ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XIII.

FASC. 3-4.

REDIGUNT:

L. KALMÁR, B. SZ.-NAGY, GY. SZ.-NAGY,
L. RÉDEI ET F. RIESZ

SZEGED, 15. XI. 1950.

MINISTRO RELIGIONIS PUBLICAEQUE INSTRUCTIONIS ADIUVANTE
EDIDIT
INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

13. KÖTET

3-4. FÜZET

SZERKESZTI

KALMÁR LÁSZLÓ, SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA, SZŐKEFALVI-NAGY GYULA,
RÉDEI LÁSZLÓ ÉS RIESZ FRIGYES

SZEGED, 1950. november 15.

A VALLÁS- ÉS KÖZOKTATÁSÜGYI MINISZTER TÁMOGATÁSÁVAL
KIADJA
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

Über die ebenen Bogen der linearen Ordnung Drei.

Herrn HEINRICH TIETZE zum 70. Geburtstag am 31. VIII. 1950 gewidmet.

Von OTTO HAUPT in Erlangen (Deutschland).

Einleitung.

Die Gestalten[1]) der (nicht notwendig algebraischen) *Kurven*[2]) vom linearen Ordnungswert[3]) Drei in der projektiven Ebene P_2 hat zuerst C. JUEL[4]) bestimmt unter der Voraussetzung, daß es sich um Vereinigungen von endlich vielen (stetig) differenzierbaren[5]) Bogen vom linearen Ordnungswert Zwei (also von Konvexbogen) handelt. Andererseits hat Herr A. MARCHAUD[6]) gezeigt, daß jeder *Bogen* (in P_2) vom linearen Ordnungswert Drei und vom linearen *Indexwert Null* Vereinigung von 2 oder von 3 oder von 4 Konvexbogen ist, deren jeder (bei geeigneter Reihenfolge) mit dem vorhergehenden einen Endpunkt gemeinsam hat;

---

[1]) Der Begriff der *Gestalt* kann dabei auf verschiedene Weise definiert werden. Im Text oben liegt zunächst der früher (*Monatshefte für Math. und Phys.* 43 (1936), S. 261 ff. eingeführte Gestaltsbegriff zu Grunde; vgl. auch oben im Text (Einleitung weiter unten). Die in §§ 2, 3 oben im Text besprochene Klassifikation der Bogen 3. Ordnung deckt sich nicht vollständig mit diesem Gestaltsbegriff.

[2]) Unter einem *Bogen* bzw. *einfachen Bogen* wird ein eindeutiges, stetiges bzw. ein topologisches Streckenbild verstanden. Handelt es sich speziell) um ein eindeutiges stetiges bzw. topologisches *Kreis*bild, so sprechen wir von einer *Kurve* bzw. *einfachen* Kurve. Besitzt der Bogen $\mathfrak{B}$ die Endpunkte A und C, so schreiben wir auch $\mathfrak{B} = \widehat{AC}$, ferner AC für die Verbindungsgerade von A und C, sowie $\underline{AC}$ bzw. $\overline{AC}$ für eine offene bzw. abgeschlossene Strecke mit den Endpunkten A und C. Soweit nicht anders bemerkt, kann ein Bogen offen oder abgeschlossen, d. h. Bild einer offenen oder abgeschlossenen Strecke sein.

[3]) Unter dem *linearen Ordnungswert* bzw. *Indexwert* eines Bogens $\mathfrak{B}$, *abgekürzt* $LO(\mathfrak{B})$ bzw. $LJ(\mathfrak{B})$, sei das (in den oben im Text betrachteten Fällen stets vorhandene) Maximum bzw. Minimum der Mächtigkeit des Durchschnittes von $\mathfrak{B}$ mit den Geraden des P_2 verstanden. Ist $LO(\mathfrak{B})$ endlich, so kann $\mathfrak{B}$ insbesondere keine Strecken (und erst recht keine Geraden) enthalten. Unter dem linearen *Ordnungswert* eines *einfachen* Bogens *in einem Punkt* $Q \in \mathfrak{B}$, in Zeichen $LO(Q)$ genauer $LO(Q; \mathfrak{B})$ ist das Minimum der $LO(\mathfrak{U})$ zu verstehen für alle Umgebungen $\mathfrak{U}$ von Q auf $\mathfrak{B}$; es heißt $\mathfrak{B}$ linear *ordnungssingulär* in $Q \in \mathfrak{B}$ und Q ordnungssingulär (auf $\mathfrak{B}$), wenn $LO(Q) > 2$ ist. Betr. eine Klassifikation der ordnungssingulären Punkte vgl. Fußnote [11]). Ist T ein *mehrfacher Punkt* von $\mathfrak{B}$, d. h. Bild mindestens zweier Punkte der Urbildstrecke, so haben wir $LO(T)$ jeweils auf einen bestimmten *Zweig*, d. h. auf die Bilder der Umgebungen *eines* (festen) Urbildpunktes von T, zu beziehen. Ein (singulärer oder

dabei wird Differenzierbarkeit (und stückweise Konvexität)[7]) des Bogens nicht vorausgesetzt. Der Marchaudsche Satz ist keineswegs eine Folge oder naheliegende Verallgemeinerung des Juelschen; es gibt nämlich[8]) Bogen vom linearen Ordnungswert Drei, die nicht ordnungsfest zu *Kurven* erweiterbar, d. h. nicht Teilbogen von Kurven des linearen Ordnungswertes Drei sind.

Während JUEL[4]) sein Korrespondenzprinzip als Beweismittel heranzieht, gelangt Herr MARCHAUD[6]) durch eine Diskussion der möglichen

---

nicht-singulärer) Punkt Q des ebenen Bogens $\mathfrak{B}$, in dem zwei konvexe Teilbogen von $\mathfrak{B}$ zusammenstoßen, heiße *glatt*, wenn in Q genau eine freie Tangente (Paratingente) t an $\mathfrak{B}$ existiert, d. h. wenn alle Geraden durch 2, beliebig gegen Q konvergierende Punkte P', P'' von $\mathfrak{B}$ den gleichen Limes t besitzen. (Dabei sollen P' und P'' dem gleichen Zweig von $\mathfrak{B}$ angehören, vgl. Nr. 2. 1.) Ein ordnungssingulärer Punkt S von $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann glatt, wenn S ein Wendepunkt[11]) ist (Vgl. allgemein für Bogen im E_n bei I. SAUTER, *Math. Zeitschrift*, 42 (1937), S. 539 ff.). Daß $\mathfrak{B}$ den Indexwert Null besitzt, kann (vermöge passender Wahl der uneigentlichen Geraden) als gleichbedeutend angesehen werden damit, das $\mathfrak{B}$ in der euklidischen Ebene E_2 innerhalb eines Kreises liegt (beschränkt ist). Demgemäß wird jeder Bogen $\mathfrak{B}$ mit $LJ(\mathfrak{B}) = 0$ als in E_2 und beschränkt angenommen; dann hat auch der Begriff „Seite" einer Geraden einen Sinn.

[4]) C. JUEL, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven 3. und 4. Ordnung, *Danske Vidensk. Selskab Skrifter*, 7. R., *Naturv. og Math. Afd.*, 11, 2. (Kopenhagen, 1914), S. 113 ff. Vgl. auch C. JUEL, Einige Sätze über ein- und mehrteilige Elementarkurven 4. Ordnung, *Math. Annalen*, **76** (1915), S. 343 ff.

[5]) D. h., es soll in jedem Punkt R des Konvexbogens $\mathfrak{K}$ die (stets eindeutig bestimmte) vordere Halbtangente an $\mathfrak{K}$ komplementär (d. h. entgegengesetzt gerichtet) sein zur hinteren Halbtangente; ihre gemeinsame Trägergerade ist die Tangente an $\mathfrak{K}$ in R; diese Tangente ist stetige Funktion von R (die Geraden als Elemente eines topologischen Raumes betrachtet). Überdies ist $\mathfrak{B}$ in jedem seiner Punkte glatt (vgl. [3])).

[6]) A. MARCHAUD, Sur les continus d'ordre borné, *Acta math.*, **55** (1930), S. 67 ff. Bei Herrn MARCHAUD, ist stets $LJ(\mathfrak{B}) = 0$, vgl. a. a. O., S. 69. Ziff. 1., 3. Absatz, oder S. 83 unten. — Die Indexwerte 0 und 1 sind bei $LO(\mathfrak{B}) = 3$ die einzig möglichen; denn es ist $LJ(\mathfrak{B}) \leq 1$, weil jede Stützgerade an $\mathfrak{B}$ in $Q \in \mathfrak{B}$ höchstens einen weiteren Punkt von $\mathfrak{B}$ enthält.

[7]) Daß jeder Bogen $\mathfrak{B}$ mit $LO(\mathfrak{B}) = 3$ Vereinigung *endlich* vieler Konvexbogen ist, wurde gezeigt in *Math. Annalen*, **92** (1924), S. 88 ff.; kürzerer Beweis auch in den *Sitzungsberichten d. Bayerischen Akad. d. Wissenschaften, math. naturw. Abt.*, 1925, S. 6.

[8]) MARCHAUD, a. a. O. [6]), S. 89. Der Bogen des Marchaudschen Beispiels hat den Indexwert Null; es gibt aber auch nicht ordnungsfest erweiterbare Bogen $\mathfrak{B}$ mit $LO(\mathfrak{B}) = 3$ und $LJ(\mathfrak{B}) = 1$. Die *Nichterweiterbarkeit* ist *bedingt* durch die Definition des Ordnungswertes, demzufolge $\mathfrak{B}$ *bei endlichem* $LO(\mathfrak{B})$ *keine Strecken enthalten kann*, vgl. [3]). Bei anderer Definition (vgl. z. B. *Sitzungsberichte d. Bayerischen Akad. d. Wissenschaften, math.-naturw. Abt.*, 1941, S. 57 ff., Nr. 2. 2.) ist ordnungsfeste Erweiterung zu einer Kurve immer möglich, nämlich durch Hinzufügen einer Strecke („triviale" Erweiterung). (Vgl. *Math. Zeitschrift*, **52** (1950), S. 527 ff., wo auch gezeigt wird, daß ein Bogen, wenn überhaupt nicht-trivial zu einen *Bogen*, dann sogleich nicht-trivial zu einer *Kurve* ordnungsfest erweiterbar ist (a. a. O., S. 542, Zusatz)).

gegenseitigen Lagen dreier Maximalsekanten[9]) bzw. ihrer Schnittpunkte mit dem Bogen zum Ziel. Im Folgenden soll demgegenüber auf ein der Juelschen Methode näherliegendes Verfahren hingewiesen werden, das einen, wie uns scheint, gedanklich einfachen Beweis des Marchaudschen Satzes liefert. Darüber hinaus führt das in Rede stehende Verfahren ganz von selbst zu einer übersichtlichen, *gestaltlichen Klassifikation* aller Bogen $\mathfrak{B}$ vom linearen Ordnungswert Drei und von beliebigem Indexwert; man erhält dabei Kriterien, denen zufolge die „Gestalt" von $\mathfrak{B}$ bestimmt ist durch *Erstens* die Anzahl der Punkte von $\mathfrak{B}$, welche auf der Verbindungsgeraden g der Endpunkte von $\mathfrak{B}$ liegen, sowie durch die gegenseitige Lage dieser Punkte auf g; *Zweitens* durch die Lage von $\mathfrak{B}$ relativ zu g in der Umgebung eines jeden der Endpunkte von $\mathfrak{B}$. Die „Gestalt" von $\mathfrak{B}$ ist dabei[1]) im wesentlichen festgelegt durch die Anzahl und Art der ordnungssingulären[3]) Punkte von $\mathfrak{B}$ sowie durch die Mindestanzahlen der Konvexbogen, als deren Vereinigungen sich die jeweils größten singularitätenfreien Teilbogen von $\mathfrak{B}$ darstellen lassen. Die oben erwähnte (und in §§ 2, 3 mitgeteilte) gestaltliche Klassifikation der Bogen $\mathfrak{B}$ vom linearen Ordnungswert Drei ist dabei insofern etwas schärfer als die bloße Aufzählung der verschiedenen Gestalten von $\mathfrak{B}$, als in ihr Bogen gleicher Gestalt durch weitere Merkmale unterschieden werden.

Die vorhin erwähnte Herleitung des Satzes von Herrn MARCHAUD wird nachstehend (§ 1) gebracht. Sodann wird (§§ 2, 3) die angedeutete Klassifikation der Bogen vom linearen Ordnungswert Drei angegeben, wobei in Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum auf die Wiedergabe der Beweise verzichtet werden müsste; diese sollen in einer späteren Note nachgetragen werden. Ferner soll später die Aufzählung aller nicht ordnungsfest erweiterbaren Bogen vom linearen Ordnungswert Drei mitgeteilt werden. Auch hoffen wir, bei dieser Gelegenheit auf die Gestalten der *Kontinua* vom linearen Ordnungswert Drei näher einzugehen sowie auf die Frage nach einer Ergänzung unserer notwendigen Bedingungen zu hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Vereinigung von höchstens vier Konvexbogen den linearen Ordnungswert Drei besitzt.

Unser Verfahren zur Bestimmung der Gestalten der Bogen in der Ebene vom linearen Ordnungswert Drei hat allgemeinen Charakter, insofern es nämlich bei anderen Ordnungsproblemen für Bogen (z. B. für ebene Bogen bei anderen Ordnungscharakteristiken) anwendbar ist,

---

[9]) Unter einer *Maximalsekante* von $\mathfrak{B}$ ist eine Gerade zu verstehen, die *Sekante* ist, d. h. mit $\mathfrak{B}$ nur Schnittpunkte gemeinsam hat und zwar genau soviele Schnittpunkte, als der Ordnungswert beträgt, also Drei. Gemäß des sogen. Reduktionssatzes (*Monatshefte für Math. und Phys.*, **40** (1933), S. 18) folgt aus der Endlichkeit von $LO(\mathfrak{B})$ die Existenz von Maximalsekanten.

falls Kriterien für die Zerlegung „nicht-normaler" Bogen in „normale" (vgl. § 1) bekannt sind und falls jede ordnungsgeometrische Singularität ordnungsfest geglättet d. h. falls der betrachtete Bogen gleichmäßig approximiert werden kann durch Bogen des gleichen Ordnungswertes mit nur glatten Singularitäten.

§ 1. Minimalzahl[9a]) der konvexen Teilbogen bei Bogen dritter Ordnung vom Index Null.

1. 1. Es sei $\mathfrak{B}'$ ein Bogen mit $LO(\mathfrak{B}')=3$ und $LJ(\mathfrak{B}')=0$ in P_2, also o. B. d. A.[3]) ein *beschränkter* Bogen in der *euklidischen Ebene* E_2. Es besitzt $\mathfrak{B}'$ höchstens einen mehrfachen Punkt[10]). Es ist $\mathfrak{B}'$ Vereinigung endlich vieler Konvexbogen[7]), besitzt also nur endlich viele ordnungssinguläre Punkte S.

1. 2. Es sei $\mathfrak{B}'$ zunächst *einfach* und es sei $S'\in\mathfrak{B}'$ ordnungssingulär auf $\mathfrak{B}'$ aber kein Wendepunkt[11]). Dann kann $\mathfrak{B}'$ in beliebig kleiner 2-dimensionaler, ausser S' keine ordnungssingulären Punkte von $\mathfrak{B}'$ enthaltender, Umgebung $\mathfrak{B}'$ von S' so abgeändert („abgerundet") werden, daß durch die Abrundung wieder ein einfacher Bogen $\mathfrak{B}$ mit $LO(\mathfrak{B})=3$ und $LJ(\mathfrak{B})=0$ entsteht, der nur in einer 2-dimensionalen Umgebung $\mathfrak{U}$ von S' mit $\overline{\mathfrak{U}}\subset\mathfrak{B}'$ nicht mit $\mathfrak{B}'$ identisch ist und der in $\mathfrak{B}'$ genau einen oder genau zwei Wendepunkte besitzt, je nachdem S' ein Schnabel oder ein Dorn war. Somit ist $\mathfrak{B}'$ gleichmäßiger Limes von einfachen Bogen $\mathfrak{B}_n$, deren ordnungssinguläre Punkte sämtlich Wendepunkte sind. Gilt daher der Marchaudsche Satz für diese Bogen $\mathfrak{B}_n$, so auch für $\mathfrak{B}'$; denn der Limes eines in $\mathfrak{B}_n$ enthaltenen Konvexbogens $\mathfrak{K}$ ist konvexer Teilbogen von $\mathfrak{B}'$ oder ein Punkt von $\mathfrak{B}'$.

Demgemäß werden wir von jetzt an *alle ordnungssingulären Punkte als* W e n d e *punkte voraussetzen.*

1. 3. Es sei $\mathfrak{B}$ *einfach* mit $LJ(\mathfrak{B})=0$. Wir sagen, es liege $\mathfrak{B}$ n o r m a l z u r M a x i m a l s e k a n t e m, wenn bei geeigneter Orient-

---

[9a]) Vgl. die Definition im Text Nr. 2.2.

[10]) MARCHAUD, a. a. O.[6]), Ziff. 15., S. 87—88.

[11]) Es seien $\mathfrak{K}', \mathfrak{K}''$ Konvexbogen, welche einen Endpunkt Q gemeinsam haben und sonst fremd sind. Die Vereinigung von $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ ist ein einfacher Bogen $\mathfrak{K}$. Es seien h', h'' die Halbtangenten in Q an $\mathfrak{K}'$ bzw. $\mathfrak{K}''$ und es seien g', g'' die Trägergeraden von h' bzw. h''. Ist $g'\neq g''$ so bezeichnen wir Q als *Dorn* oder als *Schnabel* auf $\mathfrak{K}$, wenn in einer Umgebung von Q folgendes gilt: $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ liegen beide außerhalb des von h', h'' begrenzten Winkelraumes $\mathfrak{w}$ (mit $0<\mathfrak{w}<\pi$) oder der eine liegt außerhalb, der andere innerhalb von $\mathfrak{w}$. Ist aber $g'=g''$, so haben wir in Q einen zu den Dornen bzw. Schnäbeln zu rechnenden Grenzfall, nämlich eine *Dornspitze* bzw. einen *Wendepunkt*, je nachdem $h'=h''$ oder $h'\neq h''$, *vorausgesetzt*, daß $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ *auf verschiedenen Seiten von* g' liegen. Falls $g'=g''$ und $\mathfrak{K}', \mathfrak{K}''$ beide auf der *gleichen* Seite von g' liegen, ist $LO(Q;\mathfrak{K})=2$ oder gleich 4, je nachdem $h'\neq h''$ oder $h'=h''$.

ierung von $\mathfrak{B}$ und m die Reihenfolge der 3 Punkte von $m\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}$ und auf m (in E_2) die gleiche ist. Liegt $\mathfrak{B}$ normal zu jeder Maximalsekante, so heiße $\mathfrak{B}$ normal (schlechthin). Liegt $\mathfrak{B}$ nicht normal zu m, so sagen wir, es liege $\mathfrak{B}$ anormal zu m und, falls mindestens eine solche Maximalsekante existiert, es sei $\mathfrak{B}$ anormal.

1.3.1. Ist dann $\mathfrak{B}$ *normal*, so besitzt $\mathfrak{B}$ höchstens 3 ordnungssinguläre Punkte und ist Vereinigung von (höchstens) 4 Konvexbogen[12]).

1.3.2. Es sei jetzt $\mathfrak{B}$ anormal gelegen, etwa zur Maximalsekante m. Sind dann $S_j, j=1,2,3$, die Schnittpunkte von m mit $\mathfrak{B}$ in natürlicher Reihenfolge auf $\mathfrak{B}$, so liegt S_3 auf m zwischen S_1 und S_2. Daher liegt der eine Endpunkt, etwa C, von $\mathfrak{B}=\widehat{AC}$ innerhalb des vom Teilbogen $\mathfrak{A}'=\widehat{S_1S_2}$ von $\mathfrak{B}$ und von der Strecke $\overline{S_1S_2}$ begrenzten, beschränkten Gebietes. Die Verbindungsgerade $g=AC$ der Endpunkte von $\mathfrak{B}$ hat daher einen Schnittpunkt Q mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam derart, daß C auf g zwischen A und Q liegt. Für Anormalität von $\mathfrak{B}$ ist daher notwendig (und auch hinreichend), daß die Verbindungsgerade der beiden Endpunkte A und C von $\mathfrak{B}$ noch einen Schnittpunkt Q trägt, der außerhalb der Verbindungsstrecke der Bogenendpunkte liegt; dabei ist $LO(\mathfrak{B})=3$ und $LJ(\mathfrak{B})=0$ angenommen, ferner C als zwischen A und Q gelegen. Demgemäß ist $\mathfrak{L}=\overline{QC}\cup\widehat{CQ}$ eine einfache (geschlossene, beschränkte) Kurve, die auf der entgegengesetzten Seite von $g=AC$ liegt wie der Bogen $\mathfrak{A}=\widehat{AQ}$. Außerdem ist $LO(\mathfrak{C})=2$ für $\mathfrak{C}=\widehat{CQ}$; andernfalls nämlich würde eine Gerade existieren[9]), die mit $\mathfrak{C}$ genau 3 *Schnitt*punkte gemeinsam hätte, also mit der Strecke QC genau einen und folglich mit $\mathfrak{A}$ mindestens einen Schnittpunkt, im Widerspruch mit $LO(\mathfrak{B})=3$. Ganz entsprechend ergibt sich, daß $LO(Q)=2$ auf $\mathfrak{B}$ ist; man kann zum Beweise die Tatsache benützen, daß im Falle $LO(Q)=3$ Geraden existieren, welche mit $\mathfrak{B}$ drei Schnittpunkte gemeinsam haben, von denen mindestens einer innerhalb $\mathfrak{A}$ und mindestens einer innerhalb $\mathfrak{C}$ (in beliebigen Nähe von Q) liegt. Schließlich ist $\mathfrak{A}$ nicht anormal, also normal; denn die Verbindungsgerade AQ seiner Endpunkte schneidet $\mathfrak{A}$ nicht. Nun kann aber $\mathfrak{A}$ nicht mehr als einen ordnungssingulären Punkt enthalten; denn andernfalls würden[13]) Stützgerade t an $\mathfrak{A}$ existieren, die durch Q gehen, und zu t würde es eine benachbarte Gerade geben, die mindestens 4 Punkte mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam hätte. Damit ist der Marchaudsche Satz für den Fall einfacher Bogen bewiesen.

---

[12]) a. a. O.[9]) und *Annali di mat. pura ed applicata*, **27** (1948), S. 301, (*B*) (2).
[13]) zufolge des sogen. Expansionssatzes, a. a. O.[9]), S. 37.

1.4. Es sei jetzt $\mathfrak{B}$ *nicht einfach*, aber wieder sei $LO(\mathfrak{B})=3$, $LJ(\mathfrak{B})=0$. Dann existiert[14]) genau ein zweifacher Punkt D auf $\mathfrak{B}$. Zunächst falle D mit dem Endpunkt C von $\mathfrak{B}$ zusammen. Dann ist $\mathfrak{B}$ wieder anormal und es gelten im wesentlichen unverändert die einschlägigen Überlegungen von Nr. 1. 3. 2. Nunmehr sei D verschieden von den beiden Endpunkten A, C von $\mathfrak{B}$. Es sei $\mathfrak{A}=\widehat{AD}$ bzw. $\mathfrak{C}=\widehat{CD}$ der *einfache* Teilbogen von $\mathfrak{B}$ mit den Endpunkten A, D bzw. C, D. Dann ist $(\mathfrak{B}-\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\cup(D)$ eine Kurve $\mathfrak{K}$ mit $LO(\mathfrak{K})\leqq 3$, also mit $LO(\mathfrak{K})=2$ (weil $LO(\mathfrak{K})\equiv 0 \bmod 2$). Es ist ferner $LO(D)=2$ (gemäß Nr. 1. 3. 2) auf demjenigen Bogen, der dadurch entsteht, daß man die Bogen $\mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{K}-(D))$ bzw. $\mathfrak{C}$ und $(\mathfrak{K}-(D))$ in D aneinandersetzt, und der, abgesehen von D, nur einfache Punkte enthält. Daher bilden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ in D einen Dorn. Somit ist $\mathfrak{B}$ Limes von Vereinigungen $\mathfrak{B}_n$ aus dem Oval $\mathfrak{K}$ und aus einem einfachen Bogen $\mathfrak{R}_n$ mit $LO(\mathfrak{B}_n)=$ $=LO(\mathfrak{R}_n)=3$, wobei $\mathfrak{R}_n$ durch Abrunden (in D) desjenigen Bogens erhalten wird, der durch Zusammensetzen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ in D entsteht und einfach ist. Folglich besitzt $\mathfrak{R}_n$ mindestens zwei Schnäbel und zwar Wendepunkte. Für $n\to\infty$ konvergieren diese zwei Wendepunkte gegen D. Nun ist $\mathfrak{R}_n$ gemäß Nr. 1. 3 ff. Vereinigung von nicht mehr als 4 Konvexbogen; und unter diesen Konvexbogen konvergiert nach dem eben Bemerkten derjenige gegen einen Punkt, nämlich gegen D, welcher durch die in Rede stehenden zwei Wendepunkte von $\mathfrak{R}_n$ begrenzt ist. Dieser Konvexbogen geht daher beim Grenzübergang „verloren". Daraus folgt die Giltigkeit des Marchaudschen Satzes auch für Bogen mit Doppelpunkt (wenn man etwa $\mathfrak{K}$ als *einen* Konvexbogen zählt).

A n m e r k u n g. Auch die Bogen vom Index Eins ließen sich jetzt noch ein beziehen (vgl. dazu § 3.).

§ 2. Klassifikation der Bogen dritter Ordnung vom Index Null.

2. 1. Zwecks übersichtlicher Formulierung der ins Auge gefaßten Klassifikation führen wir zunächst folgende Unterscheidung ein hinsichtlich des Verhaltens des Bogens $\mathfrak{B}$ in je einem seiner Endpunkte A, C. Es sei nämlich s die offene (beschränkte) Verbindungsstrecke dieser Endpunkte; dann setzen wir $LO(A)=3$ oder $LO(A)=2$ je nachdem es Geraden f durch zwei zu A beliebig benachbarte Punkte von $\mathfrak{B}$ gibt oder nicht gibt, für die der Durchschnitt von f und s nicht leer ist. (Um auch den Fall einzubeziehen, daß A Doppelpunkt von $\mathfrak{B}$ ist, haben wir festzusetzen: Die erwähnten Nachbarpunkte von A gehören

---

[14]) Marchaud, a. a. O. [6]), S. 87 unten.

zu demjenigen Zweig $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$, dessen Urbild eine Umgebung desjenigen Endpunktes der Urbildstrecke ist, der A entspricht. Im Falle $LO(A)=3$ bzw. $LO(A)=2$ bezeichnen wir A als einen Quasischnabel bzw. als einen Quasihut. Diese Bezeichnung wird durch die Tatsache nahegelegt, daß im Falle eines Quasihutes bzw. Quasischnabels in A der Bogen $\mathfrak{B}$ in der Nähe von A innerhalb bzw. außerhalb desjenigen Winkelraumes verläuft, welcher von der Halbtangente an $\mathfrak{B}$ in A und von der, C enthaltenden Halbgeraden mit A als Anfangspunkt gebildet wird. Und die Bezeichnung $LO(A)=2$ usw. ist motiviert durch die Bemerkung, daß A auf dem aus $\mathfrak{A}$ und der Strecke $\overline{AC}$ zusammengesetzten Bogen den linearen Ordnungswert 2 usw. besitzt, wenn bei der Bestimmung des Ordnungswertes die Trägergerade von $\overline{AC}$ als Ordnungscharakteristik außer Betracht bleibt.

Wir bemerken ferner: Die Verbindungsgerade g der Endpunkte von $\mathfrak{B}$ ist[14a]) entweder fremd zu $\mathfrak{B}$ oder hat mit $\mathfrak{B}$ genau einen Schnittpunkt S gemeinsam. Ist $\mathfrak{B}$ einfach und liegt S auf g zwischen den beiden Endpunkten A und C, so ist $\mathfrak{B}$ normal, andernfalls anormal. (Vgl. Nr. 1. 3. 2.) Bei *anormalem* $\mathfrak{B}$ können und wollen wir die *Bezeichnung der Endpunkte* stets *so wählen*, daß *C zwischen A und S* liegt.

Schließlich führen wir, ebenfalls der größeren Übersichtlichkeit wegen, nachstehende Abkürzungen ein. Die Tatsache, daß $\mathfrak{B}$ ein einfacher oder nicht-einfacher Bogen vom Index 0 ist, werde durch das Zeichen E_0 bzw. D_0 angedeutet. Ist der Bogen $\mathfrak{B}$ einfach und hat $\mathfrak{B}$ mit der Verbindungsgeraden seiner Endpunkte keinen bzw. einen weiteren Punkt gemeinsam, so soll dies durch das Zeichen $E_0(0|j)$ bzw. $E_0(1|n|j)$ und $E_0(1|a|j)$ angedeutet werden, wobei n bzw. a besagt, daß $\mathfrak{B}$ normal bzw. anormal ist, und wobei j die Anzahl der auf $\mathfrak{B}$ gelegenen Schnäbel bezeichnet (ein Dorn hierbei als äquivalent mit zwei Schnäbeln gerechnet).

2. 2. Mit Benutzung der in Nr. 2. 1 angegebenen Bezeichnungen läßt sich jetzt unsere Klassifikation zunächst der *einfachen* Bogen so formulieren:

Jeder einfache Bogen $\mathfrak{B}$ vom linearen Ordnungswert Drei und vom Indexwert Null besitzt eine der folgenden Gestalten:

Erstens. Die Verbindungsgerade g der beiden Endpunkte A, C von $\mathfrak{B}$ ist fremd zu $\mathfrak{B}$ bis auf A und C (Typus $E_0(0)$).

Es enthält $\mathfrak{B}$

genau *einen Schnabel* (aber keinen Dorn), wenn einer der Endpunkte ein Quasischnabel, der andere aber ein Quasihut ist (Typus $E_0(0|1)$);

genau *zwei Schnäbel oder* genau *einen Dorn*, wenn beide Endpunkte Quasischnäbel sind. (Typus $E_0(0|2)$.)

14a) Unter $\mathfrak{B}$ wird hier der *offene* Bogen verstanden (vgl. Fußnote 1)).

Zweitens. Die Verbindungsgerade g der beiden Endpunkte A, C von $\mathfrak{B}$ enthält, außer A und C, genau einen Punkt S; dieser ist stets Schnittpunkt (Typus $E_0(1)$). Es sind zwei Unterfälle zu unterscheiden

Unterfall (n): Die beiden Endpunkte werden auf g getrennt durch S. Dann ist $\mathfrak{B}$ normal (Typus $E_0(1|n)$) und es enthält $\mathfrak{B}$

genau *einen Schnabel* (aber keinen Dorn), wenn beide Endpunkte Quasihüte sind (Typus $E_0(1|n|1)$);

genau *zwei Schnäbel oder* genau *einen Dorn,* wenn einer der Endpunkte ein Quasihut, der andere ein Quasischnabel ist (Typus $E_0(1|n|2)$)

genau *drei Schnäbel oder* genau *einen Schnabel und* genau *einen Dorn,* wenn beide Endpunkte Quasischnäbel sind (Typus $E_0(1|n|3)$).

Unterfall (a): Die beiden Endpunkte werden auf g nicht durch S getrennt. Dann ist $\mathfrak{B}$ *anormal* (Typus $E_0(1|a)$).

Liegt etwa C auf g zwischen A und S, so enthält $\mathfrak{B}$

keinen Schnabel und *keinen Dorn,* wenn A ein Quasihut ist (Typus $E(1|a|0)$)

genau *einen Schabel* (aber keinen Dorn), wenn A ein Quasischnabel ist (Typus $E_0(1|a|1)$).[15])

Wir bezeichnen jetzt als Minimalzahl *der Konvexbogen von* $\mathfrak{B}$ die Anzahl k von Konvexbogen derart, daß $\mathfrak{B}$ als Vereinigung von k aber von nicht weniger Konvexbogen darstellbar ist. Dann gilt weiter:

Für Typus $E_0(\Theta)$ und $E_0(1|n)$ ist die Minimalzahl der Konvexbogen von $\mathfrak{B}$ stets um Eins größer als die Anzahl der ordnungssingulären Punkte von $\mathfrak{B}$.

Für Typus $E_0(1|a\ 0)$ ist die Minimalzahl der Konvexbogen von $\mathfrak{B}$ gleich Zwei (also um Zwei größer als die Anzahl der Ordnungssingulären Punkte).

Für Typus $E_0(1|a|1)$ ist die Minimalzahl der Konvexbogen von $\mathfrak{B}$ gleich Zwei oder gleich Drei, je nachdem die zur Halbtangente an $\mathfrak{B}$ in C komplementäre Halbgerade nicht fremd oder fremd ist zum abgeschlossenen Teilbogen $\widehat{AR}$ von $\mathfrak{B}$, wo R der Schnabel von $\mathfrak{B}$ (je nachdem ist also die Minimalzahl um Eins oder um Zwei größer als die Anzahl der ordnungssingulären Punkte).

2. 3. Ist $\mathfrak{B}$ *nicht einfach,* so schreiben wir D_0 statt E_0 und $D_0(0)$ bzw. $D_0(1)$, je nachdem auf der Verbindungsgeraden g der Endpunkte A, C von $\mathfrak{B}$ kein oder ein weiterer Punkt (außer A und C) liegt (der dann notwendig Schnittpunkt ist). Es gilt nun:

---

15) Für die Unterscheidung zweier weiterer Unterfälle bei Typus $E_0\,(1|a|1)$ vgl. die Bemerkung betr. die Minimalzahl weiter unten im Text.

Jeder nicht-einfache Bogen $\mathfrak{B}$ *vom linearen Ordnungswert Drei und vom Indexwert Null besitzt* (genau einen mehrfachen und zwar zweifachen Punkt und) *keinen Dorn. Folgende Fälle sind zu unterscheiden:*

Erstens: Enthält g außer A, C keinen Punkt von $\mathfrak{B}$ (Typus $D_0(0)$), so besitzt $\mathfrak{B}$ *keinen Schnabel.* Beide Endpunkte sind Quasischnäbel.

Zweitens: Enthält g außer A, C noch genau einen Schnittpunkt[16]), so besitzt $\mathfrak{B}$

keinen Schnabel, wenn der eine Endpunkt ein Quasischnabel, der andere ein Quasihut ist (Typus $D_0(1|0)$);

genau *einen Schnabel,* wenn beide Endpunkte Quasischnäbel sind (Typus $D_0(1|1)$).

Die *Minimalzahl* der Konvexbogen von $\mathfrak{B}$ ist für alle diese Typen um Zwei größer als die der Schnäbel.

2. 4. Bei der Klassifikation in Nr. 2. 2. und 2. 3. besitzen Bogen verschiedener Typen gleiche Gestalt im Sinne der Einleitung.[1]) Es sind nämlich in diesem Sinne gestaltsgleich: Die Bogen der Typen $E_0(0|1)$, $E_0(1|n|1)$ und $E_0(1|a|1)$, soweit die Bogen des letzteren Typus die Minimalzahl Zwei besitzen; ferner die Bogen der Typen $E_0(0|2)$ und $E_0(1|n|2)$, soweit die Bogen je zwei Schnäbel oder je einen Dorn besitzen; schließlich die Bogen der Typen $D_0(0|0)$ und $D_0(1|0)$, soweit bei den Bogen des Typus $D_0(1|0)$ der eine Endpunkt nicht zugleich Doppelpunkt ist.

§ 3. Klassifikation der Bogen dritter Ordnung vom Index Eins.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Bogen vom linearen Ordnungswert Drei und vom Indexwert Eins: Zeichen E_1 bzw. D_1. Ferner sei $g = AC$ die Verbindungsgerade der Endpunkte von $\mathfrak{B}$. Jeder solche Bogen $\mathfrak{B}$ gehört dann zu einem der folgenden Typen:

Erstens: Es hat g (außer A und C) mit $\mathfrak{B}$ genau (einen Punkt und zwar) einen Stütz*punkt* gemeinsam (Fall (st)); des Näheren gilt hier:

Entweder ist $\mathfrak{B}$ einfach und besitzt dann genau *zwei Schnäbel* oder genau *einen Dorn* (Typus $E_1(st|2)$;

Oder es ist $\mathfrak{B}$ nicht einfach und besitzt keinen Schnabel (und keinen Dorn) (Typus $D_1(st|0)$);

Zweitens: Es hat g (außer A und C) mit $\mathfrak{B}$ genau (einen Punkt und zwar) einen Schnitt*punkt* gemeimsam (Fall (s)). Dann

---

[16]) Hinsichtlich ihrer Gestalt[1]) sind noch zu unterscheiden die Bogen, bei denen kein oder ein Endpunkt mit dem Doppelpunkt zusammenfällt (vgl. im Text Nr. 2. 4).

ist $\mathfrak{B}$ *nicht-einfach* und besitzt genau *einen Schnabel* (und keinen Dorn) (Typus $D_1(s|1)$).

Die *Minimalzahl* ist für Typus $E_1(st|2)$ um Eins größer als die Anzahl der ordnungssingulären Punkte, für Typus $D_1(st|0)$ ist sie gleich Zwei, für Typus $D_1(s|1)$ ist sie gleich Zwei oder Drei, je nachdem keine oder eine Stützgerade an $\mathfrak{B}$ durch den ordnungssingulären Punkt von $\mathfrak{B}$ geht.

Zusatz. Die Bogen vom Typus $E_1(st|2)$ bzw. $D_1(st|0)$ sind Limiten von Bogen des Typus $E_0(0|2)$ bzw. $D_0(0)$. Beim Typus $E_1(st|2)$ kann man noch die Unterfälle unterscheiden, daß der Stützpunkt auf der Geraden g entweder nicht singulär oder daß er ein Schnabel oder ein Dorn ist.

Anmerkung. Die Juelsche Klassifikation der Kurven dritter Ordnung ergibt sich mit Hilfe entsprechender Überlegungen (man erhält je einen Typus E_1 mit 3 Schnäbeln bzw. einem Schnabel und einem Dorn und einen Typus D_1 mit (genau) einem Schnabel).

(*Eingegangen am 8. August 1949.*)

Über eine Ungleichung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Heinrich Tietze zu seinem 70. Geburtstag gewidmet.

Von Georg Aumann in Würzburg (Deutschland).

1. 1. Hat man ein Kollektiv von n einander ausschließenden und ergänzenden Merkmalen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ irgend welcher Art, mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, \ldots, w_n, \sum_k' w_k = 1$, so ergibt sich eine zweckmäßige „Arithmetisierung" der Merkmale M_k, wenn man M_k den k-ten Grundvektor $\mathfrak{e}_k = (e_{ki})$, $e_{ki} = 0$ oder 1, je nachdem $i \neq k$ oder $i = k$, eines n-dimensionalen Raumes R der Vektoren $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zuordnet. Als Erwartungswert erhält man dann $\bar{\mathfrak{x}} = \sum_k' w_k \mathfrak{e}_k = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ und als Streuung $\overline{(\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}})^2} = \sigma^2 = \overline{\mathfrak{x}^2} - \bar{\mathfrak{x}}^2 = \sum_k w_k - \sum_k w_k^2 = 1 - p$, wo p die sogenannte Paschwahrscheinlichkeit bedeutet. Es gilt also die Beziehung

$$\sigma^2 + p = 1, \tag{1}$$

welche dahin gedeutet werden kann, daß bei einem Wahrscheinlichkeitsproblem mit Merkmalen, für welche sich nicht in natürlicher Weise eine zahlenmäßige Ordnung darbietet, bei Verzicht auf die obige Arithmetisierung die Paschwahrscheinlichkeit die Rolle der Streuung zu übernehmen hat. Es sei hier nur nebenbei bemerkt, daß dieser Umstand einen Aufbau der Korrelationstheorie ermöglicht, bei welchem der Begriff der Paschwahrscheinlichkeit die Grundlage bildet.

1. 2. In der kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsrechnung etwa einer zufälligen Variablen x, wo eine Verteilung in der Gestalt der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$, $-\infty < x < +\infty$, gegeben ist, besteht kein Bedürfnis, die Streuung durch eine andere Maßzahl zu ersetzen. Es gibt aber auch hier eine der Gleichung (1) verwandte Beziehung, allerdings nur noch in Form einer Ungleichung. Setzen wir voraus, daß $w(x)$ in $(-\infty, +\infty)$ integrierbar ist mit $\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\,dx = 1$, ferner, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,w(x)\,dx = \bar{x}$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 w(x)\,dx = \sigma^2$, die Streuung, und

$\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(x)\,dx = \beta$, die Paschdichte[1]), existieren, so gilt die Ungleichung

$$\beta\sigma \geqq \frac{3}{5\sqrt{5}} = 0{,}268. \tag{2}$$

Sie ist mit dem Gleichheitszeichen erfüllt für die Verteilung

$$w(x) = \frac{3}{4}(1-x^2) \text{ für } |x| \leqq 1, \quad w(x) = 0 \text{ sonst}$$

Eine Beschränkung von $\beta\sigma$ nach oben besteht nicht, wie schon einfache monotone Verteilungen lehren. *Immerhin* hält sich für die gebräuchlichsten Verteilungen $\beta\sigma$ in beachtlicher Nähe des obigen Minimalwertes, was die Verwandtschaft von (2) mit der Gleichung (1) unterstreicht. Z. B. ist für Gleichverteilung (Rechteckverteilung) $\beta\sigma = 0{,}285$, für die symmetrische Dreiecksverteilung $\beta\sigma = 0{,}272$, und für die Gaußsche Normalverteilung $\beta\sigma = 0{,}282$.

1. 3. In Verallgemeinerung von (2) gilt für eine Verteilung $w(x_1, \ldots, x_n)$ im n-dimensionalen Raum R mit $\int_R w\,dm = 1$, (in erlaubter Vereinfachung) $\int_R \mathfrak{x}\,w\,dm = 0$, $\beta = \int_R w^2\,dm$ und $\sigma^2 = \int_R \mathfrak{x}^2\,w\,dm$ die Ungleichung

$$\beta^{\frac{1}{n}}\sigma \geqq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}}\left(\frac{n(4+2n)}{c_{n-1}(4+n)}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{3}$$

worin c_{n-1} den $(n-1)$-dimensionalen Inhalt der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre vom Radius 1 bezeichnet ($c_0 = 2$, $c_1 = 2\pi$, $c_2 = 4\pi, \ldots$). Das Gleichheitszeichen wird für eine ähnlich einfache Verteilung, wie im Falle $n = 1$, angenommen.

1. 4. Die vorausgehenden Ungleichungen sind im wesentlichen Spezialfälle einer allgemeinen *Minimumsaufgabe:* Es sei $\lambda > 0$ vorgegeben. Es ist für alle nicht negativen, samt ihrem Quadrat für $x > 0$ integrierbaren Funktionen $W(x)$ mit den Normierungen

$$\text{(4)} \quad \int_0^{+\infty} W(x)\,dx = 1, \qquad \text{(5)} \quad \int_0^{+\infty} W^2(x)\,dx = 1,$$

das Infimum P_0 der Zahlen $P_W = \int_0^{+\infty} x^\lambda W(x)\,dx$ zu bestimmen. Hier lautet die Lösung: $P_0 = (2\lambda+2)^\lambda(2\lambda+1)^{-(\lambda+1)} = P_{W_0}$ mit

[1]) Auch als „Nachbarschaftswahrscheinlichkeitsdichte" zu bezeichnen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei kleinem positiven r zwei Ereignisse x_1 und x_2 einen Abstand kleiner als r haben, ist βr.

$$W_0(x) = \frac{1}{2\lambda P_0}(x_0^\lambda - x^\lambda) \text{ für } 0 < x \leqq x_0, \quad W_0(x) = 0 \text{ für } x > x_0,$$

wobei $x_0 = \dfrac{2\lambda + 2}{2\lambda + 1}$.

2. 1. Wir zeigen zunächst, daß sich die mit den in 1.2 und 1.3 genannten Ungleichung verbundenen Minimumsaufgaben auf 1.4 zurückführen lassen. Betrachten wir den Fall 1.3. Gehen wir mit einem $\varrho > 0$ von $w(\mathfrak{x})$ über zu $w'(\mathfrak{x}) = \varrho^n w(\varrho\mathfrak{x})$, so ist wieder $\int\limits_R w' dm = 1$, dagegen $\beta' = \int\limits_R w'^2 dm = \varrho^n \int\limits_R w^2 dm = \varrho^n \beta$, ferner $\sigma'^2 = \int\limits_R \mathfrak{x}^2 w' dm = \varrho^{-2}\sigma^2$, sodaß $\beta'^{\frac{1}{n}} \sigma' = \beta^{\frac{1}{n}} \sigma$. Diese Invarianzeigenschaft erlaubt neben der Bedingung $\int\limits_R w dm = 1$ auch noch $\int\limits_R w^2 dm = 1$ einzuführen. Die Aufgabe ist dann, für in solcher Weise „normierte" Verteilungen das Infimum von σ zu ermitteln.

2. 2. Ferner dürfen wir uns auf die Betrachtung symmetrischer Verteilungen $w(\mathfrak{x})$ (d. h. solcher mit $w(\mathfrak{x}) = w(\mathfrak{y})$ für $|\mathfrak{x}| = |\mathfrak{y}|$) beschränken. Um dies zu zeigen setzen wir

$$w_S(\mathfrak{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(w(\mathfrak{x}) + w(-\mathfrak{x})) & \text{für } n = 1, \\ \dfrac{1}{c_{n-1}} \displaystyle\int\limits_{|\mathfrak{y}| = |\mathfrak{x}|} w(\mathfrak{y})\, df & \text{für } n > 1,\text{[2]} \end{cases}$$

wobei df das $(n-1)$-dimensionale Volumelement auf der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre vom Radius 1 bezeichnet und für $w(\mathfrak{y})$ die entsprechenden Werte auf der Sphäre $|\mathfrak{y}| = |\mathfrak{x}|$ vom Radius $|\mathfrak{x}|$ zu nehmen sind. Bei dieser Symmetrisierung ist $\int\limits_R w_S dm = 1$, $\sigma_S^2 = \sigma^2$. Dagegen folgt nach der Schwarzschen Ungleichung $\left(\int w df\right)^2 \leqq \left(\int w^2 df\right)\left(\int df\right)$ die Beziehung $c_{n-1} w_S^2(r) \leqq \int\limits_{|\mathfrak{x}|=r} w^2 df$, sodaß

$$\beta_S = \int\limits_R w_S^2 dm = \int\limits_0^{+\infty} r^{n-1} \left(\int\limits_{|\mathfrak{x}|=r} w_S^2 df\right) dr = \int\limits_0^{+\infty} r^{n-1} c_{n-1} w_S^2(r)\, dr \leqq$$

$$\leqq \int\limits_0^{+\infty} r^{n-1} \left(\int\limits_{|\mathfrak{x}|=r} w^2 df\right) dr = \beta,$$

also $\beta_S^{\frac{1}{n}} \sigma_S \leqq \beta^{\frac{1}{n}} \sigma$.

---

[2]) $w_S(\mathfrak{x})$ ist nach bekannten Sätzen für Lebesguesche Integrale in mehreren Dimensionen fast überall vorhanden.

2. 3. Es sei $r>0$. Für die normierte und symmetrische Verteilung $w(\mathfrak{x})$ setzen wir $q(r)=w(\mathfrak{x})$ mit $|\mathfrak{x}|=r$. Dann ist

$$1=c_{n-1}\int_0^{+\infty} r^{n-1}q(r)\,dr,\quad 1=c_{n-1}\int_0^{+\infty} r^{n-1}q^2(r)\,dr,\quad \sigma^2=c_{n-1}\int_0^{+\infty} r^{n+1}q(r)\,dr.$$

Mit der Transformation $\frac{c_{n-1}r^n}{n}=x$ und $q\left(\left(\frac{nx}{c_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=W(x)$ ergibt sich

$$\int_0^{+\infty} W(x)\,dx=1,\quad \int_0^{+\infty} W^2(x)\,dx=1,\quad \text{und}\quad \left(\frac{c_{n-1}}{n}\right)^{\lambda}\sigma^2=\int_0^{+\infty} x^{\lambda}W(x)\,dx \quad \text{mit}$$

$\lambda=\frac{2}{n}$. Damit ist der gewünschte Zusammenhang von 1.4 mit 1.3 (und damit auch 1.2) hergestellt.

3. 1. Bei der Behandlung des Problems 1.4 dürfen wir uns auf monotone (nicht steigende) Funktionen $W(x)$ beschränken. In der Tat, kann man zu jedem $W(x)$ die „monotone Umordnung“ $\overline{W}(x)$ bilden, erklärt als die Umkehrung der Funktion $x=f(y)$, wo $f(y)$ das Lebesgüesche Maß aller positiven ξ mit $W(\xi)\geqq y$ bedeutet. Es ist augenscheinlich, aber es ist auch nicht schwer zu beweisen, daß $\int_0^{+\infty}\overline{W}(x)\,dx=\int_0^{+\infty}(\overline{W}(x))^2\,dx=1$, hingegen $P_{\overline{W}}\leqq P_W$, weil nämlich x^{λ} eine wachsende Funktion ist.

3. 2. Bei der unten vorzunehmenden Variation von $W(x)$ ist folgender Normierungsprozeß von Bedeutung: Hat man eine Funktion $V(x)$ mit $\int_0^{+\infty} V\,dx=1$, $\int_0^{+\infty} V^2\,dx=\beta$ und $\int_0^{+\infty} x^{\lambda}V\,dx=P_V$, so gelten für $W(x)=\frac{1}{\beta}V\left(\frac{x}{\beta}\right)$ die Gleichungen $\int_0^{+\infty} W\,dx=\int_0^{+\infty} W^2\,dx=1$ und $P_W=\beta^{\lambda}P_V$. Dies ergibt sich analog wie in 2.1.

3. 3. Für die spezielle Funktion $W(x)=1$ für $0<x\leqq 1$, $W(x)=0$ für $x>1$ ist $P_W=\frac{1}{\lambda+1}$. Man braucht also bei der Bestimmung von P_0 nur solche W zu untersuchen, für die $P_W\leqq\frac{1}{\lambda+1}$. Dies hat aber bei monotonem W zur Folge, daß, $x^{\lambda+1}=(\lambda+1)\xi$ gesetzt,

$$\int_0^{+\infty} W([(\lambda+1)\xi]^{\frac{1}{\lambda+1}})\,d\xi\leqq\frac{1}{\lambda+1},$$

also gewiß $W([(\lambda+1)\xi]^{\frac{1}{\lambda+1}})\,\xi\leqq\frac{1}{\lambda+1}$, sodaß $W(x)\leqq\frac{1}{x^{\lambda+1}}$. Ganz analog ergibt sich aus der Gleichung (5) die Ungleichung $W(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Damit haben wir $W(x) \leq \mathrm{Min}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{x^{\lambda+1}}\right)$, sodaß die noch zur Konkurrenz zugelassenen $W(x)$ alle eine gemeinsame im Bereich $x > 0$ integrierbare Majorante haben. Es gibt nun eine minimalisierende Folge $W_1(x)$, $W_2(x), \ldots$, welche die Gleichungen (4) und (5) erfüllt, und für welche $\lim_n P_{W_n} = P_0$ ist. Für jedes $x > 0$ sind die $W_n(x)$ beschränkt. Wir können mit Hilfe des Diagonalverfahrens und mit Benutzung der Monotonie der W_n eine konvergente Teilfolge ausgreifen[8]). Sei der Einfachheit halber bereits die ursprüngliche Folge konvergent zum Limes $W^*(x)$. Da die W_n eine integrierbare Majorante gemeinsam haben, ist gliedweise Integration erlaubt:

$$1 = \int_0^{+\infty} W_n dx \to \int_0^{+\infty} W^* dx,$$

sodaß $\int_0^{+\infty} W^* dx = 1$. Da wir aber für $W_n^2(x)$ und $x^\lambda W_n(x)$ keine solchen Majoranten zur Verfügung haben, beweisen wir das Bestehen von (5) für W^* und die Gleichung $P_{W^*} = P_0$ folgendermaßen: Jedenfalls ist

$$(*) \qquad \beta^* = \int W^{*2} dx \leq 1, \quad P^* = \int x^\lambda W^*(x) dx \leq P_0.$$

Wäre etwa $\beta^* > 1$, so für passende positive a and b auch $\int_a^b W^{*2} dx > 1$, was wegen der beschränkten Konvergenz im Intervall $a \leq x \leq b$ mit der Normierung der W_n in Widerspruch steht. Analog ergibt sich die zweite Ungleichung. Für $W^{**}(x) = W^*(x/\beta^*)/\beta^*$ ist dann

$$(**) \qquad P_{W^{**}} = \beta^{*\lambda} P^* \leq P_0.$$

Wäre eine der Ungleichungen (*) mit dem Kleinerzeichen erfüllt, so auch (**), was der Minimaleigenschaft von P_0 widerspricht. Daher ist $\beta^* = 1$ und $P^* = P_0$.

4. 1. Nun haben wir die Aufgabe, die Minimalfunktion $W^*(x)$, die wir jetzt einfach mit $W(x)$ bezeichnen, durch ein geeignetes Variationsverfahren zu bestimmen und den zugehörigen Wert P zu ermitteln.

Wir betrachten zwei verschiedene Stellen x_1 und x_2, in deren Umgebungen $W(x)$ positiv ist. Wir nehmen mit $W(x)$ folgende Variation vor: Sei $\varepsilon > 0$; im Intervall $x_1 < x < x_1 + \varepsilon$ setzen wir $V(x) = W(x) + t$,

[8]) Siehe Haupt—Aumann—Pauc, *Differential- und Integralrechnung*, Bd. I. (Berlin, 1948), S. 150, Satz 2.

in $x_2 < x < x_2 + \varepsilon$ setzen wir $V(x) = W(x) - t$, außerhalb beider Intervalle sei $V(x) = W(x)$. ε und t seien dem Betrag nach so klein, daß die obigen Intervalle fremd und daß $V(x) \geqq 0$. Es ist $\int\limits_0^{+\infty} V(x)\,dx = 1$. Weiter wird $\beta = \int\limits_0^{+\infty} V^2(x)\,dx = 1 + u$ mit

$$u = \int\limits_{x_1}^{x_1+\varepsilon} (2tW(x) + t^2)\,dx + \int\limits_{x_2}^{x_2+\varepsilon} (-2tW(x) + t^2)\,dx = At + Bt^2.$$

Ferner ergibt sich $P_V = P + v$ mit $v = \int\limits_{x_1}^{x_1+\varepsilon} x^\lambda t\,dx - \int\limits_{x_2}^{x_2+\varepsilon} x^\lambda t\,dx = Ct$. Gehen wir nun gemäß 3.2 über zu $W_1(x) = V(x/\beta)/\beta$, sodaß W_1 den Normierungen (4) und (5) genügt, so wird $P_{W_1} = (1+u)^\lambda (P+v)$, also

$$P_{W_1} - P = v + \lambda u P + \ldots = (C + \lambda A P)\,t + \ldots,$$

wo die letzten Punkte Glieder höherer Ordnung in t bezeichnen. Da t im Rahmen der obigen Bemerkung frei ist, so muß wegen der Minimaleigenschaft von P die Gleichung $C + \lambda A P = 0$ bestehen:

$$\int\limits_0^{\varepsilon} [(x_1+\xi)^\lambda - (x_2+\xi)^\lambda]\,d\xi + 2\lambda P \int\limits_0^{\varepsilon} [W(x_1+\xi) - W(x_2+\xi)]\,d\xi = 0.$$

Seien nun x_1 und x_2 Stetigkeitspunkte von $W(x)$. Dann können wir die letzte Gleichung entwickeln:

$$[x_1^\lambda - x_2^\lambda + 2\lambda P(W(x_1) - W(x_2))]\,\varepsilon + o(\varepsilon) = 0,$$

wobei $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Dies führt auf

$$x_1^\lambda + 2\lambda P W(x_1) = x_2^\lambda + 2\lambda P W(x_2).$$

Für alle Stetigkeitspunkte x, wo $W(x) > 0$, hat $x^\lambda + 2\lambda P W(x)$ einen konstanten Wert a, sodaß für diese Stellen

$$W(x) = a - \frac{x^\lambda}{2\lambda P}.$$

Da diese Stellen (als Stetigkeitsstellen einer monotonen Funktion) überall dicht liegen, gilt nach dem bekannten Erweiterungssatz für monotone Funktionen die letzte Gleichung sogar für alle x, wo $W(x) > 0$. Dies führt zur Darstellung

$$W(x) = \frac{1}{2\lambda P}(x_0^\lambda - x^\lambda) \text{ für } 0 \leqq x \leqq x_0, \quad W(x) = 0 \text{ für } x > x_0.$$

Die Normierungsgleichungen (4) und (5) führen zu den in 1.4 angegebenen Werten für x_0 und $P = P_0$; die Gleichung $P_0 = \int\limits_0^{+\infty} x^\lambda W\,dx$ ist dann von selbst erfüllt.

(Eingegangen am 2. Januar 1950.)

Verallgemeinerung der Derivierten in der Geometrie der Polynome.

Von GYULA SZ.-NAGY in Szeged.

1. In dieser Arbeit wird der Begriff der Derivierten eines Polynoms verallgemeinert. Es wird gezeigt, daß bekannte (und teilweise noch nicht bekannte) Sätze über die Nullstellenverteilung eines Polynoms und seiner Derivierten oder einer linearen Verknüpfung des Polynoms und seiner Derivierten auch dann bestehen, wenn die Derivierte durch eine verallgemeinerte Derivierte ersetzt wird.

Hat das Polynom $f(z)$ n-ten Grades die Form

$$f(z) = C(z-z_1)^{q_1}(z-z_2)^{q_2}\dots(z-z_m)^{q_m},\ q_k \geqq 1,\ \sum_{k=1}^{m} q_k = n,\ C \neq 0 \tag{1}$$

und bedeuten $p_1, p_2, \dots, p_m$ der Gleichung

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = n \tag{2}$$

genügende beliebige positive Zahlen, so wird das Polynom $(n-1)$-ten Grades

$$f^*(z) = f(z) \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k}{z-z_k} \tag{3}$$

eine *Derivierte* (im allgemeineren Sinne) des Polynoms $f(z)$ genannt.

Im Falle $p_k = q_k$ $(k = 1, 2, \dots, m)$ ist $f^*(z) = f'(z)$ die gewöhnliche oder *isobare* Derivierte, sonst heißt $f^*(z)$ eine *anisobare* oder *allgemeine* Derivierte von $f(z)$. Da die Gewichte p_k im allgemeinen keine ganzen Zahlen sind, ist das logarithmische Integral von $f^*(z)$ im allgemeinen kein Polynom.

2. Der Gauß—Lucassche Satz läßt sich für eine anisobare Derivierte ebenso beweisen, wie für die isobare.

Die Gleichung

$$\zeta^* = z - n\frac{f(z)}{f^*(z)} \tag{4}$$

definiert einen Polarpunkt ζ^* (im allgemeinen Sinne) des Punktes z

bezüglich des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades. Die Gleichung (4) läßt sich auch in den Formen

$$\frac{n}{z-\zeta^*}=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{z-z_k}=\frac{f^*(z)}{f(z)}\quad\left(\sum_{k=1}^{m}p_k=n,\ p_k>0\right) \tag{5}$$

und

$$\sum p_k\frac{\zeta^*-z_k}{z-z_k}=0 \tag{6}$$

schreiben.

Im Falle $p_k=q_k$ $(k=1,2,\ldots,m)$ ist ζ^* der isobare Polarpunkt, der Laguerresche derivierte Punkt[1]) von z, der Schwerpunkt der Nullstellen von $f(z)$ in bezug auf den Punkt z nach PÓLYA—SZEGŐ[2]).

Der bekannte Laguerresche Satz gilt auch im allgemeinen Falle:

I. *Bezeichnet $f^*(z)$ eine (isobare oder anisobare) Derivierte des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades und ist $f(z_0)\cdot f^*(z_0)\neq 0$, so werden die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ von jedem Kreis K durch das Punktpaar*

$$z_0,\ \zeta^*=z_0-n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)}$$

getrennt. (Liegt nämlich nicht jede Nullstelle von $f(z)$ auf K, so besitzt $f(z)$ mindestens je eine Nullstelle innerhalb und außerhalb des Kreises K.)

Nach (6) besteht die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k(z_k-\zeta^*)}{z_k-z_0}=0. \tag{7}$$

Sind $z_k-z_0=r_k\cdot e^{i\alpha_k}$, $z_k-\zeta^*=\varrho_k e^{i\beta_k}$, $\beta_k-\alpha_k=\omega_k$ $(k=1,2,\ldots,m)$ und bezeichnet ω einen beliebigen Winkel, so läßt sich die Gleichung (7) in der Form

$$e^{-i\omega}\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k\varrho_k}{r_k}e^{i\omega_k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k\varrho_k}{r_k}[\cos(\omega_k-\omega)+i\sin(\omega_k-\omega)]=0$$

schreiben, woraus

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k\varrho_k}{r_k}\sin(\omega_k-\omega)=0 \tag{8}$$

folgt. Die Glieder dieser Summe verschwinden, falls jede Nullstelle z_k von $f(z)$ auf einem Kreis K liegt, von dessen Punkten aus der Vektor $\overrightarrow{z_0\zeta^*}$ unter einem Winkel ω oder $\omega+\pi$ erscheint. Hat die Summe von (8) ein nicht verschwindendes Glied, so hat sie mindestens je ein positives und negatives Glied. Das Polynom $f(z)$ hat dann mindestens je eine Nullstelle innerhalb und außerhalb von K.

---

[1]) LAGUERRE, *Oeuvres.* I, S. 133—143.

[2]) G. PÓLYA—G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* II, S. 55—66, 242—253. Dieses Werk wird unter PÓLYA - SZEGŐ zitiert.

Das Polynom $(n-1)$ ten Grades

$$nf(z)+(\zeta-z)f^*(z) \tag{9}$$

ist ein *allgemeines* (erstes) *Polarpolynom* des Punktes ζ in bezug auf das Polynom $f(z)$ n-ten Grades. Aus dem Satz I folgt

II. *Die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades werden von jedem Kreis K getrennt, der durch den Punkt ζ $(f(\zeta)\neq 0)$ und durch eine Nullstelle des Polarpolynoms (9) geht.*

3. Ein bekannter Satz von J. L. WALSH[3]) läßt sich auf folgende Weise verallgemeinern:

III. *Liegen n_1 Nullstellen $z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1n_1}$ eines Polynoms $f(z)$ (n_1+n_2)-ten Grades im Kreise K_1: $|z-\alpha_1|\leqq r_1$, die übrigen n_2 Nullstellen $z_{21}, z_{22}, \ldots, z_{2n_2}$ im Kreise K_2: $|z-\alpha_2|\leqq r_2$ und bezeichnet K_3 den Kreis*

$$|z-\alpha_3|\leqq r_3,\ \alpha_3=\frac{n_1\alpha_2+n_2\alpha_1}{n_1+n_2},\quad r_3=\frac{n_1r_2+n_2r_1}{n_1+n_2},$$

so hat das Polynom

$$f^*(z)=f(z)\left[\sum_{h=1}^{n_1}\frac{p_{1h}}{z-z_{1h}}+\sum_{k=1}^{n_2}\frac{p_{2k}}{z-z_{2k}}\right]=f_1(z)f_2(z)\left[\frac{f_1^*(z)}{f_1(z)}+\frac{f_2^*(z)}{f_2(z)}\right], \tag{10}$$

wo

$$p_{1h}^*>0,\ p_{2k}^*>0\quad (h=1,2,\ldots,n_1;\ k=1,2,\ldots,n_2),$$

$$\sum_{h=1}^{n_1}p_{1h}=n_1,\quad \sum_{k=1}^{n_2}p_{2k}=n_2$$

und

$$f_1(z)=\prod_{h=1}^{n_1}(z-z_{1h})\ \text{und}\ f_2(z)=\prod_{k=1}^{n_2}(z-z_{2k})$$

sind, außerhalb der Kreise K_1, K_2 und K_3 keine Nullstelle.

Haben keine zwei der Kreisscheiben K_1, K_2 und K_3 einen Punkt gemeinsam, so besitzt das Polynom $f(z)$ in der Kreisscheibe K_1, K_2 bzw. K_3 n_1-1, n_2-1 Nullstellen bzw. eine Nullstelle.

Liegt die Nullstelle z_0 des Polynoms $f^*(z)$ außerhalb beider Kreise K_1 und K_2, so fällt der Punkt

$$\zeta_j=z_0-n_j\frac{f_j(z_0)}{f_j^*(z_0)}\qquad (j=1,2) \tag{11}$$

in die Kreisscheibe K_j. Widrigenfalls könnte man nämlich durch die Punkte z_0 und ζ_j einen Kreis führen, von dem die Nullstellen des Polynoms $f_j(z)$ nicht getrennt werden. Deshalb sind $|\zeta_1-\alpha_1|\leqq r_1$ und $|\zeta_2-\alpha_2|\leqq r_2$. Der Punkt

---

[3]) J. L. WALSH, On the location of the roots of the derivative of a polynomial, *Comptes rendus du Congrès International de Math. Strasbourg 1920*, S. 339—342.

$$\frac{n_1\zeta_2+n_2\zeta_1}{n_1+n_2}=z_0-n_1n_2\frac{f_1^*(z_0)f_2(z_0)+f_2^*(z_0)f_1(z_0)}{f_1^*(z_0)f_2^*(z_0)}=$$
$$=z_0-n_1n_2\frac{f^*(z_0)}{f_1^*(z_0)f_2^*(z_0)}=z$$

liegt im Kreise K_3, weil

$$|z_0-\alpha_3|=\left|\frac{n_1\zeta_2+n_2\zeta_1}{n_1+n_2}-\frac{n_1\alpha_2+n_2\alpha_1}{n_1+n_2}\right|=$$
$$=\left|\frac{n_1(\zeta_2-\alpha_2)+n_2(\zeta_1-\alpha_1)}{n_1+n_2}\right|\leqq\frac{n_1r_2+n_2r_1}{n_1+n_2}=r_3$$

ist.

Damit ist der erste Teil des Satzes III bewiesen. Zum Beweis des zweiten Teiles nimmt man nach einer Methode von Walsh an, daß keine zwei der Kreisscheiben K_1, K_2 und K_3 einen Punkt gemeinsam haben. Läßt man die Nullstellen des Polynoms $f_1(z)$ bzw. $f_2(z)$ im Kreise K_1 bzw. K_2 stetig verändern, so verändern sich die Nullstellen von $f^*(z)$ stetig und keine Nullstelle von $f^*(z)$ kann aus einem der Kreise K_1, K_2 und K_3 austreten oder in eine dieser Kreisscheiben eintreten. Widrigenfalls gäbe es nämlich ein den Annahmen des Satzes III genügendes Polynom $f^*(z)$, das eine Nullstelle außerhalb der drei Kreise K_1, K_2 und K_3 besitzt. Das Polynom $f^*(z)$ hat also im Kreise K_1, K_2 bzw. K_3 dieselbe Anzahl der Nullstellen, wie im Falle $z_{11}=z_{12}=\ldots=z_{1n_1}=\alpha_1$ und $z_{21}=z_{22}=\ldots=z_{2n_2}=\alpha_2$. Dann sind

$$f(z)=(z-\alpha_1)^{n_1}(z-\alpha_2)^{n_2} \text{ und } f^*(z)=f(z)\left[\frac{n_1}{z-\alpha_1}+\frac{n_2}{z-\alpha_2}\right]=$$
$$=n\,(z-\alpha_1)^{n_1-1}(z-\alpha_2)^{n_2-1}(z-\alpha_3).$$

Damit ist der Satz III bewiesen.

4. Für ein reelles Polynom (mit lauter reellen Koeffizienten) gilt die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Jensen[4]):

IV. *Besitzt das Polynom $f(z)$ n-ten Grades ν Paare z_h, $\bar z_h$ $(h=1,2,\ldots,\nu)$ der konjugiert imaginären Nullstellen und $n-2\nu$ reelle Nullstellen, bezeichnet K_h den Kreis, dessen Durchmesser die Verbindungsstrecke $(z_h, \bar z_h)$ ist, ist ferner $f^*(z)$ eine reelle Derivierte des Polynoms $f(z)$ [d. h. zu den Punkten z_h und $\bar z_h$ gehört dasselbe positive Gewicht p_h $(h=1,2,\ldots,\nu)$ in $f^*(z)$], und bedeuten λ_0, λ_1 und λ_2 beliebige reelle Zahlen $(\lambda_1^2+\lambda_2^2>0)$, so fällt jede nichtreelle Nullstelle der Polynome von der Form*

$$G(z)=(\lambda_0-\lambda_1^2z)\,f(z)+\lambda_2^2f^*(z)$$

mindestens in eine der p Kreisscheiben $K_1, K_2,\ldots,K_\nu$.

---

[4]) L. W. Jensen, Recherches sur la théorie des équations, *Acta Math.*, **36** (1913), S. 181—195. — Gy. (J.) v. Sz. Nagy, Zur Theorie der algebraischen Gleichungen, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **31** (1922), S. 238—251.

Sind $z_h = a_h + ib_h$, $\bar{z}_h = a_h - ib_h$ $(b_h \neq 0,\ h = 1, 2, \ldots, \nu)$, $z_k = c_k$ $(k = 2\nu + 1, 2\nu + 2, \ldots, n)$ und ist $z_0 = x_0 + iy_0$ eine nichtreelle Nullstelle des Polynoms $G(z)$, für welche $f(z_0) \neq 0$ ist, so ist

$$\frac{G(z_0)}{f(z_0)} = \lambda_0 - \lambda_1^2 z_0 + \lambda_2^2 \frac{f^*(z_0)}{f(z_0)} =$$

$$= \lambda_0 - \lambda_1^2 z_0 + \lambda_2^2 \left[\sum_{h=1}^{\nu} \left(\frac{p_h}{z_0 - a_h - ib_h} + \frac{p_h}{z_0 - a_h + ib_h}\right) + \sum_{k=2\nu+1}^{n} \frac{p_k}{z_k - c_k}\right] = 0.$$

Für den imaginären Teil dieser Gleichung besteht also die Gleichung

$$-y_0 \left[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \sum_{h=1}^{\nu} 2p_h \frac{(x_0 - a_h)^2 + y_0^2 - b_h^2}{[(x_h - a_h)^2 + b_h^2 - y_0^2]^2 + 4(x_0 - a_h)^2 y_0^2} + \right.$$

$$\left. + \lambda_2^2 \sum_{k=2\nu+1}^{n} \frac{p_k}{(x_0 - c_k)^2 + y_0^2}\right] = 0.$$

Daraus folgt der Satz V, weil die erste Summe mindestens ein nicht positives Glied besitzen muß.

Es gilt auch der Satz[5])

V. *Besitzt das reelle Polynom $f(z)$ n-ten Grades das k-fache $(k \geqq 1)$ konjugiert komplexe Nullstellenpaar $a + ib$, $a - ib$ und die reellen Nullstellen $c_1, c_2, \ldots, c_{n-2k}$, so fällt jede nichtreelle und von $a + ib$ und $a - ib$ verschiedene Nullstelle seiner Derivierten*

$$f^*(z) = f(z) \left[\frac{k}{z - a - ib} + \frac{k}{z - a + ib} + \sum_{h=1}^{n-2k} \frac{p_h}{z - c_h}\right]$$

$$\left(p_h > 0,\quad 2k + \sum_{h=1}^{n-2k} p_h = n\right)$$

in das Innere des Kreises

$$|z - a| = |b| \sqrt{\frac{n - 2k}{n}} < |b| \frac{n - k}{n}.$$

Ist $z_0 = x_0 + iy_0$ $(y_0 \neq 0)$ eine Nullstelle von $f^*(z)$, aber keine Nullstelle des Polynoms

$$f(z) = [(z - a)^2 + b^2]^k \cdot g(z), \qquad g(z) = (z - c_1)(z - c_2) \ldots (z - c_{n-2k}),$$

so ist

$$\frac{f^*(z_0)}{f(z_0)} = \frac{2k(z_0 - a)}{(z_0 - a)^2 + b^2} + \frac{g^*(z_0)}{g(z_0)} = 0.$$

Die Punkte z_0 und ζ_0^*

$$\zeta_0^* = z_0 - (n - 2k) \frac{g(z_0)}{g^*(z_0)} = z_0 + \frac{(n - 2k)}{2k} \frac{(z_0 - a)^2 + b^2}{z_0 - a} =$$

$$= \frac{1}{2k} \left[n z_0 - (n - 2k) a + \frac{(n - 2k) b^2}{z_0 - a}\right]$$

[5]) Für die isobare Derivierte vgl. die Arbeit des Verfassers in der Fußnote [4]).

liegen an entgegengesetzten Seiten der reellen Achse. Widrigenfalls könnte man nämlich durch die Punkte $z_0 = x_0 + iy_0$ und $\zeta_0^* = \xi_0 + i\eta_0$ einen Kreis führen, von dem die (lauter reellen) Nullstellen des Polynoms $g(z)$ nicht getrennt werden. Hieraus folgt der Satz V, weil nach dem Ausdruck von ζ_0^*

$$y_0\eta_0 = \frac{y_0^2}{2k}\left[n - \frac{(n-2k)b^2}{(x_0-a)^2+y_0^2}\right] = y_0^2\,\frac{n-2k}{2k}\cdot\left[\frac{n}{n-2k} - \frac{b^2}{|z_0-a|^2}\right] < 0$$

ist.

5. Liegen die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades in einem Kreis K, so liegt der Polarpunkt ζ^* jedes außerhalb von K liegenden Punktes z_0 nach Satz I innerhalb des Kreises K. Mit Hilfe dieses Satzes erhält man die folgenden drei Sätze.

VI. *Liegen die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades in einem Kreis K, so liegt eine beliebige Nullstelle des Polynoms*

$$g(z) = f(z) + Cf^*(z), \quad C = A + iB$$

entweder im Kreise K, oder in einem Kreise K', der aus K durch die Parallelverschiebung um den Vektor $-nC$ entsteht.

Haben die Kreise K und K' keinen Punkt gemeinsam, so besitzt $g(z)$ eine Nullstelle im Kreise K' und $n-1$ Nullstellen im Kreise K.

Hätte nämlich $g(z)$ eine Nullstelle z_0 außerhalb beider Kreise K und K' so wären die Punkte

$$z_0 \text{ und } \zeta_0^* = z_0 - n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)} = z_0 + nC$$

außerhalb des Kreises K gelegen. Dies ist aber unmöglich, weil die Kreisscheibe K jede Nullstelle von $f(z)$ enthält. Damit ist der erste Teil des Satzes VI bewiesen[6]).

Haben die Kreise K und K' keinen Punkt gemeinsam und bewegen sich die Nullstellen von $f(z)$ im Kreise K, so hat kein zugehöriges Polynom $g(z)$ eine Nullstelle außerhalb beider Kreise K und K'. Die Anzahl der Nullstellen der Polynome $g(z)$ im Kreise K bzw. K' bleibt unverändert, während die Nullstellen von $f(z)$ sich im Kreise K beliebig bewegen. Fallen die Nullstellen von $f(z)$ in den Mittelpunkt α von K zusammen, so ist α eine $(n-1)$-fache Nullstelle und der Mittelpunkt $\alpha' = \alpha - nC$ von K' ist eine einfache Nullstelle des Polynoms $g(z)$. Dann sind nämlich

$$f(z) = (z-\alpha)^n, \quad f^*(z) = n(z-\alpha)^{n-1} = f'(z),$$
$$g(z) = f(z) + Cf^*(z) = (z-\alpha)^{n-1}(z-\alpha').$$

6) Für den ersten Teil des Satzes VII vgl. die Aufgabe 114 von PÓLYA—SZEGŐ II, S. 58.

VII. *Enthält die Kreisscheibe K: $|z-\alpha| \leqq r$ die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades und genügt der reelle Teil der Zahl $C = A + iB$ der Ungleichung $0 \leqq 2A \leqq n$, so enthält K die Nullstellen jedes Polynoms $g(z)$ von der Form*

$$g(z) = Cf(z) - (z-\alpha) f^*(z).$$

Ist $g(z_0) = 0$, so folgt dieser Satz im Falle $f^*(z_0) = 0$ aus dem verallgemeinerten Satz von Gauß und Lucas, weil dann auch $f(z_0) = 0$ ist. Ist $f^*(z_0) \neq 0$, so ist

$$\zeta_0^* = z_0 - n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)} = z_0 - n\frac{z_0-\alpha}{C}.$$

Wäre nun $|z_0 - \alpha| > r$, so wäre

$$|\zeta_0^* - \alpha| = |z_0 - \alpha| \left|\frac{C-n}{C}\right| > r\left|\frac{C-n}{C}\right| = r\left[\frac{(A-n)^2+B^2}{A^2+B^2}\right]^{\frac{1}{2}} \geqq r,$$

weil $n - A \geqq A \geqq 0$ ist. Damit ist der Satz VII bewiesen, weil beide Punkte z_0 und ζ_0^* außerhalb der Kreisscheibe K nicht liegen können.

Es gilt die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von G. Pólya und G. Szegő[7]):

VIII. *Liegt jede Nullstelle des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades im Kreisring*

$$r \leqq |z-\alpha| \leqq R,$$

und ist $C \neq -n$, so besitzt kein Polynom von der Form

$$g(z) = Cf(z) - (z-\alpha) f^*(z)$$

eine Nullstelle außerhalb des Kreisringes

$$r_1 = r \operatorname{Min}\left[1, \left|\frac{C}{C-n}\right|\right] \leqq |z-\alpha| \leqq R_1 = R \operatorname{Max.}\left[1, \left|\frac{C}{C-n}\right|\right].$$

Wäre eine Nullstelle z_0 des Polynoms $g(z)$ innerhalb des Kreises $|z-\alpha| = r_1$ bzw. außerhalb des Kreises $|z-\alpha| = R_1$ gelegen, so müßte der Polarpunkt ζ_0^* des Punktes z_0 in bezug auf das Polynom $f(z)$ innerhalb des Kreises $|z-\alpha| = r$ bzw. außerhalb des Kreises $|z-\alpha| = R$ fallen. Sind nämlich $g(z_0) = 0$ und $f(z_0) \neq 0$, so sind $f^*(z_0) \neq 0$ und

$$\zeta_0^* - \alpha = z_0 - \alpha - n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)} = z_0 - \alpha - n\frac{z_0-\alpha}{C} = (z_0-\alpha)\frac{C-n}{C}.$$

Ist also $|z_0-\alpha| < r_1$ bzw. $|z_0 - \alpha| > R_1$, so ist

$$|\zeta_0^* - \alpha| = |z_0-\alpha|\left|\frac{C-n}{C}\right| < r_1\left|\frac{C-n}{C}\right| \leqq r$$

$$\text{bzw.} \quad |\zeta_0^* - \alpha| = |z_0-\alpha|\left|\frac{C-n}{C}\right| > R_1\left|\frac{C-n}{C}\right| \geqq R.$$

---

[7]) A. a. O., S. 58, Aufgaben 116–117.

Damit ist der Satz VIII bewiesen, weil man in beiden Fällen durch z_0 und ζ_0^* Kreise führen kann, von denen die Nullstellen von $f(z)$ nicht getrennt werden.

6. Einige Resultate von mir[8]) lassen sich so ausdrücken:

IX. *Bedeuten λ_1 und λ_2 beliebige (reelle oder nichtreelle) Zahlen, sind ζ_1 und ζ_2 von den Nullstellen des Polynoms $f(z)$ abweichende (verschiedene oder zusammenfallende) Nullstellen des Polynoms*

$$g(z) = \lambda_1 f(z) + \lambda_2 f^*(z)$$

und bezeichnet H eine beliebige gleichseitige Hyperbel, die durch die Punkte ζ_1 und ζ_2 geht und den Punkt $\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}$ zum Mittelpunkt besitzt, so trennt die Hyperbel H die Nullstellen des Polynoms $f(z)$.

Dieser Satz gilt auch für eine mehrfache Nullstelle $\zeta_1 = \zeta_2$ des Polynoms $g(z)$, wenn $f(\zeta_1) \neq 0$ ist.

X. *Enthält die Kreisscheibe $|z-\alpha| \leqq r$ die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades und bedeuten λ_1 und λ_2 beliebige Zahlen, so enthält die konzentrische Kreisscheibe $|z-\alpha| \leqq r\sqrt{2}$ mindestens $n-1$ Nullstellen jedes Polynoms*

$$g(z) = \lambda_1 f(z) + \lambda_2 f^*(z). \quad (|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0).$$

7. Hat ein Polynom lauter reelle Nullstellen, so liegt ein Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ $(y_0 \neq 0)$ und sein Polarpunkt $\zeta_0^* = \xi_0 + i\eta_0$ in bezug auf das Polynom an entgegengesetzten Seiten der reellen Achse $(y_0\eta_0 < 0)$. Daraus folgen die Sätze:

XI. *Besitzt das Polynom $f(z)$ n-ten Grades lauter reelle Nullstellen, die auf der Strecke (A, B) liegen, und ist c eine nichtreelle Zahl, so enthält das Parallelogramm mit den Eckpunkten A, B, $C-nc$ und $B-nc$ die Nullstellen der Polynome $g(z) = f(z) + c\, f^*(z)$.*

In einer nichtreellen Nullstelle z_0 des Polynoms $g(z)$ sind

$$f^*(z_0) \neq 0, \; f(z_0) + cf^*(z_0) = 0 \text{ und } \zeta_0^* = z - n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)} = z_0 + nc.$$

Die Gerade g durch z_0 und ζ_0^* trennt nach Satz I die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ und deshalb schneidet die reelle Achse in einem Punkte z_1 der Strecke (A, B). Der Punkt z_1 liegt zwischen z_0 und ζ_0^*, die an entgegengesetzten Seiten der reellen Achse sind. Daraus folgt der Satz XI, weil die Strecke $(z_0, z_0 + nc)$ mit der Strecke (A, B) einen Punkt gemeinsam haben muß.

[8]) Gy. Sz.-Nagy, Ein elementargeometrischer Satz und seine Anwendung in der Geometrie der Polynome, *Anzeiger Ung. Akad. Wiss.*, **61** (1942), S. 776—785; Sur un théorème de M. Biernacki, *Annales de la Société Polonaise de Math.*, **23** (1950).

Verallgemeinerung bei M. Marden, On the zeros of rational functions having proscribed poles, with applications of an entire function of finite genre, *Transactions American Math. Soc.*, **66** (1949), S. 407—418.

XII. *Besitzt das Polynom $f(z)$ n-ten Grades lauter reelle Nullstellen und bedeuten A, B und $C\,(<0)$ reelle Zahlen, so liegen die nichtreellen Nullstellen der Polynome*

$$g(z) = f(z) + (A + Bz + Cz^2)\, f^*(z)$$

in der Halbebene $x = \operatorname{Re} z > -\dfrac{1+nB}{2nC}$.

In einer nichtreellen Nullstelle $z_0 = x_0 + iy_0$ dieses Polynoms ist

$$\zeta_0^* = \xi_0 + i\eta_0 = z_0 - n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)} = z_0 + n(A + Bz_0 + Cz_0^2).$$

Der Satz XII folgt aus der Ungleichung

$$y_0\eta_0 = y_0^2(1 + nB + 2nCx_0) < 0.$$

XIII. *Besitzt das Polynom $f(z)$ n-ten Grades lauter reelle Nullstellen, bedeuten a, A, B und C reelle Zahlen mit $C<0$, $D = 1 + nB > 0$, so hat*

$$g(z) = f(z) + \left[A + Bz + \frac{C}{z-a}\right] f^*(z)$$

lauter reelle Nullstellen. Ist $0 < nCD^{-1} = r^2$, so liegen die nichtreellen Nullstellen der Polynome $g(z)$ innerhalb bzw. außerhalb des Kreises $|z-a| = r$, jenachdem $D \gtrless 0$ bzw. $D < 0$ ist.[9])

In einer nichtreellen Nullstelle $z_0 = x_0 + iy_0$ des Polynoms $g(z)$ sind

$$\zeta_0^* = \xi_0 + i\eta_0 = z_0 - n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)} = z_0 + n\left(A + Bz_0 + \frac{C}{z_0 - a}\right) \text{ und } y_0\eta_0 < 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$y_0\eta_0 = y_0^2\left[D - \frac{nC}{(x-a)^2 + y_0^2}\right] = Dy_0^2\left[1 - \frac{nC}{D}\cdot\frac{1}{|z_0 - a|^2}\right].$$

Sind $D > 0$ und $C < 0$, so ist $y_0\eta_0 > 0$. Dann kann also das Polynom $g(z)$ keine nichtreelle Nullstelle haben. Im Falle $0 < nCD^{-1} = r^2$ ist

$$y_0\eta_0 = y_0^2 D\left[1 - \frac{r^2}{|z_0 - a|^2}\right].$$

Die Ungleichung $y_0\eta_0 < 0$ besteht also nur dann, wenn $D > 0$ und $|z_0 - a| < r$, oder $D < 0$ und $|z_0 - a| > r$ sind.

8. Die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von L. Berwald läßt sich ebenso beweisen, wie der originelle Satz[10]), wo die isobare Derivierte $f'(z)$ steht:

---

[9]) Der Satz XIII enthält einen speziellen Satz von Laguerre, a. a. O., in sich.

[10]) L. Berwald, Über die Lage der Nullstellen von Linearkombinationen eines Polynoms und seiner Ableitungen in bezug auf einen Punkt, *Tôhoku Math. Journal,* **37** (1933), S. 52–68.

XIV. *Enthält ein Kreisbereich K die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades, so liegen die Nullstellen der Polynome*

$$g(z) = c_0 f(z) + c_1 [n f(z) + (\alpha - z) f^*(z)] \equiv (c_0 + n c_1) f(z) + c_1 (\alpha - z) f^*(z)$$

($|c_0| + |c_1| \neq 0$) *in K und in einem Kreisbereich K', in den K durch die lineare Transformation*

$$z' = \alpha + \frac{c_0 + n c_1}{c_0} (z - \alpha)$$

überführt wird. Haben K und K' keinen Punkt gemeinsam, so hat ein Polynom $g(z)$ eine Nullstelle in K' und die übrigen Nullstellen in K.

Auch die Nullstellen der anisobaren Derivierten eines Polynoms sind Brennpunkte einer algebraischen Kurve $(n-1)$-ter Klasse, von der die Verbindungsstrecke von je zwei Nullstellen des Polynoms berührt wird.

Dies läßt sich ebenso einsehen, wie für die isobare Derivierte[11]).

9. Der folgende Satz über reelle gebrochene rationale Funktionen enthält den Satz V in sich.

XV. *Bezeichnen $a, c_1, c_2, \ldots, c_n$ bzw. $b, q, q_1, q_2, \ldots, q_n$ reelle bzw. positive Zahlen und ist $Q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$, so liegen die nichtreellen Nullstellen der rationalen Funktionen von der Form*

$$R(z) = \frac{q}{z - a - ib} + \frac{q}{z - a + ib} + \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{z - c_k}$$

im Kreise

$$|z - a| < b \sqrt{\frac{Q}{Q + 2q}} < b \frac{Q + q}{Q + 2q}.$$

Dieser Satz läßt sich ebenso beweisen, wie der Satz V.

Sind nämlich

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - c_k), \quad \varrho Q = n, \quad p_k = \varrho q_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist

$$\varrho R(z) = \frac{2 \varrho q (z - a)}{(z - a)^2 + b^2} + \frac{f^*(z)}{f(z)}.$$

Eine nichtreelle Nullstelle $z_0 = x_0 + i y_0$ von $R(z)$ hat einen Polarpunkt $\zeta_0^* = \xi_0 + i \eta_0$ in bezug auf das Polynom $f(z)$. Aus der Ungleichung $y_0 \eta_0 < 0$ folgt der Satz XV ohne Weiteres.

(*Eingegangen am 29. Juni 1949.*)

---

[11]) Vgl. die Literatur in der Arbeit: M. MARDEN, A note on the zeros of the sections of a partial fraction, *Bulletin of the American Math. Society*, **51** (1945), S. 935—940.

Einige aus Funktionalgleichungen zweier Veränderlichen ableitbare Differentialgleichungen.

Von J. ACZÉL in Szeged.

Einleitung.

Im folgenden wird an einigen Beispielen gezeigt, wie man die Lösung von Funktionalgleichungen mehrerer Veränderlichen an die Lösung von partiellen Differentialgleichungen zurückführen kann. Die Bedeutung einer solchen Zurückführung liegt in dem Mangel einer systematischen Theorie der Funktionalgleichungen.

N. H. ABEL[1]) hat aus der Funktionalgleichung

$$z[t, z(x, y)] = z[x, z(y, t)] = z[y, z(t, x)] \tag{1}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{f(x)}{f(y)} \qquad \left(z_x = \frac{\partial}{\partial x} z(x, y);\; z_y = \frac{\partial}{\partial y} z(x, y)\right) \tag{2}$$

abgeleitet, um zu beweisen, daß die streng monotonen und differenzierbaren Lösungen der Funktionalgleichung (1) alle von der Form

$$z(x, y) = F^{-1}[F(x) + F(y)] \tag{3}$$

sind, wo F eine streng monotone und differenzierbare Funktion ist. Die Differentialgleichung (2) bedeutet, daß in $\frac{z_x}{z_y}$ die Variabeln x, y „getrennt" auftreten, und zwar mit derselben Zähler- und Nennerfunktion. ABEL erhielt, daß $F(x) = C\int f(x)\,dx$. Die Gleichung (1) ist übrigens äquivalent mit den beiden Funktionalgleichungen der Symmetrie (Kommutativität)

$$z(x, y) = z(y, x) \tag{4}$$

und der Assoziativität

$$z[z(x, y), t] = z[x, z(y, t)]. \tag{5}$$

---

[1]) N. H. ABEL, Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Größen x und y, wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f(z, f(x, y))$ eine symmetrische Function von x, y und z ist, *Journal für die reine und angewandte Math.*, 1 (1826), S. 11–15.

In § 2 werden wir sehen, daß auch (5) allein zur Herleitung der Differentialgleichung (2) bzw. der Normalform (3) genügt.

Fenyő und Verf. haben in einer früheren Arbeit[2]) aus der Funktionalgleichung der „Bisymmetrie“ [2a])

$$z[z(x, y), z(u, v)] = z\{z(x, u), z(y, v)\}, \tag{6}$$

und aus der für Mittelwerte kennzeichnenden Gleichung der „Reflexivität“

$$z(t, t) = t, \tag{7}$$

die drei äquivalenten Differentialgleichungen

$$\frac{z_{xy}}{z_y} - \frac{z_{xx}}{z_x} = X(x) \qquad \text{(von } y \text{ unabhängig)}, \tag{8}$$

$$\frac{z_{xy}}{z_x} - \frac{z_{yy}}{z_y} = Y(y) \qquad \text{(von } x \text{ unabhängig)}, \tag{9}$$

$$\frac{z_{xy}}{z_x z_y} = Z(z) \qquad \text{(Funktion von } z \text{ allein)} \tag{10}$$

nebst der „Randbedingung“

$$z_y(t, t) = q \qquad \text{(konstant)} \tag{11}$$

abgeleitet. Man kann übrigens (8) und (9) durch

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{2'}$$

zusammenfassen.

Dadurch wurde bewiesen, daß die allgemeinste Gestalt der streng monotonen zweimal differenzierbaren Lösungen der Funktionalgleichungen (6) mit der Bedingung (7) (ebenso wie die Lösungen jeder der Differentialgleichungen (8), (9), (10), (2') mit den Randbedingungen (7) und (11)) die Funktion

$$z = F^{-1}[(1-q) F(x) + q F(y)] \tag{12}$$

ist; und zwar ist

$$F(t) = \int e^{-\int X(t)\,dt}\,dt = \int e^{-\int Y(t)\,dt}\,dt = \int e^{-\int Z(t)\,dt}\,dt \tag{13}$$

$$\left(= C\int f(t)\,dt = C\int g(t)\,dt\right).$$

Hieraus folgt auch, daß

$$X(t) = Y(t) = Z(t). \tag{14}$$

In § 1 der gegenwärtigen Arbeit werden wir zeigen, daß man schon aus der Funktionalgleichung (6) der Bisymmetrie [also ohne Bezugnahme

---

[2]) J. Aczél St. Fenyő, Über die Theorie der Mittelwerte, *diese Acta*, **11** (1948), S. 239–245.

[2a]) Herr G. Aumann nennt es „Konvexität gegen sich selbst“.

auf (7)] auf (8), (9), (10), (2'), (14), (13), sowie auf

$$(11') \qquad \frac{z_x(t,t)}{z_y(t,t)} = \text{konstant}$$

schließen kann. Hieraus ergibt sich ferner

$$(12') \qquad z = F^{-1}[aF(x) + bF(y) + c].$$

Da aus der Kommutativität (4) und der Assoziativität (5) die Bisymmetrie (6) leicht folgt, enthält § 1 auch einen neuen Beweis des *ursprünglichen* Satzes von N. H. ABEL [1]).

In § 3 untersuchen wir wieder eine andere Funktionalgleichung, die „Translationsgleichung"

$$(15) \qquad z[z(x,y),t] = z(x, y+t),$$

und beweisen, daß aus ihr direkt die Gleichung

$$(2'') \qquad \frac{z_x}{z_y} = f(x) \qquad \text{(von } y \text{ unabhängig)}$$

und die Randbedingung

$$(16) \qquad z(x,0) = x$$

folgt. — Die Gleichungen (8), (9), (10) sind auch jetzt gültig, aber mit

$$(14'') \qquad X(t) = Z(t), \quad Y(t) = 0.$$

So erhalten wir als die allgemeinste streng monotone differenzierbare Lösung von (15)

$$(17) \qquad z = F^{-1}[F(x) + y],$$

und zwar ist $F(t) = \int f(t)\,dt$.

Verwandt ist in diesen Sätzen die Gestalt der Lösungsfunktionen z ((3), (12), (12') und (17)): es handelt sich immer um eine „quasilineare Funktion", d. h. um eine Funktion, die durch Transformation mit F aus einer linearen Funktion entsteht. Die Differentialgleichungen (2'), (8), (9), (10) bleiben in allen drei behandelten Fällen gültig, nur werden sie in verschiedener Weise spezialisiert. Die allgemeinste Lösung dieser Gleichungen ist die in der Nomographie wichtige Funktion $z = H^{-1}[F(x) + G(y)]$.[2b])

Die Bedeutung dieser Sätze besteht darin, daß obzwar KALMÁR, MIKUSIŃSKI [5]) und Verf.[3])[4])[5]) sogar unter schwächeren Bedingungen (näm-

---

[2b]) Vgl. J. ACZÉL, Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen, *diese Acta,* **12 A** (1950), S. 73—80.

[3]) J. ACZÉL, On mean values, *Bulletin American Math. Soc.,* **54** (1948), S. 392—400.

[4]) J. ACZÉL, Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bulletin Société Math. France,* **76** (1948), S. 59—64.

[5]) Siehe die demnächst in den *Studia Mathematica* erscheinende Arbeit von L. KALMÁR, J. MIKUSIŃSKI und J. ACZÉL.

lich höchstens unter Voraussetzung der Stetigkeit statt der Differenzierbarkeit) bewiesen haben, daß die allgemeinste Lösung von (6) die Funktion (12'), die von (5) die Funktion (3)[4]), und die von (15) die Funktion (17)[5]) ist, doch geschah dies immer durch eine mehr oder weniger verwickelte Konstruktion, wogegen hier der Beweis einfach durch Derivieren erfolgt. Außerdem erhalten wir eine explizite Integraldarstellung (statt eines unendlichen Prozeßes) der „linearisierenden" Funktion $F(t)$. Ein weiterer Vorteil unserer vorliegenden Behandlungsweise ist, daß man von den beiden Fragen, ob eine vorgelegte Funktion die Lösung einer der oben angegebenen Differentialgleichungen bzw. der ursprünglichen Funktionalgleichungen ist, im allgemeinen die erste leichter entscheidet. Dies wird am Ende an Beispielen erläutert werden.

§ 1.

Satz 1. *Aus der Funktionalgleichung der Bisymmetrie*

$$z[z(x,y), z(u,v)] = z[z(x,u), z(y,v)] \tag{6}$$

folgen die Differentialgleichungen

$$\frac{z_{xy}}{z_y} - \frac{z_{xx}}{z_x} = X(x), \tag{8}$$

$$\frac{z_{xy}}{z_x} - \frac{z_{yy}}{z_y} = Y(y), \tag{9}$$

$$\frac{z_{xy}}{z_x z_y} = Z(z), \tag{10}$$

und auch

$$X(t) = Y(t) = Z(t) \tag{14}$$

(und umgekehrt). Daraus folgt, daß die allgemeinste streng monotone zweimal differenzierbare Lösung von (6) *(ebenso wie die von* (8), (9), (10), (14)*) gleich*

$$z = F^{-1}[aF(x) + bF(y) + c] \tag{12'}$$

ist mit

$$F(t) = \int e^{-\int X(t)\,dt}\,dt = \int e^{-\int Y(t)\,dt}\,dt = \int e^{-\int Z(t)\,dt}\,dt. \tag{13}$$

Zunächst beweisen wir (ohne Zuhilfenahme von (6)) die Äquivalenz der Gleichungen (8), (9), (10).

Erstens ist es klar, daß die Gleichung

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{2'}$$

mit den Gleichungen (8) und (9) äquivalent ist (der Beweis erfolgt durch Logarithmieren und Derivieren bzw. Integrieren; man sieht auch gleich, daß $f(x)=e^{-\int X(x)\,dx}$, $g(y)=e^{-\int Y(y)\,dy}$). Aus (10) folgt wieder

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-\int Z(z)\,dz} z_x\right]=e^{-\int Z(z)\,dz}\left[z_{xy}-z_x z_y\, Z(z)\right]=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-\int Z(z)\,dz} z_y\right]=0.$$

Integrieren und Division dieser Gleichungen ergibt (2'). Umgekehrt, es folgt aus (2') (da die Relation $z=z(x,y)$ y als eine implizite Funktion von x und z definiert, die nach x und z differenzierbar ist):

$$\frac{f(x)}{z_x}=\frac{g(y)}{z_y}=\varphi(x,y)=h(x,z).$$

Differenzieren wir $f(x)=z_x h(x,z)$ nach y und $g(y)=z_y h(x,z)$ nach x, so erhalten wir einerseits

$$h_x(x,z)=0,\quad \text{also}\quad h(x,z)=h(z),$$

andererseits die gewünschte Gleichung (10). (Wir sehen auch zugleich, daß $h(z)=e^{-\int Z(z)\,dz}$ und

$$\frac{f(x)}{z_x}=\frac{g(y)}{z_y}=h(z);\ z_x=\frac{f(x)}{h(z)},\ z_y=\frac{g(y)}{h(z)}.) \tag{18}$$

Also genügt es *eine* der Differentialgleichungen (8), (9), (10), (2') aus (6) abzuleiten, etwa (10).

Aus (6) folgt durch Differenzieren nach x, bzw. nach y:

$$\begin{aligned} &z_x[z(x,y),z(u,v)]\,z_x(x,y)=z_x[z(x,u),z(y,v)]\,z_x(x,u),\\ &z_x[z(x,y),z(u,v)]\,z_y(x,y)=z_y[z(x,u),z(y,v)]\,z_x(y,v)\end{aligned} \tag{19}$$

(z_x bzw. z_y bedeutet selbstverständlich immer die Derivierte nach der ersten bzw. nach der zweiten Veränderlichen, ungeachtet dessen, welcher Buchstabe an dieser Stelle steht). Setzt man $y=x$, $v=u$ und dividiert diese Gleichungen, so gewinnt man (mit der analogen, durch Derivieren nach u und v erhaltenen zweiten Gleichung zusammen):

$$\frac{z_x(x,x)}{z_y(x,x)}=\frac{z_x[z(x,u),z(x,u)]}{z_y[z(x,u),z(x,u)]}=\frac{z_x(u,u)}{z_y(u,u)} \tag{20}$$

(also ist (11') $\dfrac{z_x(t,t)}{z_y(t,t)}=\text{konstant}$).

Differenzieren wir (19) zuerst nach y, dann nach v, und dividieren die erhaltenen Gleichungen, so bekommen wir mit $u=x$, $v=y$:

$$\frac{z_{xx}[z(x,y),z(x,y)]}{z_{xy}[z(x,y),z(x,y)]}+\frac{z_x[z(x,y),z(x,y)]}{z_{xy}[z(x,y),z(x,y)]}\,\frac{z_{xy}}{z_x z_y}=\frac{z_x(y,y)}{z_y(y,y)}.$$

Zusammen mit (20) ergibt dies

$$\frac{z_{xy}}{z_x z_y}=\frac{z_{xy}[z(x,y),z(x,y)]}{z_y[z(x,y),z(x,y)]}-\frac{z_{xx}[z(x,y),z(x,y)]}{z_x[z(x,y),z(x,y)]}=Z(z).$$

Hieraus folgt nicht nur (10) sondern auch $X(t)=Z(t)$, und ganz analog folgt auch $Y(t)=Z(t)$, also (14). Damit ist bewiesen, daß aus (6) die Gleichungen (8), (9), (10), (2′), (14) folgen.

Da aus (10) die Gleichung (2′) folgt, und zwar wegen (14) in der Gestalt $\frac{z_x}{z_y}=k\frac{f(x)}{f(y)}$ (wir werden $k=\frac{a}{b}$ schreiben), so ist,

$$\varphi(x,y)=a\int f(x)\,dx+b\int f(y)\,dy=aF(x)+bF(y)+c$$

gesetzt,

$$\begin{vmatrix} z_x & z_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{vmatrix}=0, \quad \text{also} \quad z=G[aF(x)+bF(y)+c];$$

mit Rücksicht an (18) und (14) ergibt sich

$$z=F^{-1}[aF(x)+bF(y)+C], \tag{12′}$$

$$F(t)=\int e^{-\int X(t)\,dt}dt=\int e^{-\int Y(t)\,dt}dt=\int e^{-\int Z(t)\,dt}dt, \tag{13}$$

w. z. b. w.

Das aus (12′) offensichtlich einerseits (6), andererseits (8), (9), (10), (14) mit (13) folgen, so ist damit auch bewiesen, daß aus den Differentialgleichungen (8), (9), (10), (14) sich auch (6) ergibt und daß zum Bestehen von (6) bzw. von (8), (9), (10), (14) notwendig und hinreichend ist, daß z die Gestalt (12′) hat. Natürlich reicht auch *eine* der Gleichungen (2′), (8), (9), (10) hin, etwa (10), hierzu muß aber (14) in die Gestalt

$$\frac{z_{xy}}{z_x z_y}=\frac{z_{xy}[z(x,y),z(x,y)]}{z_y[z(x,y),z(x,y)]}-\frac{z_{xx}[z(x,y),z(x,y)]}{z_x[z(x,y),z(x,y)]}= \tag{10′}$$
$$=\frac{z_{xy}[z(x,y),z(x,y)]}{z_x[z(x,y),z(x,y)]}-\frac{z_{yy}[z(x,y),z(x,y)]}{z_y[z(x,y),z(x,y)]}$$

umgeschrieben werden.

§ 2.

Satz 2. *Aus der Funktionalgleichung der Assoziativität*

$$z[z(x,y);t]=z[x,z(y,t)] \tag{5}$$

folgen die Differentialgleichungen (8), (9), (10), (2′), (18) *und auch* (14), *sowie*

$$f(t)=g(t)=h(t) \tag{14′}$$

(und umgekehrt).

Die allgemeinste streng monotone differenzierbare Lösung von (5) *ist, ebenso wie die von* (18) *mit* (14′),

$$z(x,y)=F^{-1}[F(x)+F(y)] \tag{3}$$

mit

$$(13)\qquad F(t)=\int e^{-\int X(t)\,dt}\,dt=\int e^{-\int Y(t)\,dt}\,dt=\int e^{-\int Z(t)\,dt}\,dt=$$
$$=C\int f(t)\,dt=C\int g(t)\,dt.$$

(*Daraus folgt* (2).)

Wegen der in § 1 bewiesenen Äquivalenz der Gleichungen (8), (9), (10), (2'), genügt es wieder (10) und (14') zu bewiesen.

Differenzieren wir (5) zuerst nach y, dann nach t, und dividieren wir die erhaltenen Gleichungen, so wird

$$(21)\qquad \frac{z_x(y,t)}{z_y(y,t)}=\frac{z_x[z(x,y),t]\,z_y}{z_y[z(x,y),t]}.$$

Differenzieren wir dagegen (5) zuerst nach x:

$$z_x[x,z(y,t)]=z_x[z(x,y),t]\,z_x(x,y),$$

dann dies weiter nach y bzw. t, und dividieren die so erhaltenen Gleichungen, so erhalten wir

$$\frac{z_x(y,t)}{z_y(y,t)}=\frac{z_{xx}[z(x,y),t]}{z_{xy}[z(x,y),t]}z_y+\frac{z_x[z(x,y),t]}{z_{xy}[z(x,y),t]}\cdot\frac{z_{xy}}{z_x}.$$

Der Vergleich mit (2') ergibt

$$(22)\qquad \frac{z_{xy}(x,y)}{z_x(x,y)\,z_y(x,y)}=\frac{z_{xy}[z(x,y),t]}{z_y[z(x,y),t]}-\frac{z_{xx}[z(x,y),t]}{z_x[z(x,y),t]}.$$

Da hier t konstant gewählt werden kann, so folgt $\frac{z_{xy}}{z_x z_y}=Z(z)$, also (10); anderseits bedeutet dies (da die linke Seite von (22) nicht von t abhängt):

$$\frac{z_{xy}(z,t)}{z_y(z,t)}-\frac{z_{xx}(z,t)}{z_x(z,t)}=Z(z)=X(z);$$

also gilt (8) und auch $Z(t)=X(t)$; ähnlich läßt sich auch (9) und $Y(t)=Z(t)$, also (14) ableiten.

Andererseits ergibt sich aus (21) und (22)

$$z_y=\frac{z_x(y,\beta)}{z_y(y,\beta)}\bigg/\frac{z_x(z,\beta)}{z_y(z,\beta)}=\frac{\exp\int\frac{\partial}{\partial y}\left[\log\frac{z_x(y,\beta)}{z_y(y,\beta)}\right]dy}{\exp\int\frac{\partial}{\partial z}\left[\log\frac{z_x(z,\beta)}{z_y(z,\beta)}\right]dz}=\frac{\exp\int Y(x)\,dx}{\exp\int Y(z)\,dz}=$$
$$=\frac{g(y)}{g(z)}=\frac{k\exp\int X(y)\,dy}{k\exp\int X(z)\,dz}=\frac{f(y)}{f(z)}$$

und ebenso

$$z_x=\frac{z_y(\alpha,x)}{z_x(\alpha,x)}\bigg/\frac{z_y(\alpha,z)}{z_x(\alpha,z)}=\frac{\exp\int X(x)\,dx}{\exp\int X(z)\,dz}=\frac{f(x)}{f(z)},$$

also (18) und (14') $\left(\text{und auch } \frac{z_x(z,\beta)}{z_y(z,\beta)}=k\,\frac{z_y(\alpha,z)}{z_x(\alpha,z)}\right)$. Auch (2) kann hieraus leicht erhalten werden.

Da aus (18) und (14') mit geeigneter Wahl der Funktion $F(t)$ bzw der Integrationskonstanten in $F(t)=c\int f(t)\,dt$ offensichtlich $z=F^{-1}[F(x)+F(y)]$ folgt, ist damit alles bewiesen.

§ 3.

Satz 3. *Aus der für die Translationen kennzeichnende Funktionalgleichung*

$$z[z(x,y),t]=z(x,y+t) \tag{15}$$

folgt die Differentialgleichung

$$\frac{z_x}{z_y}=f(x) \tag{2''}$$

und die Randbedingung

$$z(x,0)=x \tag{16}$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichungen (8), (9), (10) *nebst der Bedingung*

$$Z(t)=X(t),\quad Y(t)=0, \tag{14''}$$

und umgekehrt. Die allgemeinste streng monotone differenzierbare Lösung von (15) (*ebenso wie von* (2'') *und* (16), *bzw. von einer der Gleichungen* (8), (9), (10) *nebst* (14'')) *ist*

$$z=F^{-1}[F(x)+y] \tag{17}$$

mit

$$F(x)=\int f(x)\,dx.$$

(16) folgt aus (15) unmittelbar wegen der strengen Monotonie von z (man setze $y=0$).

Um (2'') zu erhalten, differenzieren wir (15) zuerst nach x, dann nach y, und dividieren die erhaltenen Gleichungen, so wird

$$\frac{z_x(x,y)}{z_y(x,y)}=\frac{z_x(x,y+t)}{z_y(x,y+t)};$$

setzt man $t=C-y$, so erhält man

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{z(x,C)}{z_y(x,C)}=f(x). \tag{2''}$$

Umgekehrt folgt aus (2'') mit $F(x)=\int f(x)\,dx$:

$$\begin{vmatrix} z_x & z_y \\ [F(x)+y]_x & [F(x)+y]_y \end{vmatrix}=0, \text{ also } z=G[F(x)+y];$$

aus (16) folgt $G(t)=F^{-1}(t)$, also (17); und da (17) die Gleichung (15) und auch (2'') mit (16) offensichtlich erfüllt, so ist damit alles bewiesen.

Wir bemerken hier, daß in diesem Falle auch die direkte Konstruktion (siehe Einleitung) nicht allzu verwickelt ist; es ist nämlich $F^{-1}(t) = z(C, t)$.[5]

Übrigens ist es leicht zu sehen[6], wie es mit der Eindeutigkeit von F und von a, b, c in (12′), (3), (17) steht: in (12′) sind a und b eindeutig bestimmt und mit $F(t)$ zusammen sind die sämtlichen Lösungen durch $G(t) = AF(t) + B$ angegeben falls $c' = Ac + B(1-a-b)$. In (3) bzw. (16) sind $G(t) = AF(t)$, bzw. $G(t) = F(t) + B$ die sämtlichen Lösungen.

Beispiele.

Wie wir sehen werden, ist in der Praxis immer die Nachprüfung der Gleichung (2′) (bzw. (2), (2″)) am leichtesten; an ihr sieht man auch gleich ob die Funktion von der Form (17) oder aber von der auch (3) in sich enthaltenden Form (12′) ist. Die Entscheidung zwischen (3) und (12′) kann dann unmitelbar geschehen.

1) $z = Cx^a y^b$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{aCx^{a-1}y^b}{bCx^a y^{b-1}} = \frac{a}{b}\,\frac{1/x}{1/y}.$$

Die Funktion z erfüllt (2′), ist also bisymmetrisch; da sie aber nicht einmal (2) erfüllt, ist sie gewiß nicht assoziativ. Man hat $F(x) = \int \frac{dx}{x} = \log x$. Tatsächlich ist $z = Cx^a y^b = e^{a\log x + b\log y + c}$ $(c = \log C)$.

2) $z = xy^2 + 2xy + y^2 + x + 2y$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{y^2+2y+1}{2xy+2x+2y+2} = \frac{1}{2}\,\frac{(y+1)^2}{(x+1)(y+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1/(x+1)}{1/(y+1)},$$

also ist z wieder bisymmetrisch ohne assoziativ zu sein. Man hat

$$F(x) = \int \frac{dx}{x+1} = \log(x+1), \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{2}; \quad z = e^{\log(x+1) + 2\log(y+1)} - 1.$$

3) $z = \dfrac{xy+1}{y-x}$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{(y-x)y + xy + 1}{(y-x)x - (xy+1)} = -\frac{1/(x^2+1)}{1/(y^2+1)};$$

deshalb besteht auch hier Bisymmetrie ohne Assoziativität;

---

[6]) Vgl. J. Aczél, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Commentarii Math. Helvetici*, **21** (1948), S. 247—252.

$$F(x)=\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x,\quad \frac{a}{b}=-1;$$

$$z=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} y+\frac{\pi}{2}\right).$$

4) $z=x^{\log y}$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{(\log y)\,x^{\log y-1}}{x^{\log y}(\log x)\frac{1}{y}}=\frac{1/(x\log x)}{1/(y\log y)},$$

also ist z bisymmetrisch; ob sie auch assoziativ ist, ist aber hiermit noch nicht entschieden. Man hat

$$F(x)=\int\frac{dx}{x\log x}=\int\frac{d(e^t)}{e^t\log e^t}=\int\frac{dt}{t}=\log t=\log\log x,$$

$$z=e^{e^{\log\log x+\log\log y}};$$

z ist also auch assoziativ.

5) $z=x+y-xy$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{1-y}{1-x}=\frac{1/(1-x)}{1/(1-y)}.$$

(2) ist erfüllt: $F(x)=\int\frac{dx}{1-x}=\log(1-x)$, $z=1-e^{\log(1-x)+\log(1-y)}$, also ist z assoziativ.

6) $z=\frac{xy-1}{x+y}$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{(x+y)\,y-(xy-1)}{(x+y)\,x-(xy-1)}=\frac{-1/(1+x^2)}{-1/(1+y^2)}.$$

(2) ist erfüllt und man hat

$$F(x)=-\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,ctg} x,\quad z=\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x+\operatorname{arc\,ctg} y);$$

z ist also assoziativ.

7) $z=x\cos y+\sqrt{1-x^2}\sin y$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{\sqrt{1-x^2}\cos y-x\sin y}{(-x\sin y+\sqrt{1-x^2}\cos y)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

dies hat die Form (2″), also gilt die Translationsgleichung. Man hat

$$F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x,\quad z=\sin(\arcsin x+y).$$

8) $z=\frac{x}{1+xy}$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{1+xy-xy}{-x^2}=-\frac{1}{x^2} \qquad \text{(siehe (2''))},$$

also gilt die Translationsgleichung; man hat

$$F(x)=-\int\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{x}, \quad z=\frac{1}{\frac{1}{x}+y}.$$

9) $z=y^2+x+2y\sqrt{x}$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{1+y/\sqrt{x}}{2y+2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{(siehe (2''))}.$$

Man hat

$$F(x)=\int\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}, \quad z=(\sqrt{x}+y)^2,$$

z ist also eine Translationsfunktion.

10) $z=x^{e^y}$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{e^y x^{e^y-1}}{x^{e^y}e^y\log x}=\frac{1}{x\log x} \qquad \text{(siehe (2''))};$$

man hat

$$F(x)=\int\frac{dx}{x\log x}=\log\log x, \quad z=e^{e^{\log\log x+y}};$$

z ist also wieder eine Translationsfunktion.

(Eingegangen am 1. September 1949.)

Sur un théorème de T. Szele.

Par J.-P. SERRE à Paris.

Appelons *corps premier* un corps n'ayant d'autre sous-corps que lui-même; on sait que tout corps premier est isomorphe, soit au corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, soit au corps $\mathbf{Z}/(p)$ des entiers modulo p, où p est un nombre premier. Tout corps, commutatif ou non, contient un corps premier et un seul.

1. On a le

Théorème 1. *Les groupes additifs des corps premiers sont les seuls groupes abéliens $\mathfrak{G}$ jouissant de la propriété:*

(E_2) *Tout endomorphisme de $\mathfrak{G}$ distinct de 0 est un automorphisme.*

T. SZELE, à qui ce théorème est dû[1]), l'avait démontré en utilisant des résultats de BAER sur les groupes abéliens. En voici une démonstration plus élémentaire:

Soit $\mathfrak{A}$ l'anneau des endomorphismes de $\mathfrak{G}$; d'après la propriété (E_2) c'est un corps et $\mathfrak{G}$ se trouve donc muni d'une structure d'espace vectoriel à gauche sur $\mathfrak{A}$, donc aussi sur le corps premier $\mathbf{P}$ contenu dans $\mathfrak{A}$. On vérifie immédiatement que tout endomorphisme de $\mathfrak{G}$ est $\mathbf{P}$-linéaire; le $\mathbf{P}$-espace vectoriel $\mathfrak{G}$ doit donc être tel que tous ses endomorphismes (non nuls) soient des automorphismes, ce qui n'est possible que s'il est de dimension 1, ce qui achève la démonstration.

2. La méthode de démonstration précédente s'applique à d'autres problèmes analogues. Par exemple, démontrons le théorème suivant:

Théorème 2. *Pour qu'un groupe abélien $\mathfrak{G}$ soit isomorphe au groupe additif d'un espace vectoriel (sur un corps quelconque), il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions équivalentes suivantes:*

(E_3) *Tout sous-groupe $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$, possédant la propriété que $e(\mathfrak{H})\subset\mathfrak{H}$ pour tous les endomorphismes e de $\mathfrak{G}$, est égal à $\{0\}$ ou à $\mathfrak{G}$.*

(E_4) *Quels que soient $x, y\in\mathfrak{G}$, tous deux différents de 0, il existe un automorphisme s de $\mathfrak{G}$ tel que $s(x)=y$.*

Il est clair que (E_4) entraîne (E_3) et que le groupe additif d'un espace vectoriel vérifie (E_4). Nous avons donc seulement à montrer que tout groupe abélien $\mathfrak{G}$ vérifiant (E_3) est le groupe additif d'un espace vectoriel.

Or, soit $\mathfrak{G}$ un tel groupe, $\mathfrak{A}$ l'anneau de ses endomorphismes et $\mathfrak{K}$ le centre de $\mathfrak{A}$. Si $u\in\mathfrak{K}$ ($u\neq 0$), les sous-groupes $u(\mathfrak{G})$ et $u^{-1}(0)$,

---

1) T. SZELE, Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen, *ces Acta*, **13** (1949), p. 54—56.

— ce dernier est le "noyau" (Kern) de u — possèdent la propriété formulée dans la condition (E_3), comme le montre un calcul immédiat. Il résulte alors de (E_3) que u est un automorphisme, c'est-à-dire que $\mathfrak{K}$ est un *corps*[2]). Le groupe $\mathfrak{G}$ se trouve alors muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathfrak{K}$, ce qui démontre le théorème.

Remarque. Pour qu'un groupe abélien $\mathfrak{G}$ soit isomorphe au groupe additif d'un espace vectoriel, il faut et il suffit qu'il soit somme directe de sous-groupes tous isomorphes au groupe additif d'un même corps premier. En particulier, si $\mathfrak{G}$ est *fini*, il est isomorphe à $\mathbf{Z}/(p)+\ldots+\mathbf{Z}/(p)$.

3. On vient de voir que les propriétés (E_3) et (E_4) étaient équivalentes pour un groupe *abélien* $\mathfrak{G}$. Il n'en va plus de même en général comme le montre l'exemple d'un groupe simple fini, qui vérifie toujours (E_3) mais jamais (E_4) s'il n'est abélien[3]).

4. On peut généraliser les résultats précédents en considérant, au lieu de groupes abéliens, des *modules unitaires* sur un anneau commutatif $\mathfrak{C}$ à élément unité. Les propriétés (E_i) $(i=2, 3, 4)$ gardent un sens, à condition d'entendre par endomorphisme et automorphisme, un endomorphisme et un automorphisme de la structure de $\mathfrak{C}$-module.

Soit alors $\mathfrak{p}$ un idéal de $\mathfrak{C}$, distinct de $\mathfrak{C}$ mais non nécessairement de $\{0\}$; on sait que $\mathfrak{p}$ est dit *premier* si $\mathfrak{C}/\mathfrak{p}$ est un anneau d'intégrité. Dans ce cas, nous appellerons $\mathbf{Q}_\mathfrak{p}$ le corps des fractions de l'anneau $\mathfrak{C}/\mathfrak{p}$; l'image de $\mathfrak{C}$ dans $\mathbf{Q}_\mathfrak{p}$ engendre $\mathbf{Q}_\mathfrak{p}$, et réciproquement, tout corps jouissant de cette propriété peut être obtenu de cette manière. On notera que tout espace vectoriel sur $\mathbf{Q}_\mathfrak{p}$ (et en particulier $\mathbf{Q}_\mathfrak{p}$ lui-même) peut être considéré comme un $\mathfrak{C}$-module.

Ces notations étant posées, on a:

Théorème 1'. *Tout $\mathfrak{C}$-module vérifiant (E_2) est isomorphe à l'un des $\mathfrak{C}$-modules $\mathbf{Q}_\mathfrak{p}$.*

Théorème 2'. *Pour qu'un $\mathfrak{C}$-module soit isomorphe à un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{Q}_\mathfrak{p}$, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions équivalentes (E_3) et (E_4).*

Les démonstrations étant entièrement analogues à celles données plus haut dans le cas des groupes abéliens (où $\mathfrak{C}=\mathbf{Z}$, anneau des entiers), il n'a pas été jugé utile de les reproduire.

(Reçu le 12 juin 1950)

---

[2]) Le lecteur reconnaîtra là le raisonnement classique du lemme de Schur.

[3]) Le problème de déterminer tous les groupes vérifiant la condition (E_4) m'a été posé par M. P. Jaffard qui l'avait résolu dans le cas où le groupe $\mathfrak{G}$ considéré est fini, mais n'est pas supposé commutatif. En fait, il montrait que $\mathfrak{G}$ est nécessairement commutatif en utilisant la propriété bien connue des p-groupes d'avoir un centre non réduit à l'élément neutre.

Über drei wichtige Gruppen.

Von T. SZELE in Debrecen und I. SZÉLPÁL in Szeged.

Unter einer Gruppe verstehen wir im folgenden stets eine additive Abelsche Gruppe. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{R}^+$, $\mathfrak{Z}(p)$, $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ bzw. die Additionsgruppe des rationalen Zahlkörpers, die Gruppe p-ter Ordnung und PRÜFERS Gruppe „vom Typ (p^∞)“ [1]), definiert als die durch die unendlich vielen Elemente $A_1, A_2, \ldots$ von der Eigenschaft

$$(1) \qquad A_1 \neq 0, \; pA_1 = 0, \; pA_2 = A_1, \; pA_3 = A_2, \ldots$$

erzeugte Gruppe. Dabei bezeichnet p eine beliebige Primzahl. Diese drei Gruppen [2]) besitzen gewiße merkwürdige Extremaleigenschaften, durch welche sie sowohl einzeln als auch in ihrer Gesamtheit — sogar auch jedes Paar von ihnen — unter allen Gruppen ausgezeichnet sind. Diesbezüglich führen wir folgende bekannte Tatsachen a)—f) an:

a) $\mathfrak{Z}(p)$ ist die einzige Gruppe ohne eigentliche Untergruppen.

b) $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ ist die einzige unendliche Gruppe mit lauter endlichen echten Untergruppen. [15].

c) $\mathfrak{R}^+$ ist der (eindeutig bestimmte) „Träger“ sämtlicher *lokal-zyklischer* [3]) Gruppen in dem Sinne, daß die Menge der lokal-zyklischen Gruppen mit derjenigen der homomorphen Bilder der Untergruppen von $\mathfrak{R}^+$ übereinstimmt [6], [7].

d) $\mathfrak{Z}(p)$ und $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ sind die sämtlichen Gruppen $\mathfrak{G}$ von der Eigenschaft, daß jedes homomorphe Bild (mit mehr als einem Element) von $\mathfrak{G}$ isomorph zu $\mathfrak{G}$ ist [14]. — Außerdem sind diese Gruppen auch die sämtlichen nicht-torsionsfreien Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring [10].

e) $\mathfrak{Z}(p)$ und $\mathfrak{R}^+$ sind die sämtlichen Gruppen $\mathfrak{G}$ von der Eigenschaft, daß jeder vom Nulloperator verschiedene Endomorphismus von $\mathfrak{G}$ ein Automorphismus ist [9], [8]. — Außerdem sind dieselben Gruppen auch als die Additionsgruppen der Primkörper gekennzeichnet.

---

1) Siehe die Arbeit [5]. Die eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Note.

2) Genauer gesprochen bezeichnen $\mathfrak{Z}(p)$ und $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ je eine Klasse von unendlich vielen Gruppen.

3) Nach KUROSCH nennt man eine Gruppe lokal-zyklisch, falls jedes endliche System ihrer Elemente in einer zyklischen Untergruppe enthalten ist.

f) $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ und $\mathfrak{R}^+$ sind die sämtlichen minimalen *algebraisch-abgeschlossenen*[4]) Gruppen [16], [2], [11]. — Folglich sind sie nach einem wichtigen Satz von BAER auch durch die folgende Eigenschaft gekennzeichnet: Diese Gruppen — aber keine echten Untergruppen von ihnen — sind direkte Summanden von jeder sie enthaltenden Gruppe [1], [3].

Zweck dieser kleinen Note ist zu zeigen, daß die erwähnten drei wichtigen Gruppen auch eine gemeinsame charakteristische Eigenschaft haben. Nennen wir nämlich nach BAER [4] eine Gruppe *vollständig invariant*, wenn sie durch jeden — vom Nulloperator verschiedenen — Endomorphismus *auf* sich abgebildet wird, so gilt der

Satz. $\mathfrak{Z}(p)$, $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ *und* $\mathfrak{R}^+$ *sind die sämtlichen vollständig invarianten Abelschen Gruppen*[5]).

Der Beweis ergibt sich durch eine einfache Kombination der in [9] und [14] verwendeten Schlüße. Sei $\mathfrak{G}$ eine vollständig invariante Gruppe. Da die Abbildung $X \to nX$ $(X \in \mathfrak{G})$ für eine ganze Zahl n ein Endomorphismus von $\mathfrak{G}$ ist, gilt für jedes n entweder $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$, oder $n\mathfrak{G} = \{0\}$. Demnach unterscheiden wir zwei Fälle.

Erster Fall: *Es gebe ein* n (>0) *mit* $n\mathfrak{G} = \{0\}$. Dann muß das kleinste solche $n = p$ eine Primzahl sein[6]). Auf Grund von $p\mathfrak{G} = \{0\}$ hat in diesem Falle jedes Element $\neq 0$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ die Ordnung p und somit zerfällt $\mathfrak{G}$ in eine direkte Summe von Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$. Für eine vollständig invariante Gruppe vom Typ $\mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{G}^*$ gilt aber notwendigerweise $\mathfrak{G}^* = \{0\}$. In diesem Falle ergibt sich also $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p)$.

Zweiter Fall: *Es gelte für jedes* n (>0) *die Gleichung* $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$. Dann gilt auch für die Untergruppe $\mathfrak{T}$ bestehend aus sämtlichen Elementen endlicher Ordnung von $\mathfrak{G}$ offenbar $n\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$. Ist also $\mathfrak{T} \neq \{0\}$, so folgt aus $p\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$ für ein Element A_1 von der Primzahlordnung p die Existenz einer Folge von Elementen $A_2, A_3, \ldots$ in $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft (1). Diese Elemente erzeugen eine Untergruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ in $\mathfrak{G}$, die nach BAER[7]) ein direkter Summand von $\mathfrak{G}$ ist. In $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p^\infty) + \mathfrak{G}^*$ muß aber der Summand $\mathfrak{G}^*$ (wie oben) verschwinden, woraus $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p^\infty)$ folgt. — Im entgegengesetzten Fall $(\mathfrak{T} = \{0\})$ enthält die torsionsfreie

---

4) In vollständiger Analogie mit der Theorie der kommutativen Körper kann man eine Gruppe $\mathfrak{G}$ algebraisch-abgeschlossen nennen, wenn alle Gleichungen $nX = A \in \mathfrak{G}$ eine Lösung X in $\mathfrak{G}$ besitzen, d. h. wenn $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gilt. BAER [2] nennt die Gruppen von dieser Eigenschaft „komplett". Wir wollen aber die obige Bezeichnung beibehalten, denn die Abelschen Gruppen weisen in dieser Hinsicht eine tiefgehende Analogie mit der Steinitzschen Körpertheorie auf [11].

5) Gleichwertig damit ist: Die obigen drei Gruppen sind die sämtlichen Abelschen Gruppen ohne homomorphe eigentliche Untergruppen.

6) Vgl. [9].

7) Vgl. [1] Theorem 1. 1, S. 766.

algebraisch-abgeschlossene Gruppe $\mathfrak{G}$ nach [9] eine Untergruppe $\mathfrak{R}^+$, die nach BAER[7]) ein direkter Summand von $\mathfrak{G}$ ist. In der Darstellung $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}^+ + \mathfrak{G}^*$ verschwindet aber der Summand $\mathfrak{G}^*$, womit $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}^+$ also auch der Satz bewiesen ist.

Bemerkung. Die obigen drei Gruppen spielen auch in einer ganz anderen Hinsicht eine ausgezeichnete Rolle. Betrachten wir alle möglichen Typen von (nicht notwendig kommutativen) Ringen, die eine gegebene Gruppe $\mathfrak{G}$ zur Additionsgruppe haben, die sich also auf $\mathfrak{G}$ „aufbauen" lassen. Offenbar läßt sich auf jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ ein Ring „von trivialer multiplikativen Struktur" — üblicherweise *Zeroring* genannt — aufbauen, indem nämlich jedes Elementenprodukt gleich Null ist. Nun sind die direkten Summen $\Sigma \mathfrak{Z}(p_\varkappa^\infty)$ unter allen nicht-torsionsfreien Gruppen dadurch ausgezeichnet, daß sich auf ihnen nur ein einziger Ring (der Zeroring) aufbauen läßt [12]. Die Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$ und $\mathfrak{R}^+$ haben in dieser Hinsicht die kennzeichnende Eigenschaft, daß sich auf ihnen genau zwei Ringtypen, von denen der eine nullteilerfrei (sogar Körper) ist, aufbauen lassen [13].

Literatur.

[1] R. BAER, The subgroup of the elements of finite order of an abelian group, *Annals of Math.*, (2) **37** (1936), S. 766—781.

[2] R. BAER, Abelian groups without elements of finite order, *Duke Math. Journal*, **3** (1937), S. 68—122.

[3] R. BAER, Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group, *Bulletin American Math. Society*, **46** (1940), S. 800—806.

[4] R. BAER, The higher commutator subgroups of a group, *Bulletin American Math. Society*, **50** (1944), S. 143—160.

[5] H. PRÜFER, Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **17** (1923), S. 35—61.

[6] H. PRÜFER, Theorie der Abelschen Gruppen. I. Grundeigenschaften, *Math. Zeitschrift*, **20** (1924), S. 165—187.

[7] L. RÉDEI und T. SZELE, Die Ringe „ersten Ranges", *diese Acta*, **12 A** (1950), S. 18—29.

[8] J.-P. SERRE, Sur un théorème de T. Szele, *diese Acta*, **13** (1950), S. 190—191.

[9] T. SZELE, Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen, *diese Acta*, **13** (1949), S. 54—56.

[10] T. SZELE, Über die Abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring, *Publicationes Math. Debrecen*, **1** (1949), S. 89—91.

[11] T. SZELE, Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen, *Journal für die reine u. angew. Math.* (im Erscheinen).

[12] T. SZELE, Zur Theorie der Zeroringe, *Math. Annalen*, **121** (1949), S. 242—246.

[13] T. SZELE, Gruppentheoretische Beziehungen der Primkörper, *Math. Zeitschrift* (im Erscheinen).

[14] I. SZÉLPÁL, Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Homomorphismen, *diese Acta*, **13** (1949), S. 51—53.

[15] I. SZÉLPÁL, Die unendlichen Abelschen Gruppen mit lauter endlichen echten Untergruppen, *Publicationes Math. Debrecen*, **1** (1949), S. 63—64.

[16] L. ZIPPIN, Countable torsion groups, *Annals of Math.*, (2) **36** (1935), S. 86—99.

(Eingegangen am 16. August 1950.)

Über den algebraischen Funktionenkörper der Fermatschen Gleichung.

LÁSZLÓ RÉDEI zum 50. Geburtstag.

Von HELMUT HASSE in Berlin.

Einleitung.

Im Hinblick auf die große Fermatsche Vermutung erscheint es mir von Interesse, den durch die homogene Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = 0$$

definierten algebraischen Funktionenkörper vom Standpunkt der allgemeinen Theorie der algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten aus zu betrachten. In den zahlreichen bisher zugrunde gelegten Ansätzen zur Behandlung der Fermatschen Gleichung, angefangen von der descente infinie über elementare Kongruenzbetrachtungen bis zum Einsatz der Idealtheorie und des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, steckt nämlich jedesmal ein rein-algebraischer Kern, auf den sich dann die spezifisch-arithmetischen Schlüße aufbauen. Ebenso nun, wie etwa für den Aufbau der Arithmetik der Algebren die rein-algebraische Strukturtheorie der Algebren grundlegend und methodisch richtunggebend ist, scheint es mir auch beim Fermatschen Problem naturgemäß zu sein, sich für den rein-algebraischen Kern an den invarianten Begriffsbildungen und Struktursätzen hier der Theorie der algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten zu orientieren. Soweit ich sehe, ist das bisher nirgends geschehen.

Die nachstehenden Betrachtungen sollen ein erster Beitrag in dieser Richtung sein. Ich lege dabei die Theorie der algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten in ihrer arithmetischen Gestalt zugrunde[1]. Zunächst zeige ich, wie sich die trivialen Lösungen der Fermatschen Gleichung d. h. die, in denen eine Koordinate Null ist, in jene Theorie

[1]) Insbesondere verwende ich ohne nachmalige Erklärung einige Begriffe und Ergebnisse aus meiner Arbeit: Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionskörper, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **52** (1942), S. 1–48.

einordnen. Ferner bestimmte ich explizit den Modul der ganzen Differentiale, berechne mit seiner Hilfe einige für die algebraische Behandlung wichtige Dimensionszahlen und zeige, daß die durch die homogene Grundgleichung gegebenen Koordinaten die algebraischen Punkte des zugeordneten Funktionenkörpers eindeutig beschreiben. Weiter gehe ich auf die Frage nach den Weierstraßpunkten dieses Funktionenkörpers ein. Hier stellt sich die überraschende Tatsache heraus, daß neben den Punkten, die den trivialen Grundgleichunglösungen entsprechen, für $n>4$ noch weitere Weierstraßpunkte existieren. Eine explizite Angabe dieser Punkte ist mir leider nicht gelungen; sie würde deswegen von Interesse sein, weil es sich ja dabei um algebraisch-ausgezeichnete algebraische Lösungen der Fermatschen Gleichung handelt. Schließlich mache ich noch einige Angaben zu einer weiteren wichtigen Fragestellung, nämlich der expliziten Bestimmung des additiven Rechenschemas der rationalen g-gliedrigen Punktgruppen, wo $g=1+2+\cdots+(n-2)$ das Geschlecht des Funktionenkörpers ist, und damit des Rechnens in der Divisorenklassengruppe nullten Grades. Daß dieses mit der Fermatschen Gleichung invariant verbundene Rechenschema sich in den bisherigen rein-algebraischen Ansätzen zur Behandlung des Fermatschen Problems noch niemals eingestellt hat, ist im Hinblick auf die Fülle solcher mehr oder weniger weittragenden Ansätze einigermaßen erstaunlich. Allerdings ist es ja erst durch die in neuerer Zeit von A. WEIL[2]) bewiesene Endlichkeit des Ranges der Additionsgruppe der rationalen g-gliedrigen Punktgruppen nahegelegt worden, die rationalen Lösungen der Fermatschen Gleichung unter den rationalen g-gliedrigen Punktgruppen vermöge einer Basisdarstellung als diejenigen mit g gleichen Punkten aufzusuchen.

1. Erzeugung.

Gegeben seien eine natürliche Zahl $n>1$ (später sogar $n>2$ und ein Körper Ω, von dem einfachheitshalber vorausgesetzt sei, daß seine Charakteristik $\chi(\Omega)\nmid n$ (später sogar $\chi(\Omega)=0$) ist[3]). Außerdem soll Ω die $2n$-ten Einheitswurzeln enthalten[4]) Betrachtet werde der durch die

[2]) A. WEIL, L'arithmétique sur les courbes algébriques, *Acta Math.*, **52** (1928), S. 281—315.

[3]) Der hier ausgeschlossene Fall einer Primzahlcharakteristik $\chi(\Omega)|n$ würde weitere algebraische Invarianten liefern, wie sie etwa im Falle eines Primzahlgrades n der vielfach herangezogenen Betrachtung der Fermatschen Gleichung als Kongruenz mod. n entsprechen. Der Kürze des zur Verfügung stehenden Raumes halber muß ich hier von der Betrachtung dieses Falles absehen.

[4]) Es wäre keine wesentliche Einschränkung, wenn man Ω von vornherein mit dem Körper dieser Einheitswurzeln über dem Primkörper einer Charakteristik $\chi\nmid n$ identifiziert.

homogene Grundgleichung

$$x^n + y^n + z^n = 0$$

definierte algebraische Funktionenkörper einer Unbestimmten

$$K = \Omega(x : y : z).$$

Wegen $\chi(\Omega) \nmid n$ ist die Grundgleichung über Ω absolut irreduzibel, so daß Ω der genaue Konstantenkörper von K ist.

Die homogenen Erzeugenden x, y, z seien in K selbst gewählt; sie liegen dann bis auf Homogonitätssubstitutionen

$$x, y, z \to \frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$$

mit willkürlichem $t \neq 0$ aus K fest. Nach der allgemeinen Theorie der homogenen Erzeugung hat man

$$x \cong \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{U}}, \quad y \cong \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{U}}, \quad z \cong \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{U}},$$

wo der Divisor $\mathfrak{U}$ von K/Ω durch die größte gemeinsame Teilerbeziehung

$$(x, y, z) = \frac{1}{\mathfrak{U}}$$

bestimmt ist und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ganze teilerfremde Divisoren von K/Ω sind, die im Hinblick auf die Grundgleichung sogar paarweise teilerfremd sind.

Die Klasse U von $\mathfrak{U}$ liegt durch die gegebene Erzeugung eindeutig fest. Bei Anwendung der Homogenitätssubstitutionen auf x, y, z durchläuft $\mathfrak{U}$ alle Divisoren aus U, während die ebenfalls zu U gehörigen Divisoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ungeändert bleiben. Wegen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = 1$ ist die Klasse U primitiv, und wegen $n > 1$ sind die ganzen Divisoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{U}$ über Ω linear unabhängig, so daß jedenfalls

$$\dim U \geqq 3$$

ist.

Durch eine Homogenitätssubstitution auf x, y, z kann $\mathfrak{U}$ als ganzer Divisor aus U normiert werden, also so, daß $\mathfrak{U}$ der Hauptnenner von x, y, z ist. Dies sei im folgenden durchweg vorausgesetzt; es sind dann nur noch Homogenitätssubstitutionen mit Faktoren der Form

$$t = ax + by + cz \qquad (a, b, c \neq 0, 0, 0 \text{ aus } \Omega)$$

zulässig. Durch eine solche kann man auch noch $\mathfrak{U}$ so normieren, daß etwa $\mathfrak{A}$ prim zu $\mathfrak{U}$ ist (etwa indem man $\mathfrak{U} = \mathfrak{C}$, also $z \cong 1$ wählt), oder auch daß ein vorgegebener algebraischer Punkte $\mathfrak{p}$ von K/Ω prim zu $\mathfrak{U}$ ist (so daß x, y, z primitiv für $\mathfrak{p}$ sind). Hiervon wird im folgenden, wo nötig, Gebrauch gemacht. Die Zählerdivisoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und die Verhältnisse $x : y : z$ werden, wie gesagt, von diesen Normierungen nicht betroffen, so daß die über sie herzuleitenden Aussagen unabhängig von solchen Normierungen sind.

Die Permutationen von x, y, z und die Multiplikationen der x, y, z mit (voraussetzungsgemäß in Ω enthaltenen) n-ten Einheitswurzeln liefern Automorphismen von K/Ω, die zusammen eine endliche Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von K/Ω erzeugen. Der Divisor $\mathfrak{U}$ und damit auch seine Klasse U ist bei $\mathfrak{G}$ invariant.

2 Primzerlegung der Zählerdivisoren.

Wegen $[K:\Omega(y:z)] = n$ und $y:z \cong \mathfrak{B}:\mathfrak{C}$ mit $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = 1$ ist

$$\text{Grad}\, U = n.$$

Demnach besitzt der Zählerdivisor $\mathfrak{A}$ von x eine Zerlegung

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n$$

in n algebraische Punkte $\mathfrak{a}_\nu$ von K/Ω. Es ist dann

$$y^n + z^n \cong x^n \cong \frac{\mathfrak{A}^n}{\mathfrak{U}^n} = \frac{\mathfrak{a}_1^n}{\mathfrak{U}} \cdots \frac{\mathfrak{a}_n^n}{\mathfrak{U}}.$$

Nun besteht die Linearfaktorzerlegung

$$y^n + z^n = (y - \varepsilon_1 z) \cdots (y - \varepsilon_n z),$$

wo $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ für $2 \nmid n$ die entgegengesetzten zu den n ten Einheitswurzeln und für $2|n$ diejenigen $2n$-ten Einheitswurzeln sind, die nicht schon n-te Einheitswurzeln sind; sie liegen voraussetzungsgemäß in Ω und sind wegen $\chi(\Omega) \nmid n$ untereinander verschieden. Für die ihnen entsprechenden Linearfaktoren hat man daher

$$y - \varepsilon_\nu z \cong \frac{\mathfrak{A}_\nu}{\mathfrak{U}} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

mit untereinander verschiedenen, also paarweise teilerfremden Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{A}_\nu$ des rationalen Körpers $\Omega(y:z)/\Omega$. Nach dem zuvor Gesagten hat deren Produkt in K/Ω die Primzerlegung

$$\mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_n = \mathfrak{a}_1^n \cdots \mathfrak{a}_n^n.$$

Bei passender Reihenfolge der $\mathfrak{a}_\nu$ ist somit notwendig

$$\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{a}_\nu^n \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_\nu = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_\nu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Wegen der letzteren Beziehungen sind die $\mathfrak{a}_\nu$ untereinander verschieden und rationale Punkte (Primdivisoren ersten Grades) von K/Ω; sie entsprechen den trivialen Grundgleichungslösungen

$$x(\mathfrak{a}_\nu) : y(\mathfrak{a}_\nu) : z(\mathfrak{a}_\nu) = 0 : \varepsilon_\nu : 1 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

mit erster Koordinate 0. Wegen der ersteren Beziehungen sind die $\mathfrak{A}_\nu$ für $K/\Omega(y:z)$ von der Ordnung n verzweigt.

Entsprechendes gilt für die Primzerlegung der beiden anderen Zählerdivisoren

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_n, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{c}_1 \cdots \mathfrak{c}_n.$$

Insbesondere ist damit festgestellt:

Den $3n$ durch die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von K/Ω transitiv verbundenen trivialen Grundgleichungslösungen entsprechen $3n$ ebenso verbundene rationale Punkte von K/Ω, nämlich die je n Primfaktoren $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b}_\nu$, $\mathfrak{c}_\nu$ der Zählerdivisoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ von x, y, z.

3. Geschlecht, Differentialklasse, ganze Differentiale.

Wie aus der Grundgleichung ersichtlich, sind die Zählerdivisoren $\mathfrak{A}_\nu$ der $y-\varepsilon_\nu z$ auch die einzigen für $K/\Omega(y:z)$ verzweigten Primdivisoren von $\Omega(y:z)/\Omega$. Wegen $\chi(\Omega)\nmid n$ hat daher $K/\Omega(y:z)$ den Differentendivisor

$$\mathfrak{D}_{y:z}=\mathfrak{A}^{n-1}.$$

Da $z:y\cong\mathfrak{C}:\mathfrak{B}$ den Nennerdivisor $\mathfrak{B}$ hat, ist somit das Differential

$$d\left(\frac{z}{y}\right)=\frac{\begin{vmatrix} y & z \\ dy & dz\end{vmatrix}}{y^2}\cong\frac{\mathfrak{A}^{n-1}}{\mathfrak{B}^2}.$$

Hieraus bestimmen sich das Geschlecht g und die Differentialklasse W von K/Ω zu

$$2g-2=n(n-1)-2n=n(n-3),$$

also
$$g=\frac{(n-1)(n-2)}{2}=1+2+\cdots+(n-2)$$

und

$$W=U^{n-3}.$$

Um den trivialen Fall $n=2$ mit $g=0$ auszuschließen, sei fortan $n>2$ und damit $g>0$ vorausgesetzt.

Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^{n-1}x\ +y^{n-1}y\ +z^{n-1}z\ &=0, \\ x^{n-1}dx+y^{n-1}dy+z^{n-1}dz&=0,\end{aligned}$$

letzteres unter Beachtung von $\chi(\Omega)\nmid n$, folgt

$$\begin{vmatrix} y & z \\ dy & dz\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z & x \\ dz & dx\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy\end{vmatrix} = x^{n-1}:y^{n-1}:z^{n-1}.$$

Hiernach und nach obiger Differentialformel ist das Differential

$$du=\frac{\begin{vmatrix} y & z \\ dy & dz\end{vmatrix}}{x^{n-1}}=\frac{\begin{vmatrix} z & x \\ dz & dx\end{vmatrix}}{y^{n-1}}=\frac{\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy\end{vmatrix}}{z^{n-1}}\cong\mathfrak{U}^{n-1}$$

von K/Ω bei der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ invariant und ganz. Man erhält dann in der Gestalt

$$x^\lambda y^\mu z^\nu du\cong\mathfrak{A}^\lambda\mathfrak{B}^\mu\mathfrak{C}^\nu \qquad \begin{pmatrix}\lambda, \mu, \nu\geqq 0 \\ \lambda+\mu+\nu=n-3\end{pmatrix}$$

über Ω linear unabhängige ganze Differentiale von K/Ω in der Anzahl

$$\sum_{\substack{\lambda,\mu,\nu\geqq 0\\ \lambda+\mu+\nu=n-3}}' 1 = \sum_{\varkappa=0}^{n-3} \sum_{\substack{\lambda,\mu\geqq 0\\ \lambda+\mu=\varkappa}} 1 = \sum_{\varkappa=0}^{n-3} (\varkappa+1) = g,$$

also eine Basis des Ω-Moduls der ganzen Differentiale von K/Ω. Daraus folgt:

Die ganzen Differentiale von K/Ω sind die Gesamtheit der Ausdrücke

$$f_{n-3}(x, y, z)\, du,$$

wo du die angegebene Bedeutung hat und f_{n-3} alle homogenen ternären Polynome über Ω vom Grade $n-3$ durchläuft.

4. Dimensionsformeln, homogene Koordinaten.

Die ganzen Differentiale von K/Ω lassen sich unter Hervorhebung der obigen Linearfaktoren

$$y_\nu = y - \varepsilon_\nu z \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

als

$$[g_{n-3}(y, z) + x g_{n-4}(y, z) + \cdots + x^{n-3} g_0(y, z)]\, du$$

schreiben, wo die homogenen Polynome $g_k(y, z)$ in der Form

$$g_\varkappa(y, z) = c_{\varkappa 0} z^\varkappa + c_{\varkappa 1} y_1 z^{\varkappa-1} + c_{\varkappa 2} y_1 y_2 z^{\varkappa-2} + \cdots + c_{\varkappa\varkappa} y_1 \cdots y_\varkappa \quad (\varkappa = 0, \ldots, n-3)$$

mit Koeffizienten $c_{\varkappa 0}, \ldots, c_{\varkappa\varkappa}$ aus Ω angesetzt sind. Unter Beachtung von

$$x \cong \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{U}}, \quad y_\nu \cong \frac{\mathfrak{a}_\nu^n}{\mathfrak{U}}, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n,$$

und indem man ohne Einschränkung $\mathfrak{U}$ prim zu $\mathfrak{A}$ normiert, folgert man hieraus durch Abzählung der über Ω linear-unabhängigen, durch den jeweiligen Nenner teilbaren ganzen Differentiale von K/Ω die Dimensionsformeln:

$$\dim \frac{W}{\mathfrak{a}_1} = g - 1, \qquad \dim \frac{W}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1} = g - (n-2) - 1, \ldots\ldots$$

$$\dim \frac{W}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{n-3}} = g - (n-2) - (n-3), \ldots$$

$$\dim \frac{W}{\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{n-2}} = g - (n-2),$$

$$\dim \frac{W}{\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{n-1}} = g - (n-2);$$

$$\dim \frac{W}{\mathfrak{A}} = g - (n-2), \qquad \dim \frac{W}{\mathfrak{A}^2} = g - (n-2) - (n-3), \ldots,$$

$$\dim \frac{W}{\mathfrak{A}^{n-3}} = g - (n-2) - (n-3) - \cdots - 2 = 1,$$

und dann natürlich

$$\dim \frac{W}{\mathfrak{A}^{n-3+\varkappa}} = 0 \qquad \text{für alle } \varkappa \geqq 1.$$

Nach dem Riemann-Rochschen Satz ergibt sich daraus:

$$\begin{array}{ll} \dim \mathfrak{a}_1 = 1, & \dim \mathfrak{A}\mathfrak{a}_1 = 1+2, \ldots\ldots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \dim \mathfrak{A}\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{n-3} = 1+2, \ldots\ldots \\ \dim \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{n-2} = 1, & \dim \mathfrak{A}\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{n-2} = 1+2+1, \ldots\ldots \\ \dim \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{n-1} = 1+1, & \dim \mathfrak{A}\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{n-1} = 1+2+2, \ldots\ldots \\ \dim \mathfrak{A} = 1+2, & \dim \mathfrak{A}^2 = 1+2+3, \ldots\ldots, \\ & \dim \mathfrak{A}^{n-3} = 1+2+\cdots+(n-2) = g, \end{array}$$

und dann natürlich

$$\dim \mathfrak{A}^{n-3+\varkappa} = g-1+\varkappa n \qquad \text{für alle } \varkappa \geqq 1,$$

während die vorhergehenden Schlußformeln sich zu

$$\dim \mathfrak{A}^{\nu} = \binom{\nu+2}{2} \qquad \text{für } \nu = 0, \ldots, n-3$$

zusammenfaßen lassen.

Da $\mathfrak{A}$ in U liegt, darf in diesen Formeln $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{U}$ ersetzt werden. Insbesondere steht damit jetzt fest, daß genau

$$\dim U = 3$$

ist. Demnach bilden die Erzeugenden x, y, z eine Basis des Ω-Moduls der Vielfachen von $\frac{1}{\mathfrak{U}}$ in K. Hieraus folgt, daß bei jeder festen Normierung von $\mathfrak{U}$ als ganzer Divisor aus U eine bestimmte inhomogene lineare Relation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1 \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ in } \Omega)$$

zwischen den zugehörigen Erzeugenden x, y, z besteht, entsprechend der Basisdarstellung des Vielfachen 1 von $\frac{1}{\mathfrak{U}}$.

Weil ferner $\binom{\nu+2}{2}$ gleich der Anzahl der Potenzprodukte aus x, y, z vom Grade ν ist, bilden diese Potenzprodukte für $\nu = 0, \ldots, n-3$ jeweils eine Basis des Ω-Moduls der Vielfachen von $\frac{1}{\mathfrak{U}^{\nu}}$ in K. Dies gilt auch noch für $\nu = n-2,\ n-1$; denn es ist

$$\dim U^{n-2} = g + (n-1) = \binom{n-1}{2} + (n-1) = \binom{n}{2},$$

$$\dim U^{n-1} = g + (n-1) + n = \binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2}.$$

Und es gilt auch noch für alle $\nu \geqq n$; denn einerseits ist nach dem Gezeigten

$$\dim U^{n+\varkappa+1} = \dim U^{n+\varkappa} + n \qquad \text{für alle } \varkappa \geqq 0;$$

andererseits ist mit Rücksicht auf die Grundgleichung $x^n+y^n+z^n=0$ die Anzahl der über Ω linear-unabhängigen Potenzprodukte aus x, y, z vom Grade $n+\varkappa$ nur noch $\binom{n+\varkappa+2}{2}-\binom{\varkappa+2}{2}$, und auch dieser Ausdruck nimmt bei $\varkappa \longrightarrow \varkappa+1$ um n zu.

Zusammengenommen ist damit gezeigt:

Die homogenen Polynome über Ω in x, y, z erschöpfen den Integritätsbereich der höchstens für $\mathfrak{U}=\frac{1}{(x, y, z)}$ gebrochenen Elemente aus K.

Hinsichtlich der Einbettung der Vielfachen von $\frac{1}{\mathfrak{U}^\nu}$ in die von $\frac{1}{\mathfrak{U}^{\nu+1}}$ beachte man hierbei die oben erwähnte inhomogene lineare Relation zwischen x, y, z.

Indem man bei gegebenem algebraischem Punkt $\mathfrak{p}$ von K/Ω den Nennerdivisor $\mathfrak{U}$ prim zu $\mathfrak{p}$ normiert, so daß die Erzeugenden x, y, z primitiv für $\mathfrak{p}$ werden und somit durch konstante Restbildung mod. $\mathfrak{p}$ zur Definition der homogenen Koordinaten $x(\mathfrak{p}) : y(\mathfrak{p}) : z(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$ verwendet werden können, ergibt sich aus dem vorstehendem Sachverhalt die für die Anwendung auf das Fermatsche Problem wichtige Tatsache:

Die algebraischen Punkte $\mathfrak{p}$ von K/Ω entsprechen vermöge ihrer homogenen Koordinaten $x(\mathfrak{p}) : y(\mathfrak{p}) : z(\mathfrak{p})$ umkehrbar eindeutig den über Ω algebraischen Grundgleichungslösungen, und speziell die rationalen Punkte von K/Ω den Grundgleichungslösungen in Ω.

5. Weierstraßpunkte.

Es seien zunächst kurz die Grundtatsachen über Weierstraßpunkte für einen beliebigen algebraischen Funktionenkörper K/Ω mit Konstantenkörper Ω der Charakteristik $\chi(\Omega)=0$ zusammengestellt[5]). Ohne Einschränkung sei das Geschlecht $g>0$; mit W sei die Differentialklasse von K/Ω bezeichnet.

Zu jedem algebraischen Punkt $\mathfrak{p}$ von K/Ω gibt es, entsprechend dem schrittweisen Abnehmen der $\dim \frac{W}{\mathfrak{p}^\varrho}$ für $\varrho=0, 1, 2, \ldots$, eine eindeutig bestimmte Folge von g Lückenzahlen

$$1=\varrho_1<\varrho_2<\cdots<\varrho_g \leqq 2g-1$$

---

[5]) Im Falle $\chi(\Omega)\neq 0$ wäre die von F. K. Schmidt (Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. II. Allgemeine Theorie der Weierstraßpunkte. *Math. Zeitschrift*, **45** (1939), S. 75—96) gegebene Modifikation der geläufigen Theorie der Weierstraßpunkte zu berücksichtigen, eine an sich lohnende Aufgabe, von deren Durchführung aber hier mit Rücksicht auf den beschränkten Raum abgesehen werden muß.

derart, daß

$$
\begin{aligned}
&\dim \frac{W}{\mathfrak{p}^{\varrho_1}}, \ldots, \dim \frac{W}{\mathfrak{p}^{\varrho_2-1}} = g-1, \\
&\dim \frac{W}{\mathfrak{p}^{\varrho_2}}, \ldots, \dim \frac{W}{\mathfrak{p}^{\varrho_3-1}} = g-2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\dim \frac{W}{\mathfrak{p}^{\varrho_g}}, \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,
\end{aligned}
$$

also nach dem Riemann-Rochschen Satz

$$
\begin{aligned}
&\dim \mathfrak{p}^{\varrho_1}, \ldots, \dim \mathfrak{p}^{\varrho_2-1} = \varrho_1, \ldots, \varrho_2-1, \\
&\dim \mathfrak{p}^{\varrho_2}, \ldots, \dim \mathfrak{p}^{\varrho_3-1} = \varrho_2-1, \ldots, \varrho_3-2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\dim \mathfrak{p}^{\varrho_g}, \dim \mathfrak{p}^{\varrho_g+1}, \ldots = \varrho_g-(g-1), \varrho_g-(g-1)+1, \ldots
\end{aligned}
$$

so daß also genau zu den Nennern $\mathfrak{p}^{\varrho_1}, \ldots, \mathfrak{p}^{\varrho_g}$ keine Elemente in K existieren. Man nennt

$$\gamma(\mathfrak{p}) = \sum_{i=1}^{g} (\varrho_i - i) = \sum_{i=1}^{g} \varrho_i - \frac{g(g+1)}{2}$$

das Gewicht von $\mathfrak{p}$. Es ist $\gamma(\mathfrak{p}) = 0$ dann und nur dann, wenn die minimale Lückenzahlverteilung $\varrho_1, \ldots, \varrho_g = 1, \ldots, g$ vorliegt. Ist $\gamma(\mathfrak{p}) > 0$, so heißt $\mathfrak{p}$ ein Weierstraßpunkt von K/Ω. Da die maximale Lückenzahlverteilung $\varrho_1, \ldots, \varrho_g = g, \ldots, 2g-1$ wegen $\varrho_1 = 1$ nur für $g = 1$ vorliegt, hat man die obere Gewichtsabschätzung

$$\gamma(\mathfrak{p}) < \sum_{k=0}^{g-1} (g+k) - \frac{g(g+1)}{2} = (g-1)g \qquad \text{für } g > 1.$$

Durch Betrachtung der Differentialdeterminante

$$|d^i u_j| = \left| \frac{d^i u_j}{dt^i} \right| (dt)^{\frac{g(g+1)}{2}} \qquad (i, j = 1, \ldots, g),$$

wo du_j eine Basis des Ω-Moduls der ganzen Differentiale von K/Ω und t ein nicht-konstantes Element aus K ist, zeigt man, daß die über alle algebraischen Punkte $\mathfrak{p}$ von K/Ω erstreckte Gewichtsumme

$$\gamma = \sum_{\mathfrak{p}} \gamma(\mathfrak{p}) = (g-1)g(g+1)$$

ist. Für $g = 1$ gibt es daher keine Weierstraßpunkte von K/Ω, während es für $g > 1$ stets solche gibt, und zwar in einer Anzahl N, die den Ungleichungen

$$(g-1)g(g+1) \geqq N > g+1$$

genügt.

Für den Funktionenkörper K/Ω der Fermatschen Gleichung, wobei jetzt $n > 3$, somit $g > 1$, und $\chi(\Omega) = 0$ vorausgesetzt sei, bestimmen sich die Lückenzahlen eines der Punkte $\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{b}_\nu, \mathfrak{c}_\nu$, etwa von $\mathfrak{a}_1$, wie folgt. Die ganzen Differentiale von K/Ω lassen sich unter Hervorhebung des $\mathfrak{a}_1$ entsprechenden Linearfaktors $y_1 = y - \varepsilon_1 z$, etwas anders als oben, durch die Ω-Basis

$$x^\lambda y_1^\mu z^\nu \, du \qquad \left(\begin{matrix} \lambda, \mu, \nu \geqq 0 \\ \lambda + \mu + \nu = n-3 \end{matrix}\right)$$

darstellen. Normiert man wieder ohne Einschränkung $\mathfrak{U}$ prim zu $\mathfrak{A}$

und beachtet, daß dann diese Basiselemente die Ordnungszahlen $\lambda+\mu n$ in $\mathfrak{a}_1$ haben, so erkennt man durch Abzählung der über Ω linear-unabhängigen, durch die einzelnen Potenzen von $\mathfrak{a}_1$ teilbaren ganzen Differentiale von K/Ω, daß die Lückenzahlen ϱ_i von $\mathfrak{a}_1$ die Zahlen $\lambda+\mu n+1$ sind, die ja wegen $0\leqq\lambda$, $\mu\leqq n-3$ alle untereinander verschieden sind und wegen $\lambda+\mu\leqq n-3$ die richtige Anzahl $1+2+\cdots+(n-2)=g$ haben. Der Größe nach geordnet lauten diese Lückenzahlen

$$1, 2, \ldots, n-2;\; n+1, n+2, \ldots, n+(n-3);\; 2n+1, \ldots, 2n+(n-4);\; \ldots; (n-3)n+1,$$

und ihre Nummern i sind den $n-2$ Abschnitten entsprechend um

$$0,\; 2,\; 2+3, \ldots, 2+3+\cdots+(n-2)$$

kleiner. Demnach ist das Gewicht

$$\gamma(\mathfrak{a}_1)=\sum_{i=1}^{g}(\varrho_i-i)=(n-2)\,0+(n-3)\,2+(n-4)\,(2+3)+\cdots+ \\ +1\,(2+3+\cdots+(n-2)),$$

oder also nach leichter Rechnung

$$\gamma(\mathfrak{a}_1)=\frac{g(n-3)(n+4)}{12}.$$

Für die $3n$ Punkte $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b}_\nu$, $\mathfrak{c}_\nu$ zusammen ergibt sich daraus durch Multiplikation mit $3n$ unter Beachtung von $n(n-3)=2(g-1)$ die Gewichtsumme

$$\gamma_0=\sum_{\nu=1}^{n}(\gamma(\mathfrak{a}_\nu)+\gamma(\mathfrak{b}_\nu)+\gamma(\mathfrak{c}_\nu))=\frac{(g-1)g(n+4)}{2}.$$

Vergleich mit der vollen Gewichtsumme,

$$\gamma=(g-1)g(g+1)$$

ergibt:

Unter den Voraussetzungen $n>3$ und $\chi(\Omega)=0$ sind die den $3n$ trivialen Grundgleichungslösungen entsprechenden Punkte von K/Ω sämtlich Weierstraßpunkte gleichen Gewichts mit der Gewichtsumme

$$\gamma_0=\frac{(g-1)g(n+4)}{2}.$$

Im Falle $n=4$, wo $g=3$ ist, sind damit alle Weierstraßpunkte von K/Ω erschöpft. Im Falle $n>4$ besitzt K/Ω noch weitere Weierstraßpunkte mit der Gewichtsumme

$$\bar{\gamma}=\frac{(g-1)g(2g-n-2)}{2}.$$

6. Zum Additionsschema der rationalen g-gliedrigen Punktgruppen.

Um dieses Schema aufzustellen, muß man eine rationale g-gliedrige Punktgruppe, d. h. einen ganzen Divisor g-ten Grades $\mathfrak{D}$ von K/Ω als Bezugsdivisor auszeichnen. Dann stellt sich jenes Schema in multiplikativer Form durch die Äquivalenzbeziehung

$$\frac{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}}{\mathfrak{D}^3} \sim 1$$

dar, wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ gegebene ganze Divisoren g-ten Grades von K/Ω sind und $\mathfrak{P}$ als ebensolcher zu bestimmen ist; in additiver Form entspricht dem dann die Beziehung $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P} \sim 0$ (in bezug auf $\mathfrak{D}$).

Aus Gründen der Einfachheit und Eleganz sollte man versuchen, den auszuzeichenden Bezugsdivisor $\mathfrak{D}$, entspechend wie den Nennerdivisor $\mathfrak{U}$ im vorhergehenden, invariant bei der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von K/Ω zu wählen. Wie leicht zu sehen, läßt sich aber jedenfalls aus den bisher allein explizit aufgewiesenen $3n$ Primdivisoren $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b}_\nu$, $\mathfrak{c}_\nu$ kein dieser Invarianzforderung genügender ganzer Divisor g-ten Grades zusammensetzen. Im Hinblick auf den additiven Aufbau $g = 1 + 2 + \cdots + (n-2)$ des Geschlechts erscheint bei dieser Sachlage die Wahl

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{a}_1^1 \mathfrak{a}_2^2 \cdots \mathfrak{a}_{n-2}^{n-2}$$

noch am meisten naturgemäß.

Man muß dann eine Basis des Ω-Moduls der Vielfachen von $\frac{1}{\mathfrak{D}^3}$ in K angeben. Diese Aufgabe und auch die beabsichtigte Anwendung vereinfachen sich, wenn man statt $\mathfrak{D}$ den äquivalenten (gebrochenen) Divisor

$$\mathfrak{D}' = \frac{\mathfrak{D}}{y_1 y_2 \cdots y_{n-2}} = \frac{\mathfrak{U}^{n-2}}{\mathfrak{a}_1^{n-1} \mathfrak{a}_2^{n-2} \cdots \mathfrak{a}_{n-2}^2}$$

zugrundelegt. Die Vielfachen von $\frac{1}{\mathfrak{D}'^3}$ in K sind diejenigen homogenen Polynome in x, y, z über Ω vom Grade $3(n-2)$, welche (bei zu $\mathfrak{A}$ prim normiertem $\mathfrak{U}$) an den Punkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{n-2}$ Nullstellen von mindestens den Ordnungen $n-1, n-2, \ldots, 2$ haben. Indem man die zwischen den Potenzprodukten des Grades $3(n-2)$ auf Grund der Gleichung $x^n + y^n + z^n = 0$ bestehenden linearen Abhängigkeiten durch entsprechende Reduktion mod. n der Exponenten von x eliminiert, ergibt sich daraus, analog wie oben bei den ganzen Differentialen, als Basis des Ω-Moduls der Vielfachen von $\frac{1}{\mathfrak{D}'^3}$ in K das System der Potenzprodukte

$$x^\lambda y_1^{\mu_{\lambda,1}} \cdots y_{n-2}^{\mu_{\lambda,n-2}} y^\mu z^\nu \left|\begin{array}{l} \lambda = 0, \ldots, n-1 \\ \mu_{\lambda,\varrho} = 3 - \left[\dfrac{\lambda+3\varrho}{n}\right] \quad (\varrho = 1, \ldots, n-2) \\ \mu, \nu \geqq 0;\ \mu+\nu = 3(n-2) - \lambda - \sum\limits_{\varrho=1}^{n-2} \mu_{\lambda,\varrho} \end{array}\right|,$$

wo also für $\lambda = 0, \ldots, n-1$ und $\varrho = 1, \ldots, n-2$ jeweils $\mu_{\lambda,\varrho}$ die kleinste ganze Zahl mit $\lambda + n\mu_{\lambda,\varrho} \geqq 3(n-\varrho)$ ist, und wo — den Bedingungen für μ, ν entsprechend — nur diejenigen solchen Systeme $\lambda, \mu_{\lambda,\varrho}$ in Betracht zu ziehen sind, für welche die Summe $\lambda + \sum\limits_{\varrho=1}^{n-2} \mu_{\lambda,\varrho} \leqq 3(n-2)$ ist. Auf Grund des Riemann-Rochschen Satzes sind das $2g+1$ Basiselemente, wie man auch durch direkte Abzählung bestätigen kann; sie seien zur Abkürzung mit $w_1, \ldots, w_{2g+1}$ bezeichnet.

Es seien nun

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{p}_1^{(1)} \cdots \mathfrak{p}_g^{(1)}, \quad \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{p}_1^{(2)} \cdots \mathfrak{p}_g^{(2)}, \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_g$$

die Zerlegungen der in die allgemeine Additionsrelation eingehenden rationalen Punktgruppen in algebraische Punkte von K/Ω, und es sei einfachheitshalber angenommen, daß der „allgemeine" Fall vorliegt, in dem die $3g$ Punkte $\mathfrak{p}_i^{(1)}, \mathfrak{p}_i^{(2)}, \mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \ldots, g)$ untereinander verschieden sind und überdies $\mathfrak{P}$ regulär $(\dim \mathfrak{P} = 1)$ ist; letzteres bedeutet, daß $\mathfrak{P}$ selbst (nicht nur die Klasse von $\mathfrak{P}$) durch die Additionsrelation eindeutig bestimmt ist. Sind dann

$$w_1(\mathfrak{p}_i^{(1)}) : \cdots : w_{2g+1}(\mathfrak{p}_i^{(1)}), \quad w_1(\mathfrak{p}_i^{(2)}) : \cdots : w_{2g+1}(\mathfrak{p}_i^{(2)}), \quad w_1(\mathfrak{p}_i) : \cdots : w_{2g+1}(\mathfrak{p}_i)$$

die mittels der Basis $w_1, \ldots, w_{2g+1}$ gebildeten homogenen Koordinaten der Punkte $\mathfrak{p}_i^{(1)}, \mathfrak{p}_i^{(2)}, \mathfrak{p}_i$, so drückt sich die zu betrachtende Additionsrelation durch die Determinantengleichungen

$$\begin{vmatrix} w_1(\mathfrak{p}_1^{(1)}) & \cdots & w_{2g+1}(\mathfrak{p}_1^{(1)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1(\mathfrak{p}_g^{(1)}) & \cdots & w_{2g+1}(\mathfrak{p}_g^{(1)}) \\ w_1(\mathfrak{p}_1^{(2)}) & \cdots & w_{2g+1}(\mathfrak{p}_1^{(2)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1(\mathfrak{p}_g^{(2)}) & \cdots & w_{2g+1}(\mathfrak{p}_g^{(2)}) \\ w_1(\mathfrak{p}_i) & \cdots & w_{2g+1}(\mathfrak{p}_i) \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, g)$$

aus, d. h. die mit der Basis $w_1, \ldots, w_{2g}$ gebildeten homogenen Koordinaten der $\mathfrak{P}$ zusammensetzenden g Punkte $\mathfrak{p}_i$ bestimmen sich, geometrisch ausgedrückt, als die Schnittpunkte der dieser Basis zugeordneten $2g$-dimensionalen Raumkurve (die zur gegebenen ebenen Kurve $x^n + y^n + z^n = 0$ birational äquivalent ist) mit einer durch die homogenen Koordinaten der $\mathfrak{P}^{(1)}, \mathfrak{P}^{(2)}$ zusammensetzenden Punkte $\mathfrak{p}_i^{(1)}, \mathfrak{p}_i^{(2)}$ gegebenen $(2g-1)$-dimensionalen Hyperebene.

Dieses letztere Rechenschema und auch die an ihm für „spezielle“ Fälle anzubringenden Modifikationen sind aus der allgemeinen Theorie der algebraischen Funktionenkörper wohlbekannt. Hier kam es nur auf die bisher nirgends gemachte explizite Angabe einer zur Darstellung dieses Rechenschemas geeigneten Basis $w_1, \ldots, w_{2g+1}$ im Falle des Funktionenkörpers der Fermatschen Gleichung an. Daß diese Basis recht kompliziert gebaut ist, scheint in der Natur der Sache zu liegen und sollte nicht von einer weiteren Verfolgung der in dieser Note angeschnittenen Fragestellungen abschrecken.

(Eingegangen am 10. August 1950.)

Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes. I.

Par MARC KRASNER et LÉO KALOUJNINE à Paris.

Introduction.

Le présent travail se rattache, par certains de ses côtés, à la théorie qui fut le champ le plus ancien de la théorie des groupes, — celle des groupes de permutations. La représentation des groupes abstraits par des groupes de permutations fut surtout étudiée au cours du XIXè siècle, et les résultats classiques de cette étude sont, à présent, trop bien connus pour qu'il soit nécessaire d'en parler en détail[1]). Ils peuvent se résumer ainsi:

G étant un groupe et g étant un sous-groupe de G, l'application, qui fait correspondre à tout $a \in G$ la permutation $\{xg \to axg\}$ de l'ensemble G/g des classes à droite xg de G suivant g, est une représentation de G comme groupe transitif Γ de permutations de l'ensemble G/g. Le noyau de cette représentation est le plus grand sous-groupe g^* de g invariant dans G. La représentation est fidèle si, et seulement si g^* se réduit à l'unité de G.

Il est bien connu également, qu'à une similitude près, toutes les représentations du groupe G par les groupes transitifs de permutations peuvent être obtenues de cette manière. A savoir, si H est une représentation de G comme groupe transitif de permutations d'un ensemble M, le choix d'un élément m de M définit une similitude qui transforme H en la représentation de G à l'aide du groupe g_m des éléments de G dont les images dans H conservent m: on fait correspondre à tout $x \in M$ l'ensemble des $\sigma \in G$ dont les images dans H transforment m en x (cet ensemble est bien une classe à droite suivant g_m).

La représentation considérée est primitive ou imprimitive selon que g est un sous-groupe maximal ou non de G. Dans le second

---

1) Voir par exemple: A. SPEISER, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 3. édition (Berlin, 1937), Chapitre 8.

cas les ensembles des classes à droite dans G suivant g, contenues dans les classes à droite de G suivant un sous-groupe intermédiaire g', $G \supset g' \supset g$, constituent des systèmes d'imprimitivité.

Soit

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_s$$

une suite de sous-groupes de G. On peut se demander s'il est possible d'exprimer la représentation de G à l'aide de G_s au moyen des s représenstations Γ_i des G_{i-1} à l'aide des G_i correspondants ($i = 1, 2, \ldots, s$). Un des principaux résultats de notre travail montre précisément que cette question admet une réponse positive et indique, d'une manière effective, pour les groupes G, où les s représentations partielles Γ_i sont données, un groupe universel $\mathfrak{G}$ de permutations, défini à une similitude près.

Malgré l'apparente banalité de ce résultat, il se trouve que le problème général d'extension des groupes par d'autres groupes[2]) qu'on pourrait appeler le problème de la "cascade schreierienne", peut se rattacher à un cas particulier de notre théorie, à savoir à celui où pour tout i, G_i est invariant dans G_{i-1} (nous disons dans ce cas que $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ est une suite de composition incomplète), et où, par conséquent, les groupes Γ_i sont des groupes régulières de permutations. Il nous semble, en effet, que, dans ce cas particulier, la détermination du groupe universel, qu'on vient de mentionner, jointe à certains autres résultats de ce travail relatifs à l'isomorphie de ses sous-groupes, fournit une réponse satisfaisante, sinon tout à fait explicite, au problème de la "cascade schreierienne".

Le groupe universel $\mathfrak{G}$ pour les groupes G ayant des représentations partielles données $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ se trouve être une généralisation assez naturelle d'un type de groupes bien connus; à savoir, des *groupes monomiaux*.

Un groupe monomial est un groupe de substitutions de la forme $x_i \to \eta(i) x_{k(i)}$ où $\eta(i)$ appartient à un groupe multiplicatif numérique Γ. Une telle substitution monomiale peut être définie par la donnée d'une permutation $\sigma = \{x_i \to x_{k(i)}\}$ des variables à permuter et par la donnée, pour tout x_i, d'un nombre $\eta(i)$ dépendant de i.

En changeant légèrement les notations, on peut envisager un groupe de substitutions monomiales de la manière suivante: S étant le groupe de toutes les permutations d'un ensemble abstrait M, et Γ étant un groupe numérique multiplicatif soit $N = M \times \Gamma$ le produit, au sens

[2]) Le problème, aujourd'hui classique, de O. SCHREIER est un premier pas dans la direction de ce problème général, à savoir celui où il n'y a que deux groupes en présence.

de la théorie des ensembles, des M et Γ. N est, par définition, l'ensemble des couples $(m\ \gamma)$ $(m \in M, \gamma \in \Gamma)$. Une application biunivoque $\sigma = \{(m, \gamma) \rightarrow (m', \gamma')\}$ de N sur lui-même est une substitution monomiale si: 1) m' ne dépend que de m; et non de γ, et $m \rightarrow m'$ est une permutation de M (donc un élément de S); 2) on a $\gamma' = \beta(m)\gamma$, où $\beta(m)$ est un élément de Γ dépendant de m.

Sous cet aspect le concept d'un groupe monomial peut être facilement généralisé. Au lieu d'un groupe multiplicatif on peut prendre pour Γ un groupe abstrait (non nécessairement commutatif) quelconque et de définir ensuite un groupe de substitutions de l'ensemble produit $N = M \times \Gamma$ par les conditions 1 et 2 qu'on vient d'énoncer. On peut étudier ensuite les représentations des groupes abstraits par des groupes monomiaux ainsi généralisés. A une différence de terminologie près, c'est une telle étude qui a été entreprise récemment par M. O. Ore[3]).

Un certain désavantage de la notion d'un groupe monomial généralisé réside, à notre avis, dans le fait, qu'il y a dans sa définition une dissymétrie entre les groupes S et Γ. En effet, S est le groupe de toutes les permutations de l'ensemble M, tandis que Γ est un groupe abstrait. Il nous semble, par suite, naturel de faire disparaître cette dissymétrie entre S et Γ et de procéder comme suit:

Considérons deux groupes de permutations Γ_1 d'un ensemble M_1 et Γ_2 d'un ensemble M_2. Soit $M = M_1 \times M_2$ le produit des ensembles M_1, M_2. On envisage des applications $\sigma = \{(m_1, m_2) \rightarrow (m'_1, m'_2)\}$ de M dans lui-même qui satisfont aux conditions suivantes: 1. m'_1 ne dépend que de m_1 et $\{m_1 \rightarrow m'_1\}$ est une permutation σ_1 appartenant à Γ_1; 2. Pour tout $m_1 \in M_1$ fixe, $\{m_2 \rightarrow m'_2\}$ est une permutation $\sigma_2(m_1)$ appartenant à Γ_2 (mais dépendant de m_1).

On démontre que l'ensemble de telles applications est un groupe de permutations de l'ensemble $M = M_1 \times M_2$.

C'est ce groupe que nous appelons le *produit complet* des groupes Γ_1 et Γ_2 et que nous notons $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$. $\mathfrak{G}$ est un groupe transitif si, et seulement si Γ_1 et Γ_2 le sont. En outre, c'est un groupe imprimitif, et les sous-ensembles $\{m_1\} \times M_2$ de M, constitués par les éléments (m_1, x_2) de M, où m_1 est fixe et où x_2 parcourt M_2, sont des systèmes d'imprimitivité de $\mathfrak{G}$.

Le groupe monomial généralisé de M. O. Ore est un cas particulier du produit complet, à savoir celui, où Γ_1 est le groupe symétrique de toutes les permutations de l'ensemble M_1, et où Γ_2 est la représentation régulière d'un groupe abstrait Γ_2 comme groupe de per-

---

[3]) O. Ore, Theory of monomial groups, *Transactions American Math. Soc.*, 51 (1942), p. 15–64.

mutations de l'*ensemble* Γ_2 (support de la structure de groupe Γ_2). Si Γ_2 est un groupe multiplicatif de nombres, on retrouve les groupes monomiaux classiques.

$\mathfrak{G}=\Gamma_1\circ\Gamma_2$ est de nouveau un groupe de permutations. Soit Γ_3 un groupe de permutations d'un ensemble M_3. On peut, en itérant le processus indiqué, définir le produit complet $\mathfrak{G}\circ\Gamma_3=(\Gamma_1\circ\Gamma_2)\circ\Gamma_3$, qui est un groupe de permutations de l'ensemble $(M_1\times M_2)\times M_3$. Il se révèle que, si l'on identifie, comme d'habitude, $(M_1\times M_2)\times M_3$ avec $M_1\times(M_2\times M_3)$, le groupe $(\Gamma_1\circ\Gamma_2)\circ\Gamma_3$ coïncide avec le groupe $\Gamma_1\circ(\Gamma_2\circ\Gamma_3)$, qu'on peut donc noter simplement $\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\Gamma_3$. Ainsi, la composition complète des groupes de permutations est *associative*, et on peut définir le produit complet d'un nombre fini de groupes de permutations $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ d'ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$[4]. C'est un groupe de permutations de de l'ensemble produit $M=M_1\times M_2\times\ldots\times M_s$ des $M_1, M_2, \ldots, M_s$.

Dans le présent travail, nous procédons d'une manière un peu différente. Nous définissons directement, par des propriétés intrinsèques (généralisant les conditions 1 et 2 énoncées plus haut), le produit complet $\mathfrak{G}=\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\ldots\circ\Gamma_s$ de s groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, et nous montrons ensuite, qu'on a, pour tout entier i $(0\leqq i\leqq s)$,

$$(\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\ldots\circ\Gamma_i)\circ(\Gamma_{i+1}\circ\Gamma_{i+2}\circ\ldots\circ\Gamma_s)=\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\ldots\circ\Gamma_i\circ\Gamma_{i+1}\circ\ldots\circ\Gamma_s.$$

Les §§ 1 et 2 sont consacrés à la définition rigoureuse du concept du produit complet $\mathfrak{G}=\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\ldots\circ\Gamma_s$ qu'on vient d'esquisser, et à la démonstration de ses propriétés fondamentales et élémentaires. Nous y introduisons aussi de multiples notions et notations auxiliaires dont nous nous servirons dans les paragraphes suivants. Parmi ces notions une des plus importantes est celle de la suite

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0\langle m\rangle\supset\mathfrak{G}_1\langle m\rangle\supset\ldots\supset\mathfrak{G}_s\langle m\rangle$$

de sous-groupes de $\mathfrak{G}$, attachée à un élément $m=(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ de M. $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ est le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ formé par ses éléments conservant les i premières coordonnées $m_1, m_2, \ldots, m_i$ de m. Pour tout sous-groupe G de $\mathfrak{G}$, on a souvent, au cours de ce travail, à considérer la suite

$$G=G_0\langle m\rangle\supset G_1\langle m\rangle\supset\ldots\supset G_s\langle m\rangle,$$

où, pour tout $i=1, 2, \ldots, s$, $G_i\langle m\rangle=G\cap\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$. On montre, que, si G est transitif, la représentation de $G_{i-1}\langle m\rangle$ à l'aide de $G_i\langle m\rangle$ est un groupe de permutations semblable (et ceci, pour un m fixe, par une application canonique *de* $G_{i-1}\langle m\rangle/G_i\langle m\rangle$ sur M_i) à un sous-

[4] Par recurrence transfinie, on peut même définir le produit complet d'une suite bien ordonnée quelconque de groupes de permutations. Ceci a été fait par L. Kaloujnine dans un travail sous presse. Dans le présent mémoire nous nous occupons uniquement du cas d'un nombre fini de groupes.

groupe transitif $\overline{\Gamma}_i$ de Γ_i. L'application canonique ci-dessus mentionnée joue, d'ailleurs, un rôle important aux §§ 4 et 5 de ce travail. Si on la considère comme une identification de $G_{i-1}<m>/G_i<m>$ avec M_i, nous l'appellons la *m-identification.*

On a cru utile d'introduire au § 1 l'écriture des éléments du produit complet $\mathfrak{G}=\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\ldots\circ\Gamma_s$ sous la forme dite de "tableaux de permutations". Cette notation particulière (et l'algorithme qui s'y attache) n'est pas strictement indispensable pour l'exposé de la théorie générale, qui est l'objet principal de notre travail. Par contre, c'est un outil très puissant pour l'étude des cas particuliers[5]). Pour cette raison, et en vue d'applications ultérieures, nous avons indiqué pour quelques uns de nos résultats obtenus, leur transcription à l'aide de tableaux.

Dans le § 3, nous définissons la notion du *produit complet des groupes abstraits.* C'est un cas spécial important, déjà mentionné plus haut, du concept de produit complet des groupes de permutations. $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ étant des groupes abstraits, on considère tout *groupe* Γ_i, en l'identifiant à sa représentation régulière, comme un groupe de permutations de *l'ensemble* Γ_i. Le produit complet de tels groupes de permutations Γ_i est appelé produit complet des groupes abtraits. Le fait que, dans ce cas, tous les groupes facteurs sont des groupes de permutations régulières, permet de préciser et de simplifier plusieurs résultats exposés au § 2.

Entre autres, la suite de sous-groupes

$$G=G_0<m>\supset G_1<m>\supset\ldots\supset G_s<m>$$

(dont on a parlé plus haut) attachée à un élément m de

$$M=\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2\times\ldots\times\Gamma_s$$

est une suite de composition (incomplète) de $G\subseteq\mathfrak{G}$, c'est-à-dire $G_i<m>$ est invariant dans $G_{i-1}<m>$. D'ailleurs, nous convenons de ne considérer dans ce cas que la suite attachée à l'élément canonique $e=(e_1,e_2,\ldots,e_s)$ de Γ, où e_i est l'unité de Γ_i, ce qui simplifie la suite de l'exposé. D'autre part, si G est un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G}$, la similitude canonique applique $G_{i-1}<e>/G_i<e>$ sur $\acute{\Gamma}_i$.

Aux §§ 4 et 5 nous étudions des homomorphismes et des isomorphismes d'un groupe abstrait G donné sur des sous-groupes transitifs d'un produit complet de groupes de permutations (et plus particulièrement sur des sous-groupes transitifs d'un produit complet de groupes abstraits). La théorie que nous y exposons constitue une généralisation de la théorie de la représentation des groupes abstraits par les substitu-

[5]) Voir par exemple le travail: L. Kaloujnine, La structure de p-groupes de Sylow de groupes symétriques finis, *Annales de l'École Normale Supérieure,* (3) 65 (1948), p. 239—276.

tions monomiales. En outre, comme on l'a déjà mentionné, elle généralise, en un certain sens, la théorie d'extension des groupes de O. SCHREIER.

Soit
$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$$
une suite donnée de sous-groupes de G. Si G_s ne contient, en dehors de l'unité, aucun sous-groupe invariant dans G (nous disons, alors, que G_s est *anti-invariant* dans G), la représentation de G à l'aide de G_s est fidèle. Si $s > 1$, cette représentation est imprimitive et, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, les classes à droite τG_i (l'ensemble de ses classes sera noté G/G_i) dans G suivant G_i constituent des systèmes d'imprimitivité. σ parcourant G_{i-1}, $\sigma \rightarrow (\sigma) = \{\tau G_i \rightarrow \sigma\tau G_i\}$, où les classes τG_i parcourent G_{i-1}/G_i, est la représentation de G_{i-1} à l'aide de G_i. Soit Γ_i l'image de G_{i-1} par cette représentation. Γ_i est un groupe transitif de permutations de l'ensemble $M_i = G_{i-1}/G_i$.

Une fois le concept du produit complet acquis, il est plausible de supposer que, à une similitude près, la représentation de G à l'aide de G_s, comme groupe de permutations de l'ensemble G/G_s, est un sous-groupe transitif du produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ des groupes de permutations Γ_i des ensembles $M_i = G_{i-1}/G_i$.

Nous montrons au § 4 qu'il en est bien ainsi. Comme par ailleurs, il a été prouvé au § 2, que $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ est lui-même un groupe G satisfaisant au conditions précédentes relatives aux groupes de permutations Γ_i, on voit que c'est bien pour de tels groupes un *groupe universel*. C'est précisément le groupe universel dont nous avons parlé au début de cette introduction.

Le point crucial de la démonstration est la détermination d'une application biunivoque θ convenable de l'ensemble G/G_s sur l'ensemble produit $G_1/G_2 \times G_2/G_3 \times \ldots \times G_{s-1}/G_s$. Une telle application θ peut être obtenue en choisissant, dans toute classe $X_i \in G_{i-1}/G_i$, un représentant $\tau(X_i) \in G$. Toute classe $X \in G/G_s$ s'écrit alors, et d'une seule manière, sous la forme $X = \tau(X_1)\,\tau(X_2) \ldots \tau(X_s)\, G_s$ (choix de coordonnées !). On pose $\theta \cdot X = (X_1, X_2, \ldots, X_s)$, et on montre que, pour tout $\sigma \in G$,
$$\sigma \rightarrow \theta \{X \rightarrow \sigma X\} \theta^{-1}$$
est bien un isomorphisme (ou, comme nous disons, une immersion) de G dans $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$. En choisissant autrement les représentants $\tau(X_i)$, on obtient, en général, d'autres isomorphismes de G dans le produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ des $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$.

Dans le cas particulier, où $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ est une suite de composition (incomplète) de G, et où G_{i-1}/G_i est isomorphe à un groupe abstrait Γ_i, le processus indiqué permet d'immerger G dans le produit complet des groupes abstraits Γ_i.

Les isomorphismes d'un groupe donné G, avec la suite donnée $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$, dans le produit complet $\mathfrak{G}$, obtenus à l'aide d'un choix de représentants dans les classes $X_i \in G_{i-1}/G_i$, ne sont pas quelconques. Si on choisit, pour tout i, l'unité de G comme représentant de $m_i = G_i$ (considéré comme un élément de G_{i-1}/G_i), et si l'on désigne par $\overline{G}$ l'image de G dans $\mathfrak{G}$ par l'immersion qu'un tel choix des représentants définit, l'isomorphisme de G sur $\overline{G}$ est ce qui nous appelons *un* $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-*isomorphisme*. Cette notion d'un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme, qui est une généralisation d'un concept analogue, employé dans la théorie de Schreier, sera précisée au cours du § 4. Pour le moment, on se contentera de dire (d'une manière un peu vague) qu'il s'agit d'un isomorphisme tel que si $m = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ et si X_i est l'image, par l'isomorphisme consideré, de la classe $X_i = \tau G_i$ ($\tau \in G_{i-1}$) suivant G_i dans G_{i-1}, $\overline{X}_i$ est contenu précisément dans la classe suivant $\mathfrak{G}_i<m>$ que la m-identification de $\mathfrak{G}_{i-1}<m>/\mathfrak{G}_i<m>$ avec $M_i = G_{i-1}/G_i$ applique sur X_i.

Dans le cas particulier d'un groupe G avec une suite de composition incomplète $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ telle que G_{i-1}/G_i soit isomorphe à un groupe abstrait Γ_i, nous définissons la notion d'un $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-*isomorphisme*. Ce n'est autre chose que le $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme, pour $m = e$, dans ce cas particulier. Ainsi, les isomorphismes d'un tel groupe donné G obtenus dans le produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ des groupes abstraits $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ à l'aide d'un choix de forme précédemment indiquée de représentants dans G des classes $X_i \in G_{i-1}/G_i$ sont des $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-*isomorphismes*.

Après avoir établi au § 4 l'existence des isomorphismes (et plus précisément des $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphismes) d'un groupe G, avec une suite de sous-groupes $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ donnée, dans le produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$, nous déterminons, dans le § 5, l'ensemble de tous les $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphismes de G dans $\mathfrak{G}$, et nous donnons une description détaillée de cet ensemble. Nous démontrons que *deux* $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-*isomorphismes* η *et* η' *de* G *dans* $\mathfrak{G}$ *ne diffèrent que par un automorphisme intérieur* $(\lambda) = \{\sigma \to \lambda\sigma\lambda^{-1}\}$ *de* $\mathfrak{G}$, *où* λ *appartient à un sous-groupe bien déterminé de* $\mathfrak{G}$ *qui est indépendant du groupe* G *donné*. Inversement, *si* λ *appartient à ce sous-groupe et si* η *est un* $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-*isomorphisme de* G *dans* $\mathfrak{G}$, $\eta' = (\lambda)\eta$ *est encore un* $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-*isomorphisme de* G *dans* $\mathfrak{G}$.

En un certain sens, les résultats des §§ 4 et 5 résolvent le problème de la "cascade schreierienne", mentionné plus haut. SCHREIER détermine tous les groupes G qui possédent un sous-groupe invariant G_1, isomorphe à un groupe donné Γ_2 et tel que G/G_1 soit isomorphe à un groupe donné Γ_1. Nous déterminons, dans le présent mémoire, tous les groupes G possédant une suite $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ de sous-groupes telle que: 1) G_s soit anti-invariant dans G, et 2) pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, la représentation de G_{i-1} à l'aide de G_i soit un groupe de permutations donné. Pour $s = 2$, si G_1 est invariant dans G, et si G_2 se réduit à l'unité, on peut, à partir de nos résultats, résoudre le problème original de Schreier. Nous montrons ceci dans le dernier paragraphe (§ 6) de ce travail. Notre solution est en quelque sorte duale de celle de SCHREIER[7]. En effet, Schreier fait correspondre à une paire de groupes Γ_1, Γ_2 un ensemble de lois de composition du support fixe $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, tandis que nous leur faisons correspondre un ensembles de sous-groupes d'un groupe $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$, organisé par une loi de composition fixe. Mais ce sont les mêmes systèmes de facteurs de Schreier et les mêmes identités fondamentales entre ces systèmes de facteurs que notre solution met en évidence. Naturellement, ces systèmes de facteurs ont dans notre théorie une toute autre signification que dans celle de Schreier.

La notion du produit complet de groupes abstraits a été signalée dans une Note de L. KALOUJNINE[8], qui a remarqué que c'est une généralisation naturelle d'un concept qu'il a utilisé dans l'étude des p-groupes de Sylow de groupes symétriques de degré p^m. Ces p-groupes de Sylow sont, en effet, des produits complets de m groupes cycliques d'ordre p.

M. KRASNER a remarqué que, dans le cas $s = 2$, on peut retrouver, à partir du concept de produit complet des groupes abstraits, les systèmes de facteurs de O. Schreier et les identités fondamentales qui existent entre eux (§ 6).

La présente première communication comprend les §§ 1—2; les §§ 3—6 seront publiés prochainement.

Conventions concernant la terminologie et les notations.

On se servira, au cours de ce travail, de la terminologie généralement acceptée dans la théorie des groupes abstraits et dans la théorie des groupes de permutations. Le lecteur pourra consulter, à ce sujet, n'importe quel livre moderne sur la théorie des groupes. Pour les notions et les notations de la théorie des ensembles, nous avons adopté la terminologie de BOURBAKI.

A part cela, nous tenons à signaler les conventions suivantes:

1. Nous appelons une suite finie

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_s$$

---

[7]) O. SCHREIER, Über die Erweiterung von Gruppen I., *Monatshefte für Math. und Phys.*, **34** (1926), S. 165—180.

[8]) L. KALOUJNINE, Sur les p-groupes de Sylow du groupe symétrique de degré p^m, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **221** (1945), p. 222—224.

de sous-groupes d'un groupe G, telle que, pour tout $i=1,2,\ldots,s$, G_i soit un sous-groupe invariant de G_{i-1}, *une suite de composition* (incomplète).

2. Un sous-groupe g d'un groupe G sera dit *anti-invariant* dans G, s'il ne contient, en dehors de l'unité, aucun sous-groupe invariant de G.

3. G étant un groupe, et g étant un sous-groupe de G, l'ensemble des classes à droite $ag\,(a\in G)$ dans G suivant g sera noté G/g. Les éléments de G/g seront désignés par des majuscules latines X, Y, Z.

4. Si θ est l'application d'un ensemble M dans un ensemble N (pouvant coincider avec M) on notera $\theta\cdot x$ l'image d'un $x\in M$ par θ. On séparera, donc, le symbole qui désigne l'application et l'élément qu'elle transforme par un "$\cdot$" (par contre on n'emploiera jamais le signe . pour désigner la composition dans un monoide). Avec cette notation, si θ et ψ sont deux applications composables, on a $\psi\cdot(\theta\cdot x)=$ $=\psi\,\theta\cdot x$.

Si $\theta(t)$ est l'application de M dans N dependant d'un paramètre t parcourant un ensemble T, on notera donc $\theta(t)\cdot x$ l'image d'un $x\in M$ par $\theta\,t)$. Comme un tel cas se présente souvent dans notre travail, il aurait été incommode d'écrire l'image de x par θ sous la forme $\theta(x)$, car on serait alors obligé d'écrire, pour $\theta=\theta(t)$, l'expression incommode $\theta(t)(x)$.

D'autres conventions, plus particulières, seront indiquées dans le texte, au fur et à la mesure des besoins.

§ 1. Produit complet de groupes de permutations.

Soit $M_1, M_2,\ldots, M_s$ une suite finie d'ensembles et soit, pour tout $i=1,2,\ldots,s$, Γ_i un groupe de permutations de l'ensemble M_i, dont l'unité sera notée e_i. Considérons le produit (au sens de la théorie des ensembles) $M=M_1\times M_2\times\ldots\times M_s$ des ensembles M_i, autrement dit l'ensemble des suites $m=(m_1, m_2,\ldots, m_s)$, où, pour tout i, m_i parcourt les éléments de M_i. m_i sera dite la *i-ième coordonnée* de m. En général, si x est un élément de M et si les coordonnées de x ne sont pas déjà désignées de quelque manière, la i-ième coordonnée de x sera notée $(x)_i$ (où on omettra les parenthèses en écrivant simplement x_i, si aucune confusion n'est à craindre).

Pour tout $i=1,2,\ldots,s$, les produits $M_1\times M_2\times\ldots\times M_i$ et, si $i<s$, $M_{i+1}\times\ldots\times M_{s-1}\times M_s$ seront dits la *i-section* et le *i-reste* de M et seront notés M^i et ${}^iM$.[1]) Visiblement, M peut-être identifié avec $M^i\times{}^iM$ en identifiant un $x=(x_1, x_2,\ldots, x_s)$ avec $(x^i, {}^ix)$, où $x^i=(x_1, x_2,\ldots, x_i)$ et où ${}^ix=(x_{i+1}, x_{i+2},\ldots, x_s)$. x^i et ${}^ix$ seront appelés la *i-section* et le *i-reste* de x. Si $j<i$, la j-section ${}^j(M^i)=({}^jM)^i$ de M^i et celle ${}^j(x^i)=$ $=(x_{j+1}, x_{j+2},\ldots, x_i)$ de x^i seront notés ${}^jM^i$ et ${}^jx^i$. Si $i<q\leqq j$, on a $({}^jx^i)_q=x_q$. On a évidemment $M^s=M$ et $x^s=x$. Quand $j\leqq i$, pour deux

---

[1]) Les indices supérieurs à droite sont écrits sans parenthèse, car les puissances ne sont employées nulle part (à l'exception de l'alinéa 5 du § 5, où il sera précisé explicitement qu'il s'agit de puissances) au cours de ce travail. Ainsi, aucune confusion n'est à craindre.

éléments x^i et y^i de M^i, la relation $(x^i)^j = (y^i)^j$ (autrement dit la coïncidence des j premières coordonnées de x^i et de y^i) est une équivalence dans M^i, notée D^i_j et appelée le *j-ième diviseur* de M^i.[2]) On identifiera toute classe de cette équivalence avec l'élément de M^j qui est la j-section des éléments de cette classe. L'ensemble M^j devient ainsi l'ensemble quotient de M^i par la relation d'équivalence définie ci-dessus. Toutes ces identifications sont cohérentes en ce sens que, pour $j < \bar{\imath} < i$, $D^{\bar{\imath}}_j$ est le quotient au sens de BOURBAKI[3]) de D^i_j par $D^i_{\bar{\imath}}$[4]). On identifiera par suite le diviseur $D^{\bar{\imath}}_j$ de $M^{\bar{\imath}}$ avec celui D^i_j de M^i. Pour cette raison on ecrira D_j au lieu de D^i_j (et, en cas de besoin, on parlera de diviseur D_j dans M^i).

Nous aurons aussi à considérer le *0-ième diviseur* D_0 de M^i, qui est simplement l'équivalence amorphe de M^i (c'est-à-dire l'équivalence, dont la seule classe est M^i lui-même). L'ensemble quotient de M^i par la relation d'équivalence D_0 et son unique élément ne dépendent pas, en vertu de l'identification de M^j avec M^i/D_j $(j<i)$, du choix de $i \leqq s$ et seront désignés par M^0 et m^0. Donc si x^0 est la classe $(\bmod D_0)$ de $x^i \in M^i$, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$ et $x^i \in M^i$, on a $x^0 = m^0$.

Considérons les applications

$$\sigma = \{x \to \sigma . x\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_s) \to ((\sigma . x)_1, (\sigma . x)_2, \ldots, (\sigma . x)_s)\}$$

de l'ensemble M dans lui-même qui satisfont aux deux conditions suivantes:

1. *Pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$ la i-ième coordonnée $(\sigma . x)_i$ de $\sigma . x$ ne dépend que des i premières coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_i$ de x, c'est-à-dire de sa i-section x^i.*

Il existe donc, pour une telle application σ et pour tout i, une fonction $\sigma_i(x^i) = \sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_i)$, définie sur M^i et à valeurs dans M_i, telle que

$$(\sigma . x)_i = \sigma_i(x^i).$$

Par suite, $(\sigma . x)^i$ ne dépend aussi que de x^i, d'où il résulte que, pour tout i, une telle application σ est compatible avec l'équivalence D_i. L'application $\sigma^i = \{x^i \to (\sigma . x)^i\}$ induite par σ dans l'ensemble quotient $M^i = M/D_i$, qui sera dite la *i-section* de σ, satisfait, pour

---

[2]) On écrira donc, conformément à la notation de BOURBAKI, *Théorie des Ensembles. Fascicule des résultats* (Paris, 1939), p. 29, $x^i \equiv y^i \pmod{D^i_j}$ quand $(x^i)^j = (y^i)^j$.

[3]) loc. cit.[2]), p. 32.

[4]) Autrement dit, l'identification des classes de M^i suivant D^i_j avec les éléments de M^j est la même que celle qu'on obtient en identifiant d'abord les classes de M^i suivant $D^i_{\bar{\imath}}$ avec les éléments de $M^{\bar{\imath}}$, et en identifiant ensuite les classes de $M_{\bar{\imath}}$ suivant $D^{\bar{\imath}}_j$ avec les éléments de M^j.

tout $j \leq i$, à la même condition 1. On a, si $j < i$, $\sigma^j = (\sigma^i)^j$. Par conséquent, si $j < i$, les j premières coordonnées de $\sigma^i \cdot x^i$ ne dépendent que des j premières coordonnées de x^i. Ainsi une classe suivant D^j dans M^i est appliquée par σ^i dans une classe suivant le même diviseur.

Soit $m^j = (m_1, m_2, \ldots, m_j)$ un élément de M^j. Considérons les éléments $x^i \in M^i$ qui sont dans la classe suivant D^j identifiée avec m^j.[5]) $\{{}^j x^i = {}^j(x^i) \longrightarrow {}^j(\sigma^i \cdot x^i)\}$ est une application de ${}^j M^i$ dans lui même, ne dépendant que de $m^j \in M^j$ et satisfaisant, visiblement, à la condition 1. Elle sera notée ${}^j\sigma^i(m^j) \cdot {}^j x^i$ ou ${}^j\sigma^i(m_1, m_2, \ldots, m_j) \cdot {}^j x^i$. (Si $i = s$, ${}^j\sigma^s$ sera aussi notée ${}^j\sigma$). En particulier, on a ${}^{i-1}\sigma^i(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}) \cdot x_i = \sigma_i(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i)$, où $\sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ est l'application définie plus haut. On la notera aussi $\sigma_i(m^{i-1}).x_i$.

2. *Quel que soit $i = 1, 2, \ldots, s$, pour tout $m^{i-1} = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}) \in M^{i-1}$ l'application $\sigma_i(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}) \cdot x_i$ de M_i dans lui-même est une permutation $a_\sigma(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1})$ appartenant au groupe Γ_i.*

Ainsi, σ^i applique *biunivoquement* toute classe

$$m^{i-1} = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}) \in M^{i-1}$$

dans M^i suivant D_{i-1}, *sur* la classe $\sigma^{i-1} \cdot m^{i-1} = (m'_1, m'_2, \ldots, m'_{i-1})$ dans M^i suivant D_{i-1}. Il est visible que si σ, satisfaisant à la condition 1, satisfait aussi à la condition 2 pour les groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, σ^i y satisfait pour les groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i$, et ${}^j\sigma^i$ y satisfait pour les groupes $\Gamma_{j+1}, \Gamma_{j+2}, \ldots, \Gamma_i$; il est aussi très facile à voir, que si σ satisfait à la condition 1, il satisfait aussi à la condition 2, si σ^i et, pour tout $x^i \in M^i$, ${}^i\sigma(x^i)$ y satisfont.

Montrons qu'une application σ satisfaisant aux conditions 1 et 2 est une permutation de M. Comme $M = M^s$, il suffit de démontrer ce fait, par induction sur i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, pour tout σ^i, considéré comme application de M^i dans lui-même. Or, ceci est clair (en vertu de la condition 2) pour $i = 1$. Supposons qu'il en soit ainsi pour un $i < s$. M^i est l'ensemble des classes dans M^{i+1} (mod D^i) et, par hypothèse, σ^{i+1} applique toute classe $x^i \in M^i$ *dans* une classe $\bar{x}^i \in M^i$ de manière que $x^i \longrightarrow \bar{x}^i$ soit une application biunivoque de M^i sur lui-même. D'autre part, en vertu de la remarque qui précède, σ^{i+1} applique biunivoquement x^i sur $\bar{x}^i$, quand on les considère somme des sous-ensembles de M^{i+1}. Ainsi, σ^{i+1} applique biunivoquement la réunion M^{i+1} de toutes les classes $x^i \in M^i$ sur la réunion des $\bar{x}^i$ correspondants, qui est aussi M^{i+1}; donc σ^{i+1} est bien une permutation de M^{i+1}.

Considérons pour des entiers i, $1 \leq i \leq s$, des applications $f(x^{i-1})$ de l'ensemble $M^{i-1} = M/D_{i-1}$ dans le groupe Γ_i [en particulier, si $i = 1$, $M^0 = M/D^0$ est l'ensemble réduit à un seul élément et, par suite $f(x^0)$ peut être considéré

[5]) Autrement dit x est de la forme $(m_1, m_2, \ldots, m_j, *, *, \ldots, *)$.

comme une constante, autrement dit comme un élément fixe de Γ_1]. L'ensemble de telles applications $f(x^{i-1})$ sera noté F^i. On définira l'inverse d'une fonction $f(x^{i-1})\in F^i$ et le composé des fonctions $f(x^{i-1})$, $g(x^{i-1})\in F^i$, (qui sont les fonctions à valeur dans le groupe Γ_i), comme on le fait habituellement pour les fonctions à valeur dans un groupe. Un $a_i\in\Gamma_i$ sera identifié avec la fonction $f(x^{i-1})$ identiquement égale à a_i sur M^{i-1}, et cette fonction sera notée a_i (ou, quand on voudra mettre en évidence son argument, $a_i(x^{i-1})$).

σ étant une application de M satisfaisant aux conditions 1 et 2, on a vu que, pour tout $i=1,2,\dots,s$ et pour tout $x^{i-1}=$ $=(x_1,x_2,\dots,x_{i-1})\in M^{i-1}$, σ détermine une permutation $a_\sigma(x^{i-1})=$ $=a_\sigma(x_1,x_2,\dots,x^{i-1})$ telle que $(\sigma.x)_i=a_\sigma(x^{i-1}).x_i$. Ainsi peut-on faire correspondre à chaque σ une suite $A_\sigma=[a_\sigma(x^0), a_\sigma(x^1),\dots,a_\sigma(x^{s-1})]$ de fonctions $a_\sigma(x^{i-1})\in F^i\,(i=1,2,\dots,s)$ dite *tableau des permutations* associé à σ, et la donnée de ce tableau détermine aussi σ, car, pour tout $i=1,2,\dots,s$ et pour $x\in M$, elle détermine $(\sigma.x)_i$.

Inversement, si $A=[a(x^0),a(x^1),\dots,a(x^{s-1})]$ est une suite de fonctions $a(x^{i-1})\in F^i$, l'application

$$\sigma=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_s)\longrightarrow(a(x^0).x_1,\,a(x^1).x_2,\dots,a(x^{s-1}).x_s)\}$$

de M satisfait aux conditions 1 et 2 et A est précisément le tableau A_σ qui lui est associé. Ainsi a-t-on établi une correspondance biunivoque entre les applications de M satisfaisant aux conditions 1 et 2 et les tableaux décrits ci-dessus. Le plus souvent, une telle application σ de M et son tableau A_σ seront identifiés et notés par une même lettre. Le tableau associé à la permutation identique de M est, visiblement, $e=[e_1,e_2,\dots,e_s]$.

Montrons que l'ensemble $\mathfrak{G}$ des applications de M satisfaisant aux conditions 1 et 2 (nous avons déjà montré que ces applications sont des permutations de M) est un groupe de permutations de M.

Soient $\sigma,\sigma'\in\mathfrak{G}$. Alors, si $x\in M$, la i-section $(x')^i$ de $x'=\sigma.x$ ne dépend, en vertu de la condition 1, que de celle x^i de x, et de même, la i-section $(x'')^i$ de $x''=\sigma'.x'=\sigma'.(\sigma.x)$ ne dépend que de $(x')^i$. Donc $(x'')^i$ ne dépend que de x^i, et $\sigma'\sigma$ satisfait à la condition 1. D'autre part, si x^{i-1} est fixé, $(x')^{i-1}$ est aussi fixé (condition 1) et $x_i\longrightarrow x'_i$ est une permutation $a(x^{i-1})\in\Gamma_i$ (condition 2). De même, quand $(x')^{i-1}$ est fixé, $x'_i\longrightarrow x''_i$ est une permutation $a'((x')^{i-1})\in\Gamma_i$ qui, en vertu de ce qui précède, est déterminée par la donnée de σ' et de x^{i-1}. Ainsi, si x^{i-1} est fixé, $x_i\longrightarrow x''_i$ est la permutation $a'((x')^{i-1})a(x^{i-1})\in\Gamma_i$, et $\sigma'\sigma$ satisfait aussi à la condition 2.

Soit $\sigma\in\mathfrak{G}$. Puisque $x^i\longrightarrow(x')^i=(\sigma.x)^i$ est une permutation de M^i, x^i ne dépend que de $(x')^i$ (donc la permutation $\sigma^{-1}=\{x'=\sigma.x\longrightarrow x\}$

satisfait à la condition 1) et, en particulier, si l'on fixe $(x')^{i-1}$, x^{i-1} devient aussi fixe. Dès lors, si l'on ne considère que les $x \in M$ tels que $(x')^{i-1} = (\sigma . x)^{i-1}$ soit fixe, $x_i \longrightarrow (\sigma . x)_i$ est, en vertu de la condition 2, une permutation de M_i appartenant à Γ_i. Il en est donc de même de l'application inverse $(\sigma . x)_i \longrightarrow x_i = (\sigma^{-1}(\sigma . x))_i$, et, par suite, σ^{-1} satisfait aussi à la condition 2, d'où $\sigma^{-1} \in \mathfrak{G}$. Ainsi, $\mathfrak{G}$ est bien un groupe.

$$A = [a(x^0), a(x^1), \ldots, a(x^{s-1})] \quad \text{et} \quad A' = [a'(x^0), a'(x^1), \ldots, a'(x^{s-1})]$$

étant les tableaux associés des $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{G}$, le tableau associé à $\sigma'\sigma$ est

$[a'a, a'(a \cdot x_1)a(x_1), \ldots, a'(a \cdot x_1, a(x_1) \cdot x_2, \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-2}) \cdot x_{s-1})a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})]$,

car

$$\begin{aligned}
A' . (A \cdot x) &= A' . ([a, a(x_1), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})] \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_s)) = \\
&= A' \cdot (a \cdot x_1, a(x_1) \cdot x_2, \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}) \cdot x_s) = \\
&= [a', a'(x_1), \ldots, a'(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})] \cdot (a \cdot x_1, a(x_1) \cdot x_2, \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}) \cdot x_s) = \\
&= (a' \cdot (a \cdot x_1), a'(a \cdot x_1) \cdot (a(x_1) \cdot x_2), \ldots, a'(a \cdot x_1, a(x_1) \cdot x_2, \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-2}) \cdot x_{s-1}) \cdot \\
&\qquad \cdot (a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}) \cdot x_s)) = \\
&= (a'a \cdot x_1, a'(a \cdot x_1)a(x_1) \cdot x_2, \ldots, a'(a \cdot x_1, a(x_1) \cdot x_2, \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-2}) \cdot \\
&\qquad \cdot x_{s-1}) \, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}) \cdot x_s) = \\
&= [a'a, a'(a \cdot x_1)a(x_1), \ldots, a'(a \cdot x_1, a(x_1) \cdot x_2, \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-2}) \cdot x_{s-1})a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})] \cdot \\
&\qquad \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_s).
\end{aligned}$$

Ce tableau sera noté $A'A$ et sera dit le *composé* des A', A. Avec cette loi de composition de tableaux, l'identification des permutations $\sigma \in \mathfrak{G}$ et de leurs tableaux associés est non seulement une identification d'ensembles, mais une identification de groupes.

On vérifie également que dans ce groupe de tableaux le tableau inverse A^{-1} du tableau

$$A = [a, a(x_1), a(x_1, x_2), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})]$$

est de la forme

$$A^{-1} = [a^{-1}, (a(a^{-1} \cdot x_1))^{-1}, (a(a^{-1} \cdot x_1, (a(x_1))^{-1} \cdot x_2))^{-1}, \ldots].$$

Le groupe $\mathfrak{G}$ qu'on vient de définir (considéré aussi bien comme un groupe de permutation de $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_s$ que comme un groupe de tableaux) sera appelé *le produit complet* des $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ et sera noté $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$.

Soient $\mathfrak{G}^i = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_i$ et ${}^i\mathfrak{G} = \Gamma_{i+1} \circ \Gamma_{i+2} \circ \ldots \circ \Gamma_s$. Montrons que

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^i \circ {}^i\mathfrak{G},$$

c'est-à-dire que

$$\mathfrak{G} = (\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_i) \circ (\Gamma_{i+1} \circ \Gamma_{i+2} \circ \ldots \circ \Gamma_s),$$

ce qui démontre, en particulier, l'associativité du produit complet et justifie notre notation:

En effet, soient $\sigma \in \mathfrak{G}$ et $x \in M$. On avait identifié x avec $(x^i, {}^i x)$ $(x^i \in M^i, {}^i x \in {}^i M)$, et on a vu que $x^i \longrightarrow (\sigma \cdot x)^i$ est une application de M^i, satisfaisant aux conditions 1 et 2 pour les groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i$, d'où $\sigma^i \in \mathfrak{G}^i$. D'autre part, on a vu que si l'on fixe $x^i, {}^i x \longrightarrow {}^i(\sigma \cdot x)$ devient une permutation ${}^i\sigma(x^i)$ de ${}^i M$ satisfaisant aux mêmes conditions pour les $\Gamma_{i+1}, \Gamma_{i+2}, \ldots, \Gamma_s$; donc, ${}^i\sigma(x^i) \in {}^i\mathfrak{G}$. Ainsi

$$x = (x^i, {}^i x) \longrightarrow \sigma \cdot x = (\sigma^i \cdot x^i, {}^i\sigma(x^i) \cdot {}^i x)$$

est une permutation de $M^i \times {}^i M$, satisfaisant aux conditions 1 et 2 pour $\mathfrak{G}^i$ et ${}^i\mathfrak{G}$, donc

$$\sigma \in \mathfrak{G}^i \circ {}^i\mathfrak{G}.$$

Inversement, si σ est un élément de $\mathfrak{G}^i \circ {}^i\mathfrak{G}$, $(\sigma \cdot x)^i$ ne dépend que de x^i, et $x^i \longrightarrow (\sigma \cdot x)^i$ est une permutation $\bar{\sigma}$ de M^i appartenant à $\mathfrak{G}^i$, donc satisfaisant aux conditions 1 et 2 pour les $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i$. Donc, si $j \leqq i$, $(\sigma \cdot x)^j$ ne dépend que de x^j. D'autre part, si l'on fixe $x^i, {}^i x \longrightarrow {}^i(\sigma \cdot x)$ devient une permutation $\bar{\bar{\sigma}}(x^i) \in {}^i\mathfrak{G}$ de ${}^i M$. Elle satisfait donc aux conditions 1. et 2. pour les $\Gamma_{i+1}, \Gamma_{i+2}, \ldots, \Gamma_s$. Par suite, si $j > i$, quand on fixe x^i,

$$((\sigma \cdot x)_{i+1}, (\sigma \cdot x)_{i+2}, \ldots, (\sigma \cdot x)^j) = (\bar{\bar{\sigma}}(x^i; {}^i x)_{i+1}, \bar{\bar{\sigma}}(x^i; {}^i x)_{i+2}, \ldots, \bar{\bar{\sigma}}(x^i; {}^i x)_j)$$

ne dépend que de $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_j$, c'est-à-dire $(\sigma x)^j$ ne dépend que de x^j. Ainsi, σ satisfait à la condition 1. pour tout $j = 1, 2, \ldots, s$, et on a $\bar{\sigma} = \sigma^i$, $\bar{\bar{\sigma}}(x^i) = {}^i\sigma(x^i)$. Donc σ^i et pour tout $x^i \in M^i$, ${}^i\sigma(x^i)$ satisfont à la condition 2, et on a vu que, dans ces conditions, σ y satisfait aussi ce qui prouve que $\sigma \in \mathfrak{G}$.

Si tous les M^i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ sont des ensembles finis, c'est-à-dire si tous les Γ_i sont des groupes de degré, et, par suite, d'ordre fini et si m_i, n_i sont le degré, et l'ordre de Γ_i, $a(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ est une fonction définie sur l'ensemble M^{i-1} de $m_1 m_2 \ldots m_{i-1}$ éléments et à valeur dans l'ensemble Γ_i de n_i éléments. Le nombre de telles fonctions distinctes est $n_i^{m_1 m_2 \ldots m_{i-1}}$, et, par conséquent, il existe $n_1 n_2^{m_1} n_3^{m_1 m_2} \ldots n_s^{m_1 m_2 \ldots m_{s-1}}$ tableaux distincts de la forme $A = [a, a(x_1), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})]$ associés aux permutations de M satisfaisant aux conditions 1 et 2. Donc, dans ce cas, l'ordre du produit complet

$$\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$$

est

$$n_1 n_2^{m_1} n_3^{m_1 m_2} \ldots n_s^{m_1 m_2 \ldots m_{s-1}}.$$

En particulier,

$$\text{degré}\,(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) = \text{degré}\,\Gamma_1 \cdot \text{degré}\,\Gamma_2$$

et

$$\text{ordre}\,(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) = \text{ordre}\,\Gamma_1 \cdot (\text{ordre}\,\Gamma_2)^{\text{degré}\,\Gamma_1}.$$

Comme en général

$$(\text{ordre}\,\Gamma_1) \cdot (\text{ordre}\,\Gamma_2)^{\text{degré}\,\Gamma_1} \neq \text{ordre}\,\Gamma_2 \cdot (\text{ordre}\,\Gamma_1)^{\text{degré}\,\Gamma_2}$$

on voit que $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ et $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$, n'ayant pas un même ordre, ne sont pas, en général, isomorphes. Ainsi la composition complète des groupes de permutation n'est pas, en général, commutative.

Si $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ est le produit complet des groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ de permutations d'ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$ et si, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, s$, $\overline{\Gamma}_i$ est un sous-groupe de $\mathfrak{G}_i$, $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\Gamma}_1 \circ \overline{\Gamma}_2 \circ \ldots \circ \overline{\Gamma}_s$ est un sous-groupe de $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ car la condition 1 est la même pour $\mathfrak{G}$ et pour $\overline{\mathfrak{G}}$, et la condition 2 pour $\mathfrak{G}$ entraîne la même condition pour $\mathfrak{G}$.

Si, pour un entier $i = 1, 2, \ldots, s$, Γ_i est l'intersection $\bigcap_\alpha \Gamma_{i,\alpha}$ d'une famille $\{\Gamma_{i,\alpha}\}$ de groupes de permutations $\Gamma_{i,\alpha}$ de M_i, $\mathfrak{G}$ est l'intersection des $\mathfrak{G}_\alpha = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_{i-1} \circ \Gamma_{i,\alpha} \circ \Gamma_{i+1} \circ \ldots \circ \Gamma_s$, où α parcourt les mêmes indices. En effet, σ satisfait à la condition 2 pour $\Gamma_i = \bigcap_\alpha \Gamma_{i,\alpha}$, si, et seulement s'il satisfait à la même condition pour tous les $\Gamma_{i,\alpha}$, et toutes les autres conditions sont les mêmes pour les $\sigma \in \mathfrak{G}$ et pour les $\sigma \in \mathfrak{G}_\alpha$.

Si, pour un entier $i = 1, 2, \ldots, s$, Γ_i est le composé d'une famille $\{\Gamma_{i,\alpha}\}$ de ses sous-groupes, $\mathfrak{G}$ est le composé des

$$\mathfrak{G}_\alpha = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_{i-1} \circ \Gamma_{i,\alpha} \circ \Gamma_{i+1} \circ \ldots \circ \Gamma_s,$$

où α parcourt les mêmes indices.

En vertu de l'associativité de la composition complète, il suffit de démontrer cette affirmation pour $s=2$, car, ceci étant fait, et $\widetilde{\mathfrak{G}}^i$ étant le composé des $\mathfrak{G}_{i-1} \circ \Gamma_{i,\alpha}$, on a bien $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}^{i-1} \circ \Gamma_i) \circ {}^i\mathfrak{G} = \widetilde{\mathfrak{G}}^i \circ {}^i\mathfrak{G}$, et ce dernier groupe est le composé des $(\mathfrak{G}^{i-1} \circ \Gamma_{i,\alpha}) \circ {}^i\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\alpha$. Deux cas sont à considérer:

1) $i=1$; soit $\widetilde{\mathfrak{G}}$ le composé des $\mathfrak{G}_\alpha$. On a $\widetilde{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{G}$, et, puisque $\sigma \to \sigma^i$ est un homomorphisme, σ^1 parcourt un sous-groupe $\widetilde{\Gamma}$ de Γ_1 quand σ parcourt $\widetilde{\mathfrak{G}}$. Puisque tout $\mathfrak{G}_\alpha$ est $\subseteq \widetilde{\mathfrak{G}}, \Gamma_{1,\alpha} \subseteq \widetilde{\Gamma}$, et puisque Γ_1 est le composé des $\Gamma_{1,\alpha}$, on a $\widetilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1$. Par suite, si $\sigma \in \mathfrak{G}$, il existe un $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\mathfrak{G}}$ tel que $\widetilde{\sigma}_1 = \sigma^1$, c'est-à-dire tel que $(\sigma\widetilde{\sigma}^{-1})^1 = e_1$. Par conséquent, $\sigma\widetilde{\sigma}^{-1} \in \mathfrak{G}$ satisfait aux conditions 1. et 2. pour les groupes $\{e_1\}, \Gamma_2$. Pour un α arbitraire, on a $\sigma\widetilde{\sigma}^{-1} \in \{e_1\} \circ \Gamma_2 \subseteq \Gamma_{1,\alpha} \circ \Gamma_2 \subseteq \mathfrak{G}_\alpha \subseteq \widetilde{\mathfrak{G}}$; donc, on a $\sigma \in \widetilde{\mathfrak{G}}\widetilde{\sigma} \subseteq \widetilde{\mathfrak{G}}\widetilde{\mathfrak{G}} = \widetilde{\mathfrak{G}}$, d'où $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$.

2) $i=2$; alors, puisque $[e_1, a(x_1)][e_1, b(x_1)] = [e_1, a(x_1)\, b(x_1)]$, $\{e_1\} \circ \Gamma_2$ est le composé des $\{e_1\} \circ \Gamma_{2,\alpha} \subseteq \Gamma_1 \circ \Gamma_{2,\alpha}$, d'où $\widetilde{\mathfrak{G}} \supseteq \{e_1\} \circ \Gamma_2$. Si α est un indice arbitraire, $(\sigma_\alpha)^1$ parcourt Γ_1 quand σ_α parcourt $\mathfrak{G}_\alpha = \Gamma_1 \circ \Gamma_{2,\alpha}$. Ainsi, si $\sigma \in \mathfrak{G}$, il existe un $\sigma_\alpha \in \mathfrak{G}_\alpha$ tel que $(\sigma_\alpha)^1 = \sigma^1$, d'où $\sigma\sigma_\alpha^{-1} \in \{e_1\} \circ \Gamma_2 \subseteq \widetilde{\mathfrak{G}}$ et $\sigma \in \sigma_\alpha \widetilde{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{G}_\alpha \widetilde{\mathfrak{G}} = \widetilde{\mathfrak{G}}$, et on a $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$.

§ 2. Quelques propriétés élémentaires du produit complet.

1. Soit $\mathfrak{G}$ le produit complet des groupes de permutations $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ des ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$, et soit $i \leqq s$. On a vu que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{G}$, la permutation σ^i que σ induit dans M^i satisfait également aux conditions 1 et 2 et, par suite, est un élément du produit complet $\mathfrak{G}^i = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_i$. D'autre part, pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{G}$, on a $(\sigma\tau)^i = \sigma^i\tau^i$, car, pour tout $x \in M$, on a: $(\sigma\tau)^i \cdot x^i = (\sigma\tau \cdot x)^i = (\sigma \cdot (\tau \cdot x))^i = \sigma^i \cdot (\tau x)^i = \sigma^i \cdot (\tau^i \cdot x^i) = \sigma^i\tau^i \cdot x^i$. Ainsi, $\sigma \to \sigma^i$ est un homomorphisme de $\mathfrak{G}$ *dans* $\mathfrak{G}^i$. Montrons que c'est un homomorphisme de $\mathfrak{G}$ non seulement *dans* $\mathfrak{G}^i$ mais *sur* $\mathfrak{G}^i$. En effet, $\overline{\omega}$ étant un élément de $\mathfrak{G}^i$, la permutation ω de $M = M^i \times {}^iM$, définie par

$$(\omega \cdot x)^i = \overline{\omega} \cdot x^i \quad \text{et} \quad {}^i(\omega \cdot x) = {}^ix,$$

satisfait visiblement aux conditions 1 et 2 et appartient, par suite, à $\mathfrak{G}$, et on a $\omega^i = \overline{\omega}$. L'homomorphisme $\sigma \to \sigma^i$ de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{G}^i$ sera dit *canonique*. Son noyau est un sous-groupe invariant ${}^i\Delta(\mathfrak{G})$ de $\mathfrak{G}$ (qui au cours de ce travail sera d'ailleurs simplement noté ${}^i\Delta$, car cela ne peut pas prêter à confusion). ${}^i\Delta$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{G}$ qui conservent les i premières coordonnées de tous les éléments de M. En particulier, ${}^s\Delta$ conserve tout $x \in M$ et se réduit au groupe unité.

L'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{G}$ qui conservent les i premières coordonnées de tout élément de M est un sous-groupe invariant ${}^i\Delta$ de $\mathfrak{G}$, tel que $\mathfrak{G}/{}^i\Delta$ soit isomorphe au groupe $\mathfrak{G}^i = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_i$, et $\sigma \to \sigma^i$ est l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}/{}^i\Delta$.

On identifiera chaque $\overline{\sigma} \in \mathfrak{G}^i$ avec l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{G}$ tels que $\sigma^i = \overline{\sigma}$, et alors, en vertu de ce qui précède, $\mathfrak{G}^i$ s'identifie en tant que groupe avec $\mathfrak{G}/{}^i\Delta$.

Visiblement, ${}^i\Delta$, en tant que groupe de tableaux, est l'ensemble des tableaux de la forme

$$[e_1, e_2, \ldots, e_i, a(x_1, x_2, \ldots, x_i), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})],$$

c'est-à-dire des tableaux, tels que, pour tout $j \leqq i$, on ait $a(x^{j-1}) = e_j$.

Soit $\sigma \in {}^i\Delta$. Étant donné un $\overline{m} \in M^i$, faisons correspondre à σ la permutation $\sigma_{\overline{m}}$ de M, dite *$\overline{m}$-projection* de σ, telle que

$$\sigma_{\overline{m}} \cdot x = x \quad \text{si } x^i \neq \overline{m} \quad \text{et} \quad \sigma_{\overline{m}} \cdot x = \sigma \cdot x \quad \text{si } x^i = \overline{m}.$$

On voit que $\sigma_{\overline{m}}$ laisse invariant tous les $x \in M$ sauf ceux qui se trouvent dans $\overline{m}$, considéré comme une classe de $M (\text{mod } D^i)$. Le seul élément de ${}^i\Delta$ dont toutes les projections sont des permutations identiques est la permutation identique de M, car $\sigma \cdot x = \sigma_{x^i} \cdot x$. D'autre part, on vérifie que la permutation $\sigma_{\overline{m}}$ de $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_s$ satisfait aux conditions 1 et 2 et se trouve, donc, dans $\mathfrak{G}$; mais, comme elle conserve tout $x \in M \pmod{D_i}$, c'est un élément de ${}^i\Delta$. Les relations définissant $\sigma_{\overline{m}}$ montrent que, pour tous $\sigma, \tau \in {}^i\Delta$, on a $(\sigma\tau)_{\overline{m}} = \sigma_{\overline{m}}\tau_{\overline{m}}$. $\sigma \to \sigma_{\overline{m}}$ est donc un endomorphisme de ${}^i\Delta$. On notera ${}^iT_{\overline{m}}$ le sous-groupe de ${}^i\Delta$ qui est l'image de ${}^i\Delta$par cet endomorphisme. Tout élément de ${}^iT_{\overline{m}}$ coïncide avec sa $\overline{m}$-projection.

Considérons un élément σ de ${}^i\Delta$ et soit $\{\sigma_{\overline{m}}\}_{\overline{m} \in M^i}$ [6]) la famille de ses $\overline{m}$-projections. C'est un élément du groupe produit $\prod_{\overline{m} \in M^i} {}^iT_{\overline{m}}$, et il est visible qu'en tant que permutation de M, $\{\sigma_{(\overline{m})}\}_{\overline{m} \in M}$ coincide avec σ. Inversement $\{\sigma_{\overline{m}}\}_{\overline{m} \in M^i}$ étant un élément quelconque de $\prod_{\overline{m} \in M^i} {}^iT_{\overline{m}}$, il est visible que, en tant que permutation de M, c'est un élément de ${}^i\Delta$, et que, pour tout $\overline{m} \in M^i$, sa $\overline{m}$-projection est $\sigma_{\overline{m}}$. Donc ${}^i\Delta$ coïncide avec $\prod_{\overline{m} \in M^i} {}^iT_{\overline{m}}$.

Si M/D_i est fini, ${}^i\Delta$ est le produit direct de ses sous-groupes ${}^iT_{\overline{m}}$.

Faisons correspondre à chaque $\sigma \in {}^iT_{\overline{m}}$ l'application ${}^i\sigma(\overline{m})$ de M^i définie au § 1. Quel que soit $\sigma^* \in {}^i\mathfrak{G}$, il existe un et un seul $\sigma \in {}^iT_{\overline{m}}$ tel que $\sigma^* = {}^i\sigma(\overline{m})$, à savoir σ tel que

$$\sigma \cdot x = x \text{ si } x^i \neq \overline{m}, \quad \sigma \cdot x = (\overline{m}, \sigma^* \cdot {}^ix) \text{ si } x^i = \overline{m}.$$

Un tel σ est, en effet, un élément de ${}^i\Delta$. Ainsi, $\sigma \to {}^i\sigma(\overline{m})$ est une application biunivoque de ${}^iT_{\overline{m}}$ sur ${}^i\mathfrak{G}$. C'est un isomorphisme, car, si $\sigma, \tau \in {}^i\Delta$, et si $x^i = \overline{m}$, on a

$$(\overline{m}, {}^i(\sigma\tau)(\overline{m}; {}^ix)) = \sigma\tau \cdot x = \sigma \cdot (\tau \cdot x) = (\overline{m}, {}^i\sigma(\overline{m}; {}^i\tau(\overline{m}; {}^ix))),$$

$$\text{car } \tau \cdot x = (\overline{m}, {}^i\tau(\overline{m}; {}^ix)).$$

Ainsi ${}^iT_{\overline{m}}$ est isomorphe à ${}^i\mathfrak{G}$. Par suite l'application $\sigma \to \{\sigma^i(\overline{m})\}_{\overline{m} \in M^i}$ $(\sigma \in {}^i\Delta)$ est un isomorphisme de ${}^i\Delta = \prod_{\overline{m} \in M^i} {}^iT_{\overline{m}}$ sur $({}^i\mathfrak{G})^{M^i}$. Cet isomorphisme, ainsi que son inverse, seront dits *canoniques*.

---

[6]) Etant donné une famille de groupes F_ν (ν parcourant un ensemble d'indices N) de permutations opérant chacune sur un ensemble C_ν (où les C_ν sont disjoints deux à deux), on considère les permutations φ de l'ensemble $C = \cup C_\nu$ telles que: 1. $\varphi(C_\nu) = C_\nu$; 2. pour tout $\nu \in N$, il existe un $\varphi_\nu \in F_\nu$ tel que pour tout $c_\nu \in C_\nu$, on ait $\varphi \cdot c_\nu = \varphi_\nu \cdot c_\nu$. Une telle permutation sera désignée par le symbole $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in N}$. Visiblement $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in N}\{\varphi'_\nu\}_{\nu \in N} = \{\varphi_\nu\varphi'_\nu\}_{\nu \in N}$. Le groupe de permutations de C ainsi défini sera noté $F = \prod_{\nu \in N} F_\nu$ et sera appelé le produit des F_ν (ce qui généralise la définition de BOURBAKI, *Algèbre*, Chap. I; *Structures algébriques* (Paris, 1942), p. 73—79).

En particulier, quand l'ensemble $N = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s\}$ est fini, le produit de groupes de permutations F_ν, $\nu \in N$, sera appelé leur *produit direct* et sera noté $F_{\nu_1} \times F_{\nu_2} \times \ldots \times F_{\nu_s}$. On plongera chaque F_ν dans F en identifiant tout $\varphi_\nu \in F_\nu$ avec l'élément $\varphi = \{\varphi'_\mu\}_{\mu \in N} \in F$ tel que φ'_μ soit l'identité ou φ_ν suivant que $\mu \neq$ ou $= \nu \cdot F$ sera dit aussi le produit de ses sous-groupes ainsi identifiés avec les F_ν. C'est en ce sens que ${}^i\Delta$ est le produit des groupes ${}^iT_{\overline{m}}$, $\overline{m} \in M^i$.

Ainsi, ${}^{i}\Delta$ *est isomorphe à* $({}^{i}\mathfrak{G})^{M^i}$, $\mathfrak{G} = {}^{0}\Delta \supset {}^{1}\Delta \supset {}^{2}\Delta \supset \ldots \supset {}^{s}\Delta = \{e\}$ (où e est l'unité du groupe $\mathfrak{G}$) *est une suite normale de* $\mathfrak{G}$, *et pour tout* $i = 1, 2, \ldots, s$, on a ${}^{i-1}\Delta/{}^{i}\Delta \simeq \Gamma_i^{M^{i-1}}$. En effet on a $\mathfrak{G}/{}^{i}\Delta = \mathfrak{G}^{i}$, ${}^{i-1}\Delta/{}^{i}\Delta = {}^{i-1}\Delta(\mathfrak{G}^{i})$, ${}^{i-1}(\mathfrak{G}^{i}) = \Gamma_i$ et ${}^{i-1}(M^{i}) = M_i$, d'où ${}^{i-1}\Delta/{}^{i}\Delta = \Gamma_i^{M^{i-1}}$.

Etant donné un sous-groupe G de ${}^{i}\mathfrak{G}$, on appellera *son prolongement dans* ${}^{i}\Delta$ l'image, par l'isomorphisme canonique, de G^{M^i} dans ${}^{i}\Delta$, et on le désignera par $({}^{i}\Delta; G)$. Si aucune confusion n'est possible on le notera simplement ${}^{i}G$.

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_s$ une famille d'ensembles disjoints deux à deux, σ une permutation de leur réunion $E = \bigcup_i E_i$ conservant chaque E_i, et σ^i la permutation qu'elle induit dans E_i. Soient $\mathfrak{E} = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_s$ le produit (au sens de la théorie d'ensembles) de mêmes ensembles, et σ^* la permutation de $\mathfrak{E}$ telle que, pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ $(x_i \in E_i)$, on ait $\sigma^* \cdot x = (\sigma_1 \cdot x_1, \sigma_2 \cdot x_2, \ldots, \sigma_s \cdot x_s)$. L'application $\sigma \to \sigma^*$ est un isomorphisme, car, si $\bar{\sigma}$ est une autre permutation de E de cette forme, on a

$$(\sigma\sigma)^* \cdot x = ((\sigma\bar{\sigma})_1^* \cdot x_1, (\sigma\bar{\sigma})_2^* \cdot x_2, \ldots, (\sigma\bar{\sigma})_s^* \cdot x_s) =$$
$$= (\sigma_1 \cdot (\bar{\sigma}_1 \cdot x_1), \sigma_2 \cdot (\bar{\sigma}_2 \cdot x_2), \ldots, \sigma_s \cdot (\bar{\sigma}_s \cdot x_s)) = \sigma^* \cdot (\bar{\sigma}^* \cdot x),$$

et σ^* est l'identité si, et seulement si tous les σ_i, et, par conséquent, σ, le sont.

On identifiera σ avec σ^*, et, de cette manière le groupe des permutations de E conservant les E_i s'identifiera avec le groupe des permutations de $\mathfrak{E}$ telles que le transformé d'une coordonnée ne dépend pas des autres.

Soit $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ le produit complet des groupes de permutations $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ d'ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$ et soit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma \times \ldots \times \Gamma_s$ leur produit direct. Si $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s) \in \Gamma$ $(\sigma_i \in \Gamma_i)$, σ^* est la permutation de M telle que, pour tout $x \in M$, on a $(\sigma^* \cdot x)_i = \sigma_i \cdot x_i$; autrement dit c'est l'élément de $\mathfrak{G}$ représenté par le tableau

$$A = [a, a(x^1), \ldots, a(x^{s-1})] = [\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s]$$

c'est-à-dire tel que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, $a(x^{i-1})$ soit la constante $\sigma_i \in \Gamma_i$. Ainsi, en vertu de l'identification précédente, Γ est un sous-groupe de $\mathfrak{G}$ à savoir celui des tableaux dont les composantes sont constantes.

2. *Transitivité. Le produit complet* $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ *est un groupe transitif de permutations de* $M = \Pi M_i$, *si et seulement si pour tout* $i = 1, 2, \ldots, s$, Γ_i *est un groupe transitif de permutations de* M_i.

En vertu de l'associativité du produit complet démontrée au § 1, il suffit de démontrer ce fait pour le cas de deux groupes Γ_1, Γ_2.

Supposons que Γ_1 et Γ_2 soient transitifs, et soient (x_1, x_2) et (x_1', x_2') deux éléments arbitraires de $M_1 \times M_2$. En vertu de la transitivité des

Γ_i $(i=1,2)$, il existe un $\sigma_i \in \Gamma_i$ tel que $\sigma_i \cdot x_i = x_i'$. L'élément $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ de $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ applique (x_1, x_2) sur $(\sigma_1 \cdot x_1, \sigma_2 \cdot x_2) = (x_1', x_2')$ et, ainsi, $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ est transitif.

Inversement, supposons que $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ soit transitif. Soient x_1, x_1' deux éléments arbitraires de M_1, et soit $x_2 \in M_2$. Il existe un $\sigma \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ tel que $\sigma \cdot (x_1, x_2) = (x_1', x_2)$. Dès lors, $\sigma^1 \cdot x_1 = x_1'$ et, puisque $\sigma^1 \in \mathfrak{G}^1 = \Gamma_1$, Γ_1 est transitif.

De même, soient x_2, x_2' deux éléments arbitraires de M_2, et soit $x_1 \in M_1$. Il existe un $\sigma \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ tel que $\sigma \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2')$, d'où $\sigma_2(x_1) \cdot x_2 = x_2'$, et, puisque $\sigma_2(x_1) \in \Gamma_2$, Γ_2 est transitif.

3. Soit $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ le produit complet des groupes transitifs $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ des permutations d'ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$, et soit $m = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ un élément fixe de M. On désignera par $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ conservant m^i, autrement dit l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{G}$ telles que

$$\sigma \cdot m \equiv m \pmod{D_i}.$$

$\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ est donc le groupe de tableaux

$$A = [a(x^0), a(x_1), \ldots, a(x^{s-1})]$$

tels que, pour tout $j \leq i$, on ait $a(m^{j-1}) \cdot m_j = m_j$.

La suite des sous-groupes

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0\langle m\rangle \supset \mathfrak{G}_1\langle m\rangle \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_s\langle m\rangle$$

de $\mathfrak{G}$ sera dite *la suite canonique de $\mathfrak{G}$ associée à m.*

Soit $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$. Alors $\sigma \longrightarrow (\sigma \cdot m)_i$ est une application $\varrho_i^{(m)}$ de $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$ dans M_i. Comme $\mathfrak{G}$ est transitif, il existe, quel que soit $x_i \in M_i$, un $\sigma \in \mathfrak{G}$ tel que $\sigma \cdot m = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *)$ et, en vertu de la définition précédente, $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$. Puisque $(\sigma \cdot m)_i = x_i$, on voit que $\varrho_i^{(m)}$ est une application de $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$ non seulement *dans*, mais *sur* M_i.

On va montrer que, si $\sigma, \bar{\sigma} \in \mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$, on a $(\sigma \cdot m)_i = (\bar{\sigma} \cdot m)_i$ si, et seulement si σ et $\bar{\sigma}$ sont dans une même classe à droite $X_i = \sigma\mathfrak{G}_i\langle m\rangle = \bar{\sigma}\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ dans $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$ suivant $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$. En effet, si $\sigma' \in \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$, on a, puisque $(\sigma \cdot x)^i$ ne dépend que de x^i, $(\sigma\sigma' \cdot m)_i = (\sigma \cdot (\sigma' \cdot m))_i = (\sigma \cdot m)_i$, car $(\sigma' \cdot m)^i = m^i$. Inversement, si $\bar{\sigma} \in \mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$ est tel que $(\bar{\sigma} \cdot m)_i = (\sigma \cdot m)_i$, donc $(\bar{\sigma} \cdot m)^i = (\sigma \cdot m)^i$, on a,

$$(\sigma^{-1}\bar{\sigma} \cdot m)^i = (\sigma^{-1}\bar{\sigma})^i \cdot m^i = (\sigma^i)^{-1} \cdot (\bar{\sigma}^i \cdot m^i) = (\sigma^i)^{-1} \cdot (\sigma^i \cdot m^i) = m^i$$

et on a $\sigma^{-1}\bar{\sigma} \in \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$. Ainsi, $\pi_i^{(m)} = (\varrho_i^{(m)})^{-1}$ applique biunivoquement M_i sur l'ensemble $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle / \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ des classes à droite dans $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$ suivant $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$. Si l'on identifie $\pi_i^{(m)} \cdot x_i$ avec x_i $(x_i \in M_i)$ on obtient une identification de $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle / \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ avec M_i, qui sera dite *la première m-identification.*

Comme tout $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle$ conserve m^{i-1}, considéré comme classe mod D_i, il y induit une permutation, à savoir

$$(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i) \to (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, \sigma_i(m^{i-1}) \cdot x_i).$$

Par suite, $\sigma \to \sigma_i(m^{i-1})$ est un homomorphisme de $\mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle$ dans Γ_i. C'est un homomorphisme non seulement *dans*, mais *sur* Γ_i, car, quel que soit $\sigma_i \in \Gamma_i$, l'élément $\sigma = [e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, \sigma_i; *, *, \ldots, *]$ de $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots \times \Gamma_s \subset \mathfrak{G}$ appartient, visiblement, à $\mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle$, et on a $\sigma_i(m^{i-1}) = \sigma_i$.

D'autre part, $\pi_i^{(m)} \cdot x_i$ $(x_i \in M_i)$ est précisément l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle$ qui transforment $(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, m_i)$ en $(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i)$. En particulier $\pi_i^{(m)} \cdot m_i$ est $\mathfrak{G}_i \langle m \rangle$. En vertu de la théorie classique des représentations d'un groupe à l'aide d'un sous-groupe[7]), si $X_i = \pi_i^{(m)} \cdot x_i$ $(X_i \in \mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle / \mathfrak{G}_i \langle m \rangle, x_i \in M_i)$, on a $\sigma X_i = \pi_i^{(m)} \cdot (\sigma_i(m^{i-1}) \cdot x_i)$. Ainsi, la représentation $\sigma_i^* = \{X_i \to \sigma X_i\}$ de $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle$ à l'aide du sous-groupe $\mathfrak{G}_i \langle m \rangle$ de $\mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle$ est le transformé $\pi_i^{(m)} \sigma_i(m^{i-1}) \pi_i^{(m)-1}$ de $\sigma_i(m^{i-1})$ par $\pi_i^{(m)}$. Par suite, le noyau de l'homomorphisme $\sigma \to \sigma_i(m^{i-1})$ $(\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle)$ est le même que celui de l'homomorphisme $\sigma \to \sigma_i^*$, c'est-à-dire est le plus grand sous-groupe $\mathfrak{G}_i^* \langle m \rangle$ de $\mathfrak{G}_i \langle m \rangle$ invariant dans $\mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle$. Donc, si l'on identifie $\sigma_i \in \Gamma_i$ avec l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle$ tels que $\sigma_i(m^{i-1}) = \sigma_i$, Γ_i s'identifie avec $\mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle / \mathfrak{G}_i^* \langle m \rangle$. Cette identification sera dite la *deuxième m-identification*.

Si Σ_i est une classe suivant $\mathfrak{G}_i^* \langle m \rangle$ dans $\mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle$, et si $\sigma_i \in \Gamma_i$ est son image par $\sigma \to \sigma_i(m^{i-1})$, on a, visiblement, pour tout $x_i \in M_i$,

$$\varrho_i^{(m)} \cdot (\Sigma_i(\pi_i^{(m)} \cdot x_i)) = \sigma_i \cdot x_i$$

Ainsi,

un élément $m \in M$ étant choisi, il existe pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$ une identification canonique de M_i avec l'ensemble $\mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle / \mathfrak{G}_i \langle m \rangle$ des classes à droite dans $\mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle$ suivant $\mathfrak{G}_i \langle m \rangle$, et il existe une identification canonique du groupe Γ_i des permutations de M_i avec le groupe quotient $\mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle / \mathfrak{G}_i^* \langle m \rangle$ de $\mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle$ par le plus grand sous-groupe $\mathfrak{G}_i^* \langle m \rangle$ de $\mathfrak{G}_i \langle m \rangle$ invariant dans $\mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle$, ce groupe quotient étant considéré, de la manière classique, comme un groupe de permutations de $\mathfrak{G}_{i-1} \langle m \rangle / \mathfrak{G}_i \langle m \rangle$; cette seconde identification est le prolongement de la première au sens habituel.

Si $s = 1$, c'est-à-dire $\mathfrak{G} = \Gamma_1$, la m-identification de $\Gamma_1 (= \mathfrak{G})$ avec $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}_1^* \langle m \rangle$ $(m = m_1 \in M_1)$ n'est autre chose que l'identification classique du groupe de permutations Γ_1 de M_i avec sa représentation à l'aide de son sous-groupe conservant l'élément $m \in M_1$. Ainsi, ce fait classique n'est qu'un cas particulier de celui qu'on vient d'indiquer et qui n'en est, d'ailleurs, qu'une légère généralisation.

---

7) A. Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (Berlin, 1937).

4. Soit G un sous-groupe de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$. Ayant choisi un élément $m \in M$, on associera à G, comme on l'a fait pour le groupe $\mathfrak{G}$ tout entier, la suite

$$G = G_0<m> \supset G_1<m> \supset \ldots \supset G_s<m>$$

des sous-groupes $G_i<m>$ de G conservant m_i. On a

$$G_i<m> = G \cap \mathfrak{G}_i<m>.$$

Désignons par $\bar{\varrho}_i^{(m)}$ l'application $\sigma \longrightarrow (\sigma \cdot m)_i$ $(\sigma \in G_{i-1}<m>)$ de $G_{i-1}<m>$ dans M_i, et notons $\overline{M}_i$ l'image de $G_{i-1}<m>$ par cette application; $\bar{\varrho}_i^{(m)}$ est la restriction à $G_{i-1}<m>$ de l'application $\bar{\varrho}_i^{(m)}$ définie de la manière analogue dans $\mathfrak{G}_{i-1}<m>$. Posons $\bar{\pi}_i^{(m)} = \bar{\varrho}_i^{(m)-1}$.

Si G est un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G}$, $\bar{\varrho}_i^{(m)-1}$ est, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, une application de $G_{i-1}<m>$ *sur* M_i, c'est-à-dire $\overline{M}_i = M_i$, car, dans ce cas, il existe, pour tout $x_i \in M_i$, un $\sigma \in G$, tel que

$$\sigma \cdot m = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *).$$

σ, qui conserve m^{i-1}, est dans $G_{i-1}<m>$, et on a $\bar{\varrho}_i^{(m)} \cdot \sigma = (\sigma \cdot m)_i = x_i$.

D'autre part, si G n'est pas transitif, il existe un i tel que $\overline{M}_i \neq M_i$. En effet, G^i étant l'image de G par l'homomorphisme $\sigma \longrightarrow \sigma^i$ de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{G}^i$, soit $i \leq s$ le plus petit indice tel que G^i ne soit pas un groupe transitif de permutations de M^i. Alors, puisque G^i n'est pas transitif, il existe un élément $x \in M$ tel que, pour aucun $\sigma \in G$, on n'ait $(\sigma \cdot m)^i = x^i$. Mais, puisque G^{i-1} est un groupe transitif de permutations de M^{i-1}, il existe un $\tau \in G$ tel que $(\tau \cdot m)^{i-1} = x^{i-1}$. Par suite, comme τ applique m^{i-1}, considéré comme une classe (mod D_i), *sur* x^{i-1}, considéré aussi comme une telle classe, il existe un élément $y^i = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, y_i)$ de M^i tel que $\tau^i \cdot y^i = x^i$. S'il existait un $\sigma \in G$ tel que $(\sigma \cdot m)^i = y^i$, on aurait $(\tau\sigma \cdot m)^i = (\tau \cdot (\sigma \cdot m))^i = \tau^i \cdot (\sigma \cdot m)^i = \tau^i \cdot y^i = x^i$, contre l'hypothèse. Ainsi, il existe un $y_i \in M_i$ tel que, pour tout $\sigma \in G_{i-1}<m>$, on a $(\sigma \cdot m)_i \neq y_i$. Par suite, on a $\overline{M}_i \neq M_i$.

Il résulte de l'alinéa précédent que, si $\sigma, \tau \in G_{i-1}<m>$, on a $\bar{\varrho}_i^{(m)} \cdot \sigma = \bar{\varrho}_i^{(m)} \cdot \tau$ si, et seulement si σ et τ sont dans une même classe à droite suivant $\mathfrak{G}_i<m>$, c'est-à-dire suivant $\mathfrak{G}_i<m> \cap G = G_i<m>$. Ainsi, l'application inverse $\bar{\pi}_i^{(m)}$ est une application biunivoque de $\overline{M}_i$ sur $G_{i-1}<m>/G_i<m>$. En particulier, si G est transitif, c'est une application biunivoque de M_i sur $G_{i-1}<m>/G_i<m>$.

En vertu du même alinéa, $\sigma \longrightarrow \sigma_i(m^{i-1})$ $(\sigma \in G_{i-1}<m>)$ est un homomorphisme de $G_{i-1}<m>$ dans Γ_i, dont le noyau est, visiblement, $G_i^*<m> = G \cap \mathfrak{G}_i^*<m>$. L'image de $G_{i-1}<m>$ par cet homomorphisme sera notée $\overline{\Gamma}$.

Si $\overline{\Sigma}_i$ est une classe suivant $G_i^*<m>$ dans $G_{i-1}<m>$, si $\sigma_i \in \overline{\Gamma}_i$ est son image par $\sigma \longrightarrow \sigma_i(m^{i-1})$, et si Σ_i est l'image réciproque de σ_i dans

$\mathfrak{G}_{i-1}<m>$ par la même application, on a, pour tout $x_i \in M_i$,

$$\bar{\varrho}_i^{(m)}\cdot(\bar{\Sigma}_i(\bar{\pi}_i^{(m)}\cdot x_i)) = \varrho_i^{(m)}\cdot(\bar{\Sigma}_i(\bar{\pi}_i^{(m)}\cdot x_i)) \supseteq \varrho_i^{(m)}\cdot(\Sigma_i(\pi_i^{(m)}\cdot x_i)) = \sigma_i\cdot x_i,$$

d'où

$$\bar{\varrho}_i^{(m)}\bar{\Sigma}_i(\bar{\pi}_i^{(m)}\cdot x_i)) = \sigma_i\cdot x_i.$$

Les $\bar{\Gamma}_i$ sont, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, des groupes transitifs de permutations des M_i correspondants si, et seulement si G est transitif.

En effet, on a vu que si G est transitif, il existe, pour tout $i = 1, 2, \ldots; s$ et pour tout $x_i \in M_i$, un $\sigma \in G$ qui transforme m en $(m_1; m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *)$, et on a $\sigma_i(m^{i-1})\cdot m_i = x_i$; et que si G ne l'est pas, on peut trouver un entier $i = 1, 2, \ldots, s$ et un élément $x_i \in M_i$ tels que un tel σ n'existe pas. Il est visible, d'ailleurs que, dans tous les cas, $\bar{M}_i$ est un système de transitivité de $\bar{\Gamma}_i$.

On va montrer que, *si G est transitif, $G_i^*<m>$ est le plus grand sous-groupe de $G_i<m>$ invariant dans $G_{i-1}<m>$.* Soit $\bar{\sigma}_i(m^{i-1})$ la restriction de $\sigma_i(m^{i-1})$ à $\bar{M}_i$. Si $\sigma \in G_{i-1}<m>$, en vertu de ce qui précède, $\bar{\sigma}_i(m^{i-1})$ est une permutation de $\bar{M}_i$. Puisque $\bar{\pi}_i^{(m)}\cdot x_i$ est pour tout $x_i \in \bar{M}_i$, précisément l'ensemble des $\sigma \in G_{i-1}<m>$ tels que $\bar{\sigma}_i(m^{i-1})\cdot m_i = x_i$, et puisque $G_i<m> = \bar{\pi}_i^{(m)}\cdot m_i$, on voit, comme pour le groupe $\mathfrak{G}$, que la représentation

$$\bar{\sigma}_i^* = \{X_i \longrightarrow \sigma X_i\} \quad (X_i \in G_{i-1}<m>/G_i<m>)$$

de $\sigma \in G_{i-1}<m>$ à l'aide de $G_i<m>$ est le transformé $\bar{\pi}_i^{(m)}\bar{\sigma}_i(m^{i-1})\bar{\pi}_i^{(m)-1}$ de $\bar{\sigma}_i(m^{i-1})$ par $\bar{\pi}_i^{(m)}$; on voit aussi que le noyau de l'homomorphisme $\sigma \longrightarrow \bar{\sigma}_i(m^{i-1})$ et celui de l'homomorphisme $\sigma \longrightarrow \bar{\sigma}_i^*$ (qui est le plus grand sous-groupe $\bar{G}_i^*<m>$ de $G_i<m>$ invariant dans $G_{i-1}<m>$) coïncident. Or, si G est transitif, on a $\bar{M}_i = M_i$ d'où $\bar{\sigma}(m^{i-1}) = \sigma_i(m^{i-1})$. Ainsi, dans ce cas, le noyau du premier homomorphisme est $G_i^*<m> = G \cap \mathfrak{G}_i^*<m>$ et, par suite, $G_i^*<m>$ est le plus grand sous-groupe de $G_i<m>$ invariant dans $G_{i-1}<m>$.

Etant donné un élément $m \in M$ et un sous-groupe transitif G de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$, les applications précédentes de $G_{i-1}<m>/G_i<m>$ sur M_i et de $G_{i-1}<m>/G_i^*<m>$ sur $\bar{\Gamma}_i$ seront considérées comme des identifications, dites *m-identifications dans G.*

5. Soient m, m' deux éléments de M, et soit G un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$. En vertu de la transitivité de G, il existe un $\tau \in G$ tel que $\tau\cdot m = m'$. On a, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, s$, $\tau^i\cdot m^i = (\tau\cdot m)^i = (m')^i\cdot \sigma \in \mathfrak{G}$ conserve (mod D_i) m (ou m') si, et seulement si σ^i conserve m^i (ou $(m')^i$). Or, visiblement, σ^i conserve m^i si, et seulement si $\tau^i\sigma^i(\tau^i)^{-1}$ conserve $(m')^i\cdot \sigma \longrightarrow \sigma^i$ étant un homomorphisme, on a $\tau^i\sigma^i(\tau^i)^{-1} = (\tau\sigma\tau^{-1})^i$. D'autre part, puisque $\tau \in G$, $\sigma \in \mathfrak{G}$ et $\tau\sigma\tau^{-1}$ sont en même temps dans G. Ainsi, *le groupe $G_i<m'>$ des $\sigma \in G$ conservant $(m')^i$ est le transformé par τ du groupe $G_i<m>$ des $\sigma \in G$ conservant m^i:*

$$G_i<m'> = \tau G_i<m>\tau^{-1}.$$

Ceci montre, en particulier, que tous les $\tau \in G$ tels que $\tau \cdot m = m'$ transforment $G_i<m>$ en un même groupe $G_i<m'>$.

Si $(m')^{i-1} = m^{i-1}$, on a $\tau \in G_{i-1}<m>$, et inversement. Ainsi, l'ensemble des $G_i<m'>$, pour les m' satisfaisant à cette condition, coïncide avec l'ensemble des groupes conjugués de $G_i<m>$ dans $G_{i-1}<m>$. Par suite, leur intersection est le plus grand sous-groupe de $G_i<m>$ invariant dans $G_{i-1}<m>$, c'est-à-dire le groupe $G_i^*<m>$.

L'intersection des $G_i<m>$, étendue à tous les $m \in M$, est, visiblement, le groupe des éléments $\sigma \in G$ qui conservent (mod D_i) tout $m \in M$. C'est donc le groupe ${}^{i}\Delta(\mathfrak{G}) \cap G$, et, par suite, ce groupe est le plus grand sous-groupe de $G_i<m>$ invariant dans G.

Il en résulte, en particulier, que

$$G_i<m> \supseteq G_i^*<m> \supseteq {}^{i}\Delta \cap G,$$

et, pour $G = \mathfrak{G}$,

$$\mathfrak{G}_i<m> \supseteq \mathfrak{G}_i^*<m> \supset {}^{i}\Delta.$$

Comme ${}^{s}\Delta$ est le groupe unité, on voit que $G_s<m>$ *est un sous-groupe anti-invariant de* G.

(Reçu le 20 janvier 1949)

On the extension of rings without divisors of zero.

By J. SZENDREI in Szeged.

It is known that any ring R can be imbedded in another ring $\bar{R}$ with unit element. But this extension may contain divisors of zero, although the original does not contain any. The following question has been arisen by T. SZELE: If the original ring contains no divisors of zero, is it possible to find an extension $\bar{R}$ with unit element containing no divisors of zero?[1] The question is — to our knowledge — unsolved in general so far. The subject of this paper is to solve this problem.

It is well-known that in the case of commutative rings such an extension is always possible. In this case R is an integral domain and so R can be imbedded in a field of quotients. MALCEV[2]), however, has shown that this does not hold in the noncommutative case.

We shall prove the following

Theorem: *Let R be an arbitrary ring without divisors of zero. Then there exists one and only one ring $\bar{R}$ having the following properties:*

1. *$\bar{R}$ contains a unit element,*
2. *$\bar{R}$ contains no divisors of zero,*
3. *$\bar{R}$ is a minimal extension of R, that is, there is no proper subring of $\bar{R}$ which contains R and which possesses a unit element*[3]).

[1]) This problem is an instance of the question of the existence of ring extensions satisfying certain requirements. Another is the following problem, raised by L. RÉDEI and unsolved so far: Is there an extension of a given finite ring conserving the the invariants of its additive group?

[2]) A. MALCEV, On the immersion of an algebraic ring into a field, *Math. Annalen*, **113** (1937), 686—691.

[3]) In general, i. e. without condition 2, there exist more than one minimal extensions. For instance, the ring R of even integers has the following minimal extensions with a unit element:

1. the ring of all integers,

2. the ring of the elements of the from $\varrho+n\varepsilon$ ($\varrho\in R$, n an integer), sum and product being defined by

$$(\varrho+n\varepsilon)+(\varrho'+n'\varepsilon)=\varrho+\varrho'+(n+n')\varepsilon,$$
$$(\varrho+n\varepsilon)(\varrho'+n'\varepsilon)=\varrho\varrho'+n\varrho'+n'\varrho+nn'\varepsilon.$$

Of these only the first extension has no divisors of zero. Hence, property 3 alone does not imply the uniqueness of the extension.

Moreover, we shall see that R *is an ideal in* $\bar{R}$ *and* $\bar{R}/R$ *is isomorphic to one of the homomorphic images of the ring* I *of all integers (that is, either to* I *or to one of the residue class rings* $I/(d)$*).*

First we make the following remarks.

All elements $(\neq 0)$ of the additive group of R have the same prime order $p(\neq 1)$ where p is either a positive prime number or zero. In fact, if not all elements have infinite order there exists an element $\alpha(\neq 0)$ of prime order p. Then, for every element $\xi(\neq 0)$ of R, $\alpha p\cdot\xi = \alpha\cdot p\xi = 0$. Hence, by $\alpha \neq 0$, R having no divisors of zero, we have $p\xi = 0$.

If there exist an integer m and an element $\alpha \neq 0$ in R such that

$$\alpha^2 = m\alpha, \tag{1}$$

then on account of $(-\alpha)^2 = (-m).(-\alpha)$ there exists even a positive m satisfying (1). Among the latter ones there is a least one which we shall denote henceforth by m, and at the same time let $\alpha \in R$ be for the future an element $(\neq 0)$ satisfying (1) with this minimal m. If there are no such m and $\alpha(\neq 0)$, we shall put $m = 0$ and $\alpha = 0$. We note that not only m, but also α is uniquely determined. Indeed, if $\alpha \neq 0$, it follows from (1) that $\alpha^2\xi = m\alpha\xi$ for every element ξ of R, hence $\alpha\xi = m\xi$. If $\beta \neq 0$ is another element satisfying (1) with the same m, then we get similarly $\beta\xi = m\xi$. Hence $(\alpha - \beta)\xi = 0$ and supposing $\xi \neq 0$, we have $\alpha = \beta$, as stated.

Now we are going to prove the theorem.

If $d = (p, m) = 1$, then this implies the existence of an m' with $mm' \equiv 1 \pmod{p}$. Let us consider the element $\beta = m'\alpha\,(\neq 0)$ of R. Then by

$$\beta^2 = (m'\alpha)^2 = m'^2\alpha^2 = m'^2 m\alpha = m'\alpha = \beta.$$

β is a unit element in R. For ξ denoting an arbitrary element in R we have $\xi\beta^2 = \xi\beta$, hence $\xi\beta = \xi$. Likewise it may be shown that $\beta\xi = \xi$. Consequently it is unnecessary to extend the ring.

Henceforth we suppose $d \neq 1$.

Let us consider the set $\bar{S}$ of the equivalence classes of all symbols of the form (ϱ, n) $(\varrho \in R,\ n$ integer) with regard to the equivalence relation $(\varrho, n) \sim (\varrho', n')$ defined by

$$n - n' = td \qquad \varrho' - \varrho = t\alpha \qquad (t \text{ integer}).$$

We define addition and multiplication in $\bar{S}$ by the rules

$$(\varrho, n) + (\varrho'. n') = (\varrho + \varrho', n + n'),$$
$$(\varrho, n)(\varrho', n') = (\varrho\varrho' + n\varrho' + n'\varrho, nn').$$

It is clear that $\bar{S}$ is a ring with $(0, 1)$ as unit element. The correspondence $(\varrho, 0) \leftrightarrow \varrho$ defines an isomorphism between a subring of $\bar{S}$

and the ring R. Since R and $\bar{S}$ have no elements in common and $\bar{S}$ contains a subring isomorphic to R, the well-known theorem of imbedding leads us to a ring $\bar{R}$ which contains R and which is isomorphic to $\bar{S}$ such that under this isomorphism we have

$$(\varrho, 0) \leftrightarrow \varrho.$$

Suppose we have under the same isomorphism

$$(0, 1) \leftrightarrow \varepsilon$$

with $\varepsilon \in \bar{R}$, then we have in general

$$(\varrho, n) \leftrightarrow \varrho + n\varepsilon. \tag{2}$$

In the ring $\bar{R}$ we add and multiply in the following way with regard to $m\varepsilon = \alpha$ (if m, α are zero, this says nothing):

$$(\varrho + n\varepsilon) + (\varrho' + n'\varepsilon) = \varrho + \varrho' + (n + n')\varepsilon.$$
$$(\gamma + n\varepsilon)(\varrho' + n'\varepsilon) = \varrho\varrho' + n\varrho' + n'\varrho + nn'\varepsilon.$$

We prove that $\bar{R}$ has no divisors of zero.

If $m = 0$, that is, only the zero element satisfies (1) then assume

$$(\varrho + n\varepsilon)(\varrho' + n'\varepsilon) = 0. \tag{3}$$

Hence $\varrho\varrho' + n\varrho' + n'\varrho = 0$ and $nn'\varepsilon = 0$. The latter implies either $n = 0$ or $n' = 0$; suppose $n = 0$, say. Thus $\varrho\varrho' + n'\varrho = 0$.

a) If also $n' = 0$, then $\varrho\varrho' = 0$, consequently $\varrho = 0$ or $\varrho' = 0$, that is, either $\varrho + n\varepsilon = 0$ or $\varrho' + n'\varepsilon = 0$.

b) If $n' \neq 0$, we show $\varrho = 0$. Indeed, if $\varrho \neq 0$, then $\varrho\varrho' = n'(-\varrho)\ (\neq 0)$, $\varrho\varrho'^2 = n'(-\varrho)\varrho'$, hence $(-\varrho')^2 = n'(-\varrho)$, this contradicts the hypothesis.

Consequently one of the factors in (3) must be zero.

Finally let us consider the case $m > 1$ and $p = 0$. Since $m\varepsilon = \alpha$, the elements of $\bar{R}$ are of the form $\varrho + n\varepsilon$ with $0 \leqq n \leqq m - 1$. Supposing

$$(\varrho + n\varepsilon)(\varrho' + n'\varepsilon) = 0 \qquad (0 \leqq n, n' \leqq m - 1) \tag{4}$$

we shall prove that one of the factors must be zero. We have by (4) with regard to $m\varepsilon = \alpha$

$$m(\varrho + n\varepsilon)\, m(\varrho' + n'\varepsilon) = (m\varrho + n\alpha)(m\varrho' + n'\alpha) = 0.$$

Since both factors belong to R, one of them is zero. Assume, for example, $m\varrho + n\alpha$. Then

$$m\varrho\alpha + n\alpha^2 = m\varrho\alpha + nm\alpha = m(\varrho\alpha + n\alpha) = 0$$

implies, p being zero, that

$$\varrho\alpha + n\alpha = 0, \tag{5}$$
$$\varrho^2\alpha + n\varrho\alpha = (\varrho^2 + n\varrho)\alpha = 0,$$

hence, by $\alpha \neq 0$, $\varrho^2 + n\varrho = 0$, that is

$$(-\varrho)^2 = n(-\varrho) \qquad (0 \leqq n \leqq m - 1).$$

This is a contradiction to the minimality of m. Therefore $\varrho = 0$ and $n = 0$, that is, $\varrho + n\varepsilon = 0$ which proves our statement.

In order to prove property 3 in the theorem, let us consider an extension $\overline{\overline{R}}$ (with the unit element ε_1 and without divisors of zero) of R. Condition (1), i. e. $\alpha^2 = m\alpha = m\varepsilon_1\alpha$, implies $\alpha = m\varepsilon_1$, If $m > 0$, m is the least positive integer with this property, for if we had $\alpha = m_1\varepsilon_1$ with $0 < m_1 < m$, then $\alpha^2 = m_1\varepsilon_1\alpha = m_1\alpha$ would contradict the minimality of m in (1). The equation $\alpha = m\varepsilon_1$ defines the same rules of counting in the set $\overline{\overline{R}}_1$ of all elements of the form $\varrho + n\varepsilon_1$ ($\varrho \in R$, n an integer) as the rules in $\overline{R}$. Hence the one-to-one correspondence defined by $\varepsilon_1 \longleftrightarrow \varepsilon$ is an isomorphism between $\overline{\overline{R}}_1$ and R. If $\overline{\overline{R}}$ is also a minimal extension, then $\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{R}}_1 \simeq \overline{R}$ which implies the uniqueness of the extension.

Finally, it is clear that R is an ideal in $\overline{R}$. Furthermore it is easy to see that $\overline{R}/R \simeq I/(d)$. In fact, in case $d = 1$, $\overline{R}/R \simeq 0$ which shows that it is unnecessary to extend. In the case $m = 0$ if $p = 0$, $\overline{R}/R \simeq I$, and if $p > 1$, $\overline{R}/R \simeq I/(p)$. Finally, in the case $m > 1$ and $p = 0$, $\overline{R}/R \simeq I/(m)$.

(Received August 24, 1950.)

On factorisable groups.

By J. SZÉP and L. RÉDEI in Szeged.

We shall call the group $\mathfrak{G}$ factorisable by the (proper) subgroups $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$, if $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}$. There are several papers dealing with the special case $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K}=E$[1]) ($E$ the unit element) or $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K}=\mathfrak{D}$ where $\mathfrak{D}$ is a normal subgroup of $\mathfrak{G}$[2]). The purpose of the present paper is to deduce quite general results on the same problem by omitting the condition of the normality of $\mathfrak{D}$. We shall restrict ourselves to finite groups but many of our results may be extended to infinite groups.

Let $H, H', \ldots$ and $K, K', \ldots$ denote elements of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ respectively.

It is known that if the group $\mathfrak{G}$ of finite order is representable as the product of two subgroups, $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ where $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K}=E$, then each element of $\mathfrak{G}$ can be represented, precisely once, both in the form HK and in the form KH. In the relation $HK=K'H'$ the elements K' and H' are uniquely defined whenever K and H are given. If K is fixed, then H' together with H runs over all elements of $\mathfrak{H}$. We may thus associate with each K the permutation $\begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix}$ of the elements of $\mathfrak{H}$.

The case is more difficult, if $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K}=\mathfrak{D}\neq E$. Even in this case the elements of $\mathfrak{G}$ can be represented in the form HK, and also in the form KH, but these representations are no more unique. Moreover if we fix the element K in $HK=K'H'$ then exactly d solutions of H'

---

1) G. ZAPPA, Costruzione dei gruppi prodotto di due dati sottogruppi permutabili tra loro, *Atti Secondo Congresso Unione Mat. Italiana Bologna 1940,* pp. 115—125.

J. SZÉP, Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen, *Commentarii Math. Helvetici,* **22** (1948), pp. 31—33; On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, *these Acta,* **12 A** (1950), pp. 57—61.

L. RÉDEI, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie *Journal für die reine und angewandte Math.,* **188** (1951), pp. 201—227.

2) G. CASADIO, Costruzione di gruppi come prodotto di sottogruppi permutabili, *Rendiconti di Mat. e delle sue applicazioni,* (V) **2**, Fasc. III—IV (1941).

belong to each H, d being the order of $\mathfrak{D}$. We shall show that we may associate, also in this case, with each K a set of permutations $\binom{H}{H'}$ and we shall discuss with these sets the structure of the group $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}$. From the results of I we get an explicit theorem and corollary in II.

I.

We shall prove the following

Theorem 1. *Let the finite group $\mathfrak{G}$ be factorisable by two proper subgroups $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$:*

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}. \tag{1}$$

Then to each $K(\in\mathfrak{K})$ we can find a permutation $H\to H'$ of $\mathfrak{H}$ such that

$$HKH'^{-1}\in\mathfrak{K} \tag{2}$$

for each element $H(\in\mathfrak{H})$. Denote by $[K]$ the set of these permutations (belonging to K) and by $[\mathfrak{K}]$ the totality of the permutations in all sets $[K]$. Then $[\mathfrak{K}]$ is a group; $[E]$ is a normal subgroup of $[\mathfrak{K}]$ (E is the unit element of $\mathfrak{G}$) and each $[K]$ is some coset of $[E]$; furthermore the following homomorphism holds:

$$\mathfrak{K}\sim[\mathfrak{K}]/[E]. \tag{3}$$

Remark. It is known, that

$$\mathfrak{H}\mathfrak{K}=\mathfrak{K}\mathfrak{H}, \tag{4}$$

thus the theorem holds also for $\mathfrak{K}, \mathfrak{H}$ instead of $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$.

From (4) we get

$$HK=K'H', \tag{5}$$

where K', H' are not uniquely determined by H and K. If K is fixed and H runs over all elements of $\mathfrak{H}$, then the elements H' are, in general, not all different. We shall show that we can choose elements K' such that the corresponding elements H' shall be different.

Let $\mathfrak{D}=\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K}$ and let d denote the order of $\mathfrak{D}$. First we show that the system of the elements H' (each H' taken with its multiplicity) contains from each coset in the right side of $\mathfrak{H}=\mathfrak{D}+\mathfrak{D}\bar{H}+\dots$ exactly d elements. Indeed the system of the H' contains from no coset $\mathfrak{D}\bar{H}$ more elements than d. For, if we had in (5)

$$H_xK=K_xH'_x \qquad (x=1,\dots,d+1), \tag{6}$$

where $H_1,\dots,H_{d+1}$ are different and $H'_x\in\mathfrak{D}\bar{H}$, then from (6) we should get

$$H_xH_y^{-1}=K_xH'_xH'^{-1}_yK_y^{-1} \qquad (x,y=1,\dots,d+1). \tag{7}$$

This is absurd, because the elements $H'_xH'^{-1}_y$ and hence even the elements $H_xH_y^{-1}=K_xH'_xH'^{-1}_yK_y^{-1}$ all belong to $\mathfrak{D}$ for $x=1,\dots,d+1$, in contradiction to the fact that $\mathfrak{D}$ contains d elements.

We write (5) in the form

$$HK = K'D^{-1}DH' \tag{8}$$

with $D \in \mathfrak{D}$; then $K'D^{-1} \in \mathfrak{K}$, $DH' \in \mathfrak{H}$. The above discussions imply that to each $H \in \mathfrak{H}$ we can select a suitable element $D = D(H)$ such that in (8) DH' together with H runs over all elements of $\mathfrak{H}$.

According to (8) we may associate with each $K \in \mathfrak{K}$ a non-empty set of permutations of the elements of $\mathfrak{H}$. The set of permutations belonging to K will be denoted by $[K]$.

Let $\varrho \in [K]$, $\sigma \in [K']$ be two permutations, $K, K' \in \mathfrak{K}$. Then $HK(\varrho H)^{-1}$, $HK'(\sigma H)^{-1} \in \mathfrak{K}$ (ϱH and σH denote the elemente of $\mathfrak{H}$ into which H passes by the permutation ϱ resp. σ), hence $HKK'(\sigma\varrho H)^{-1} \in K$, i. e. $\sigma\varrho \in [KK']$.

This fact will be expressed in following manner:

$$[K][K'] \subseteq [KK']. \tag{9}$$

From [9] it follows that $[\mathfrak{K}]$ (the totality of the permutations in all sets $[K]$) is a group, further $[E]^2 \subseteq [E]$, i. e. $[E]$ is a subgroup of $[\mathfrak{K}]$. Furthermore (9) implies that $[K][E] \subseteq [K]$, i. e. $[K][E] = [K]$ and of course dually $[E][K] = [K]$. Hence we get that $[E]$ is a normal subgroup of $[\mathfrak{K}]$ and instead of (9) we can write

$$[K][K'] = [KK']. \tag{10}$$

The correspondence $K \to [K]$ is a many-to-one mapping of $\mathfrak{K}$ onto the factor-group $[\mathfrak{K}]/[E]$, and clearly it is (according to (10)) a homomorphism. This completes the proof of theorem 1.

Using Theorem 1 we prove the following

L e m m a. *If the group $\mathfrak{K}$ has an element $K (\neq E)$ for which $[K]$ contains the unit permutation (i. e. $[K] = [E]$) then $\mathfrak{G}$ has a normal subgroup $\mathfrak{N}$ $(\neq E)$ for which the isomorphism*

$$\mathfrak{K}/\mathfrak{N} \cong [\mathfrak{K}]/[E] \tag{11}$$

holds.

P r o o f. The elements K of $\mathfrak{K}$ with $[K] = [E]$, form a subgroup $\mathfrak{N}$ of $\mathfrak{K}$ which is by (3) normal in $\mathfrak{K}$ and (11) holds. Further, since for K $(\in \mathfrak{N})$ we have

$$(K' =)\, HKH^{-1} \in \mathfrak{K} \qquad (H \in \mathfrak{H}),$$

therefore

$$H^{-1}K'H \in \mathfrak{K} \qquad (H \in \mathfrak{H})$$

and hence $K' \in \mathfrak{N}$. Consequently, $H\mathfrak{N}H^{-1} = \mathfrak{N}$, i. e. $\mathfrak{N}$ is normal subgroup in $\mathfrak{G}\,(= \mathfrak{H}\mathfrak{K})$.

II.

From Theorem 1 we obtain the following.

Theorem 2. *If the group $\mathfrak{G}$ is factorisable by two of its proper subgroups $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ and $\mathfrak{D}=\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K}$ contains a normal subgroup $(\neq E)$ of $\mathfrak{H}$ (or $\mathfrak{K}$); than $\mathfrak{G}$ is not simple.*

Proof. Let $\mathfrak{D}'(\subseteq\mathfrak{D})$ be a normal subgroup of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{D}'\neq E$. If $D(\neq E)\in\mathfrak{D}'$, then $HDH^{-1}\in\mathfrak{D}'\subset\mathfrak{K}$ $(H\in\mathfrak{H})$, therefore according to Theorem 1 $[D]$ contains the unit permutation $H\to H$, i. e. $[D]=[E]$. This together with Lemma implies the statement.

The following corollary might be of particular interest.

Corollary. *Let $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}$, where $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ are proper subgroups of $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{H}$ is Abelian, further $\mathfrak{D}=\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K}\neq E$. Then $\mathfrak{G}$ is not simple.*

In fact, Theorem 2 proves the assertion, since $\mathfrak{D}$ is a normal subgroup of $\mathfrak{H}$.

Remark. It is easy to see that *every finite group, not a cyclic p-group, is factorisable if it has a subgroup of prime index.*

The authors did not find any finite groups which are not factorisable, except the cyclic p-groups.

(Received April 1, revised October 31, 1950.)

On factorisable, not simple groups.

To Professor L. RÉDEI on his 50th birthday.

By J. SZÉP in Szeged.

A group $\mathfrak{G}$ is called factorisable by its subgroups $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ if each element of $\mathfrak{G}$ may be written in the form $G=HK$ with H in $\mathfrak{H}$, K in $\mathfrak{K}$ (written $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}$).

It was G. ZAPPA [9] who has considered first factorisable groups; he has supposed that the two subgroups have no element in common except the unit element. Since that several papers have been published dealing with factorisable groups [1]—[8]. The general case where the factors may have a subgroup $\mathfrak{D}\neq E$ of $\mathfrak{G}$ in common was treated by the author and L. RÉDEI [8]. For the case that $\mathfrak{D}$ is a normal subgroup G. CASADIO [1] has obtained a similar result as G. ZAPPA.

The interest of factorisable groups may be judged from the fact that an infinite number of simple groups are factorisable [6]. Moreover, it is possible to obtain some criteria for the simplicity of factorisable groups [7].

The present paper contains two principal results:

Theorem 1. *If a group $\mathfrak{G}$ of finite order is factorisable by two abelian groups, then $\mathfrak{G}$ is not simple.*

Theorem 2. *If a group $\mathfrak{G}$ of finite order is factorisable by two abelian groups $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ and the orders of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ are relatively prime, then $\mathfrak{G}$ is solvable.*

Theorem 2 is connected with the following theorem of O. HÖLDER:

If $\mathfrak{G}$ is a group of finite order and if all Sylow-groups of $\mathfrak{G}$ are cyclic, then $\mathfrak{G}$ is solvable and factorisable by two cyclic groups with relatively prime orders.

The converse is also true, it follows from the original theorem:

If a group $\mathfrak{G}$ of finite order is factorisable by two cyclic groups whose orders are relatively prime, then $\mathfrak{G}$ is solvable.

Theorem 2 is a generalization of the converse of HÖLDER's theorem.

For the proof of Theorems 1 and 2 it is necessary to recall some facts contained in earlier papers:

Theorem A. [8] *Let the group $\mathfrak{G}$ be factorisable by the proper subgroups $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$, and let $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{D} \neq E$. If $\mathfrak{D}$ has a proper subgroup $\mathfrak{D}'$ which is a normal subgroup of $\mathfrak{H}$, then the group $\mathfrak{G}$ is not simple.*

Theorem B. [5] *If in the finite group $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ the orders of the factors $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ are relatively prime, then every normal subgroup $\bar{\mathfrak{G}}$ of $\mathfrak{G}$ is of the form $\bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}$ where $\bar{\mathfrak{H}}$ and $\bar{\mathfrak{K}}$ are normal subgroups of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ respectively.*

After these preliminaries we turn our attention to the proofs of Theorems 1 and 2.

Proof of Theorem 1. If $\mathfrak{D} \neq E$ then the statement is evident.

If $\mathfrak{D} = E$ then each element of $\mathfrak{G}$ may be represented uniquely in the form HK and also in the form $K'H'$ (where $H, H' \in \mathfrak{H}$ and $K, K' \in \mathfrak{K}$). Therefore in $HK = K'H'$ the elements H' and K' are uniquely determined for any given H and K. If K is fixed and H runs over all elements of $\mathfrak{H}$, then H' also runs over all elements of $\mathfrak{H}$. The system Σ_K of the corresponding solutions K' of the equation $HK = K'H'$ (each K' taken as many times as it is a solution) is uniquely defined by K.

Let the order of $\mathfrak{H}$ be not less than the order of $\mathfrak{K}$. Then for every K, the system Σ_K contains K at least twice, in fact, if $K = E$, then the statement is evident. If $K \neq E$, then the system Σ_K does not contain the unit element, thus the statement also holds. The elements H and H' for which the relation $HK = KH'$ holds, form two groups $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{M}'$ respectively. Clearly, $K^{-1}\mathfrak{M}K = \mathfrak{M}'$. If all Σ_K contain no elements other than K, then $\mathfrak{H}$ is a normal subgroup of $\mathfrak{G}$. If $K \neq \bar{K} \in \Sigma_K$ then $\bar{K}^{-1}\mathfrak{M}\bar{K} = \mathfrak{M}'$; in fact, if $K^{-1}\mathfrak{M}K = \mathfrak{M}'$ and $\bar{H}K = \bar{K}\bar{H}'$ then $\bar{H}'^{-1}\bar{K}^{-1}\bar{H}\mathfrak{M}\bar{H}^{-1}\bar{K}\bar{H}' = \mathfrak{M}'$, i. e. $\bar{K}^{-1}\mathfrak{M}\bar{K} = \mathfrak{M}'$ since $\mathfrak{H}$ is an abelian group. For the element $K\bar{K}^{-1} = K^*$ we have $K^{*-1}\mathfrak{M}K^* = \mathfrak{M}$ thus every element of Σ_{K^*} transforms the group $\mathfrak{M}$ into itself.

Therefore if $\{\Sigma_{K^*}\} = \mathfrak{K}$, then $\mathfrak{M}$ is a normal subgroup of $\mathfrak{G}$.

If $\{\Sigma_{K^*}\} = \mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$, then the elements $\mathfrak{H}\mathfrak{K}'$ form a proper subgroup of $\mathfrak{G}$. This will proved in two steps:

1) $H_i K^* = K_i^{*\prime} H_i'$ implies $\Sigma_{K^*} = \Sigma_{K_i^{*\prime}}$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$. For, if in $H_i K^* = K_i^{*\prime} H_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, h$ where h is the order of $\mathfrak{H}$) we substitute K^* by $K^* = H_k^{-1} K_k^{*\prime} H_k'$ (k is fixed) the statement follows.

2) $HK = K'H'$ and $H'\bar{K} = \bar{K}'H''$ $(K, K', \bar{K}, \bar{K}' \in \Sigma_{K^*})$ imply that with $K\bar{K}$ also $K'\bar{K}'$ belongs to $\mathfrak{K}'$.

From 1) and 2) it follows that $\mathfrak{H}\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}'\mathfrak{H}$, i. e. the product of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}'$ is a subgroup of $\mathfrak{G}$. Therefore $\mathfrak{G}$ is factorisable by $\mathfrak{H}\mathfrak{K}'$ and $\mathfrak{K}$ thus by Theorem A the group $\mathfrak{G}$ is not simple.

Proof of Theorem 2. (By induction.) The statement is known to hold for groups of order $p \cdot q$ with different primes p and q. Let the order of $\mathfrak{G}$ be n and suppose the theorem true for factorisable groups of order $< n$. Let $\overline{\mathfrak{G}}$ be a proper normal subgroup of $\mathfrak{G}$; the existence of such a subgroup follows from Theorem 1. From Theorem B we may conclude that $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{M}\mathfrak{N}$ where $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are normal subgroups of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ respectively. The groups $\mathfrak{H}\mathfrak{M}\mathfrak{N} = \mathfrak{H}\mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{H}}$ and $\mathfrak{K}\mathfrak{N}\mathfrak{M} = \mathfrak{K}\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{K}}$ are subgroups of $\mathfrak{G}$ and clearly at least one of them is proper. As is easily seen, $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}\mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{H}}/\mathfrak{M}\mathfrak{N} \cdot \overline{\mathfrak{K}}/\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ and $\overline{\mathfrak{H}}/\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ as well as $\overline{\mathfrak{K}}/\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ are abelian groups. The orders of the factor-groups $\overline{\mathfrak{H}}/\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ and $\overline{\mathfrak{K}}/\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ are relatively prime; consequently, by the induction hypothesis, $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ has a normal subgroup of prime index p. Therefore the group $\mathfrak{G}$ has a normal subgroup of index p; this normal subgroup is factorisable by two of its proper abelian subgroups of relatively prime orders (Theorem B), or it is abelian and so the proof is completed.

References.

G. Casadio

[1] Costruzione di gruppi come prodotto di sottogruppi permutabili, *Rendiconti di mat. e delle sue applicazioni*, (V) **2** (1941), fasc. III—IV.

L. Rédei

[2] Anwendungen des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **188** (1951), pp. 201—227.

[3] Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen, *Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae*. (Under press.)

J. Szép

[4] Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen, *Commentarii Math. Helvetici*, **22** (1948), pp. 31—33.

[5] On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, *these Acta*, **12 A** (1950), pp. 57-61.

[6] On simple groups, *Publicationes Math., Debrecen*, **1** (1949), p. 98.

[7] On factorisable simple groups. (To be published in *these Acta*.)

J. Szép—L. Rédei

[8] On factorisable groups, *these Acta*, **13** (1950), pp. 235—238.

G. Zappa

[9] Costruzione dei gruppi prodotto di due dati sottogruppi permutabili tra loro, *Atti Secondo Congresso Unione Mat. Italiana Bologna 1940*, pp. 115-125.

(Received April 1, 1950.)

Über die Wertverteilung des Jacobischen Symbols.

Von L. RÉDEI in Szeged.

Bezeichne $m(>1)$ eine ungerade quadratfreie natürliche Zahl und $\left(\frac{a}{m}\right)$ das Symbol von JACOBI. Wir nennen die Summe

$$(1)\qquad (\alpha, \beta)_m = \sum_{\alpha \leqq x \leqq \beta} \left(\frac{x}{m}\right)$$

den (quadratischen) Exzeß des Intervalls (α, β).

Man teile das Intervall $(0, m)$ in 8, 10 bzw. 12 gleiche Intervalle ein und bezeichne den Exzeß der Reihe nach bzw. mit

$$(2)\qquad A_1, \ldots, A_8;\ B_1, \ldots, B_{10};\ C_1, \ldots, C_{12}.$$

Die Klassenzahl des quadratischen Zahlkörpers von $\sqrt{-km}$ bezeichnen wir mit h_k, dabei wollen wir für k nur solche natürlichen Zahlen zulassen, für die auch km quadratfrei ist. (In der Wirklichkeit werden bei uns nur h_1, h_2, h_3, h_5 vorkommen.)

Bekanntlich lauten die Klassenzahlformeln von DIRICHLET so:

$$(3)\qquad h_1 = \begin{cases} 2(A_1 + A_2), \\ A_1 + \ldots + A_4, \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} 2(A_1 - A_4) & (m \equiv 1 \pmod 4), \\ 2(A_2 + A_3) & (m \equiv 3 \pmod 4)). \end{cases}$$

Dies hat auch die berühmte, arithmetisch noch nicht bewiesene Folgerung, daß die Linearkombinationen der A_i auf den rechten Seiten in (3) positiv sind.

Auf Grund von (3) lassen sich umgekehrt die A_i durch h_1, h_2 leicht ausdrücken, wie das schon GAUSS bemerkt hat. Außerdem fand er, daß sich die C_i im Falle $3 \not| m$ durch h_1, h_3 berechnen lassen, den Beweis hat man von DIRICHLET.[1]) Wir werden die B_i im Falle $5 \not| m$, $m \equiv 3 \pmod 4$ durch h_1, h_5 bestimmen (für $m \equiv 1 \pmod 4$ ist das uns nicht gelungen). Wir halten diesen kleinen Fortschritt schon aus dem Grunde der Veröffentlichung wert, da 10-Teilung im allgemeinen nicht so leicht ist wie 8-Teilung oder 12-Teilung. Auch lassen sich aus allen diesen Resultaten einige theoretisch und praktisch interessante Folgerungen ziehen, wie wir das später unten bemerken werden.

---

[1]) S. hierüber die Bemerkungen von DEDEKIND in GAUSS's *Werke* II (1876), S. 301–303.

Wir stellen alle die genannten Formeln, die alten und die neuen zusammen:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 = A_8 &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{m}\right) h_1 + \frac{1}{4} h_2\\
A_2 = A_7 &= \frac{1}{4}\left(2-\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_1 - \frac{1}{4} h_2\\
A_3 = A_6 &= -\frac{1}{4}\left(2+\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_1 + \frac{1}{4} h_2\\
A_4 = A_5 &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{m}\right) h_1 - \frac{1}{4} h_2
\end{aligned}\right\} \quad (m \equiv 1 \pmod 4),$$

$$\left.\begin{aligned}
A_1 = -A_8 &= \frac{1}{4}\left(3+\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_1 - \frac{1}{4} h_2\\
A_2 = -A_7 &= -\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_1 + \frac{1}{4} h_2\\
A_3 = -A_6 &= \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_1 + \frac{1}{4} h_2\\
A_4 = -A_5 &= \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_1 - \frac{1}{4} h_2
\end{aligned}\right\} \quad (m \equiv 3 \pmod 4),$$

$$\left.\begin{aligned}
B_1 = -B_{10} &= \frac{1}{12}\left(7+5\left(\frac{2}{m}\right)+\left(\frac{5}{m}\right)-\left(\frac{10}{m}\right)\right) h_1 - \frac{1}{12}\left(1+\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_5\\
B_2 = -B_9 &= \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{5}{m}\right)\right) h_1 - \frac{1}{12}\left(1-2\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_5\\
B_3 = -B_8 &= -\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{5}{m}\right)\right) h_1 + \frac{1}{4} h_5\\
B_4 = -B_7 &= \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{5}{m}\right)\right) h_1 + \frac{1}{12}\left(1-2\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_5\\
B_5 = -B_6 &= \frac{1}{12}\left(2-5\left(\frac{2}{m}\right)+2\left(\frac{5}{m}\right)+\left(\frac{10}{m}\right)\right) h_1 - \frac{1}{12}\left(2-\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_5
\end{aligned}\right\} \quad (5 \nmid m;\ m \equiv 3 \pmod 4),$$

$$\left.\begin{aligned}
C_1 = C_{12} &= \frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{3}{m}\right)\right) h_1 + \frac{1}{12}\left(1+\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_3\\
C_2 = C_{11} &= -\frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{3}{m}\right)\right) h_1 + \frac{1}{12}\left(1+\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_3\\
C_3 = C_{10} &= \frac{1}{2} h_1 - \frac{1}{6}\left(1+\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_3\\
C_4 = C_9 &= -\frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{6}\left(2-\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_3\\
C_5 = C_8 &= \frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{3}{m}\right)\right) h_1 - \frac{1}{12}\left(5-\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_3\\
C_6 = C_7 &= -\frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{3}{m}\right)\right) h_1 + \frac{1}{12}\left(1+\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_3
\end{aligned}\right\} \quad (3 \nmid m;\ m \equiv 1 \pmod 4).$$

$$\left.\begin{aligned}
C_1 = -C_{12} &= \frac{1}{12}\left[9+3\left(\frac{2}{m}\right)-\left(\frac{3}{m}\right)+\left(\frac{6}{m}\right)\right]h_1-\frac{1}{4}h_3\\
C_2 = -C_{11} &= -\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{2}{m}\right)-\left(\frac{3}{m}\right)+\left(\frac{6}{m}\right)\right)h_1+\frac{1}{4}h_3\\
C_3 = -C_{10} &= \frac{1}{6}\left(-\left(\frac{3}{m}\right)+\left(\frac{6}{m}\right)\right)h_1\\
C_4 = -C_9 &= \frac{1}{6}\left(3-2\left(\frac{3}{m}\right)-\left(\frac{6}{m}\right)\right)h_1\\
C_5 = -C_8 &= -\frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{2}{m}\right)-\left(\frac{3}{m}\right)-\left(\frac{6}{m}\right)\right)h_1+\frac{1}{4}h_3\\
C_6 = -C_7 &= \frac{1}{12}\left(3-3\left(\frac{2}{m}\right)+\left(\frac{3}{m}\right)-\left(\frac{6}{m}\right)\right)h_1-\frac{1}{4}h_3
\end{aligned}\right\}\quad (3\nmid m;\ m\equiv 3 \pmod 4)).$$

Unser Beweis beruht auf folgendem einfachen Prinzip: Bezeichne k jetzt eine zu m prime natürliche Zahl. Man teile die ganzen Zahlen des Intervalls (α, β) in k Klassen ein, so daß die Zahlen der i-ten Klasse $\equiv -im \pmod k$ sind $(i = 0, \ldots, k-1)$. Addiert man im zu den Zahlen der i-ten Klasse, so erhält man die durch k teilbaren ganzen Zahlen des Intervalls $(im+\alpha, im+\beta)$, d. h. die k-fachen der ganzen Zahlen des Intervalls $\left(\frac{im+\alpha}{k}, \frac{im+\beta}{k}\right)$.

Einerseits folgt hieraus sofort

$$(4)\qquad (\alpha, \beta)_m = \left(\frac{k}{m}\right)\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{im+\alpha}{k}, \frac{im+\beta}{k}\right)_m \qquad ((k, m) = 1).$$

Andererseits wenn km sogar ungerade und quadratfrei ist, so folgt aus obigem ebenso leicht

$$(\alpha, \beta)_{km} = \left(\frac{k}{m}\right)\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-im}{k}\right)\left(\frac{im+\alpha}{k}, \frac{im+\beta}{k}\right)_m.$$

Der Summand verschwindet für $i = 0$. Wird auch

$$\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{m}{k}\right) = \left(\frac{-1}{k}\right)^{\frac{m-1}{2}}$$

berücksichtigt, so folgt

$$(5)\qquad (\alpha, \beta)_{km} = \left(\frac{-1}{k}\right)^{\frac{m+1}{2}}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{i}{k}\right)\left(\frac{im+\alpha}{k}, \frac{im+\beta}{k}\right)_m.$$

$(km$ quadratfrei, $2\nmid km)$.

Aus diesen Gleichungen (4), (5) und aus den trivialen Beziehungen

$$(6)\qquad (\alpha, \beta)_m = \left(\frac{-1}{m}\right)(-\beta, -\alpha),$$

$$(7)\qquad (\alpha, \beta)_m = (\alpha', \beta')_m \qquad (\alpha \equiv \alpha';\ \beta \equiv \beta' \pmod m))$$

ließen sich alle obigen Formeln beweisen, wir führen aber den Beweis nur für B_i aus, da die übrigen Formeln bekannt sind.

Vor allem sind unsere Behauptungen $B_i = -B_j$ $(i+j=11)$ wegen (6) richtig. Deshalb brauchen wir nur die $B_1, \ldots, B_5$ zu berechnen.

Zunächst gilt nach (3)

(8) $$B_1+B_2+B_3+B_4+B_5=h_1.$$

Wir wenden (4) dreimal an (der Reihe nach mit $k=2,2,5$):

$$\left(0,\frac{m}{5}\right)_m=\left(\frac{2}{m}\right)\sum_{i=0}^{1}\left(\frac{im}{2},\frac{im}{2}+\frac{m}{10}\right)_m=\left(\frac{2}{m}\right)\sum_{i=0}^{1}\left(\frac{5i}{10}m,\frac{5i+1}{10}m\right)_m,$$

$$\left(\frac{m}{5},\frac{2m}{5}\right)_m=\left(\frac{2}{m}\right)\sum_{i=0}^{1}\left(\frac{im}{2}+\frac{m}{10},\frac{im}{2}+\frac{2m}{10}\right)_m=\left(\frac{2}{m}\right)\sum_{i=0}^{1}\left(\frac{5i+1}{10}m,\frac{5i+2}{10}m\right)_m,$$

$$\left(0,\frac{m}{2}\right)_m=\left(\frac{5}{m}\right)\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{im}{5},\frac{im}{5}+\frac{m}{10}\right)_m=\left(\frac{5}{m}\right)\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{2i}{10}m,\frac{2i+1}{10}m\right)_m.$$

Durch die B_i ausgedrückt:

$$B_1+B_2=\left(\frac{2}{m}\right)(B_1+B_6)=\left(\frac{2}{m}\right)(B_1-B_5),$$

$$B_3+B_4=\left(\frac{2}{m}\right)(B_2+B_7)=\left(\frac{2}{m}\right)(B_2-B_4),$$

$$h_1=\left(\frac{5}{m}\right)(B_1+B_3+B_5+B_7+B_9)=\left(\frac{5}{m}\right)(B_1-B_2+B_3-B_4+B_5).$$

Also gelten

(9) $$\left(1-\left(\frac{2}{m}\right)\right)B_1+B_2+\left(\frac{2}{m}\right)B_5=0,$$

(10) $$B_2-\left(\frac{2}{m}\right)B_3-\left(1+\left(\frac{2}{m}\right)\right)B_4=0,$$

(11) $$B_1-B_2+B_3-B_4+B_5=\left(\frac{5}{m}\right)h_1.$$

Endlich wenden wir (5) mit $k=5$ an:

$$\left(0,\frac{5m}{2}\right)_{5m}=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{i}{5}\right)\left(\frac{im}{5},\frac{im}{5}+\frac{5m}{10}\right)_m.$$

Die linke Seite ist nach (3) gleich h_5, und so folgt

$$h_5=(B_3+B_4+B_5+B_6+B_7)-(B_5+B_6+B_7+B_8+B_9)-$$
$$-(B_7+B_8+B_9+B_{10}+B_1)+(B_9+B_{10}+B_1+B_2+B_3).$$

Nach leichten Vereinfachungen:

$$h_5=B_3-(-B_4-B_3-B_2)-(-B_4-B_3-B_2)+B_3.$$

Folglich haben wir

(12) $$B_2+2B_3+B_4=\frac{1}{2}h_5.$$

Aus (8)—(12) folgen die behaupteten Formeln für die B_i, womit unser Beweis beendet ist.

Bemerkungen. Wir betrachten den Fall $\left(\frac{-1}{m}\right)=-1$, $3\nmid m$, $5\nmid m$ (z. B. kann m eine Primzahl $\equiv 3 \pmod 4$ und größer als 3 sein). Alle Endpunkte der obengenannten 8-, 10-, 12-Teilungen des Intervalls $(0, m)$ zerlegen dieses Intervall in 24 Teilintervalle, die wir in natürlicher Reihenfolge mit $I_1, \ldots, I_{24}$ bezeichnen, entsprechend soll der Exzeß mit $E_1, \ldots, E_{24}$ bezeichnet werden. Es genügt nur die $I_1, \ldots, I_{12}$ und $E_1, \ldots, E_{12}$ zu betrachten. Jedem dieser Intervalle $I_1, \ldots, I_{12}$ schreiben wir die Länge darunter:

$$\begin{array}{cccccccccccc} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_6 & I_7 & I_8 & I_9 & I_{10} & I_{11} & I_{12} \\ \frac{m}{12} & \frac{m}{60} & \frac{m}{40} & \frac{m}{24} & \frac{m}{30} & \frac{m}{20} & \frac{m}{20} & \frac{m}{30} & \frac{m}{24} & \frac{m}{40} & \frac{m}{60} & \frac{m}{12} \end{array}.$$

Aus obigem folgt, daß sich alle Exzesse E_i in der Form

$$\nu h_1 + \varrho h_2 + \sigma h_3 + \tau h_5$$

ausdrücken lassen. Wegen $h_k > 0$ läßt sich auf diesem Wege unter Umständen auf das Vorzeichen von E_i schließen. (Auch führt dieser Weg zu einer leichteren Berechnung der Klassenzahlen h_k.) So gewinnen wir z. B. folgende Aussagen:

Für $m \equiv 19, 91 \pmod{120}$ ist $E_2 = \frac{1}{4} h_3 > 0$. (Wegen $h_3 = 4E_2$ genügt es jetzt zur Bestimmung von h_3 den Exzeß E_2 des Intervalls $I_2 = \left(\frac{m}{12}, \frac{m}{10}\right)$ von der Länge $\frac{m}{60}$ zu berechnen.)

Es gilt für den Exzeß des Intervalls $I_7 = \left(\frac{m}{4}, \frac{3m}{10}\right)$ von der Länge $\frac{m}{20}$:

$$E_7 = \frac{1}{12}\left(1-\left(\frac{2}{m}\right)\right)\left(1+\left(\frac{5}{m}\right)\right) h_1 + \frac{1}{12}\left(1+\left(\frac{2}{m}\right)\right) h_5 \geqq 0$$
$$(m \equiv 3 \pmod 4;\ 5 \nmid m).$$

(Hier ist auch $3|m$ zugelassen.)

Für $m \equiv 31, 79 \pmod{120}$ ist das Vorzeichen von $E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9$ der Reihe nach $+ - + + - +$ (vier Vorzeichenwechsel!). Selbst diese Exzesse sind nämlich gleich:

$$\frac{1}{4} h_1,\ -\frac{1}{12} h_5,\ \frac{1}{12} h_5,\ \frac{1}{6} h_5,\ -\frac{1}{6} h_5,\ \frac{1}{4} h_1.$$

(Eingegangen am 22. Oktober 1950.)

Méthodes de sommation des séries de Fourier. III.*)

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

1. Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π, intégrable au sens de Lebesgue dans $(0, 2\pi)$, et soit

$$f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} c_k(x) \quad (c_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

sa série de Fourier. On sait que les sommes de FEJÉR de la série conjuguée

$$\sum_{1}^{\infty} \bar{c}_k(x) \qquad (\bar{c}_k(x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx),$$

c'est-à-dire les sommes

$$\bar{\sigma}_n^*(f; x) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \bar{c}_k(x) \tag{1}$$

tendent, lorsque $n \to \infty$, presque partout vers la fonction "conjuguée"

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{+0}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \, dt.$$

Envisageons une autre méthode de sommation, engendrée par la matrice triangulaire infinie (λ_{nk}) $(n = 1, 2, \ldots; k = 1, \ldots, n)$. Il s'agit de comparer cette méthode avec celle de Fejér, c'est-à-dire l'allure des sommes

$$\bar{\sigma}_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} \bar{c}_k(x) \tag{2}$$

avec celle des sommes (1).

Dans II on a démontré la proposition suivante:

Lorsque la matrice (λ_{nk}) *satisfait aux conditions:*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{nk} = 1 \qquad (\textit{pour toute valeur fixe de } k) \tag{A}$$

---

*) Partie I a paru dans *ces Acta,* **12 B** (1950), p. 204–210, Partie II est sous presse dans le *Časopis pro pěstování mat. fys.* (Prague). On les notera par I et II.

et

$$(\bar{\mathrm{B}}) \qquad \sum_{k=0}^{\nu-1}\left((k+1)\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i}\right)|\Delta^2_{nk}|+\sum_{k=\nu}^{n-1}\left((n-k)\sum_{i=n-k}^{n}\frac{1}{i}\right)|\Delta^2_{nk}|<C\,^{1)}$$

où $\nu=\left[\frac{n}{2}\right]$ *et* $\Delta^2_{nk}=\lambda_{nk}-2\lambda_{n,k+1}+\lambda_{n,k+2}$ $(\lambda_{n0}=1,\ \lambda_{n,n+1}=0)$,

alors les sommes (1) *et* (2) *sont équiconvergentes presque partout, notamment en tout point de Lebesgue de la fonction* $f(x)$; *de plus elles sont uniformément équiconvergentes dans l'intérieur de tout intervalle où* $f(x)$ *est continue.*

Remarquons que $(\bar{\mathrm{B}})$ entraîne

$$(\mathrm{C}) \qquad |\lambda_{nk}|<C_1 \qquad \text{(cf. I (10) et II (10))}.$$

La présente communication veut compléter ce résultat en établissant des conditions *nécessaires.* On démontrera le théorème suivant:

Théorème. *Pour que les sommes* (1) *et* (2) *soient équiconvergentes pour toute fonction continue* $f(x)$ *de période* 2π, *et cela en tout point* x, *il est nécessaire que les conditions* (A), (C) *et la condition*

$$(\bar{\mathrm{b}}) \qquad \left|\sum_{k=0}^{\nu-1}\left((k+1)\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i}\right)\Delta^2_{nk}+\sum_{k=\nu}^{n-1}\left((n-k)\sum_{i=n-k}^{n}\frac{1}{i}\right)\Delta^2_{nk}\right|<C_2$$

soient satisfaites. Le couple des conditions (C), $(\bar{\mathrm{b}})$ *est d'ailleurs équivalent avec le couple* (C), (b') *où*

$$(\mathrm{b}') \qquad \sum_{k=1}^{\nu}\frac{\lambda_{nk}+\lambda_{n,n-k+1}}{k}=\log n+O(1).$$

2. Passons à la démonstration du théorème.

La nécessité de (A) résulte immédiatement en envisageant la fonction $f(x)=\sin kx$, puisqu'on a, pour $n\geq k$,

$$(3) \qquad \bar{\sigma}_n(f;0)-\bar{\sigma}_n^*(f;0)=-\lambda_{nk}+\left(1-\frac{k}{n+1}\right),$$

ce qui doit tendre vers 0 lorsque $n\to\infty$.

Considérons maintenant l'espace E des fonctions $f(x)$ continues et de période 2π, la norme $\|f\|$ étant définie par $\max|f(x)|$. Dans cet espace,

$$U_nf=\bar{\sigma}_n(f;0)-\bar{\sigma}_n^*(f;0) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

est une suite de fonctionnelles linéaires continues. L'hypothèse posée que les sommes (1) et (2) sont équiconvergentes pour toute fonction $f(x)$ continue, entraîne que

$$\lim_{n\to\infty}U_nf=0 \quad \text{pour tout} \quad f\in E.$$

---

[1]) C, C_1 etc. désigneront des constantes ne dépendant pas de n.

Il en vient, par un théorème général de la théorie des opérations linéaires[2]) que la suite des normes $\|U_n\|$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que

(4) $$|U_n f| \leq M\|f\|$$

pour tout $f \in E$ et pour $n = 1, 2, \ldots$.

Comme $\|\sin kx\| = 1$, (3) et (4) démontrent (C) avec $C_1 = M + 1$.

Envisageons maintenant les fonctions

$$g_n(x) = s_\nu(x)[1 - 2\cos(n+1)x] \quad \text{où} \quad s_\nu(x) = \sum_1^\nu \frac{\sin kx}{k}, \quad \nu = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Il est bien connu que les fonctions $s_\nu(x)$ sont bornées en module par une constante γ ne dépendant ni de ν ni de x. Donc on a

(5) $$\|g_n\| \leq 3\gamma.$$

Un calcul simple fournit:

$$g_n(x) = \frac{\sin x}{1} + \cdots + \frac{\sin \nu x}{\nu} + \frac{\sin(n-\nu+1)x}{\nu} + \cdots + \frac{\sin nx}{1} -$$
$$- \frac{\sin(n+2)x}{1} - \cdots - \frac{\sin(n+\nu+1)x}{\nu},$$

d'où l'on voit que

$$-U_n g_n = \frac{\mu_{n1}}{1} + \cdots + \frac{\mu_{n\nu}}{\nu} + \frac{\mu_{n,n-\nu+1}}{\nu} + \cdots + \frac{\mu_{nn}}{1} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\mu_{nk} + \mu_{n,n-k+1}}{k}$$

avec

$$\mu_{nk} = \lambda_{nk} - \left(1 - \frac{k}{n+1}\right).$$

Or

$$\mu_{nk} + \mu_{n,n-k+1} = \lambda_{nk} + \lambda_{n,n-k+1} - 1;$$

en écrivant (4) avec $f = g_n$ et faisant usage de (5) on obtient donc:

$$\left|\sum_{k=1}^{\nu} \frac{\lambda_{nk} + \lambda_{n,n-k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k}\right| \leq 3\gamma M,$$

ce qui est équivalent avec la condition (b′).

Reste à montrer que le couple des conditions (C), ($\bar{\text{b}}$) est équivalent avec le couple (C), (b′). Désignons la quantité figurant entre $|\cdots|$ dans le premier membre de ($\bar{\text{b}}$) par Σ_n, et désignons le premier membre de (b′) par Σ_n'. On vérifie par deux transformations abéliennes, que

$$\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\lambda_{n0} - \lambda_{n1} - \Sigma_n' - \lambda_{nn} +$$
$$+ \left(1 - \sum_{i=\nu+1}^{n} \frac{1}{i}\right) \cdot \begin{cases} (\lambda_{n\nu} + \lambda_{n,\nu+1}) & \text{lorsque } n = 2\nu, \\ 2\lambda_{n,\nu+1} & \text{lorsque } n = 2\nu+1. \end{cases}$$

---

[2]) Cf. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Warszawa, 1932), p. 80.

Vu que $\lambda_{n0}=1$ et

$$\sum_{i=\nu+1}^{n}\frac{1}{i}\leq\sum_{i=\nu+1}^{n}\frac{1}{\nu+1}=\frac{n-\nu}{\nu+1}\leq 1,$$

on a, en effet, dans la condition (C),

$$\Sigma_n=\log n-\Sigma_n'+O(1),$$

ce qui prouve que (b) et (b′) sont équivalentes.

3. Observons que si les nombres

$$1=\lambda_{n0},\lambda_{n1},\ldots,\lambda_{nn},\lambda_{n,n+1}=0$$

forment, pour chaque n, une suite convexe ou concave, c'est-à-dire que

$$\Delta^2_{n0},\Delta^2_{n1},\ldots,\Delta^2_{n,n-1}$$

sont tous positifs ou tous négatifs (le signe pouvant dépendre de n), alors les conditions ($\bar{\mathrm{B}}$) et ($\bar{\mathrm{b}}$) se confondent. Dans ce cas, les conditions (A), ($\bar{\mathrm{b}}$), ou (A), (b′), (C) sont donc nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait équiconvergence pour toute fonction continue $f(x)$; elles entraînent de plus, pour toute fonction intégrable $f(x)$, l'équiconvergence en tout point de Lebesgue et l'équiconvergence uniforme dans l'intérieur de tout intervalle où $f(x)$ est continue.

Envisageons, à titre d'exemple, deux cas particuliers:[3]

1) Méthodes de sommation de NÖRLUND:

$$\lambda_{nk}=P_{n-k}/P_n \quad \text{où} \quad P_m=p_0+p_1+\cdots+p_m.$$

Supposons que $p_k>0$, alors $0<\lambda_{nk}\leq 1$, donc (C) est satisfaite. Les conditions (A) et (b′) prennent la forme

$$(\mathrm{A_N})\quad \lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-m}}{P_n}=0,\qquad (\mathrm{b_N'})\quad \left|\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}(P_{n-k}+P_{k-1}-P_n)\right|<C.$$

Dans le cas où la suite $\{p_k\}$ est monotone (croissante ou décroissante), les Δ^2_{nk} sont de même signe; dans ce cas, ($\mathrm{A_N}$) et ($\mathrm{b_N'}$) sont donc nécessaires et suffisantes pour l'équiconvergence.

2) Soit $\bar{S}_n=\bar{S}_n(f;x)=\sum_{k=1}^{n}\bar{c}_k(x)$ et

$$\bar{\sigma}_n(f;x)=\frac{1}{p+1}(\bar{S}_{n-p}+\bar{S}_{n-p+1}+\cdots+\bar{S}_n) \tag{6}$$

où $p=p(n)$, $0\leq p(n)\leq n$. La matrice correspondante est définie par

$$\lambda_{nk}=1 \qquad \text{pour } k=0,1,\ldots,n-p$$

et

$$\lambda_{nk}=\frac{n-k+1}{p+1} \qquad \text{pour } k=n-p+1,\ldots,n+1.$$

---

[3]) Dont le second a été ajouté pendant les épreuves, le 10 novembre 1950.

Pour chaque n, la suite $\{\lambda_{nk}\}$ $(k=1,\ldots,n+1)$ est concave: on a

$$\Delta^2_{nk}=0 \text{ pour } k\neq n-p-1 \quad \text{et} \quad \Delta^2_{n,n-p-1}=-\frac{1}{p+1}.$$

On a

$$1\geqq\lambda_{nk}=\min\left\{1,\frac{n-k+1}{p+1}\right\}\geqq\min\left\{1,\frac{n-k+1}{n+1}\right\}=\frac{n-k+1}{n+1}\to 1$$

pour k fixe, $n\to\infty$; les conditions (A), (C) sont donc toujours satisfaites. La condition ($\bar{\text{b}}$) prend la forme

$$\text{(7)} \quad \frac{n-p}{p+1}\sum_{i=n-p}^{n}\frac{1}{i}<C \text{ lorsque } n-p-1\leqq\nu-1, \text{ c'est-à-dire que } p\geqq\nu,$$

$$\text{(8)} \quad \sum_{i=p+1}^{n}\frac{1}{i}<C \text{ lorsque } n-p-1\geqq\nu, \text{ c'est-à-dire que } p<\nu.$$

Le premier membre de (7) étant toujours inférieur à 1, c'est la condition (8) qui est essentielle; la restriction $p<\nu$ y est d'ailleurs inutile puisque $\sum_{p+1}^{n}\frac{1}{i}<1$ lorsque $p\geqq\nu$. La condition (8) est équivalente avec chacune des suivantes:

$$\log\frac{n}{p+1}<C, \quad \frac{n}{p+1}<C_1, \quad \varliminf_{n\to\infty}\frac{p}{n}>0.$$

Donc, *pour que les sommes* (6) *soient équiconvergentes avec les sommes de Fejér* (1) *pour toute fonction continue, il faut et il suffit qu'on ait* $\varliminf (p/n)>0$. *Dans cette condition, il y a équiconvergence même pour toute fonction intégrable* $f(x)$, *en tout point de Lebesgue de* $f(x)$, *et l'équiconvergence est uniforme dans l'intérieur de tout intervalle où* $f(x)$ *est continue*[4]).

(Reçu le 5 juin 1950)

---

[4]) Ce résultat vient d'être obtenu aussi par A. D. Ščerbina, Sur une méthode de sommation des séries conjuguées des séries de Fourier, *Mat. Sbornik*, N. S. **27** (1950), p. 157–170 (en russe). Remarquons qu'on a la même condition pour les sommes analogues formées à partir des sommes partielles de la série de Fourier originelle; *cf.* S. M. Nikolsky, Sur des méthodes linéaires de sommation des séries de Fourier, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR*, série math., **12** (1948), p. 259–278, en particulier p. 277 (en russe).

Neue Integralrelationen für Eikörperpaare.

Von H. HADWIGER in Bern.

Unter den sehr zahlreichen Formeln und Sätzen, welche die Integralgeometrie hervorbrachte, finden sich viele reizvolle Integralbeziehungen, welche in irgend einer Form eine Wechselwirkung zwischen zwei konvexen Körpern ausdrücken[1]).

Eine neuartige Relation dieser Art haben kürzlich L. RÉDEI und B. SZ.-NAGY[2]) im zweidimensionalen Fall gefunden, die durch Grenzübergang aus einer Produktformel für die Flächeninhalte ebener Polygone gewonnen wurde. Die erwähnte Integralformel läßt sich nun — zunächst für konvexe Körper — in ihrer k-dimensionalen Erweiterung auf eine völlig andere und einfache Weise wiedergewinnen.

Sie gehört zu einer umfassenderen Gruppe ähnlich gebauter Integralrelationen, welche in dieser Note genannt und kurz begründet werden sollen. Es handelt sich hierbei um die Anwendung eines Funktionalprinzips, die darin besteht, ein in Frage stehendes Funktional im wesentlichen unmittelbar aus gewissen Invarianz- und Additivitätseigenschaften zu folgern. Allgemeinere Funktionalsätze, welche die Anwendung des erwähnten Prinzips ermöglichen, sind vom Verf. untersucht worden[3]).

Wir stellen nun zunächst die nachher zu beweisenden Integralrelationen zusammen. Diese beziehen sich auf zwei Eikörper A und A_0 des k-dimensionalen euklidischen Raumes mit den Volumen V und V_0 und lauten:

(1) $$\int r^2 \cos\gamma \, dF \, dF_0 = -2kVV_0;$$

(2) $$\int r^2 \cos\alpha \cos\alpha_0 \, dF \, dF_0 = -k(k+1)\, VV_0;$$

---

1) Vgl. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie* (Leipzig und Berlin, 1936), Hefte I—II.

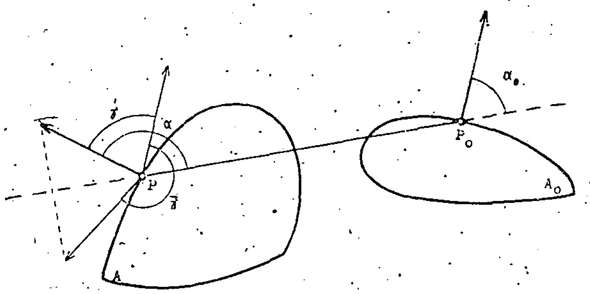
2) L. RÉDEI—B. SZ.-NAGY, Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heron, *Publicationes Math. Debrecen*, 1 (1949), S. 42 50.

3) Ein Beweis eines solchen Funktionalsatzes für $k=3$ erscheint demnächst in den *Abhandlungen des Math. Seminars der Univ. Hamburg.*

$$(3) \qquad \int r^2 \cos\bar{\gamma}\, dF\, dF_0 = -2k^2 V V_0.$$

Hierbei bezeichnen (vgl. Abbildung) dF und dF_0 die Oberflächendifferentiale von A und A_0 an den Oberflächenstellen P und P_0, ferner sei r die Distanz von P und P_0, γ der Zwischenwinkel der äußeren Normalen an A und A_0 in P und P_0; weiter sind α und α_0 die Winkel, welche die genannten Normalen je mit der Verbindungsrichtung von P nach P_0 hin einschließen; endlich bezeichnet $\bar{\gamma}$ den Zwischenwinkel, den die an der erwähnten Verbindungsrichtung gespiegelte Normale in P mit der Normalen in P_0 bildet.

Setzt man in (3) $k=2$, so ergibt sich die oben erwähnte Integralformel von L. Rédei und B. Sz.-Nagy für den speziellen Fall zweier Eibereiche; die zitierte Formel gilt indessen für allgemeiner gestaltete ebene Bereiche.



Die trigonometrische Umrechnungsformel

$$\cos\bar{\gamma} = -\cos\gamma + 2\cos\alpha\cos\alpha_0$$

zeigt, daß (3) eine einfache Folgerung aus (1) und (2) ist, sodaß sich unsere Beweisführung nur auf die beiden ersten Integralrelationen beschränken kann. Nun zum Beweis selbst: Die beiden in (1) und (2) stehenden Integralausdrücke stellen symmetrische Bifunktionale des Eikörperspaares A, A_0 dar. In vektorieller Schreibweise gestatten diese die folgende Darstellung

$$(4) \qquad \varphi(A, A_0) = \int (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)^2 (\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_0)\, dF\, dF_0$$

$$(5) \qquad \psi(A, A_0) = \int (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0, \mathfrak{w})(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0, \mathfrak{w}_0)\, dF\, dF_0.$$

Hierbei bezeichnen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$ die in einem festen Ursprung O des Raumes angreifenden Ortsvektoren der Oberflächenstellen P und P_0 und weiter sollen $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}_0$ die äußeren Normaleneinheitsvektoren in P und P_0 bedeuten.

Nach einem bekannten, für konvexe Polyeder elementaren, für beliebige Eikörper durch Grenzübergang mühelos verifizierbaren vektoranalytischen Hilfssatz[4]) ist stets

$$\int (\mathfrak{a}, \mathfrak{w})\, dF = 0, \tag{6}$$

wobei $\mathfrak{a}$ einen festen Vektor bezeichnet und sich die Integration über die gesamte Oberfläche eines konvexen Körpers zu erstrecken hat. Wie man leicht bestätigt, ergibt passende Anwendung von (6) für unsere Bifunktionale die nunmehr einfacheren Darstellungen

$$\varphi(A, A_0) = -2 \int (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0)(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_0)\, dF\, dF_0; \tag{7}$$

$$\psi(A, A_0) = -\int \{(\mathfrak{x}, \mathfrak{w})(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{w}_0) + (\mathfrak{x}_0, \mathfrak{w})(\mathfrak{x}, \mathfrak{w}_0)\}\, dF\, dF_0. \tag{8}$$

Wir betrachten jetzt zunächst das Bifunktional (7) und denken uns vorerst den Eikörper A_0 fest, den Eikörper A dagegen variabel; dies sei äußerlich durch den veränderten Ansatz

$$\varphi(A) = -2 \int (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0)(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_0)\, dF\, dF_0, \tag{9}$$

wodurch ein gewöhnliches Eikörperfunktional definiert ist, zum Ausdruck gebracht. Ersetzen wir nun A durch einen translationsgleichen Eikörper A', so haben wir offenbar

$$\varphi(A') = -2 \int (\mathfrak{x} + \mathfrak{t}, \mathfrak{x}_0)(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_0)\, dF\, dF_0, \tag{10}$$

wobei $\mathfrak{t}$ den Vektor derjenigen Translation bezeichnet, die A in A' überführt. Die erneute Anwendung von (6) ergibt nun die wichtige Feststellung, daß

$$\varphi(A') = \varphi(A), \tag{11}$$

d. h. daß das Funktional (9) *translationsinvariant* ist. Unmittelbar ablesbar ist ferner Relation

$$\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B), \tag{12}$$

wobei ein Eikörper $C = A + B$ durch eine Ebene in die beiden Teilkörper A und B zerlegt sei; dadurch ist ausgedrückt, daß das Funktional (9) *einfach-additiv* ist.

Ebenso läßt sich auch folgendes unmittelbar erkennen: Es gibt eine nicht von A abhängige Konstante C, sodaß

$$|\varphi(A)| \leq C \qquad \text{für alle } A \subseteq K; \tag{13}$$

d. h. für alle Teilkörper A der Einheitskugel K gilt; dadurch ist ausgesagt, daß das Funktional (9) beschränkt ist.

Ersetzen wir endlich A durch einen sich durch Dilatation von O aus ergebenden homothetischen Eikörper $A' = \lambda A$ $(\lambda > 0)$, so hat man zunächst

[4]) Es handelt sich um einen speziellen Hüllensatz, der sich auch als einfachste Folgerung des Gaußschen Integralsatzes darstellen läßt.

(14) $$\varphi(\lambda A) = -2\int (\lambda \mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0)(\mathfrak{w}\ \mathfrak{w}_0)\, dF'\, dF_0$$

und wegen $dF' = \lambda^{k-1} dF$ also

(15) $$\varphi(\lambda A) = \lambda^k \varphi(A),$$

eine Beziehung, die besagt, daß das Funktional (9) *k-gradig homogen* ist.

Nun gilt aber ein Satz[5]), wonach ein translationsinvariantes, einfach-additives, beschränktes und k-gradig homogenes Funktional über der Klasse der Eipolyeder des k-dimensionalen Raumes sich bis auf einen konstanten Faktor mit dem Volumen identifiziert. Stetigkeitserwägungen, wie sie im vorliegenden Fall schulmäßig durchführbar sind, gestatten es, den erwähnten Satz auf Eikörper auszudehnen. Nach (11), (12), (13) und (15) folgt so, daß $\varphi(A) = \bar{p}\,V$ sein muß, wobei $\bar{p}$ einen offenbar nur noch von A_0 abhängigen konstanten Faktor bezeichnet. Vertauschen wir jetzt die Rollen von A und A_0 in der oben stehenden Entwicklung, so ergibt sich schließlich

(16) $$\varphi(A, A_0) = p\, V V_0.$$

Auf durchaus analoge Weise gewinnt man entsprechend

(17) $$\psi(A, A_0) = q\, V V_0.$$

Die noch unbekannten konstanten Faktoren p und q ergeben sich dadurch, daß man die Bifunktionale in passend ausgewählten Sonderfällen direkt ausrechnet. Setzen wir $A = A_0 = K$, wobei K eine Einheitskugel bezeichnet, so ergeben sich die Werte $p = -2k$ und $q = -k(k+1)$. Wenn die beiden Eikörper A und A_0 identifiziert werden, so hat sich das Doppelintegral der Entstehungsweise gemäß über die „doppelt belegte" Oberfläche zu erstrecken. Damit ist der Nachweis der Integralrelationen (1) und (2) erbracht.

Abschließend sollen die Anwendungsmöglichkeiten der drei Formeln (1) bis (3) durch drei passend gewählte Beispiele illustriert werden.

1. Der in der Relation (1) stehende Integralausdruck ist, wie wir oben erwähnten, mit dem in (7) angeschriebenen aequivalent. Demnach hat man

(18) $$\int (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0)(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_0)\, dF\, dF_0 = k\, V V_0.$$

Ersetzen wir jetzt die beiden der Integralformel (18) zugrunde liegenden Eikörper A und A_0 durch ihre äußeren Parallelkörper A^ϱ und A_0^ϱ im

---

[5]) Eine Abhandlung, welche Sätze dieser Art enthält, wird unter dem Titel „Über translationsinvariante und additive Funktionale k-dimensionaler Polyeder" demnächst im Druck erscheinen.

Abstand $\varrho > 0$, greift man auf die Umrechnungsformeln

$$\mathfrak{r}^{\varrho} = \mathfrak{r} + \varrho \mathfrak{w}$$

und

$$dF^{\varrho} = [1 + (k-1) H\varrho + \cdots + K\varrho^{k-1}]\, dF,$$

wobei H die mittlere Krümmung und K die Gaußsche Krümmung bezeichnen[6]), verwendet schließlich für die Parallelvolumina noch die J. Steinerschen Formeln

$$V^{\varrho} = V + F\varrho + \cdots + \omega_k \varrho^k; \quad \omega_k = \pi^{\frac{k}{2}} \Big/ \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right),$$

so gewinnt man durch Gleichsetzung der Koeffizienten des höchsten Potenzgliedes ϱ^{2k} beiderseitig von (18) die Integralrelation

$$(19) \qquad \int \cos^2\gamma \; K K_0 \, dF \, dF_0 = k \omega_k^2.$$

Man gewinnt die Einsicht, daß unsere Formeln (1) und (19) Anfang und Ende einer Serie von $2k+1$ Integralrelationen mit höheren Krümmungsfunktionen darstellen; die übrigen $2k-1$ Formeln sind indessen komplizierter aufgebaut und sollen aus diesem Grunde nicht weiter verfolgt werden.

2. Wenn wir in der Relation (2) die beiden Eikörper A und A_0 identifizieren, die Integration jedoch nur über die „einmal belegte“ Oberfläche erstrecken, so erhält man

$$(20) \qquad \int \cos\alpha \cos\alpha_0 \, r^2 \, dF \, dF_0 = -\frac{k(k+1)}{2} V^2.$$

Nun ist nach bekannten Ansätzen der Integralgeometrie

$$-\cos\alpha \cos\alpha_0 \, dF \, dF_0 = r^{k-1} \, dG,$$

wobei dG die *Geradendichte* bedeutet; dG symbolisiert die integralgeometrische „Anzahl“ derjenigen Geraden G, welche die beiden Oberflächenelemente dF und dF_0 durchstoßen. So gewinnt man aus (20) die integralgeometrische Formel

$$(21) \qquad \int r^{k+1} \, dG = \frac{k(k+1)}{2} V^2,$$

wobei sich die Integration über alle Geraden G erstrecken soll, die den Eikörper A treffen; r ist die Länge der von G aus A ausgeschnittenen Sehne. Auf diese Weise haben wir ein *Sehnenpotenzintegral* erhalten,

[6]) Die für das Vorhandensein dieser Krümmungsgrößen erforderlichen Regularitätsvoraussetzungen betreffend die Eiflächen sollen hier erfüllt sein.

das die k-dimensionale Erweiterung einer bekannten Formel von G. HERGLOTZ[7]) darstellt.

3. Der in Relation (3) gewählte Winkel $\bar{\gamma}$ verdient auch wohl deshalb ein gewisses Interesse, weil er für den Fall $A = A_0 =$ Kugel beständig den Wert $\bar{\gamma} = \pi$ annimmt. Dieser Umstand hat die Konsequenz, daß die sich aus (3) auf triviale Weise ergebende Ungleichung

$$\int r^2\, dF dF_0 \geqq 2k^2\, V V_0 \tag{22}$$

in dem Sinne scharf ist, als für ein besonderes Eikörperpaar das Gleichheitszeichen in Kraft gesetzt wird. Wählen wir für (22) die vektorielle Schreibweise, indem wir $r^2 = (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)^2$ setzen, wobei wie oben $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_0$ die Ortsvektoren der Oberflächenstellen auf A und A_0 bedeuten, so ergibt die Ausrechnung des Skalarquadrates die Ungleichung

$$T + T_0 \geqq 2k^2 \frac{V V_0}{F F_0} + 2(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0). \tag{23}$$

Hier treten die beiden Trägheitsmomente

$$T = \frac{1}{F}\int \mathfrak{x}^2\, dF, \quad T_0 = \frac{1}{F_0}\int \mathfrak{x}_0^2\, dF_0 \tag{24}$$

der mit der Einheitsmasse homogen belegten Eiflächen auf und weiter wurden die Ortsvektoren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_0$ der beiden Schwerpunkte der Eiflächen eingeführt, die auf Grund der Relation

$$\frac{1}{F F_0}\int (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_0)\, dF dF_0 = (\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0) \tag{25}$$

sich hier Zugang verschaffen. Die Ungleichung (23) wurde im Falle $k = 2$ in einer etwas spezielleren Form von L. RÉDEI und B. SZ.-NAGY[8]) hergeleitet. Identifizieren wir noch A mit A_0, so ergibt sich für das Trägheitsmoment T einer homogen mit der Einheitsmasse belegten Eifläche bezüglich O die Abschätzung

$$T \geqq \left(\frac{kV}{F}\right)^2 + \sigma^2 \tag{26}$$

wobei σ den Abstand des Eiflächenschwerpunktes von O bezeichnet.

(Eingegangen am 13. Oktober 1950.)

[7]) Göttinger Vorlesung S. S. 1933; zitiert nach W. BLASCHKE, loc. cit. [1]). Fall $k = 2$ bzw. $k = 3$ vgl. insb. Heft I (112) S. 20 bzw. Heft II (101) S. 77. — In einer inhaltsreichen Abhandlung hat O. VARGA [Integralgeometrie 3. Croftons Formeln für den Raum, *Math. Zeitschrift*, **40** (1935), S. 387–405] allgemeinere Typen derartiger Integrale und ihre gegenseitigen Beziehungen untersucht. Die Formel von Herglotz ist dort mit (16') S. 401 angeführt. Es scheint, daß die Exponenten $n = 0, 1, k+1$ die einzigen sind, für welche die Sehnenpotenzintegrale k-dimensionaler Eikörper durch die Minkowskischen Maßzahlen einfach ausdrückbar werden.

[8]) Loc cit. [2]) (16) p. 49.

Bibliographie.

N. Bourbaki, Éléments de mathématique. Première partie: **Les structures fondamentales de l'analyse** (Actualités Scientifiques et Industrielles), Paris, Hermann et Cie.

Le programme de BOURBAKI est d'exposer les principales théories mathématiques d'une manière unifiée qui fait bien ressortir les progrès accomplis pendant le dernier demi-siècle, ainsi que les tendances du développement actuel. L'exposé suit la méthode dogmatique et axiomatique; il s'agit de mettre en lumière les rapports liant les diverses théories mathématiques. Pour mener à bien l'unification cherchée, l'auteur a dû faire un choix; un tel choix est toujours discutable, mais celui de BOURBAKI correspond parfaitement au plan qu'il s'est tracé. Outre cette unification des mathématiques, il se propose aussi de donner une base solide et indiscutable à toute la mathématique moderne qui pourrait servir de point de départ aux théories ultérieures. L'axiomatique est un outil indispensable pour un tel fondement, mais elle ne constitue pas le but ultime.

À cause de sa méthode déductive, ce traité n'est pas pour une première introduction, car la voie psychologique d'acquérir de nouvelles connaissances est plutôt celle inverse. Néanmoins, une collection riche et systématique d'exercices et d'exemples instructifs fait bien pour compenser ces difficultés. Pour le lecteur plus avancé la méthode de BOURBAKI présente beaucoup d'avantages et ce traité est un véritable événement aussi pour le chercheur. Sans doute, BOURBAKI fera son école et aura une influence considérable sur le développement des mathématiques.

Le traité paraît en des fascicules séparés. Livre I (dont seulement un fascicule des résultats est à ce jour paru) traite de la théorie des ensembles; Livre II expose les théories algébriques; Livre III est consacré à la topologie générale. On donnera ici un compte rendu des fascicules des Livres II—III parus pendant la période 1940—1949.

B. Sz.-N.

Livre II. Algèbre.

Chapitre I. **Structures algébriques** (No. 934; 165 pages, 1942).

Les §§ 1—5 *traitent de la notion la plus générale de structure algébrique.* Pour un ensemble E, on appelle "loi de composition interne" une opération binaire faisant correspondre à certains couples x, y d'éléments de E un élément $x \cdot y$ de E. Une "loi de composition externe" est une opération binaire sur les ensembles Ω ("domaine d'opérateurs") et E, faisant correspondre à certains couples d'éléments $\alpha\in\Omega$, $x\in E$ un élément $\alpha \cdot x\in E$. D'une façon générale, on appelle structure algébrique sur l'ensemble E toute structure déterminée sur E par une ou plusieurs lois de composition internes entre éléments de E, et une ou plusieurs lois de composition externes entre des domaines d'opérateurs et E. Les diverses structures algébriques classiques s'en dérivent si l'on précise convenablement les propriétés des lois de composition et les relations entre elles. Mais l'auteur réussit de définir l'élément neutre, l'élément symétrique, la partie stable d'une structure algébrique, la structure quotient, l'homorphisme et la représentation même pour les structures algébriques du type le plus général et d'établir des théorèmes généraux correspondant au théorème d'homomorphie et aux deux theorèmes d'isomorphie de la théorie des groupes. Notons en particulier l'élégance de la construction d'une portée très générale, appelée par l'auteur "symétrisation d'une structure" qui comprend comme cas particuliers entre autres l'extension d'un semi-groupe commutatif en un groupe et l'extension d'un anneau d'intégrité en un corps.

Les §§ 6—9 traitent des structures algébriques particulières. On introduit les notions fondamentales et on établit les premiers théorèmes de la théorie des groupes et des groupes à opérateurs; le théorème de Jordan—Hölder—Schreier est démontré par la voie la plus élégante qu'on connaisse aujourd'hui: par le lemme de Zassenhaus. Les groupes de transformations, les fondements de la théorie des anneaux et des corps font l'objet des trois derniers paragraphes. Une Note historique en 9 pages, d'un contenu très riche, termine le chapitre.

Chapitre II. **Algèbre linéaire** (No. 1032; 132 pages, 1947).

On introduit d'abord les notions fondamentales de la théorie des modules. Un *module* à gauche est un groupe additif commutatif E avec un anneau A comme domaine d'opérateurs à gauche; le module E est *unitaire* si A possède un élément neutre qui est l'opérateur identique pour E. Si A est un corps, le module unitaire E s'appelle espace vectoriel. Après des théorèmes sur les applications linéaires d'un A-module dans un autre et sur la structure des espaces vectoriels, on introduit la notion importante du *dual* d'un module E: c'est le A-module à droite E^* formé par les formes linéaires (= applications linéaires de E dans A). On démontre: Si E est un espace vectoriel de dimension n et si V est un sous-espace de E de dimension p, le sous-espace V' de E^* formé par es formes linéaires s'annulant sur V est de dimension $n-p$. Ce théorème permet à l'auteur de traiter des systèmes d'équations linéaires d'une façon élégante. Suit l'étude des problèmes concernant les espaces vectoriels dont le corps des scalaires contient un sous-corps distingué. Il y a à noter la belle et remarquable démonstration du théorème fondamental de la théorie de Galois des corps (non commutatifs). Un paragraphe s'occupe des matrices finies; notons en particulier la belle démonstration du théorème affirmant que les rangs par lignes et par colonnes d'une matrice sont égaux. Bien entendu, tout cela se fait sans déterminants, puisque les éléments de la matrice sont tirés d'un anneau dont on ne suppose pas d'être commutatif. Suit un paragraphe sur les algèbres, avec une riche collection de divers types particuliers. Un appendice sur les applications "sémi-linéaires" termine le chapitre.

T. Szele.

Chapitre III. **Algèbre multilinéaire** (No. 1044; 157 pages, 1948).

La notion fondamentale pour tout le chapitre est celle du *produit tensoriel* de n modules unitaires $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sur un anneau commutatif A. C'est un A-module G caractérisé à une isomorpie près par les deux propriétés suivantes 1) Il existe une application multilinéaire $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'ensemble produit $P = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans G telle que l'image de P engendre G; 2) Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une application multilinéaire de P dans un A-module quelconque F, il existe une application linéaire et une seule $g \to h(g)$ de G dans F telle qu'on ait identiquement $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h(g(x_1, x_2, \ldots, x_n))$. Un tenseur p-fois covariant et q-fois contrevar ant sur un A-module E est alors défini comme un élément du produit tensoriel de $p+q$ facteurs dont p sont égaux à E et q à son dual E^*. La seconde moitié du chapitre s'occupe de l'algèbre extérieure (multiplication extérieure de Grassmann); c'est ici que les déterminants s'introduisent de la façon la plus naturelle.

Il y a trois appendices: Produits tensoriels infinis; Produit tensoriel de deux modules sur des anneaux non commutatifs; Sur les applications universelles. Une Note historique intéressante est ajoutée, concernant l'algèbre linéaire et multilinéaire. La bibliographie placée à la fin contient les principales contributions à ce sujet; d'après l'opinion du rapporteur, le Mémoire de H. WHITNEY: Tensor product of abelian groups (*Duke Math. Journal*, 4 (1938)) aurait dû figurer dans cette liste.

O. Varga.

Livre III. **Topologie générale.**

Chapitre I. **Structures topologiques**; Chapitre II. **Structures uniformes** (No. 858; VIII + 132 pages, 1940).

Ces deux chapitres sont très originaux, par la généralité de l'exposé (aucun axiome de dénombrabilité), l'utilisation systématique de la notion de filtre et la théorie simplifiée des espaces uniformes.

Une topologie sur un ensemble est définie par la famille des parties dites "ouvertes", qui vérifie les axiomes des ensembles ouverts. Notons que l'auteur appelle voisinage d'un point *chaque* ensemble dont l'intérieur contient le point donné. *Inversement: définition d'une topologie par des systèmes de voisinages attachés à chaque point.* Comparaison des diverses topologies définies sur un même ensemble; topologie relative; application continue.

Aucun axiome de dénombrabilité n'étant intervenu, la notion de suite convergente est remplacée par celle de filtre, due à H. CARTAN. Un filtre est un ensemble de parties de l'espace, qui vérifie les axiomes: (F_I) Tout ensemble qui contient un ensemble d'un filtre appartient au filtre; (F_{II}) toute intersection finie d'ensembles d'un filtre appartient au filtre; (F_{III}) aucun ensemble d'un filtre n'est vide. [Exemples: toutes les parties d'un ensemble contenant un élément ou un ensemble donné; les complémentaires des sous-ensembles finis d'un ensemble infini; les parties d'un espace de base dénombrable, qui contiennent les complémentaires des parties finies d'une suite convergente (cas particulier du filtre de FRÉCHET), etc.] Dans un espace où un axiome de dénombrabilité est valable, pour qu'une suite converge vers un point x, il faut et il suffit, que le filtre de Fréchet, déterminé par la suite, contienne le filtre des entourages de x. On démontre que ce procédé permet de généraliser une partie importante de la théorie des suites convergentes aux espaces les plus généraux. Notamment le théorème de TYCHONOFF sur le produit des espaces compacts devient d'un énoncé évident. (Compact signifie bicompact au sens d'ALEXANDROFF—HOPF.) La notion de filtre et d'ultrafiltre permet enfin d'exposer d'une façon élégante des questions classiques où les axiomes de dénombrabilité se trouvaient satisfaits, en supprimant, notamment, l'emploi du procédé diagonal.

Structures uniformes. Dans des espaces importants on peut donner un sens à l'expression "deux points sont voisins l'un de l'autre" sans fixer la position de l'un d'eux. A. WEIL a montré que pour préciser cette notion il n'est pas nécessaire de recourir à la métrique. L'exposé de la théorie de WEIL est très simplifié par la notion de filtre. On définit sur un ensemble E une structure uniforme en utilisant un filtre de voisinages de la diagonale de l'espace produit $E \times E$. Fonctions uniformément continues. Espaces complets; complétion d'un espace uniforme.

Chapitre III. **Groupes topologiques (Théorie élémentaire)**; Chapitre IV. **Nombres réels** (No. 916; IV + 158 pages, 1942).

Un groupe topologique G est muni d'une structure double: au sens algébrique il est un groupe, au sens topologique un espace, ces deux structures étant compatibles, c'est à-dire l'application $(x, y) \to xy^{-1}$ de $G \times G$ dans G est continue. (On ne suppose pas l'axiome de séparation.) Sous-groupe quotient, homomorphisme, espace homogène, produit. Structure uniforme et complétion d'un groupe topologique. Familles sommables dans un groupe abélien. Anneaux et corps topologiques. (Théorie élémentaire avec beaucoup d'exemples concernant les corps p-adiques.)

Le chapitre IV est entièrement consacré à l'étude élémentaire du corps topologique des nombres réels, qui est défini ici comme la complétion du corps des nombres rationnels. Les propriétés de la droite numérique sont facilement établies, en utilisant la théorie générale. Fonctions numériques définies dans un ensemble filtré. Familles sommables et multipliables: séries et produits infinis; développement relatif à une suite de base, etc.

Chapitre V. **Groupes à un paramètre**; Chapitre VI. **Espaces numériques et espaces projectifs**; Chapitre VII. **Les groupes additifs de $\mathbf{R}^n$**; Chapitre VIII. **Nombres complexes** (No. 1029; 131 pages, 1947).

Le chapitre V est consacré à l'étude des groupes à un paramètre en vu d'applications sur la mesure de grandeurs, exponentielles et logarithmes. L'exponentielle est définie comme un homomorphisme du groupe additif des réels sur le groupe multiplicatif des réels positifs. Caractérisation topologique des groupes additifs des réels et du tore à une dimension.

Les chapitres suivants donnent les bases de la géométrie des espaces numériques et des espaces projectifs. Les sous-groupes du groupe additif de R^n sont énumérés avec soin; comme application un théorème de Kronecker est démontré. Groupes quotients: tores.

La mesure des angles et les fonctions trigonométriques sont définies dans le domaine complexe, après avoir remarqué que le groupe multiplicatif des nombres complexes de valeur absolue 1 est isomorphe au tore à une dimension. On peut ainsi définir l'angle de deux demi-droites et l'addition des angles. Espaces projectifs complexes.

Chapitre IX. **Utilisation des nombres réels en topologie générale** (No. 1045; 101 pages, 1948).

Cette théorie porte sur les questions suivantes: Génération d'une structure uniforme par une famille d'écarts. Espaces uniformisables. Espaces métriques. Espaces métrisables. Groupes métrisables; corps valués; espaces et algèbres normés. Espaces normaux. Espaces de Baire. Dans un appendice l'auteur traite des produits infinis dans les algèbres normés.

Chapitre X. **Espaces fonctionnels. Dictionnaire** (No. 1084; 101 pages, 1949).

Les différents espaces fonctionnels jouent un grand rôle et dans l'analyse moderne et dans la topologie générale ou algébrique. Ici les structures topologiques de ces espaces (questions délicates et fondamentales) sont étudiées. Structures uniformes sur les espaces fonctionnels. Espaces de fonctions continues, ensembles de fonctions équicontinues (cette théorie peut servir comme fondement pour la théorie des groupes de transformations). Approximations des fonctions numériques.

Dans le dictionnaire on a réuni les termes allemands, anglais et les termes courants français d'une part, et la terminologie de Bourbaki d'autre part. Ce dictionnaire est bien utile pour ceux qui veulent étudier séparément les différents chapitres de ce traité.

I. Fáry.

Morris Marden, The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable (Mathematical Surveys, number III), X + 183 pages, New York, American Mathematical Society, 1949.

Dies ist das erste zusammenfassende Lehrbuch über die Geometrie der Polynome. Während das in 1939 erschienene Mémorialheft von J. Dieudonné: *La théorie analytique des polynomes d'une variable (à coefficients quelconques)* über 116 Arbeiten von 68 Verfassern berichtet, umfaßt das Literaturverzeichnis der Monographie von Marden 44') Arbeiten von 225 Verfassern

Kap. I beschäftigt sich mit den Nullstellen der Derivierten eines Polynoms und mit ihren physikalischen, geometrischen und funktionentheoretischen Interpretationen. In der physikalischen Interpretation sind die Nullstellen der Derivierten Gleichgewichtsstellen eines materiellen Punktes, auf welchen die Nullstellen des Polynoms dem Abstand umgekehrt proportionale abstoßende Kräfte ausüben. Leider haben die Sätze über Schwerpunkt, Trägheitsachsen und Trägheitsellipse der Nullstellen des Polynoms und seiner Derivierten in der Monographie keinen Platz gefunden. Die geometrische Interpretation faßt die Nullstellen der Derivierten eines Polynoms n-ten Grades als Brennpunkte einer algebraischen Kurve $(n-1)$-ter Klasse auf, die von den Verbindungsstrecken je zweier Nullstellen des Polynoms in den Halbierungspunkten berührt werden. Die funktionentheoretische Interpretation untersucht die durch das Polynom vermittelte konforme Abbildung der z-Ebene. Die Punkte der z-Ebene, in denen der absolute Betrag eines Polynoms derselbe ist, liegen auf allgemeinen Lemniskaten.

Kap. II enhält den Gauß-Lucasschen Satz und seine Verallgemeinerungen, ferner den Jensenschen Satz. Hier befindet sich der allgemeine Mittelwertssatz der Polynome von Marden. Der letzte Paragraph dieses Kapitels enhält Verallgemeinerungen auf die Polynomlösungen der Laméschen Differentialgleichung.

Kap. III ist dem Laguerreschen Polarpunkt, Polargleichungen und ihren Verallgemeinerungen gewidmet. Der Gracesche Satz über apolare Gleichungen, seine Folgerungen und die Lage der Nullstellen der linearen Verknüpfungen von Polynomen oder eines Polynoms und seiner Derivierten bilden den Gegenstand von Kap. IV. Kap. V beschäftigt sich mit der Lage der Derivierten einer rationalen Funktion und mit ähnlichen Sätzen über rationale Funktionen. Kap. VI enthält die Verallgemeinerungen des Rolleschen Satzes und des Mittelwertsatzes für komplexe Polynome: den Grace-Heawoodschen Satz und Sätze von Fekete, Marden, Kakeya und Biernacki.

Kap. VII und VIII geben obere Schranken für die absoluten Beträge der Nullstellen eines Polynoms n-ten Grades und seiner p $(p \leqq n)$ Nullstellen, wenn sämtliche bzw. $p+1$ Koeffizienten des Polynoms gegeben sind. Die letzten zwei Kapiteln beschäftigen sich mit der Bestimmung der Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in einer Halbebene bzw. in einem Kreis.

Am Ende der einzelnem Kapitel stehen gut gewählte speziellere Sätze, die den Gegenstand des Kapitels lebendig machen.

Ein Lehrbuch über die Geometrie der Polynoms ließe sich natürlich auch etwas anders ausarbeiten. Es könnte z. B. auch Paragraphen über die Polynome mit lauter reellen Nullstellen und mit lauter reellen Koeffizienten enthalten, Gegenstände, die hier außer Acht geblieben sind. Die Auswahl des Stoffes ist aber wohl eine Geschmacksache. Die Monogradhie von Marden gibt eine gute Einsicht in das große Gebiet der Geometrie der Polynome und wird Studierenden und Forschern gewiß gute Dienste leisten.

Gy. Sz.-N.

Nathan Jacobson, The theory of rings (Mathematical Surveys, number II), VI + 152 pages, New York, American Math. Society, 1943.

This excellent book gives a complete account on the theory of rings, including structure and representation theory and multiplicative ideal theory as the major themes of the subject. Although historically ring problems at first arose in DEDEKIND's ideal theory of algebraic number fields, actually the ring theory, in the modern abstract sense, may be regarded as beginning with NOETHER's fundamental works on representation moduli and axiomatic foundation of commutative ideal theory as well as ARTIN's generalization of WEDDERBURN's structure theorems on algebras to rings with finiteness assumptions. The influence which these ideas exercised on the development of modern algebra is well known to every mathematician. The ring theory occupied a central position in algebra, so that it is not at all surprising that in the last decades a great progress was made towards a thorough simplification and considerable extension of the original theory. The author has accumulated an immense material (the bibliography at the end of the book contains the titles of nearly three hundred original papers) and presented it in an elegant and interesting form.

The subject matter is treated from a modern and new point of view due to the author. This view is that of considering a ring as a subring of the full endomorphism ring of its additive group. Therefore in the first chapter the reader is made familiar with the fundamental concept of endomorphism ring of abelian groups. For the sake of completeness, even a brief account on groups of operators is given in a very simple form, containing the JORDAN—HÖLDER—SCHREIER theorem, FITTING's lemma and the KRULL—SCHMIDT theorem stating the uniqueness of direct decompositions. These provide the background needed in later discussions.

The next chapter is devoted to a short discussion of vector spaces, while Chapter 3 deals with the properties of principal ideal domains. Inter alia the significant theorem of JACOBSON—TEICHMÜLLER on elementary divisors and NAKAYAMA's theorem related to it are proved. Also, some geometrical applications are added. Chapter 4 provides a systematic treatment of the structure theory for rings, containing the classical WEDDERBURN—ARTIN theorem of semisimple rings. As an application the author presents his own Galois theory for division rings. The next chapter is primarily concerned with the theory of simple algebras including WEDDERBURN's structure theorem of simple rings and many other topics related to this question.

In the last chapter the ideal theory of noncommutative rings is developed. It is proved that under the usual conditions the two-sided ideals of an order are uniquely factorable into prime ideals which are commutable. In order to obtain a factorization even for one-sided ideals, the author considers normal ideals and BRANDT's groupoids and shows that the normal ideals form a groupoid under multiplication; the units are the maximal orders and groupoid-inverses are the inverse ideals. The theorem of ASANO as well as the factorization theorem for integral ideals are also discussed at length.

The book is a masterpiece of exposition; the author's style is concise and clear. This book will certainly exert a deep influence upon the future development on this field, as it has already been proved during the years past since its appearance.

L. Fuchs.

Emil Artin, Galois theory. Edited and supplemented by **Arthur N. Milgram** (Notre Dame Mathematical Lectures, no. 2), 2nd edition, 82 pages, Notre Dame, Indiana, 1948.

This little book discusses in a self-contained fashion the basic properties of fields and their consequences leading to the fundamental theorem of Galois theory, together with several applications. The reader is expected to have a knowledge only of classical algebra and the basic concepts of group theory, while the nontrivial facts needed for groups are proved in details.

First, as preparation for the comprehensive treatment of field theory, a short study is made of vector spaces, linear equations, all of which are considered in skew-fields. The rudiments of field theory are carefully explained. A new idea is that of first considering the Galois group as a finite group of automorphisms and then defining the base field as the fixed field for these automorphisms. In view of this idea, the author first proves that the degree of a field E over a field F is not less than n, if F is the fixed field for a set of n automorphisms of E, and then he proves that if this set of automorphisms forms a group, the degree is just n. Both proofs are based on considering the automorphisms as group characters in E as well as on the fact that a system of r homogeneous linear equations with $n>r$ unknowns has a nontrivial solution. While of the two cited theorems the latter one is the main tool in proving the fundamental theorem, the first one has already a number of interesting consequences, for example, it yields a generalization of the main theorem of symmetric functions to the effect that each polynomial in $x_1, \ldots, x_n$ is a linear combination of terms of the form $x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n}$ with $\nu_i \leq i-1$ whose coefficients are polynomials in the elementary symmetric functions of the x_i. The former discussions enable the author to give a short proof for the fundamental theorem.

The next sections are concerned with finite fields, roots of unity, Noether equations, Kummer fields, the existence of a normal basis, etc. Applications of the theory are made by A. N. Milgram to the solution of equations by radicals, arriving at a proof of Abel's theorem on the impossibility of solving a general equation of degree >4 by radicals. The book ends with the problem of geometrical constructions by ruler and compass. L. Fuchs.

Otto Haupt, Differential- und Integralrechnung. Unter Mitarbeit von **Georg Aumann.** Zweite, völlig neubearbeitete Auflage unter Mitwirkung von **Christian Pauc, Bd. I: Einführung in die reelle Analysis** (Göschens Lehrbücherei, Bd. 24), VIII + 218 S., Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1948.

Der Inhalt des ersten Bandes der in 1938 erschienenen ersten Auflage wurde unter Mitwirkung von Chr. Pauc wesentlich enweitert. Statt der sich dort befindenden knappen Einführung der reellen Zahlen als unendliche Dezimalbrüche wird hier eine Analyse der Axiomen, die die grundlegenden Eig nschaften der reellen Zahlen enthalten, gegeben, und nachher das mit Hilfe der rationalen Zahlen für dieses Axiomensystem aufgebauten Modell in kurzen Umrißen besprochen. Ein anderer wichtiger Unterschied gegenüber der ersten Auflage ist, daß unter dem Titel „Allgemeine Grenzwerttheorie" ein systematischer Aufbau der Theorie der Umgebungsräume und gleichzeitig der der gerichteten Systeme gegeben wird, der ziemlich weit in die Theorie der topologischen Räume führt. Dagegen werden sich die Grenzwertverteilungssätze, die in der ersten Auflage der erste Band enthielt, jetzt im zweiten Bande befinden. Außer diesen größeren Unterschieden findet man in fast allen Teilen kleinere Verbesserungen und Erweiterungen, die den Wert und die Brauchbarkeit dieses schon in seiner ersten Fassung wertvollen Lehrbuches der modernen Analysis noch mehr erhöhen.

Ákos Császár.

André Bloch et Gustave Guillaumin, La géométrie intégrale du contour gauche, VI + 141 pages, Paris, Gauthier Villars, 1949.

Étant donné un contour gauche C, les auteurs entendent par géométrie intégrale du n-ième ordre l'étude des intégrales $\int_C x^\alpha y^\beta z^\gamma (\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz)$ où $\alpha + \beta + \gamma \leqq n$. Chapitre I donne un aperçu des matières traitées. Les chapitres II—III développent les propriétés affines des intégrales du premier ordre. On y trouve déjà les rapports importants entre les bivecteurs et vecteurs qui trouvent leur expression dans les relations entre des intégrales simples et doubles. Chapitre IV a pour objet l'étude du volume d'un cône dont la directrice est le contour C. Chapitre V traite de la théorie cinétique du contour C. On y trouve le théorème de Pappus—Guldin et ses généralisations données par G. Koenigs. Chapitre VI a pour objet la théorie quadratique affine du contour gauche. C'est la théorie des propriétés quadratiques de la "congruence de gravité" constituée par l'ensemble des axes de gravité liés d'une manière intrinsèque au contour gauche C. Chapitre VII s'occupe des rapports entre le calcul tensoriel et la géométrie des intégrales du contour gauche C. Il y a de nombreuses applications à l'électromagnétisme, à l'hydrodynamique et à l'aérodynamique. Dans le chapitre VIII certains résultats des chapitres antérieurs sont généralisés au cas de la géométrie non-euclidienne. Un appendice indique des généralisations à n dimensions.

O. Varga.

Henri Lebesgue, Leçons sur les constructions géométriques, VI + 304 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1950.

Das vorliegende Lehrbuch ist aus den letzten Vorlesungen hervorgegangen, die der im Jahre 1941 verstorbene berühmte Verfasser im Collège de France gehalten hat. Das Buch verteilt sich in der Teile: I. Ausführung von Konstruktionen. II. Algebraische und geometrische Probleme der Konstruierbarkeit III. Kurven, die punktweise mit dem Lineal konstruierbar sind.

Der erste Teil besteht aus 5 Kapiteln: 1. Lösung der Fundamentalaufgaben: Trisektion, Delisches Problem. 2. Lineal und Zirkel. Zirkel allein. 3. Lineal und Rechtwinkelbrett. 4. Benützung der Konstruktionsmittel. 5. Gelenksysteme. Der zweite Teil besteht ebenso aus 5 Kapiteln: 1. Mit Lineal konstruierbare algebraische Probleme. 2. Mit Zirkel und Lineal konstruierbare algebraische Probleme. Reguläre Vielecke. 3 Das allgemeine algebraische Problem der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal. 4. Konstruktion in einem nichtnormalen Rationalitätsbereich. Trisektrizen und n-Sektrizen des Dreiecks. 5. Transzendenz von e und π. Der dritte Teil besteht nur aus drei Kapiteln: 1. Kurven, die aus beliebigen ihrer Punkten konstruierbar sind. 2. Kurven, die aus diskreten Punkten konstruierbar sind. 3. Untersuchung der Geraden.

In diesem schönen Buch sind aber — leider — gewisse Konstruktionsprobleme außer Acht geblieben. Z. B.: Konstruktionen von Smith und Kortum mittels eines gezeichneten (vom Kreis verschiedenen) Kegelschnittes, Beweis der Notwendigkeit des Mittelpunktes im Poncelet-Steinerschen Kreise bei metrischen Konstruktionen, Ersatz dieses durch einen Teilbogen, Konstruktionen im beschränkten Raum und mit beschränkten Hilfsmitteln, quadrierbare Lunulae, Methoden der geometrischen Konstruktionen, Geometrographie.

Der Gegenstand des dritten Teiles wurde bisher in keinem anderen Lehrbuch über die geometrischen Konstruktionen behandelt. Die ersten zwei Kapitel des dritten Teils hängen mit einem Diophantischen Problem eng zusammen. Dies ist die Konstruktion rationaler Punkte auf einer algebraischen Kurve C vom Geschlecht Null oder Eins aus einem rationalen Punkt von C, wenn die Gleichung von C rationale Koeffizienten besitzt.

Gy. Sz.-N.

Georges Reboul et Jean-Antoine Reboul, Un axiome universel. Ses applications aux sciences expérimentales (Monographies des Probabilités, Fascicule VII), XX + 148 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1950.

Toutes les lois différentiables de la nature peuvent se mettre sous la forme $dU/U = \Sigma \beta_i dU_i/U_i$. On peut alors les interpréter comme une combinaison de „probabilités" ponderées. C'est en langage mathématique „l'axiome universel" pris pour la base du livre présent. Mais les interprétations données à un grand nombre de lois de la physique, chimie et biologie paraissent être peu convaincantes ou créatives.

T. Szentmártony.

Émile Picard, Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications à divers problèmes d'analyse et de physique mathématique, rédigées par **Eugène Blanc** (Cahiers Scientifiques, Fascicule III), VI + 187 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1950.

Le présent nouveau tirage de la première édition parue en 1928 était rendu nécessaire par la position unique de ce livre comme traité de la théorie des équations fonctionnelles et ses applications importante à la mécanique, à la théorie du potentiel et à la géométrie non-euclidienne, par la discussion vive et captivante des problèmes d'itération, des équations aux différences finies et des transcendantes définies par des équations fonctionnelles, et par le grand nombre de problèmes importants et intéressants résolus et non-résolus.

J. Aczél.

Émile Borel, Leçons sur la théorie des fonctions (Principes de la théorie des ensembles en vue des applications à la théorie des fonctions) (Collection Borel), quatrième édition, XIII + 295 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1950.

La troisième édition, parue en 1928, a été augmentée par une nouvelle préface, par quelques remarques et notes au bas des pages, et par un appendice sur "L'axiome de choix et les définitions asymptotiques".

Ernest Duporcq, Premiers principes de géométrie moderne. Troisième édition par **Raoul Bricard,** I + 174 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1949.

Nouveau tirage de l'édition de 1938.

S. Lefschetz, L'analysis situs et la géométrie algébrique (Collection Borel), VI + 154 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1950.

Nouveau tirage par reproduction photomécanique de l'ouvrage publié en 1924.

Émile Picard, Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la physique mathématique (Cahiers scientifiques, fasc. 1), IV + 214 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1950.

Nouveau tirage par reproduction photomécanique de l'ouvrage publié de 1917.

W. Sierpiński, Leçons sur les nombres transfinis (Collection Borel), VI + 240 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1950.

Nouveau tirage par reproduction photomécanique de l'ouvrage publié en 1928.

Mémorial des sciences mathématiques, fascicules 101—115, Paris, Gauthier-Villars, 1941—1950.

101 et 102. **Maurice Janet,** Équations integrales et applications à certains problèmes de la physique mathématique, I + 151 pages, 1941.

103. **Olivier Costa de Beauregard,** La Relativité restreinte et la première Mécanique Broglienne, 71 pages, 1944.

104. **Bertrand Gambier,** Cycles paratactiques, 92 pages, 1944.

105. **Pierre Humbert et Serge Colombo,** Le calcul symbolique et ses applications à la physique mathématique, 52 pages, 1947.

106. **Stefan Bergmann,** Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques, 61 pages, 1947.

107. **A. Guillet et M. Aubert,** Propriétés des polynomes électrosphériques, 56 pages, 1948.

108. **Stefan Bergmann,** Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes, 80 pages, 1948.

109. **C. Gattegno et A. Ostrowski,** Représentation conforme à la frontière; domaines généraux, 60 pages, 1949.

110. **C. Gattegno et A. Ostrowski,** Représentation conforme à la frontière; domaines particuliers, 56 pages, 1949.

111. **Lucien Godeaux,** Correspondances entre deux courbes algébriques, 64 pages, 1949.

112. **W. Sierpiński,** Les ensembles projectifs et analytiques, 80 pages, 1950.

113. **N. W. Mc Lachlan, P. Humbert et L. Poli,** Supplément au formulaire pour le Calcul symbolique, 61 pages, 1950.

114. **Ky Fan,** Les fonctions définies-positives et les fonctions complètement monotones. Leurs applications au calcul des probabilités et à la théorie des espaces distanciés, 48 pages, 1950.

115. **André Charrueau,** Sur des congruences de droites ou de courbes et sur une transformation de contact liée à ces congruences, 72 pages, 1950.

Errata.

(*Acta Scientiarum Mathematicarum*, t. 13)

Louis de Broglie, Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs. (J. G. Valatin)

p. 67, *lignes* 14—16 *en bas, au lieu de:* "Les équations . . . de spin 0." *lire:* "Les équations de la théorie sont généralement acceptées comme équations des mésons des forces nucléaires, celle du type maxwellien décrivant un méson vectoriel de spin 1 et celles du type non maxwellien un méson pseudo-scalaire de spin 0."

p. 67, *ligne* 7 *en bas, au lieu de:* "$\mu = 0$" *lire* "$\mu \neq 0$".

Tibor Radó, Length and area. (A. Rényi)

p. 147, *after line* 25: "topological concepts are developed more deeply as necessary for the applications", *insert:* "to the problems of length and area. It is to be regretted also that the theory of surface area is not divided in two parts: an introductory part for a reader interested in the problem only in such an extent which is needed in most applications".

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM
SZEGED (HUNGARIA), ADY-TÉR 1.

INDEX. — TARTALOM.

PRINTED IN HUNGARY

DÉLMAGYARORSZÁG NYOMDA ÁLLAMI VÁLLALAT, SZEGED
Felelős vezető Priskin Sándor.