden (Kapitel I) durch einen von M. A. Lukomskaja gefundenen, einfacheren Beweis ersetzt wurde.

Die Ausstattung des Büchleins ist hervorragend.

B. Sz.-N.

Paul Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Avec un complément sur les fonctionnelles analytiques par F. Pellegrino, XIV+484 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1951.

Cet ouvrage constitue une nouvelle édition des "Leçons d'analyse fonctionnelle" du même auteur, publiées en 1922.

Dans la première partie, ont été supprimées les théories maintenant classiques relatives à la théorie de la mesure et aux équations intégrales. Elle est consacrée à l'étude des notions relatives aux variations de différents ordres des fonctionnelles et aux dérivées fonctionnelles.

La deuxième partie (équations aux dérivées fonctionnelles du premier ordre) a subi peu de changements. La terminologie a été rendue plus conforme à la terminologie moderne.

La troisième partie a subi des modifications importantes. Le but en est d'étendre la notion de moyenne et l'équation de Laplace à l espace hilbertien H et à l'espace L_2 des fonctions de carré sommable sur le segment $[-1, +1]$. L'auteur commence par mettre l'accent sur la difficulté que présente la définition du volume dans ces espaces, le nombre infini des dimensions entraînant de singuliers phénomènes de "concentration". La définition de la moyenne semble plus satisfaisante et plus maniable. Cependant deux difficultés essentielles se présentent. D'une part la moyenne définie comme limite par un procédé de passage du fini à l'infini, n'existe pas toujours. D'autre part la définition de la moyenne est toujours liée à un certain mode d'approximation se présentant naturellement mais n'ayant pas de caractère intrinsèque du point de vue abstrait. C'est ainsi que dans H, rapporté à une base orthonormale donnée à priori, on peut donner un mode d'approximation par les sous-espaces sous-tendus par les n premiers vecteurs de la base, tandis que dans L_2 on peut utiliser certains sous-espaces formés de fonctions "en escalier". La première difficulté conduit à remplacer la moyenne par une suite de moyennes successives. La deuxième difficulté conduit à examiner dans quelles conditions les deux définitions de la moyenne s'identifient quand on établit un isomorphisme de L_2 sur H à l'aide d'une suite complète de fonctions orthonormales.

La suite de la troisième partie est consacrée à l'étude de l'équation de Laplace et du problème de Dirichlet.

L'ouvrage se termine par une importante note de F. Pellegrino sur les fonctionnelles analytiques au sens de L. Fantappiè. Le domaine de définition des ces fonctionnelles est formé de fonctions localement analytiques par lesquelles L. Fantappiè a récemment remplacé les fonctions analytiques. Un aperçu est donné sur les applications de la théorie, en particulier au calcul symbolique et à l'intégration des équations aux dérivées partielles.

R. Pallu de la Barrière (Paris).

A. C. Schaeffer and D. C. Spencer, Coefficient regions for schlicht functions (American Math. Society Colloquium Publications, Vol. XXXV), XVI+311 pages, New York, American Math. Society, 1950.

The first important result for the class of schlicht functions was Koebe's "area-principle". This has been the starting point to a wide class of further investigations. The following well-known result is also a consequence of the area-principle.

Let S be the class of schlicht functions which are regular in the circle $|z| < 1$ and normalized in the form $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$. Then for all functions of class S we have $|a_2| \leqq 2$. Generalizing this result, Bieberbach conjectured in 1916 that $|a_n| \leqq n$ holds for every n. Up to now this problem has been solved only for special classes of functions in S, e. g. for functions with real coefficients, or for functions mapping the circle $|z| < 1$ onto a convex or a starshaped region. For every $f(z)$ in S only $|a_n| < en$ is proved. For the whole class S the first further precise result is due to Löwner who has proved the conjecture for the case $n=3$. He elaborated for the proof a significant variational method which has been applied with succes to several questions.

A more general form of BIEBERBACH's problem is to determine the precise region V_n in euclidean space of $2n-2$ real dimension occupied by the real and imaginary parts of the coefficients $a_2, a_3, \ldots, a_n$ of the functions of S. The authors' aim is to investigate and to determine this region.

The present work is based on their own variational method which passes through the whole work. This method may be considered as a continuation of LÖWNER's method and of some earlier works of the authors. Perhaps the most essential feature of this method is the introduction of a suitable and fruitful neighborhood concept for functions of S. This makes possible to investigate the functions whose coefficients are on the boundary of V_n, i.e. to investigate the region V_n itself. In fact, they show that every function corresponding to a boundary point of V_n satisfies a differential equation of the form

$$\left(\frac{z}{w}\frac{dw}{dz}\right)^2 P(w) = Q(z), \tag{A}$$

where $P(w)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{A_\nu}{w^\nu}$, $Q(z)=\sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1}\frac{p_\nu}{z^\nu}$, $Q(z)\geqq 0$ on $|z|=1$ and has at least one zero of even order on $|z|=1$. Hence the problem is reduced to the discussion of a differential equation of type (A). This is realized partly by investigating the behaviour and structure of the loci determined by $\operatorname{Re}\int [P(w)]^{\frac{1}{2}}\frac{dw}{w}$. By making use of a method of TEICHMÜLLER, the authors show that any function satisfying (A) (with some additional conditions implied by the normalisation of $f(z)$) belongs to a boundary point of V_n. If is also proved that to any boundary point of V_n there corresponds only one function $f(z)$ of class S, while at least two such functions correspond to every interior point of V_n; it is also shown that there is no one-to-one correspondence between the normalized functions $f(z)$ and the differential equations of type (A). As a consequence of this method they obtain LÖWNER's integral representation of the coefficients.

The principal result of this method is the complete determination of the region V_3. They show in general that the boundary of V_n may be expressed in terms of finitely many parameters. In case $n=3$ the parametric equations are obtained in terms of elementary functions. So they get that the boundary of V_3 is composed of two hypersurfaces of dimension 3 and of their intersections. In an Appendix there are given tables for the boundary of V_3. The book contains also two very illustrative figures for the egion (a_2, a_3) when a_2 or a_3 is real. The last chapter is devoted to the investigation of the case $n=4$, to make a progress towards proving $|a_n|\leqq 4$.

An additional chapter written by A. GRAD applies the above method to determining the region of values of $f'(z)$, proving thereby that this powerful method is applicable with success to other problems too.

V. Sós (Budapest).

Maurice Roy, Mécanique des milieux continus et déformables, Tome I: XXII+366 pages, Tome II: XII+338 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1950.

Cet ouvrage constitue en substance le cours de l'auteur à l'Ecole Polytechnique. Il s'adresse principalement aux élèves ingénieurs et aux ingénieurs en exercice.

La Mécanique des milieux continus et déformables a fait des progrès considérables depuis quelques dizaines d'années et est devenue, par ses nombreuses applications, une discipline de base dans les connaissances de l'ingénieur. Cependant l'exposition de cette science pose des problèmes delicats. Si on la considère comme un prolongement de la

Mécanique Rationnelle, on aboutit à des difficultés fondamentales, par exemple pour une définition convenable du travail des forces intérieures. A vouloir annexer cette discipline et à vouloir la convertir à un formalisme étroit, les Mathématiques vont à l'encontre du but poursuivi. La rigueur disparaît et l'arbitraire risque de régner en maître. Si on considère au contraire la Mécanique des milieux continus et déformables comme une science expérimentale, la compréhension des phénomènes risque de passer au second plan devant l'empirisme.

L'auteur apporte à cette situation paradoxale une solution didactique satisfaisante en basant tout l'édifice sur les principes de la Thermodynamique. Celle-ci permet de construire la théorie sur des bases logiques solides tout en apportant une interprétation élargie des phénomènes physiques. Les théories mathématiques modernes s'intègrent d'une façon harmonieuse et si l'auteur ne fait appel qu'aux plus connues d'entre elles, c'est pour ne pas exiger du lecteur des connaissances mathématiques trop étendues.

R. Pallu de la Barrière (Paris).

A. Maroger, Les trois étapes du problème Pythagore—Fermat. La récurrence. L'art des réciproques, XII+98 pages, Paris, Vuibert, 1951.

La première partie du livre s'occupe des triades pythagoréennes et donne plusieurs méthodes de construire, en partant d'un entier x donné, des entiers y, z, solutions de l'équation $x^2+y^2=z^2$. On montre que ces methodes ne s'appliquent pas à l'équation $x^n+y^n=z^n$ $(n>2)$. Le reste du livre étudie, de point de vue logique, la métrode de l'induction mathématique et "l'art" des théorèmes réciproques; parmi les exemples mentionnés il y a plusieurs intéressants.

G. Szász (Szeged).

George David Birkhoff, Collected Mathematical Papers, Vol. 1: XI+754 pages, Vol. 2: VII+983 pages, Vol. 3: VII+897 pages, New York, American Math. Society, 1951.

The late G. D. Birkhoff, one of the great mathematicians of the first half of this century, published his research papers widely in journals in all parts of the word. The American Mathematical Society has now published, in three volumes, the photolithoprint reproductions of all his mathematical works except his books.

The papers are grouped in the following seven categories: 1. boundary value and associated Sturmian problems, 2. differential equations, 3. difference equations, 4. dynamics, 5. physical theories, 6. the four color problem, 7. miscellaneous. There are added three photographs of Birkhoff at different ages; biographical sketches by Oswald Veblen and R. E. Langer; a critical sketch by Marston Morse; a list of the doctor dissertations made under Birkhoff's direction; biographical material; a complete list of Birkhoff's works in chronological order.

B. Sz.-N.

Pierre Dive, Ondes ellipsoïdales et relativité, VIII+138 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1951.

L'auteur reprend l'hypothèse de Poincaré sur l'anisothropie de l'éther, par laquelle on s'efforçait d'interpréter, avant la théorie de la relativité, les problèmes relatifs à l'expériment de Michelson et à la propagation de la lumière, pour éviter ainsi les difficultés d'ordre philosophique découlant de la contraction de Lorentz. La formulation mathématique du problème offre une application intéressante des méthodes de la géométrie moderne, cependant il nous semble que les arguments que l'auteur pose en faveur de la théorie considérée et qu'il oppose à la théorie relativiste, ne sont pas assez convaincants.

J. I. Horváth (Debrecen).

On a property of lacunary power-series.

By PAUL TURÁN in Budapest.

1. Let us consider the power-series

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{\lambda_\nu} \tag{1.1}$$

whose positive integer exponents λ_ν satisfy the condition

$$\frac{\lambda_\nu}{\nu}\to\infty.$$

This condition can be written also in the form

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{\lambda_\nu\leqq x}{}_{\nu}\, 1=0. \tag{1.2}$$

The significance of this condition was first discovered by FABRY by his famous gap-theorem. The effect of this condition on integral functions was systematically studied first in the frame of more general questions by PÓLYA[1]) in a fundamental memoir; his most interesting[2]) theorems refer to the case (1.2). So his Theorem VI asserts, vaguely expressed, that an integral function of the form (1.1) satisfying the Fabry-condition (1.2) has in all angles with vertex at $z=0$ an "equal growth". PÓLYA originally measured the growth by the order and type with respect to an angle and to the whole plane. In the important papers of S. MANDELBROJT and L. SCHWARTZ the theorem appeared in the form

$$\max_{|z|=r}|f(z)|\leqq \max_{\substack{r(1-\varepsilon)\leqq|z|\leqq r(1+\varepsilon)\\ \alpha\leqq \operatorname{arc} z\leqq\beta}}|f(z)|^{1+\varepsilon} \tag{1.3}$$

if $\varepsilon>0$, $0\leqq\alpha<\beta\leqq 2\pi$, $r>r_0(f,\varepsilon,\beta-\alpha)$, and it was also extended to DIRICHLET's series. PÓLYA's Theorem VIII replaces in his theorem VI the angle by a more general domain which may be called an angle with a curve extending to ∞ as bisector. The inequality (1.3) was sharpened

---

1) G. PÓLYA, Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Math. Zeitschrift,* **29** (1929), pp. 549—640.

2) See in particular p. 556 in 1).

by F. SUNYER i BALAGUER[3]). He showed, for all integral functions $f(z)$ satisfying (1.2), the existence of an $\eta(r)$ tending to 0 with $\frac{1}{r}$ such that to any prescribed continuous $\Theta(r)$ and all sufficiently large r there is a z_r in the domain

$$(1.4)\qquad \frac{r}{1+\eta(r)} \leqq |z_r| \leqq r(1+\eta(r)), \quad |\operatorname{arc} z_r - \Theta(r)| < \eta(r)$$

with

$$(1.5)\qquad \log|f(z_r)| > (1-\eta(r)) \log M(r,f),$$

where, as usual,

$$(1.6)\qquad M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

The essential content of the theorem may be expressed in the simplest case $\Theta(r) = \text{const.}$ by saying that an integral function with Fabry-condition exhibits an "equal" growth in all "not too tight funnels" around an arbitrary ray issuing from the origin as on the whole plane.

2. In these years I have developed an analytical method which I used for various purposes. In my lecture about this method[4]) at the Meeting of the Czechoslovakian and Polish Mathematical Societies in Prague, Sept. 1949, I have risked the assertion, that some of the results of PÓLYA and various refinements are within reach of my method. In what follows I shall show I was right. Using the abbreviation

$$(2.1)\qquad \max_{\substack{|z|=r\\ \alpha \leqq \operatorname{arc} z \leqq \beta}} |f(z)| = M(r, \alpha, \beta, f)$$

I shall prove the

Theorem I. *Given $\alpha, \beta, \varepsilon$ with $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$, $0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{2}$, and an arbitrary integral function $f(z)$ satisfying the Fabry-condition* (1.2), *we have for all $r > r_1 = r_1(f, \varepsilon, \beta-\alpha)$ the inequality*

$$(2.2)\qquad M^{1+\varepsilon}(r,f) \leqq \frac{48\pi}{\beta-\alpha} M^{2\varepsilon}(2r,f)\; M(r, \alpha, \beta, f).$$

If $f(z)$ increases very quickly, the inequality (2.2) can become a triviality. One will see from the subsequent proofs how they have to be modified in order to reach greater generality. Anyway, in the most interesting

---

3) F. SUNYER i BALAGUER, Propriedades de las funciones enteras representadas por series de Taylor lagunares (orden finito), *Semin. Math. de Barcelona*, **2** (1949), fasc. 1 p. 1—48. He found similar results also in the case of positive maximal density.

4) See P. TURÁN, On a new method in the analysis with applications, *Časopis pro pešt. mat. a fys.*, **74** (1949), pp. 125—131. A detailed exposition of this method with numerous new applications will be given in a forthcoming book.

case when $f(z)$ is of finite order and of normal type, the inequality (2. 2) is not at all trivial.

How is theorem I connected with PÓLYA's results? We impose upon $f(z)$ first the restriction

$$\frac{M(2r,f)}{M^{c_1}(r,f)} \leqq c_2 \tag{2. 3}$$

with suitable numerical c_1 and c_2 for all sufficiently large r. Then (2. 2) assumes for $r > r_1(f, \varepsilon, \beta-\alpha)$ the form

$$M^{1-(2c_1-1)\varepsilon}(r, f) \leqq \frac{48\pi c_2}{\beta-\alpha} M(r, \alpha, \beta, f), \tag{2. 4}$$

or putting $2c_2 - 1 = c_3$ for all $r > \varrho_0(f, \beta-\alpha, \varepsilon)$

$$\frac{\beta-\alpha}{48\pi c_2} M^{1-c_3\varepsilon}(r, f) \leqq M(r, \alpha, \beta, f) \leqq M(r,f). \tag{2. 5}$$

Next we suppose only the existence of a sequence

$$r_1 < r_2 < \ldots \to +\infty \tag{2. 6}$$

and the existence of constants c_4 and c_5 independent of ν such that

$$\frac{M(2r_\nu,f)}{M^{c_4}(r_\nu,f)} \leqq c_5. \tag{2. 7}$$

As we shall show in **8** this condition is fulfilled for all integral functions of finite order, and if $f(z)$ is of order k then moreover the limitation

$$2r_\nu \leqq r_{\nu+1} \leqq 2r_\nu^{k+2} \tag{2. 8}$$

can be given. The above reasoning gives in the case (2. 7) the inequality

$$\frac{\beta-\alpha}{48\pi c_2} M^{1-c_3\varepsilon}(r_\nu,f) \leqq M(r_\nu, \alpha, \beta, f) \leqq M(r_\nu, f). \tag{2. 9}$$

Hence we obtain the

Corollary. *If an integral function of finite order satisfies the Fabry-condition* (1. 2) *then there is a sequence of concentric circles* $|z| = r_\nu$ *with the restriction* (2. 8) *on which the inequality* (2. 9) *holds.*

This is one way of refining PÓLYA's theorem and both, this and theorem I, are obviously not contained in MANDELBROJT's and L. SCHWARTZ's theorems. Another way of refinement is to replace the angle by a narrower domain as in SUNYER i BALAGUER's theorem. Some results in this direction will be given in **9**. By suitable changes in the proof of theorem I, $M(2r,f)$ could have been replaced by $M((1+\delta)r,f)$, but we shall not treat it as well as its extensions to Dirichlet's series.

3. The *systematic* study of integral functions with gaps started with PÓLYA's paper. In an interesting way no attention was given sofar to the corresponding harmonic expansions which usually followed the functiontheoretical developments. In what follows we shall show that an analogous theorem holds also for harmonic expansions. Let

$$(3.1) \qquad h(r,\varphi)=\sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\lambda_\nu}(a_\nu\cos\lambda_\nu\varphi+b_\nu\sin\lambda_\nu\varphi)$$

be a harmonic function converging on the whole plane with positive integer increasing exponents λ_ν satisfying the Fabry condition (1.2) and

$$(3.2) \qquad \begin{aligned}\max_{\varphi}|h(r,\varphi)|&=H(r,h),\\ \max_{\alpha\leqq\varphi\leqq\beta}|h(r,\varphi)|&=H(r,\alpha,\beta,h).\end{aligned}$$

Then we have the

Theorem II. *For the above defined $h(r,\varphi)$ and for any prescribed α,β,ε with $0\leqq\alpha<\beta\leqq 2\pi$, $0<\varepsilon\leqq\frac{1}{2}$ we have, for all $r>r_2(h,\beta-\alpha,\varepsilon)$, the inequality*

$$(3.3) \qquad H(r,h)^{1+\varepsilon}\leqq 32\left(\frac{56\pi}{\beta-\alpha}\right)^{4} H^{2\varepsilon}(2r,h)\,H(r,\alpha,\beta,h).$$

Applying theorem II to the real and imaginary parts of the function $f(z)$ of theorem I we could deduce immediately (2.2) from (3.3), apart from the factor independent of f. Owing to this fact and since the independent proof of theorem I runs on the same line as that of theorem II we shall give a detailed proof only for theorem II.

4. The method in question consists in a systematic use of two inequalities. What we here actually need, is a consequence of the first of them and asserts that if the m_ν's are integers, then for arbitrary complex coefficients d_ν

$$(4.1) \qquad \max_{0\leqq x\leqq 2\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{k} d_\nu e^{im_\nu x}\right|<\left(\frac{56\pi}{b-a}\right)^{k}\max_{a\leqq x\leqq b}\left|\sum_{\nu=1}^{k} d_\nu e^{im_\nu x}\right|.$$

For a proof of this inequality see my previous paper[5]). The basis for analogous investigations for Dirichlet's series might be the more general inequality[6])

$$\max_{a_1\leqq x\leqq d_1}\left|\sum_{\nu=1}^{k} d_\nu e^{i\mu_\nu x}\right|\leqq\left(2e\frac{d_1-a_1}{c_1-b_1}\right)^{k}\max_{b_1\leqq x\leqq c_1}\left|\sum_{\nu=1}^{k} d_\nu e^{i\mu_\nu x}\right|,$$

where $\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_k$ are real and $a_1<b_1<c_1<d_1$. Choosing in (4.1)

$$k=2n+1,\quad a=-b,$$

$$-m_1=m_{2n+1}=k_n,\ -m_2=m_{2n}=k_{n-1},\ \ldots,\ -m_n=m_{n+2}=k_1,\ m_{n+1}=k_0=0;$$

---

[5]) P. Turán, On a theorem of Littlewood, *Journal London Math. Soc.*, **21** (1946), pp. 268—275.

[6]) This could be easily inferred from the paper [5]).

$$d_j = \frac{a_{n+1-j} + i b_{n+1-j}}{2} \text{ for } 1 \leqq j \leqq n, \quad d_{n+1} = a_0,$$

$$d_j = \frac{a_{j-n-1} - i b_{j-n-1}}{2} \text{ for } n+2 \leqq j \leqq 2n+1,$$

we obtain from (4. 1)

$$\max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} \left| \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos k_j x + b_j \sin k_j x) \right| \leqq$$
$$\leqq \left(\frac{28\pi}{b} \right)^{2n+1} \max_{-b \leqq x \leqq b} \left| \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos k_j x + b_j \sin k_j x) \right|.$$

By an obvious change of notation this gives

$$\max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} \left| \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos k_j x + b_j \sin k_j x) \right| \leqq \tag{4. 2}$$
$$\leqq \left(\frac{56\pi}{b-a} \right)^{2n+1} \max_{a \leqq x \leqq b} \left| \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos k_j x + b_j \sin k_j x) \right|$$

if $0 \leqq a < b \leqq 2\pi$; this will be our starting point.

5. Now we turn to the proof of theorem II. Owing to the gap-condition (1. 2) we can give an $\omega(k)$ tending monotonically to $+\infty$ such that

$$\frac{\lambda_k}{k} > \omega(k). \tag{5. 1}$$

Let

$$s_k(r, \varphi) = \sum_{\nu=1}^{k} r^{\lambda_\nu} (a_\nu \cos \lambda_\nu \varphi + b_\nu \sin \lambda_\nu \varphi). \tag{5. 2}$$

Fixing r and k we may apply the estimation (4. 2) to $s_k(r, \varphi)$. Then we obtain

$$\max_{\varphi} |s_k(r, \varphi)| \leqq \left(\frac{56\pi}{\beta - \alpha} \right)^{2k+1} \max_{\alpha \leqq \varphi \leqq \beta} |s_k(r, \varphi)|. \tag{5. 3}$$

The maximum on the left resp. on the right should be attained at $\varphi = \varphi_1$, resp. $\varphi = \varphi_2$. We have obviously

$$|s_k(r, \varphi_2)| \leqq |h(r, \varphi_2)| + |s_k(r, \varphi_2) - h(r, \varphi_2)| \leqq$$
$$\leqq H(r; \alpha, \beta, h) + |s_k(r, \varphi_2) - h(r, \varphi_2)|.$$

Since we have for all real values φ

$$h(r, \varphi) - s_k(r, \varphi) = \sum_{\nu=k+1}^{\infty} r^{\lambda_\nu} (a_\nu \cos \lambda_\nu \varphi + b_\nu \sin \lambda_\nu \varphi)$$

and

$$a_\nu (2r)^{\lambda_\nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(2r, \vartheta) \cos \lambda_\nu \vartheta \, d\vartheta,$$

$$b_\nu (2r)^{\lambda_\nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(2r, \vartheta) \sin \lambda_\nu \vartheta \, d\vartheta,$$

we obtain easily

$$|h(r,\varphi)-s_k(r,\varphi)|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(2r,\vartheta)\left(\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\lambda_\nu}}\cos\lambda_\nu(\vartheta-\varphi)\right)d\vartheta\right|\leqq$$

$$\leqq 2H(2r,h)\frac{2}{2^{\lambda_{k+1}}}<\frac{4H(2r,h)}{2^{\lambda_k}},$$

thus

$$\max_{\alpha\leqq\varphi\leqq\beta}|s_k(r,\varphi)|\leqq H(r,\alpha,\beta,h)+\frac{4H(2r,h)}{2^{\lambda_k}}. \tag{5.4}$$

For our fixed r, $h(r,\varphi)$ should attain its maximum at $\varphi=\varphi_3$. Then analogously as before

$$|s_k(r,\varphi_1)|\geqq|s_k(r,\varphi_3)|\geqq|h(r,\varphi_3)|-|h(r,\varphi_3)-s_k(r,\varphi_3)|\geqq H(r,h)-\frac{4H(2r,h)}{2^{\lambda_k}}.$$

Putting this and (5.4) into (5.3) we obtain

$$H(r,h)\leqq\left(\frac{56\pi}{\beta-\alpha}\right)^{2k+1}H(r,\alpha,\beta,h)+ \tag{5.5}$$
$$+\frac{448\pi}{\beta-\alpha}H(2r,h)\left\}\frac{1}{2}\left(\frac{56\pi}{\beta-\alpha}\right)^{\frac{2k}{\lambda_k}}\right\}^{\lambda_k}.$$

6. As said, let $0<\varepsilon\leqq\frac{1}{2}$ and let r be so large that

$$H(r,h)>4 \tag{6.1}$$

and with the above defined ω

$$\varepsilon\,\omega\left(\frac{\varepsilon\log\sqrt{H(r,h)}}{\log\frac{56\pi}{\beta-\alpha}}\right)>8\log\frac{56\pi}{\beta-\alpha}. \tag{6.2}$$

Both requirements are evidently fulfilled for $r>\varrho_1(h,\beta-\alpha,\varepsilon)$. For such values r let[7])

$$k=1+\left[\frac{\varepsilon}{\log\frac{56\pi}{\beta-\alpha}}\log\left\{\frac{896\pi}{\beta-\alpha}\,\frac{H(2r,h)}{H(r,h)}+\sqrt{H(r,h)}\right\}\right]. \tag{6.3}$$

We have first to estimate $\frac{k}{\lambda_k}$ from above. Owing to the monotony of $\omega(x)$ and (6.2) we have

$$\frac{k}{\lambda_k}\leqq\frac{1}{\omega(k)}\leqq\frac{1}{\omega\left(\frac{\varepsilon}{\log\frac{56\pi}{\beta-\alpha}}\log\sqrt{H(r,h)}\right)}\leqq\frac{\varepsilon}{8\log\frac{56\pi}{\beta-\alpha}}$$

---

[7]) The square-bracket denotes here and only here in this paper the greatest integer.

i. e.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{56\pi}{\beta-\alpha}\right)^{\frac{2k}{\lambda_k}} \leqq \frac{1}{2} e^{\frac{\varepsilon}{4}} < \frac{3}{4}.$$

Hence the last member on the right of (5. 5) is less than

$$\text{(6. 4)} \qquad \frac{448\pi}{\beta-\alpha} H(2r,h)\left(\frac{3}{4}\right)^{\lambda_k}.$$

Since from the definition of k, using the monotony of $\omega(x)$,

$$\lambda_k \geqq k\omega(k) \geqq \omega(k)\frac{\varepsilon}{\log\frac{56\pi}{\beta-\alpha}} \log\left(\frac{896\pi}{\beta-\alpha} \cdot \frac{H(2r,h)}{H(r,h)}\right) >$$

$$> \frac{\varepsilon}{\log\frac{56\pi}{\beta-\alpha}} \log\left(\frac{896\pi}{\beta-\alpha} \frac{H(2r,h)}{H(r,h)}\right) \omega\left(\frac{\varepsilon\log\sqrt{H(r,h)}}{\log\frac{56\pi}{\beta-\alpha}}\right)$$

and, using again (6. 2),

$$\lambda_k > 8\log\left(\frac{896\pi}{\beta-\alpha} \frac{H(2r,h)}{H(r,h)}\right),$$

we obtain from (6. 4) for the member in question the upper bound

$$\frac{448\pi}{\beta-\alpha} H(2r,h) \exp\left\{-8\log\frac{4}{3}\log\left(\frac{896\pi}{\beta-\alpha} \frac{H(2r,h)}{H(r,h)}\right)\right\} <$$

$$< \frac{448\pi}{\beta-\alpha} H(2r,h) \exp\left\{-\log\left(\frac{896\pi}{\beta-\alpha} \frac{H(2r,h)}{H(r,h)}\right)\right\} = \frac{1}{2} H(r,h).$$

Hence from (5. 5) we obtained

$$\text{(6. 5)} \qquad H(r,h) < 2\left(\frac{56\pi}{\beta-\alpha}\right)^{2k+1} H(r,\alpha,\beta,h).$$

7. To complete the proof of theorem II we write (6. 5) in the form

$$\text{(7. 1)} \qquad H(r,h) < \frac{112\pi}{\beta-\alpha}\left(\frac{56\pi}{\beta-\alpha}\right)^{2k} H(r,\alpha,\beta,h)$$

and replace k by its value from (6. 3). Using the fact that for $a \geqq 2, b \geqq 2$ we have $\log(a+b) \leqq \log a + \log b$, from (7.1) and (6. 1) we obtain

$$\left(\frac{56\pi}{\beta-\alpha}\right)^{2k} \leqq \left(\frac{56\pi}{\beta-\alpha}\right)^{2}\left(\frac{56\pi}{\beta-\alpha}\right)^{\frac{2\varepsilon}{\log\frac{56\pi}{\beta-\alpha}}\left\{\log\left(\frac{896\pi}{\beta-\alpha}\frac{H(2r,h)}{H(r,h)}\right)+\frac{1}{2}\log H(r,h)\right\}} =$$

$$= \left(\frac{56\pi}{\beta-\alpha}\right)^{2}\left(\frac{896\pi}{\beta-\alpha} \frac{H(2r,h)}{H(r,h)}\right)^{2\varepsilon} H^{\varepsilon}(r,h)$$

i. e., from (7. 1) and from $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}$,

$$H^{1+\varepsilon}(r,h) \leqq 32\left(\frac{56\pi}{\beta-\alpha}\right)^{4} H^{\varepsilon}(2r,h)\, H(r,\alpha,\beta,h).$$

Thus theorem II is proved.

8. To prove that (2. 7) is fulfilled for all integral functions of finite order we suppose this order should be k. Then for $r > \varrho_2(f)$ we have

(8. 1) $$|f(z)| \leqq 2^{|z|^{k+\frac{1}{2}}}, \qquad M(r,f) \geqq 2.$$

Choosing

(8. 2) $$r_1 = \max(5, \varrho_2(f)),$$

(8. 3) $$c_4 = 25^{k+1}, \qquad c_5 = \max\left(1, \frac{M(2r_1, f)}{M^{25^{k+1}}(r_1, f)}\right),$$

(2. 7) is fulfilled for $\nu = 1$. Suppose $r_1, \ldots, r_\nu$ already satisfy (2. 8) so that (2. 7) is true with the choice (8. 3). Since $r_\nu \geqq r_1 \geqq 5$, the annulus

(8. 4) $$2r_\nu \leqq |z| \leqq 2r_\nu^{k+2}$$

exists. If our assertion were untrue then we would have

$$\begin{aligned} &M(2^2 r_\nu) > M^{25^{k+1}}(2r_\nu) \\ &M(2^3 r_\nu) > M^{25^{k+1}}(2^2 r_\nu) > M^{25^{2(k+1)}}(2r_\nu), \\ &\quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &M(2^l r_\nu) > M^{25^{(l-1)(k+1)}}(2r_\nu) \geqq M^{25^{(l-1)(k+1)}}(r_\nu) \geqq 2^{25^{(l-1)(k+1)}}. \end{aligned}$$

Now we determine the integer l so that

(8. 5) $$2^{l-1} \leqq r_\nu^{k+1} < 2^l$$

i. e.

$$2^l r_\nu \leqq 2r_\nu^{k+2}.$$

Then we have

$$2^l > r_\nu^{k+1} \geqq r_1^{k+1} > r_1 \geqq 5,$$

i. e.

$$l > 2 \ \text{ and } \ l-1 > \frac{l}{2}.$$

Thus

$$M(2^l r_\nu) > 2^{5^{l(k+1)}}$$

or from (8. 5) owing to the monotony of $M(x)$

$$M(2^{l+\frac{l}{k+1}}) > 2^{5^{l(k+1)}}.$$

From (8. 1) we should have

$$2^{5^{l(k+1)}} < 2^{\left(2^{l+\frac{l}{k+1}}\right)^{k+\frac{1}{2}}}$$

i. e. a fortiori

$$5^l < 2^{l+\frac{l}{k+1}} < 2^{2l} = 4^l$$

which is a contradiction. It is likely that the inequality

$$\frac{M(2r)}{M^{c_4}(r)} \leqq c_5$$

holds, with sufficiently large, from r independent c_4 and c_5, for a much larger set of r-values if f is of finite order.

9. In theorems I and II the angle $\beta-\alpha$ was fixed however arbitrary small. One expects that this angle can tend to 0 not too quickly with $\frac{1}{r}$. Indeed in the proof of theorem II we had the only restriction (6. 2) in this direction. (6. 2) can also be written in the form

$$(9.1)\qquad \frac{8}{\varepsilon}\log\frac{56\pi}{\beta-\alpha}\cdot\omega^{-1}\left(\frac{8}{\varepsilon}\log\frac{56\pi}{\beta-\alpha}\right) < 4\log H(r,h)$$

if $\omega^{-1}(u)$ denotes the inverse function of $\omega(u)$. Then $u\omega^{-1}(u)$ is an increasing function of u; let $u=\Omega(y)$ be the solution of

$$u\omega^{-1}(u)=y.$$

Thus from (9. 1) we have putting $\beta-\alpha=\delta(r)$

$$\frac{8}{\varepsilon}\log\frac{56\pi}{\delta(r)} < \Omega(4\log H(r,h))$$

i. e.

$$(9.2)\qquad \delta(r) \geqq 56\pi\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{8}\Omega(4\log H(r,h))\right\}$$

which must be true for all $r>\varrho_3(f,\varepsilon)$; in this case the inequality (3. 3) holds of course for all $r>\varrho_3(f,\varepsilon)$. To avoid the possibility that the right side of (9. 2) is too small we require also

$$\delta(r) \geqq H^{-\varepsilon}(2r,h)$$

i. e. we choose

$$(9.3)\qquad \delta_0(r)=\max\left[H^{-\varepsilon}(2r,h);\ 56\pi\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{8}\Omega(4\log H(r,h))\right\}\right].$$

Then theorem II will assert that for $r>\varrho_3(f,\varepsilon)$, $0<\varepsilon\leqq\frac{1}{2}$, we will have with $\beta-\alpha=\delta_0(r)$ the inequality

$$(9.4)\qquad H^{1+\varepsilon}(r,h) \leqq 32(56\pi)^4 H^{6\varepsilon}(2r,h)\ H(r,\alpha,\beta,h).$$

Similarly we will have for $|z|\geqq\varrho_4(f,\varepsilon)$, $0<\varepsilon\leqq\frac{1}{2}$ with the above $\delta_0(r)$ the inequality

$$(9.5)\qquad M^{1+\varepsilon}(r,f) \leqq 48\pi M^{3\varepsilon}(2r,f)\,M(r,\alpha,\beta,f).$$

The interest of this remark lies obviously in the fact that $\delta_0(r)$ depends only upon $\min_{k \leqq r} \frac{\lambda_k}{k}$ and not upon the finer distribution of the exponents. Let e. g. $\omega(x) = x$. Then

$$\omega^{-1}(x) = x, \quad \Omega(y) = \sqrt{y}$$

and the reasoning of 2 gives the

Corollary II. *If the exponents of the integral function*

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{\lambda_\nu}$$

of finite order satisfy the inequality

$$\lambda_\nu \geqq \nu^2 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

and if, with fixed $0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{2}$ *and* $0 \leqq \gamma \leqq 2\pi$, U *denotes the domain*

$$(9.6) \qquad |z| = r, \quad |\operatorname{arc} z - \gamma| \leqq 56\pi \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{\log M(r,f)}\right\},$$

$$\varrho_4(f, \varepsilon) \leqq |z| \leqq \infty,$$

then there is a sequence r_ν *tending to infinity such that the inequality*

$$c_6 M^{1-c_7\varepsilon}(r_\nu, f) \leqq M(r_\nu, U, f) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

holds with c_6, c_7 *depending only upon* f; *i. e.* $f(x)$ *increases in* U *as fast as over the whole plane.*

If $f(z)$ is of finite *positive* order k then for all sufficiently large values of r we have

$$\log M(r,f) \leqq r^{k+\delta} \qquad (\delta \text{ arbitrary, } > 0)$$

i. e. the arc of the circle $|z| = r$ assumes the form

$$|\operatorname{arc} z - \gamma| \leqq 56\pi \exp\left(-\frac{\varepsilon}{4} r^{\frac{k-\delta}{2}}\right).$$

The length of the arc is then less than, or equal to,

$$112\pi r \exp\left(-\frac{\varepsilon}{4} r^{\frac{k-\delta}{2}}\right)$$

which tends to zero rapidly with $\frac{1}{r}$. Hence the domain (9.6) is like a rather tight funnel which has e. g. a finite area. This shows anyway that replacing the angles by the domain U means in general very considerable reduction of the domain.

(Received April 15, 1952.)

Proof of a conjecture of P. Erdős.

By G. FODOR in Szeged.

Let E be a given non countable set of power $\mathfrak{m}$ and suppose that there exists a relation[1] R between the elements of E such that, for any $x \in E$, the power of the set $H(x)$ of the elements $y \in E$ $(y \neq x)$ for which xRy holds, is smaller than a given cardinal number $\mathfrak{n}$ which is smaller than $\mathfrak{m}$. Two distinct elements (or "points") x and y of E are called independent if neither xRy nor yRx. We say that a subset of E is a *free set* if any two points of this subset are independent.

If we replace the condition $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ by $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}$ then it can occur that we do not have any independent points at all. Indeed, let φ be the initial number of power $\mathfrak{m}$ and E the set of ordinal numbers less than φ. We define the relation R so that xRy holds if and only if $y < x$. Then clearly $\overline{\overline{H(x)}} < \mathfrak{m}$ for any $x \in E$; however, no two elements are independent.

The following proposition has been conjectured by S. RUZIEWICZ[2]:

If $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, *then* E *has a free subset* E^* *of the same power* $\mathfrak{m}$.

This theorem has been proved first if $\mathfrak{n} = \aleph_0$ and $\mathfrak{m}$ is either of the form $2^{\mathfrak{p}}$ or of the form $\aleph_{\alpha+1}$[3]), then if $\mathfrak{m}$ is a regular cardinal number or if $\mathfrak{m}$ is the countable sum of cardinals smaller than $\mathfrak{m}$[4]), finally, in the general case, assuming the generalized continuum hypothesis[5]).

---

1) "Relation" means throughout this paper a binary relation.

2) S. RUZIEWICZ, Une généralisation d'un théorème de M. Sierpiński, *Publications Math. de l'Université de Belgrade,* 5 (1936), pp. 23—27.

3) W. SIERPIŃSKI, Sur un problème de la théorie des relations, *Fundamenta Math.*, 28 (1937), pp. 71—74. — D. LÁZÁR, On a problem in the theory of aggregates, *Compositio Math.*, 3 (1936), 304.

4) SOPHIE PICCARD, Sur un problème de M. Ruziewicz de la théorie des relations, *Fundamenta Math.*, 29 (1937), pp. 5—9; Solution du problème de M. Ruziewicz de la théorie des relations pour les nombres cardinaux $\mathfrak{m} < \aleph_\Omega$, *Comptes Rendus Varsovie,* 30 (1937), pp. 12—18.

5) P. ERDŐS, Some remarks on set theory, *Proceedings American Math. Soc.*, 1 (1950), pp. 133—137.

The proof given by SIERPIŃSKI[8]) yields also the fact that, if $\mathfrak{n}=\aleph_0$ and $\mathfrak{m}=2^{\mathfrak{p}}$, then E is the union of $\mathfrak{p}$ free subsets. The proof of LÁZÁR[2]) yields the same fact in the case $\mathfrak{n}=\aleph_0$, $\mathfrak{m}=2^{\aleph_0}$.

DE BRUIJN and ERDŐS[6]) proved for a set E of arbitrary power the following statements: If for every $x\in E$, the set $H(x)$ has at most k elements, k being a given positive integer, then E may be decomposed in $2k+1$ or fewer free sets; if for every $x\in E$ the set $H(x)$ is finite, then E is the union of a countable number of free sets.

We shall now prove the following theorem which was conjectured by ERDŐS[5]):

Theorem 1. *If E is a non countable set of power $\mathfrak{m}$ and if R is a relation between the elements of E such that for any $x\in E$ the power of the set $H(x)$ of the elements $y\in E$ $(y\neq x)$ for which xRy holds is smaller than a given cardinal number $\mathfrak{n}$, where $\aleph_0\leqq\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$, then E may be decomposed into the sum of $\mathfrak{n}$ or fewer free subsets.*

As a consequence of this theorem, we see at once that the conjecture of RUZIEWICZ holds if $\mathfrak{m}$ cannot be decomposed into a sum of $\mathfrak{n}$ or fewer cardinal numbers, each of which is smaller than $\mathfrak{m}$.

§ 1.

First we prove the following theorem.

Theorem 2. *Let $\mathfrak{n}$ be a regular transfinite cardinal number, ψ the initial number of the cardinal number $\mathfrak{n}$ and E an arbitrary set. Suppose that a relation R is defined between the elements of E such that the set $H(x)$ of the elements $y\in E$ $(y\neq x)$ for which xRy holds, has a cardinal number smaller than $\mathfrak{n}$. Then E can be well-ordered into a transfinite sequence*

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_\omega, p_{\omega+1}, \ldots, p_\xi, \ldots \qquad (\xi<\alpha) \tag{1}$$

in such a way that we have

$$\sum_{\zeta<\psi\mu} H(p_\zeta)\subseteq\{p_\zeta\}_{\zeta<\psi\mu} \tag{2}$$

for every μ, $1\leqq\mu<\gamma$, where γ is defined by the equality $\alpha=\psi\gamma+\delta$ $(\delta<\psi)$.

Proof. Let φ be the initial number of the cardinal number $\overline{\overline{E}}=\mathfrak{m}$ and let

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi) \tag{3}$$

be any well-ordering of E of the type φ. We define the sequence (1) by transfinite induction in the following way: Put $p_0=x_0$. Let now β be an ordinal number, $\beta>0$, and suppose that all elements p_ζ, where $0\leqq\zeta<\beta$,

[6]) N. G. DE BRUIJN and P. ERDŐS, A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, *Proceedings Amsterdam*, 54 (1951), pp. 371—372.

have been already defined and let P_β denote the set of the elements p_ζ with $\zeta<\beta$. Consider the set

$$V_\beta=\sum_{\zeta<\beta} H(p_\zeta).$$

If $V_\beta \neq 0$, we define a new well-ordering of V_β as follows. Let q and r be any two distinct elements of V_β. Let $\varkappa$ and λ be the least ordinals for which $q \in H(p_\varkappa)$ and $r \in H(p_\lambda)$, respectively. Write $q \prec r$ if either $\varkappa<\lambda$ or if $\varkappa=\lambda$ but q precedes r in $H(p_\varkappa)$ in the original well-ordering (3) (as a subset of E which is well-ordered according to (3)). In the sequel we suppose always that V_β is well-ordered in this way. Let

$$W_\beta=V_\beta-P_\beta.$$

(i) If $W_\beta \neq 0$, let p_β be the first element of W_β (as a subset of V_β).

(ii) If $W_\beta=0$ and $P_\beta \neq E$, let p_β the first element of $E-P_\beta$ (in the well-ordering (3)).

(iii) If $W_\beta=0$ and $P_\beta=E$, then we do not define p_β.

Clearly, case (iii) occurs for one and only one value α of β; for $\beta<\alpha$, p_β, V_β and W_β are defined. For $\nu<\pi<\alpha$, the set V_ν is obviously a section of V_π.

Next we prove the following

L e m m a. *Suppose $\beta<\alpha$ and $W_\beta \neq 0$. Let*

$$w_0, w_1, w_2, \ldots, w_\omega, w_{\omega+1}, \ldots, w_\xi, \ldots \qquad (\xi<\overline{W_\beta})$$

be the well-ordering of the set W_β (as a subset of V_β). Then we have $p_{\beta+\xi}=w_\xi$ for $\xi<\overline{W_\beta}$.

Indeed, this holds by definition for $\xi=0$. Suppose, our statement holds for any ordinal number which is smaller than ξ $(<\overline{W_\beta})$; then it holds for ξ too. Indeed, $p_{\beta+\xi}$ is, by definition, the first element of $W_{\beta+\xi}$. Now we have $w_\xi \in W_\beta \subseteq V_\beta \subset V_{\beta+\xi}$, hence $w_\xi \in V_{\beta+\xi}$. On the other hand, $w_\xi \notin P_\beta$ and, by hypothesis, $P_{\beta+\xi}=P_\beta+\{w_\eta\}_{\eta<\xi}$; hence $w_\xi \notin P_{\beta+\xi}$. Therefore $w_\xi \in W_{\beta+\xi}$. Further, any element of $W_{\beta+\xi}$ preceding w_ξ is an element of $V_{\beta+\xi}$ preceding w_ξ, hence an element of V_β preceding w_ξ for V_β is a section of $V_{\beta+\xi}$ and $w_\xi \in V_\beta$. Now, any element of V_β preceding w_ξ is either an element of P_β or an element of W_β preceding w_ξ; hence in any case an element of $P_{\beta+\xi}$. Therefore, such an element cannot belong to $W_{\beta+\xi}=V_{\beta+\xi}-P_{\beta+\xi}$. Hence, w_ξ is the first element of $W_{\beta+\xi}$, thus $p_{\beta+\xi}=w_\xi$ as stated.

Now we prove by transfinite induction that (2) holds for every μ, $1 \leqq \mu<\gamma$. This is obvious for $\mu=0$. Suppose (2), i. e. $V_{\psi\mu} \subseteq P_{\psi\mu}$ holds for some μ; then we prove the same for $\mu+1$ instead of μ, i. e.

$$V_{\psi(\mu+1)}=\sum_{\zeta<\psi(\mu+1)} H(p_\zeta) \subseteq P_{\psi(\mu+1)}.$$

As we have, by hypothesis,

$$V_{\psi\mu}=\sum_{\zeta<\psi\mu} H(p_\zeta)\subseteq P_{\psi\mu}\subseteq P_{\psi(\mu+1)},$$

we have to prove that

$$\sum_{\psi\mu\leqq\zeta<\psi(\mu+1)} H(p_\zeta)\subseteq P_{\psi(\mu+1)}. \tag{4}$$

For this purpose, let ζ be an ordinal number such that $\zeta=\psi\mu+\varrho$ with $\varrho<\psi$, and denote by h any element of $H(p_\zeta)$. By the definition of V_β, we have $h\in V_{\zeta+1}$. If $h\in P_{\zeta+1}$, then we have $h\in P_{\psi(\mu+1)}$, for, $\psi(\mu+1)$ being an ordinal number of the second kind, $\zeta+1<\psi(\mu+1)$. If $h\notin P_{\zeta+1}$ then we have, by the definition of W_β, $h\in W_{\zeta+1}$. Applying the lemma with $\beta=\zeta+1$, we see that $h=p_{\zeta+1+\xi}$ for some $\xi<\overline{W}_{\zeta+1}$. Now we have

$$W_{\zeta+1}=V_{\zeta+1}-P_{\zeta+1}=\sum_{\eta<\zeta+1} H(p_\eta)-P_{\zeta+1}\subseteq\sum_{\psi\mu\leqq\eta<\zeta+1} H(p_\eta)$$

for, by the induction hypothesis, any element of

$$\sum_{\eta<\psi\mu} H(p_\eta)=V_{\psi\mu}$$

belongs to $P_{\psi\mu}$ and thus to $P_{\zeta+1}$. Therefore we have

$$\overline{\overline{W}}_{\zeta+1}\leqq\overline{\overline{\sum_{\psi\mu\leqq\eta<\zeta+1} H(p_\eta)}}\leqq\sum_{\psi\mu\leqq\eta<\zeta+1}\overline{\overline{H(p_\eta)}}=\sum_{\tau<\varrho+1}\overline{\overline{H(p_{\psi\mu+\tau})}}<\mathfrak{n},$$

because $\overline{\overline{H(p_\eta)}}<\mathfrak{n}$ for any η and $\overline{\overline{\varrho+1}}=\overline{\overline{\varrho}}<\overline{\overline{\psi}}=\mathfrak{n}$, and $\mathfrak{n}$ is regular. Hence we have $\xi<\overline{\overline{W}}_{\zeta+1}<\psi$ and consequently $\zeta+1+\xi=\psi\mu+\varrho+1+\xi<\psi\mu+\psi=$ $=\psi(\mu+1)$, i. e. $h=p_{\zeta+1+\xi}\in P_{\psi(\mu+1)}$ in this case too, which proves (4).

Let now μ be an ordinal number of the second kind, $\mu<\gamma$. Suppose that

$$V_{\psi\nu}\subseteq P_{\psi\nu}$$

for every ordinal number $\nu<\mu$. We have to prove that $V_{\psi\mu}=\sum_{\zeta<\psi\mu} H(p_\zeta)\subseteq P_{\psi\mu}$. For this purpose let ζ be any ordinal number satisfying $\zeta<\psi\mu$. This inequality implies $\zeta<\psi\nu$ for some $\nu<\mu$, for μ is an ordinal number of the second kind. Hence, any element of $H(p_\zeta)$ belongs to $\sum_{\eta<\psi\nu} H(p_\eta)=V_{\psi\nu}$, thus, by the induction hypothesis, also to $P_{\psi\nu}$, hence to $P_{\psi\mu}$ too, which proves our statement. Hence, theorem 2 is proved.

§ 2.

By means of Theorem 2 we prove the following theorem:

Theorem 3. *Let $\mathfrak{n}$ be a regular transfinite cardinal number and E an arbitrary set; further let R be a relation defined between the elements of E such that the set $H(x)$ of the elements $y\in E$ $(y\neq x)$ for which xRy holds has a power smaller then $\mathfrak{n}$. Then there exists a system $X=\{F_\eta\}$ of* *mutually disjoint free subsets F_η of E such that $X \leqq \mathfrak{n}$ and that for any element y of $E - \sum_{F_\eta \in X} F_\eta$ there is an element $x \in \sum_{F_\eta \in X} F_\eta$ for which yRx holds.*

Proof. Denote again by ψ the initial number of the cardinal number $\mathfrak{n}$. Applying theorem 2, we obtain a transfinite sequence (1) for which (2) holds (for every μ, $1 \leqq \mu < \gamma$, γ being defined as above). Let Q_μ denote the set of the elements p_ζ with $\psi\mu \leqq \zeta < \psi(\mu+1)$ for $0 \leqq \mu < \gamma$ and, for $\mu = \gamma$, the set of the elements p_ζ with $\psi\gamma \leqq \zeta < \alpha$. Obviously, the sets Q_μ are mutually disjoint and we have $\sum_{\mu \leqq \gamma} Q_\mu = E$.

Let $Z(x)$ denote, for every $x \in E$, the set of $y \in E$ $(y \neq x)$ for which yRx holds; further, let $Z[F]$ denote, for every $F \subseteqq E$ the set $\sum_{x \in F} Z(x)$.

First we define the set F_0. Let $f_{00} = p_0$. Let λ be a given ordinal number, $\lambda \geqq 1$, and suppose that $f_{0\varkappa}$ $(\in E)$ is defined for every $\varkappa < \lambda$. The condition $f_{0\varkappa} \in Q_{\mu_{0\varkappa}}$ defines uniquely an ordinal number $\mu_{0\varkappa}$. If there is an ordinal number μ which is greater then every $\mu_{0\varkappa}$ $(\varkappa < \lambda)$ for which Q_μ is not a subset of $\sum_{\varkappa < \lambda} Z(f_{0\varkappa})$ then let μ' be the smallest such ordinal number and define $f_{0\lambda}$ as the first element of $Q_{\mu'} - \sum_{\varkappa < \lambda} Z(f_{0\varkappa})$ in the well-ordering (1). Clearly, we have $\mu_{0\lambda} = \mu'$. In the opposite case, i. e. if $Q_\mu \subseteqq \sum_{\varkappa < \lambda} Z(f_{0\varkappa})$ for any $\mu > \mu_{0\varkappa}$ $(\varkappa < \lambda)$, then we do not define $f_{0\lambda}$. We define F_0 as the set of all those $f_{0\lambda}$ which have been defined.

Let η be a given ordinal number, $\eta \geqq 1$, and suppose that the subset F_ζ of E is defined for every $\zeta < \eta$. Supposing that the set

$$A_\eta = \sum_{\zeta < \eta} (F_\zeta \dotplus Z[F_\zeta])$$

is a proper subset of E, we define the subset F_η of E as follows. Let $\mu_{\eta 0}$ be the smallest ordinal number μ for which Q_μ is not a subset of A_η. (There exists such an ordinal number Q_μ, for $A_\eta \neq E$.) Define $f_{\eta 0}$ as the first element of $Q_{\mu_{\eta 0}} - A_\eta$ in the well-ordering (1). Let λ be an arbitrary ordinal number, $\lambda \geqq 1$, and suppose the element $f_{\eta\varkappa}$ of $E - A_\eta$ is defined for every $\varkappa < \lambda$. Define $\mu_{\eta\varkappa}$ for $\varkappa < \lambda$ by the condition $f_{\eta\varkappa} \in Q_{\nu_k}$. (For $\varkappa = 0$, this agrees with the above definition of $\mu_{\eta 0}$.) If there is an ordinal number μ which is greater than every $\mu_{\eta\varkappa}$ $(\varkappa < \lambda)$ for which Q_μ is not a subset of $A_\eta + \sum_{\varkappa < \lambda} Z(f_{\eta\varkappa})$, then let μ' be the smallest such ordinal number and define $f_{\eta\lambda}$ as the first element of $Q_{\mu'} - (A_\eta + \sum_{\varkappa < \lambda} Z(f_{\eta\varkappa}))$ in the well-ordering (1). Clearly, we have $\mu_{\eta\lambda} = \mu'$. In the opposite case, i. e. if $Q_\mu \subset A_\eta + \sum_{\varkappa < \lambda} Z(f_{\eta\varkappa})$ for any $\mu > \mu_{\eta\varkappa}$ $(\varkappa < \lambda)$, then we do not define $f_{\eta\lambda}$. We define F_η as the set of all those $f_{\eta\lambda}$ which have been defined. If, however, we have $A_\eta = E$, then we do not define the set F_η. Finally, we define X as the set of all those F_η which have been defined.

As an immediate consequence of this definition, we see that the elements F_η of X are mutually disjoint subsets of E. We prove first that they are free sets. Indeed, any two distinct elements of F_η are of the form $f_{\eta\varkappa}$ and $f_{\eta\lambda}$ $(\varkappa \neq \lambda)$. Let $\varkappa < \lambda$, say. Then, by the definition, we have $f_{\eta\lambda} \in Q_{\mu_{\eta\lambda}} - (A_\eta + \sum_{\varkappa<\lambda} Z(f_{\eta\varkappa}))$ (also in case $\eta = 0$, for then we have $f_{\eta\lambda} = f_{0\lambda} \in Q_{\mu_{0\lambda}} - \sum_{\varkappa<\lambda} Z(f_{0\varkappa}) = Q_{\mu_{\eta\lambda}} - (A_\eta + \sum_{\varkappa<\lambda} Z(f_{\eta\varkappa}))$ on account of $A_0 = 0$). Hence $f_{\eta\lambda} \notin Z(f_{\eta\varkappa})$, i. e. $f_{\eta\lambda} R f_{\eta\varkappa}$ does not hold. On the other hand, we have $f_{\eta\lambda} \in Q_{\mu_{\eta\lambda}}$ and $f_{\eta\varkappa} \in Q_{\mu_{\eta\varkappa}}$, and here $\mu_{\eta\lambda} > \mu_{\eta\varkappa}$. Hence, by the definition of the sets Q_μ, we have $f_{\eta\varkappa} = p_\zeta$ and $f_{\eta\lambda} = p_\xi$ for some ζ and ξ,

$$\psi\mu_{\eta\varkappa} \leqq \zeta < \psi(\mu_{\eta\varkappa}+1) \leqq \psi\mu_{\eta\lambda} \leqq \xi < \psi(\mu_{\eta\lambda}+1).$$

Hence, by (2) we have $H(f_{\eta\varkappa}) = H(p_\zeta) \subseteq P_{\psi(\mu_{\eta\varkappa}+1)}$ whereas we have $f_{\eta\lambda} = p_\xi \notin P_{\psi(\mu_{\eta\varkappa}+1)}$ for $\xi \geqq \psi(\mu_{\eta\varkappa}+1)$. Hence $f_{\eta\lambda} \notin H(f_{\eta\varkappa})$, i. e. $f_{\eta\varkappa} R f_{\eta\lambda}$ does not hold either. Thus, any two elements $f_{\eta\varkappa}$ and $f_{\eta\lambda}$ of F_η are independent, i. e. F_η is indeed a free set.

Next we prove $\overline{\overline{X}} \leqq \mathfrak{n}$. For this purpose, it is sufficient to show that, for any $F_\eta \in X$, we have $\eta < \psi$. This is obvious for $\eta = 0$. Suppose $F_\eta \in X$, i. e. that F_η has been defined and $\eta \neq 0$. Then $Q_{\mu_{\eta 0}}$ is not a subset of $A_\eta = \sum_{\zeta<\eta} (F_\zeta + Z[F_\zeta])$. Every set $A_\zeta = \sum_{\xi<\zeta} (F_\xi + Z[F_\xi])$ $(\zeta < \eta)$ and, moreover, every set $A_\zeta + \sum_{\varkappa<\lambda} Z(f_{\zeta\varkappa}) = \sum_{\xi<\zeta} (F_\xi + Z[F_\xi]) + \sum_{\varkappa<\lambda} Z(f_{\zeta\varkappa})$ (where $\zeta < \eta$ and $f_{\zeta\varkappa} \in F_\zeta$ for any $\varkappa < \lambda$) being obviously a subset of A_η, $Q_{\mu_{\eta 0}}$ is not a subset of any such set A_ζ or $A_\zeta + \sum_{\varkappa<\lambda} Z(f_{\zeta\varkappa})$. Hence, for a suitable λ $(f_{\zeta\lambda} \in F_\zeta)$ we have $\mu_{\eta 0} = \mu_{\zeta\lambda}$. Indeed, in the opposite case we would have $\mu_{\zeta\lambda} < \mu_{\eta 0}$ for every λ, $f_{\zeta\lambda} \in F_\zeta$. This is obvious for $\lambda = 0$, because $\mu_{\zeta 0}$ is, by definition, the smallest ordinal number μ for which Q_μ is not a subset of A_ζ, and $\mu_{\eta 0}$ is such an ordinal number. Suppose, we have $\mu_{\zeta\varkappa} < \mu_{\eta 0}$ for every $\varkappa < \lambda$. Then we have also $\mu_{\zeta\lambda} < \mu_{\eta 0}$, for $\mu_{\zeta\lambda}$ is by definition the smallest ordinal number μ for which $\mu > \mu_{\zeta\varkappa}$ $(\varkappa < \lambda)$ and for which Q_μ is not a subset of $A_\zeta + \sum_{\varkappa<\lambda} Z(f_{\zeta\varkappa})$, and this holds for the ordinal number $\mu = \mu_{\eta 0}$ too. Now, let λ be the smallest ordinal number for which $f_{\zeta\lambda}$ has not been defined. Then we have $Q_\mu \subseteq A_\zeta + \sum_{\varkappa<\lambda} Z(f_{\zeta\varkappa})$ for any μ which is greater then any $\mu_{\zeta\varkappa}$ $(\varkappa < \lambda)$; but this impossible since it does not hold for $\mu = \mu_{\eta 0}$.

Thus we have $f_{\zeta\lambda} \in Q_{\mu_{\zeta\lambda}} = Q_{\mu_{\eta 0}}$ for any $\zeta < \eta$ and for a suitable $\lambda = \lambda(\zeta) = \lambda(\zeta, \eta)$. This holds also for $\zeta = \eta$ with $\lambda = \lambda(\eta) = 0$. Now we prove that for $\xi < \zeta \leqq \eta$ we have $f_{\xi\lambda(\xi)} \prec f_{\zeta\lambda(\zeta)}$ in the well-ordering (1). Indeed, $f_{\xi\lambda(\xi)}$

is by definition the first element of

$$Q_{\mu_\xi \lambda(\xi)} - (A_\xi + \sum_{\varkappa < \lambda(\xi)} Z(f_{\xi\varkappa})) = Q_{\mu_\eta 0} - (A_\xi + \sum_{\varkappa < \lambda(\xi)} Z(f_{\xi\varkappa})).$$

On the other hand, we have $f_{\zeta\lambda(\zeta)} \in Q_{\mu_\zeta \lambda(\zeta)} - (A_\zeta + \sum_{\varkappa < \lambda(\zeta)} Z(f_{\zeta\varkappa}))$. Hence we have $f_{\zeta\lambda(\zeta)} \in Q_{\mu_\zeta \lambda(\zeta)} = Q_{\eta 0}$ and $f_{\zeta\lambda(\zeta)} \notin A_\zeta = \sum_{\varrho < \zeta} (F_\varrho + Z[F_\varrho])$. Now obviously

$$A_\xi + \sum_{\varkappa < \lambda(\xi)} Z(f_{\xi\varkappa}) = \sum_{\varrho < \xi} (F_\varrho + Z[F_\varrho]) + \sum_{\varkappa < \lambda(\xi)} Z(f_{\xi\varkappa}) \subseteq A_\zeta;$$

hence $f_{\zeta\lambda(\zeta)} \notin A_\xi + \sum_{\varkappa < \lambda(\xi)} Z(f_{\xi\varkappa})$. Consequently, we have

$$f_{\zeta\lambda(\zeta)} \in Q_{\mu_\eta 0} - (A_\xi + \sum_{\varkappa < \lambda(\xi)} Z(f_{\xi\varkappa}));$$

hence, $f_{\xi\lambda(\xi)}$ being the first element of this set, we have $f_{\xi\lambda(\xi)} \preceq f_{\zeta\lambda(\zeta)}$. By the disjointness of the sets F_ξ and F_ζ, this implies $f_{\xi\lambda(\xi)} \prec f_{\zeta\lambda(\zeta)}$ as stated.

Hence the elements $f_{\zeta\lambda(\zeta)}$ $(\zeta < \eta)$ form a subset of $Q_{\mu_\eta 0}$ which is similar to the set of the ordinal numbers ζ $(\zeta < \eta)$. On the other hand, on account of $f_{\zeta\lambda(\zeta)} \prec f_{\eta\lambda(\eta)} = f_{\eta 0}$ this subset is a subset of the section of $Q_{\mu_\eta 0}$ formed by the element $f_{\eta 0}$. Thus the ordinal number of this subset is smaller then the ordinal number of $Q_{\mu_\eta 0}$, hence smaller than ψ. The set of the ordinal numbers $\zeta (\zeta < \eta)$ having the ordinal number η, we see that $\eta < \psi$, and hence $\overline{\overline{X}} \leqq \mathfrak{n}$ indeed.

We have yet to prove that for any element y of $E - \sum_{F_\eta \in X} F_\eta$ there is an element x of $\sum_{F_\eta \in X} F_\eta$ for which yRx holds. Indeed, let τ denote the smallest ordinal number for which F_τ has not been defined. Then we have

$$E = A_\eta = \sum_{\eta < \tau} (F_\eta + Z[F_\eta]).$$

Hence

$$E - \sum_{F_\eta \in X} F_\eta = E - \sum_{\eta < \tau} F_\eta \subseteq \sum_{\eta < \tau} Z[F_\eta] = Z[\sum_{\eta < \tau} F_\eta]$$

which shows, that for any $y \in E - \sum_{F_\eta \in X} F_\eta$ we have $y \in Z[\sum_{\eta < \tau} F_\eta]$, i. e. $y \in Z(x)$, that is, yRx for a suitable $x \in \sum_{\eta < \tau} F_\eta = \sum_{F_\eta \in X} F_\eta$, as stated. Thus Theorem 3 has been proved.

§ 3.

Now we can prove Theorem 1 for any regular transfinite cardinal number $\mathfrak{n}$. Indeed, suppose the set E and the relation R satisfy the conditions of Theorem 1. Define the sets E_α and X_α by transfinite induction as follows. Let $E_0 = E$ be and X_0 the system X belonging to the set E_0, satisfying the statement of Theorem 3. Suppose, α is an ordinal number such that for any ordinal number $\beta<\alpha$, the subset E_β of E and the system X_β of some subsets of E_β have been defined. If $\sum_{\beta<\alpha}\sum_{F\in X_\beta}F$ is a proper subset of E, then we put

$$E_\alpha=E-\sum_{\beta<\alpha}\sum_{F\in X_\beta}F$$

and we define X_α as the system X corresponding in the sense of Theorem 3 to the set E_α (instead of E). (Obviously, any subset E_α of E satisfies the conditions of Theorem 3.) If, however, $\sum_{\beta<\alpha}\sum_{F\in X_\beta}F=E$ then we do not define E and X_α.

Now we prove that if E_α is defined (and therefore, by the definition, non empty), then for any $y\in E_\alpha$ and $\beta<\alpha$, there exists an element $x=x(\beta)\in\sum_{F\in X_\beta}F$ such that we have yRx. This holds (vacuously) for $\alpha=0$. Suppose $\alpha\geqq 1$ and that the statement holds for any $\beta<\alpha$; than we prove the same for α. Indeed, let $\beta<\alpha$. Suppose first that there is an ordinal number γ for which $\beta<\gamma<\alpha$. Then we have obviously $E_\alpha\subseteq E_\gamma$, hence $y\in E_\alpha$ implies $y\in E_\gamma$ and thus, by hypothesis, the existence of an $x\in\sum_{F\in X_\beta}F$ for which yRx, as stated. If, on the contrary, no such ordinal number γ exists, then we have $\alpha=\beta+1$, thus

$$E_\alpha=E-\sum_{\xi<\beta+1}\sum_{F\in X_\xi}F=E-\sum_{\xi<\beta}\sum_{F\in X_\xi}F-\sum_{F\in X_\beta}F=E_\beta-\sum_{F\in X_\beta}F.$$

Now, by Theorem 3, for any $y\in E_\beta-\sum_{F\in X_\beta}F=E_\alpha$ there is an $x\in\sum_{F\in X_\beta}F$ for which we have yRx, so that our statement holds in this case too.

Now, the sets $\sum_{F\in X_\alpha}F$ are mutually disjoint. Indeed, if $\beta<\alpha$, then X_α is, by definition, a system of subsets of E_α, thus $\sum_{F\in X_\alpha}F$ is a subset of $E_\alpha=E-\sum_{\beta<\alpha}\sum_{F\in X_\beta}F$, hence has no element in common with $\sum_{F\in X_\beta}F$. Therefore, if E_α is defined and thus not empty, and if y is an arbitrary element of E_α, then the set of the above elements $x(\beta)$ $(\beta<\alpha)$ has the cardinal number $\bar{\alpha}$. On the other hand, we have $yRx(\beta)$ i. e. $x(\beta)\in H(y)$ for any $\beta<\alpha$. This implies $\bar{\alpha}\leqq\overline{\overline{H(y)}}<\mathfrak{n}$.

Hence, there exists a least ordinal number α with $\bar{\alpha}\leqq\mathfrak{n}$ for which E_α is not defined, therefore

$$E=\sum_{\beta<\alpha}\sum_{F\in X_\beta}F. \tag{4}$$

By Theorem 3 we have $\overline{\overline{X_\beta}}\leqq\mathfrak{n}$ for any $\beta<\alpha$, thus (4) furnishes a decomposition of E into a sum of at most $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n}=\mathfrak{n}$ free subsets, which proves theorem 1 in the case that $\mathfrak{n}$ is a regular cardinal number.

§ 4.

We assume now that $\mathfrak{n}$ is a singular cardinal number. Let $\mathfrak{r}$ denote the smallest cardinal number such that $\mathfrak{n}$ is the sum of $\mathfrak{r}$ cardinal numbers each of which is less than $\mathfrak{n}$. Since $\mathfrak{n}$ is singular, we have $\mathfrak{r} < \mathfrak{n}$. Let μ denote the initial number of $\mathfrak{r}$. There exist regular cardinal numbers $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_\varkappa, \ldots$ $(\varkappa < \mu)$ such that $\mathfrak{n}_\beta > \mathfrak{n}_\alpha$ for $\beta > \alpha$ and

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 + \cdots + \mathfrak{n}_\varkappa + \cdots.$$

Let $E_\varkappa$ be the set of elements x of E for which the cardinal number of the elements $y \in E$, for which xRy, is $< \mathfrak{n}_\varkappa$. Put

$$F_\varkappa = E_\varkappa - \sum_{\nu < \varkappa} E_\nu.$$

Clearly

$$E = \sum_{\varkappa} F_\varkappa.$$

As the theorem holds when $\mathfrak{n}$ is regular we obtain that $F_\varkappa$ may be decomposed into the sum of $\mathfrak{n}_\varkappa$ of fewer free subsets. As $\bar{\varkappa} < \mathfrak{n}$ and $\overline{\overline{\{F_\varkappa\}}} \leqq \mathfrak{n}$, for each $\varkappa$ it follows that E may be split off into the sum of $\mathfrak{n}$ or fewer free subsets. Thus Theorem 1 is proved in the general case too.

*

The author wishes to express his thanks to Professors L. Kalmár and B. Sz.-Nagy for their aid and advice in the preparation of this paper.

(Received June 1, 1952.)

Rédeian skew product of operator groups.

By L. FUCHS in Budapest.

§ 1. Introduction.

One of the most important questions in group theory is the construction of new groups from given ones. The classical method of direct product [1]) has been generalized in several ways; let us mention only SCHREIER's extension theory [2]) or the Zappa—Szép extension of two groups [3]). Recently L. RÉDEI has introduced a fundamental method for constructing new groups from two given groups [4]). The new group has been called by him the *skew product* of the two factors. The great importance of the Rédeian skew product lies in the fact that it contains as special cases SCHREIER's and ZAPPA—SZÉP's extension theory as well as has several interesting applications to other problems of group theory.

In recent developments of abstract algebra, an important rôle is played by groups with operator domains. Therefore it seems to be desirable to extend RÉDEI's theory to groups with operators. The present paper is devoted to discussing this problem.

We start with two groups G and Γ with the same operator domain [5]) Ω and wish to get a survey over the Rédeian skew products [6]) $\mathfrak{G}=G\circ\Gamma$ of G and Γ such that $\mathfrak{G}$ can be made into an operator group with the same operator domain Ω. The effect of an operator $\in\Omega$ on the elements of $\mathfrak{G}$ may be defined so general that the treatment of the problem would be superfluously tedious and the problem itself would lose much of its interest. Therefore we shall confine ourselves to a particular case only. In selecting this case our leading viewpoint was that the skew product of operator groups shall contain

---

1) The group operation will be written as multiplication.

2) See SCHREIER [3] or ZASSENHAUS [6]. The numbers in brackets refer to the Bibliography given at the end of the paper.

3) See ZAPPA [5] and SZÉP [4].

4) RÉDEI [2].

5) This means not only that the elements of Ω act as operators both in G and Γ, but also that the product AB of two elements A, B of Ω has the same effect on the elements of both G and Γ as the successive application of A and B.

6) This notation is due to RÉDEI [2]

as special cases the important Schreier and Zappa—Szép extensions of operator groups, and besides, that the theory shall keep the symmetry in the two given groups. This intention leads us at once to the definition given in (10).

Our main result is Theorem 1 which gives a necessary and sufficient condition that a Rédeian skew product of two operator groups with the same operator domain shall be a group with the same domain of operators. Then we discuss those special cases of this skew product which correspond to SCHREIER's and ZAPPA—SZÉP's extension theory in case of operator groups. Splitting extensions are also considered.

§ 2. The main result.

Let G and Γ be two arbitrary groups with the common operator domain Ω. The elements of G will be denoted by italics, those of Γ by small Greek letters, while capitals such as $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \dots$ are reserved for the operators in Ω. The elements into which $a \in G$ and $\alpha \in \Gamma$ are carried by an operator A will be written as a^{A} and α^{A}, respectively.

Assume that $\mathfrak{G} = G \circ \Gamma$ is a Rédeian skew product of the operator groups G and Γ, and $\mathfrak{G}$ has the same operator domain Ω. The elements of $\mathfrak{G}$ are all pairs (a, α) $(a \in G$ and $\alpha \in \Gamma)$, and the multiplication rule in $\mathfrak{G}$ reads as follows:[6])

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (a b^{\alpha} \beta^{\alpha}, a^{b} \alpha^{b} \beta) \tag{1}$$

where $b^{\alpha}, \beta^{\alpha} \in G$ and $a^{b}, \alpha^{b} \in \Gamma$. If, for a moment, we ignore the operator domain Ω, then $\mathfrak{G} = G \circ \Gamma$ is a pure Rédeian skew product of the groups G and Γ (without operators) and therefore, by RÉDEI's result[4]), $\mathfrak{G}$ is a group with the identity (e, ε) (e is the identity in G and ε is that in Γ) obeying (1) if and only if the following conditions are satisfied for all elements $a, b, c \in G$ and $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$:[7])

$$\begin{array}{lll}
(2) & a^{\varepsilon} = a,\ e^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha} = \alpha^{\varepsilon} = e; & \alpha^{e} = \alpha,\ \varepsilon^{a} = e^{a} = a^{e} = \varepsilon; \\
(3) & c^{\alpha^{b}} = c; & \gamma^{a^{\beta}} = \gamma; \\
(4) & \gamma^{\alpha^{b}} = e; & c^{a^{\beta}} = \varepsilon; \\
(5) & b^{\alpha} c^{\alpha^{b}} = (bc)^{\alpha} (b^{c})^{\alpha}; & \gamma^{\alpha^{\beta}} \beta^{\alpha} = (\beta^{\gamma})^{\alpha} (\gamma\beta)^{\alpha}; \\
(6) & \beta^{\alpha} c^{\alpha^{\beta}} = (c^{\beta})^{\alpha} (\beta^{c})^{\alpha}; & \gamma^{b^{a}} b^{a} = (b^{\gamma})^{a} (\gamma^{b})^{a}; \\
(7) & \beta^{\alpha} \gamma^{\alpha^{\beta}} = (\gamma^{\beta})^{\alpha} (\beta\gamma)^{\alpha}; & c^{b^{a}} b^{a} = (cb)^{a} (c^{b})^{a}; \\
(8) & (b^{c}\gamma)^{\alpha} = (b^{c})^{\alpha} \gamma^{\alpha}; & (c\beta^{\gamma})^{a} = c^{a} (\beta^{\gamma})^{a}; \\
(9) & \gamma^{\alpha^{c^{\beta}} \beta^{c}} = \gamma^{\alpha\beta}; & c^{b^{\gamma} a^{\gamma^{b}}} = c^{ba}.
\end{array}$$

In what follows we suppose that (2)—(9) hold.

---

[7]) All the formulae of this paper are to be understood to hold for all the elements of G and Γ as well as for all the operators in Ω which occur in the formula under consideration. In what follows we tacitly assume this convention.

In order to describe the effect of an operator A on an element (a, α) of $\mathfrak{G} = G \circ \Gamma$, we introduce two sets of elements $\{\mathrm{A}^{\alpha}\}$ and $\{\mathrm{A}^{a}\}$ of G and Γ, respectively, which are defined for all operators $\mathrm{A} \in \Omega$ and for all $\alpha \in \Gamma$ and $a \in G$. Let the defining equation of these A^{α}'s and A^{a}'s be the following:

$$(a, \alpha)^{\mathrm{A}} = (a^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\alpha}, \mathrm{A}^{a} \alpha^{\mathrm{A}}) \tag{10}$$

where — we emphasize — A^{α} and A^{a} are uniquely determined elements of G and Γ, respectively. Our next aim is to establish the characteristic properties of the sets $\{\mathrm{A}^{\alpha}\}$ and $\{\mathrm{A}^{a}\}$.

First of all we observe that for all $\mathrm{A} \in \Omega$ we have

$$(e, \varepsilon)^{\mathrm{A}} = (e, \varepsilon),$$

considering that (e, ε) is the identity element of $\mathfrak{G} = G \circ \Gamma$. Therefore, by (10), we obtain

$$\mathrm{A}^{\varepsilon} = e, \quad \mathrm{A}^{e} = \varepsilon \qquad \text{for all } \mathrm{A} \in \Omega \tag{11}$$

(on account of $e^{\mathrm{A}} = e$ and $\varepsilon^{\mathrm{A}} = \varepsilon$).

Since each $\mathrm{A} \in \Omega$ is an operator acting on the elements of $\mathfrak{G}$, we must have

$$((a, \alpha)(b, \beta))^{\mathrm{A}} = (a, \alpha)^{\mathrm{A}} (b, \beta)^{\mathrm{A}} \tag{12}$$

for all (a, α) and (b, β) in $\mathfrak{G}$. The element on the left hand side of this equation is

$$((a, \alpha)(b, \beta))^{\mathrm{A}} = (a b^{\alpha} \beta^{\alpha}, a^{b} \alpha^{b} \beta)^{\mathrm{A}} = (a^{\mathrm{A}} (b^{\alpha})^{\mathrm{A}} (\beta^{\alpha})^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{a^{b} \alpha^{b} \beta}, \mathrm{A}^{a b^{\alpha} \beta^{\alpha}} (a^{b})^{\mathrm{A}} (\alpha^{b})^{\mathrm{A}} \beta^{\mathrm{A}}).$$

while that on the right hand side is

$$(a, \alpha)^{\mathrm{A}} (b, \beta)^{\mathrm{A}} = (a^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\alpha}, \mathrm{A}^{a} \alpha^{\mathrm{A}}) (b^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\beta}, \mathrm{A}^{b} \beta^{\mathrm{A}}) =$$
$$= (a^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\alpha} (b^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\beta})^{\mathrm{A}^{a} \alpha^{\mathrm{A}}} (\mathrm{A}^{b} \beta^{\mathrm{A}})^{\mathrm{A}^{a} \alpha^{\mathrm{A}}}, (a^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\alpha})^{b^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\beta}} (\mathrm{A}^{a} \alpha^{\mathrm{A}})^{b^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\beta}} \mathrm{A}^{b} \beta^{\mathrm{A}}).$$

Therefore we have the following relations:

$$(b^{\alpha})^{\mathrm{A}} (\beta^{\alpha})^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{a^{b} \alpha^{b} \beta} = \mathrm{A}^{\alpha} (b^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\beta})^{\mathrm{A}^{a} \alpha^{\mathrm{A}}} (\mathrm{A}^{b} \beta^{\mathrm{A}})^{\mathrm{A}^{a} \alpha^{\mathrm{A}}} \tag{13}$$

and

$$\mathrm{A}^{a b^{\alpha} \beta^{\alpha}} (a^{b})^{\mathrm{A}} (\alpha^{b})^{\mathrm{A}} = (a^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\alpha})^{b^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\beta}} (\mathrm{A}^{a} \alpha^{\mathrm{A}})^{b^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\beta}} \mathrm{A}^{b} \tag{14}$$

(we have already cancelled a^{A} on the left in (13) and β^{A} on the right in (14)). We observe that (13) and (14) are dual to each other in the sense that one of them is obtained from the other by exchanging Latin and Greek letters and reversing the order of the factors.

Equations (13) and (14) are too complicated to work with them; therefore we shall break down them into several equations of simpler type. In view of the mentioned duality, it clearly suffices to consider only one of them, say (13).

We put $a = e$ in (13) and take into account that by (11) we have $\mathrm{A}^{e} = \varepsilon$ and by (2) $e^{b} = \varepsilon$. Thus we obtain

$$(b^{\alpha})^{\mathrm{A}} (\beta^{\alpha})^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\alpha^{b} \beta} = \mathrm{A}^{\alpha} (b^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\beta})^{\alpha^{\mathrm{A}}} (\mathrm{A}^{b} \beta^{\mathrm{A}})^{\alpha^{\mathrm{A}}}. \tag{15}$$

If we set here firstly $b=e$, secondly $\beta=\varepsilon$ and use (2), (11) again, we arrive at the following two relations:

(16) $$(\beta^{\alpha})^{\mathsf{A}}\mathsf{A}^{\alpha\beta}=\mathsf{A}^{\alpha}(\mathsf{A}^{\beta})^{\alpha^{\mathsf{A}}}(\beta^{\mathsf{A}})^{\alpha^{\mathsf{A}}}$$

and

(17) $$(b^{\alpha})^{\mathsf{A}}\mathsf{A}^{\alpha^{b}}=\mathsf{A}^{\alpha}(b^{\mathsf{A}})^{\alpha^{\mathsf{A}}}(\mathsf{A}^{b})^{\alpha^{\mathsf{A}}},$$

respectively.

Returning to (13), put there $\alpha=\varepsilon$ to get

(18) $$b^{\mathsf{A}}\mathsf{A}^{a^{b}\beta}=(b^{\mathsf{A}}\mathsf{A}^{\beta})^{\mathsf{A}^{a}}(\mathsf{A}^{b}\beta^{\mathsf{A}})^{\mathsf{A}^{a}}.$$

Choosing $b=e$, (18) implies

(19) $$\mathsf{A}^{\beta}=(\mathsf{A}^{\beta})^{\mathsf{A}^{a}}(\beta^{\mathsf{A}})^{\mathsf{A}^{a}}.$$

Again from (18), with $\beta=\varepsilon$, it follows

(20) $$b^{\mathsf{A}}\mathsf{A}^{a^{b}}=(b^{\mathsf{A}})^{\mathsf{A}^{a}}(\mathsf{A}^{b})^{\mathsf{A}^{a}}.$$

Further conditions are obtained from the equation

(21) $$((a,\alpha)^{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}}=(a,\alpha)^{\mathsf{AB}},$$

where A and B are operators in Ω and AB is their product in Ω. Using (10), we find

$$((a,\alpha)^{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}}=(a^{\mathsf{A}}\mathsf{A}^{\alpha},\mathsf{A}\,\alpha^{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}}=(a^{\mathsf{AB}}(\mathsf{A}^{\alpha})^{\mathsf{B}}\mathsf{B}^{\mathsf{A}^{a}\alpha^{\mathsf{A}}},\mathsf{B}^{a^{\mathsf{A}}\mathsf{A}^{\alpha}}(\mathsf{A}^{a})^{\mathsf{B}}\alpha^{\mathsf{AB}})$$

and

$$(a,\alpha)^{\mathsf{AB}}=(a^{\mathsf{AB}}(\mathsf{AB})^{\alpha},(\mathsf{AB})^{a}\alpha^{\mathsf{AB}});$$

whence we have

(22) $$(\mathsf{A}^{\alpha})^{\mathsf{B}}\mathsf{B}^{\mathsf{A}^{a}\alpha^{\mathsf{A}}}=(\mathsf{AB})^{\alpha}.$$

as well as

(23) $$\mathsf{B}^{a^{\mathsf{A}}\mathsf{A}^{\alpha}}(\mathsf{A}^{a})^{\mathsf{B}}=(\mathsf{AB})^{a}.$$

(22) and (23) are again dual to each other, therefore we may consider only (22). Putting first $a=e$, then $\alpha=\varepsilon$, we are led to the relations

(24) $$(\mathsf{A}^{\alpha})^{\mathsf{B}}\mathsf{B}^{\alpha^{\mathsf{A}}}=(\mathsf{AB})^{\alpha}$$

and

(25) $$\mathsf{B}^{\mathsf{A}^{a}}=e,$$

respectively.

Now we are going to formulate the main result of the present paper.

T h e o r e m 1. *Let G and Γ be two operator groups with the common operator domain Ω. The set $\mathfrak{G}=G\circ\Gamma$ of all pairs (a,α) ($a\in G$ and $\alpha\in\Gamma$) under the rules*

(i) *equality:* $(a,\alpha)=(b,\beta)$ *is equivalent to* $a=b$, $\alpha=\beta$,
(ii) *multiplication:* $(a,\alpha)(b,\beta)=(a\,b^{\alpha}\beta^{\alpha},a^{\beta}\alpha^{b}\beta)$,
(iii) *effect of operators:* $(a,\alpha)^{\mathsf{A}}=(a^{\mathsf{A}}\mathsf{A}^{\alpha},\mathsf{A}^{a}\alpha^{\mathsf{A}})$ *if* $\mathsf{A}\in\Omega$,

is an operator group with the identity (e, ε) *and the same operator domain* Ω *if and only if besides conditions* (2)—(9) *of* L. RÉDEI *the following ones are satisfied:*

(26) $\mathrm{A}^{\varepsilon} = e;$ $\qquad$ $\mathrm{A}^{e} = \varepsilon;$

(27) $(\beta^{\alpha})^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\alpha\beta} = \mathrm{A}^{\alpha} (\mathrm{A}^{\beta})^{\alpha^{\mathrm{A}}} (\beta^{\mathrm{A}})^{\alpha^{\mathrm{A}}};$ $\qquad$ $\mathrm{A}^{ba} (b^{a})^{\mathrm{A}} = (b^{\mathrm{A}})^{a^{\mathrm{A}}} (\mathrm{A}^{b})^{a^{\mathrm{A}}} \mathrm{A}^{a};$

(28) $(b^{\alpha})^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\alpha^{b}} = \mathrm{A}^{\alpha} (b^{\mathrm{A}})^{\alpha^{\mathrm{A}}} (\mathrm{A}^{b})^{\alpha^{\mathrm{A}}};$ $\qquad$ $\mathrm{A}^{a^{\beta}} (\beta^{a})^{\mathrm{A}} = (\mathrm{A}^{\beta})^{a^{\mathrm{A}}} (\beta^{\mathrm{A}})^{a^{\mathrm{A}}} \mathrm{A}^{a};$

(29) $\mathrm{A}^{\beta} = (\mathrm{A}^{\beta})^{\mathrm{A}^{a}} (\beta^{\mathrm{A}})^{\mathrm{A}^{a}};$ $\qquad$ $\mathrm{A}^{b} = (b^{\mathrm{A}})^{\mathrm{A}^{\alpha}} (\mathrm{A}^{b})^{\mathrm{A}^{\alpha}};$

(30) $b^{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{a^{b}} = (b^{\mathrm{A}})^{\mathrm{A}^{a}} (\mathrm{A}^{b})^{\mathrm{A}^{a}};$ $\qquad$ $\mathrm{A}^{\alpha^{\beta}} \beta^{\mathrm{A}} = (\mathrm{A}^{\beta})^{\mathrm{A}^{\alpha}} (\beta^{\mathrm{A}})^{\mathrm{A}^{\alpha}}:$

(31) $(\mathrm{A}^{\alpha})^{\mathrm{B}} \mathrm{B}^{\alpha^{\mathrm{A}}} = (\mathrm{AB})^{\alpha};$ $\qquad$ $\mathrm{B}^{a^{\mathrm{A}}} (\mathrm{A}^{a})^{\mathrm{B}} = (\mathrm{AB})^{a};$

(32) $\mathrm{B}^{\mathrm{A}^{a}} = e;$ $\qquad$ $\mathrm{B}^{\mathrm{A}^{\alpha}} = \varepsilon.$

P r o o f. We have to show that a given system $\mathfrak{G} = G \circ \Gamma$ with (i), (ii) and (iii) is a group with the identity (e, ε) and with the operator domain Ω if and only if all of (2)—(9) and (26)—(32) hold. Since conditions (2)—(9) are necessary and sufficient for $\mathfrak{G}$ being a group with the identity (e, ε) and with (i), (ii), it remains to be proved that (26)—(32) are necessary and sufficient conditions for the group $\mathfrak{G}$ to have the operator domain Ω and to obey the rule (iii).

The equations on the left sides of (26)—(32) were obtained above as necessary conditions; those on the right sides are their duals; consequently, the proof of the necessity is complete.

In order to prove the sufficiency, let us suppose that (26)—(32) hold. (26) implies that $(e, \varepsilon)^{\mathrm{A}} = (e, \varepsilon)$ for all $\mathrm{A} \in \Omega$. In proving (12), we proceed stepwise from (27)—(30), by making use of the associative law in $\mathfrak{G}$.

(27_1) and (30_2) imply

(33) $$((e, \alpha)(e, \beta))^{\mathrm{A}} = (e, \alpha)^{\mathrm{A}} (e, \beta)^{\mathrm{A}},$$

while (30_1) and (27_2) imply

(34) $$((a, \varepsilon)(b, \varepsilon))^{\mathrm{A}} = (a, \varepsilon)^{\mathrm{A}} (b, \varepsilon)^{\mathrm{A}}.$$

Indeed, these are immediate consequences of the method by which we have arrived at (16) and (20).

For similar reasons we obtain from (28)

(35) $$((e, \alpha)(a, \varepsilon))^{\mathrm{A}} = (e, \alpha)^{\mathrm{A}} (a, \varepsilon)^{\mathrm{A}},$$

and from (29)

(36) $$((a, \varepsilon)(e, \alpha))^{\mathrm{A}} = (a, \varepsilon)^{\mathrm{A}} (e, \alpha)^{\mathrm{A}}.$$

Next we prove the very special cases of (12):

(37) $$((ab, a^{b})(e, \beta))^{\mathrm{A}} = (ab, a^{b})^{\mathrm{A}} (e, \beta)^{\mathrm{A}}$$

and

(38) $$((b^{\alpha}, \alpha^{b})(e, \beta))^{\mathrm{A}} = (b^{\alpha}, \alpha^{b})^{\mathrm{A}} (e, \beta)^{\mathrm{A}},$$

by making use of (33)—(36). Since

$$(ab, a^b)(e, \beta) = (ab\beta^{a^b}, a^b\beta) = (ab, \varepsilon)(e, a^b\beta)$$

(use (4)) and

$$(b^\alpha, \alpha^b)(e, \beta) = (b^\alpha\beta^{\alpha^b}, \alpha^b\beta) = (b^\alpha\beta^{\alpha^b}, \varepsilon)(e, \alpha^b\beta),$$

we have by (36), (33) and again (36)

$$((ab, a^b)(e, \beta))^{\mathsf{A}} = (ab, \varepsilon)^{\mathsf{A}}(e, a^b\beta)^{\mathsf{A}} = (ab, \varepsilon)^{\mathsf{A}}(e, a^b)^{\mathsf{A}}(e, \beta)^{\mathsf{A}} = (ab, a^b)^{\mathsf{A}}(e, \beta)^{\mathsf{A}},$$

and applying in turn (36), (34), (36), (33), (36), we obtain

$$((b^\alpha, \alpha^b)(e, \beta))^{\mathsf{A}} = (b^\alpha\beta^{\alpha^b}, \varepsilon)^{\mathsf{A}}(e, \alpha^b\beta)^{\mathsf{A}} = (b^\alpha, \varepsilon)^{\mathsf{A}}(\beta^{\alpha^b}, \varepsilon)^{\mathsf{A}}(e, \alpha^b\beta)^{\mathsf{A}} =$$
$$= (b^\alpha, \varepsilon)^{\mathsf{A}}(\beta^{\alpha^b}, \alpha^b\beta)^{\mathsf{A}} = (b^\alpha, \varepsilon)^{\mathsf{A}}(e, \alpha^b)^{\mathsf{A}}(e, \beta)^{\mathsf{A}} = (b^\alpha, \alpha^b)^{\mathsf{A}}(e, \beta)^{\mathsf{A}},$$

which prove (37) and (38), respectively.

By (37), (34) and (36) we get

$$(39)\quad ((a, \varepsilon)(b, \beta))^{\mathsf{A}} = ((a, \varepsilon)(b, \varepsilon)(e, \beta))^{\mathsf{A}} = ((ab, a^b)(e, \beta))^{\mathsf{A}} =$$
$$= (ab, a^b)^{\mathsf{A}}(e, \beta)^{\mathsf{A}} = (a, \varepsilon)^{\mathsf{A}}(b, \varepsilon)^{\mathsf{A}}(e, \beta)^{\mathsf{A}} = (a, \varepsilon)^{\mathsf{A}}(b, \beta)^{\mathsf{A}},$$

and similarly, from (38), (35) and (36) we infer

$$(40)\quad ((e, \alpha)(b, \beta))^{\mathsf{A}} = ((e, \alpha)(b, \varepsilon)(e, \beta))^{\mathsf{A}} = ((b^\alpha, \alpha^b)(e, \beta))^{\mathsf{A}} =$$
$$= (b^\alpha, \alpha^b)^{\mathsf{A}}(e, \beta)^{\mathsf{A}} = (e, \alpha)^{\mathsf{A}}(b, \varepsilon)^{\mathsf{A}}(e, \beta)^{\mathsf{A}} = (e, \alpha)^{\mathsf{A}}(b, \beta)^{\mathsf{A}}.$$

Now we are in a position to verify (12):

$$((a, \alpha)(b, \beta))^{\mathsf{A}} = ((a, \varepsilon)(e, \alpha)(b, \beta))^{\mathsf{A}} = (a, \varepsilon)^{\mathsf{A}}((e, \alpha)(b, \beta))^{\mathsf{A}} =$$
$$= (a, \varepsilon)^{\mathsf{A}}(e, \alpha)^{\mathsf{A}}(b, \beta)^{\mathsf{A}} = (a, \alpha)^{\mathsf{A}}(b, \beta)^{\mathsf{A}},$$

where we have applied (39), (40) and (36), successively. Hence A is actually an operator of $\mathfrak{G}$.

To complete the proof of the sufficiency of the condition in Theorem 1, we must still show that among the operators A, considered as operators acting on $\mathfrak{G}$, the same rule of composition holds as that originally given in Ω. In other words, (21) is to be verified. Considering that the validity of

$$((e, \alpha)^{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}} = (e, \alpha)^{\mathsf{AB}} \quad \text{and} \quad ((a, \varepsilon)^{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}} = (a, \varepsilon)^{\mathsf{AB}}$$

is an immediate consequence of (31_1), (32_2) and (32_1), (31_2), respectively, by (12), already proved, we conclude that

$$((a, \alpha)^{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}} = ((a, \varepsilon)^{\mathsf{A}}(e, \alpha)^{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}} = ((a, \varepsilon)^{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}}((e, \alpha)^{\mathsf{A}})^{\mathsf{B}} = (a, \varepsilon)^{\mathsf{AB}}(e, \alpha)^{\mathsf{AB}} = (a, \alpha)^{\mathsf{AB}}.$$

This completes the proof of the theorem.

We observe that the existence of a Rédeian skew product of any two operator groups G and Γ is ensured by the fact that the direct product $G \times \Gamma$ of G and Γ always exists. Indeed, if we put

$$b^\alpha = b, \beta^a = e, \quad a^b = \varepsilon, \alpha^b = \alpha, \quad \mathsf{A}^a = e, \mathsf{A}^\alpha = \varepsilon,$$

then all of (2)—(9) and (26)—(32) are automatically satisfied.

§ 3. Schreier extension of operator groups.

The Rédeian skew product of groups contains as a particular case SCHREIER's extension theory for groups. It belongs to the functions $b^\alpha = b$, $\beta^a = e$ and has the multiplication rule

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b \alpha^b \beta). \tag{41}$$

In this case the non-trivial ones of conditions (2)—(9) are the following:

$$\alpha^e = \alpha, \quad \varepsilon^a = e^a = a^e = \varepsilon; \tag{42}$$

$$\gamma^a \beta^a = (\gamma\beta)^a; \tag{43}$$

$$\gamma^{ba} b^a = b^a (\gamma^b)^a; \tag{44}$$

$$c^{ba} b^a = (cb)^a (c^b)^a, \tag{45}$$

which are obtained from (2_2), (5_2), (6_2) and (7_2), respectively.

The analogue of the Schreier extension for operator groups may be defined as follows. Let G and Γ be two operator groups possessing the same operator domain Ω. A group $\mathfrak{G}$ with the operator domain Ω is called a *Schreier extension of Γ by G*, if $\mathfrak{G}$ has an Ω-admissible normal subgroup Γ^* operator-isomorphic to Γ and the factor-group $\mathfrak{G}/\Gamma^*$ is operator-isomorphic to G. We shall show that the extension theory of operator groups may be subsumed under the Rédeian skew product of operator groups given in § 2, viz. it belongs to the case

$$b^\alpha = b, \quad \beta^a = e, \quad \mathsf{A}^\alpha = e. \tag{46}$$

In view of (46), most of the conditions (26)—(32) become identically true. One may readily check that only the following conditions have to be satisfied:

$$\mathsf{A}^e = \varepsilon; \tag{47}$$

$$\mathsf{A}^{ba} (b^a)^{\mathsf{A}} = (b^{\mathsf{A}})^{a^{\mathsf{A}}} (\mathsf{A}^b)^{a^{\mathsf{A}}} \mathsf{A}^a; \tag{48}$$

$$\mathsf{A}^a (\beta^a)^{\mathsf{A}} = (\beta^{\mathsf{A}})^{a^{\mathsf{A}}} \mathsf{A}^a; \tag{49}$$

$$\mathsf{B}^{a^{\mathsf{A}}} (\mathsf{A}^a)^{\mathsf{B}} = (\mathsf{A}\mathsf{B})^a, \tag{50}$$

which are obtained from (26_2), (27_2), (28_2) and (31_2), respectively.

The following theorem holds.

Theorem 2. *If G and Γ are two operator groups with the same operator domain Ω, then a group $\mathfrak{G}$ with the same operator domain Ω is a Schreier extension of Γ by G if and only if it is isomorphic to a group of all pairs (a, α) $(a \in G, \alpha \in \Gamma)$ with the identity (e, ε) and subject to the rules*

(i) *equality: $(a, \alpha) = (b, \beta)$ if and only if $a = b$, $\alpha = \beta$,*

(ii) *multiplication: $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b \alpha^b \beta)$,*

(iii) *effect of operators: $(a, \alpha)^{\mathsf{A}} = (a^{\mathsf{A}}, \mathsf{A}^a \alpha^{\mathsf{A}})$ (if $\mathsf{A} \in \Omega$),*

provided that all of the conditions (42)—(45) and (47)—(50) hold.

By virtue of Theorem 1 and in view of the fact that under (46), conditions (2)—(9) and (26)—(32) are equivalent to (42)—(45) and (47)—(50), respectively, what we have to prove is that the set[8] $\Gamma^* = (e, \Gamma)$ is an admissible subgroup of $\mathfrak{G}$, further that the isomorphism $(e, \alpha) \leftrightarrow \alpha$ between Γ^* and Γ as well as the isomorphism $(a, \alpha) \leftrightarrow a$ between the factor-group $\mathfrak{G}/\Gamma^*$ and G are operator-preserving. These statements may easily be checked. In fact, by (iii) and (47) we have

$$(e, \alpha)^{\mathrm{A}} = (e^{\mathrm{A}}, \mathrm{A}\, \alpha^{\mathrm{A}}) = (e, \alpha^{\mathrm{A}}) \in \Gamma^*,$$

further

$$(e, \alpha)^{\mathrm{A}} = (e, \alpha^{\mathrm{A}}) \leftrightarrow \alpha^{\mathrm{A}}$$

under the first indicated isomorphism and

$$(a, \alpha)^{\mathrm{A}} = (a^{\mathrm{A}}, \mathrm{A}^{a} \alpha^{\mathrm{A}}) \leftrightarrow a^{\mathrm{A}}$$

under the second one. Q. e. d.

§ 4. Zappa—Szép extension of operator groups.

If a group $\mathfrak{G}$ has two subgroups G^* and Γ^* such that each element of $\mathfrak{G}$ may be represented in a unique form $a^*\alpha^*$ with $a^* \in G^*$ and $\alpha^* \in \Gamma^*$, then $\mathfrak{G} = G^*\Gamma^*$ is called a *factorization* of $\mathfrak{G}$, and $\mathfrak{G}$ is said to be a *Zappa—Szép product*[9]) of the groups G^* and Γ^*. The same definition may be applied to operator groups with the sole modification that both G^* and Γ^* are assumed to be admissible subgroups of $\mathfrak{G}$.

Conversely, if given two operator groups G and Γ with the same operator domain Ω and $\mathfrak{G}$ is an operator group with the same Ω such that $\mathfrak{G} = G^*\Gamma^*$ is a factorization of $\mathfrak{G}$ where the admissible subgroups G^* and Γ^* of $\mathfrak{G}$ are operator-isomorphic to G and Γ, respectively, then $\mathfrak{G}$ is called *a Zappa—Szép extension of the operator groups G and Γ*. This extension is a particular case of the Rédeian skew product of operator groups. In fact, the following theorem holds.

Theorem 3. *Let G and Γ be two operator groups with the same operator domain Ω. A group $\mathfrak{G}$ with the same operator domain Ω is a Zappa—Szép extension of G and Γ if and only if it is isomorphic to a group of all pairs (a, α) ($a \in G$ and $\alpha \in \Gamma$) with the identity (e, ε) and with the rules*

(i) *equality*: $(a, \alpha) = (b, \beta)$ *is equivalent to* $a = b, \alpha = \beta$,

(ii) *multiplication*: $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^{\alpha}, \alpha^{b}\beta)$,

(iii) *effect of operators*: $(a, \alpha)^{\mathrm{A}} = (a^{\mathrm{A}}, \alpha^{\mathrm{A}})$ (*if* $\mathrm{A} \in \Omega$),

---

[8]) If D and Δ are any subsets of G and Γ, respectively, then (D, Δ) denotes the set of all (a, α) of $\mathfrak{G}$ such that $a \in D$ and $\alpha \in \Delta$.

[9]) Cf. Zappa [5] and Szép [4].

such that the following conditions are satisfied:

(51) $$a^{\varepsilon} = a, \quad e^{\alpha} = e; \qquad \alpha^{a} = \alpha, \quad \varepsilon^{a} = \varepsilon;$$

(52) $$b^{\alpha} c^{\alpha^{b}} = (bc)^{\alpha}; \qquad \gamma^{a^{\beta}} \beta^{a} = (\gamma\beta)^{a};$$

(53) $$c^{\alpha\beta} = (c^{\beta})^{\alpha}; \qquad \gamma^{ba} = (\gamma^{b})^{a};$$

(54) $$(b^{\alpha})^{A} = (b^{A})^{\alpha^{A}}; \qquad (\beta^{a})^{A} = (\beta^{A})^{a^{A}}.$$

P r o o f. Applying Theorem 1 with

(55) $$\alpha^{\beta} = e, \quad a^{b} = \varepsilon, \quad A^{\alpha} = e, \quad A^{a} = \varepsilon,$$

we see that the Rédeian skew product of the operator groups G and Γ exists, in view of the fact that conditions (2)—(9) and (26)—(32) are reduced by (55) to trivial ones and to (51)—(54). (The non-trivial ones enumerated under (51)—(54) are obtained from (2), (5), (6) and (28), respectively.) Therefore, it remains to be proved that $G^* = (G, \varepsilon)$ and $\Gamma^* = (e, \Gamma)$ are admissible subgroups of $\mathfrak{G}$ and the one-to-one mappings

(56) $$(a, \varepsilon) \longleftrightarrow a \quad \text{and} \quad (e, \alpha) \longleftrightarrow \alpha$$

between G^* and G, resp. between Γ^* and Γ are operator-isomorphisms. That G^* and Γ^* are subgroups of $\mathfrak{G}$ and are isomorphic to G and Γ, respectively, under the isomorphisms (56), is well known[4]). That G^* and Γ^* are admissible subgroups follows at once from (iii):

$$(a, \varepsilon)^{A} = (a^{A}, \varepsilon) \quad \text{and} \quad (e, \alpha)^{A} = (e, \alpha^{A}).$$

This also shows that the isomorphisms (56) are operator-preserving, as we wished to prove.

§ 5. Splitting extensions.

There is a particular case of the Rédeian skew product which is a common subcase of SCHREIER's and ZAPPA—SZÉP's extension theory. This is the so-called *splitting extension* and corresponds to the functions

(57) $$b^{\alpha} = b, \quad a^{b} = \varepsilon, \quad \beta^{a} = e.$$

In case of operator groups we add to these the conditions

(58) $$A^{\alpha} = e, \quad A^{a} = \varepsilon.$$

Under (57) and (58), conditions (2)—(9) and (26)—(32) reduce to the following relations (the trivial ones are omitted):

(59) $$\alpha^{a} = \alpha; \quad \varepsilon^{a} = \varepsilon;$$

(60) $$\gamma^{a} \beta^{a} = (\gamma\beta)^{a};$$

(61) $$\gamma^{ba} = (\gamma^{b})^{a};$$

(62) $$(\beta^{a})^{A} = (\beta^{A})^{a^{A}},$$

which are obtained from (2_2), (5_2), (6_2) and (28_2), respectively.

From Theorem 1, or, equivalently, from Theorem 2 or 3, we conclude:

Theorem 4. *If G and Γ are two operator groups with the same operator domain Ω, then the set of all pairs (a, α) $(a \in G, \alpha \in \Gamma)$ subject to the rules*

(i) *equality:* $(a, \alpha) = (b, \beta)$ *is equivalent to* $a = b, \alpha = \beta$,

(ii) *multiplication:* $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha^b \beta)$,

(iii) *effect of operators:* $(a, \alpha)^{\mathrm{A}} = (a^{\mathrm{A}}, \alpha^{\mathrm{A}})$ $(\mathrm{A} \in \Omega)$

is a group with the identity (e, ε) *and with the same* Ω *if and only if* (59) *to* (62) *are satisfied.*

In the splitting case the subsets $G^* = (G, \varepsilon)$ and $\Gamma^* = (e, \Gamma)$ of $\mathfrak{G}$ are admissible subgroups, moreover Γ^* is a normal subgroup of $\mathfrak{G}$. Among all Schreier extensions of the operator groups G and Γ the splitting ones are distinguished by the property that the elements of the representation system $\{(a, \varepsilon)\}$ for $\mathfrak{G}$ modulo Γ^* constitute a group (Ω-isomorphic to G).

More generally, we shall say that a Schreier extension of Γ by G *splits over* Γ if $\mathfrak{G}$ has a representation system[10]) $\{(a, \alpha_a)\}$ whose elements form an admissible subgroup of $\mathfrak{G}$. A group $\mathfrak{H}$ with the same operator domain Ω is said to be *a splitting group for* $\mathfrak{G}$ *modulo* Γ *relative to the representation system* $\{(a, \varepsilon)\}$ if (I) $\mathfrak{G}$ may be imbedded Ω-isomorphically in $\mathfrak{H}$, (II) $\mathfrak{H}$ has an admissible normal subgroup H containing Γ^*, (III) $\{(a, \varepsilon)\}$ is a representation system for $\mathfrak{H}$ modulo H and (IV) $\mathfrak{H}$ splits over H. We shall show that *such a splitting extension always exists.*

In fact[11]), consider the direct product $\mathfrak{G} \times G = \mathfrak{H}$, formed by the elements $(a, \alpha)b$ $((a, \alpha) \in \mathfrak{G}, b \in G)$. For convenience we identify the element $(a, \alpha)e$ with (a, α) of $\mathfrak{G}$ and the element $(e, \varepsilon)b$ with b of G. By this construction, (I) is trivially satisfied. The elements of $\mathfrak{H}$ which have the form $(a, \alpha)a$ constitute an admissible subgroup H of $\mathfrak{H}$ which is Ω-isomorphic to G under the correspondence $(a, \alpha)a \longleftrightarrow (a, \alpha)$. This H is clearly a normal subgroup of $\mathfrak{H}$ and contains the set of all $(e, \alpha)e = (e, \alpha)$, that is, it contains Γ^*. Hence (II) holds. Condition (III) is also satisfied, since $\{(a, \varepsilon)\}$ is obviously a complete representation system for $\mathfrak{H}$ modulo H. Finally, $\mathfrak{H}$ splits over H, for the elements $(e, \varepsilon)a = a$ constitute a complete representation system for $\mathfrak{H}$ modulo H and form an admissible subgroup of $\mathfrak{H}$. This establishes our statement.

---

[10]) For each $a \in G$, there is exactly one $\alpha_a \in \Gamma$ such that (a, α_a) belongs to this representation system.

[11]) The following method is due to Everett [1].

Bibliography.

[1] C. J. EVERETT, An extension theory for rings, *American Journal of Math.*, **64** (1942), pp. 363—370.

[2] L. RÉDEI, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal f. d. reine u. angewandte Math.*, **188** (1950), pp. 201—227.

[3] O. SCHREIER, Über die Erweiterung von Gruppen. Teil I, *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, **34** (1926), pp. 165—180; Teil II, *Hamburger Abhandlungen*, **4** (1926), pp. 321—346.

[4] J. SZÉP, Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen, *Commentarii Math. Helvetici*, **22** (1949), pp. 31—33.

[5] G. ZAPPA, Sulla costruzione dei gruppi prodotto di due dati sottogruppi permutabili tra loro, *Atti Secondo Congresso Unione Mat. Italiana, Bologna*, 1940, pp. 119—125.

[6] H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig u. Berlin, 1937).

(Received June 5, 1952.)

On the structure of semi-modular lattices of infinite length.

By G. Szász in Szeged.

1. Introduction. In the applications of lattice theory to modern algebra and geometry we have to do mostly with lattices in which the so-called Jordan—Dedekind chain condition holds:

(JD) a, b being arbitrary elements of the lattice such that $a < b$, all maximal chains[1]) between a and b have the same length.

Therefore, in view of these applications, it is of some importance to have conditions which imply (JD).

It is well-known[2]) that for the fulfilment of (JD) it is sufficient that the elements of the lattice satisfy the following two conditions:

(α) If x covers[3]) $x \cap y$, then $x \cup y$ covers y;

(β) If a, b are arbitrary elements of the lattice such that $a < b$, then every chain between a and b is finite.

In the first part of this paper we show that condition (β) may be replaced by a weaker condition which we shall formulate in the corollary to theorem 1. Using this theorem, we shall establish then some facts concerning the structure of a special family of lattices.

It is known that in the case of lattices of finite length the concept of semi-modularity is usually defined just by condition (α); moreover, that in this case (α) is eqivalent to each of the following conditions:

(γ) If x and y cover a and $x \neq y$, then $x \cup y$ covers x and y;

(δ) $x \cap y < z < x < x \cup y$ implies that there exists an element t such that $(x \cap y) < t \leqq y$ and $x \cap (t \cup z) = z$.

For lattices of infinite length, this equivalence does not remain valid in

---

1) A chain $x_0 < x_1 < \ldots < x_r$ is called maximal (and of length r) if there is no element t such that $x_{i-1} < t < x_i$ for an i $(1 \leqq i \leqq r)$. See, for the usual symbols and terminology, G. Birkhoff, *Lattice theory*, revised edition (New York, 1948).

2) G. Birkhoff, op. cit. pp. 66—67.

3) "a covers b" means that $a > b$ and that there is no element t such that $a > t > b$.

general[4]) [5]) and, in this case, there is no generally adopted definition of semi-modularity. We shall use, following R. CROISOT[6]), the

D e f i n i t i o n: *A lattice (of finite or infinite length) is called semi-modular if and only if it satisfies condition* (δ).

Condition (δ) implies[5]) condition (α); thus, in the second and third parts of our paper — where we shall treat only semi-modular lattices — we can make use of (α). Often it is useful to write (α) in the following form:

(α') If x covers a and $y \geqq a$, then either $x \cup y = y$ or $x \cup y$ covers y.

2. A theorem on maximal chains. For "x covers y" we shall use the symbol $x \succ y$; by $x \succeq y$ we shall denote that either $x \succ y$ or $x = y$.

First we shall prove the following

T h e o r e m 1. *Let L be a lattice satisfying* (α), *and let a, b be elements of L such that $a < b$. If there exists a maximal chain*

(1) $$a = a_0 \prec a_1 \prec \cdots \prec a_r = b$$

of length r between a and b, then (i) *the length of any other chain between a and b is at most r;* (ii) *maximal chains between a and b are precisely of length r.*

C o r o l l a r y. *Let L be a lattice satisfying* (α). *If there exists a finite maximal chain between two arbitrary elements a, b of L such that $a < b$, then condition* (JD) *holds in L.*

This means that for the fulfilment of (JD) it is sufficient to assume, instead of (β), merely the existence of a single finite maximal chain between every a and b ($a < b$).

P r o o f. It is sufficient to prove only theorem 1; the corollary follows by what has been said in the introduction. Further, it suffices to show only assertion (i) of the theorem. For, let

(2) $$a = x_0 < x_1 < \cdots < b$$

be an arbitrary (i. e. not necessarily maximal) chain between a and b. If we denote the length of (2) by r', then by (i) we have $r' \leqq r$. But, by (i), the chain (2) may obviously be made maximal, of length r'_m say, and we have also $r'_m \leqq r$. Conversely, starting with this maximal chain of length r'_m, we can infer also $r \leqq r'_m$; thus for maximal chains we have $r'_m = r$, indeed.

Now, we prove our theorem by showing that (2) has no subchain of length $r+1$.

[4]) G. BIRKHOFF, op. cit. p. 102, ex. 4 (a).

[5]) R. CROISOT, Contribution à l'étude des treillis semi-modulaires de longueur infinie, *Annales de l'École Normale Supérieure*, 68 (1951), pp. 203—265; especially pp. 211, 215—216.

[6]) R. CROISOT, op. cit. p. 204.

If $r=1$, i. e. if

$$(1') \qquad a \prec b,$$

then our assertion is obvious. For $r \geqq 2$ we prove our assertion by complete induction with respect to the length of the finite maximal chain of the form (1).

Suppose that — contrary to our assertion — it is possible to choose from (2) a subchain

$$(3) \qquad a < y_1 < y_2 < \cdots < y_{r+1} = b$$

of length $r+1$. Consider now the joins of the elements of (3) taken with the element a_1 of (1). Obviously

$$(4) \qquad a_1 \leqq y_1 \cup a_1 \leqq y_2 \cup a_1 \leqq \cdots \leqq y_r \cup a_1 \leqq b,$$

i. e. all distinct elements of (4) form a chain between a_1 and b. Now, consider the subchain of (1) between the same elements:

$$(1^*) \qquad a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_r = b.$$

The length of (1^*) is $r-1$. Therefore, by the induction hypothesis, every chain between a_1 and b is of length $\leqq r-1$.

However, we shall show that under our assumption expressed in (3) the chain of all distinct elements in (4) is of length $\geqq r$. It will follow from this contradiction that our above assumption cannot be true: the elements of (3) may not be all distinct.

In order to show this fact, we distinguish three cases, according as

1°. $y_i \cup a_1 = y_i$ *for* $i = 1, 2, \ldots, r$,
2°. $y_i \cup a_1 \neq y_i$ *for* $i = 1, 2, \ldots, r$,
3°. $y_1 \cup a_1 \neq y_1$, *but* $y_i \cup a_1 = y_i$ *for some* i, $1 < i \leqq r$.

This classification contains all possible cases, because $y_k \cup a_1 = y_k$ (for some k) is equivalent to $y_k \geqq a_1$; hence and from (3) $y_i \geqq a_1$, i. e. $y_i \cup a_1 = y_i$ also for all $i \geqq k$.

Case 1°. (4) gives in this case, by (3), the following chain between a_1 and b:

$$(4^*) \qquad a_1 \leqq y_1 < y_2 < \cdots < y_r < y_{r+1} = b.$$

But (4^*) is obviously at least of length r.

Case 2°. Then in particular $y_1 \cup a_1 \neq y_1$. This means that

$$(5) \qquad y_1 \cup a_1 > a_1.$$

For, $y_1 \cup a_1 = a_1$ would imply $y_1 \leqq a_1$; but $y_1 = a_1$ is impossible by our assumption $y_1 \cup a_1 \neq y_1$, while $a_1 > y_1$ is impossible because $a_1 \succ a$ and $y_1 > a$.

Further, since $a_1 \succ a$ and $y_i > a$, but $y_i \cup a_1 \neq y_i$ for all $i \leqq r$, (α') implies

$$y_i \cup a_1 \succ y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

By this fact and by (4) we have

(6′) $$y_{i+1} \cup a_1 \geqq y_i \cup a_1 \succ y_i$$

and

(6″) $$y_{i+1} \cup a_1 \succ y_{i+1} > y_i$$

for all $i \leqq r-1$. From (6′) and (6″) $y_{i+1} \cup a_1 \neq y_i \cup a_1$, so that

(7) $$y_{i+1} \cup a_1 > y_i \cup a_1$$

for $i = 1, 2, \ldots, r-1$. From (5) and (7) we have

(8) $$a_1 < y_1 \cup a_1 < y_2 \cup a_1 < \cdots < y_r \cup a_1 \leqq b.$$

Now, (8) is a chain between a_1 and b, whose length is at least r.

Case 3°. Let us denote, in this case, the least index $i > 1$ for which $y_i \cup a_1 = y_i$, by l. Then, as we have established above, $y_i \cup a_1 = y_i$ hold also for all $i \geqq l$.

As $y_1 \cup a_1 \neq y_1$, (5) holds also in this case. Further, one can see by the same arguments as in case 2°, that (7) holds for all $i \leqq l-2$. For $i = l-1$ we cannot in general strengthen the sign $\leqq$ to $<$ in (4). For $i = l, l+1, \ldots, r, r+1$, since we have $y_i \cup a_1 = y_i$, (7) follows immediately from (3). Thus we have in this case

(8′) $$\begin{aligned} a_1 < y_1 \cup a_1 < \cdots < y_{l-2} \cup a_1 < y_{l-1} \cup a_1 \leqq y_l \cup a_1 < \\ < y_{l+1} \cup a_1 < \cdots < y_r \cup a_1 < y_{r+1} \cup a_1 (= b), \end{aligned}$$

i. e. we have found a chain between a_1 and b, which is again at least of length r.

3. Semi-modular semi-complemented lattices. A lattice with a least element O will be called *semi-complemented*, if for any element a (not equal to the eventually existing greatest element I of L) the equation $a \cap x = O$ has at least one solution $x \neq O$ in L; the element x will then be called a *semi-complement* of a.

Clearly, all complemented lattices are a fortiori semi-complemented.

On the other hand it is easy to give examples showing that semi-complementedness and existence of a greatest element do not imply complementedness even in the case of lattices of finite length.

It was shown in a previous paper[7]) that if one assumes also semi-modularity, then, for lattices of finite length, semi-complementedness implies complementedness. Moreover this equivalence holds also for lattices with greatest element and of infinite length provided that they satisfy also the infinite distributive laws. But, as the following simple counter-example shows, for lattices of infinite length, semi-complementedness does not imply necessarily complementedness even if one considers only distributive lattices with greatest element.

[7]) G. Szász, Dense and semi-complemented lattices. To be published in *Nieuw Archief voor Wiskunde.*

Let L be the set of all finite subsets of a given countable set S, including also the void set. Let us define in L the ordering relation by the set-theoretical inclusion.. L is then a semi-complemented distributive lattice of infinite length; but it has no greatest element. However, by adjoining to L the whole set S as elements I, we can make it into a lattice L^* with a greatest and a least element. L^* is obviously semi-complemented and distributive, but not complemented.

The particularity of L^* lies in the property that, although it is of infinite length, yet all chains between an arbitrary element $a \neq I$ and the element O are finite. Such elements, which will play an important role in this section, will be called *of finite heigth.* We shall show that the behaviour of L^* is typical in the sense that if any lattice possesses the enumerated properties of L^*, then its elements have no complements. More precisely:

Theorem 2. *Let L be a semi-modular lattice of infinite length, having a greatest element I and a least element O. If, for each element $a \neq I$, there exists a finite maximal chain between O and a, then no element $\neq O, I$ has complements in L.*

Proof. Let a be an arbitrary element of L, $a \neq I$. If a has no semi-complement, then our statement is already proved for a. Thus we can assume that a has (at least) one semi-complement x.

By hypothesis there exists a finite maximal chain between O and a, and similarly between O and x. Thus, by theorem 1, a and x are both of finite height. For proving our theorem it is sufficient to find a finite maximal chain between a and $a \cup x$, for arbitrary a and x. In fact, let us consider a finite maximal chain between O and a, and continuate it by the finite maximal chain found between a and $a \cup x$. So we get a finite maximal chain between O and $a \cup x$. Hence, L being of infinite length and semi-modular, we can infer that $a \cup x \neq I$.

We begin therefore to construct a finite maximal chain between a and $a \cup x$. As we have already shown, all chains between O and x are finite. Let

(9) $$O = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_{r-1} \prec x_r = x$$

be a maximal chain. Consider the joins of these elements taken with a. Then we get the following series:

(10) $$(a =) \, a \cup x_0 \leqq a \cup x_1 \leqq \cdots \leqq a \cup x_{r-1} \leqq a \cup x.$$

Now, for each value of i $(i = 0, 1, \ldots, r-1)$, there are two cases to distinguish according as $a \cup x_i \geqq x_{i+1}$ holds or not.

If $a \cup x_i \geqq x_{i+1}$, then we have also $a \cup x_i \geqq a \cup x_{i+1}$. Hence and from (10) we get

(11) $$a \cup x_i = a \cup x_{i+1}.$$

If $a \cup x_i$ is not $\geqq x_{i+1}$, then $(a \cup x_i) \cap x_{i+1} < x_{i+1}$. But then $a \cup x_i \geqq x_i$ and $x_{i+1} \geqq x_i$ imply $x_{i+1} > (a \cup x_i) \cap x_{i+1} \geqq x_i$. Hence and from $x_{i+1} \succ x_i$ we conclude $(a \cup x_i) \cap x_{i+1} = x_i$. This means that

$$x_{i+1} \succ (a \cup x_i) \cap x_{i+1}. \tag{12}$$

Since the lattice is semi-modular, we have by (α) and from (12)

$$(a \cup x_i) \cup x_{i+1} \succ a \cup x_i. \tag{13}$$

Hence, by $(a \cup x_i) \cup x_{i+1} = a \cup (x_i \cup x_{i+1}) = a \cup x_{i+1}$, we get

$$a \cup x_{i+1} \succ a \cup x_i. \tag{14}$$

Thus, we have by (11) and (14)

$$(a =) a \cup x_0 \preceq a \cup x_1 \preceq \cdots \preceq a \cup x_{r-1} \preceq a \cup x,$$

i. e. all distinct elements of (10) form a finite maximal chain between a and $a \cup x$. Thus, by what has been told above, our theorem is proved.

This proof yields the following statement: if a is an element of finite height of the lattice L (satisfying the conditions of theorem 2) and if it has only semi-complements x with the same property, then none of the semi-complements x is a complement of a (i. e. a has no complement).

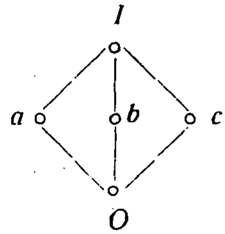
From this fact we get an interesting result for semi-complemented lattices L' of infinite length and with greatest element in which the infinite distributive laws hold. Indeed, as I have proved in my above-mentioned paper, such lattices L' are all complemented. Suppose now that L' has some element $a \neq I$ of finite height. (By theorem 1, for this property it is sufficient that a finite maximal chain exist between O an a.) Then it follows by the above fact that a has at least one semi-complement which is not of finite height. By theorem 1 we can formulate this result also in the following form:

Theorem 3. *Let L be a semi-complemented lattice of infinite length and with a greatest element I (and a least element O) in which the infinite distributive laws hold. If for some element $a \neq I$ there exists a finite maximal chain between O and a, then one can find a semi-complement x of a such that all maximal chains between O and x (if any) are of infinite length.*

4. On the number of points in semi-modular lattices. An element p of a lattice with O is called a *point* if $p \succ O$. In the lattice-theoretical treatment of Boolean algebras (i. e. complemented distributive lattices) of finite length it is a remarkable result that the length of such lattices is equal to the number of their points[8]). As all semi-complemented distributive lattices of finite length is also complemented, this result can be formulated also for *semi-complemented* distributive lattices of finite length.

[8]) This follows immediately from theorem 6 in G. Birkhoff, op. cit. p. 159.

But, considering the following non-distributive (but modular) lattice:



one can see immediately that the above statement holds in general only for distributive lattices. The question arises: what can be said about the length and the number of points in the case of semi-complemented modular or semi-modular lattices? In this direction we have the following

Theorem 4. *Let L be a semi-modular and semi-complemented lattice with greatest element I, in which to each element $a \neq O$ one can find at least one point p with $a \geqq p$. If L has only a finite number r of points, then its length is less than or equal to r.*

Proof. Let us denote the points of L by $p_1, p_2, \ldots, p_r$ (r finite), and a semi-complement of the element a by x. By assumption, $x \geqq p_k$ for some $k (\leqq r)$. Then $a \cap x = O$ implies $a \cap p_k = O$. Since L is semi-complemented, this means that to each a there is at least one p_i $(i \leqq r)$ for which $a \cap p_i = O$. Thus L cannot have elements greater than $\bigcup_{i=1}^{r} p_i$; but, since L has also the greatest element I, we have $\bigcup_{i=1}^{r} p_i = I$.

Consider now the sequence

$$
\begin{cases}
x_0 = O \\
x_1 = x_0 \cup p_1 = p_1 \\
x_2 = x_1 \cup p_2 = p_1 \cup p_2 \\
\vdots \\
x_k = x_{k-1} \cup p_k = p_1 \cup p_2 \cup \cdots \cup p_k \\
\vdots \\
x_r = x_{r-1} \cup p_r = p_1 \cup p_2 \cup \cdots \cup p_r = I.
\end{cases} \tag{15}
$$

Obviously

$$O = x_0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_r = I.$$

By theorem 1 it is sufficient to show that $x_k \succeq x_{k-1}$. Now we have $x_1 \succ x_0$ by definition. Let $k \geqq 2$. If $x_{k-1} \geqq p_k$, then $x_k = x_{k-1}$. If x_{k-1} is not $\geqq p_k$, then $p_k \succ O$ and $x_{k-1} \geqq O$ imply, by (α')

$$x_{k-1} \cup p_k \succ x_{k-1}, \quad \text{i. e.} \quad x_k \succ x_{k-1},$$

thus completing the proof of the theorem.

(Received June 24, 1952.)

Zur Theorie der einfachen Gruppen.

Von J. SZÉP in Szeged.

Wir beweisen den folgenden

Satz. *Ist die Gruppe $G = HP$ einfach, wo H und P eigentliche Untergruppen von G sind mit $H \cap P = 1$, und ist die Ordnung von P eine Primzahl p, so hat G eine Ordnung $pd(1+kp)$ mit $d|p-1$, $d>1$ (k eine natürliche Zahl).*

Korollar. *Ist p eine Primzahl von der Form 2^n+1, so ist die Ordnung von G eine gerade Zahl. (Ein ganz spezieller Fall der Burnsideschen Vermutung.)*

Bemerkung. Es gibt unendlich viele Gruppen für die die Bedingungen des Satzes erfüllt sind.[1])

Beweis des Satzes. Zuerst werden wir zeigen, daß H ein Element a hat, für welches $aPa^{-1} = P$ gilt. Die Gruppen $xPx^{-1} (x \in H)$ sind nicht sämtlich verschieden, da sonst G nichteinfach wäre[2]). Die Elemente $a (\in H)$ mit $aPa^{-1} = P$ bilden eine Gruppe $H' \subset H$ ($H' \neq 1$). Die Automorphismen $x \rightarrow axa^{-1} (a \in H', x \in P)$ sind sämtlich verschieden. Wären nämlich die Automorphismen $x \rightarrow axa^{-1}$, $x \rightarrow bxb^{-1} (a \neq b)$ gleich, so wäre der Automorphismus $x \rightarrow a^{-1}bx(a^{-1}b)^{-1}$ die Identität und dann wäre die Gruppe G nichteinfach[3]). Nun bilden die Automorphismen $x \rightarrow axa^{-1}$ eine Gruppe $\mathfrak{A} \cong H'$, also ist $p-1$ (die Ordnung der Automorphismengruppe von P) teilbar durch die Ordnung von H'.

Wir betrachten die Zerlegung von G nach dem Doppelmodul (P, P):

$$G = PP + PuP + PvP + \cdots \qquad (u, v \in H).$$

Der Index von P in G ist $h = d + k'p$, wobei d die Ordnung von H' bezeichnet. Andererseits kann die Ordnung h von H durch p nicht teilbar sein[1]), folglich gilt wegen $d|h$ auch $d|k'$, somit gilt $h = d(1+kp)$. Nach obigem gilt auch $d|p-1, d>1$. Somit haben wir den Satz bewiesen.

(*Eingegangen am 4. September 1952.*)

---

[1]) J. SZÉP, On simple groups, *Publicationes Math. Debrecen*, **1** (1949), S. 98.

[2]) A. SPEISER, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, zweite Aufl. (Berlin, 1927), Satz 176.

[3]) J. SZÉP, Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen, *Commentarii Math. Helvetici*, **22** (1949), S. 31—33, Satz 1.

Neue Bestimmung des Parallelwinkels in der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln.

Von PAUL SZÁSZ in Budapest.

Eine Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln, d. h. durch Anwendung der *hyperbolischen Parallelen* und des *Grenzkreises*, ist zum ersten Male H. LIEBMANN[1]) geglückt. Diese Liebmannsche Herleitung wurde von uns[2]) vereinfacht. Bei dieser Vereinfachung spielte die klassische Konfiguration von J. BOLYAI[3]) zur Bestimmung des Parallelwinkels als Funktion des Lotes, eine entscheidende Rolle.

In vorliegender Note wird die Bestimmung des Parallelwinkels in noch viel einfacherer Weise durchgeführt. Wir machen nämlich von der Gleichung des Grenzkreises und von der *Streckentrigonometrie* kein Gebrauch mehr. Benützt wird nur der bekannte Satz, laut welchem für zwei konzentrische Grenzkreisbogen $\widehat{AB} > \widehat{A'B'}$ zwischen denselben Achsen AA', BB', und mit dem Abstand $\overline{AA'} = \overline{BB'} = x$, das Verhältnis

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = e^{\frac{x}{k}}$$

ausfällt, wobei k eine konstante Strecke, die *natürliche Längeneinheit* bedeutet. Mit der Bestimmung des Parallelwinkels ist schon im wesentlichen die ganze hyperbolische Trigonometrie gewonnen, da aus der klassischen Formel (10) die bekannten Grundformeln für das rechtwinklige Dreieck folgen. Das erhellt aus einem eleganten Gedankengang von. J. HJELMSLEV.[4])

[1]) H. LIEBMANN, Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Klasse*, **59** (1907), S. 187—210.

[2]) PAUL SZÁSZ, Verwendung einer klassischen Konfiguration Johann Bolyai's bei der Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene, *diese Acta*, **14** (1952), S. 174—178.

[3]) J. BOLYAI, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, etc.* (Marosvásárhely, 1832), besonders § 29; siehe P. STÄCKEL, *Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen*, II (Leipzig und Berlin, 1913), S. 197.

[4]) J. HJELMSLEV, *Grundlag for den projektive Geometri* (Köbenhavn, 1943), besonders § 7, S. 36—37.

Diese äußerst einfache Herleitung der Formel (10), ist durch das Studium eines früheren Aufsatzes von H. LIEBMANN[5]) und der ihm vorausgehenden Arbeit von D. HILBERT[6]) zu Tage gefördert.

§ 1. Koordinate eines unendlich fernen Punktes.

Es sei in der orientierten Ebene der Punkt O und der unendlich ferne Punkt Ω gegeben. Die Gerade $O\Omega$ werde von O nach Ω gerichtet. Wird die Ebene um O im positiven Sinne mit 90^0 gedreht, so ~~gehe~~ Ω in den unendlich fernen Punkt E über. Endlich sei die Gerade $\mathsf{E}\Omega$ von dem Grenzkreis durch O mit dem Mittelpunkt Ω in E geschnitten. Als die *Koordinate* ξ eines von Ω verschiedenen unendlich fernen Punktes Ξ in Bezug auf $O\Omega$, werde das Verhältnis $\xi = \widehat{OX} : \widehat{OE}$ erklärt, wobei X den Schnittpunkt der Geraden $\Xi\Omega$ mit dem genannten Grenzkreis bezeichnet. Das Vorzeichen dieses Verhältnisses werde positiv oder negativ genommen, je nachdem die Bogen $\widehat{OX}$ und $\widehat{OE}$ gleichsinnig oder ungleichsinnig sind.

Bezeichne T die Projektion von Ξ auf $O\Omega$ (falls die Gerade $O\Xi$ von $O\Omega$ verschieden ist), und die Gerade $\Xi\Omega$ schneide den Grenzkreis durch T mit dem Mittelpunkt Ω in U. Wegen der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke $T\Omega\Xi$ und $O\Omega\mathsf{E}$ (mit je zwei Nullwinkeln) ist $\widehat{TU} = \widehat{OE}$, also mit $t = \overline{OT}$ ausgedrückt, wird

$$|\xi| = \widehat{OX} : \widehat{TU} = e^{\frac{t}{k}}. \tag{1}$$

Der Winkel $\tau = \sphericalangle \Omega O \Xi$ gehört dem Lote t als Parallelwinkel an, und es ist $t \gtrless 0$, je nachdem τ spitz oder stumpf ist. Wird der andere unendlich ferne Punkt von $O\Xi$ mit Ξ' bezeichnet, so ist der Betrag der Koordinate ξ' von Ξ' auf Grund von (1) offenbar

$$|\xi'| = e^{-\frac{t}{k}}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt noch

$$\xi' = -\frac{1}{\xi}, \tag{3}$$

da doch ξ und ξ' entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Die nachstehenden drei Hilfssätze sind unmittelbare Folgen der eben gesagten.

---

[5]) H. LIEBMANN, Über die Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Math. Annalen*, 59 (1904), S. 110—128.

[6]) D. HILBERT, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, *Math. Annalen*, 57 (1903), S. 137—150, oder *Grundlagen der Geometrie*, 7. Aufl. (Leipzig und Berlin, 1930), Anhang III, S. 159—177.

Hilfssatz 1. *Geht die Gerade $O\Omega$ um Ω gedreht in die Lage $O'\Omega$ über, so wird die neue Koordinate von Ξ*

$$\xi' = \xi - \lambda,$$

wobei $\lambda = \widehat{OO'}$, positiv oder negativ genommen, je nachdem $\widehat{OO'}$ und $\widehat{OE}$ *gleichsinnig oder ungleichsinnig sind.*

Hilfssatz 2. *Wird der Punkt O längs der gerichteten Gerade $O\Omega$ in O' verschoben, so ist die neue Koordinate von Ξ*

$$\xi' = e^{-\frac{a}{k}}\xi,$$

wobei $a = \overline{OO'}$, mit Vorzeichen genommen.

Hilfssatz 3. *Bezeichnet Ω' den anderen unendlich fernen Punkt von $O\Omega$, so ist die Koordinate von Ξ (verschieden von Ω und Ω') in Bezug auf $O\Omega'$*

$$\xi' = -\frac{1}{\xi}.$$

§ 2. Bestimmung des Parallelwinkels als Funktion des Lotes.

Es sei die Koordinate ξ des unendlich fernen Punktes Ξ, als Funktion des Winkels $\tau = \sphericalangle \Omega O \Xi$ aufgefaßt, $\xi = f(\tau)$. Hierbei soll τ die *analytische Maßzahl* des Winkels bedeuten, d. h. die Einheit für die Winkelmessung sei so gewählt, daß sich für den rechten Winkel die Maßzahl $\frac{\pi}{2}$ ergibt. Diese Funktion ist im Intervalle $0 < \tau < \pi$ positiv, und nimmt bei wachsendem τ beständig abnehmend alle positiven Werte an, sie ist also auch stetig. Für diese Funktion leiten wir in jenem Intervalle eine Funktionalgleichung her indem wir $f(\tau + \sigma)$ durch $f(\tau)$ und $f(\sigma)$ ausdrücken.

Es sei Ω_1 derjenige unendlich ferne Punkt, für den $\sphericalangle \Omega O \Omega_1 = -\sigma$ ausfällt. Dann ist $\sphericalangle \Omega_1 O \Xi = \tau + \sigma$, also die Koordinate von Ξ in Bezug auf $O\Omega_1$ offenbar gleich $f(\tau + \sigma)$. Die Gerade $\Omega\Omega_1$ werde vom Grenzkreis durch O mit dem Mittelpunkt Ω in O_1, und von dem mit dem Mittelpunkt Ω_1 in O_2 geschnitten. Geht man von der ursprünglichen Geraden $O\Omega$ der Reihe nach zur $O_1\Omega$, $O_1\Omega_1$, $O_2\Omega_1$, $O\Omega_1$ über, so ergibt sich durch die Anwendung der Hilfssätze 1, 3, 2, und wieder 1, für die Koordinate von Ξ in Bezug auf $O\Omega_1$

$$f(\tau + \sigma) = -\frac{m}{f(\tau) + f(\sigma)} + f(\sigma) = \frac{f(\tau)f(\sigma) + f(\sigma)^2 - m}{f(\tau) + f(\sigma)}, \tag{4}$$

wobei m eine gewisse positive Zahl bedeutet. Diese Zahl kann gleich bestimmt werden. Die Koordinate des anderen unendlich fernen Punktes Ξ' von $O\Xi$

in Bezug auf $O\Omega$ ist nämlich nach (3) gleich $-\frac{1}{f(\tau)}$, auf $O\Omega_1$ bezogen ergibt sich also für diese Koordinate in ähnlicher Weise der Wert

$$\frac{-\frac{f(\sigma)}{f(\tau)}+f(\sigma)^2-m}{-\frac{1}{f(\tau)}+f(\sigma)}=\frac{[f(\sigma)^2-m]f(\tau)-f(\sigma)}{f(\tau)f(\sigma)-1}.$$

Im Sinne von (3) ist aber diese Koordinate auf Grund von (4) andererseits

$$-\frac{1}{f(\tau+\sigma)}=\frac{-f(\tau)-f(\sigma)}{f(\tau)f(\sigma)+f(\sigma)^2-m},$$

also gilt notwendigerweise

$$f(\sigma)^2-m=-1.$$

Aus (4) entsteht deshalb die Funktionalgleichung

(5) $$f(\tau+\sigma)=\frac{f(\tau)f(\sigma)-1}{f(\tau)+f(\sigma)}.$$

Mit der Bezeichnung

(6) $$f(\tau)=\operatorname{ctg} F(\tau), \qquad 0<F(\tau)<\frac{\pi}{2}$$

nimmt (5) die Gestalt

(7) $$F(\tau+\sigma)=F(\tau)+F(\sigma)$$

an, da mit Rücksicht auf (6) $0<F(\tau)+F(\sigma)<\pi$ ist. Mit $f(\tau)$ ist aber auch die unter (6) definierte Funktion $F(\tau)$ im Intervalle $0<\tau<\pi$ stetig, aus (7) folgt daher

(8) $$F(\tau)=c\tau$$

mit konstantem c. Da an der Stelle $\tau=\frac{\pi}{2}$ offenbar

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg} F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

und somit $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ ausfällt, so ist unter (8)

$$c=\frac{1}{2}.$$

Aus (6) folgt demnach

(9) $$f(\tau)=\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}.$$

Im Sinne von (1) ist andererseits

$$f(\tau)=e^{\frac{t}{k}},$$

und so entsteht also aus (9) die klassische Formel[7])

$$\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2} = e^{\frac{t}{k}}, \tag{10}$$

Damit ist der Parallelwinkel τ als Funktion des Lotes t bestimmt.

Wie schon erwähnt, die Grundformeln der hyperbolischen Trigonometrie können aus (10) leicht gewonnen werden.

(*Eingegangen am 19. September 1952.*)

---

[7]) Vgl. J. Bolyai, loc. cit.[3]), ferner F. Engel, *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, etc.* (Leipzig, 1898), S. 20, Formel (12).

Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie.

Von L. Rédei in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Unter einer (algebraischen) Struktur verstehen wir eine Menge, in der Verknüpfungen — und zwar Addition oder Multiplikation oder beide — definiert sind.

Wir schicken folgende Bemerkung voran. Den Hauptgegenstand der Algebra bilden wohl als die gewöhnlichsten Strukturen die Gruppen, Moduln, Ringe und Schiefkörper, außerdem noch die Halbgruppen. Es gibt weitere Strukturen, die den vorigen sehr nahe stehen und ebenfalls oft vorkommen, jedoch nur selten berücksichtigt werden. Die gemeinten Strukturen werden wir (siehe § 2) Halbmoduln, Halbringe und Halbschiefkörper (oder Halb-Schiefkörper) nennen[1]).

Jetzt kommen wir auf unseren eigentlichen Gegenstand zu sprechen. Wir gehen von einer Homomorphiebeziehung

$$\mathfrak{S} \sim S \qquad (a \to a') \tag{1}$$

zwischen zwei Strukturen $\mathfrak{S}, S$ aus, wobei wir zugleich eine passende homomorphe Abbildung hingeschrieben haben. Mit (1) ist eine Einteilung von $\mathfrak{S}$ in (nichtleere) Klassen $C_1, C_2, \ldots$ verbunden, so daß man diejenigen Elemente von $\mathfrak{S}$ in einer Klasse zusammenfaßt, die ein gemeinsames homomorphes Bild haben. Bezeichnen wir mit $C(a)$ die durch das Element a representierte Klasse und definieren die Verknüpfungen

$$C(a) \cdot C(b) = C(a \cdot b), \tag{2}$$

wobei „$\cdot$“ alle Verknüpfungszeichen durchläuft, die in $\mathfrak{S}$ einen Sinn haben, so bilden die $C_1, C_2, \ldots$ bekanntlich eine Struktur, die wir mit $\mathfrak{S}/(C_1, C_2, \ldots)$

[1]) Schon hier erwähnen wir Beispiele, damit der Leser sieht, daß es sich um wichtige neue Strukturen handelt. Einen Halbring bilden die natürlichen Zahlen (die erste Struktur, die der Schüler kennenlernt!), allgemeinener die positiven Elemente eines angeordneten Ringes.

bezeichnen und die Faktorstruktur von $\mathfrak{S}$ nach (oder mod) $C_1, C_2, \ldots$ nennen[2]). Ferner gilt die Isomorphie:

(3) $\mathfrak{S}/(C_1, C_2, \ldots) \approx S \; (C(a) \to a')$ (allgemeiner Homomorphiesatz).

Selbst die Klasseneinteilung $C_1, C_2 \ldots$ nennen wir nach BOURBAKI [1][3]) kompatibel. Die kompatibilen Klassen lassen sich dadurch charakterisieren, daß für alle Verknüpfungen in $\mathfrak{S}$

(4) $a \equiv b \Longrightarrow c \cdot a \equiv c \cdot b, \; a \cdot c \equiv b \cdot c$ $(a, b, c \in \mathfrak{S})$

gilt, wobei $\Longrightarrow$ das Zeichen für „hat zur Folge" ist. (Wenn irgendeine Klasseneinteilung vorgelegt ist, so bezeichne „$\equiv$" stets die zugehörige Äquivalenz.)

Es gibt Sturkturen, in denen sich die kompatibilen Klassen nach einer allgemeinen Vorschrift durch eine von ihnen eindeutig angeben lassen, die selbst eine Unterstruktur Σ von $\mathfrak{S}$ ist, weshalb auch Hauptklasse genannt wird. Dann läßt sich also die Faktorstruktur einfach mit $\mathfrak{S}/\Sigma$ bezeichnen, ferner nimmt dann der Homomorphiesatz die knappe Form an:

(5) $\mathfrak{S}/\Sigma \approx S$ (spezieller Homomorphiesatz).

Dieser Fall, wo sich nämlich die Faktorstruktur durch eine passende Unterstruktur charakterisieren läßt, liegt bekanntlich z. B. für die Gruppen und Ringe vor, wobei die möglichen Hauptklassen die normalen Untergruppen bzw. die Ideale sind. (Die Moduln als additive abelsche Gruppen sind natürlich mitzurechnen, dagegen bleiben die Schiefkörper als trivialer Fall außer acht. Später werden wir auch noch weitere Beispiele kennenlernen, die sich auf Halbgruppen (Halbmoduln) und Halbringe beziehnen.

Nunmehr sind wir beim Schreierschen Erweiterungsproblem angelangt, das sich als Umkehrproblem des speziellen Homomorphiesatzes (5) so formulieren läßt: Für gegebene Strukturen Σ, S sind alle Strukturen $\mathfrak{S}$ mit der Eigenschaft (5) zu bestimmen. Im Zusammenhang mit dem Schreierschen Problem nennt man Σ und S die Kern- bzw. Faktorstruktur, ferner jede Lösung $\mathfrak{S}$ von (5) eine Schreiersche Erweiterung von Σ mit S.

Gleich bemerken wir, daß für das Schreiersche Problem die Bedingung (5) sich durch die oft bequemeren Bedingungen

(5') $\mathfrak{S}/\bar{\Sigma} \approx S, \; \bar{\Sigma} \approx \Sigma$

ersetzen läßt, denn nach $(5'_2)$ läßt sich Σ in $\mathfrak{S}$ einbetten, wodurch man auf (5) zurückgekommen ist.

Selbst SCHREIER [6, 7] hat sein Problem nur für Gruppen gestellt und in diesem Fall auch vollständig gelöst. Die Lösung des Problems für Ringe

---

[2]) Je nachdem $\mathfrak{S}$ z. B. eine Gruppe, Halbgruppe oder ein Ring ist, ist auch die Faktorstruktur eine Gruppe, Halbgruppe bzw. ein Ring. Entsprechend nenne man die Faktorstruktur eine Faktorgruppe, Faktorhalbgruppe, einen Faktorring (= Restklassenring) usw. (Selbstverständlich kann z. B. eine Faktorhalbgruppe oder ein Faktorring eventuell sogar eine Gruppe bzw. ein Körper sein.)

[3]) Mit [ ] verweisen wir auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

$\Sigma, S, \mathfrak{S}$ stammt von EVERETT [2], weshalb wir die Schreiersche Erweiterung von Ringen auch die Everettsche Erweiterung nennen.

Die Wichtigkeit der Schreierschen Erweiterungstheorie der Gruppen und ihr Zusammenhang mit der Algebren-, Schiefkörper- und Zahlentheorie ist wohlbekannt. Insbesondere für das letztere verweise ich an die vor kurzem erschienenen Arbeiten von HASSE [3, 4]. Die entsprechende aber viel jüngere Theorie der Ringe wird gewiß eine ähnlich vornehme Stelle einnehmen. Außer den Anwendungen bei EVERETT [2] sind mir aus der bisherigen Literatur dieser Theorie nur die kleinen aber interessanten Arbeiten von SZENDREI [9] und STEINFELD [8] bekannt.

Unlängst [5] habe ich die Grundlagen der Schreierschen Theorie für Gruppen neu und begrifflich einfacher aufgebaut, zugleich auch das Isomorphieproblem der Theorie etwas allgemeiner betrachtet, ferner eine leicht übersehbare Bezeichnungsweise eingefürt. Alles werde ich hier mit verallgemeinertem Inhalt wiederholen, wobei ich nämlich die Schreiersche Erweiterungstheorie der Halbgruppen entwickle. Die Spezialisierung für Gruppen werde ich auch ausführen, damit man sieht, wie sich dieser Fall in den allgemeineren einordnet. Desgleichen dehne ich die Everettsche Erweiterungstheorie auch auf die Halbringe aus, womit wieder auch die Ringe als Spezialfall mitbetrachtet werden. In beiden Fällen werde ich mich auch mit dem sogenannten Isomorphieproblem der Schreierschen Erweiterungen beschäftigen.

§ 2. Halbmoduln, Halbringe, Halbschiefkörper.

Wir stellen hier die zur Definition der anfangs erwähnten fünf Strukturen und der neu einzuführenden drei Strukturen dienenden Axiome tabellarisch zusammen:

(6)	Halbgruppe	$\times$	Gruppe	$\times^i$
	Halbmodul	$+$	Modul	$+^i$
	Halbring	$+\times$	Ring	$+^i\times$
	Halbschiefkörper	$+\times^i$	Schiefkörper	$+^i\times^i$

Dabei bedeutet jedes $+$ und $\times$ Zeichen, daß in der betreffenden Struktur die Addition bzw. Multiplikation definiert ist. Assoziativität und Distributivität beider Verknüpfungen, ferner Kommutativität und Regularität [4]) der Addition sind vorausgesetzt. Ein rechts angesetztes „i" bezeichnet die Invertierbarkeit [5]) der Verknüpfung, insbesondere aber für die Multiplikation in Halbschiefkörpen und

[4]) Regulär nennen wir eine Verknüpfung $a . b$, wenn jede Gleichung $a . x = b$, $y . a = b$ höchstens eine Lösung hat.

[5]) Invertierbar nennen wir eine Verknüpfung $a . b$, wenn die in [4]) genannten Gleichungen mindestens eine Lösung haben. Bekanntlich folgt hieraus die Eindeutigkeit der Lösungen d. h. die Regularität der Verknüpfung, ferner die Existenz des neutralen Elementes (das bei der Multiplikation und Addition Eins- bzw. Nullelement heißt) und die des Inversen

Schiefkörpern nur nach Ausschließung des (in Schiefkörpern stets, in Halbschiefkörpen eventuell vorhandenen) Nullelementes[6]).

Schon die augenscheinliche Vollständigkeit der Tabelle (6) spricht für das Bürgerrecht der hier neu eingeführten Strukturen. Neben den Beispielen in[1]) erwähnen wir noch die folgenden einfachen Beispiele. Sind $a_1, \ldots, a_n$ natürliche Zahlen, so bilden die Werte

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \qquad (x_i = 0, 1, \ldots; i = 1, \ldots; n)$$

einen Halbring. Die Polynome $f(x)$ mit reellen Koeffizienten und positivem Anfangskoeffizienten machen ebenfalls einen Halbring aus. Die positiven rationalen Zahlen (auch die nichtnegativen) bilden einen Halbkörper. Die Halbringe stehen im engsten Zusammenhang mit den angeordneten Ringen. Die anordnungsfähigen Ringe (insbesondere Schiefkörper) lassen sich nämlich als solche Ringe R definieren, die einen Halbring R' enthalten, so daß R', $-R'$ und 0 eben die sämtlichen verschiedenen Elemente von R ausmachen. (Diese R' sind die möglichen Positivitätsbereiche von R.) Ist S ein Modul, Ring oder Schiefkörper, so gibt es für jede Teilmenge H von S einen engsten Halbmodul-, ring bzw.-schiefkörper, der H enthält. Umgekehrt läßt sich leicht zeigen, daß man jeden Halbmodul und Halbring in einen Modul bzw. Ring einbetten kann. (Für die Halbschiefkörper gilt das entsprechende nicht.)

§ 3. Normalteiler von Halbgruppen. Ideale von Halbringen.

Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie wird so ermöglicht, daß wir neue Fälle angeben, in denen der spezielle Homomorphiesatz (5) gilt.

Erstens betrachten wir eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$, wobei wir das Vorhandensein des Einselementes annehmen und es mit e bezeichnen. Enthält $\mathfrak{H}$ ein („multiplikatives“) Nullement, so bezeichnen wir es für gewöhnlich mit 0. Wird $\mathfrak{H}$ irgendwie in Klassen eingeteilt, so nennen wir stets die e enthaltende Klasse die *Hauptklasse.*

Wir zeigen, daß die Hauptklasse in einer kompatibilen Klasseneinteilung von $\mathfrak{H}$ stets eine Halbgruppe ist.

Hierzu bezeichnen wir mit N die Hauptklasse und mit r, s zwei beliebige Elemente von N. Aus $r \equiv e$ folgt nach (4) $rs \equiv s$, hieraus und aus $s \equiv e$ folgt auch $rs \equiv e$. Hiernach gilt $rs \in N$, also ist N in der Tat eine Halbgruppe.

Ist $\mathfrak{H}$ insbesondere eine Gruppe, so ist eine kompatibile Klasseneinteilung durch die Hauptklasse eindeutig bestimmt. Für Halbgruppen gilt das nicht, wie es folgendes Beispiel zeigt. Betrachten wir die durch die Elemente a, b erzeugte freie kommutative Halbgruppe mit Einselement. Die sämtlichen Elemente sind jetzt $a^i b^k$ $(i, k = 0, 1, 2, \ldots)$. Wenn jedes Element für sich eine

---

[6]) Vandiver [10] spricht über „Halbringe“ in anderem Sinne als wir.

Klasse bildet, so ist das eine kompatibile Klasseneinteilung mit der Hauptklasse e. Ähnliches gilt auch über die Klasseneinteilung

$$e;\quad a, b;\quad a^2, ab, b^2;\quad a^3, a^2b, ab^2, b^3;\quad \ldots,$$

wie man das sofort sieht. Nach diesem Beispiel ist keine Rede davon, daß für Halbgruppen der spezielle Homomorphiesatz (5) gilt. Trotzdem wird dieser gültig, wenn man sich wie folgt auf passende kompatibile Klasseneinteilungen beschränkt.

Wir nennen eine kompatibile Klasseneinteilung der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit dem Einselement e und der Hauptklasse N *linksnormal,* wenn die Klassen von der Form

$$a_1N,\ a_2N, \ldots \qquad (a_1 = e) \tag{7}$$

sind und jedes Produkt $a_iN (a_i \neq 0)$ ohne Wiederholung ist.[7])

Bezeichnet $b_i (\in a_iN)$ einen beliebigen Representanten der Klasse a_iN, so gilt $b_iN \subseteqq a_iN$ $(i = 1, 2, \ldots)$, und zwar gilt „$=$" bei jeder Wahl der b_i offenbar dann und nur dann, wenn N eine Gruppe ist. Hiernach ist $a_2, a_3, \ldots$ in (7) im allgemeinen kein beliebiges Representantensystem der Klassen $\neq N$.

Wir beweisen: *Die linksnormale kompatibile Klasseneinteilung* (7) *einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Einselement ist durch die Hauptklasse N eindeutig bestimmt.*

Betrachten wir nämlich neben (7) eine weitere linksnormale kompatibile Klasseneinleitung.

$$b_1N, b_2N, \ldots \qquad (b_1 = e) \tag{8}$$

von $\mathfrak{H}$. Jedes a_i ist in einem festen b_kN und b_k in einem festen a_lN enthalten. Aus der Kompatibilität von (8) folgt $a_iN \subset b_kN$, aus der von (7) folgt weiter $b_kN \subseteqq a_lN$. Da hiernach $a_iN \subseteqq a_lN$, $a_iN = a_lN$ ist, so gilt $a_iN = b_kN$, womit die Behauptung bewiesen ist.[8])

Entsprechend obiger Definition nennen wir eine Unter-Halbgruppe N einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ einen *Linksnormalteiler* (oder eine linksnormale Unter-Halbgruppe) von $\mathfrak{H}$, wenn N die Hauptklasse einer linksnormalen kompatibilen Klasseneinteilung von $\mathfrak{H}$ ist. (Eine Vorbedingung ist, daß $\mathfrak{H}$ und N das gemeinsame Einselement haben.) Ferner nennen wir dann (7) auf Grund des

---

[7]) Im allgemeinen verstehen wir unter dem Produkt AB von zwei Teilmengen A, B einer Halbgruppe die Menge aller verschiedenen ab $(a \in A, b \in B)$. Wir sagen, daß das Produkt AB ohne Wiederholung ist, wenn $ab = a'b'$ $(a, a' \in A,\ b, b' \in B)$ nur für $a = a'$, $b = b'$ gilt. Insbesondere ist das Produkt $0B (= 0)$ nicht ohne Wiederholung, wenn B aus mindestens zwei Elementen besteht.

[8]) Im Beweis wurde nicht ausgenutzt, daß in (7), (8) die Produkte $a_iN, b_iN (a_i, b_i \neq 0)$ ohne Wiederholung sind, somit würde die Behauptung ihre Gültigkeit auch für alle kompatibilen Klasseneinteilungen von der Form (7) behalten (ohne Voraussetzung der Linksnormalität). Wir haben bei (7) die Definition der linksnormalen kompatibilen Klasseneinteilungen deshalb so eng gefaßt, damit sich die darauf fußende Schreiersche Erweiterungstheorie der Halbgruppen möglichst einfach gestaltet.

bewiesenen kurz die Klasseneinteilung von $\mathfrak{H}$ nach (oder mod) N. Wir vereinbaren uns, daß wir die zugehörige Faktorhalbgruppe einfach durch $\mathfrak{H}/N$ bezeichnen.

Nach diesem Übereinkommen dürfen wir nunmehr über das Schreiersche Erweiterungsproblem von Halbgruppen sprechen. Und zwar wenn (5) gilt, wobei $\mathfrak{S}, \Sigma, S$ Halbgruppen mit Einselement sind, so nennen wir $\mathfrak{S}$ eine Schreiersche Erweiterung von Σ mit S. In diesem Sinne werden wir auch die Schreiersche Erweiterungstheorie von Halbgruppen verstehen.[9])

Man sieht, daß insbesondere für Gruppen die linksnormalen kompatibilen Klasseneinteilungen mit den kompatibilen Klasseneinteilungen und die Linksnormalteiler mit den Normalteilern zusammenfallen. Für kommutative Halbgruppen sage man „normal" statt „linksnormal".

Z. B. bilden die ganzen Elemente eines algebraischen Zahlkörpers eine Halbgruppe (mit Nullelement) und in dieser die Einheiten einen Normalteiler. In jeder Halbgruppe von Matrizen über einem Integritätsbereich bilden die Skalarmatrizen ($\neq 0$) einen Linksnormalteiler.

Wir bemerken, daß alles obige nach Übergehen auf die additive Schreibweise auch für die Halbmoduln mit Nullelement seinen Sinn behält und sich wegen der Regularität und Kommutativität einfacher gestaltet. Dementsprechend nennen wir eine kompatibile Klasseneinteilung eines Halbmoduls $\mathfrak{M}$ *normal*, wenn die Klassen von der Form

$$a_1 + N, a_2 + N, \ldots \qquad (a_1 = 0) \tag{9}$$

sind, wobei N die Hauptklasse (d. h. die Null enthaltende Klasse) bezeichnet. Diese muß ein Halbmodul sein, den wir einen *normalen Unter-Halbmodul* von $\mathfrak{M}$ nennen. Dieser läßt sich dann leicht unmittelbar definieren als ein Unter-Halbmodul N von $\mathfrak{M}$, für den eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{M}$ von der Form (9) vorhanden ist, denn diese ist offenbar auch schon kompatibel.

Zweitens betrachten wir einen Halbring $\mathfrak{R}$, von dem wir die Existenz des Nullelementes 0 annehmen. Da $\mathfrak{R}^+$ ein Halbmodul ist,[10]) so gestaltet sich jetzt alles wieder sehr einfach. Und zwar wollen wir mit einer *normalen* kompatibilen Klasseneinteilung von $\mathfrak{R}$ meinen, daß es sich um eine solche des Halbmoduls $\mathfrak{R}^+$ handelt, die dabei auch für $\mathfrak{R}^\times$ kompatibel ist. Die Hauptklasse nennen wir in diesem Falle ein *Ideal* des Halbringes $\mathfrak{R}$. Dieses läßt sich offenbar auch als ein das Nullelement enthaltender Unter-Halbmodul N

[9]) Während sich jede nichteinfache Gruppe als Schreiersche Erweiterung aus zwei Gruppen $\neq 1$ gewinnen läßt, so ist das für die Halbgruppen nicht der Fall. Betrachten wir z. B. die Halbgruppe mit den Elementen e, a, a^2 (e Einselement, $a^3 = a^2$). Diese ist nichteinfach, denn sie läßt die kompatibile Klasseneinteilung $e; a, a^2$ zu, läßt sich trotzdem nicht als Schreiersche Erweiterung aus zwei Halbgruppen $\neq 1$ gewinnen.

[10]) Im allgemeinen bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}^+, \mathfrak{S}^\times$ die additive bzw. multiplikative Struktur, die aus einer Struktur so entsteht, daß man in dieser nur die Addition oder Multiplikation beachtet.

von $\mathfrak{R}^+$ definieren, wofür eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{R}$ von der Form (9) existiert und unbeschränkt

$$ab, ba \in N \qquad (a \in \mathfrak{R}, b \in N)$$

gilt.

Es ist klar, daß jede normale kompatibile Klasseneinteilung des Halbringes $\mathfrak{R}$ durch die Hauptklasse (d. h. das Ideal) N eindeutig bestimmt ist. Deshalb dürfen wir den Faktorhalbring mit $\mathfrak{R}/N$ bezeichnen. Wieder gilt dann der spezielle Homomorphiesatz (5), ferner ist hierdurch der Begriff der Schreierschen Erweiterungen auch für Halbringe sinvoll geworden. (Eine Bemerkung wie [9]) gilt auch jetzt.)

Insbesondere für Ringe $\mathfrak{R}$ geht alles in das bekannte über.

§ 4. Die Schreiersche Erweiterungstheorie für Halbgruppen insbesondere Gruppen.

Gegeben seien zwei Halbgruppen S, Σ mit Einselement. Kleine lateinische und griechische Buchstaben sollen stets Elemente von S bzw. Σ, insbesondere e und ε das Einselement von S bzw. Σ bezeichnen. Enthält S ein Nullelement, so werde dies mit o bezeichnet. (Ob auch in Σ ein Nullelement vorkommt, ist gleichgültig.) Unser Zweck ist die sämtlichen Schreierschen Erweiterungen $\mathfrak{S}$ von Σ mit S zu bestimmen. Bequemlichkeitshalber beschränken wir uns aber im Fall $o \in S$ auf Lösungen $\mathfrak{S}$ mit Nullelement und machen erst nachträglich (in [12])) klar, wie man auch die $\mathfrak{S}$ ohne Nullelement finden kann. Umgekehrt wenn $\mathfrak{S}$ ein Nullelement enthält, dann gilt offenbar $o \in S$, somit hat die getroffene Einschränkung zur Folge, daß S und $\mathfrak{S}$ gleichzeitig ein Nullelement enthalten.

Als Vorbereitung zur Lösung des Schreierschen Problems machen wir die folgende Konstruktion. Wir betrachten die Paare

$$(a, \alpha) \qquad (a \in S, \alpha \in \Sigma).$$

Diese sollen im allgemeinen als verschieden gelten mit der einzigen Ausnahme, daß alle (o, α) als gleich anzusehen sind. (Wie hier so auch später sollen die auf o bezüglichen Aussagen außer acht gelassen werden, falls o nicht existiert.) Die Menge dieser Paare (a, α) machen wir zu einer (nicht notwendig assoziativen) Struktur, die wir mit $S \circ \Sigma$ bezeichnen und ein Schreiersches Produkt von S und Σ nennen, so daß wir eine Multiplikation der Elemente durch

$$(10) \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b \alpha^b \beta) \qquad (a, b \in S; \alpha, \beta \in \Sigma)$$

definieren, wobei

$$(11) \qquad a^b, \alpha^b (\in \Sigma)$$

Funktionen der Argumente a, b bzw. α, b bezeichnen, stets unterworfen den „Anfangsbedingungen"

$$(12) \qquad a^e = \varepsilon, \; e^a = \varepsilon, \; \alpha^e = \alpha, \; \varepsilon^a = \varepsilon \qquad (a \neq o).$$

Da alle $(o, \alpha)(\alpha \in \Sigma)$ dasselbe Element von $S \circ \Sigma$ bezeichnen, so liest man von (10) ab, daß es auf die Werte der beiden Funktionen (11) für $ab = o$ bzw. $b = o$ gar nicht ankommt. Deshalb sehen wir im folgenden von diesen Funktionswerten völlig ab, auch wenn wir das nicht ausdrücklich sagen.

Aus (10) und (12) folgt

$$(a, \varepsilon)(b, \varepsilon) = (ab, a^b), \quad (e, \alpha)(b, \varepsilon) = (b, \alpha^b).$$

Dies und (10) zeigen, daß die Funktionen (11) und das Schreiersche Produkt $S \circ \Sigma$ einander gegenseitig eindeutig bestimmen.

Die Begriffe „Schreiersches Produkt" und „Schreiersche Erweiterung" sind voneinander wohl zu unterscheiden. Der Zusammenhang des ersten mit dem zweiten erhellt aus folgendem:

Satz 1. *Ein Schreiersches Produkt $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ ist dann und nur dann eine Halbgruppe, wenn*

$$(\alpha\beta)^c = \alpha^c \beta^c \qquad (c \neq o), \tag{13}$$

$$\alpha^{bc} b^c = b^c (\alpha^b)^c \qquad (bc \neq o), \tag{14}$$

$$a^{bc} b^c = (ab)^c (a^b)^c \qquad (abc \neq o) \tag{15}$$

gelten. Diese Halbgruppen sind (bis auf Isomorphie) die sämtlichen Schreierschen Erweiterungen von Σ mit S, und zwar bilden dann die Elemente (e, α) einen Linksnormalteiler $\bar{\Sigma}$ von $\mathfrak{S}$, wofür

$$\mathfrak{S}/\bar{\Sigma} \approx S \quad ((a, \varepsilon)\bar{\Sigma} \to a), \qquad \bar{\Sigma} \approx \Sigma \quad ((e, \alpha) \to \alpha) \tag{16}$$

gilt.[11]) *Die Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ ist dann und nur dann eine Gruppe, wenn auch S, Σ Gruppen sind; in diesem Fall folgt aus* (12_3), (13), (14) *mit Notwendigkeit, daß alle*

$$\alpha \to \alpha^b \tag{17}$$

Automorphismen von Σ sind.[12])

Bemerkungen. Die den Bedigungen (11)—(15) genügenden Funktionen a^b, α^b nennen wir das zur Schreierschen Erweiterung gehörende *Funktionenpaar,* selbst a^b bzw. α^b das (zu $\mathfrak{S}$ gehörende) *Faktorensystem* bzw. *Endomorphismensystem.* Ist die Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ eine Gruppe, so sprechen wir kurz über eine Schreiersche Gruppenerweiterung. Nach

---

[11]) Im allgemeinen soll mit

$$A \approx A' \qquad (\alpha \to \alpha')$$

bezeichnet werden, daß $\alpha \to \alpha'$ eine isomorphe Abbildung von A auf A' ist.

[12]) Wir lassen uns erinnern, daß wir im Fall $o \in S$ nur die Schreierschen Erweiterungen $\mathfrak{S}$ zugelassen haben, die ebenfalls mit Nullelement sind. (Und zwar ist dann nach (10) das Nullelement von $\mathfrak{S}$ gleich (o, α).) Will man im Fall $o \in S$ die $\mathfrak{S}$ ohne Nullelement bestimmen, so braucht man nur die folgenden Änderungen durchzuführen. Man betrachtet alle (a, α) als verschieden (auch die (o, α)). Der Wert der Funktionen (11) bleibt für $ab = o$ bzw. $b = o$ nicht willkürlich. Die (13)—(15) sollen für alle a, b, c gelten.

dem Schluß des Satzes ist in der Schreierschen Theorie für Halbgruppen der Fall der Gruppenerweiterung als Spezialfall enthalten. In diesem Fall nennen wir a^b wegen (17) das *Automorphismensystem.*[13])

K o r o l l a r 1. *Gilt insbesondere*

$$a^b = \varepsilon \qquad (ab \neq o),$$

so vereinfacht sich (14) *zu*

$$(14') \qquad a^{bc} = (a^b)^c \qquad (bc \neq o),$$

die Bedingung (15) *ist trivial erfüllt und die Multiplikation* (10) *nimmt die Form*

$$(10') \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha^b \beta)$$

an. In diesem Fall nenne man die Schreiersche Erweiterung *faktorenfrei.*

K o r o l l a r 2. *Gilt dagegen*

$$\alpha^b = \alpha \qquad (b \neq o),$$

so bedeutet (14), *daß die* $a^b (ab \neq o)$ *im Zentrum von* Σ *liegen, die Bedingung* (15) *vereinfacht sich zu*

$$(15') \qquad a^{bc} b^c = (ab)^c a^b \qquad (abc \neq o),$$

die Bedingung (13) *ist trivial erfüllt und die Multiplikation* (10) *nimmt die Form*

$$(10'') \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b \alpha \beta)$$

an. In diesem Fall nenne man die Schreiersche Erweiterung *endomorphismenfrei* (bzw. *automorphismenfrei).*

K o r o l l a r 3. *Für eine Schreiersche Gruppenerweiterung gilt* (14') *dann und nur dann, wenn alle* $a^b (ab \neq o)$ *im Zentrum von* Σ *liegen.*

Zum Beweis betrachten wir ein Schreiersches Produkt $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$. Damit dies eine Halbgruppe ist, ist notwendig und hinreichend, daß für (10) die Assoziativitätsbedingung erfüllt ist. Diese lautet als

$$(ab, a^b \alpha^b \beta)(c, \gamma) = (a, \alpha)(bc, b^c \beta^c \gamma).$$

Nach (10) schreibt sich hierfür

$$(abc, (ab)^c (a^b \alpha^b \beta)^c \gamma) = (abc, a^{bc} \alpha^{bc} b^c \beta^c \gamma).$$

Dieses ist gleichwertig mit

$$(18) \qquad (ab)^c (a^b \alpha^b \beta)^c = a^{bc} \alpha^{bc} b^c \beta^c \qquad (abc \neq o).$$

Setzt man hier zuerst $b = e$, dann $a = e, \beta = \varepsilon$, endlich $\alpha = \beta = \varepsilon$, so ent-

---

13) Die in der Literatur übliche Benennung „Automorphismenmenge" (s. ZASSENHAUS [11]) halten wir für verfehlt, da die Automorphismen $\alpha \to \alpha^b$ nicht verschieden zu sein brauchen. Das Faktorensystem pflegt man nach SCHREIER etwa mit $C_{a,b}$ (statt a^b) zu bezeichnen. In den Anwendungen kann diese weniger einfache Bezeichnung $C_{a,b}$ auch von Vorteil sein, es unterliegt aber keinem Zweifel, daß die von uns eingeführte Bezeichnung a^b im allgemeinen viel geeigneter ist. (Siehe die äußerliche Ähnlichkeit von (14), (15).)

stehen wegen (12) der Reihe nach (13), (14), (15). Umgekehrt wenn diese gelten, so folgt zunächst aus (15)

$$(ab)^c(a^b)^c(\alpha^b)^c\beta^c = a^{bc}b^c(\alpha^b)^c\beta^c \qquad (abc \neq o).$$

Wird links und rechts (13) bzw. (14) angewendet, so entsteht wieder (18). Wir haben die erste Behauptung des Satzes bewiesen.

Jetzt zeigen wir, daß für jede Halbgruppe $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ (16) gilt. Wegen (10), (12) gilt $(e, \alpha)(e, \beta) = (e, \alpha\beta)$. Hiernach ist $\bar{\Sigma}$ eine Unter-Halbgruppe von $\mathfrak{S}$ und auch (16_2) ist erfüllt. Wieder aus (10), (12) folgt $(a, \varepsilon)(e, \alpha) = (a, \alpha)$. Dies zeigt, daß die Produkte

(19) $$(a, \varepsilon)\bar{\Sigma} \qquad (a \in S)$$

ohne Wiederholung sind, ausgenommen den Fall $a = o$, und (10) lehrt, daß in diesem Fall der erste Faktor (o, ε) eben das Nullelement von $\mathfrak{S}$ ist. Hiernach bildet (19) eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{S}$. Da die Elemente (a, α) einer Klasse dadurch charakterisiert sind, daß in ihnen a konstant ist, so ist aus (10) ersichtlich, daß die Klasseneinteilung (19) kompatibel ist. Nach vorigem ist diese auch linksnormal, woraus die Existenz der Faktorhalbgruppe $\mathfrak{S}/\bar{\Sigma}$ folgt. In dieser ist nach allgemeiner Regel das Produkt der durch $(a, \varepsilon), (b, \varepsilon)$ representierten Klassen $(a, \varepsilon)\bar{\Sigma}, (b, \varepsilon)\bar{\Sigma}$ gleich der durch $(a, \varepsilon)(b, \varepsilon)$ representierten Klasse, die sich nach (10) eben zu $(ab, \varepsilon)\bar{\Sigma}$ berechnet. Das beweist (16_1). Wir haben gezeigt, daß für jede Halbgruppe $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ (16) gilt, worin auch die Behauptung enthalten ist, daß diese eine Schreiersche Erweiterung von Σ mit S ist.

Umgekehrt betrachten wir jetzt eine beliebige Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S}$ von Σ mit S. Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{S}$ isomorph einem Schreierschen Produkt $S \circ \Sigma$ ist.

Nach der Annahme dürfen wir

(20) $$S \approx \mathfrak{S}/\Sigma \qquad (a \to a'\Sigma)$$

setzen, wobei $a'(a \in S)$ ein volles Representantensystem der Klassen von $\mathfrak{S}$ nach Σ durchläuft, so daß die Produkte $a'\Sigma (a' \neq o)$ ohne Wiederholung sind. Selbstverständlich braucht der Representant a' durch a noch nicht eindeutig bestimmt zu sein, wir wählen aber die a' irgendwie (in ihren Klassen) fest, womit wir erreichen, daß

(21) $$a \to a' \qquad (a \in S)$$

eine feste eineindeutige Abbildung von S in $\mathfrak{S}$ ist. Dabei läßt sich

(22) $$e' = \varepsilon$$

setzen, woran wir uns festhalten wollen. Ferner gilt offenbar

(23) $$a = o \iff a' = 0,$$

wobei „$\iff$" für „dann und nur dann" steht und 0 das Nullelement von $\mathfrak{S}$ bezeichnet. (Nach der anfangs gemachten Einschränkung sind o und 0 gleichzeitig vorhanden.)

Die Produkte $a'\alpha(a\in S, \alpha\in\Sigma)$ sind die sämtlichen Elemente von Ξ, dabei treten die letzteren genau einmal auf mit der einzigen Ausnahme, daß die $o\alpha$ gleich 0 sind (vgl. (23)). Wir nennen $a'\alpha$ einen Augenblick die Normalform der Elemente von Ξ und wollen sehen, wie sich die Multiplikation der Elemente von Ξ in der Normalform ausdrückt. Wegen (20) gehört $a'b'$ in die Klasse $(ab)'\Sigma$, somit gilt

$$a'b' = (ab)'\varrho$$

mit einem im allgemeinen nur von a', b' abhängigen $\varrho(\in\Sigma)$, eine Ausnahme macht nur der Fall $(ab)'=0$, in dem nämlich $\varrho(\in\Sigma)$ beliebig bleibt. Folglich ist ϱ nach (21) eine Funktion von a, b, die wir mit a^b bezeichnen. Hiernach gilt

$$a'b' = (ab)'a^b \qquad (a, b\in S; a^b\in\Sigma) \tag{24}$$

wobei a^b wegen (23) im Fall $ab = o$ beliebig, sonst eindeutig bestimmt ist. Ferner beachten wir, daß nach unserer Annahme die Produkte $a'\Sigma(a\in S)$ eine kompatibile Klasseneinteilung von Ξ bilden. Deshalb fällt jedes $\alpha b'$ in $b'\Sigma$. Folglich läßt sich

$$\alpha b' = b'\sigma$$

setzen, wobei $\sigma(\in\Sigma)$ nur von α, b' d. h. wegen (21) nur von α, b abhängt. Eine Ausnahme macht nur der Fall $b'=0$ d. h. nach (23) der Fall $b=o$, in welchem nämlich σ beliebig bleibt. Wir können also

$$\alpha b' = b'\alpha^b \qquad (b\in S, \alpha\in\Sigma; \alpha^b\in\Sigma) \tag{25}$$

setzen mit einer Funktion α^b, die im Fall $b\neq o$ eindeutig bestimmt, im Fall $b=o$ beliebig ist. Als Folgerung aus (24), (25) bekommen wir

$$a'\alpha\cdot b'\beta = a'b'\alpha^b\beta = (ab)'a^b\alpha^b\beta. \tag{26}$$

Das ist die von aus gewünschte Formel für die Multiplikation in Ξ.

Nunmehr lassen wir die Elemente $a'\alpha$ von Ξ und die Paare (a, α) einander entsprechen, wobei die (o, α) wieder als gleich anzusehen sind. Dann ist das eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von Ξ und $S\circ\Sigma$. Dabei geht (26) eben in (10) über, womit wir bewiesen haben, daß jede Schreiersche Erweiterung Ξ von Σ mit S einem Schreierschen Produkt $S\circ\Sigma$ isomorph ist.

Um auch den Rest des Satzes zu Beweisen, haben wir zuerst zu untersuchen, wann eine Schreiersche Erweiterung $\Xi = S\circ\Sigma$ eine Gruppe ist. Da (e, ε) nach (10), (12) das Einselement von Ξ ist, so ist hierzu notwendig, daß insbesondere die Elemente $(e, \alpha), (a, \varepsilon)$ ein Rechtsinverses haben, d. h. daß die Gleichungen

$$(e, \alpha)(x, \xi) = (e, \varepsilon), \qquad (a, \varepsilon)(y, \eta) = (e, \varepsilon)$$

lösbar sind. Diese Gleichungen sind nach (10), (12) gleichbedeutend mit

$$(x, \alpha^x\xi) = (e, \varepsilon) \qquad (ay, a^y\eta) = (e, \varepsilon).$$

Hiernach muss $x=e$ also nach (12_3) $\alpha\xi=\varepsilon$, ferner $ay=e$ gelten. Das bedeutet, daß sowohl α in Σ als auch a in S ein Rechtsinverses haben, d. h. Σ und S Gruppen sind. Umgekehrt wenn dies der Fall ist, so läßt sich zu jedem (a, α) zuerst ein b, dann ein β so bestimmen, daß die rechte Seite von (10) in (e, ε) übergeht. Das bedeutet, daß (a, α) sein Rechtsinverses hat, also $\mathfrak{S}$ eine Gruppe ist. Wir haben bewiesen, daß $\mathfrak{S}$ dann und nur dann eine Gruppe ist, wenn S, Σ Gruppen sind.

Zum Beweis der letzten Behauptung des Satzes betrachten wir den Fall, daß S, Σ Gruppen sind, und nehmen (12_3), (13), (14) an. Wir haben zu zeigen, daß die Gleichung

$$\alpha^b=\varrho \tag{27}$$

für jedes Paar $b(\in S), \varrho(\in \Sigma)$ genau eine Lösung $\alpha(\in \Sigma)$ hat. Aus (27) folgt

$$\begin{gathered}(\alpha^b)^{b^{-1}}=\varrho^{b^{-1}},\\ b^{b^{-1}}(\alpha^b)^{b^{-1}}=b^{b^{-1}}\varrho^{b^{-1}},\end{gathered} \tag{28}$$

also nach (14), (12_3)

$$\alpha b^{b^{-1}}=b^{b^{-1}}\varrho^{b^{-1}}. \tag{29}$$

Umgekehrt folgt aus (29) die Gleichung (28) und hieraus

$$\begin{gathered}((\alpha^b)^{b^{-1}})^b=(\varrho^{b^{-1}})^b,\\ (b^{-1})^b((\alpha^b)^{b^{-1}})^b=(b^{-1})^b(\varrho^{b^{-1}})^b,\end{gathered}$$

also nach (14), (12_3)

$$\alpha^b(b^{-1})^b=\varrho(b^{-1})^b,$$

d. h. (27). Hiernach hat (27) die einzige Lösung

$$\alpha=b^{b^{-1}}\varrho^{b^{-1}}(b^{b^{-1}})^{-1}.$$

Satz 1 haben wir bewiesen.

Die Korollarien 1, 2 sind trivial. Zum Beweis vom Korollar 3 nehmen wir die Richtigkeit von (14′) an. Hieraus und aus (14) folgt, daß α^{bc}, b^c vertauschbar sind. Da jetzt (17) ein Automorphismus ist, so folgt, daß b^c im Zentrum von Σ liegt. Umgekehrt wenn dies der Fall ist, so folgt aus (14) auch das Bestehen von (14′), womit wir Korollar 3 bewiesen haben.

Wir wollen uns noch mit dem Isomorphieproblem der Schreierschen Erweiterungstheorie für Halbgruppen beschäftigen. Dieses Problem besteht darin, daß man bei gegebenen Halbgruppen S, Σ die sämtlichen isomorphen Schreierschen Erweiterungen $\mathfrak{S}$ von Σ mit S bestimmt. Selbstverständlich darf man sich dabei auf die im Satz 1 enthaltenen Schreierschen Erweiterungen $\mathfrak{S}=S\circ\Sigma$ beschränken. (Das hat den großen Vorteil, daß dann bei festen S, Σ die sämtlichen Erweiterungen $S\circ\Sigma$ aus denselben Elementen (a, α) bestehen.) Eine vollständige Lösung des Isomorphieproblems ist kaum denkbar. Das weiteste, was wir in dieser Richtung sagen können, ist im folgenden

Satz enthalten, wovon wir später unten gewisse wichtige Spezialfälle ausführlicher betrachten werden.

Satz 2. *Man nehme eine Schreiersche Erweiterung* $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ *aus Satz 1. Mit dem zugehörigen Funktionenpaar* a^b, α^b *zusammen genügt auch jedes Funktionenpaar*

$$(30) \qquad (ab)'^{-1}(Aa)^{Ab}(a'e'^{-1})^{Ab}b', \quad b'^{-1}(e'\alpha e'^{-1})^{Ab}b'$$

den Bedingungen (11)—(15) *und liefert eine zu* $\mathfrak{S}$ *isomorphe Schreiersche Erweiterung* $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$; *wobei* $a \to Aa$ *einen Automorphismus von* S *und* $a \to a'$ *eine Abbildung von* S *in* Σ *bezeichnet, wofür alle* a' *ein Inverses in* Σ *haben. Und zwar gilt*

$$(31) \qquad \mathfrak{S} \approx \mathfrak{S}_1 \quad ((a, \alpha) \to (A^{-1}a, (A^{-1}a)'^{-1}\alpha e')).$$

Insbesondere also wenn Σ *eine Gruppe ist, so darf* $a \to a'$ *jede Abbildung von* S *in* Σ *sein.*

Bemerkung. Bei einem festen Funktionenpaar a^b, α^b nennen wir die Funktionenpaare (31) *assoziiert im weiteren Sinne.* Der Satz bietet hauptsächlich für Gruppen Σ eine reiche Möglichkeit zur Auffindung von isomorphen Schreierschen Erweiterungen.

Zum Beweis nehmen wir vor allem in acht, daß das Funktionenpaar (31) offenbar den Bedingungen (11), (12) genügt.

Wir betrachten die Permutation

$$(a, \alpha) \to (Aa, a'\alpha e'^{-1})$$

der Elemente von $\mathfrak{S}$. Wird diese mit Π bezeichnet, so liefert nach bekanntem allgemeinen Prinzip (s. Rédei [5], § 2) der Übergang zur neuen Multiplikation

$$(a, \alpha) \times (b, \beta) = \Pi^{-1}(\Pi(a, \alpha) \cdot \Pi(a, \beta))$$

eine zu $\mathfrak{S}$ isomorphe Struktur $\mathfrak{S}_1$ mit dem Isomorphismus

$$\mathfrak{S} \approx \mathfrak{S}_1 \quad ((a, \alpha) \to \Pi^{-1}(a, \alpha)).$$

In unserem Fall ist Π^{-1} eben die Abbildung in (31). Ferner gilt nach (10)

$$\begin{aligned}(a, \alpha) \times (b, \beta) &= \Pi^{-1}((Aa, a'\alpha e'^{-1})(Ab, b'\beta e'^{-1})) = \\ &= \Pi^{-1}(Aa \cdot Ab, (Aa)^{Ab}(a'\alpha e'^{-1})^{Ab} b'\beta e'^{-1}) = \\ &= (ab, (ab)'^{-1}(Aa)^{Ab}(a'\alpha e'^{-1})^{Ab} b'\beta) = \\ &= (ab, (ab)'^{-1}(Aa)^{Ab}(a'e'^{-1})^{Ab} b' \cdot b'^{-1}(e'\alpha e'^{-1})^{Ab} b'\beta).\end{aligned}$$

Der Vergleich mit (30) beweist (31), ferner folgt aus Satz 1 mit Notwendigkeit, daß für (30) auch (13)—(15) gelten. Satz 2 haben wir bewiesen.

Als Anwendung von Satz 2 wollen wir uns mit dem Problem der *äquivalenten* Schreierschen Erweiterungen von Halbgruppen beschäftigen.[14]) Die

[14]) Darunter verstehen wir folgendes. Betrachten wir alle Schreiershen Erweiterungen von Σ mit S, die wir bequemlichkeitshalber wieder als Schreiersche Produkte $S \circ \Sigma$ annehmen (wie im Satz 1). Zwei solche Erweiterungen nennen wir äquivalent (oder Σ-isomorph), wenn

zu äquivalenten Erweiterungen $S\circ\Sigma$ gehörenden Funktionenpaare a^b, α^b und Faktorsysteme a^b nennen wir *assoziierte Funktionenpaare* bzw. *assoziierte Faktorsysteme*. Insbesondere nennen wir wie üblich die den faktorenfreien und endomorphismenfreien Erweiterungen äquivalenten Erweiterungen *zerfallende Erweiterungen* bzw. *zentrale Erweiterungen* und die zugehörigen Funktionenpaare und Faktorsysteme ebenfalls *zerfallende* bzw. *zentrale Funktionenpaare* und *Faktorsysteme*.

Bevor wir auf die Frage der äquivalenten Erweiterungen eingehen, bemerken wir, daß wegen Korollar 2 die Benennung „zentral" begründet ist (wenn auch wegen Korollar 3 nicht ganz zutreffend). Die Begründung der Benennung „zerfallend" liegt darin, daß die faktorenfreien Erweiterungen eben diejenigen Schreierschen Erweiterungen $\mathfrak{S} = S\circ\Sigma$ sind, in denen $\mathfrak{S}$ in der Form

$$\mathfrak{S} = S\Sigma \tag{32}$$

„zerfällt"; das bedeutet, daß die Klassen von $\mathfrak{S}$ nach Σ mit den Elementen von S representierbar sind. (Selbstverständlich ist (32) so zu verstehen, daß S und Σ nur bis auf Isomorphie bestimmt sind.) Gilt nämlich (32) und $\mathfrak{S}/\Sigma \approx S$, so läßt sich

$$\alpha b = b\alpha^b \qquad (b \in S, \alpha \in \Sigma)$$

setzen mit einer für $b \neq o$ eindeutig bestimmten Funktion α^b. Hierfür gilt dann

$$\alpha\beta b = \alpha b \beta^b = b\alpha^b\beta^b,$$

also

$$(\alpha\beta)^b = \alpha^b\beta^b \qquad (b \neq o).$$

Andererseits berechnet sich das Produkt zweier Elemente von $\mathfrak{S}$ zu

$$a\alpha\cdot b\beta = ab\cdot\alpha^b\beta.$$

Vergleicht man dies mit (10), so sieht man, daß es sich um eine faktorenfreie Schreiersche Erweiterung handelt. Umgekehrt sei $\mathfrak{S} = S\circ\Sigma$ eine faktorenfreie Schreiersche Erweiterung. Dann gilt nach (10′)

$$(a,\varepsilon)(b,\varepsilon) = (ab,\varepsilon), \quad (e,\alpha)(e,\beta) = (e,\alpha\beta), \quad (a,\alpha) = (a,\varepsilon)(e,\alpha).$$

Diese zeigen, daß die Elemente (a,ε) und (e,α) je eine Untergruppe $\bar{S}$ und $\bar{\Sigma}$ von $\mathfrak{S}$ bilden, die zu S bzw. Σ isomorph ist, ferner $\mathfrak{S} = \bar{S}\bar{\Sigma}$ gilt. Hiernach liegt der Fall (32) vor, womit wir die Benennung „zerfallend" begründet haben.

Wir beweisen nunmehr den folgenden:

S a t z 3. *Ein volles System assoziierter Funktionenpaare läßt sich in der Form*

$$(ab)'^{-1}a^b a'^b b', \quad b'^{-1}\alpha^b b' \tag{33}$$

---

sie in solcher Isomorphie stehen, daß dabei sowohl die Elemente der Kernstruktur Σ (s. Satz 1) als auch die Klassen nach Σ sich selbst entsprechen. — Alles bezieht sich auf die im § 5 zu betrachtenden Halbringerweiterungen mit der Änderung, daß dann Satz 4 für Satz 1 eintritt.

angeben, wobei a^b, α^b *ein beliebiges Funktionenpaar aus Satz 1 ist (mit den Eigenschaften* (11)—(15)*) und* $a \to a'$ *alle Abbildungen von* S *in* Σ *bezeichnet, für die jedes* a' *sein Inverses* a'^{-1} *in* Σ *hat und* $e' = \varepsilon$ *gilt. Für die zu* a^b, α^b *bzw. zu* (33) *gehörenden Schreierschen Erweiterungen* $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$ *gilt*

$$\mathfrak{S} \approx \mathfrak{S}_1 \quad (a, \alpha) \to (a, a'^{-1}\alpha)). \tag{34}$$

Korollar 1. *Insbesondere ist*

$$(ab)'^{-1}a'^b b', \quad b'^{-1}\alpha^b b' \tag{35}$$

ein volles System assoziierter zerfallender Funktionenpaare, wobei a' *und* α^b *dasselbe bedeuten wie im Satz 3 bzw. im Korollar 1. von Satz 1.*

Korollar 2. *Ähnlich ist*

$$(ab)'^{-1}a^b a' b', \quad b'^{-1}\alpha b' \tag{36}$$

ein volles System assoziierter zentraler Funktionenpaare, wobei a' *und* a^b *dasselbe bedeuten wie im Satz 3 bzw. im Korollar 2 von Satz 2. Hiernach lassen sich die zentralen Schreierschen Erweiterungen auch dadurch charakterisieren, daß die zugehörigen Endomorphismensysteme aus lauter inneren Automorphismen von* Σ *bestehen.*

Bezeichne nämlich $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ eine Schreiersche Erweiterung wie im Satz 1 und $\mathfrak{S}_1$ eine zu $\mathfrak{S}$ äquivalente Erweiterung von Σ mit S. Wir dürfen annehmen, daß $\mathfrak{S}_1$ aus denselben Elementen besteht wie $\mathfrak{S}$ und bezeichnen die Multiplikation in $\mathfrak{S}_1$ mit $\times$. Dann gibt es eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}_1$ von der Form

$$(a, \alpha) \to \Pi(a, \alpha) = (a, \varphi(a, \alpha)) \qquad (\varphi(a, \alpha) \in \Sigma,\ \varphi(e, \alpha) = \alpha). \tag{37}$$

Wegen der Isomorphie gilt

$$\Pi((a, \alpha)(b, \beta)) = \Pi(a, \alpha) \times \Pi(b, \beta). \tag{38}$$

Nach (10), (12) (angewendet auf $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$) gilt insbesondere

$$(a, \alpha)(e, \beta) = (a, \alpha\beta), \quad (a, \alpha) \times (e, \beta) = (a, \alpha\beta).$$

Folglich gilt nach (37), (38)

$$\begin{aligned}(a, \varphi(a, \alpha)) = \Pi(a, \alpha) = \Pi((a, \varepsilon)(e, \alpha)) = \Pi(a, \varepsilon) \times \\ \times \Pi(e, \alpha) = (a, \varphi(a, \varepsilon)) \times (e, \alpha) = (a, \varphi(a, \varepsilon)\alpha).\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\varphi(a, \alpha) = \varphi(a, \varepsilon)\alpha \qquad (a \neq o). \tag{39}$$

Da $\varphi(a, \alpha)$ bei festem $a (\neq o)$ nach (37) eine Permutation der Elemente von Σ ist, so folgt aus (39), daß $\varphi(a, \varepsilon)$ für $a \neq o$ ein Inverses in Σ hat und wegen (37) insbesondere $\varphi(e, \varepsilon) = \varepsilon$ ist. Folglich gilt

$$(a, \alpha) \to \Pi(a, \alpha) = (a, a'^{-1}\alpha) \qquad (a' \in \Sigma,\ e' = \varepsilon), \tag{40}$$

wobei $a \to a'$ eine Abbildung von S in Σ ist, wofür alle a' ein Inverses in Σ haben. (Insbesondere bleibt o' ganz ausser acht.) Da (40) der Spezialfall

$$A = 1, \quad e' = \varepsilon$$

der Abbildung in (31) ist, ferner (30) für diesen Fall eben in (33) übergeht, so folgt aus Satz 2, daß die zu (11) assoziierten Funktionenpaare notwendig von der Form (33) sind.

Gehen wir umgekehrt von einer Schreierschen Erweiterung $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ aus und nehmen eine Permutation (40). Wird in $\mathfrak{S}$ die durch (38) definierte Multiplikation „$\times$" eingeführt, so entsteht eine zu $\mathfrak{S}$ isomorphe Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S}_1$, und zwar ist (40) ein geeigneter Isomorphismus. Da ferner (40) eine der Permutationen (37) ist, so sind $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1$ äquivalente Erweiterungen. Das bedeutet, daß alle Funktionenpaare (33) assoziiert sind. Satz 3 haben wir bewiesen.

Die Korollarien 1, 2 von Satz 3 sind wegen Satz 3 und der Korollarien 1, 2 von Satz 1 auch richtig.

§ 5. Die Schreiersche Erweiterungstheorie für Halbringe, insbesondere Ringe.

In diesem Paragraphen bedeuten S, Σ zwei gegebene Halbringe mit Nullelement. Die Elemente werden wieder mit kleinen lateinischen bzw. griechischen Buchstaben bezeichnet, insbesondere die Nullelemente mit o bzw. 0. Wir wollen alle Schreierschen Erweiterungen von Σ mit S bestimmen. Vieles werden wir kurz faßen können wegen der Ähnlichkeit mit § 4.

Wir definieren das Schreiersche Produkt $S \circ \Sigma$ durch

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, [a, b] + \alpha + \beta), \tag{41}$$

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \{a, b\} + \alpha b + a\beta + \alpha\beta), \tag{42}$$

wobei die vier Funktionen

$$[a, b], \{a, b\}, \alpha b, a\beta (\in \Sigma) \tag{43}$$

den „Anfangsbedingungen"

$$[o, a] = [a, o] = \{a, o\} = \{o, a\} = 0a = a0 = o\alpha = \alpha o = 0 \tag{44}$$

unterworfen sind. Insbesondere können wir die zwei letzten Funktionen in (43) als „Operatorprodukte" auffaßen. In diesem Sinne ist also S gleichzeitig als Rechts- und Linksoperatorbereich von Σ, diese Operationen werden aber von den sonst üblichen stark abweichen.

Aus (41), (42), (44) folgt

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, [a, b]), \qquad (a, 0)(b, 0) = (ab, \{a, b\}),$$
$$(o, \alpha)(b, 0) = (o, \alpha b), \qquad (a, 0)(o, \beta) = (o, a\beta).$$

Hiernach und nach (41), (42) bestimmen das Schreiersche Produkt $S \circ \Sigma$ und die Funktionen (43) einander gegenseitig.

Satz 4. *Ein Schreiersches Produkt $\mathfrak{S} = S \circ \Sigma$ der Halbringe S, Σ ist dann und nur dann ein Halbring, wenn*

$$(45)\qquad a(\beta+\gamma)=a\beta+a\gamma,\qquad (\alpha+\beta)c=\alpha c+\beta c,$$
$$(46)\qquad (a+b)\gamma+[a,b]\gamma=a\gamma+b\gamma,\quad \alpha(b+c)+\alpha[b,c]=\alpha b+\alpha c,$$
$$(47)\qquad a\beta\gamma=(a\beta)\gamma,\qquad \alpha\beta c=\alpha(\beta c),$$
$$(48)\qquad ab\gamma+\{a,b\}\gamma=a(b\gamma),\qquad \alpha bc+\alpha\{b,c\}=(\alpha b)c,$$
$$(49)\qquad (a\beta)c=a(\beta c),$$
$$(50)\qquad (\alpha b)\gamma=\alpha(b\gamma),$$
$$(51)\qquad \{ab,c\}+\{a,b\}c=\{a,bc\}+a\{b,c\},$$
$$(52)\qquad [a,b]=[b,a],$$
$$(53)\qquad [a,b]+[a+b,c]=[a,b+c]+[b,c],$$
$$(54)\qquad [a,b]c+\{a+b,c\}=[ac,bc]+\{a,c\}+\{b,c\},$$
$$a[b,c]+\{a,b+c\}=[ab,ac]+\{a,b\}+\{a,c\}$$

gelten. Diese Halbringe sind (bis auf Isomorphie) die sämtlichen Schreierschen Erweiterungen von Σ *mit* S, *und zwar bilden dann die Elemente* (o,α) *ein Ideal* $\bar{\Sigma}$ *von* $\mathfrak{S}$, *wofür*

$$(55)\qquad \mathfrak{S}/\bar{\Sigma}\approx S\quad ((a,0)+\bar{\Sigma}\to a),\qquad \bar{\Sigma}\approx\Sigma\quad ((o,\alpha)\to\alpha)$$

gilt. Die Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S}=S\circ\Sigma$ *ist dann und nur dann ein Ring, wenn auch* S,Σ *Ringe sind.*

B e m e r k u n g e n. Die den Bedingungen (43)—(54) genügenden Funktionen $[a,b]$, $\{a,b\}$, αb, $a\beta$ nennen wir den zur Schreierschen Erweiterung $\mathfrak{S}$ gehörenden *Funktionenvierer*, selbst $[a,b]$, $\{a,b\}$ das (zu $\mathfrak{S}$ gehörende) additive- bzw. multiplikative *Faktorensystem*, ferner αb, $a\beta$ das rechtsseitige- bzw. linksseitige *Endomorphismensystem.*

K o r o l l a r. *Gilt insbesondere*

$$[a,b]=0,\quad \{a,b\}=0,$$

so vereinfacht sich (45)—(54) *zu*

$$(56)\qquad a(\beta+\gamma)=a\beta+a\gamma,\qquad (\alpha+\beta)c=\alpha c+\beta c,$$
$$(57)\qquad (a+b)\gamma=a\gamma+b\gamma,\qquad \alpha(b+c)=\alpha b+\alpha c,$$
$$(58)\qquad a\beta\gamma=(a\beta)\gamma,\qquad \alpha\beta c=\alpha(\beta c),$$
$$(59)\qquad (a\beta)c=a(\beta c),$$
$$(60)\qquad (\alpha b)\gamma=\alpha(b\gamma).$$

In diesem Fall nenne man die Schreiersche Erweiterung *faktorenfrei*[15]).

Zum Beweis betrachten wir ein Schreiersches Produkt $\mathfrak{S}=S\circ\Sigma$. Damit dies ein Halbring ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Addition (41) assoziativ, kommutativ und regulär, die Multiplikation (42) assoziativ ist, ferner für beide Verknüpfungen die links- und rechtseitige Distributivität

[15]) Obiges Korollar ist das Analogon zum Korollar 1 von Satz 1. Analoga zu den Korollarien 2, 3 von Satz 1 lassen sich offenbar nicht aufstellen.

gilt. Die ersten zwei Bedingungen drücken sich durch (53), (52) aus, die dritte ist offenbar von selbst erfüllt, da die Addition in S und Σ regulär sind Die Bedingung der linksseitigen Distributivität lautet nach (41), (42)

$$(a,\alpha)(b+c,[b,c]+\beta+\gamma)=(ab,\{a,b\}+\alpha b+a\beta+\alpha\beta)+$$
$$+(ac,\{a,c\}+\alpha c+a\gamma+\alpha\gamma)$$

d. h. wieder nach (41), (42)

$$\text{(61)}\quad \begin{aligned}&\{a,b+c\}+\alpha(b+c)+a([b,c]+\beta+\gamma)+\alpha[b,c]=\\&=[ab,ac]+\{a,b\}+\{a,c\}+\alpha b+\alpha c+a\beta+a\gamma).\end{aligned}$$

Ähnlich lautet die Bedingung der rechtsseitigen Distributivität

$$(a+b,[a,b]+\alpha+\beta)(c,\gamma)=$$
$$=(ac,\{a,c\}+\alpha c+a\gamma+\alpha\gamma)+(bc,\{b,c\}+\beta c+b\gamma+\beta\gamma)$$

d. h.

$$\text{(62)}\quad \begin{aligned}&\{a+b,c\}+(a+b)\gamma+([a,b]+\alpha+\beta)c+[a,b]\gamma=\\&=[ac,bc]+\{a,c\}+\{b,c\}+a\gamma+b\gamma+\alpha c+\beta c.\end{aligned}$$

Die Assoziativitätsbedingung der Multiplikation lautet nach (42)

$$(ab,\{a,b\}+\alpha b+a\beta+\alpha\beta)(c,\gamma)=(a,\alpha)(bc,\{b,c\}+\beta c+b\gamma+\beta\gamma)$$

d. h. wieder nach (42)

$$\text{(63)}\quad \begin{aligned}&\{ab,c\}+ab\gamma+(\{a,b\}+\alpha b+a\beta+\alpha\beta)c+\{a,b\}\gamma+(\alpha b)\gamma+(a\beta)\gamma=\\&=\{a,bc\}+a(\{b,c\}+\beta c+b\gamma+\beta\gamma)+\alpha bc+\alpha\{b,c\}+\alpha(\beta c)+\alpha(b\gamma).\end{aligned}$$

Somit genügt es zu zeigen, daß (unter Berüchsichtigung der Anfangsbedingungen (44)!) die Bedingungen (61)—(63) mit den Bedingungen (45)—(51) (54) äquivalent sind.

Setzt man in (61), (62) $b=c=o$ bzw. $a=b=o$ ein, so entsteht (wegen (44)) eben (45). Wegen dieses lassen sich dann (61), (62) so schreiben:

$$\{a,b+c\}+\alpha(b+c)+a[b,c]+\alpha[b,c]=[ab,ac]+\{a,b\}+\{a,c\}+\alpha b+\alpha c,$$
$$\{a+b,c\}+(a+b)\gamma+[a,b]c+[a,b]\gamma=[ac,bc]+\{a,c\}+\{b,c\}+a\gamma+b\gamma.$$

Wird hier $a=o$ bzw. $c=o$ eingesetzt, so gewinnen wir (wegen (44)) eben (46). Wegen dieses und der Regularität der Addition gehen die letzten zwei Gleichungen in (54) über. Wir haben bekommen, daß (60), (61) mit (45), (46), (54) äquivalent sind.

Es genügt also zu zeigen, daß unter Berücksichtigung von (44), (45) die Bedingung (63) mit den Bedingungen (47)—(51) äquivalent ist. Wird in (63) $\alpha=\beta=\gamma=0$ eingesetzt, so entsteht (wegen (44)) eben (51). Wird ferner (45) in (63) berücksichtigt und dann (51) subtrahiert, so entsteht

$$\text{(64)}\quad \begin{aligned}&ab\gamma+(\alpha b)c+(a\beta)c+\alpha\beta c+\{a,b\}\gamma+(\alpha b)\gamma+(a\beta)\gamma=\\&=a(\beta\gamma)+a(b\gamma)+a\beta\gamma+\alpha bc+\alpha\{b,c\}+\alpha(\beta c)+\alpha(b\gamma).\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, daß (unter Berücksichtigung von (44)) die Bedingung (64) den Bedingungen (47)—(50) äquivalent ist. Wird in (64) $c=o, \alpha=\beta=0$ bzw. $a=o, \beta=\gamma=0$ eingesetzt, so entsteht (wegen (44)) eben (48). Werden diese Gleichungen (48) aus (64) subtrahiert, so entsteht

$$(65)\qquad (a\beta)c+\alpha\beta c+(\alpha b)\gamma+(a\beta)\gamma=a(\beta c)+a\beta\gamma+\alpha(\beta c)+\alpha(b\gamma).$$

Wir bemerken, daß beide Seiten je ein Glied enthalten, das von a, c frei ist, bzw. von diesen Buchstaben nur a, bzw. nur c bzw. beide enthält. Wenn wir also erstens $a=c=o$, zweitens $a=o$ drittens $c=o$ einsetzen, so entstehen (wegen (44) und der Regularität der Addition) der Reihe nach (50), (47_1), (47_2), (49). Da umgekehrt aus diesen vier Gleichungen (65) folgt, so haben wir bewiesen, daß $\mathfrak{S}=S\circ\Sigma$ dann und nur dann ein Halbring ist, wenn (45)—(54) stattfinden.

Wir zeigen jetzt, daß für jeden Halbring $\mathfrak{S}=S\circ\Sigma$ (55) gilt. Wegen (41), (42), (44) gilt

$$(o,\alpha)+(o,\beta)=(o,\alpha+\beta),\qquad (o,\alpha)(o,\beta)=(o,\alpha\beta).$$

Hiernach ist $\bar{\Sigma}$ ein Unter-Halbring von $\mathfrak{S}$ und auch (55_2) ist erfüllt. Ähnlich folgt $(a,0)+(o,\alpha)=(a,\alpha)$. Dies zeigt, daß die

$$(a,0)+\bar{\Sigma}\qquad (a\in S)$$

eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{S}$ bilden. Diese ist wegen (41), (42) offenbar auch kompatibel, ferner sieht man auch die Richtigkeit von (55_1). Somit haben wir gezeigt, daß für jeden Halbring $\mathfrak{S}=S\circ\Sigma$ (55) gilt, worin auch die Behauptung enthalten ist, daß dieser eine Schreiersche Erweiterung von Σ mit S ist.

Umgekehrt betrachten wir jetzt eine beliebige Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S}$ von Σ mit S. Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{S}$ isomorph einem Schreierschen Produkt $S\circ\Sigma$ ist.

Nach der Annahme darf

$$(66)\qquad S\approx\mathfrak{S}/\Sigma\qquad (a\to a'+\Sigma)$$

gesetzt werden, wobei $a'(a\in S)$ ein volles Representantensystem der Klassen von $\mathfrak{S}$ nach Σ durchlauft. Wir denken die a' irgendwie festgewählt, und dann ist

$$(67)\qquad a\to a'\qquad (a\in S)$$

eine feste eineindeutige Abbildung von S in $\mathfrak{S}$. Dabei läßt sich

$$o'=0$$

annehmen.

Die Summen $a'+\alpha(a\in S, \alpha\in\Sigma)$ sind die sämtlichen verschiedenen Elemente von $\mathfrak{S}$. Wir wollen zusehen, wie die Addition und Multiplikation der Elemente von $\mathfrak{S}$ in dieser „Normalform" sich ausdrücken. Wegen (66) gelten offenbar

$$a'+b'=(a+b)'+\varrho,\qquad a'b'=(ab)'+\sigma$$

mit irgendwelchen, nur von a', b' abhängigen Elementen $\varrho, \sigma(\in\Sigma)$. Wegen (67) läßt sich also

$$(68)\qquad a'+b'=(a+b)'+[a,b],\quad a'b'=(ab)'+\{a,b\}\quad (a,b\in S;\ [a,b],\{a,b\}\in\Sigma)$$

setzen, wobei $[a, b]$, $\{a, b\}$ Funktionen von a, b sind. Wegen (68) gilt

$$(69) \qquad (a'+\alpha)+(b'+\beta)=(a+b)'+[a, b]+\alpha+\beta,$$

$$(70) \qquad (a'+\alpha)(b'+\beta)=(ab)'+\{a, b\}+\alpha b'+a'\beta+\alpha\beta.$$

Da die Produkte $\alpha b'$, $a'\beta$ nur von α, b bzw. a, β abhängen, so darf wegen (67)

$$(71) \qquad \alpha b'=\alpha b, \quad a'\beta=a\beta \qquad (a, b \in S;\ \alpha, \beta \in \Sigma)$$

gesetzt werden, wobei αb und $a\beta$ Operatorprodukte (d. h. Funktionen von α, b bzw. a, β) sind. Wird (71) in (70) eingesetzt, so sieht man hieraus und aus (69) nach Vergleich mit (41), (42), daß $\mathfrak{S}$ einem Schreierschen Produkt $S \circ \Sigma$ isomorph ist.

Endlich liest man von (41) ab, daß die Schreiersche Erweiterung (die nach obigem gewiß ein Halbring ist) dann und nur dann ein Ring ist, wenn in S und Σ die Addition invertierbar ist, d. h. S und Σ Ringe sind: Satz 4 haben wir bewiesen, das Korollar ist trivial.

Das Analogon von Satz 2 lautet so:

Satz 5. *Man nehme eine Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S}=S\circ\Sigma$ aus Satz 4. Mit dem zugehörigen Funktionenvierer* (43) *zusammen genügt auch jeder Funktionenvierer*

$$(72) \qquad \begin{gathered}[Aa, Ab]+a'+b'-(a+b)', \{Aa, Ab\}+a'(Ab)+(Aa)b'+a'b'-(ab)', \\ \alpha(Ab)+\alpha b', (Aa)\beta+a'\beta\end{gathered}$$

den Bedingungen (43)—(54) *und liefert eine zu $\mathfrak{S}$ isomorphe Schreiersche Erweiterung $\mathfrak{S}_1=S\circ\Sigma$, wobei $a \to Aa$ einen Automorphismus von S und $a \to a'$ eine Abbildung von S in Σ bezeichnet, wofür alle a' ein Inverses in Σ^+ haben. Und zwar gilt*

$$(73) \qquad \mathfrak{S} \approx \mathfrak{S}_1 \qquad ((a, \alpha) \to (A^{-1}a, -(A^{-1})'+\alpha)).$$

Insbesondere also wenn Σ ein Ring ist, so darf $a \to a'$ jede Abbildung von S in Σ sein.

Bemerkung. Bei einem festen Funktionenvierer (43) nennen wir die Funktionenvierer (72) *assoziiert im weiteren Sinne.*

Zum Beweis nehmen wir vor allem in acht, daß der Funktionenvierer (72) offenbar den Bedingungen (43), (44) genügt.

Wir betrachten die Permutation

$$(a, \alpha) \to (Aa, a'+\alpha)$$

der Elemente von $\mathfrak{S}$. Wird diese mit Π bezeichnet, so liefert der Übergang zu den neuen Verknupfungen

$$(a, \alpha) \dotplus (b, \beta) = \Pi^{-1}(\Pi(a, \alpha)+\Pi(b, \beta)),$$
$$(a, \alpha) \odot (b, \beta) = \Pi^{-1}(\Pi(a, \alpha)\cdot \Pi(b, \beta))$$

eine zu $\mathfrak{S}$ isomorphe Struktur $\mathfrak{S}_1$ mit dem Isomorphismus

$$\mathfrak{S} \approx \mathfrak{S}_1 \qquad ((a, \alpha) \to \Pi^{-1}(a, \alpha)).$$

Dies fällt eben mit (73) zusammen. Ferner berechnen sich die rechten Seiten der vorigen Gleichungen bzw. zu

$$\Pi^{-1}((Aa, a'+\alpha)+(Ab, b'+\beta)) = \Pi^{-1}(Aa+Ab, [Aa, Ab]+a'+b'+\alpha+\beta) =$$
$$= (a+b, -(a+b)'+[Aa, Ab]+a'+b'+\alpha+\beta),$$
$$\Pi^{-1}((Aa, a'+\alpha)(Ab, b'+\beta)) =$$
$$= \Pi^{-1}(Aa\cdot Ab, \{Aa, Ab\}+a'(Ab)+\alpha(Ab)+(Aa)b'+(Aa)\beta+$$
$$+a'b'+\alpha b'+a'\beta+\alpha\beta) =$$
$$= (ab, -(ab)'+\{Aa, Ab\}+a'(Ab)+(Aa)b'+a'b'+\alpha(Ab)+$$
$$+\alpha b'+(Aa)\beta+a'\beta+\alpha\beta).$$

Der Vergleich mit (41), (42) beweist (72), ferner folgt aus Satz 4 mit Notwendigkeit, daß auch (45)—(54) gelten. Satz 5 haben wir bewiesen.

Endlich wollen wir noch die Frage der äquivalenten Schreierschen Erweiterungen von Halbringen betrachten.[14]) Die zu äquivalenten Schreierschen Erweiterungen $S\circ\Sigma$ gehörenden Funktionenvierer (43) nennen wir wieder *assoziiert*. Entsprechend sind die assoziierten Faktorensysteme zu verstehen. Insbesondere nenne man die den faktorenfreien Erweiterungen äquivalenten Erweiterungen und die zugehörenden Funktionenvierer *zerfallende Erweiterungen* bzw. *zerfallende Funktionenvierer.*[16])

Wie Satz 3 aus Satz 2 durch Spezialisierung entstanden ist, in voller Analogie gewinnen wir aus Satz 5 den folgenden Satz 6, genauer brauchen wir das nicht auszuführen.

Satz 6. *Ein vollständiges System assoziierter Funktionenvierer läßt sich in der Form*

(74) $\quad [a, b]+a'+b'-(ab)', \{a, b\}+a'b+ab'+a'b'-(ab)', \alpha b+\alpha b', a\beta+a'\beta$

angeben, wobei $[a, b], \{a, b\}, \alpha b, a\beta$ *ein Funktionenvierer* (43) *aus Satz 4 ist (nämlich mit den Eingenschaften* (44)—(54)) *und* $a \to a'$ *alle Abbildungen von* S *in* Σ *bezeichnet, für die jedes* a' *sein Inverse* $s-a'$ *in* Σ^+ *hat und* $o'=0$ *gilt. Für die zu* (43) *bzw.* (74) *gehörenden Schreierschen Erweiterungen* $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1$ *gilt*

$$\mathfrak{S} \approx \mathfrak{S}_1 \qquad ((a, \alpha) \to (a, -a'+\alpha)).$$

Korollar. *Insbesondere ist*

$$a'+b'-(a+b)', a'b+ab'+a'b'-(ab)', \quad \alpha b+\alpha b', \quad a\beta+a'\beta$$

ein volles System assoziierter zerfallender Funktionenvierer, wobei a' *und* $\alpha b, a\beta$ *dasselbe bedeuten wie im Satz 6 bzw. im Korollar von Satz 4.*

---

[16]) Natürlich lassen sich die zerfallenden Halbringerweiterungen ähnlich charakterisieren, wie das für Halbgruppenerweiterungen (im § 4) geschehen ist mit dem Unterschied, daß dann $\mathfrak{S} = S + \Sigma$ statt (32) zu nehmen ist.

Literaturverzeichnis.

[1] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique*, première partie, Livre II: *Algèbre*, Chap. I (Paris, 1942), S. 1—165.

[2] C. I. EVERETT, An extension theory for rings, *American Journal of Math.*, **64** (1942), S. 363—370.

[3; 4] H. HASSE, Die Multiplikationsgruppe der abelschen Körper mit fester Galoisgruppe, *Abhandlungen d. Mat. Sem. Univ. Hamburg*, **16** (1949), S. 29—40; Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **187** (1949), S. 14—43.

[5] L. RÉDEI, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), S. 201—227.

[6; 7] O. SCHREIER, Über die Erweiterung von Gruppen. I, *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, **34** (1926), S. 165—180; II, *Abhandlungen d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg*, **4** (1926), S. 321—346.

[8] O. STEINFELD, Über die Nullteilerfreiheit von Ringen, *Publicationes Math. Debrecen*, **2** (1952), S. 281—285.

[9] J. SZENDREI, On Schreier extension of rings without zero-divisors, *Publicationes Math. Debrecen*, **2** (1952), S. 276—280.

[10] H. S. VANDIVER, On some simple types of semi-rings, *American Math. Monthly*, **46** (1939), S. 22—26.

[11] H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig und Berlin, 1937).

(Eingegangen am 14. November 1952.)

Bibliographie.

Frédéric Riesz et Béla Sz.-Nagy, Leçons d'Analyse Fonctionnelle, VIII + 448 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1952.

Every analyst will wish to peruse this new book of Professors Riesz and Sz.-Nagy, and he will do so with delight both in what the authors have to teach him and in the simple, lucid ways which they have discovered for making their subject appear in the most brilliant light. This, indeed, is what both writers have led the mathematical public to expect on the basis of their published work, and they are far from having disappointed their readers here. The book represents the contents of lecture-courses offered by the respective authors to their university students over the years. Accordingly it is designed neither to survey in their totality the many important mathematical contributions of the authors nor to treat in the fullest generality the topics they have chosen to discuss. A glance at the extensive bibliography and a rapid examination of the references to it in the text are enough to show not only that Professors Riesz and Sz.-Nagy are very well aware of the current developments in linear functional analysis, including those outside their own circle of ideas, but that they take considerable care to make the reader equally so. Thus it is possible to experience an unalloyed pleasure in savoring the rather strong personal flavor the authors have imparted to their book in the matter of mathematical style. The ambitious student will not be the only reader who will profit by attending closely to the essential elements of this style — the artful implementation of basically simple approaches by ingenious turns of argument, calculated to resolve the chief difficulties with every appearance of ease; a sure mastery of the rewarding passage from the concrete and particular to the abstract and general; and the undeviating concern with those immanent patterns which, once disclosed, give unity and meaning to mathematics. In an age when mathematics is growing almost too rapidly in extent and in complexity, we owe a great debt indeed to those, like Professors Riesz and Sz.-Nagy, who put to the best use exceptional talents for rendering accessible and perspicuous the pioneering discoveries of the day, whether their own or those of others.

The first part of the book, written by Professor Riesz, consists of three chapters devoted to the modern theories of differentiation and integration. In Chapter I will be found the beautiful proof, due to Riesz himself, of the classical theorem of Lebesgue on the differentiability of monotone functions and functions of bounded variation. Among the interesting results which are here associated with this theorem we may mention Fubini's theorem on the differentiability of series, Lebesgue's density theorem, the theorem of Denjoy—Young—Saks, the classical criterion for Riemann integrability, fundamental properties of interval-functions and their integrals, and the differential properties of rectifiable curves. The two further chapters contain the development of the Lebesgue integral in one-dimensional space, its extension to n-dimensional euclidean space, and its generalization (following a discussion of the Stieltjes integral) to abstract spaces by Daniell's method. In addition to an original treatment of the standard topics, including the L_p-spaces, there is a comparative analysis of various definitions of the Lebesgue integral and its connections with both the Stieltjes and the Denjoy—Perron—Khintchine integrals. There are also sections devoted to differentiation on nets, the moment problem, and other pertinent topics. The reviewer notes with particular satisfaction and sympathy that the authors declare themselves in favor of giving the integral the place of honor and defining measure in terms of it, thus reversing the procedures of Lebesgue and Carathéodory. Since the integral, rather than the related measure, is of primary concern to the analyst, it is not surprising that other writers [1]) have recently adopted the same point of view. L. SCHWARTZ's theory of distributions confirms the wisdom of this course, so far as analysis is concerned. The reviewer believes that similar confirmation will be found in geometry [2]). Even the theory of probability, which is invariably cited by the proponents of measure-theory in justification of their preference, can undoubtedly be recast in terms of expected values — that is, of abstract integrals — if an axiomatic parallel to KOLMOGOROFF's formulation in terms of probabilities — that is, of abstract measures — is desired. From a technical point of view there are certainly many advantages in treating the integral first. This appears plainly in the present book, and also in other current develcpments which the authors have not taken explicitly into account because their manuscript was already completed in 1948. In addition to the references made above, we may mention the papers of COTLAR and RICABARRA and of KAWADA [3]), who were independently stimulated by the reviewer's notes to transfer CARATHÉODORY's measure-theoretic techniques to integration theory.

The second part of the book, written by Professor SZ.-NAGY, deals with integral equations and linear transformations in Hilbert and Banach spaces. The treatment of integral equations, found in Chapter IV, serves as an introduction to operator theory. It is based on the methods of GOURSAT, FREDHOLM and F. RIESZ, and leads to a brief discussion of the integral equations of potential theory. The elements of Banach and Hilbert space theory are given in Chapter V. Results of PALEY and WIENER on biorthogonal sets and RIESZ's theory of completely continuous operators provide interesting special topics. The following chapter analyzes completely continuous symmetric operators in Hilbert space and the extremal properties of their characteristic values and vectors. Applications to integral operators, the problems of the vibrating cord, and the theory of almost periodic functions are indicated. Chapter VII is concerned with bounded symmetric, unitary and bounded normal operators and their spectral analysis. The spectral theorem for bounded symmetric operators is proved in two familiar ways due respectively to RIESZ and SZ.-NAGY. The general form of unitary operators in L_2 is determined following BOCHNER, and is applied to the Watson and Fourier transformations. Non-bounded operators constitute the subject-matter of Chapter VIII, where the graphical method of VON NEUMANN is made the basis for a general discussion. The spectral theory for self-adjoint operators is proved both by the method of RIESZ and LORCH and by VON NEUMANN's Cayley transform method, which serves also to characterize all symmetric extensions of a symmetric operator. The procedures of FRIEDRICHS and M. KREIN for determining self-adjoint extensions of a semi-bounded symmetric operator are also discussed here. Chapter IX treats the operational calculus, commuting families of self-adjoint operators, and the perturbation theory; Chapter X touches on the elements of the theory of groups and that of semi-groups, with applications to the mean ergodic theorems; and finally Chapter XI examines our rather limited information about the spectral analysis and operational calculus of general operators, the concluding sections being devoted to VON NEUMANN's recent theory of spectral sets. From this summary, it will be seen that the more sophisticated aspects of the modern theory of Hilbert space are not

[1]) N. BOURBAKI, *Intégration* (Éléments de Mathématique XIII, Paris, 1952); M. H. STONE, *Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A.*, 34 (1948), pp. 336—342, 447—455, 483—490, and 35 (1949), pp. 50—58.

[2]) See H. WHITNEY, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1950, I, pp. 245—256.

[3]) MISCHA COTLAR and RODOLFO RICABARRA, *Las Ciencias*, Año XV, pp. 249—252; *Memorias de la Real Academia de Ciencias de Madrid, Serie de Ciencias Exactas*, 4 (1950), No. 2; Y. KAWADA, *Scientific Papers of the College of General Education*, Tokyo, 1 (1951), pp. 15—18.

taken up. The bibliography contains a list of references to papers where the theories of operator rings, factors, and group-representations are investigated, but the curious reader will need to supplement this list in a rather substantial way if he wishes to obtain an adequate knowledge of all modern trends. The relevant mathematical contributions have come chiefly from France, the U. S. A., and the U. S. S. R., though other countries too have played a rôle in these developments. Among the authors who would need to be consulted beyond the limits of the bibliography in the present book we may mention: BARGMANN, BEURLING, DIXMIER, GELFAND, GODEMENT, KAPLANSKY, MACKEY, MAUTNER, MURRAY, VON NEUMANN, NEUMARK, SEGAL, and STONE.

M. H. Stone (Chicago).

Н. Г. Чеботарев, Собрание сочинений, два тому, стр. 340 + 416, Москва—Ленинград, Издательство Академии Наук СССР, 1949.

[**N. G. Tschebotareff, Gesammelte Werke,** zwei Bände, 340 + 416 Seiten, Moskau—Leningrad, Akademischer Verlag, 1949.]

N. G. TSCHEBOTAREFF (1894—1947) war einer der bedeutendsten Algebraiker des ersten Drittels des zwanzigsten Jahrhundertes. Seine über die Dichtigkeit der Primideale in algebraischen Zahlkörpern endlichen Grades und über das Klein—Hilbertsche Resolventenproblem geschriebenen Werke gehören zu den wichtigsten algebraischen Arbeiten der letzteren Jahrzehnte. Als Anerkennung seiner hervorragenden wissenschaftlichen Arbeiten bekam er den Stalin-Preis ersten Grades.

Die „Werke" enthalten alle seine im Druck erschienenen 62 Artikeln (die ursprünglich fremdsprachigen sind in die russische Sprache übersetzt worden). Die Arbeiten sind möglichst nach ihrem Themenkreis (algebraische Zahlentheorie, Theorie der Polynome, Geometrie, u. s. w.) angeordnet, obwohl die Vielseitigkeit der Arbeiten von TSCHEBOTAREFF die Durchführung dieser Anordnung schwer machte.

Am Anfang des Buches steht eine Photographie von TSCHEBOTAREFF. Das Vorwort hat B. N. DELONE geschrieben, der der verantwortliche Redaktor des Werkes ist. Am Ende beider Bände befindet sich je ein Namenregister der in den Arbeiten zitierten Mathematiker.

O. Steinfeld.

Kurze Mathematiker-Biographien. J. O. Fleckstein: Johann und Jacob Bernoulli. — L. Kollros: Evariste Galois. — Oystein Ore: Niels Henrik Abel. — René Taton: Gaspard Monge. — Jean Itard: Pierre Fermat. — L. v. Dávid: Die beiden Bolyai. Beihefte Nr. 6—11 zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik", Basel, Verlag Birkhäuser, 1949—1951.

Jede Kurzbiographie enthält je ein Porträt, ein Facsimile, die wichtigsten Daten, die Charakterisierung der Persönlichkeit, die Würdigung des Werkes an Beispielen, mehrere Illustrationen, und hat den Umfang von 24 Seiten. Die Hefte über die Brüder BERNOULLI und über die beiden BOLYAI sind deutsch, die übrigen französisch geschrieben.

JACOB BERNOULLI (1654—1705) und sein Bruder JOHANN (1667—1748) waren die ersten Mathematiker der berühmten Mathematiker-Dynastie BERNOULLI und haben in der Begründung der Infinitesimalrechnung einen unvergänglichen Ruhm sich und ihrer Heimat, der Schweiz verschaffen.

In der Geschichte der Wissenschaften ist das Leben von E. GALOIS (1811—1832) ganz außergewöhnlich. In der modernen Mathematik hat kein so junger Mathematiker in so kurzer Zeit so viel bedeutendes geleistet. Die Kurzbiographie über GALLOIS gibt nicht nur eine gute Übersicht der wesentlichen Ergebnisse von GALOIS, sondern auch eine Übersicht der Entwicklung der gruppentheoretischen Vorstellungen von GALOIS in verschiedenen Gebieten der Mathematik: in der Algebra, in der Geometrie und in der Funktionentheorie.

Die Kurzbiographie von NIELS HENRIK ABEL (1802—1829) gibt eine gelungene Übersicht vom Leben und von den großen Resultaten des früh gestorbenen berühmten norvegischen Mathematikers. Unseres Wissens war ABEL einer der wenigen Mathematiker, dem seine dankbare Heimat ein Denkmal gestellt hat. Leider enthält die Kurzbiographie kein Bildnis davon.

Die Kurzbiographie von FERMAT (1601—1665) berichtet über die bedeutendsten Leistungen von FERMAT in der Zahlentheorie, in der Methode der Ausrechnung von Maxima und Minima und in anderen mathematischen Gebieten.

Die Kurzbiographie von G. MONGE (1746—1818) berichtet über die mathematische Tätigkeit von MONGE in der darstellenden Geometrie, in der Differentialgeometrie, in den partiellen Differentialgleichungen und in der Begründung der École Polytechnique und der ersten mathematischen Zeitschrift: Journal de l'École Polytechnique.

Die Kurzbiographie von den beiden BOLYAI, vom Vater WOLFGANG (1775—1856) und vom Sohn JOHANN (1802—1860), dem Begründer der nichteuklidischen Geometrie, enthält ein Porträt nur vom Vater, weil kein Porträt von JOHANN bekannt ist. Das Heft enthält ein Facsimile des berühmten Briefes von JOHANN (3. Nov. 1823) an seinen Vater, in dem er betreffs seiner geometrischen Untersuchungen die Worte schreibt: „ich habe aus Nichts eine neue, andere Welt geschaffen". Der Wert der Ergebnisse von JOHANN BOLYAI wurde von GAUSS öffentlich niemals anerkannt. Dies wurde für das Leben von JOHANN tragisch. Hingegen wurde der andere Begründer der nichteuklidischen Geometrie, LOBATSCHEFSKIJ auf den Antrag von GAUSS zum Mitglied der Göttinger Gelehrten Gesellschaft gewählt. Das diesbezügliche Diplom hat GAUSS mit einem eigenhändigen Begrüßschreiben zugesandt. Auch dann hat GAUSS BOLYAI nicht erwähnt, sodaß LOBATSCHEFSKIJ von BOLYAI niemals gehört hat. Die Ursache dieses mindestens unobjektiven Verfahrens von GAUSS gegen den Sohn seines Jugendfreundes WOLFGANG BOLYAI bleibt uns auch heute, 150 Jahre nach JOHANN BOLYAI's Geburt unbegreiflich.

Gyula Sz.-Nagy.

Gustave Verriest, Introduction à la géométrie non euclidienne par la méthode élémentaire, VII + 193 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1951.

Das vorliegende Buch führt den Leser auf dem Wege einer streng axiomatischen Darstellung in die hyperbolische Elementargeometrie ein, beschränkt sich aber auf die Behandlung planimetrischer Sätze. Zugrunde gelegt wird das Axiomensystem von D. HILBERT; das Parallelenaxiom wird aber durch das folgende Axiom ersetzt: In der Ebene, die eine Gerade a und einen nicht auf ihr liegenden Punkt P enthält, gehen durch P mindestens zwei Geraden, die a nicht schneiden. Außerdem werden das Archimedische Axiom und das Vollständigkeitsaxiom durch das Dedekindsche Stetigkeitsaxiom ersetzt. Das letzte Kapitel bringt die Elemente der sphärischen, bzw. der elliptischen Geometrie, ohne einen axiomatischen Aufbau geben zu wollen.

Das ganze Werk besteht aus elf Kapiteln. In den ersten sieben Kapiteln, die mehr als die Hälfte des Buches ausmachen, handelt es sich um solche Sätze, die von dem Parallelenaxiom unabhängig sind, die also einen gemeinsamen Teil der euklidischen und hyperbolischen Geometrie bilden.

Aus dem eigentlichen Stoffe der hyperbolischen Geometrie wird verhältnismäßig wenig bearbeitet. Im achten Kapitel handelt es sich besonders eingehend um den Dreiecksinhalt, im neunten wird die Theorie der hyperbolischen Parallelen und der Überparallelen (solcher Geraden der Ebene, die sich weder schneiden noch parallel sind) dargestellt. Hier wird unter anderem der Satz bewiesen (nach dem Vorgange von D. HILBERT), laut welchem zwei Überparallelen ein gemeinsames Lot besitzen. Der Beweis für die Existenz der Verbindungsgeraden zweier unendlich fernen Punkte wird unter Berufung auf seine Weithäufigkeit beiseite gelassen. Dieser Satz wird aber gar nicht benützt. Dieses Kapitel schließt sich mit der Besprechung des Klein—Poincaréschen Modells der hyperbolischen Ebene. Das zehnte Kapitel befaßt sich mit den asymptotischen Dreiecken, mit den Grenzkreisen und Überkreisen. Die Existenz eines dreifach asymptotischen Dreiecks wird nicht bewiesen (wieder unter Berufung auf die Länge des Beweises), aber auch nicht verwendet.

Zum Schluß gibt das elfte Kapitel einen Einblick in die sphärische, bzw. elliptische Elementargeometrie. Neben der absoluten Polarität des elliptischen Raumes werden auch die Cliffordschen Parallelen besprochen. Das Kleinsche Modell der elliptischen Raumgeometrie wird gestreift.

Die Darstellung ist ausführlich und klar, das Buch sehr gut übersichtlich. Die Bearbeitung noch weiterer Gebiete mit Heranziehung der Raumgeometrie hätte gewiß bei den meisten Lesern Beifall gefunden. Der Beweis des Satzes, laut welchem auf der Grenzkugel die euklidische ebene Geometrie gilt, wäre von höchstem Interesse gewesen, da dieser Satz zur Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie den bequemsten Weg eröffnet.

Es ist zu bedauern, daß der Verfasser den Namen von Johann Bolyai in Verbindung mit der hyperbolischen Geometrie gar nicht erwähnt und ausschließlich von der Lobatschefskyschen Geometrie spricht.

Paul Szász.

Heinz Rutishauser—Ambros Speiser—Eduard Stiefel, Programmgesteuerte digitale Rechengeräte (elektronische Rechenmaschinen) (Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik an der Technischen Hochschule Zürich, Nr. 2), 102 Seiten, Basel, Verlag Birkhäuser, 1951.

Als Abdruck mehrerer in der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik" erschienenen Artikel gibt das Buch eine kurze Übersicht über die mathematischen und technischen Grundlagen jener mit Ziffern arbeitenden elektronischen Rechenmaschinen, die eine längere Kette von Grundoperationen (und auch Operationen der math. Logik) nach einem Rechenplan vollautomatisch abwickeln. Wir gewinnen einem Einblick, wie die Ausgangswerte und die Befehle der Rechenpläne und Unterpläne in der Maschine als Folge elektrischer Impulse dargestellt werden, wie die Maschinen die Grundoperationen durchführen und wie sie die Resultate zurückübersetzen. Man betrachtet dann die Grundprinzipien der Vorbereitung der Rechenpläne und der Kontrolle, und endlich die physikalischen Grundlagen. Das Buch enthält noch eine tabellarische Übersicht über 18, Ende 1949 im Betrieb oder im Bau befindlichen Rechenautomaten.

T. Bakos.

Arthur Linder, Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. III), 2. erweiterte Auflage, 238 S., Basel, Verlag Birkhäuser, 1951.

In der vorliegenden verbesserten und erweiterten Auflage stellt das Buch noch immer das einzige neuere deutschsprachige Lehrbuch der mathematischen Statistik dar — wenn man von H. Gebeleins zu eigenartiger „Zahl und Wirklichkeit" absieht. Im ersten Viertel des Buches wird die beschreibende Statistik bis zur linearen Regression und Teilregression behandelt. Das zweite Viertel bringt die klassischen Prüfverfahren. Ein darauf folgendes Achtel ist der Varianzanalyse gewidmet. Der Rest gibt die nachträgliche theoretische Unterstützung. Stoff und Geist entsprechen dabei dem von R. A. Fischer vor mehr als zwanzig Jahren erreichten Standpunkt. In diesem, heute als beschränkt zu betrachtendem Kreis wird aber der Gegenstand für den Praktiker sorgfältig durchgearbeitet und an Beispielen erläutert.

T. Szentmártony.

Helmut Hasse, Höhere Algebra I, II, dritte, verbesserte Auflage (Sammlung Göschen, Bd. 931, 932), 152 u. 158 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1951.

In diesen Bändchen behandelt der Verfasser die Grundaufgabe der klassischen Algebra mit modern-algebraischer Methode. Der erste Band enthält die grundlegende Untersuchung der formalen Rechenbereichen (Ringe, Körper, Integritätsbereiche, doch diese nur im kommutativen Fall, und Gruppen), die Behandlung der linearen Algebra, und zwar determinantenfrei (Toeplitzsches Verfahren) und auch mit Determinanten. Im zweiten Band werden die Grundlagen der Theorie der algebraischen Körpererweiterungen mit der ausführlichen Theorie der endlich algebraischen Theorie der Erweiterungen, die Galoissche Theorie und die der Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen entwickelt.

Gegenüber den vorigen wurde die neue Auflage mit einigen Ergänzungen erweitert (z. B. Isomorphismus und Erweiterungstypen bezüglich eines Teilbereiches). Es wurden (abweichend von der zweiten Auflage) auch die Begriffe der Separabilität und Inseparabilität aufgenommen und dann diese zur Definition der vollkommenen und unvollkommenen Körper verwendet. Als Neues tritt auch die Theorie der endlichen Körper hinzu.

J. Szendrei.

Helmut Hasse und Walter Klobe, Aufgabensammlung zur Höheren Algebra, zweite, verbesserte und vermehrte Auflage (Sammlung Göschen, Band 1082), 182 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1952.

Es ist erfreulich, daß diese wohlbekannte und im Unterricht und Selbststudium der Algebra sehr brauchbare Aufgabensammlung in einer neuen Auflage auf's neue zugänglich gemacht wird. Diese ist der dritten Auflage der Höheren Algebra angepaßt. Die neue Aufgabensammlung wurde mit Berücksichtigung der wertvollen Erfahrungen und Bemerkungen des Löser- und Leserkreises verbessert und vermehrt.

J. Szendrei.

L. Bieberbach, Theorie der geometrischen Konstruktionen (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. 13), 170 Seiten, 102 Figuren, Basel und Stuttgart, Verlag Birkhäuser, 1952.

Dieses Lehrbuch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die Verfasser seit vier Jahrzenten an verschiedenen Universitäten gehalten hat. Die ersten fünf Paragraphen behandeln die Konstruktionen mit dem Lineal allein. Hier beweist Verf., daß man aus einem regulären n-Eck im Falle eines ungeraden n ein reguläres $2n$-Eck mit dem Lineal allein konstruieren kann; im Falle eines geraden n ist das nicht mehr möglich. Für die Poncelet-Steinerschen Konstruktionen wird die Notwendigkeit des gezeichneten Kreises gezeigt. Der Kreis läßt sich durch einen beliebigen Kreisbogen ersetzen. Bei den Poncelet-Steinersen Konstruktionen werden auch die hängenden Lineale von Weiss besprochen. Nach der Bestimmung des Körpers der Koordinaten der mit Lineal und Zirkel konstruierbaren Punkte werden die Mohr-Mascheronischen Konstruktionen besprochen. Jede Konstruktion mit Lineal und Zirkel läßt sich durch ein Parallellineal oder durch ein Winkellineal (ohne Zirkel) durchführen. Sie lassen sich auch mit einem Lineal und mit einem Zirkel fester Öffnung durchführen (aber nicht allein mit einem Zirkel fester Öffnung, ohne Lineal). Normiertes Lineal ist ein Lineal, auf dessen Kante zwei Punkte markiert sind. Der Abstand dieser Punkte ist die Norm. In den Hilbertschen Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß kann man das Eichmaß mit der Norm ersetzen. Ein normiertes Lineal kann das Lineal und den Zirkel ersetzen, weil man damit die Schnittpunkte eines Kreises, dessen Halbmesser die Norm ist, mit jeder Geraden bestimmen kann. Die Unmöglichkeit der Trisektion und der Verdopplung des Würfels mit klassischer Anwendung des Zirkels und Lineals wird nach einer Jugendleistung von E. Landau bewiesen. Nach dem Beweis der Konstruierbarkeit Gaußischer regulärer Polygone werden die Konstruktionen dritten und vierten Grades eingehend behandelt. Dazu ist das erste Hilfsmittel das klassische Einschiebelineal. Das ist ein normiertes Lineal, dessen markierte Punkte auf je eine gezeichnete Linie (Gerade oder Kreis) fallen sollen. Als Beispiele wird die Konstruktion des regulären Siebenecks und eines Dreiecks aus zwei Seiten und aus dem Inkreisradius angegeben. Es werden auch andere Hilfsmittel für Konstruktionen dritten und vierten Grades besprochen und ihre Anwendungen an gut gewählte Bespielen erklärt. Solche Instrumente sind: Rechtwinkelhaken, Zimmermannshaken, Ellipsenzirkel, Kissoidenzirkel, ein gezeichneter Kegelschnitt, der kein Kreis ist. Mehrere interessante Beispiele zeigen die vielseitige Andwendbarkeit des von HJELMSLEV herrührenden Deckblattes zur Konstruktionen dritten Grades. Es wird allgemein bewiesen, daß ein reguläres n-seitiges Vieleck mit dem Einschiebelineal nur dann konstruierbar ist, wenn n die Form $2^a 3^b p_1 p_2 \ldots p_v$ besitzt, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_v$ lauter verschiedene Primzahlen von der Form $2^q 3^r + 1$ sind. Die Transzendenz der Rektifikation und Quadratur des Kreises wird nach GELFOND bewiesen. Auch die quadrierberen Kreisbogenzweiecke bleiben nicht außer Acht. Es werden auch Näherungskonstruktionen algebraischer und transzendenter Aufgaben behandelt. Die Konstruktionen auf der Kugel mit Zirkel und Großzirkel erhalten eine systematische Darstellung.

Die abschließenden Anmerkungen und Zusätze enthalten u. a. werte Literaturangaben. Zu betonen ist im ganzen Werke das Streben nach der wirklichen Durchführung der Konstruktion einzelner Aufgaben, auch wenn die Möglichkeit der Konstruktion mit den angegebenen Instrumenten schon bewiesen wurde. Auch Kenner werden in diesem Werk neue Probleme und Beweise finden.

Gy. Sz.-Nagy.

M. Parodi, Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées (Mémorial des Sciences Mathématiques, Fascicule 118), 64 pages, Paris, Gauthier—Villars, 1942.

Dieses Mémorialheft faßt die Ergebnisse der letzten Jahre über die Lage der charakteristischen Wurzeln der quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ zusammen. Die neuesten Ergebnisse stammen vom Verfasser selbst her.

Den Ausgang bildet ein Satz von Hadamard und eine Verallgemeinerung dieses Satzes von M. MÜLLER. Nach dem Hadamardschen Satz verschwindet die Determinante der Matrix nicht, wenn die n Ungleichungen

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \equiv P_i \quad \text{oder} \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \equiv Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen. Die charakteristischen Wurzeln liegen in den Kreisen

$$|z - a_{ii}| \leqq P_i \quad \text{und} \quad |z - a_{ii}| \leqq Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und in den von Cassinischen Kurven begrenzten Bereichen

$$|z - a_{kk}| . |z - a_{ll}| \leqq P_k . P_l \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq l).$$

Der Kreis $|z - a_{mm}| \leqq P_m$ $(1 \leqq m \leqq n)$ enthält genau eine charakteristische Wurzel von A, wenn die Gleichungen $|a_{mm} - a_{ll}| > P_m + P_l$ $(l \neq m;\ l = 1, 2, \ldots, n)$ bestehen. Die erhaltenen Sätze lassen sich auf die Bestimmung von oberen und unteren Schranken der absoluten Beträge und der reellen und imaginären Teile der Nullstellen von Polynomen anwenden.

Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit den Nullstellen einer Determinante, deren Elemente Polynome sind.

Gy. Sz.-Nagy.

Reprinted by arrangement with the publishers
"KULTURA" Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
Budapest, POB. 149
Hungary

Printed in Hungary