ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XII.

LEOPOLDO FEJÉR ET FREDERICO RIESZ

LXX ANNOS NATIS DEDICATUS.

PARS A.

S Z E G E D, 1950.

TOMUM IUBILAREM
ADIUVANTE ACADEMIA SCIENTIARUM HUNGARICA
EDIDERUNT
INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS
ET SOCIETAS MATHEMATICA DE IOHANNE BOLYAI NOMINATA

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

12. KÖTET

FEJÉR LIPÓT ÉS RIESZ FRIGYES

70. SZÜLETÉSNAPJÁRA.

A. RÉSZ

S Z E G E D, 1950.

AZ ÜNNEPI KÖTETET
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL
KIADTA
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE
ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XII.

LEOPOLDO FEJÉR ET FREDERICO RIESZ

LXX ANNOS NATIS DEDICATUS.

S Z E G E D, 1950.

TOMUM IUBILAREM
ADIUVANTE ACADEMIA SCIENTIARUM HUNGARICA
EDIDERUNT
INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS
ET SOCIETAS MATHEMATICA DE IOHANNE BOLYAI NOMINATA

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

12. KÖTET

FEJÉR LIPÓT ÉS RIESZ FRIGYES 70. SZÜLETÉSNAPJÁRA.

SZEGED, 1950.

AZ ÜNNEPI KÖTETET
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL
KIADTA
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE
ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT

FREDERICO RIESZ et LEOPOLDO FEJÉR

Magistris mathematicae Hungaris
LXX annos natis

damus, donamus, dedicamus
maximo cum honore et amore

venerantium, amicorum, discipulorum,

diebus XXII. mensium Ianuarii et IX. Februarii anni MLM.

RIESZ FRIGYESNEK és FEJÉR LIPÓTNAK,

a matematika magyar Mestereinek,
születésük 70. évfordulója alkalmával

tisztelettel és szeretettel ajánlják ezt a kötetet

barátok, tanítványok, tisztelők

1950. január 22-én és február 9-én.

INDEX — TARTALOM.

Tomus XII. — 1950. — 12. kötet.

Tomum iubilarem
compluribus adiuvantibus
redigebat

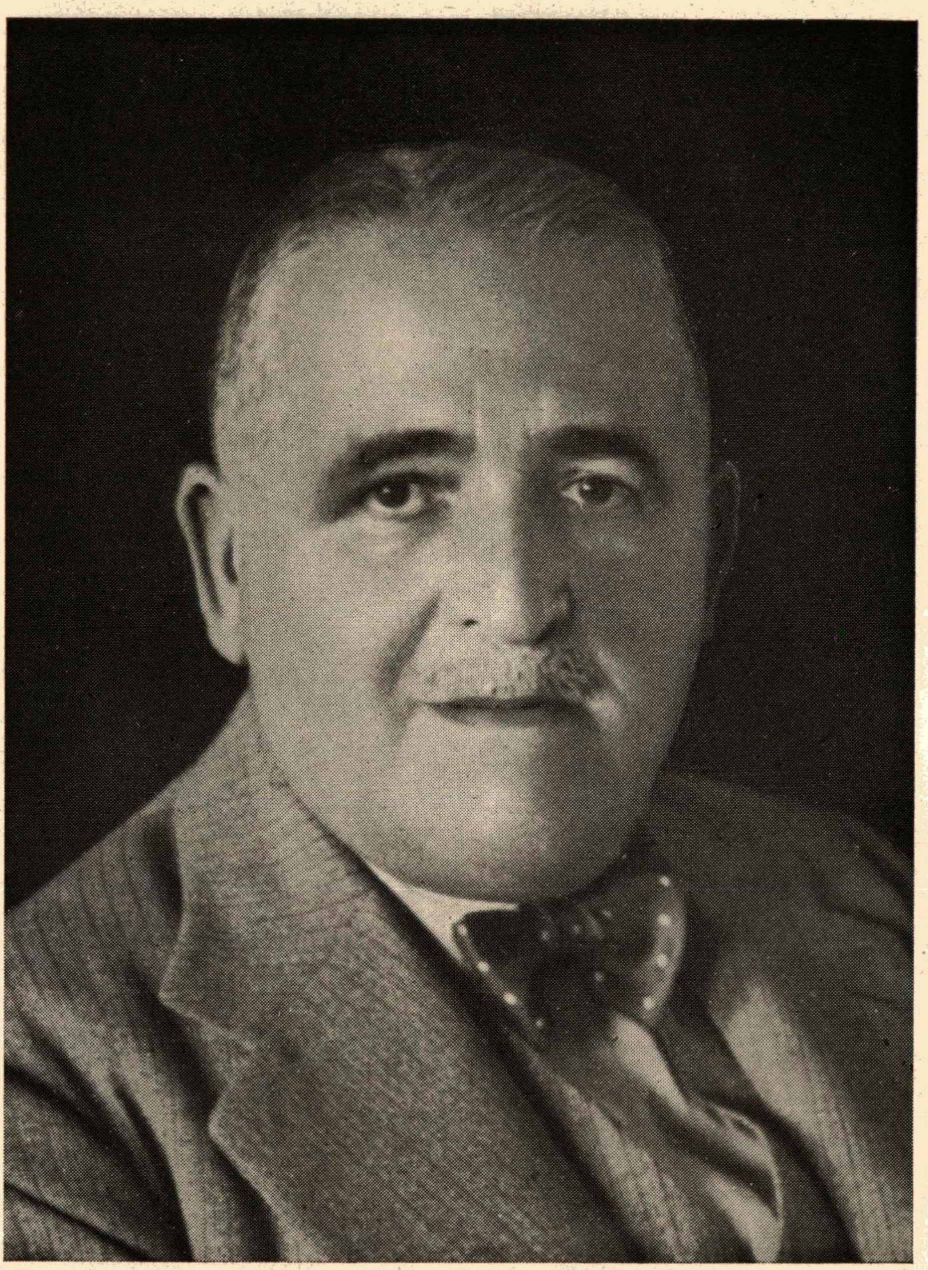
BÉLA SZ.-NAGY

Az ünnepi kötetet
többek közreműködésével
szerkesztette

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

Délmagyarország Nyomda NV. Szeged.

Felelős vezető: Priskin Sándor.



RIESZ FRIGYES

FEJÉR LIPÓT

PARS A.

A. RÉSZ

Totalreelle rationale Funktionen.

Von GYULA SZ.-NAGY in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Die rationalen Funktionen

$$(1)\qquad F(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n}=\frac{f(z)}{g(z)}\quad\text{und}\quad G(z)=\frac{g(z)}{f(z)}$$

haben den Grad n, wenn $|a_0|+|b_0|\neq 0$ ist. Sie sind *irreduzibel*, wenn die Polynome $f(z)$ und $g(z)$ keine gemeinsame Nullstelle besitzen. Die irreduzible rationale Funktion $F(z)$ nimmt jeden Wert Z in n Punkten, in den Z-Stellen der Funktion an. Diese Z-Stellen sind die Nullstellen der Funktion $F(z)-Z$, oder des Polynoms

$$(2)\qquad P(z;Z)\equiv f(z)-Z\,g(z)\equiv g(z)\,[F(z)-Z].$$

Der Grad des Polynoms $P(z;Z)$ ist nur dann kleiner als n, wenn $a_0-Z\,b_0=0$ ist. Bei diesem Wert Z rechnet man auch $z=\infty$ den endlichen Z-Stellen zu.

Die rationale Funktion $F(z)$ wird dann *totalreell* genannt, wenn sie außerhalb der reellen Achse keinen reellen Wert annimmt. Die einfachsten totalreellen rationalen Funktionen sind z, $-z$, z^{-1} und $-z^{-1}$. Ist die rationale Funktion $F(z)$ irreduzibel und totalreell, so hat das Polynom $P(z;Z)$ bei jedem reellen Wert Z lauter reelle Nullstellen. Man kann offenbar annehmen, daß die Polynome $f(z)$ und $g(z)$ reelle Koeffizienten besitzen.

Der Wert $Z=F(z)$ einer totalreellen rationalen Funktion $F(z)$ ist reell bzw. nichtreell, je nachdem die Zahl z reell bzw. nichtreell ist. Besteht also die eine der Ungleichungen

$$\operatorname{Im} z\neq 0,\ \operatorname{Im} Z\neq 0\qquad [\operatorname{Im}(x+iy)=y,\ \operatorname{Re}(x+iy)=x],$$

so besteht auch die andere.

Die Determinante $D=a_0b_1-a_1b_0$ wird die *Charakteristik* der totalreellen rationalen Funktion $F(z)$ (mit reellen Koeffizienten) von der Form (1) genannt. Die totalreellen Funktionen $-F(z)$ und $[F(z)]^{-1}$ haben offenbar die Charakteristik $-D$. Die Funktionen $F(z)-\lambda$ sind bei jedem reellen Wert λ offenbar totalreell und haben die Charakteristik D.

Die wichtigsten Eigenschaften der totalreellen rationalen Funktionen werden in dem folgenden Satz zusammengefaßt:

I. *Die totalreelle irreduzible rationale Funktion $F(z)$ n-ten Grades*

$$F(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n},\quad |a_0|+|b_0|\neq 0,\quad D=a_0b_1-a_1b_0,$$

hat die charakteristischen Eigenschaften:

1. *Die irreduzible algebraische Kurve n-ter Ordnung*

$$\Phi(x,y) \equiv f(x) - y \cdot g(x) = 0$$

wird von jeder zur x-Achse parallelen Geraden in n getrennten reellen Punkten geschnitten. F(z) nimmt also jeden reellen Wert in verschiedenen n Punkten an.

2. *Die Partialbruchzerlegung der Funktion F(z) hat im Falle $b_0 \neq 0$ bzw. $b_0 = 0$ die Form*

$$(3) \qquad F(z) = \frac{a_0}{b_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{z - \beta_k}, \quad DB_k < 0, \quad b_0^2 \sum_{k=1}^{n} B_k = -D, \quad \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n,$$

bzw.

$$(4) \qquad F(z) = A_0 z + A + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_k}{z - \beta_k}, \quad b_1^2 A_0 = D \,(= a_0 b_1), \quad DB_k < 0.$$

3. *Ist* $\operatorname{Im} z \neq 0$, *so ist* $D \cdot \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} F(z) > 0$.

4. *Sind λ und $\mu (\neq \lambda)$ reelle Zahlen, so werden die λ-Stellen der Funktion $F(z)$ von ihren μ-Stellen getrennt und umgekehrt.* (Zwischen zwei benachbarten λ- bzw. μ-Stellen von $F(z)$ liegt nämlich genau eine μ- bzw. λ-Stelle.)

5. *Sind λ und μ $(\neq 0)$ beliebige reelle Zahlen, so liegen sämtliche Nullstellen des Polynoms $Q(z) \equiv f(z) - (\lambda + i\mu)\, g(z)$ auf derjenigen Seite der reellen Achse, wo $D\mu \cdot \operatorname{Im} z > 0$ ist.*

6. *Eine rationale Funktion mit einer dieser Eigenschaften, ist totalreell.*[1])

---

[1]) Trennende Polynome und damit einzelne Teile des Satzes I wurden in den folgenden Arbeiten untersucht: Ch. Hermite, Question 777—779, *Nouvelles Annales de Math.*, (2) **5** (1866), S. 432—479; A. Poulain, Théorèmes généraux sur les équations algébriques, *Ebenda* (2) **6** (1867), S. 21—33; Ch. Biehler, Sur une classe des équations algébriques dont toutes les racines sont réelles, *Journal für Math.*, **87** (1879), S. 350—352; E. Laguerre, *Oeuvres*, Bd. I (Paris, 1898), S. 109—110; M. Fujiwara, Einige Bemerkungen über die elementare Theorie der algebraischen Gleichungen, *The Tôhoku Math. Journal*, **9** (1916), S. 102—108; Y. Okada, On some algebraic equations whose roots are real and distinct, *Ebenda*, **14** (1918), S. 328—333; G. Pólya—G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. I—II (Berlin, 1925); P. Montel, Sur les fractions rationnelles entrelacées, *Mathematica Cluj*, **5** (1931), S. 110—129.

Die Montelschen „fractions rationnelles entrelacées" haben die Eigenschaften der totalreellen rationalen Funktionen. P. Montel hat auch trennende Polynome auf einer Kurve definiert. Auf einer konvexen Kurve trennende Polynompaare wurden in der Arbeit von C. Colombo untersucht: Intorno alla distribuzione degli zeri di certi polinomi, *Atti Acad. naz. Lincei*, (3) **8** (1947), S. 530—535.

Weitere Arbeiten, die Verallgemeinerungen auf transzendente Funktionen enthalten: N. Tschebotaröw, On entire functions with real interlacing roots, *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS*, (N. S.) **35** (1942), S. 195—197; N. Meymann, On the problem of Hermite—Hurwitz for integer transcendental functions, *Ebenda*, **40** (1943), S. 46—49, On the distribution of the zeroes of an integer function, *Ebenda*, **40**(1943), S. 179—181; B. Levin, Hermite's criterion for integral functions of exponential type, *Ebenda*, **41** (1943), S. 47—50.

§ 2. Beweis des Satzes I.

1. Die Kurve $\Phi(x,y)=0$ hat offenbar keinen singulären Punkt. Sie wird von einer Geraden $y=y_0$ in keinem Punkt (x_0,y_0) berührt. Widrigenfalls gäbe es eine zur Tangente $y=y_0$ benachbarte Gerade $y=y_1$, die mit der Kurve um mindestens zwei weniger reelle Treffpunkte besitzt, als die Gerade $y=y_0$. Dann hätte das Polynom $P(z;y_1)$ mindestens zwei nichtreelle Nullstellen. Daraus folgt die Richtigkeit des Teilsatzes I. 1.

2. Aus I. 1 folgt, daß die Nullstellen von $f(z)$ und $g(z)$ reell und voneinander verschieden sind.

Im Falle $b_0 \neq 0$ hat die Partialbruchzerlegung von $F(z)$ die Form

$$F(z)=\frac{a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0 z^n+b_1 z^{n-1}+\ldots+b_n}=\frac{f(z)}{g(z)}=A+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{z-\beta_k}, \quad B_k \neq 0.$$

Aus dem Vergleich der Koeffizienten von z^n und z^{n-1} in der Identität

$$f(z)=g(z)\left[A+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{z-\beta_k}\right], \quad g(z)=b_0\prod_{k=1}^{n}(z-\beta_k),$$

folgen die Gleichungen $A=\dfrac{a_0}{b_0}$, $b_0^2\sum\limits_{k=1}^{n}B_k=-D=-(a_0 b_1-a_1 b_0)$. Wir müssen noch zeigen, daß die B_k dasselbe Vorzeichen besitzen. Wäre $B_k B_j<0$, so hätte die Funktion

$$H(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{(x-\beta_k)^2+y^2}, \quad B_k \neq 0, \tag{5}$$

bei einer genügend kleinen positiven Zahl ε in den Punkten (β_k,ε) und (β_j,ε) entgegengesetzte Vorzeichen. Auf der Verbindungsstrecke dieser Punkte gäbe es also einen Punkt $z_0=x_0+i\varepsilon$, wo $\operatorname{Im}F(z_0)=-\varepsilon H(x_0,\varepsilon)=0$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch, weil $F(z_0)$ nicht reell ist.

Im Falle $b_0=0$ ist $a_0 \neq 0$, weil $|a_0|+|b_0| \neq 0$. Dann ist

$$F(z)=A_0 z+A+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_k}{z-\beta_k},$$

wo offenbar $A_0=\dfrac{a_0}{b_1}=\dfrac{D}{b_1^2}$ ist. Wäre $B_k B_j<0$ oder $A_0 B_k>0$, so hätte

$$H_1(x,y)=-A_0+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_k}{(x-\beta_k)^2+y^2} \tag{6}$$

bei genügend kleinem positivem ε in den Punkten (β_k,ε) und (β_j,ε) bzw. (β_k,ε) und $(\beta_k,\varepsilon^{-1})$ offenbar entgegengesetzte Vorzeichen. Es gäbe dann auf der Verbindungsstrecke dieser zwei Punkte mindestens einen Punkt $z_0=x_0+i\varepsilon$ bzw. $z_1=\beta_k+iy_1$ $(\varepsilon<y_1<\varepsilon^{-1})$, wo $\operatorname{Im}F(z_0)=0$ bzw. $\operatorname{Im}F(z_1)=0$ ist, weil $\operatorname{Im}F(x+iy)=-y\,H_1(x,y)$ ist.

Daraus folgt die Richtigkeit des Teilsatzes I. 2.

3. Auf Grund von (5) und (6) erhält man aus (3) bzw. (4) die Gleichung $D \operatorname{Im}(x+iy) \cdot \operatorname{Im} F(x+iy) = -Dy^2 H(x,y)$ bzw. $D \operatorname{Im}(x+iy) \cdot \operatorname{Im} F(x+iy) = -Dy^2 H_1(x,y)$. Daraus folgt die Richtigkeit von I. 3, weil $-DB_k > 0$ und $DA_0 > 0$ sind.

4. Jedes von z abhängige Glied von (3) oder (4) nimmt auf der reellen Achse monoton zu bzw. ab, wenn $D < 0$ bzw. $D > 0$ ist. In einer Strecke (β_k, β_{k+1}) $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ ist $F(z)$ stetig und monoton und nimmt jeden reellen Wert an.

Die Funktion $F(z)$ und damit das Polynom $f(z)$ hat also in der Strecke (β_k, β_{k+1}) genau eine Nullstelle. Durch die Anwendung dieses Beweisgangs auf die Reziproke von $F(z)$ ergibt sich, daß die Nullstellen von $g(z)$ diejenigen von $f(z)$ trennen.

Die Funktion

$$F_1(z) = \frac{F(z)-\lambda}{F(z)-\mu} = \frac{f(z)-\lambda g(z)}{f(z)-\lambda g(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)},$$

wo λ und $\mu (\neq \lambda)$ reelle Zahlen sind, ist eine totalreelle rationale Funktion n-ter Grades. Die Nullstellen des Polynoms $f_1(z)$ bzw. $g_1(z)$ sind λ- bzw. μ-Stellen von $F(z)$ und sie trennen einander. Damit ist I. 4 bewiesen.

5. Ist z_0 eine beliebige Nullstelle des Polynoms $Q(z) = f(z) - (\lambda + i\mu) g(z)$ $(\mu \neq 0)$, die keine Nullstelle von $g(z)$ ist, so sind

$$\frac{Q(z_0)}{g(z_0)} = F(z_0) - \lambda - i\mu = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} F(z_0) = \mu.$$

Aus I. 3 folgt $D\mu \operatorname{Im} z_0 > 0$. Damit ist I. 5 bewiesen.

6. Man kann leicht einsehen, daß die Eingenschaften I. 1—I. 4 charakteristisch sind. Z. B. aus I. 4 folgt I. 1. Zwei λ-Stellen können nämlich nicht zusammenfallen, weil sie von einer μ-Stellen getrennt werden. Die charakteristische Eigenschaft von I. 5 folgt aus dem bekannten Satz von HERMITE und BIEHLER.[2])

§ 3. Die zwei Arten der totalreellen rationalen Functionen.

Die totalreelle rationale Funktion $F(z)$ ist von *positiver* bzw. *negativer Art,* je nachdem ihre Charakteristik $D = a_0 b_1 - a_1 b_0$ positiv bzw. negativ ist. Ist $F(z)$ von positiver bzw. negativer Art, so sind ihre Residua nach I. 2 negativ bzw. positiv.

Sind $z\zeta = 1$ und $F\left(\frac{1}{z}\right) = \Phi(\zeta)$, so ist $\Phi(z)$ eine totalreelle rationale Funktion mit der Charakteristik $D' = a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n$ und $DD' <$ ist. Im Falle $\operatorname{Im} z \neq 0$ sind nämlich $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \zeta < 0$, $D \operatorname{Im} \zeta \cdot \operatorname{Im} F(\zeta) = D \operatorname{Im} \zeta \cdot \operatorname{Im} \Phi(z) > 0$, $D' \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \Phi(z) > 0$ und $DD' \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \zeta \cdot [\operatorname{Im} \Phi(z)]^2 > 0$.

Es gilt der zusammenfassende Satz

---

[2]) A. a. O.; auch bei LAGUERRE, bei PÓLYA - SZEGŐ, Bd. I, S. 256.

II. 1. *Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige reelle Zahlen, mit $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, und ist $F(z)$ eine totalreelle rationale Funktion mit der Charakteristik D, so sind*

$$F_0(z) = \frac{\alpha F(z) + \beta}{\gamma F(z) + \delta} \quad \textit{und} \quad \Delta F(z)$$

totalreelle rationale Funktionen mit der Charakteristik $D_0 = \Delta D$.

2. *Sind $p_1, p_2, \ldots, p_m$ positive Zahlen und bezeichnen $F_1(z), F_2(z), \ldots, F_m(z)$ totalreelle rationale Funktionen derselben Art, so ist auch*

$$F(z) = p_1 F_1(z) + p_2 F_2(z) + \ldots + p_m F_m(z)$$

eine totalreelle rationale Funktion derselben Art. Die iterierten Funktionen

$$F_{hj}(z) = F_h[F_j(z)] \qquad (h = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, m)$$

sind totalreelle rationale Funktionen positiver Art.[3])

3. *Besitzt das Polynom $P(z)$ m-ten Grades lauter reelle Nullstellen und ist*

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}$$

totalreell, so sind die rationalen Funktionen

$$F(z),\ \Phi(z) = \frac{a_0 P(z) + a_1 P'(z) + \ldots + a_n P^{(n)}(z)}{b_0 P(z) + b_1 P'(z) + \ldots + b_n P^{(n)}(z)} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},\quad F_k(z) = \frac{f^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)}$$

bzw.

$$R(z) = \frac{P'(z)}{P(z)},\quad R_1(z) = \frac{P''(z)}{P'(z)}, \ldots, R_{m-1}(z) = \frac{P^{(m)}(z)}{P^{(m-1)}(z)}$$

totalreell von derselben Art bzw. von negativer Art.

Die Funktion $F_0(z)$ in II. 1 ist totalreell, weil

$$\operatorname{Im} F_0(z) = \frac{\Delta}{|\gamma z + \delta|^2} \operatorname{Im} F(z).$$

Ist $\operatorname{Im} z \neq 0$, so haben die Produkte $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} F_k(z)$ und $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} F(z) = \sum_{k=1}^{m} p_k \operatorname{Im} z . \operatorname{Im} F_k(z)$ in II. 2 dasselbe Vorzeichen.

Sind $F_k(z) = Z_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, so haben die Produkte $\operatorname{Im} z . \operatorname{Im} F_k(z) = \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} Z_k$ und $\operatorname{Im} Z_j \cdot \operatorname{Im} F_h(Z_j)$ dasselbe Vorzeichen. Daraus folgt, daß $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} Z_j \cdot \operatorname{Im} Z_j \cdot \operatorname{Im} F_h(Z_j) = \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} F_{hj}(z) \cdot (\operatorname{Im} Z_j)^2$ und $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} F_{hj}(z)$ positiv sind.

Damit sind die Sätze II. 1 und II. 2 bewiesen.

Die λ-Stellen der Funktion $F(z)$ sind Nullstellen des Polynoms

$$Q(z; \lambda) = f(z) - \lambda g(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^{n-k},\quad c_k = a_k - \lambda b_k.$$

---

[3]) Iterierte totalreelle Funktionen wurden zum erstenmal von P. Montel a. a. O. behandelt.

Das Polynom $Q(z;\lambda)$ hat also bei jedem reellen Wert des Parameters λ lauter reelle Nullstellen.

Nach dem bekannten Hermite-Poulainschen Satz hat auch das Polynom

$$\sum_{k=0}^{n} c_k P^{(k)}(z) \equiv \varphi(z) - \lambda \psi(z)$$

bei jedem reellen Wert von λ lauter reelle Nullstellen. Die Funktion $\Phi(z)$ nimmt also jeden reellen Wert auf der reellen Achse an. Sie ist also totalreell.[4])

Sind $P(z) = z^m + p_1 z^{m-1} + \ldots$, $\varphi(z) = u_0 z^m + u_1 z^{m-1} + \ldots$ und $\psi(z) = v_0 z^m + v_1 z^{m-1} + \ldots$, so sind $u_1 = a_0 + m a_1 p_1$, $v_1 = b_0 + m b_1 p_1$, $u_0 = a_0$, $v_0 = b_0$. $\Phi(z)$, $F_1(z)$ bzw. $R(z)$ hat also die Charakteristik mD, $n(n-1)D$ bzw. $-m$. Daraus folgt die Richtigkeit von II. 4.

Ist $F(z)$ von negativer Art, so ist auch die Funktion

$$G(z) = F(z) + R(z) = \frac{f(z)}{g(z)} + \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{S(z)}{g(z)\,P(z)}$$

totalreell und das Polynom $S(z)$ hat deshalb lauter reelle Nullstellen.

III. *Ist $F(z) = f(z) : g(z)$ eine irreduzible totalreelle Funktion von negativer Art und besitzt ein Polynom $P(z)$ lauter reelle Koeffizienten, so hat das Polynom*

$$S(z) = P(z)\,f(z) + P'(z)\,g(z)$$

mindestens soviel reelle Nullstellen wie $P(z)$.

$P(z)$ hat die Form $P(z) = P_0(z)\,P_1(z)$, wo das Polynom $P_0(z)$ bzw. $P_1(z)$ lauter reelle bzw. lauter nichtreelle Nullstellen hat. Die Funktion

$$G_0(z) = F(z) + \frac{P_0'(z)}{P_0(z)} = \frac{S_0(z)}{g(z)\,P_0(z)} = G(z) - \frac{P_1'(z)}{P_1(z)} = G(z) - R_1(z)$$

ist totalreell und von negativer Art. Ihre Partialbruchzerlegung hat also die Form

$$G_0(z) = A_0 z + A + \sum_{k=1}^{N} \frac{B_k}{z - \beta_k}, \quad \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_N, \quad A_0 \leqq 0, \quad B_k > 0.$$

$G_0(z)$ hat die Pole $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ und im Falle $A_0 \neq 0$ auch $\beta_{N+1} = \infty$. Diese sind die reellen Pole von $G(z)$, da $R_1(z)$ auf der reellen Achse beschränkt ist. Beide Funktionen $G_0(z)$ und $G(z)$ sind innerhalb der Strecke (β_k, β_{k+1}) $(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ stetig und haben bei Anfang und bei Ende der Strecke gleiche Vorzeichen. Dies gilt im Falle $A_0 \neq 0$ auch für die Strecken $(-\infty, \beta_1)$ und $(\beta_N, +\infty)$.

In jeder dieser $N-1$ bzw. $N+1$ Strecken hat $G_0(z)$ bzw. $G(z)$ genau eine bzw. mindestens eine Nullstelle, weil das Vorzeichen von $G_0(z)$ bzw. $G(z)$ sich auf einer dieser Strecken einmal bzw. mindestens einmal verändert. Im Falle $A_0 \neq 0$ hat also $G_0(z)$ bzw. $G(z)$ $N+1$ bzw. mindestens $N+1$ reelle Nullstellen. Ebenso sieht man im Falle $A_0 = 0$ ein, daß $G_0(z)$ bzw. $G(z)$

---

[4]) Dieser Beweis rührt von MONTEL her, a. a. O.

außerhalb der Strecke (β_1, β_N) eine bzw. mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

$G(z)$ hat also mindestens soviel reelle Nullstellen, wie $G_0(z)$. Das Polynom $S(z)$ hat also mindestens soviel reelle Nullstellen, wie $S_0(z)$, das lauter reelle Nullstellen besitzt. Damit ist der Satz III bewiesen.

Dieser Satz enthält in sich einen von A. RÉNYI in 1942 bewiesen, noch nicht veröffentlichten Satz, wobei $f(z)=az+b$ und $g(z)=cz+d$ sind. RÉNYI hat damals aus seinem Satz durch Spezialisierung von a, b, c, d und durch iterierte Anwendung der erhaltenen Resultate mehrere allgemeine Sätze abgeleitet.[5])

§ 4. Polynome, deren Nullstellen positive Imaginärteile besitzen. Kreiszweiecke, in denen eine totalreelle rationale Funktion jeden Wert annimmt.

Das Kreiszweieck $K(a, b; \gamma)$ $(0<\gamma<\pi)$ bezeichnet den Bereich, von dessen Punkten aus die Strecke (a, b) unter einem Winkel $\geqq\gamma$ erscheint. Dieser Bereich wird von zwei kongruenten Kreisbogen begrenzt. Er liegt im Kreise

$$\left|z-\frac{a+b}{2}\right| \leqq \left|\frac{b-a}{2}\right| \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}, \quad \text{wenn } \gamma<\frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

IV. *Haben die Nullstellen des Polynoms n-ten Grades*

$$P(z)=(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_n)$$

positive Imaginärteile, liegen die Punkte a und b $(>a)$ *auf der reellen Achse und ist das Verhältnis* $P(b):P(a)$ *eine reelle negative bzw. positive Zahl, so enthält das Kreiszweieck* $K\left(a, b; \frac{\pi}{n}\right)$ *bzw.* $K\left(a, b; \frac{2\pi}{n}\right)$ *mindestens eine Nullstelle von* $P(z)$ *im Innern, oder jede Nullstelle von* $P(z)$ *am Rande.*

Erscheint die Strecke (a, b) vom Punkt c_k aus unter dem Winkel γ_k $(0<\gamma_k<\pi)$ und ist $\operatorname{arc}\frac{P(b)}{P(a)}=\omega$ $(0<\omega\leqq 2\pi)$, so ist $\sum_{k=1}^{n}\gamma_k=\omega+2p$, wo p eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Während ein Punkt x die reelle Achse in positiver Richtung beschreibt, nimmt der Winkel $\varphi_k(x)=\operatorname{arc}(x-c_k)$ offenbar von Null ausgehend bis π stetig und monoton zu.

$$\Phi(x)\equiv\operatorname{arc}P(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arc}(x-c_k)$$

---

[5]) Z. B. die Aufgaben 63 und 67 im Abschnitt III von PÓLYA—SZEGŐ, Bd. I. Nach einer Mitteilung von A. RÉNYI hat er mit seinem früh verstorbenen Freunde, M. SCHWEITZER, auch die Eigenschaften der Polynome $f(z)$ und $g(z)$ untersucht, für welche $S(z)$ bei jedem Polynom $P(z)$ mit lauter reellen Nullstellen nur reelle Nullstellen besitzt. So gelangten sie zu mehreren Eigenschaften der totalreellen rationalen Funktionen.

ist also eine monoton zunehmende stetige Funktion der reellen Veränderlichen x. Daraus folgen die Relationen

$\gamma_k = \varphi_k(b) - \varphi_k(a)$ $(k=1,2,\ldots,n)$, $\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = \omega + 2p\pi$ und

$\frac{\omega}{n} \geqq \mathrm{Min}\ \gamma_k (k=1,\ldots,n)$, wo das Gleichheitszeichen nur im Falle $\gamma_1 = \gamma_2 = = \ldots = \gamma_n$, $p=0$ bestehen kann. Daraus folgt der Satz IV im Falle $\omega = \pi$ bzw. $\omega = 2\pi$. Im ersten bzw. zweiten Fall ist der Satz IV eine Folgerung bzw. ein Grenzfall eines allgemeinen Satzes von M. FEKETE [6]).

Dieser Satz gilt offenbar auch dann, wenn die Nullstellen von $P(z)$ negative Imaginärteile besitzen. Er gilt in entsprechender Form für Polynome, deren Nullstellen auf einer Seite einer Geraden liegen, z. B. auch für die Hurwitzschen Polynome (deren Nullstellen negative Realteile besitzen).

Der Satz IV ist ein Hilfssatz zum Satz

V. *Nimmt eine totalreelle rationale Funktion $F(z)$ n-ten Grades in den Punkten a und b $(> a)$ der reellen Achse denselben Wert an, so nimmt sie im Kreiszweieck $K\left(a, b; \frac{\pi}{n}\right)$ jeden Wert an. Enthält das Innere dieses Bereichs keine Z_0-Stelle der Funktion, so enthält sein Rand jede Z_0-Stelle von $F(z)$.*

Ist C bzw. d eine beliebige reelle Zahl bzw. der kleinste Abstand zwischen zwei C-Stellen von $F(z)$ und ist $n > 1$, so nimmt $F(z)$ im Parallelstreifen von der Breite $\frac{d}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$, der von der reellen Achse halbiert wird, jeden Wert an.

Zum Beweis kann man offenbar annehmen, daß $g(a)\,g(b) \neq 0$ ist.

Nach I. 4 nimmt $F(z)$ auf der Strecke (a, b) jeden reellen Wert an. Ist $Z = \lambda + i\mu$ $(D\mu > 0)$, so haben die Z-Stellen von $F(z)$ positive Imaginärteile, weil sie Nullstellen des Polynoms $Q(z) = f(z) - Zg(z)$ von I. 5 sind. $Q(z)$ hat die Eigenschaft von $P(z)$ im Satz IV, weil

$$\frac{Q(b)}{Q(a)} = \frac{f(b) - Zg(b)}{f(a) - Zg(a)} = \frac{g(b)}{g(a)} \frac{F(b) - Z}{F(a) - Z} = \frac{g(b)}{g(a)}$$

reell ist. Nach IV gibt es in $K\left(a, b; \frac{\pi}{n}\right)$, von dem $K\left(a, b; \frac{2\pi}{n}\right)$ offenbar enthalten wird, mindenstens einen Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$, wo $F(z_0) = Z_0$ ist. Auch $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$ liegt in $K\left(a, b; \frac{\pi}{n}\right)$ und $F(\bar{z}_0) = \bar{Z}_0 = \lambda - i\mu$ ist. Daraus folgt der Satz V auch dann, wenn $D\mu < 0$ ist, weil der zweite Absatz von V aus dem ersten folgt.

---

[6]) M. FEKETE, Über die Nullstellenverteilung bei Polynomen, deren Wert an zwei Stellen gegeben ist, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **35** (1925), S. 220–233.

§ 5. Die Abbildung der komplexen Ebene durch eine totalreelle rationale Funktion $F(z)$.

Die Transformation $Z = F(z)$ bestimmt eine konforme Abbildung der komplexen z-Ebene auf die Z-Ebene. Nach I. 3 wird dadurch die obere Halbebene der z-Ebene auf die obere bzw. untere Halbebene der Z-Ebene abgebildet, je nachdem die Art von $F(z)$ positiv bzw. negativ ist, und auch die inverse Abbildung hat diese Eigenschaft.

VI. *Enthält eine Strecke s der reellen Achse der z-Ebene die Pole β_k der totalreellen Funktion*

$$(7)\qquad Z = F(z) = \frac{a_0 z_0 + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{z - \beta_k}, \quad D = a_0 b_1 - a_1,$$

$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_k$ *und bezeichnet* $\delta(\varrho)$ *in der z-Ebene den Bereich, dessen Punkte außerhalb jedes Kreises vom Halbmesser* ϱ *liegen, dessen Mittelpunkt auf s fällt, so wird* $\delta(\varrho)$ *durch die Transformation* $Z = F(z)$ *auf einen Teil des Kreises* $|Z - a_0| \leqq \frac{|D|}{\varrho} = \varrho'$ *abgebildet.*

Durch die Inverse dieser Transformation wird der Bereich $|\operatorname{Im} Z| \geqq \varrho$ *auf einen Teilbereich der konvexen Hülle* $\delta(\varrho')$ *der von s berührten Kreise vom Halbmesser* ϱ' *abgebildet.*

In einem Punkt z_0 von $\delta(\varrho)$ sind

$$|z_0 - \beta_k| < \varrho \text{ und } |F(z_0) - a_0| \leqq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{B_k}{z_0 - \beta_k} \right| < \frac{|\Sigma B_k|}{\varrho} = \frac{|D|}{\varrho} = \varrho'.$$

Zum Beweis des zweiten Absatzes von VI kann man offenbar annehmen, das $D > 0$ ist. Sind dann $z = x + iy$ $(y \neq 0)$ und $F(z) = X + iY$, so ist

$$0 < \frac{\operatorname{Im} F(z)}{\operatorname{Im} z} = \frac{Y}{y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-B_k}{|z - \beta_k|^2}.$$

Bestehen die Ungleichungen $|z - \beta_k| \geqq |z - \beta_p|$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ 1 \leqq p \leqq n)$, so ist $\frac{Y}{y} \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{-B_k}{|z - \beta_p|^2} = \frac{D}{|z - \beta_p|^2}$, oder $(x - \beta_p)^2 + \left(y - \frac{D}{2Y}\right)^2 \leqq \left(\frac{D}{2Y}\right)^2$.

Ist $|Y| \geqq \varrho$, also $\frac{D}{|Y|} \leqq \varrho'$, so liegt der Punkt z in $\delta_1(\varrho')$, weil er in einem Kreis vom Halbmesser $\leqq \varrho'$ liegt, von dem die Strecke s in einem Punkt (β_p) berührt wird. Damit ist der Satz V bewiesen. Daraus folgt der Satz.

VII. *Ist* $F(z) = f(z) : g(z)$ *eine totalreelle rationale Funktion mit der Charakteristik D, sind A, B und B' reelle Zahlen und ist* $D = BB'$, *so liegen die Nullstellen des Polynoms* $P(z) \equiv [f(z) - A]^2 + B^2 g^2(z)$ *im Parallelstreifen* $|\operatorname{Im} z| \leqq |B'|$.

Die Punkte z, in denen $F(z) = A + iB$ oder $F(z) = A - iB$ ist, genügen der Gleichung $[f(z) - (A + iB)\,g(z)] \cdot [f(z) - (A - iB)\,g(z)] \equiv P(z) = 0$. Der Parallelstreifen $|\operatorname{Im} z| \leqq |B'|\ (= \varrho')$ enthält den Bereich $\delta_1(\varrho')$ von VI.

Ist $f(z)=g'(z)$, so ist $D=-n$. Aus VII folgt also der Satz [7]:

Hat das Polynom $g(z)$ n-ten Grades lauter reelle Nullstellen, so liegen die Nullstellen des Polynoms $g^2(z)+g'^2(z)$ im Parallelstreifen $|\operatorname{Im} z| \leqq \sqrt{n}$.

§ 6. Die Lage der Fixpunkte der Transformation $Z=F(z)$.

Die Fixpunkte der Transformation $Z=F(z)$ sind die Nullstellen der Funktion $G(z)=-z+F(z)$. Ist $F(z)$ eine totalreelle rationale Funktion n-ten Grades und ist $b \neq 0$, so besitzt $G(z)$ $n+1$ endliche Nullstellen. Bei $D<0$ ist $G(z)$ totalreell, ihre Nullstellen sind also von ihren endlichen Polen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ getrennt.

Bei $D>0$ ist $G(z)$ nicht totalreell, sie hat aber höchstens zwei nichtreelle Nullstellen. $G(z)$ hat nämlich in einer Strecke (β_k, β_{k+1}) $(k=1,2,\ldots,n-1)$ mindestens eine Nullstelle, weil sie am Anfang und am Ende entgegengesetzte Vorzeichen besitzt. Hat $G(z)$ nur reelle Nullstellen, so fallen entweder drei Nullstellen in eine Strecke (β_k, β_{k+1}) oder zwei Nullstellen in die eine der Strecken $(-\infty, \beta_1)$ und $(\beta_n, +\infty)$. Widrigenfalls wäre nämlich $G(z)$ totalreell, weil ihre Nullstellen von ihren Polen getrennt wären. $G(z)$ hat höchstens eine mehrfache Nullstelle.

Ein nichtreeller oder mehrfacher Fixpunkt ζ der Transformation $Z=F(z)$ $(b_0 \neq 0)$ fällt mindestens in einen der Kreise $|z-\beta_k| \leqq \dfrac{D^{1/2}}{b_0}$.

Ein nichtreeller bzw. mehrfacher Fixpunkt ζ genügt nämlich der Gleichung

$$\frac{\operatorname{Im} G(z)}{\operatorname{Im} z} = -1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{|z-\beta_k|^2} = 0 \text{ bzw. } G'(z) = -1 - \sum \frac{B_k}{|z-\beta_k|^2} = 0.$$

Sind also $|\zeta-\beta_k| \geqq |\zeta-\beta_p|$ $(k=1,\ldots,n;\ 1 \leqq p \leqq n)$, so sind

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{-B_k}{|\zeta-\beta_k|^2} \leqq \frac{\sum_{k=1}^{n} -B_k}{|\zeta-\beta_p|^2} = \frac{D}{b_0^2 |\zeta-\beta_p|^2}, \text{ also } |\zeta-\beta_p|^2 \leqq \frac{D}{b_0^2}.$$

Im Falle $b_0=0$ hat $G(z)$ die Form

$$G(z)=(A_0-1)z+A+\sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{z-\beta_k}, \quad A_0=\frac{a_0}{b_1}, \quad D=a_0 b_1=b_1^2 b_0, \quad D B_k<0.$$

$G(z)$ ist dann totalreell, wenn $A_0-1=0$, oder $(A_0-1)D>0$ ist, wenn also $(A_0-1)D=a_0(a_0-b_1) \geqq 0$ ist. Dann sind die Nullstellen von $G(z)$ (die Fixpunkte der Transformation) von den Polen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ getrennt. Im Falle $a_0(a_0-b_1)<0$ kann $G(z)$ nichtreelle oder mehrfache Nullstellen haben. Diese fallen mindestens in einen der Kreise $|z-\beta_k| \leqq \left(\dfrac{b_1 \sum_{k=1}^{n} B_k}{b_1-a_0}\right)^{1/2}$. Dies läßt sich ebenso einsehen, wie vorher.

(Eingegangen am 31. März 1948.)

[7]) E. Cesàro, *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und Infinitesimalrechnung* (Leipzig, 1904), S. 431–432.

Some theorems and remarks on interpolation.

By P. ERDŐS in Syracuse, N. Y.

Throughout this paper $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ will denote the roots of the n-th Chebyshev polynomial $T_n(x)$ $[T_n(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta]$. $f(x)$ will denote a function continuous in $[-1, +1]$ and $L_n(f(x))$ will denote the Lagrange interpolation polynomial of $f(x)$ taken at the points $x_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; in other words, $L_n(f(x))$ is a polynomial of degree not greater than $(n-1)$ for which[1])

$$L_n(f(x_i^{(n)})) = f(x_i^{(n)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

It is a well known result[2]) that for every x_0 there exists a continuous[3]) $f(x)$ so that $L_n(f(x_0))$ does not converge to $f(x_0)$. In fact I proved[4]) that in marked contrast to a well known theorem of FEJÉR on Fourier series, if $x_0 = \cos\frac{p}{q}\pi$, $p \equiv q \equiv 1 \pmod 2$, there exists a continuous $f(x)$ so that $\lim\limits_n |L_n(f(x_0))| = \infty$, or there does not exist a sequence n_i so that $L_{n_i}(f(x_0)) \to f(x_0)$. Moreover[4]) for any $-\infty \leqq c \leqq \infty$ and any such value of x_0 there exists a continuous $f(x)$ so that $L_n(f(x_0)) \to c$, i. e. $L_n(f(x_0))$ can converge to any prescribed value. TURÁN and I[5]) showed that if $x_0 \neq \cos\frac{p}{q}\pi$, $p \equiv q \equiv 1 \pmod 2$, then for every continuous $f(x)$ there exists a sequence n_i so that $L_{n_i}(f(x_0)) \to f(x_0)$. Previously MARCINKIEWICZ[6]) has showed that, if the $x_i^{(n)}$ are the roots of $U_n(x)$,

---

[1]) There will be no misunderstanding writing $L_n(f(x_i^{(n)}))$ instead of $L_n(f(x))_{x=x_i^{(n)}}$ throughout this paper.

[2]) For $x_0 = 0$ see L. FEJÉR, Über Interpolation, *Göttinger Nachrichten*, 1916, pp. 1–16. For every x_0 this has been remarked apparently first by S. BERNSTEIN: see his paper "Sur la limitation des valeurs etc.", *Bulletin Acad. Sci. URSS*, 1931, pp. 1025–1050.

[3]) "Continuous" means throughout this paper "continuous in $[-1, +1]$".

[4]) P. ERDŐS, On divergence properties of the Lagrange interpolation parabolas, *Annals of Math.*, **42** (1941), pp. 309–315; P. ERDŐS, Corrections to two of my papers, *ibidem*, **44** (1943), pp. 647–651.

[5]) P. ERDŐS and P. TURÁN, On interpolation. I., *Annals of Math.*, **38** (1937), pp. 142–155.

[6]) J. MARCINKIEWICZ, Sur l'interpolation, *Studia Math.*, **6** (1936), pp. 1–17.

then to a given continuous $f(x)$ and $-1 \leq x_0' \leq 1$ there always exists a subsequence n_i, with $L_{n_i}(f(x_0')) \to f(x_0')$. It follows from results of TURÁN and myself[5]) that for a general class of point groups [which include the roots of both $T_n(x)$ and $U_n(x)$], to every continuous $f(x)$ there exists a sequence n_i so that $L_{n_i}(f(x))$ converges to $f(x)$ almost everywhere.

GRÜNWALD and MARCINKIEWICZ[7]) showed that there exists a continuous $f(x)$ so that $L_n(f(x))$ diverges for every x, in fact $\limsup L_n(f(x)) = \infty$ for every x. The analogous question for Fourier series is as well known still unsolved and seems very difficult. MARCINKIEWICZ[6]) and TURÁN[4]) showed that for every x_0 there exists a continuous $f(x)$ so that

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} L_k(f(x_0)) = \infty.$$

In other words the arithmetic means of the Lagrange interpolation polynomials of a continuous function can diverge at a given point, again in marked contrast to the celebrated theorem of FEJÉR for Fourier series. MARCINKIEWICZ[6]) further showed that there exists a continuous $f(x)$ so that $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} L_k(f(x_0))$ diverges in an arbitrarily given countable set, and he raised the problem whether there exists a continuous $f(x)$ so that $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} L_k(f(x_0))$ should diverge almost everywhere. In a paper written 12 years ago G. GRÜNWALD and I[8]) proved that there exists a continuous $f(x)$ so that $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} L_k(f(x))$ diverges for every x. While writing this paper I made the unfortunate discovery that our proof is erroneous. All that we prove is that there exists a continuous $f(x)$ so that for every x

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |L_k(f(x))| = \infty. \tag{1}$$

In a view of the strong convergence of the arithmetic means of the Fourier series (1) seems not uninteresting, but of course it would be of interest to know whether (1) holds without the absolute value. I just succeeded to show that with a slight modification of our construction one can prove the existence of a continuous $f(x)$ so that for almost all x

---

[7]) G. GRÜNWALD, Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome stetiger Funktionen, *Annals of Math.*, **37** (1936), pp. 908–918; J. MARCINKIEWICZ, Sur la divergence des polynomes d'interpolation, *these Acta*, **8** (1937), pp. 131–135.

[8]) P. ERDŐS and G. GRÜNWALD, Über die arithmetischen Mittelwerte der Lagrangeschen Interpolationspolynome, *Studia Math.*, **7** (1938), pp. 82–95. The error occurs in the last formula of p. 92.

$$\limsup \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} L_k(f(x))\right)=\infty. \tag{2}$$

The proof of (2) will be given at another occasion. At present I can not decide whether (2) can diverge for *every x*.

It is easy to prove that if for every x, $|f(x+h)-f(x)|=o\left(\left(\log\frac{1}{|h|}\right)^{-1}\right)$. $L_n(f(x))$ converges to $f(x)$. MARCINKIEWICZ[6]) proved that there exists an $f(x)$ satisfying for every x the inequality $|f(x+h)-f(x)|=O\left(\left(\log\frac{1}{|h|}\right)^{-1}\right)$ such that $L_n(f(x))$ diverges almost everywhere. This result is interesting since it is easy to see that $|L_n f(x)|$ is uniformly bounded in this case. By using the method of GRÜNWALD[7]) it is easy to construct an $f(x)$ satisfying uniformly the "logarithmic" Lipschitz-condition $|f(x+h)-f(x)|=O\left(\left(\log\frac{1}{|h|}\right)^{-1}\right)$ and $L_n(f(x))$ diverges for *every* x. The proof follows the GRÜNWALD—MARCINKIEWICZ ideas closely, thus we do not give it.

In the present paper we prove the following

Theorem 1. *For almost all x*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|L_k(f(x))|=o(\log\log n),$$

if only $f(x)$ is continuous in $[-1,+1]$.

As an easy consequence of Theorem 1 we deduce

Theorem 2. *Let* $|f(x+h)-f(x)|=o\left(\left(\log\log\frac{1}{|h|}\right)^{-1}\right)$ *uniformly in* $[-1,+1]$. *Then for almost all x*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(x)-L_k(f(x)))^2\to 0.$$

The interest of Theorem 1 and 2 is that they show that taking arithmetical means improves to some extent the convergence-properties of the Lagrange-interpolatorical polynomials.

It can be shown that Theorems 1 and 2 are best possible in the following sense: Let $g(n)\to\infty$ arbitrarily slowly. Then there exists a continuous $f(x)$ so that for almost all x there exists a sequence $n_i=n_i(x)$ so that

$$\frac{1}{n_i}\sum_{\nu=1}^{n_i}|L_\nu(f(x))|>\frac{\log\log n_i}{g(n_i)}. \tag{3}$$

The same holds if we consider arithmetic means of higher order. (3) probably remains true without the absolute value, but this I can not prove.

Also there exists an $f(x)$ satisfying in $-1\leqq x\leqq+1$ the condition

$|f(x+h)-f(x)|=O\left(\left(\log\log\frac{1}{|h|}\right)^{-1}\right)$ and so that

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(x)\,L_k(f-(x)))^2=0 \tag{4}$$

holds only in a set of measure 0. This is not without interest since in (4) the lim sup is finite for almost x. [This can be shown by the same method as Theorem 2.] The proof of (3) and (4) is fairly complicated but is similar to the [correct part] of the argument of GRÜNWALD and myself.

MARCINKIEWICZ[6]) proved that for every $g(n)\to\infty$ there exists a continuous $f(x)$ so that for almost all x there exists a sequence $n_i=n_i(x)$, for which

$$L_{n_i}(f(x))>\frac{\log n_i}{g(n_i)}.$$

By using the method of GRÜNWALD[7]) it is easy to replace "almost all" by "all" in the result of MARCINKIEWICZ. Further for every x_0 there exists a continuous $f(x)$ so that

$$\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}L_k(f(x_0))>\frac{\log n_i}{g(n_i)}.$$

We do not give the proofs of these two theorems since they do not contain any new idea.

Proof of Theorem 1. It will be sufficient to prove that if $f(x)$ is bounded and e. g. $|f(x)|\leqq\frac{1}{2}$ uniformly, then exists an absolute constant c so that for almost all x and $n>n_0=n_0(x)$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|L_k(f(x))|<c\log\log n. \tag{5}$$

Suppose (5) is proved. According to the theorem of WEIERSTRASS we find a polynomial of degree l, $\varphi_l(x)$ so that $|f(x)-\varphi_l(x)|<\varepsilon$. By applying (5) to $(f(x)-\varphi_l(x))$ and remarking that for $k>l$ $L_k(\varphi_l(x))=\varphi_l(x)$ we obtain

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|L_k(f(x))|\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|L_k(\varphi_l(x))|+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|L_k(f(x)-\varphi_l(x))|<$$
$$<c\varepsilon\log\log n+O(1)=o\,(\log\log n),$$

which proves Theorem 1. Thus we only have prove (5).

In the proof of (5) our principal tool will be the following result of MARCINKIEWICZ and ZYGMUND[9]): Let $|f(x)|\leqq 1$, then there exists an absolute constant λ so that for every $a<\lambda$

$$\int_{-1}^{+1}\exp|aL_k(f(x))|\,dx<A=A(\lambda), \tag{6}$$

[9]) J. MARCINKIEWICZ and A. ZYGMUND, Mean values of trigonometrical polynomials, *Fundamenta Math.*, **28** (1937), pp. 131—166, see theorem 4 on p. 133.

where A is independent of k. From (6) we obtain that there exists a constant c_1 so that

(7) $$M[x;\,|L_k(f(x))|>c_1\log\log k]<\frac{1}{(\log k)^{10}}$$

($M[x;\ldots]$ denotes the measure of a set in x satisfying a certain condition). Further it is well known that

(8) $$|L_k(f(x))|<c_2\log k.$$

Now we prove the following

Lemma. *Let $g_k(x)\geqq 0$ be defined in $[-1,+1]$. Assume that*

(9) $$M[x;\,g_k(x)>c_1\log\log k]<\frac{1}{(\log k)^{10}}$$

and

(10) $$g_k(x)<c_2\log k \qquad (k=2,3,\ldots,n).$$

Then if c_3 is sufficiently large, we have for almost all x and sufficiently large $n>n_0(x)$

$$G_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g_k(x)<c_3\log\log n.$$

The sequence $|L_k(f(x))|$ satisfies (9) and (10) [since it satisfies (7) and (8)]. Thus to prove Theorem 1 it will suffice to prove our lemma.

Proof of the Lemma. Define $S_k(x)$ as the set in x for which $g_k(x)>c_1\log\log k$.

Let $\varphi_k(x)$ be 1 in $S_k(x)$ and 0 elsewhere. It follows from (10) that if $G_n(x)>c_1\log\log n$ then x must be in $S_k(x)$ for at least $c_4 n/\log n$ values of k $(1\leqq k\leqq n)$. Thus by (9)

(11) $$\begin{aligned}M[x;\,G_n(x)>c_1\log\log n]&\leqq M\left[x;\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)>\frac{c_4 n}{\log n}\right]<\\&<\frac{\log n}{c_4 n}\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\right)dx<\frac{\log n}{c_4 n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\log k)^{10}}<\frac{1}{(\log n)^5}.\end{aligned}$$

Put $m_r=[e^{\sqrt{r}}]$. We obtain from (11) that

$$\sum_{r=1}^{\infty}M[x;\,G_{m_r}(x)>c_1\log\log m_r]<\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^{5/2}}<\infty.$$

Hence by a simple argument we obtain that for almost all x and large enough $r>r_0(x)$

(12) $$G_{m_r}(x)<c_1\log\log m_r.$$

If $m_r<n<m_{r+1}$ we have by (10)

$$m_r|G_n(x)|<n|G_n(x)|<m_r|G_{m_r}(x)|+c_2(m_{r+1}-m_r)\log n<m_r|G_{m_r}(x)|+\frac{c_5 m_r}{\sqrt{r}}\log n$$

i. e.

$$|G_n(x)| < |G_{m_r}(x)| + O(1). \tag{13}$$

The Lemma now follows from (12) and (13). Thus Theorem 1 is proved.

Sketch of the proof of Theorem 2. It is well known that there exists a polynomial $\varphi_l(x)$ of degree $< \sqrt{n}$ so that

$$|f(x) - \varphi_l(x)| = o\left(\frac{1}{\log\log n}\right). \tag{14}$$

We have

$$\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}(f(x) - L_k(f(x)))^2\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}(f(x) - L_k(f(x) - \varphi_l(x)) - L_k(\varphi_l(x)))^2\right] \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(x) - L_k(\varphi_l(x)))^2 + \frac{2}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}(f(x) - L_k(\varphi_l(x)))\cdot(L_k(f(x) - \varphi_l(x)))\right] + \tag{15}$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k(f(x) - \varphi_l(x))^2 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

From (14) and (8) we obtain $\Sigma_1 = o(1)$ since $L_k(\varphi_l(x)) = \varphi_l(x)$ for $k > \sqrt{n}$. From (14) and (8) we have

$$\Sigma_2 < \frac{\varepsilon}{n\log\log n}\sum_{k=1}^{n}|L_k(f(x) - \varphi_l(x))| + o(1) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{n\log\log n}\left(\sum_{k=1}^{n}|L_k(f(x))| + \sum_{k=1}^{n}|L_k(\varphi_l(x))|\right) + o(1) <$$

$$< \frac{2\varepsilon}{n\log\log n}\sum_{k=1}^{n}|L_k(f(x))| + o(1) = o(1)$$

for almost all x by Theorem 1. Now we investigate Σ_3. Put $s_r = e^{r^{1/4}}$. It suffices to show that for almost all x

$$\Sigma_3' = \frac{1}{s_r}\sum_{1 \leqq k \leqq s_r} L_k(f(x) - \varphi_l(x))^2 = o(1). \tag{16}$$

For if (16) is proved, put $s_r < n < s_{r+1}$. Clearly

$$\Sigma_3 \leqq \Sigma_3' + \frac{2}{n}\left[\sum_{k=s_r}^{s_{r+1}} L_k(f(x) - \varphi_l'(x))^2\right] < \Sigma_3' + \frac{2(s_{r+1} - s_r)}{n}(c_2\log n)^2 < \Sigma_3' + o(1)$$

$$\left(\text{since } (s_{r+1} - s_r) < c\frac{s_r}{r^{3/4}} < c\frac{s_r}{(\log n)^3}\right),$$

or for almost all x $\Sigma_3 = o(1)$. Thus we have only to prove (16).

The proof of (16) is similar to that of our lemma. Denote by $S_k'(x)$ the set in x for which $L_k(f(x) - \varphi_l(x))^2 > \varepsilon$. By (14) and the theorem of MARCINKIEWICZ—ZYGMUND[9]) the measure of $S_k'(x)$ is less than $\frac{1}{(\log k)^{10}}$. Thus from (8) if $\Sigma_3^{(s_r)} > \varepsilon s_r$, x has to lie in at least $\frac{c_5 s_r}{(\log s_r)^2}$ sets $S_k'(x)$, $1 \leqq k \leqq s_r$.

But then, as in the proof of the lemma,

$$M[x\,;\,\Sigma_3' > \varepsilon s_r] < \frac{c_6(\log s_r)^2}{s_r} \sum_{k \leqq s_r} \frac{1}{(\log k)^{10}} < \frac{c_7}{(\log s_r)^8}$$

or

$$\sum_{r=1}^{\infty} M[x;\,\Sigma_3' > \varepsilon s_r] < \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_7}{r^2} < \infty,$$

which proves (16) and completes the proof of Theorem 2.

(Received July 9, 1949.)

Die Ringe „ersten Ranges“.

Von L. RÉDEI in Szeged und T. SZELE in Debrecen (Ungarn).

§ 1. Einleitung.

Den Begriff des Ranges von Abelschen Gruppen[1]) haben BAER [1] und PRÜFER [2] für torsionsfreie Gruppen bzw. für Torsionsgruppen eingeführt. Beide Definitionen lassen sich ohne weiteres auf beliebige Abelsche Gruppen übertragen, sind aber miteinander nicht äquivalent, indem die Gruppen r-ten Ranges im Baerschen Sinne eine echte Untermenge derjenigen im Prüferschen Sinne bilden.

Insbesondere verstehen wir BAER folgend unter einer Gruppe *ersten Ranges* eine Gruppe mit folgender Eigenschaft, die wir zweckmäßig gleich in drei äquivalenten Formen angeben:

E_1: Keine Untergruppe[2]) ist eine direkte Summe.

E_2: Irgendzwei zyklische Untergruppen enthalten ein gemeinsames Element $\neq 0$. (Hier darf „zyklisch“ offenbar gestrichen werden.)[3])

E_3: Für irgendzwei Gruppenelemente α, β $(\neq 0)$ gibt es ganze Zahlen a, b mit $a\alpha = b\beta \neq 0$.[4])

Die Äquivalenz von E_1, E_2 sieht man so ein. Gilt E_1 nicht, so gibt es eine Untergruppe, die sich direkt zerlegen läßt; zwei direkte Summanden sind dann Untergruppen mit dem einzigen gemeinsamen Element 0, und so gilt E_2 nicht. Wenn umgekehrt E_2 nicht gilt, so gibt es zwei Untergruppen mit dem einzigen gemeinsamen Element 0; ihre direkte Summe ist eine Untergruppe und so gilt E_1 nicht. Man sieht auch, daß E_3 bloß eine mehr explizite Form von E_2 ist.

Dagegen benützt PRÜFER für die Definition der Gruppen ersten Ranges die Eigenschaft, daß jedes Paar (oder, was auf dasselbe hinauskommt, jedes

---

[1]) In dieser Arbeit soll unter „Gruppe“ stets eine *additiv* geschriebene *Abelsche* Gruppe verstanden werden.

[2]) Bequemlichkeitshalber schließen wir die Gruppen mit nur einem Element durchweg aus. Auch eine Untergruppe soll also aus mindestens zwei Elementen bestehen.

[3]) Es ist klar, daß dann jedes endliche System der Untergruppen von obiger Eigenschaft ist.

[4]) BAER nahm E_3 als definierende Eigenschaft der torsionsfreien Gruppen ersten Ranges an.

endliche System) von Elementen in einer zyklischen Untergruppe enthalten ist. Diese Eigenschaft läßt sich auch so formulieren:

E^*: Für irgendzwei Gruppenelemente α, β ($\alpha, \beta \neq 0$) gibt es ein Element δ und ganze Zahlen a, b derart, daß $\alpha = a\delta, \beta = b\delta$ gelten.

Die Eigenschaften E_3 und E^* lassen sich so gegenüberstellen: Irgendzwei Gruppenelemente ($\neq 0$) haben ein gemeinsames „Multiplum" ($\neq 0$) bzw. einen gemeinsamen „Teiler".

Man kann leicht einsehen, daß die Bedingung E_3 eine Folgerung von E^* ist[5]) und insbesondere E_3 und E^* für torsionsfreie Gruppen sowie für p-Gruppen[6]) gleichbedeutend sind. (Dies folgt übrigens aus den nachstehenden Sätzen.) Ein Beispiel für den Fall, wo E^* gilt, E_3 aber nicht, wird durch die zyklische Gruppe von der Ordnung 6 geliefert.

Von nun an werden wir die Bezeichnung „ersten Ranges" für die Gruppen von der Eigenschaft E_3 beibehalten. Die Gruppen von der Eigenschaft E^* wollen wir (wie es heute schon üblich ist) *lokal-zyklische* Gruppen nennen. Auch einen Ring[7]) nennen wir „ersten Ranges" bzw. „lokal-zyklisch", falls seine additive Gruppe die Eigenschaft E_3 bzw. E^* besitzt. Der Zweck dieser Arbeit ist die Ringe ersten Ranges und die lokal-zyklischen Ringe zu bestimmen, und zwar werden wir uns hauptsächlich mit den Ringen ersten Ranges beschäftigen. Nach Bestimmung dieser Ringe ergeben sich die lokal-zyklischen Ringe sehr leicht.

Jetzt führen wir einige Bezeichnungen und Redeweisen ein. Für einen Ring R bezeichne R^+ die additive Gruppe von R Mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen wir den rationalen Zahlkörper. Dann ist $\mathfrak{R}^+$ die additive Gruppe sämtlicher rationaler Zahlen (auch „rationale Gruppe" genannt), Ferner soll $\mathfrak{Z}(p^e)$ folgende p-Gruppe bezeichnen, wobei e eine natürliche Zahl oder $e = \infty$ sein kann. Im ersten Fall ist $\mathfrak{Z}(p^e)$ die zyklische Gruppe von der Ordnung p^e, dagegen ist $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ die engste Gruppe, die alle $\mathfrak{Z}(p^e)$ ($e = 1, 2, 3, \ldots$) enthält. Hierdurch ist $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ eindeutig bestimmt als die durch die unendlichvielen Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ erzeugte Abelsche Gruppe $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$[8]) mit den definierenden Gleichungen

$$(1) \qquad p\alpha_1 = 0, \; p\alpha_2 = \alpha_1, \; p\alpha_3 = \alpha_2, \ldots .$$

---

[5]) Diese Behauptung ist aber nur für Abelsche Gruppen gültig, denn eine beliebige Gruppe mit der Eigenschaft E^* ist notwendig kommutativ, wogegen E_3 sehr wohl auch einer nichtkommutativen Gruppe zukommen kann, wie dies das Beispiel der Quaternionengruppe (von 8-ter Ordnung) lehrt.

[6]) Unter einer *p-Gruppe* (auch *primäre* Gruppe genannt) werden wir durchweg eine (endliche oder unendliche) Gruppe verstehen, deren Elemente lauter Potenzen einer und derselben Primzahl p zur Ordnung haben. — Die Bezeichnung *„p-Ring"* soll dementsprechend einen (nicht notwendig kommutativen) Ring bedeuten, dessen additive Gruppe eine p-Gruppe ist.

[7]) Es sind nicht nur kommutative Ringe gemeint.

[8]) $\{\ \}$ soll die durch die eingeklammerten Elemente erzeugte (additive) Gruppe bezeichnen.

PRÜFER nennt $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ „die Gruppe vom Typ p^∞“. Dabei läßt sich $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ auch aus $\mathfrak{R}^+$ (durch nacheinanderfolgende Untergruppen- und Faktorgruppenbildung) gewinnen:

$$\mathfrak{Z}(p^\infty) \cong \left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{p^3}, \ldots\right\} / \{1\}, \tag{2}$$

d. h. $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ ist isomorph der Faktorgruppe der Gruppe der rationalen Zahlen von der Form $\frac{a}{p^n}$ nach dem Normalteiler der ganzen Zahlen. Letztere ist eine Untergruppe der Faktorgruppe $\mathfrak{R}^+/\{1\}$, die wir im folgenden mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnen. $\mathfrak{Z}$ ist offensichtlich lokal-zyklisch. Außerdem ist $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ bzw. $\mathfrak{Z}$ isomorph mit der multiplikativen Gruppe der komplexen Einheitswurzeln von p-Potenzordnung bzw. aller komplexen Einheitswurzeln.

Unter einem *Zeroring* verstehen wir (wie üblich) einen solchen Ring, in dem jedes Elementenprodukt gleich 0 ist. Ein Zeroring R ist durch R^+ eindeutig bestimmt und dabei kann R^+ jede vorgegebene Abelsche Gruppe sein. In diesem Sinne gehört zu jeder Gruppe mit der Eigenschaft E_3 bzw. E^* ein Zeroring ersten Ranges bzw. ein lokal-zyklischer Zeroring. Indem wir also im folgenden alle solchen Ringe bestimmen, so werden wir auch einen Überblick über sämtliche Gruppentypen von der Eigenschaft E_3 bzw. E^* gewinnen. Letztere Gruppen sind übrigens schon oft untersucht worden.

§ 2. Sätze.

Den vollständigen Überblick über die Gruppen mit der Eigenschaft E_3 ermöglichen uns folgende Sätze 1, 1a:

Satz 1. *Die Untergruppen von $\mathfrak{R}^+$ und $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ (für sämtliche p) sind gerade alle Gruppen ersten Ranges.*

Alle Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ sind offenbar diese Gruppe selbst und die zyklischen p-Gruppen. Man sieht auch, daß zwei Untergruppen von $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ nur dann isomorph sind, wenn sie identisch sind. Dagegen gilt ähnliches für die Untergruppen von $\mathfrak{R}^+$ nicht, wie das der folgende Satz lehrt:

Satz 1a. *Die Untergruppen der additiven Gruppe $\mathfrak{R}^+$ der rationalen Zahlen und die nichtisomorphen unter ihnen lassen sich so angeben:*

Bezeichne $\mathfrak{P}$ eine nichtleere Menge von Primzahlpotenzen $P_1, P_2, \ldots$ $(\geqq 1)$ so beschaffen, daß mit einem Element p^e alle Teiler $1, p, \ldots, p^e$ unter den P_i vorkommen, ferner bezeichne n eine zu allen P_i prime natürliche Zahl. Wir führen dann die kurze Bezeichnung ein:

$$\frac{n}{\mathfrak{P}} = \left\{\frac{n}{P_1}, \frac{n}{P_2}, \ldots\right\}.\text{[9]} \tag{3}$$

Diese sind alle Untergruppen von $\mathfrak{R}^+$.

---

[9]) Es ist klar, daß n die kleinste in der Gruppe (3) enthaltene natürliche Zahl ist.

Isomorph sind zwei solche Gruppen $\frac{n}{\mathfrak{P}}, \frac{n'}{\mathfrak{P}'}$ *dann und nur dann, wenn* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{P}'$ *bis auf endlich viele Elemente übereinstimmen. (Insbesondere sind alle* $\frac{n}{\mathfrak{P}}$ *isomorph zu* $\frac{1}{\mathfrak{P}}$.)

Bemerkungen. Der Inhalt der Sätze 1, 1a ist im wesentlichen schon bekannt. Und zwar bewies BAER [1], daß die Untergruppen von $\mathfrak{R}^+$ die sämtlichen torsionsfreien Gruppen ersten Ranges sind. PRÜFER [2] bewies, daß die Untergruppen von $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ alle lokal-zyklischen p-Gruppen erschöpfen.[10]) Bezüglich Satz 1a bemerken wir, daß eine im wesentlichen übereinstimmende Charakterisierung (mit Hilfe der Steinitzschen G-Zahlen) der Untergruppen von $\mathfrak{R}^+$ auch aus einem viel allgemeineren Satz von BAER ([1], Theorem 2. 8) folgt.

Beide Sätze 1, 1a geben eine vollständige Aufklärung über die Gruppen ersten Ranges. Nennen wir zwei Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ äquivalent, wenn sie bis auf endlichviele Elemente übereinstimmen. Bildet man ein volles System nichtäquivalenter $\mathfrak{P}$, so representieren die $\frac{1}{\mathfrak{P}}$ nach Satz 1a alle nichtisomorphen Untergruppen von $\mathfrak{R}^+$. Diese, die Gruppen $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ und die zyklischen p-Gruppen erschöpfen dann alle möglichen verschiedenen Gruppentypen ersten Ranges.

Nunmehr wollen wir die Ringe ersten Ranges angeben. Es sind also die Ringe zu bestimmen, die sich auf den eben aufgezählten additiven Gruppen „aufbauen“ lassen[11]). Wir beweisen den folgenden:

Satz 2. *Die Unterringe des rationalen Zahlkörpers* $\mathfrak{R}$, *die Unterringe der Restklassenringe* mod p^e, *außerdem diejenigen Zeroringe, deren additive Gruppe eine Untergruppe von* $\mathfrak{R}^+$ *oder eine Gruppe* $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ *ist, sind gerade die Ringe ersten Ranges.*

Bemerkung. Hiervon sind die endlichen p-Ringe ersten Ranges (d. h. die Unterringe der Restklassenringe mod p^e) schon wegen ihrer großen zahlentheoretischen Wichtigkeit wohlbekannt, und es sind auch die nichtisomorphen Ringe unter ihnen leicht anzugeben. Letztere stimmen nämlich offenbar mit allen verschiedenen Typen der „zyklischen“ p-Ringe[12]) überein und sind die folgenden Ringe $Z(p^e, p^k)$ $(0 \leq k \leq e)$: Die Elemente von $Z(p^e, p^k)$ sind $0, \beta, 2\beta, \ldots, (p^e-1)\beta$ mit $\beta^2 = p^k\beta$.[13]) Zu jeder Potenz p^e gibt es also ins-

[10]) Die p-Gruppen ersten Ranges sind identisch mit den lokal-zyklischen p-Gruppen, da im Falle einer Abelschen p-Gruppe E_3 ebenso wie E^* gleichwertig damit ist, daß die Gruppe *nur eine* Untergruppe p-ter Ordnung enthält.

[11]) Im allgemeinen nennen wir einen Ring R mit $R^+ = \mathfrak{G}$ einen auf $\mathfrak{G}$ aufgebauten Ring.

[12]) So nennen wir die Ringe R, für die R^+ eine zyklische p-Gruppe ist.

[13]) Insbesondere ist $Z(p^e, p^e)$ offenbar der Zeroring mit der additiven Gruppe $\mathfrak{Z}(p^e)$.

gesamt $e+1$ zyklische p-Ringe mit p^e Elementen. Den Zeroring mit der additiven Gruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ bezeichnen wir im folgenden mit $Z(p^\infty)$.

Um also auf Grund von Satz 2 alle verschiedenen Ringtypen ersten Ranges vollständig aufzählen zu können, ist es nur noch nötig einen Überblick über die Unterringe von $\mathfrak{R}$ zu verschaffen. Das geschieht im folgenden

Satz 2a. *Die Unterringe des rationalen Zahlkörpers $\mathfrak{R}$ lassen sich so angeben:*

Bezeichne $\mathfrak{M}$ eine beliebige endliche (eventuell leere) oder unendliche Menge von verschiedenen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots$ und n eine zu allen p_i prime natürliche Zahl. Die Zahlen von der Form $\frac{na}{b}$ (a ganz, b ein Potenzprodukt aus den p_i) bilden einen Unterring von $\mathfrak{R}$, den wir mit

$$nR\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \ldots\right) \tag{4}$$

bezeichnen[14]). *Diese sind die sämtlichen Unterringe von $\mathfrak{R}$ und es gibt unter ihnen keine isomorphen. (Enthält $\mathfrak{M}$ alle Primzahlen, so ist nur $n=1$ zuzulassen, und dann geht* (4) *in $\mathfrak{R}$ über; in jedem anderen Falle gehören zu $\mathfrak{M}$ unendlichviele n und somit Ringe* (4).)

Auf Grund der vorigen lassen sich nunmehr auch die lokal-zyklischen Gruppen bzw. Ringe leicht angeben. Wie wir schon erwähnt haben, ist die Gruppe $\mathfrak{Z}=\mathfrak{R}^+/\{1\}$ lokal-zyklisch. Dann sind auch ihre Untergruppen von dieser Eigenschaft, die als Torsionsgruppen in eine direkte Summe von (zu verschiedenen Primzahlen p gehörenden) p-Gruppen zerfallen. Sie lassen sich also explizit als

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{Z}(q_i^{e_i}) \tag{5}$$

angeben, wobei $q_1, q_2, \ldots$ die (zunehmende) Folge aller Primzahlen ist und jedes e_i entweder eine nichtnegative ganze Zahl oder ∞ bezeichnet. (Im Fall $e_i=0$ fällt der entsprechende Summand $\mathfrak{Z}(1)$ heraus.) Nun gilt der

Satz 3. *Die Untergruppen von $\mathfrak{R}^+$ und $\mathfrak{Z}=\mathfrak{R}^+/\{1\}$ sind gerade alle lokal-zyklischen Gruppen*[15]). *Man erhält also sämtliche lokal-zyklische Gruppentypen durch Hinzunahme derjenigen Gruppen* (5) *zu den Gruppen ersten Ranges, die keine p-Gruppen sind.*

---

[14]) Speziell bezeichnet $R\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \ldots\right)$ den Ring derjenigen rationalen Zahlen, die nur Primfaktoren $p_1, p_2, \ldots$ im Nenner enthalten. Dann läßt sich (4) als ein Produkt auffassen, wobei man den zweiten Faktor elementweise mit n zu multiplizieren hat. Ist $\mathfrak{M}=0$ die leere Menge, so schreibe man für (4) entsprechen $n.R(0)$; es ist $R(0)$ der Ring der ganzen Zahlen, $n.R(0)$ der Ring der Vielfachen von n.

[15]) Vgl. Prüfer [3] (wobei man unter einen „Modul" offenbar eine Untergruppe von $\mathfrak{R}+$ zu verstehen hat).

Die Unterringe von $\mathfrak{R}$ und die direkten Summen von (endlich- oder unendlichvielen) zu verschiedenen Primzahlen p gehörenden p-Ringen ersten Ranges (die oben schon angegeben wurden) erschöpfen alle lokal-zyklischen Ringtypen. Letztere sind eben die Ringe, die sich auf den Gruppen (5) *aufbauen lassen, d. h. die direkten Summen*

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} Z(q_i^{e_i}, q_i^{k_i}),$$

mit $0 \leqq k_i \leqq e_i$ *für ein endliches* e_i, *dagegen soll das Symbol* $Z(q^{\infty}, q_i^{k_i})$ *(für ein* $e_i = \infty$*) durch* $Z(q^{\infty})$ *ersetzt werden.*

Zusammenfassende Bemerkungen. Nach Satz 3 sind alle lokal-zyklischen Ringe (insbesondere also alle Ringe ersten Ranges) kommutativ. Auch sieht man, daß unter den unendlichen Ringen ersten Ranges nach Satz 2 nur die zwei extremen Fälle, nämlich Zeroringe und Integritätsbereiche (d. h. kommutative Ringe ohne Nullteiler) vorkommen.

Wie stark im allgemeinen die Ringe ersten Ranges durch ihre additive Gruppe determiniert sind, das wird uns so noch klarer, daß wir folgende interessante Fragen beantworten: *Welche und wieviele Ringtypen lassen sich auf einer festen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *vom ersten Range aufbauen, die keine Zeroringe sind?* Diese Ringe und ihre Anzahl bezeichnen wir mit $R(\mathfrak{G})$ bzw. $[\mathfrak{G}]$. Wir bemerken gleich, daß sehr wohl auch $[\mathfrak{G}] = \infty$ sein kann, denn z. B. haben alle Ringe (4) bei festen $p_1, p_2, \ldots$ isomorphe additive Gruppen. Nach Satz 1 unterscheiden wir die Fälle $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p^{\infty})$, $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{Z}(p^{\infty})$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}^{+}$, $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}^{+}$, wovon sich der letzte in zwei weitere Fälle spalten wird.

Fall 1: $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p^{\infty})$. Nach Satz 2 gibt es jetzt kein $R(\mathfrak{G})$, und so ist $[\mathfrak{G}] = 0$.

Fall 2: $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{Z}(p^{\infty})$ d. h. $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p^{e})$ $(e = 1, 2, \ldots)$. Dann sind die $R(\mathfrak{G})$ die $Z(p^e, p^k)$ $(0 \leqq k < e)$, und so ist $[\mathfrak{G}] = e$.

Fall 3: $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}^{+}$. Nach Satz 2a ist jetzt $\mathfrak{R}$ offenbar der einzige Ring $R(\mathfrak{G})$, und so ist $[\mathfrak{G}] = 1$.

Fall 4: $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}^{+}$. Nach Satz 1a läßt sich $\mathfrak{G} = \frac{1}{\mathfrak{P}}$ setzen, wobei $\mathfrak{P}$ nicht aus allen Primzahlpotenzen besteht (dann läge nämlich Fall 3 vor). Wir unterscheiden die weiteren zwei Fälle:

Fall 4a: *$\mathfrak{P}$ enthält nur endlich viele solche Primzahlen p, für die nicht zugleich auch alle Potenzen $p, p^2, \ldots$ in $\mathfrak{P}$ liegen.* Diese p und ihre (insgesamt endlich vielen) Potenzen lassen sich aus $\mathfrak{P}$ streichen, denn dabei bleibt $\mathfrak{G} \cong \frac{1}{\mathfrak{P}}$ nach Satz 1a immer noch aufrechterhalten. Bezeichne $p_1, p_2, \ldots$ alle Primzahlelemente von $\mathfrak{P}$, so sind sämtliche $R(\mathfrak{G})$ offenbar durch (4) angegeben, und so ist $[\mathfrak{G}] = \infty$.

Fall 4b: *$\mathfrak{P}$ enthält unendlich viele solche Primzahlen p, für die nicht zugleich alle Potenzen $p, p^2, \ldots$ in $\mathfrak{P}$ liegen.* Da die additive Gruppe des

Ringes (4) offenbar $\frac{n}{\mathfrak{P}'}$ ist, wobei $\mathfrak{P}'$ genau aus allen Potenzen der p_i besteht, und nach Satz 1a $\frac{1}{\mathfrak{P}}$ gewiß nicht-isomorph zu $\frac{n}{\mathfrak{P}'}$ ist, so gibt es jetzt nach Satz 2a kein $R(\mathfrak{G})$ und es ist $[\mathfrak{G}]=0$.

Wir sehen also, daß alle Fälle $[\mathfrak{G}]=0, 1, 2, \ldots, \infty$ möglich sind. Zwei besonders interessante Fälle geben uns Anlass zu den folgenden Bemerkungen.

$[\mathfrak{G}]=1$ gilt nur für $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}(p)$, $\mathfrak{R}^+$ (Fälle 2, 3). Entsprechend ist $R(\mathfrak{G})=Z(p, 1)$, d. h. der endliche Körper von p Elementen bzw. $R(\mathfrak{G})=\mathfrak{R}$; beide machen eben alle Primkörper aus. Also gilt: *Unter allen Ringen ersten Ranges sind die Primkörper (von jeder Charakteristik) dadurch ausgezeichnet, daß sich auf ihrer additiven Gruppe keine weiteren Nicht-Zeroringe aufbauen lassen.*

$[\mathfrak{G}]=0$ gilt für die $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}(p^\infty)$ (Fall 1) und für die $\mathfrak{G}=\frac{1}{\mathfrak{P}}$ im Fall 4b. *Auf diesen Gruppen lassen sich somit überhaupt keine Nicht-Zeroringe aufbauen.* Unseres Wissens ist in der Literatur bisher noch nicht bemerkt worden, daß es additive Gruppen gibt, in denen sich ein nicht identisch verschwindendes (kommutatives oder nichtkommutatives) Produkt der Elemente in keiner Weise so definieren läßt, daß dabei ein Ring entsteht[16]). Das lautet überraschend, denn auf den endlichen additiven Gruppen läßt sich immer mindestens ein Nicht-Zeroring aufbauen[17]), und so hätte man von den unendlichen Gruppen ähnliches erwartet.

Vollständigkeitshalber werden wir uns beim Beweis unserer Sätze nicht auf die erwähnten Resultate von Baer und Prüfer stützen.

§ 3. Beweis der Sätze 1, 2, 3.

Wir beweisen die Sätze 1, 2 zusammen. Es ist vor allem klar, daß die in diesen Sätzen aufgezählten Gruppen bzw. Ringe vom ersten Range sind. Bezeichne umgekehrt R einen beliebigen Ring ersten Ranges, also $R^+=\mathfrak{G}$ eine ebenfalls beliebige Gruppe ersten Ranges.

Ist R (und $\mathfrak{G}$) endlich, so muß $\mathfrak{G}$ ein $\mathfrak{Z}(p^e)$ $(e=1, 2, \ldots)$ sein, denn sonst zerfällt $\mathfrak{G}$ nach dem Fundamentalsatze der endlichen Abelschen Gruppen in eine direkte Summe, was wegen E_1 nicht sein kann. Dies beweist schon

---

[16]) Inzwischen ist einem von uns gelungen, die Struktur dieser Gruppen weitgehend aufzudecken. Vgl. T. Szele, Zur Theorie der Zeroringe, *Math. Annalen,* **121** (1949), S. 242–246.

[17]) Das folgt unmittelbar aus dem Fundamentalsatz der endlichen Abelschen Gruppen, nach dem nämlich jede solche Gruppe in eine direkte Summe von zyklischen Gruppen zerlegbar ist. Dann ist die direkte Summe der Restklassenringe (gebildet im Ring der ganzen Zahlen), die sich auf den einzelnen zyklischen Komponenten dieser Zerlegung aufbauen lassen, offenbar kein Zeroring (sogar ist ein Ring mit Einselement).

Satz 1 und Satz 2 für endliche Gruppen bzw. für endliche Ringe. (Vgl. hierzu die Bemerkung nach Satz 2.)

Es sind nur noch die unendlichen R (und $\mathfrak{G}$) übrig. Offenbar schließt E_3 aus, daß von α und β das eine von endlicher das andere von unendlicher Ordnung ist, und so ist $\mathfrak{G}$ entweder eine (unendliche) Torsionsgruppe oder eine torsionsfreie Gruppe. Beide Fälle betrachten wir getrennt als Fall 1 bzw. 2.

Fall 1: *$\mathfrak{G}$ ist eine unendliche Torsionsgruppe.* Die endlichen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ müssen nach obigem lauter Gruppen $\mathfrak{Z}(p^e)$ sein, und so sind alle Elemente von einer Ordnung $1, p, p^2, \ldots$, wobei p eine feste Primzahl ist. Mit anderen Worten ist dann $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe. Würden die Gleichung

$$(7) \qquad p^e \xi = 0$$

mehr als p^e Elemente ξ von $\mathfrak{G}$ befriedigen, so nehme man p^e+1 solche Elemente; diese erzeugen eine endliche nichtzyklische Gruppe, und das ist ein Widerspruch. Da also (7) höchstens p^e Lösungen in $\mathfrak{G}$ hat, so gibt es in $\mathfrak{G}$ Elemente von beliebig hoher Ordnung, d. h. von jeder Ordnung $1, p, p^2, \ldots$. Folglich hat $\mathfrak{G}$ genau p^e Elemente ξ, für die (7) gilt. Wir zeigen nun, daß sich in $\mathfrak{G}$ Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots (\neq 0)$ angeben lassen, die die Gleichungen (1) befriedigen. Hierzu wählen wir für α_1 ein beliebiges Element p-ter Ordnung in $\mathfrak{G}$, wofür also die erste Gleichung (1) gilt, und nehmen an, daß wir schon Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_e$ $(e \geqq 1)$ gefunden haben, für die die ersten e Gleichungen (1) (einschließlich bis $p\alpha_e = \alpha_{e-1}$) erfüllt sind. Einerseits bilden dann die $k\alpha_e (k = 0, 1, \ldots, p^e - 1)$ alle Lösungen von (7), andererseits gibt es in $\mathfrak{G}$ ein Element α von der Ordnung p^{e+1}, wofür dann notwendig $p\alpha = k\alpha_e$ mit einem geeigneten k $(p \nmid k)$ gilt. Wir bestimmen k' mit $kk' \equiv 1 \pmod{p^e}$ und setzen $\alpha_{e+1} = k'\alpha$. Dann gilt $p\alpha_{e+1} (= kk'\alpha_e) = \alpha_e$, und so haben wir die Behauptung durch Induktion bewiesen. Die angegebenen Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von $\mathfrak{G}$ erzeugen eine Gruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty) \subseteqq \mathfrak{G}$. Da es schon in $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ p^e Lösungen von (7) gibt und jedes Element von $\mathfrak{G}$ eine Gleichung (7) befriedigt, so können in $\mathfrak{G}$ außerhalb $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ keine Elemente vorhanden sein, d. h. es ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p^\infty)$. Satz 1 ist für diesen Fall bewiesen.

Auch folgt aus $R^+ = \mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p\ \ )$, daß R nur ein Zeroring sein kann. Nach (1) lassen nämlich irgendzwei Elemente von R in der Form $c\alpha_k, d\alpha_l$ annehmen mit ganzen rationalen c, d. Wieder nach (1) gilt aber

$$c\alpha_k \cdot d\alpha_l = c\alpha_k \cdot dp^k \alpha_{k+l} = p^k \alpha_k \cdot cd\alpha_{k+l} = 0,$$

(es ist nämlich $p^k \alpha_k = 0$) und so ist R in der Tat ein Zeroring, wie es im Satz 2 behauptet wurde.

Fall 2: *$\mathfrak{G}$ ist eine torsionsfreie Gruppe.* Wir geben eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{R}^+$ an, womit wir insbesondere den Beweis von Satz 1 vollendet werden haben. Hierzu wählen wir ein beliebiges Elementenpaar $\alpha \in \mathfrak{G}$, $a \in \mathfrak{R}^+ (\alpha, a \neq 0)$ fest und betrachten ein weiteres Element ξ von $\mathfrak{G}$.

Nach E_3 gibt es ganze Zahlen r, s mit

$$s\xi = r\alpha \qquad (s \neq 0). \tag{8}$$

(Dies ist auch für $\xi = 0$ richtig mit $r = 0$.) Wir ordnen ξ die rationale Zahl $a \cdot \frac{r}{s}$ als Bild zu:

$$\xi \to a \cdot \frac{r}{s}. \tag{9}$$

Diese Abbildung ist eindeutig, denn gilt auch $\xi \to a \cdot \frac{r'}{s'}$, d. h. $s'\xi = r'\alpha$, so folgt aus (8): $(rs' - r's)\xi = 0$. Da $\mathfrak{G}$ torsionsfrei ist, muß der erste Faktor verschwinden; also ist $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$, und so sind beide Bilder $a \cdot \frac{r}{s}$, $a \cdot \frac{r'}{s'}$ gleich. Verschiedenen Elementen gehören auch verschiedene Bilder zu. Denn nehmen wir ein weiteres Element ξ' von $\mathfrak{G}$ an, wofür dann entsprechend (8) und (9)

$$s'\xi' = r'\alpha, \tag{10}$$

$$\xi' \to a \cdot \frac{r'}{s'} \tag{11}$$

gilt. Sind nun die rechten Seiten von (9) und (11) gleich, d. h. $rs' - r's = 0$, so folgt aus (8), (10): $ss'(\xi - \xi') = (rs' - r's)\alpha = 0$, $\xi = \xi'$, wie behauptet wurde. Endlich betrachten wir ein beliebiges Elementenpaar ξ, ξ' in $\mathfrak{G}$, wofür wir wieder (8)—(11) annehmen. Ähnlich wie vorher folgt $ss'(\xi + \xi') = (rs' + r's)\alpha$, also $\xi + \xi' \to a \cdot \frac{r}{s} + a \cdot \frac{r'}{s'}$, d. h. die angegebene eindeutige Abbildung ist ein Isomorphismus.

Um auch noch den Beweis von Satz 2 zu beenden, genügt es folgendes zu zeigen. Ist R kein Zeroring, so läßt sich das obige (bisher willkürliche) a so wählen, daß R durch (9) *ringisomorph* in $\mathfrak{R}$ abgebildet wird. Hierzu braucht nur noch gezeigt zu werden, daß für ein passendes (festes) a aus (9) und (11) immer

$$\xi\xi' \to a \frac{r}{s} \cdot a \frac{r'}{s'} \tag{12}$$

folgt.

Zuerst zeigen wir $\alpha^2 \neq 0$ $(\alpha \in R, \alpha \neq 0)$. Denn nehmen wir $\alpha^2 = 0$ an. Für ein beliebiges Elementenpaar β_1, β_2 $(\neq 0)$ von R gibt es nach E_3 ganze Zahlen r_1, s_1, r_2, s_2 mit

$$r_1\beta_1 = s_1\alpha \neq 0, \quad r_2\beta_2 = s_2\alpha \neq 0.$$

Es folgt $r_1 r_2 \beta_1 \beta_2 = s_1 s_2 \alpha^2 = 0$. Da $r_1 r_2 \neq 0$ und $\mathfrak{G}$ torsionsfrei ist, so folgt weiter, daß $\beta_1\beta_2 = 0$ d. h. R ein Zeroring ist. Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung.

Da α, α^2 von 0 verschiedene Elemente von $\mathfrak{G}$ sind, so gibt es nach E_3 ganze Zahlen c, d mit

(13) $$c\alpha = d\alpha^2 \neq 0.$$

Wir wählen

(14) $$a = \frac{c}{d}$$

und zeigen, daß dann aus (9), (11) in der Tat (12) folgt. Wegen (9), (11) dürfen (8), (10) angenommen werden. Nach Multiplikation haben wir $ss'\xi\xi' = rr'\alpha^2$ also nach (13) und (14):

$$dss'\xi\xi' = crr'\alpha = adrr'\alpha.$$

Nach der Definition der Abbildung (9) folgt hieraus

$$\xi\xi' \rightarrow a^2 \cdot \frac{rr'}{ss'}.$$

Dies stimmt mit (12) überein, womit wir Satz 2 bewiesen haben.

Wir wollen noch Satz 3 in diesem § beweisen. Ist $\mathfrak{G}$ eine lokal-zyklische Gruppe (d. h. eine Gruppe mit der Eigenschaft E^*), so ist vor allem klar, daß auch jetzt gilt: $\mathfrak{G}$ ist entweder eine torsionsfreie Gruppe oder eine Torsionsgruppe.

Ist $\mathfrak{G}$ torsionsfrei, so folgt aus der Existenz eines δ mit $\alpha = a\delta$, $\beta = b\delta$, daß $ab\delta$ ein gemeinsames Multiplum von α und β ist (und zwar gilt $ab\delta \neq 0$, falls $\alpha, \beta \neq 0$ sind), mithin hat $\mathfrak{G}$ die Eigenschaft E_3. Damit sind alle Behauptungen von Satz 3 bewiesen, die sich auf $\mathfrak{R}^+$ bzw. $\mathfrak{R}$ beziehen.

Ist dann $\mathfrak{G}$ eine Torsionsgruppe mit der Eigenschaft E^*, so zerfällt sie in eine direkte Summe von p-Gruppen, die zu verschiedenen Primzahlen p gehören, und von der Eigenschaft E_3 sind. (Vgl. [10]). Folglich ist $\mathfrak{G}$ nach Satz 1 eine Gruppe (5) und somit zugleich auch eine Untergruppe von $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R}^+/\{1\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{Z}(q_i^\infty)$ (wobei $q_1, q_2, \ldots$ die Folge aller Primzahlen bezeichnet). Da endlich auf einer additiven Gruppe (5) bekanntlich nur Ringe vom Typ (6) aufbauen lassen (und zwar auf der Gruppe $\mathfrak{Z}(q_i^\infty)$ nach Satz 2 nur der Zeroring $Z(q_i^\infty)$), so haben wir auch Satz 3 bewiesen.

§ 4. Beweis der Sätze 1a, 2a.

Bezeichne $\mathfrak{A}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{R}^+$, insbesondere $\mathfrak{A}_1$ eine Untergruppe, die die Zahl 1 enthält. $\mathfrak{A}$ enthält ganze, darunter auch positive Elemente. Bezeichne n die kleinste natürliche Zahl in $\mathfrak{A}$. Die Gruppe $\frac{1}{n}\mathfrak{A}$[18]) ist

[18]) $\frac{1}{n}\mathfrak{A}$ bezeichnet, daß man die Elemente von $\mathfrak{A}$ mit $\frac{1}{n}$ multipliziert.

ein $\mathfrak{A}_1$, und so gilt

(15) $$\mathfrak{A} = n\mathfrak{A}_1.$$

Wir haben $\mathfrak{A}_1$ näher zu untersuchen. Ist $\frac{c}{d} \in \mathfrak{A}_1$ mit relativ primen ganzen c, d, so gibt es ganze Zahlen r, s mit $r \cdot \frac{c}{d} = s + \frac{1}{d}$; hieraus folgt $\frac{1}{d} \in \mathfrak{A}_1$ und zugleich $\frac{1}{P} \in \mathfrak{A}_1$ für alle Primzahlpotenzfaktoren P von d. Umgekehrt wird $\frac{c}{d}$ durch diese $\frac{1}{P}$ additiv erzeugt, und so haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{A}_1$ in der Form $\left\{\frac{1}{P_1}, \frac{1}{P_2}, \ldots\right\}$ erscheint, wobei $P_1, P_2, \ldots$ passende Primzahlpotenzen sind, die dabei offenbar eine Menge $\mathfrak{P}$ bilden (wie in Satz 1a). Zugleich schreibt sich (15) so:

(16) $$\mathfrak{A} = \left\{\frac{n}{P_1}, \frac{n}{P_2}, \ldots\right\}.$$

Hätte n einen Teiler $d (> 1)$ mit einem P_i gemeinsam, so würde aus (16) $\frac{n}{d} \in \mathfrak{A}$ folgen, und das der Definition von n widerspricht. Also ist n prim zu allen P_i, und so ist $\mathfrak{A}$ in der Tat eine der in (3) angegebenen Gruppen $\frac{n}{\mathfrak{P}}$.

Identisch gleich können zwei solche Untergruppen $\frac{n}{\mathfrak{P}}, \frac{n'}{\mathfrak{P}'}$ wegen[9]) nur im Fall $n = n'$ sein, und dann sind auch $\frac{1}{\mathfrak{P}}, \frac{1}{\mathfrak{P}'}$ identisch gleich, woraus offenbar $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$ folgt. Wir haben also gezeigt, daß in der Form (3) jede Untergruppe von $\mathfrak{R}^+$ genau einmal erscheint.

Nunmehr haben wir nun noch zu untersuchen, welche zwei Gruppen (3) isomorph sind. Als Vorbereitung bemerken wir folgendes. Man dividiere alle Elemente einer Gruppe $\frac{1}{\mathfrak{P}}$ durch eine Primzahl p, d. h. bilde $\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\mathfrak{P}}$. Dies ist dann wieder eine Gruppe $\frac{1}{\mathfrak{P}'}$, wobei zwei Fälle zu unterscheiden sind. Und zwar, wenn $\mathfrak{P}$ alle Potenzen $1, p, p^2, \ldots$ enthält, so ist einfach $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$. Wenn degegen $1, p, \ldots, p^e$ $(e \geqq 0)$ sämtliche, in $\mathfrak{P}$ enthaltene Potenzen von p sind, so entsteht $\mathfrak{P}'$ aus $\mathfrak{P}$ durch Hinzunahme von p^{e+1} (d. h. e wird zu $e+1$ erhöht).

Betrachten wir nunmehr zwei Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{R}^+$ in der Form (3) geschrieben:

(17) $$\mathfrak{A} = \frac{n}{\mathfrak{P}}, \quad \mathfrak{A}' = \frac{n'}{\mathfrak{P}'}.$$

Offenbar sind diese dann und nur dann isomorph, wenn es eine rationale

Zahl $u (\neq 0)$ mit $\mathfrak{A}' = u \cdot \mathfrak{A}$ gibt[19]). Dabei darf $u > 0$ angenommen werden, und dann läßt sich $u = \frac{r}{s}$ setzen (r, s natürliche Zahlen). Dann ergibt sich aus (17): $\frac{1}{n's} \cdot \frac{1}{\mathfrak{P}} = \frac{1}{nr} \cdot \frac{1}{\mathfrak{P}'}$. Wir haben gewonnen: $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ sind dann und nur dann isomorph, wenn es natürliche Zahlen c, c' gibt, für die die Gruppen $\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\mathfrak{P}}, \frac{1}{c'} \cdot \frac{1}{\mathfrak{P}'}$ identisch gleich sind. Nach der vorangeschickten Bemerkung ist das gleichbedeutend damit, daß die Menge $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ nur in endlichvielen Elementen voneinander unterscheiden. Satz 1a ist bewiesen.

Für Satz 2a ist vor allem klar, daß unter (4) lauter Unterringe von $\mathfrak{R}$ angegeben wurden und sie zu zweien nicht-isomorph sind. Es ist nur noch zu zeigen, daß jeder Unterring U von $\mathfrak{R}$ unter den Ringen (4) vorkommt. Da U^+ eine Untergruppe von $\mathfrak{R}^+$ ist, so machen die Elemente von U nach Satz 1a eine Gruppe $\frac{n}{\mathfrak{P}} = \left\{ \frac{n}{P_1}, \frac{n}{P_2}, \ldots \right\}$ aus. Andererseits können dieselben Elemente offenbar nur dann einen Unterring von $\mathfrak{R}$ bilden, wenn mit einer Primzahl $p \in \mathfrak{P}$ auch alle Potenzen $p^2, p^3, \ldots$ in $\mathfrak{P}$ enthalten sind. Bei dieser Einschränkung stimmt die Gruppe (3) mit einem Ring (4) überein, womit wir auch Satz 2a bewiesen haben.

Schriftenverzeichnis.

[1] R. Baer, Abelian groups without elements of finite order, *Duke Math. Journal,* **3** (1937), S. 68 - 122.

[2] H. Prüfer, Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, *Math. Zeitschrift,* **17** (1923), S. 35—61.

[3] H. Prüfer, Theorie der Abelschen Gruppen. I. Grundeigenschaften, *ebenda,* **20** (1924), S. 165—187.

(Eingegangen am 23. Juli 1949.)

[19]) Hat nämlich $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\alpha \neq 0$) bei einer isomorphen Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$ das Bildelement $\alpha' \in \mathfrak{A}'$, und ist $\alpha' = u\alpha$, so muß wegen der Eigenschaft E_3 jedes Element $\xi \in \mathfrak{A}$ offenbar das Bildelement $\xi' = u\xi$ bekommen.

On the theory of the mechanical quadrature.

By P. TURÁN in Budapest.

§ 1. In what follows I communicate a few simple remarks on the theory of mechanical quadrature to which also L. FEJÉR[1]) devoted an important paper. These remarks though they are rather naturally connected to the classical theory of mechanical quadrature of GAUSS—JACOBI, seem not to be observed so far. These reveal an interesting property of those polynomials $\pi^*_{n,2l}(x)$ (n, l fixed integers) which minimize the integral

$$I_{2l}(\pi_n)=\int_{-1}^{+1}|\pi_n(x)|^{2l}\,dx \tag{1.1}$$

among the polynomials

$$\pi_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n. \tag{1.2}$$

This polynomial $\pi^*_{n,2l}(x)$ minimizes obviously at the same time also the expression

$$H_{2l}(\pi_n)=\left[\int_{-1}^{+1}|\pi_n(x)|^{2l}\,dx\right]^{\frac{1}{2l}}. \tag{1.3}$$

§ 2. The classical theorem of GAUSS—JACOBI deals with quadrature-formulae of the type

$$\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{n}f(x_\nu)\,\lambda_\nu, \tag{2.1}$$

where $x_1,\ldots,x_n$ are different, arbitrarily prescribed numbers and the λ's are independent of f. Putting

$$\omega(x)=\prod_{\nu=1}^{n}(x-x_\nu)\quad\text{and}\quad l_\nu(x)=\frac{\omega(x)}{\omega'(x_\nu)\,(x-x_\nu)}\qquad(\nu=1,2,\ldots,n)$$

we have $f(x)=\sum_{\nu=1}^{n}f(x_\nu)\,l_\nu(x)$, for all polynomials $f(x)$ of degree $\leq n-1$,

---

[1]) L. FEJÉR, Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen, *Math. Zeitschrift*, **37** (1933), pp. 287–310.

and consequently

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) \int_{-1}^{+1} l_\nu(x)\,dx. \tag{2.2}$$

This is a quadrature-formula of type (2. 1) with the „Cotes-numbers" $\lambda_\nu = \int_{-1}^{1} l_\nu(x)\,dx$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, valid for all polynomials of degree $\leqq n-1$.

Now the above-mentioned theorem of Gauss – Jacobi solves the question how to choose the "fundamental points" $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in order that the quadrature-formula (2. 2) be valid for "the greatest possible set" of polynomials. They proved that formula (2. 2) is valid for all polynomials of degree $\leqq 2n-1$ if and only if $x_1, \ldots, x_n$ are the zeros of the nth Legendre-polynomial

$$P_n(x) = [(x^2-1)^n]^{(n)}. \tag{2.3}$$

§ 3. Now we consider mechanical quadratures of the type

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{n} f'(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(1)}, \tag{3.1}$$

where the quantities $\lambda_\nu^{(0)}, \lambda_\nu^{(1)}$ are independent of f. The existence of such a quadrature-formula follows immediately from the formula of FEJÉR[2])

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\,l_{\nu,0}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} f'(x_\nu)\,l_{\nu,1}(x) \tag{3.2}$$

valid for all polynomials $f(x)$ of degree $\leqq 2n-1$, where — again with the notation of § 2 —

$$l_{\nu,0}(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_\nu)}{\omega'(x_\nu)}(x-x_\nu)\right) l_\nu^2(x), \quad l_{\nu,1}(x) = (x-x_\nu)\,l_\nu^2(x). \tag{3.3}$$

Integrating (3. 2) over $[-1, +1]$ we obtain a formula of type (3. 1) with

$$\lambda_\nu^{(0)} = \int_{-1}^{+1} l_{\nu,0}(x)\,dx, \qquad \lambda_\nu^{(1)} = \int_{-1}^{+1} l_{\nu,1}(x)\,dx, \tag{3.4}$$

valid for all polynomials $f(x)$ of degree $\leqq 2n-1$.

§ 4. The n zeros of the Legendre-polynomial $P_n(x)$ of (2. 3) are real. This fact implies that the Gauss – Jacobi formula is applied in praxis, e. g. in meteorology. Hence it is reasonable to modify a little Gauss—Jacobi's problem asking for a *real* system $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ for which the quadrature-formula (3. 1)—(3. 4) is true for a greater variety of polynomials than those of degree $\leqq 2n-1$. It is easy to show that by *no* choice this formula

---

[2]) Implicitly in his paper: Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Annalen*, **106** (1932), pp. 1—56. Our notation differs from his one; this change is motivated by the considerations of § 8.

(3. 1)—(3. 4) can be made precise even to all polynomials of degree $\leqq 2n$. The validity of formula (3. 1) for a class A of polynomials means namely that for any $f_1(x)$ and $f_2(x)$ of the class A, for which

$$f_1(x_\nu)=f_2(x_\nu),\ f_1'(x_\nu)=f_2'(x_\nu) \qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \tag{4. 1}$$

we have

$$\int_{-1}^{+1}(f_1(x)-f_2(x))\,dx=0. \tag{4. 2}$$

But it follows from (4. 1) that the polynomial $f_1(x)-f_2(x)$ is divisible by $\omega^2(x)$; hence if A is the class of polynomials of degree $\leqq 2n$, we have $f_1(x)-f_2(x)=c\omega^2(x)$, i. e. from (4. 2) we would have for all c

$$c\int_{-1}^{+1}\omega^2(x)\,dx=0.$$

But this is impossible for a proper polynomial $\omega(x)$ with real zeros only.

§ 5. Now we pass a step further. We consider quadrature-formulae of type

$$\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{n}f(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(0)}+\sum_{\nu=1}^{n}f'(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(1)}+\sum_{\nu=1}^{n}f''(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(2)}, \tag{5. 1}$$

where the $\lambda_\nu^{(j)}$'s are independent of f. It is again easy to show the existence of such a quadrature-formula (5. 1), valid for all $f(x)$ polynomials of degree $\leqq 3n-1$. Following namely the reasoning FEJÉR used to determine $l_{\nu 0}(x)$ and $l_{\nu 1}(x)$ in (3. 2), we obtain[8]) the representation

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{n}f(x_\nu)\,l_{\nu,0}(x)+\sum_{\nu=1}^{n}f'(x_\nu)\,l_{\nu,1}(x)+\sum_{\nu=1}^{n}f''(x_\nu)\,l_{\nu,2}(x) \tag{5. 2}$$

valid for all $f(x)$ of degree $\leqq 3n-1$.

Here we have with the notation of § 2

$$\begin{aligned} l_{\nu,0}(x)&=\left\{1-3l_\nu'(x_\nu)(x-x_\nu)+\frac{3}{2}\left[5(l_\nu'(x_\nu))^2-l_\nu''(x_\nu)\right](x-x_\nu)^2\right\}l_\nu^3(x),\\ l_{\nu,1}(x)&=(x-x_\nu)\left[1-3l_\nu'(x_\nu)(x-x_\nu)\right]l_\nu^3(x),\quad l_{\nu,2}(x)=\frac{1}{2}(x-x_\nu)^2\,l_\nu^3(x), \end{aligned} \tag{5. 3}$$

i. e. we obtain (5. 1) with

$$\lambda_\nu^{(0)}=\int_{-1}^{+1}l_{\nu,0}(x)\,dx,\quad \lambda_\nu^{(1)}=\int_{-1}^{+1}l_{\nu,1}(x)\,dx,\quad \lambda_\nu^{(2)}=\int_{-1}^{+1}l_{\nu,2}(x)\,dx. \tag{5. 4}$$

§ 6. Now we raise again the question to determine those systems $(x_1,\ldots,x_n)$ of n different points for which the quadrature-formula (5. 1)—(5. 4) is valid for all polynomials of degree $\leqq 4n-1$. If B denotes this class of polynomials

---

8) The same formula was established also by Mr. I. RAISZ in an unpublished paper.

and $f_1(x)$, $f_2(x)$ denote any two members of the class B with

$$(6.1)\qquad f_1(x_\nu)=f_2(x_\nu),\ f_1'(x_\nu)=f_2'(x_\nu),\ f_1''(x_\nu)=f_2''(x_\nu)\qquad (\nu=1,2,\ldots,n),$$

then we must have

$$(6.2)\qquad \int_{-1}^{+1}(f_1(x)-f_2(x))\,dx=0.$$

Fixing $f_1(x)$ in B and choosing

$$(6.3)\qquad f_2(x)=f_1(x)+\omega^3(x)\,h(x)$$

where $h(x)$ is an arbitrary polynomial of degree $\leqq n-1$, $f_2(x)$ belongs obviously to the class B and satisfies (6.1); hence by (6.2) we must have

$$(6.4)\qquad \int_{-1}^{+1}\omega^3(x)\,h(x)\,dx=0$$

for all polynomials $h(x)$ of degree $\leqq n-1$. Since any two polynomials with the property (6.1) fulfill the relation (6.3), the condition (6.4) is necessary and sufficient to the validity of the quadrature-formula (5.1)—(5.4).

§ 7. Now we have to determine whether or not there is an $\omega(x)$ with the "higher orthogonality-property" (6.4). We suppose that such an $\omega(x)$ exists. We show first that all the zeros of $\omega(x)$ lie in the interior of the interval $[-1, +1]$ and are simple. To prove this by a classical argument we remark that from (6.4) obviously

$$(7.1)\qquad \int_{-1}^{+1}\omega^3(x)\,x^\nu\,dx=0\qquad (\nu=0,1,\ldots,n-1).$$

If $\omega(x)$ would have in the interior of $[-1, +1]$ only $k<n$ sign-changing places, say $-1<\zeta_1<\zeta_2<\ldots<\zeta_k<+1$, then we would have

$$\omega^3(x)\sum_{\nu=0}^{k}c_\nu x^\nu=\omega^3(x)\prod_{\nu=1}^{k}(x-\zeta_\nu)\geqq 0$$

in $[-1, +1]$ and hence

$$0<\int_{-1}^{+1}\omega^3(x)\prod_{\nu=1}^{k}(x-\zeta_\nu)\,dx=\sum_{\nu=0}^{k}c_\nu\int_{-1}^{1}\omega^3(x)\,x^\nu\,dx=0$$

owing to (7.1); an obvious contradiction. Hence $k=n$ and the assertion concerning the zeros of $\omega(x)$ is proved. This implies of course that the coefficients of $\omega(x)$ are all real too. Since any polynomial $\pi_n(x)=x^n+\ldots+a_n$ may be written in the form $\pi_n(x)=\omega(x)+h(x)$ with an $h(x)$ of degree $\leqq n-1$ we have

$$\varDelta=\int_{-1}^{+1}|\pi_n(x)|^4\,dx-\int_{-1}^{+1}|\omega(x)|^4\,dx=\int_{-1}^{+1}[\omega(x)+h(x)]^2\,[\omega(x)+\bar h(x)]^2\,dx-\int_{-1}^{+1}|\omega(x)|^4\,dx$$

where $\bar h(x)$ denotes that polynomial whose coefficients are conjugate-complex to those of $h(x)$. Hence

$$(7.2)\quad \Delta = 2\int_{-1}^{+1} \omega^3(x)\,(h(x)+\bar{h}(x))\,dx + \int_{-1}^{1} [|h(x)|^2 + \omega(x)\,(h(x)+\bar{h}(x))]^2\,dx + \\ + 2\int_{-1}^{+1} |h(x)|^2\,\omega^2(x)\,dx.$$

But the first integral in (7. 2) is 0 owing to (6. 4) and hence we have $\Delta \geqq 0$; equality only in the case $h(x) \equiv 0$. *Hence if a polynomial $\omega(x)$ with property* (6. 4) *exists, then it minimizes the integral $I_4(\pi_n)$ of* (1. 1). But the existence and uniqueness of a solution of this extremal-problem was proved by JACKSON[4]). Hence we proved the following

Theorem I. *Among the quadrature-formulae* (5. 1) *valid for all polynomials $f(x)$ of degree $\leqq 3n-1$ there is exactly one choice of $(x_1, \ldots, x_n)$ for which the formula is valid for all polynomials of degree $\leqq 4n-1$. This $(x_1, \ldots, x_n)$-system consists of the n real distinct zeros in the interior of $[-1, 1]$ of that polynomial $\pi^*_{n,4}(x) = x^n + \ldots$ which minimizes the integral $I_4(\pi_n)$ of* (1. 1) *in the class* (1. 2).

§ 8. The generalisation of the quadrature-formula (5. 1) is immediate. Given any system of n distinct points $(x_1, \ldots, x_n)$ and n integers $m_1, m_2, \ldots, m_n$, HERMITE[5]) proved the existence and uniqueness of polynomials

$$l_{\nu 0}(x),\ l_{\nu 1}(x), \ldots, l_{\nu, m_\nu - 1}(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

each of degree $\leqq (m_1 + m_2 + \ldots + m_n - 1)$, such that

$l^{(h)}_{\nu k}(x_\mu) = 0$ for all ν, μ, k, h $(1 \leqq \nu \leqq n,\ 1 \leqq \mu \leqq n,\ 0 \leqq k \leqq m_\nu - 1,\ 0 \leqq h \leqq m_\mu - 1)$,

except for $\nu = \mu$ and $k = h$; in the latter case

$$l^{(k)}_{\nu k}(x_\nu) = 1.$$

Then we have the representation

$$(8.1)\quad f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu)\, l_{\nu 0}(x) + f'(x_\nu)\, l_{\nu 1}(x) + \ldots + f^{(m_\nu - 1)}(x_\nu)\, l_{\nu, m_\nu - 1}(x)],$$

valid for all polynomials of degree $\leqq (m_1 + \ldots + m_n - 1)$, for the difference of the expressions on both sides of (8. 1) is divisible by $(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2} \ldots (x-x_n)^{m_n}$, i. e. identical zero. Hence integrating (8. 1) over $[-1, +1]$ we obtain the quadrature-formula of L. TSCHAKALOFF[6])

---

4) D. JACKSON, On functions of closest approximation, *Transactions American Math. Society*, **22** (1921), pp. 117–128.

5) CH. HERMITE, Sur la formule d'interpolation de Lagrange, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **84** (1878), pp. 70—79.

6) L. TSCHAKALOFF, Über eine allgemeine Quadraturformel, *Comptes Rendus de l'Acad. Bulgare des Sciences*, **1** (1948), pp. 9–12. The point of his paper is a method for computation of the $\lambda_j^{(i)}$'s.

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(0)} + f'(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(1)} + \ldots + f^{(m_\nu-1)}(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(m_\nu-1)}]$$

valid for all polynomials of degree $\leqq (m_1 + \ldots + m_n - 1)$, which was the starting point of these investigations.

§ 9. Specializing $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = k$ we obtain the quadrature-formula

$$(9.\ 1) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(0)} + f'(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(1)} + \ldots + f^{(k-1)}(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(k-1)}],$$

valid for all polynomials $f(x)$ of degree $\leqq kn-1$. In this case the functions $l_{\nu j}(x)$ of § 8 can explicitly be represented following FEJÉR's procedure[2]) and so the quantities $\lambda_\nu^{(j)}$. Asking by which choice of the x_ν's the formula (9. 1) will be exact for all polynomials $f(x)$ of degree $\leqq (k+1)\,n-1$ we obtain similarly that there is no real system $(x_1, \ldots, x_n)$ if k is even, and for odd k if and only if $x_1, \ldots, x_n$ are the zeros of the minimizing polynomial $\pi^*_{n,k+1}(x)$ of § 1.

§ 10. Is this result compatible with the theorem of Gauss—Jacobi, explained in § 2 which corresponds to the special case $k-1$? It is a well-known property of the nth Legendre-polynomial (2. 3) that, when properly normalized, it minimizes the integral $I_2(\pi_n)$ of (1. 1). Hence our results constitute a generalization of GAUSS—JACOBI's theorem.

§ 11. All these considerations can be applied to the theory of mechanical quadrature of MEHLER—CHRISTOFFEL—CHEBYSHEV—STIELTJES, where a weight-function is permitted, i. e. of quadrature-formulae of the type

$$(11.\ 1) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,p(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\,\lambda_\nu^{(0)}$$

where the $\lambda_\nu^{(0)}$'s are independent of $f(x)$ but dependent in general on $p(x)$. The theorems so obtained will not be formulated explicitly except in the case

$$(11.\ 2) \qquad p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

In this case — as S. BERNSTEIN discovered[7]) — the Chebyshev-polynomial $T_n(x)$ with

$$(11.\ 3) \qquad T_n(\cos\vartheta) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\vartheta$$

minimizes *all* functionals

---

[7]) S. BERNSTEIN, Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini, *Journal de Math.*, (9) **9** (1930), pp. 127—177 et (9) **10** (1931), pp. 219—286.

$$J_k(\pi_n)=\int_{-1}^{+1}\frac{|\pi_n(x)|^k}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (k\geqq 1,\text{ fixed}) \tag{11.4}$$

in the class (1.2). Hence we obtained the following new property of the zeros of $T_n(x)$:

Theorem II. *Given an arbitrary odd integer k we can determine the numbers $\lambda_\nu^{(j)}$ so that quadrature-formula*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{n}\Big[f\Big(\cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi\Big)\lambda_\nu^{(0)}+f'\Big(\cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi\Big)\lambda_\nu^{(1)}+\\ +\ldots+f_\nu^{(k-1)}\Big(\cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi\Big)\lambda_\nu^{(k-1)}\Big]\end{aligned} \tag{11.5}$$

is valid for all polynomials $f(x)$ of degree $\leqq (k+1)n-1$.

§ 12. These results make desirable to find an explicit expression of the extremal-polynomials $\pi_{n,k}^*(x)$ (for all $k\geqq 1$) which minimize (1.3) with k instead of $2l$ in the class (1.2) or develop a similar asymptotical theory of them which exists[8]) in the case $k=2$. As to the explicit representation the following cases are only known to me.

$k=1$. The minimizing polynomial is the polynomial $U_n(x)$ with

$$U_n(\cos\vartheta)=\frac{1}{2^n}\,\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

(Result of KORKINE and ZOLOTAREFF.)

$k=2$. The minimizing polynomial is the nth Legendre-polynomial.

$k=+\infty$. The minimizing polynomial is the polynomial $T_n(x)$ of (11.3). (Classical result of CHEBYSHEV.)

As to the asymptotical theory of these polynomials little is known. Among the four main questions of the theory, namely

a) asymptotic behaviour on the segment $[-1,+1]$,

b) asymptotic behaviour outside the segment $[-1,+1]$,

c) asymptotic determination of the individual zeros,

d) uniform distribution of the zeros,

only the last one is in a somewhat satisfactory shape. As we have shown[9]), the zeros of $\pi_{n,k}^*(x)$ are "uniformly-distributed on the unit-circle" in the sense that writing them in the form (k and n fixed)

$$x_\nu=x_{\nu,n}=\cos\vartheta_{\nu,n}=\cos\vartheta_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

we have for all $0\leqq\alpha<\beta\leqq\pi$

[8]) See e. g. G. SZEGŐ, *Orthogonal polynomials* (New York, 1939).

[9]) P. ERDŐS and P. TURÁN, On the uniformly dense distribution of certain sequences of points, *Annals of Math.*, 41 (1940), pp. 162–173.

$$\left| \sum_{\alpha \leqq \vartheta_\nu \leqq \beta} 1 - \frac{\beta - \alpha}{\pi} n \right| < c(k) \sqrt{n \log n}.$$

As to the question *b)* we obtained certain results, but — as Prof. G. SZEGŐ mentioned in a conversation — he has found a sharper asymptotical formula for $\pi^*_{n,k}(z)$ outside the interval $[-1, +1]$. Essentially the same is quite recently announced by GERONIMUS [10]).

§ 13. Finally we return to the quadrature-formula (5. 1). FEJÉR[1]) has shown the importance of the fact that the Cotes-numbers λ_ν in (2. 1) are non-negative in some cases. The same advantages can be derived for the quadrature-formula (5. 1) if the numbers $\lambda_\nu^{(0)}$, $\lambda_\nu^{(1)}$, $\lambda_\nu^{(2)}$ are non-negative. In what follows I shall show that if the x_ν's are the zeros of $\pi^*_{n,4}(x)$, then

(13. 1) $$\lambda_\nu^{(2)} > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

The corresponding questions for $\lambda_\nu^{(0)}$ and $\lambda_\nu^{(1)}$ remain open.

To prove the assertion (13. 1) we remark that from (5. 3) and (5. 4)

$$\lambda_\nu^{(2)} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (x - x_\nu)^2 l_\nu^4(x)\, dx = \frac{1}{2[\omega'(x_\nu)]^3} \int_{-1}^{+1} \omega^3(x) \frac{1 - l_\nu(x)}{x - x_\nu} dx.$$

But $[1 - l_\nu(x)]/(x - x_\nu)$ is obviously a polynomial of degree $n-2$, i. e., from the orthogonality-property (6. 4), the last integral is 0. Hence

$$\lambda_\nu^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (x - x_\nu)^2 l_\nu^4(x)\, dx > 0. \qquad \text{Q. e. d.}$$

(Received August 8, 1949.)

---

[10]) JA. L. GERONIMUS, On asymptotic properties of polynomials deviating least from zero in the space L^p_σ, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **62**. (1948), pp. 9—12. I know this paper only from its review in the *Math. Reviews*.

Another proof of the Gödel—Rosser incompletability theorem.

By LÁSZLÓ KALMÁR in Szeged.

In a paper[1]) which became a source of a series of investigations, GÖDEL has proved a theorem to the effect that for every postulate system satisfying some very general conditions, there is an arithmetical problem unsolvable in that system. One of the conditions for the postulate system requires not only its non-contradictoriness, i. e. the absence of two theorems one of which is the negation of the other, but also its ω-consistency, i. e. the absence of an enumerable series of theorems, one stating that some positive integer has a given property while the others state in succession that 0 does not have that property, 1 does not have that property, etc. While non-contradictoriness is a natural condition for in a contradictory system (containing some parts of logic, e. g. those allowing to form indirect proofs) everything can be proved, hence there are no unsolvable problems, ω-consistency is regarded a rather sophisticated condition. Hence it was a great progress that ROSSER succeeded[2]) in replacing the condition of ω-consistency by non-contradictoriness.

In this paper I shall give a simplified proof for ROSSER's theorem using, with appropriate modifications, the method by which I proved GÖDEL's theorem[3]). At the same time, I shall present the proof with the same degree of generality as I did that of GÖDEL's theorem in two recent publications[4]),

---

[1]) K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **38** (1931), p. 173—198.

[2]) B. ROSSER, Extensions of some theorems of Gödel and Church, *Journal of symbolic logic*, **1** (1936), p. 87—91, especially theorem II, p. 89. See also D. HILBERT and P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*. II (Berlin, 1939), p. 275—276.

[3]) L. KALMÁR, *a)* Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára, *Mat. és fiz. lapok*, **50** (1943), p. 1—23; *b)* Eine einfache Konstruktion unentscheidbarer Sätze in formalen Systemen, forthcoming in *Methodos*; and see footnote [4]).

[4]) L. KALMÁR, *a)* Une forme du théorème de Gödel avec des hypothèses minimales, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **229** (1949), p. 963—965; *b)* Quelques formes générales du théorème de Gödel, *ibidem*, **229** (1949), p. 1047—1049.

i. e. without making use of the deductive structure of the postulate system in question. This enables me to formulate the proof without supposing any concept of symbolic logic so that it can be understood without preliminary knowledge.

1. Let us call a *theory*[5]) any ordered triad $\Theta=(A, P, \varkappa)$ formed of two arbitrary sets A and P and a function $\varkappa$ of one variable defined over P and taking elements of A as values.

We call the elements of A *assertions*[6]) or *propositions*, those of P *proofs*. If $\mathbf{a}=\varkappa(\mathfrak{p})$ $(\mathbf{a}\in A,\ \mathfrak{p}\in P)$, we call $\mathbf{a}$ the *conclusion* of $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{p}$ *a proof* of $\mathbf{a}$. A proposition which is the conclusion of a proof is called a *theorem* in Θ.

2. In this paper, we shall deal with special theories which we call *Rosser theories*. A Rosser theory is a theory Θ satisfying the conditions (a) to (e) below.

(a) Θ has to be *adequate to express negation*; i. e. a function ν of one variable has to exist, defined for some propositions and taking propositions as values. Moreover, $\nu(\mathfrak{p})=\nu(\mathfrak{q})$ has to imply $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$.

If $\nu(\mathbf{a})$ is defined, we call $\mathbf{a}$ a *deniable* proposition and we call $\nu(\mathbf{a})$ the *negation* of $\mathbf{a}$, or the *contrary assertion* to $\mathbf{a}$; also $\mathbf{a}$ is called the contrary assertion to $\nu(\mathbf{a})$. Instead of $\nu(\mathbf{a})$, we shall write $\overline{\mathbf{a}}$. The theory Θ is called *contradictory* if for a deniable proposition $\mathbf{a}$, both $\mathbf{a}$ and $\overline{\mathbf{a}}$ are theorems in Θ; it is called *non-categorical* if for a deniable proposition $\mathbf{a}$, neither $\mathbf{a}$ nor $\overline{\mathbf{a}}$ is a theorem in Θ.

(b) Θ has to be *adequate to express precedence relation as well as its negation*; i. e. a set F has to exist and a function of three variables $\mathbf{a}=\pi(\mathbf{f}, k, l)$ defined for $\mathbf{f}\in F$ and for non-negative integers k, l, and taking deniable propositions as values. Moreover, $\pi(\mathbf{f}, k, l)=\pi(\mathbf{g}, i, j)$ has to imply $\mathbf{f}=\mathbf{g}$, $k=i$, $l=j$; and $\pi(\mathbf{f}, k, l)$ has always to differ from $\overline{\pi(\mathbf{g}, i, j)}$.

We call the elements of F *functionals*. Instead of $\pi(\mathbf{f}, k, l)$ we shall write $k \prec_{\mathbf{f}} l$ (read: k precedes l in the course of values of $\mathbf{f}$); we call such

---

5) I avail myself of this very convenient term, introduced for a slightly different purpose by A. Chauvin, Structures logiques, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **228** (1949), p. 1085—1087. I do not say "postulate system" for I do not suppose that a theory is based on postulates; I do not say "formal system" for I do not suppose that a theory is formalized; I do not say "logic" for I do not suppose that a theory admits the usual logical inferences.

6) Of course, the theorems to be proved are true also if A is (e. g.) the complex plane, P the unit circle and $\varkappa$ a function analytical in the unit circle, provided the below conditions are fulfilled (as to the condition (d), see footnote [12])). Nevertheless, I use the terms "assertion," "proof" etc. for the only interesting cases of the theorems to be proved I know are those in which the elements of A are assertions indeed, those of P proofs etc. in the everyday sense; at least, I cannot regard the fact that neither of two values which are in a certain relation are taken by a function as surprising and so as interesting as the fact that neither of two contrary assertions can be proved in a theory.

a proposition a *precedence assertion* or a *positive precedence assertion*, its negation $\overline{k \prec_{\mathbf{f}} l}$ a *negative precedence assertion*.

(c) Θ has to be an *interpreted* theory; i. e. to each[7]) functional an arithmetical function[8]) has to be attached, called its *interpretation*.

If an arithmetical function φ is the interpretation of a functional $\mathbf{f}$, we say, φ is *representable* in Θ and we call $\mathbf{f}$ a[9]) *representation* of φ. A non-negative integer j is called a *counter-example* for a precedence assertion $k \prec_{\mathbf{f}} l$ and also for the negation $\overline{l \prec_{\mathbf{f}} k}$ of the converse precedence assertion $l \prec_{\mathbf{f}} k$ if we have[10])

$$\varphi(0) \neq k,\ \varphi(1) \neq k, \ldots, \varphi(j-1) \neq k,\ \varphi(j) = l$$

for the interpretation φ of the functional $\mathbf{f}$. A positive or a negative precedence assertion is called *false* if there is a counter-example for it[11]). The theory Θ is called *incorrect* if a false, positive or negative, precedence assertion is a theorem in it.

(d) Θ has to be an *enumerable* theory, i. e. its functionals as well as its proofs[12]) have to form a finite or an enumerable infinite set.

Consider a one-to-one correspondence ψ between the functionals of Θ and a subset of the *positive* integers (0 excluded!) as well as a one-to-one correspondence χ between the proofs of Θ and a subset of the positive integers. We call the positive integer attached to a functional by ψ or to a proof by χ is *Gödel number*. A positive or negative precedence assertion of the form $2i-1 \prec_{\mathbf{f}} 2i$ or $\overline{2i-1 \prec_{\mathbf{f}} 2i}$ for which i is the Gödel number of the

---

7) For applications to particular theories, it would be convenient to loosen this condition by requiring an interpretation for *some* functionals only; however, this would have the same effect as to replace F by a subset of F.

8) We call a function *arithmetical* if it is defined for non-negative integers and takes non-negative integers as values.

9) Of course, an arithmetical function can have several representations. In general, it is a hard problem to decide if two different functionals represent the same arithmetical function.

10) For $j=0$, read $\varphi(j)=l$.

11) It would be natural to define a precedence assertion $k \prec_{\mathbf{f}} l$ to be false also in the case that neither k nor l is a value of the interpretation φ of $\mathbf{f}$; and to define a (positive or negative) precedence assertion to be *true* if and only if its contrary is false. Then, $k \prec_{\mathbf{f}} l$ would be true if (a) k and l are values of φ and the least integer j for which $\varphi(j)=k$ is less than the least integer i for which $\varphi(i)=l$; (b) k is a value of φ, l not; and it would be false in the other cases, i. e. if (c) k and l are values of φ and the least integer j for which $\varphi(j)=k$ is greater than or (in the case $k=l$) equal to the least integer i for which $\varphi\, i)=l$; (d) l is a value of φ, k not; (e) neither k nor l is a value of φ. However, I do not need more of the concept of truth and falsehood of precedence assertions than defined above.

12) One could loosen this condition by requiring only that the functionals, and for an appropriate correspondence between the functionals and the positive integers, the diagonal proofs and disproofs (as defined below) form a finite or enumerable infinite set.

functional $\mathbf{f}$ is called a *diagonal proposition* (a positive or a negative one, respectively); the integer i is called its *index*. A proof the conclusion of which is a diagonal proposition is called a *diagonal proof* or a *diagonal disproof* according as its conclusion is positive or negative; the index of its conclusion is called the *index* of the diagonal proof or disproof too. The arithmetical function[13])

$$\varrho(m)=\begin{cases} 2i & \text{if the proof of Gödel number } m \text{ exists and is a diagonal proof of index } i, \\ 2i-1 & \text{if the proof of Gödel number } m \text{ exists and is a diagonal disproof of index } i, \\ 1 & \text{if the proof of Gödel number } m \text{ does not exists or is neither a diagonal proof nor a diagonal disproof} \end{cases}$$

is called the *index function* of Θ (belonging to the correspondences ψ and χ).

(e) Θ has to be *adequate to express its own index function*, i. e., for an appropriate choice of the correspondences ψ and χ, its index function has to be representable in Θ.[14])

3. Now we have the following

First form of the theorem of Rosser. *A Rosser theory is either contradictory or incorrect or non-categorical.*

Indeed, let $\mathbf{g}$ be the representation of the index function ϱ of a Rosser theory Θ and denote r its Gödel number. Consider the diagonal propositions $2r-1 \prec_{\mathbf{g}} 2r$ and $\overline{2r-1 \prec_{\mathbf{g}} 2r}$ of index r. If

$2r-1 \prec_{\mathbf{g}} 2r$	$\overline{2r-1 \prec_{\mathbf{g}} 2r}$

is a theorem in Θ, denote $\mathfrak{p}$ one of its proofs and s the Gödel number of $\mathfrak{p}$. Then $\mathfrak{p}$ is a diagonal

proof	disproof

of index r. By the definition of ϱ, we have

$\varrho(s)=2r.$	$\varrho(s)=2r-1.$

If for a positive integer $t<s$ we have

$\varrho(t)=2r-1,$	$\varrho(t)=2r,$

then, by the definition of ϱ, the proof $\mathfrak{q}$ of Gödel number t must exist and be a diagonal

disproof	proof

---

[13]) By definition, we have $\varrho(0)=0$ for 0 is not the Gödel number of any proof.

[14]) For the theories considered by ROSSER (l. c.) and for the theories which are in general use in mathematics (e. g. the Peano postulate system for arithmetic, the Zermelo—Fraenkel postulate system for set theory, etc.) one shows easily be means of an enumeration method due to GÖDEL that, for an appropriate choice of the correspondences ψ and χ, their index functions are recursive or even elementary (see l. c. [3]) *a)*, or [3]) *b)*, footnote [9])), and, as easily seen, every elementary (or even recursive) function is representable in them; hence, condition (e) is fulfilled for these theories.

of index r, for

$2r-1 \neq 0$,	$2r \neq 0$,

the integer 0 being

even.	not the Gödel number of any functional.

Thus the conclusion of $\mathfrak{q}$, the

negative	positive

diagonal proposition of index r, i. e.

$\overline{2r-1 \prec_g 2r}$,	$2r-1 \prec_g 2r$,

is also a theorem in Θ and Θ is *contradictory.* If, on the contrary, we have

$\varrho(t) \neq 2r-1$	$\varrho(t) \neq 2r$

for $t=1, 2, \ldots, s-1$ (and, on account of $\varrho(0)=0$, for $t=0$ too), then we have the counter-example s for the theorem

$2r-1 \prec_g 2r$	$\overline{2r-1 \prec_g 2r}$

and Θ is *incorrect.* If neither $2r-1 \prec_g 2r$ nor $\overline{2r-1 \prec_g 2r}$ is a theorem in Θ, then Θ is *non-categorical.*

4. The case that the theory Θ is incorrect can be eliminated (i. e. replaced by contradictoriness) if we make some more conditions enabling us to prove, by means of a counter-example for a positive or negative precedence assertion, the contrary assertion. Thus we call a theory Θ a Rosser theory in the strong sense if, besides being a Rosser theory, it is satisfying the conditions (f) to (h) below.

(f) Θ has to be *adequate to express equality as well as inequality;* i. e. a set N has to exist and two functions $\mathbf{a}=\varepsilon(\mathbf{n}, k)$ and $\mathbf{n}=\nu(\mathbf{f}, l)$ of two variables, the former defined for $\mathbf{n} \in N$ and for non-negative integers k, and taking deniable propositions as values, whereas the latter defined for functionals $\mathbf{f}$ and for non-negative integers l, and taking elements of N as values.

We call the elements of N *numerals.* Instead of $\varepsilon(\mathbf{n}, k)$, we shall write $\mathbf{n}=k$; we call such a proposition an equation, its negation $\overline{\mathbf{n}=k}$, which we shall write $\mathbf{n} \neq k$, an *inequality.* Instead of $\nu(\mathbf{f}, l)$, we shall write $\mathbf{f}(l)$; we call such a numeral a *function value.*

(g) Θ has to be *deductively interpreted;* i. e. for any functional $\mathbf{f}$, for its representation φ and for any non-negative integer l, the equation[15] $\mathbf{f}(l)=\varphi(l)$, and for any non-negative integer $k \neq \varphi(l)$, the inequality $\mathbf{f}(l) \neq k$ have to be theorems in Θ.

(h) Θ has to *admit inference from a counter-example for a positive or negative precedence assertion to the contrary assertion;* i. e., for any functional $\mathbf{f}$ and for any non-negative integers j, k, l for which $\mathbf{f}(0) \neq k$, $\mathbf{f}(1) \neq k, \ldots,$ $\mathbf{f}(j-1) \neq k$, and $\mathbf{f}(j)=l$ are theorems in Θ, the same has to hold for the propositions $l \prec_{\mathbf{f}} k$ and $\overline{k \prec_{\mathbf{f}} l}$.

---

[15]) $\mathbf{f}(l)=\varphi(l)$ is an equation indeed, for $\mathbf{f}(l)$ is a numeral and $\varphi(l)$ is a non-negative integer.

5. Now we have the following

Second form of the theorem of Rosser. *A Rosser theory in the strong sense is either contradictory or non-categorical.*

Indeed, let Θ be a Rosser theory in the strong sense. By the first form of the theorem of ROSSER, Θ is either contradictory or incorrect or non-categorical. In the case Θ is incorrect, there is a theorem in Θ which is a false positive or negative precedence assertion; i. e. it has either the form $k \prec_{\mathbf{f}} l$ or the form $\overline{l \prec_{\mathbf{f}} k}$ with non-negative integers k, l and a functional $\mathbf{f}$ for which we have for some non-negative integer j

$$\varphi(0) \neq k,\ \varphi(1) \neq k, \ldots, \varphi(j-1) \neq k,\ \varphi(j) = l,$$

φ denoting the interpretation of f. By (g) we see that

$$\mathbf{f}(0) \neq k,\ \mathbf{f}(1) \neq k, \ldots, \mathbf{f}(j-1) \neq k,\ \mathbf{f}(j) = l$$

are theorems in Θ; hence, by (h), $l \prec_{\mathbf{f}} k$ and $\overline{k \prec_{\mathbf{f}} l}$ are also theorems in Θ and thus, Θ is contradictory.

(Received December 9, 1949)

Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene.

Von PAUL SZÁSZ in Budapest.

Nach den Arbeiten von L. GÉRARD[1]), H. LIEBMANN[2]) und W. H. YOUNG[3]) hat neuerdings O. PERRON[4]) für die Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene einen wesentlich kürzeren Weg eröffnet.

In vorliegender Arbeit wird wieder eine andere Herleitung angegeben. Sie stützt sich auf die Untersuchungen von M. RÉTHY[5]) und CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN[6]). Bei dieser Beweisanordnung wird, wie bei W. H. YOUNG, aus der hyperbolischen Elementargeometrie nur der Satz als bekannt vorausgesetzt, nachdem die Winkelsumme im Dreieck kleiner als π ist. Mit Bogenlängen haben wir dagegen nichts zu tun.

§ 1. Einführung der Streckenfunktion $K(r)$.

Wir legen unserer Darstellung den folgenden Satz zugrunde, der vom Parallelenaxiom unabhängig ist.

Satz I. *Sind die Winkel $\sigma > \sigma'$ Zentriwinkel im Kreise mit den entsprechenden Sehnen s und s', so besteht die Ungleichung*

$$\sigma' : \sigma < s' : s. \tag{1}$$

---

1) L. GÉRARD, *Sur la géométrie non-euclidienne*, Thèse (Paris, 1892).

2) H. LIEBMANN, Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Math.-phys. Klasse*, **59** (1907), S. 187–210.

3) W. H. YOUNG, On the Analytical Basis of Non-Euclidian Geometry, *American Journal of Mathematics*, **33** (1911), S. 249–286.

4) O. PERRON, Neuer Aufbau der nichteuklidischen (hyperbolischen) Trigonometrie, *Math. Annalen*, **119** (1944), S. 247–265.

5) M. RÉTHY, A három méretű homogén tér (u. n. nem euklidikus) síktani trigonometriája, *Értekezések a matematikai tudományok köréből*, **6** (1875), No. 7, S. 1–25; Die Fundamentalgleichungen der nichteuklidischen Geometrie auf elementarem Wege abgeleitet, *Archiv der Math. und Phys.*, **58** (1876), S. 416–423.

6) CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, Sur la géométrie non euclidienne, *Mathesis*, (2) **5** (1895), Suppl. V, S. 6–15.

Zum Beweise dieses Satzes schicken wir einen Hilfssatz voran.

Hilfssatz 1. *Wird auf dem Kreisbogen $\widehat{AP}$ ein Punkt Q von P verschieden gewählt und der Bogen $\widehat{PQ}$ mit H halbiert, so ist*

$$2AH > AP + AQ. \tag{2}$$

Das sieht man so ein: Sind P', Q', H' die Mitten der Bogen $\widehat{AP}$, $\widehat{AQ}$, $\widehat{AH}$ mit dem Mittelpunkt O und sind M, N, R die Schnittpunkte der Geraden $P'O$, $Q'O$, $H'O$ mit den Sehnen AP, AQ, AH, so sind augenscheinlich

$$2AM = AP,\ 2AN = AQ,\ 2AR = AH \tag{3}$$

und

$$\sphericalangle AMP' = \sphericalangle ANQ' = \sphericalangle ARH' = 90^0. \tag{4}$$

AH möge die Gerade $P'O$ bzw. $Q'O$ im Punkte S resp. T schneiden. Der Bogen $\widehat{P'Q'}$ wird von H' offenbar halbiert, infolgedessen ist $H'O$ die Mittelsenkrechte der Strecke $P'Q'$. Und da ferner $\sphericalangle P'Q'O = \sphericalangle Q'P'O$ ist und nach (4) die Gerade AH im Punkte R auf $H'O$ senkrecht steht, folgt aus Symmetriegründen die Streckengleichheit $RS = RT$. Daher ist $2AR = AS + AT$. Da aber auf Grund von (4) die Ungleichungen $AS > AM$, $AT > AN$ bestehen, folgt aus dieser Gleichung $2AR > AM + AN$. Damit ist mit Rücksicht auf (3) die Ungleichung (2) bewiesen. (Fällt Q mit A zusammen, also $AQ = 0$, so ist (2) unmittelbar klar.)

Auf Grund dieses Hilfssatzes läßt sich Satz I wie folgt beweisen. Wir betrachten auf einem Kreisbogen $\widehat{AB}$ einen Zwischenpunkt C. Es genügt offenbar, die Ungleichung

$$\widehat{AC} : \widehat{AB} < AC : AB \tag{1*}$$

nachzuweisen. (Links steht das Verhältnis der Bogen $\widehat{AC}$ und $\widehat{AB}$, von Bogenlängen ist hierbei keine Rede.)

Sind die Bogen $\widehat{AB}$ und $\widehat{AC}$ kommensurabel, so kann $\widehat{AB}$ in n gleiche Teile derart geteilt werden, daß einer der Teilungspunkte mit C zusammenfällt. Es sei diese Einteilung $\widehat{P_0P_1} = \widehat{P_1P_2} = \ldots = \widehat{P_{n-1}P_n}$ $(P_0 \equiv A,\ P_n \equiv B)$ und P_ν möge mit C zusammenfallen. Nach Hilfssatz 1 gelten die Ungleichungen $2AP_i > AP_{i-1} + AP_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Daraus folgt, daß $AP_1 > \frac{1}{2} AP_2 > \frac{1}{3} AP_3 > \ldots > \frac{1}{n} AP_n$. Folglich ist $\frac{1}{\nu} AC = \frac{1}{\nu} AP_\nu > \frac{1}{n} AP_n = \frac{1}{n} AB$, d. h. $AC : AB > \nu/n$. Nach der Konstruktion ist aber $\widehat{AC} : \widehat{AB} = \nu/n$. Damit ist (1*) für diesen Fall bewiesen. Sind die Bogen $\widehat{AB}$ und $\widehat{AC}$ inkommensurabel, so werde der Punkt D auf $\widehat{BC}$ derart gewählt daß $\widehat{AD}$ und $\widehat{AB}$ kommensurabel ausfallen. Wir teilen $\widehat{AD}$ durch die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ in n gleiche Teile; C möge auf dem Bogen $\widehat{P_{\nu_n-1}P_{\nu_n}}$ liegen.

($P_0 \equiv A, P_n \equiv D$). Nach den Vorangehenden gilt $\widehat{AP_{\nu_n}} : \widehat{AD} \leqq AP_{\nu_n} : AD$ (Gleichheit, wenn $\nu_n = n$ ist), also umsomehr $\widehat{AC} : \widehat{AD} < AP_{\nu_n} : AD$. Daraus folgt im Falle $n \to \infty$ $\widehat{AC} : \widehat{AD} \leqq AC : AD$. Da aber die Bogen $\widehat{AD}$ und $\widehat{AB}$ kommensurabel sind, besteht noch $\widehat{AD} : \widehat{AB} < AD : AB$, und durch Multiplikation ergibt sich wieder (1*). Damit ist der Beweis des Satzes I fertig.

Wird ein gewisser Winkel als Einheit für die Winkelmessung angenommen und die Maßzahl eines jeden Winkels mit demselben Buchstaben bezeichnet wie der Winkel selbst, so hat die Ungleichung (1) auch die Form

$$s' : \sigma' > s : \sigma \tag{1**}$$

Satz II. *Bezeichnet σ bzw. s die Maßzahl eines Zentriwinkels im Kreise bzw. der entsprechenden Sehne, so strebt das Verhältnis $s : \sigma$ für $\sigma \to 0$ einem bestimmten positiven Grenzwert zu.* (Der natürlich von der Wahl der Einheiten abhängt.)

Beweis. Laut der Ungleichung (1**) wird das Verhältnis $s : \sigma$ bei Verkleinerung von σ vergrößert. Es ist also nur noch nachzuweisen, daß $s : \sigma$ von oben beschränkt bleibt.

Es sei ein gewisser Zentriwinkel α, der einem Bogen $\widehat{AB}$ entspricht, festgehalten. Für jeden Zentriwinkel σ kann α in n Teile, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ derart geteilt werden, daß jeder $\alpha_i < \sigma$ ausfällt. Bedeuten $s_1, s_2, \ldots, s_n$ die entsprechenden Sehnen, so gilt bekanntlich die Ungleichung

$$\min (s_i : \alpha_i) \leqq (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) : (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).$$

Da mit Rücksicht auf $\alpha_i < \sigma$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) wegen (1**) auch noch $s : \sigma < \min (s_i : \alpha_i)$ besteht und $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \alpha$ ist, gilt umsomehr $s : \sigma < (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) : \alpha$. Die Summe $s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ ist aber die Länge eines dem Kreisbogen $\widehat{AB}$ eingeschriebenen Linienzuges, also bekanntlich kleiner, als die Länge g eines festen, umgeschriebenen Linienzuges. Daher folgt die Abschätzung $s : \sigma < g : \alpha$ für jeden Zentriwinkel σ, w. z. b. w.

Dieser Grenzwert ist eine Funktion des Kreishalbmessers r. Wir bezeichnen diese Streckenfunktion mit $K(r)$, sie ist also durch die Formel

$$K(r) = \lim s : \sigma \qquad (\sigma \to 0) \tag{5}$$

erklärt, wobei σ die Maßzahl eines Zentriwinkels im Kreise mit dem Radius r und s die entsprechende Sehne bedeutet. Undzwar soll aus Zweckmäßigkeitsgründen σ die *analytische Maßzahl* des Winkels bedeuten, d. h. *die Einheit für die Winkelmessung sei so gewählt, daß sich für den rechten Winkel die Maßzahl $\frac{\pi}{2}$ ergibt.*

§ 2. Die Winkelfunktionen $S(x)$ und $C(x)$.

Satz III. *Auf dem einen Schenkel des Spitzwinkels A seien die Strecken $AB' < AB$, und es seien die Lote $B'C'$ und BC auf den anderen Schenkel gefällt. Dann gelten die Ungleichungen*

$$AC' : AC > AB' : AB > B'C' : BC, \text{ d. h. } B'C' : AB' < BC : AB,$$
$$AC' : AB' > AC : AB.$$

Diese Ungleichungen lassen sich nämlich auf Grund der nachstehenden Hilfssätze analog beweisen, wie die Ungleichung (1*) im § 1. Die Beweise dieser Hilfssätze sind bei W. H. Young (a. a. O. §§. 3, 10) zu finden.

Hilfssatz 2. *Wird unter den obigen Voraussetzungen die Strecke BB' mit F halbiert und auf AC das Lot FG gefällt, so gilt die Ungleichung $2FG < BC + B'C'$. (Auch dann, wenn $B' \equiv A$, also $B'C' = 0$ ist.)*

Hilfssatz 3. *Wird unter den obigen Voraussetzungen CC' mit M halbiert und in M auf AC die Senkrechte errichtet, die AB in N schneiden möge, so ist die Ungleichung $2AN < AB + AB'$ gültig. (Auch dann, wenn $B' \equiv A$, also $AB' = 0$ ist.)*

Infolge des Satzes III streben die Verhältnisse $BC : AB$ und $AC : AB$ bei festgehaltenem $\sphericalangle A$ für $AB \to 0$ je einem bestimmten endlichen Grenzwert zu. Diese Grenzwerte sind daher Funktionen des Spitzwinkels $x = \sphericalangle A$. Hierbei soll x wieder die analytische Maßzahl bedeuten. Diese Winkelfunktionen sollen mit $S(x)$ bzw. $C(x)$ bezeichnet werden (wie bei O. Perron, a. a. O.), d. h. wir setzen für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$S(x) = \lim BC : AB \quad (AB \to 0), \quad C(x) = \lim AC : AB \quad (AB \to 0). \tag{6}$$

Im ganzen Intervalle $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ist offenbar

$$S(x) < 1, \quad C(x) > 0. \tag{7}$$

§ 3. Der absolute Sinussatz von J. Bolyai in umgehüllter Form.

Der nachstehende Satz spielt in unseren weiteren Erörterungen eine entscheidende Rolle.

Satz IV. *Streben die Seiten des Dreiecks ABC gegen 0, so strebt seine Winkelsumme gegen π.*

Die Differenz $\pi - (\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C)$ heißt *Defekt* des Dreiecks und möge mit Def ABC bezeichnet werden. Wird die Seite AB mit D in zwei Teile geteilt, so ist offensichtlich Def ABC = Def ADC + Def DBC, d. h. der Defekt ist eine additive Größe. Der Satz IV drückt die Tatsache aus, daß Def ABC *mit den Seiten des Dreiecks gegen* 0 *strebt.*

Beweis. Wir können uns auf rechtwinklige Dreiecke beschränken, denn ein jedes Dreieck kann in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt werden.

Ein rechter Winkel mit dem Scheitel C sei durch eine Halbgerade halbiert und auf dieser sei ein Punkt P von C verschieden gewählt. Es seien von P aus auf die Schenkeln die Lote PQ und PR gefällt. Wird auf die Halbgerade CQ eine Strecke $CA < CQ$ und auf CR eine Strecke $CB < CR$ abgetragen, so ist auf Grund der Additivität des Defektes augenscheinlich $\operatorname{Def} ABC < \operatorname{Def} PCQ + \operatorname{Def} PCR = 2 \operatorname{Def} PCQ$. Für den Beweis des Satzes IV genügt es offenbar zu zeigen, daß

(8) $$\operatorname{Def} PCQ \to 0 \text{ für } CP \to 0.$$

Ausgegangen von einem Punkte P_0 mit dem Lot P_0Q_0, sei CQ_0 mit Q_1 halbiert und in Q_1 auf CQ_0 die Senkrechte errichtet, die CP_0 in P_1 schneiden möge. Dann ist $2 \operatorname{Def} P_1CQ_1 = \operatorname{Def} P_1CQ_0 < \operatorname{Def} P_0CQ_0$ und daher $\operatorname{Def} P_1CQ_1 < \frac{1}{2} \operatorname{Def} P_0CQ_0$. Durch Wiederholung dieser Konstruktion ergibt sich $\operatorname{Def} P_nCQ_n < \frac{1}{2^n} \operatorname{Def} P_0CQ_0$ und es besteht umsomehr $\operatorname{Def} PCQ < \frac{1}{2^n} \operatorname{Def} P_0CQ_0$, falls $CP < CP_n$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ findet sich aber ein n derart, daß $\frac{1}{2^n} \operatorname{Def} P_0CQ_0 < \varepsilon$ ausfällt, also folgt daraus die Limesbeziehung (8), w. z. b. w.

Satz V. *Streben die Seiten des Dreiecks ABC gegen 0 und streben gleichzeitig der Winkel C gegen $\frac{\pi}{2}$ und der Winkel A gegen x, so strebt $BC:AB$ gegen 0, 1, oder $S(x)$, je nachdem $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, oder $0 < x < \frac{\pi}{2}$.*

Beweis. Wir beweisen den Satz zuerst für den Spezialfall $\sphericalangle C = \frac{\pi}{2}$.

Im Falle $x = 0$ schließt man so. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es offenbar ein rechtwinkliges Dreieck AB^*C^* mit $\sphericalangle C^* = \frac{\pi}{2}$, in dem

(9) $$B^*C^* : AC^* < \varepsilon$$

ausfällt. Ist schon $\sphericalangle BAC < B^*AC^*$ und $AB < AC^*$, so denken wir die Dreiecke in der Weise aneinander gelegt, daß die Halbgeraden AC und AC^* zusammenfallen und beide Dreiecke an derselben Seite von AC liegen mögen. Die Gerade AB möge (auf Grund unserer Annahme) B^*C^* in B' schneiden. So ist $AC^* < AB'$ und a fortiori $AB < AB'$, also nach Satz III $BC:AB < < (BC:AB)(AB:AC) < (B'C^*:AB')(AB':AC^*) = B'C^*:AC^*$. Da aber nach unserer Annahme offenbar $B'C^* < B^*C^*$ ausfällt, besteht mit Rücksicht auf (9) umsomehr $BC:AB < \varepsilon$, also ist der Satz für diesen Fall bewiesen.

Ist $x = \frac{\pi}{2}$, d. h. $\sphericalangle A \to \frac{\pi}{2}$, so gilt nach Satz IV $\sphericalangle B \to 0$, also im Sinne der Vorangehenden $AC:AB \to 0$. Es ist aber $0 < AB - BC < AC$ und daher $0 < 1 - (BC:AB) < AC:AB$, also a fortiori $BC:AB \to 1$, wie behauptet wurde.

Es sei nun $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ein rechtwinkliges Dreieck $A'BC'$ mit $A'B = AB$ und $\sphericalangle BA'C' = x$ sei an Dreieck ABC gelegt derart, daß die Halbgeraden BC und BC' zusammenfallen und beide Dreiecke an derselben Seite von BC liegen mögen. Wird von A' auf die Gerade AC das Lot $A'D$ gefällt, so gibt es im Viereck $A'C'CD$ drei rechte Winkel, nämlich bei C', C, D, daher ist $\sphericalangle DA'C' < \frac{\pi}{2}$ (auf Grund des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck), also bekanntlich $CC' < DA'$ und umsomehr $CC' < AA'$. (Hier konnte vorausgesetzt werden, daß $\sphericalangle A \neq x$ ist, also A' mit A nicht zusammenfällt.) Folglich ist $|BC : AB - BC' : A'B| = CC' : AB < AA' : AB$. Bedeutet M die Mitte von AA', so kann diese Ungleichung in der Gestalt

$$(10) \qquad |BC : AB - BC' : A'B| < 2MA : AB$$

geschrieben werden. Wegen $AB = A'B$ ist aber $\sphericalangle ABM$ gleich der Hälfte von $\sphericalangle ABA' = |\sphericalangle ABC - \sphericalangle A'BC|$, und $\sphericalangle AMB = \frac{\pi}{2}$. Da nach Satz IV und infolge der Voraussetzung $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle A'BC$ gegen $\frac{\pi}{2} - x$ streben, so hat man $\sphericalangle ABM \to 0$, also nach dem oben bewiesenen

$$(11) \qquad MA : AB \to 0.$$

Nach der Definition von $S(x)$ (vgl. (6)) gilt andererseits $BC' : A'B \to S(x)$; aus (10) und (11) folgt daher $BC : AB \to S(x)$. Der Satz ist damit auch für diesen dritten Spezialfall bewiesen.

Der allgemeine Satz ist nunmehr leicht zu beweisen. Wird von B auf AC das Lot BD gefällt, so gilt für das Dreieck BCD nach der Voraussetzung $\sphericalangle BCD \to \frac{\pi}{2}$, also im Sinne der obigen strebt $BC : BD$ gegen 1. Für das Dreieck ABD strebt $BD : AB$ nach den Vorangehenden gegen 0, 1, oder $S(x)$, je nachdem $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, oder $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Durch Multiplikation folgt die Behauptung für $BC : AB$.

K o r o l l a r. *Es ist* $C(\frac{\pi}{2} - x) = S(x)$.

S a t z VI. *Wird* $S(\frac{\pi}{2}) = 1$ *und* $S(x) = S(\pi - x)$ *für* $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ *gesetzt, so bestehen für jedes Dreieck* ABC *mit den Bestimmungsstücken* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\sphericalangle A = \lambda$, $\sphericalangle B = \mu$, $\sphericalangle C = \nu$ *die Relationen* $S(\lambda) : K(a) = S(\mu) : K(b) = S(\nu) : K(c)$. (Absoluter Sinussatz von J. BOLYAI[7] in umgehüllter Form.)

B e w e i s. Wir lassen wie CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, a. a. O., bei festem AB den Winkel μ ein wenig wachsen und die Seite BC um B drehen, so daß ein Dreieck ABC' mit $BC' = a$, $\sphericalangle ABC' = \mu' > \mu$ entsteht. Auf die Seite $AC' = b'$ werde die Strecke $AC'' = b$ abgetragen. Da infolge $\mu' > \mu$ bekanntlich $b' > b$ ist, so fällt dabei C'' zwischen A und C' und es gilt $C'C'' = b' - b$. Wenn nun $\mu' \to \mu$, so gilt augenscheinlich $\sphericalangle C'C''C \to \frac{\pi}{2}$, und $\sphericalangle C'CC'' \to \nu$ oder $\pi - \nu$ je nachdem $\nu \leqq \frac{\pi}{2}$ oder $\nu > \frac{\pi}{2}$ ist, und die Seiten von Dreieck $C'CC''$ streben gegen 0. Aus dem Satz V und den Festsetzungen des Satzes VI folgt, daß $C'C'' : CC' = (b' - b) : CC' \to S(\nu)$. Laut

[7]) Vgl. J. BOLYAI, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, etc.* (Marosvásárhely, 1832), besonders § 25. (Unveränderter Neudruck, 1907.)

der Erklärung der Funktion $K(r)$ in (5) hat man aber $CC' : (\mu' - \mu) \to K(a)$, und aus diesen zwei letzten Limesrelationen folgt

(12) $$(b' - b) : (\mu' - \mu) \to K(a)\, S(\nu).$$

Wenn man bei festem BC mit der Seite AB ähnlich verfährt und das Dreieck CBA' mit $BA' = c$, $\sphericalangle CBA' = \mu'$ entsteht, so wird offenbar $CA' = AC' = b'$. Auf diese Weise ergibt sich daher für $\mu' \to \mu$ die Limesbeziehung

(13) $$(b' - b) : (\mu' - \mu) \to K(c)\, S(\lambda).$$

(12) und (13) ergeben $K(a)\,S(\nu) = K(c)\,S(\lambda)$ d. h. $S(\lambda) : K(a) = S(\nu) : K(c)$. Aus denselben Gründen besteht noch $S(\nu) : K(c) = S(\mu) : K(b)$, w. z. b. w.

Korollar. *Es ist* $S(\lambda) \neq 0$. Im Falle $\nu = \frac{\pi}{2}$ ist nämlich laut dem Satze $S(\lambda) = K(a) : K(c)$.

Für $S(x)$ gilt also nach (7) im ganzen Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ die Abschätzung

(14) $$0 < S(x) < 1.$$

§ 4. Berechnung der Funktionen $S(x)$ und $C(x)$.

Zur Berechnung der Funktionen $S(x)$ und $C(x)$ haben wir drei Sätze nötig. Mit Hilfe des Satzes VI beweisen wir zunächst den folgenden

Satz VII. *Für $r \to 0$ bzw. $x \to 0$ streben die Funktionen $K(r) : r$ und $S(x) : x$ gegen einem gemeinsamen endlichen Grenzwert ω.*

Beweis. Wir nehmen ein gleichschenkliges Dreieck ABB' mit $\sphericalangle BAB' = 2x$, $AB = AB' = r$. Die Seite BB' ist eine Funktion von x; man setze $BB' = 2s(x)$. M sei die Mitte von BB' d. h. $MB = MB' = s(x)$. Mit Rücksicht auf die Erklärung (5) der Funktion $K(r)$ gilt

(15) $$s(x)/x = 2s(x)/2x \to K(r) \text{ für } x \to 0.$$

Bei festgehaltenem x besteht für $r_1 < r$ wegen $\sphericalangle AMB = \frac{\pi}{2}$ und des Satzes III $s_1(x)/r_1 < s(x)/r$ oder mit x dividiert

(16) $$\frac{1}{r_1}\,\frac{s_1(x)}{x} < \frac{1}{r}\,\frac{s(x)}{x}.$$

Werden r und r_1 festgehalten, so gilt für $x \to 0$ infolge (15) $s_1(x)/x \to K(r_1)$, $s(x)/x \to K(r)$, aus (16) folgt also $K(r_1)/r_1 \leq K(r)/r$. Damit ist gezeigt, daß bei Verkleinerung von r das Verhältnis $K(r) : r$ nicht vergrößert wird. Es strebt daher für $r \to 0$ einem bestimmten endlichen Grenzwert ω zu.

Im Dreieck AMB ist wegen $\sphericalangle AMB = \frac{\pi}{2}$ nach dem Satze VI

$$S(x) = K(s(x)) : K(r) = [K(s(x)) : s(x)]\,[s(x) : K(r)],$$

also

(17) $$S(x) : x = [K(s(x)) : s(x)]\,[s(x) : x]\,[1 : K(r)].$$

Für $x \to 0$ gilt aber bei festem r offenbar $s(x) \to 0$, also nach dem obigen

$K(s(x)):s(x)\to\omega$. Aus (17) folgt daher mit Rücksicht auf (15) $\lim\limits_{x\to 0} S(x):x=\omega$, w. z. b. w.

Korollar. *Es ist* $\lim\limits_{r\to 0} K(r)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} S(x)=0$.

Satz VIII. *Die Funktionen* $S(x)$ *und* $C(x)$ *genügen der Funktionalgleichung* $S(2x)=2S(x)\,C(x)$.

Beweis. Wir betrachten nochmals ein gleichschenkliges Dreieck ABB' mit $AB=AB'$, $\sphericalangle BAB'=2x$. Wird von A auf BB' das Lot AM gefällt, so ist $\sphericalangle BAM=\sphericalangle B'AM=x$, $\sphericalangle AMB=\sphericalangle AMB'=\frac{\pi}{2}$. Hieraus folgt für $AB\to 0$ nach Satz IV $\sphericalangle AB'M\to\frac{\pi}{2}-x$. Wird noch von B auf AB' das Lot BN gefällt, so gilt daher nach Satz V und seinem Korollar $BN:BB'\to\to S(\frac{\pi}{2}-x)=C(x)$. Wegen $BB'=2BM$ können wir dieser Limesbeziehung auch die Form $(BN:AB)\,(AB:BM)\to 2C(x)$ geben. Da ferner nach der Definition (6) $BM:AB\to S(x)$, so ergibt sich $BN:AB\to 2S(x)\,C(x)$. Andererseits gilt wieder nach der Definition $BN:AB\to S(2x)$, folglich besteht der Satz.

Satz IX. *Es ist* $S(x)^2+C(x)^2=1$.

Beweis. Wir nehmen ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle C=\frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle A=x$. Wird von C auf AB das Lot CD gefällt, so ist

(18) $1=(AD:AB)+(DB:AB)=(AD:AC)\,(AC:AB)+(DB:BC)\,(BC:AB)$.

Hier gelten für $AB\to 0$ nach der Erklärung der Funktionen $C(x)$ und $S(x)$ die Relationen $AD:AC\to C(x)$, $AC:AB\to C(x)$, $BC:AB\to S(x)$. Da nach Satz IV $\sphericalangle ACD\to\frac{\pi}{2}-x$, d. h. $\sphericalangle BCD\to x$, so hat man wegen Satz V $DB:BC\to S(x)$. Aus (18) folgt daher die Behauptung.

Nun sind wir imstande, die Funktionen $S(x)$ und $C(x)$ zu berechnen.

Auf Grund der Abschätzung (14) können wir setzen $S(x)=\sin y(x)$ wobei $0<y(x)<\frac{\pi}{2}$ ist. Aus Satz IX folgt dann wegen $C(x)>0$ (vgl. (7)) $C(x)=\cos y(x)$, also nach Satz VIII ist $\sin y(2x)=\sin 2y(x)$. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergibt sich für $0<x<\frac{\pi}{2}$ $\sin y(x)=|\sin[2^n y(x/2^n)]|$. Auf Grund des Satzes VII und dessen Korollars folgt daraus im Falle $n\to\infty$ $S(x)=\sin y(x)=|\sin\omega x|$, also nach dem Korollar von Satz V $C(x)=|\sin\omega(\frac{\pi}{2}-x)|$. Hier ist aber nur $\omega=1$ möglich. Im Falle $\omega>1$ wäre nämlich $0<\pi/2\omega<\pi/2$, $S(\pi/2\omega)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ im Gegensatze zu $S(x)<1$ (vgl. (7)), im Falle $0<\omega<1$ wäre $0<\omega\pi/2<\pi/2$ also $\lim\limits_{x\to 0}[S(x)^2+C(x)^2]=\sin^2(\omega\pi/2)<1$, was dem Satze IX widerspricht, und der Fall $\omega=0$ ist unmöglich wegen $S(x)\neq 0$. Wir erhalten somit $S(x)=\sin x$, $C(x)=\cos x$.

Die Sätze VI und VII gehen daher in die folgenden über:

Satz VI*. *Für ein Dreieck ABC mit den Bestimmungsstücken* $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\sphericalangle A=\lambda$, $\sphericalangle B=\mu$, $\sphericalangle C=\nu$ *besteht* $\sin\lambda:\sin\mu:\sin\nu=K(a):K(b):K(c)$.

Satz VII*. *Für die Funktion* $K(r)$ *gilt die Grenzformel* $\lim\limits_{r\to 0} K(r)/r=1$.

§ 5. Die Grundformeln der hyperbolischen Trigonometrie.

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck ($\sphericalangle C=\pi/2$) mit den Bestimmungsstücken $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\sphericalangle A=\lambda$, $\sphericalangle B=\mu$. Mit Hilfe eines Kunstgriffes von M. Réthy (a. a. O.) ergibt sich auf Grund des Satzes VI* $K(2a)=2K(a)\cos\lambda/\sin\mu$. Daher ist $\cos\lambda/\sin\mu=\varphi(a)$ eine Funktion von a; wegen $\lambda+\mu<\pi/2$ ist gewiß $\varphi(a)>1$. M. Réthy (a. a. O.) zeigt noch, daß $K^2(a)/(\varphi^2(a)-1)=k^2$ $(k>0)$ eine Konstante ist. Die Funktionen $f(x)=K(x)/k$ und $\varphi(x)$ genügen also den Funktionalgleichungen $f(2x)=2f(x)\varphi(x)$, $\varphi^2(x)=f^2(x)+1$. Hier ist auf Grund des Satzes VII* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x=1/k$ und aus diesen Gleichungen ergeben sich demnach $K(x)=k\,\mathrm{sh}(x/k)$, $\varphi(x)=\mathrm{ch}(x/k)$. Mit Rücksicht auf den Satz VI* besteht daher folgender

Satz X. *Für das rechtwinklige Dreieck ABC* ($\sphericalangle C=\pi/2$) *mit den obigen Bestimmungsstücken gelten die Formeln*

$$\sin\lambda=\mathrm{sh}\,(a/k):\mathrm{sh}\,(c/k),\quad \cos\lambda:\sin\mu=\mathrm{ch}\,(a/k),$$

wobei k eine konstante Strecke bedeutet.

Dieser Satz hat schon die ganze hyperbolische Trigonometrie zur Folge.

(Eingegangen am 1. September 1949.)

Remarque sur les fonctions holomorphes.

Par MARCEL RIESZ à Lund (Suède).

1. Dans un travail commun, paru en 1921, MM. L. FEJÉR et F. RIESZ[1]) ont publié quelques résultats qui sont devenus très connus. Ils ont démontré entre autres choses que lors de la représentation conforme d'un cercle sur un domaine limité par une courbe de Jordan rectifiable de longueur l l'image de chaque diamètre a une longueur $\leqq \frac{1}{2} l$. La constante $\frac{1}{2}$ ne peut pas être abaissée.

M. GABRIEL[2]) a considéré un problème plus général et montré que, la fonction $f(x)$ étant holomorphe à l'intérieur et sur le contour C d'un cercle et Γ étant une courbe convexe fermée intérieure à C, on a l'inégalité

$$\int_{\Gamma} |f(x)|\,|dx| \leqq 2 \int_{C} |f(z)|\,|dz|. \tag{1}$$

La constante 2 ne peut pas être abaissée non plus.

On voit que le résultat de M. GABRIEL ne comprend pas celui de MM. FEJÉR et RIESZ. En effet un diamètre, parcouru deux fois, peut être considéré comme une courbe convexe fermée. Pour une telle courbe l'inégalité (1) est, d'après ce qu'on a dit au début, valable avec la constante 1. M. CARLSON a de son côté donné une inégalité d'une généralité remarquable qui comprend tous les résultats antérieurs. Voici le théorème de M. CARLSON[3]):

Soit $f(x)$ holomorphe à l'intérieur et sur le contour C d'un cercle et soit L une courbe rectifiable intérieure à C. On a l'inégalité

$$\int_{L} |f(x)|\,|dx| \leqq \frac{1}{\pi} \int |f(z)|\,V(z)\,|dz|, \tag{2}$$

[1]) L. FEJÉR und F. RIESZ, Über einige funktionaltheoretische Ungleichungen, *Math. Zeitschrift,* 11 (1921), p. 305—314.

[2]) R. M. GABRIEL, Some results concerning the integrals of moduli of regular functions along curves of certain types, *Proceedings London Math. Society,* 28 (1928), p. 121—127.

[3]) F. CARLSON, Quelques inégalités concernant les fonctions analytiques, *Arkiv för mat., astronomi och fysik,* 29 B, n° 11 (1943), p. 1—6.

où $V(z)$ est la borne supérieure de la somme des angles sous lesquels sont vus du point z les éléments d'arcs de L.[4])

En particulier, si l'inégalité $V(z) \leqq W$ est remplie pour tout point z de C, le second membre de (2) sera $\leqq \frac{W}{\pi} \int |f(z)| |dz|$. Si L est un diamètre de C, on a $W = \frac{\pi}{2}$, ce qui amène à l'inégalité de MM. FEJÉR et RIESZ. Le résultat de M. GABRIEL s'obtient, si l'on observe que, pour une courbe convexe fermée, on a toujours $W \leqq 2w \leqq 2\pi$, où w est l'angle le plus grand sous lequel on voit la courbe d'un point de C.

M. CARLSON déduit son théorème de l'inégalité suivante, dans laquelle l'intégrale est étendue au segment de droite AB joignant les points A et B intérieurs au cercle C,

$$\int_A^B |f(x)| |dx| \leqq \frac{1}{\pi} \int_C |f(z)| V(z) |dz|, \tag{3}$$

où $V(z)$ est l'angle sous lequel est vu le segment AB du point z. Cette inégalité, appliquée à des segments infinitésimaux, fournit le théorème plus haut.

Comme une contribution modeste au volume jubilaire dédié à MM. FEJÉR et RIESZ, nous déduirons les relations (équivalentes) (9) et (10, qui peuvent présenter un certain intérêt. De ces relations, on obtient immédiatement l'inégalité infinitésimale de M. CARLSON.

2. Après avoir introduit un système de coordonnés rectangulaires, désignons les points du plan par les nombres complexes correspondants et admettons que le centre du cercle C se trouve à l'origine. Soit $u(x)$ une fonction des coordonnés x' et x'' du point $x = x' + ix''$ qui est harmonique à l'intérieur de C et sur C. Désignons encore par z les points de C et posons

$$\arg z = \theta(z) = \theta \quad \text{et} \quad \arg (z - x) = \psi(z, x) = \psi. \tag{4}$$

Le potentiel de double couche

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_C u(z)\, d\psi \tag{5}$$

(où $d\psi$ est une abréviation pour $d_z\psi(z, x) = \frac{d}{d\theta} \psi(z, x)\, d\theta$ ou $= \frac{\partial}{\partial z} \psi(z, x)\, dz$) est évidemment harmonique à l'intérieur de C, puisqu'il en est ainsi de $\psi(z, x)$. Quand x tend vers un point z_0 de C d'une façon arbitraire, $g(x)$ tend manifestement vers

$$u(z_0) + \frac{1}{\pi} \int_C u(z)\, d_z\psi(z, z_0). \tag{6}$$

---

[4]) M. GABRIEL et M. CARLSON montrent, au moyen d'un artifice utilisé dans un but analogue par MM. FEJÉR et RIESZ (*loc cit.*, p. 307), que leurs résultats subsistent, si l'on remplace $|f|$ par $|f|^k$, $k > 0$.

Pour le voir, décomposons le contour C en deux arcs C' et C'', l'arc C' entourant le point z_0 et étant assez petit, pour que l'oscillation de $u(z)$ sur cet arc soit très petite. On décompose en même temps l'intégrale figurant dans (5) en deux parties, l'une étendue à C' et l'autre à C''. L'angle sous lequel est vu l'arc C' d'un point x, assez rapproché du point z_0, étant sensiblement égal à π, la partie de l'intégrale étendue à C' sera sensiblement égale à $u(z_0)$, tandis que la partie étendue à C'' sera sensiblement égale à l'intégrale figurant dans (6). Dès lors, l'énoncé ci-dessus se trouve vérifié.

Or l'angle périphérique $d_z\psi(z, z_0)$ est indépendant de z_0 et égal à $\frac{1}{2}d\theta(z)$; le dernier terme de (6) aura donc la valeur

$$\frac{1}{2\pi}\int_C u(z)\, d\theta(z) = u(0).$$

Il s'ensuit que la fonction $g(x)-u(0)$ tend vers $u(z_0)$, quand x tend vers z_0 d'une façon arbitraire. Une fonction harmonique étant déterminée par ses valeurs frontières, on conclut que $u(x)=g(x)-u(0)$, ou

$$u(x)=\frac{1}{2}\int_C u(z)\, d\psi - u(0) = \frac{1}{\pi}\int_C u(z)\left(d\psi - \frac{d\theta}{2}\right). \tag{7}$$ [5]

3. Appliquons maintenant cette formule à une fonction $F(x)$, holomorphe à l'intérieur de C et sur C. Nous aurons d'abord

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_C F(z)\, d\psi - F(0).$$

Désignons la dérivée $F'(x)$ de $F(x)$ par $f(x)$ et formons les dérivées par rapport à x *dans une direction déterminée*. Il vient

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_C F(z)\, d_z\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right). \tag{8}$$

Le premier membre étant indépendant de la direction de différentiation, il en est de même du second membre. Bien entendu il n'en est ainsi que pour l'intégrale elle-même, tandis que les éléments infinitésimaux de l'intégrale dépendent de la direction en question. Une intégration par parties donne

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_C F(z)\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial x}dz = -\frac{1}{\pi}\int_C f(z)\frac{\partial\psi}{\partial x}dz, \tag{9}$$

formule valable pour toute fonction $f(x)$ holomorphe à l'intérieur de C et sur C. Eu égard à (4), on a

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}dx = -\frac{\partial}{\partial x}\arg(z-x)\,dx = \frac{\partial}{\partial x}\arg(x-z)\,dx = d_x\arg(x-z).$$

---

[5]) *Cf.* É. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, vol. III, 2e édition (Paris, 1915), p. 185, formule (16).

Dès lors, on tire de (9)

$$f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_C f(z)\,d_x \arg(x-z)\,dz, \tag{10}$$

d'où il vient

$$|f(x)|\,dx \leqq \frac{1}{\pi}\int_C |f(z)|\,|d_x \arg(x-z)|\,|dz| \tag{11}$$

Or $|d_x \arg(x-z)|$ étant précisément l'angle sous lequel l'élément dx est vu du point z, la dernière inégalité est identique à la forme infinitésimale de l'inégalité (3) de M. Carlson.

(Reçu le 8 décembre 1949)

On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups.

By J. SZÉP in Budapest.

The results of the present paper given here are connected with the researches of L. RÉDEI[1]) on the generalization of the skew product *(schiefes Produkt)* introduced by him. I shall return to this connection in the detailed discussion. For a long time I believed that my researches are connected only with those of L. RÉDEI. Shortly before publication I learned that G. ZAPPA[2]) has arrived in 1940 at the relations (2), (3), (4) of the present paper in a similar way as I did.

* * *

In a previous paper[3]) I have published the following results:

Let the group $\mathfrak{G}$ be representable as the product of two proper subgroups $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$

(a) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}.$$

This means that each element of $\mathfrak{K}$ multiplied by each element of $\mathfrak{H}$ produces all elements of $\mathfrak{G}$ exactly once. It is well known that the necessary and sufficient condition for the fulfilment of (a) is, that the only common element of the subgroups $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ should be the unit element. For the order of the group $\mathfrak{G}$ the equality $(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{H})\cdot(\mathfrak{K})$ holds. Owing to the symmetrical position of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$, (a) implies

(b) $$\mathfrak{K}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}.$$

Let $H, H', \bar{H}, \ldots$ and $K, K', \bar{K}, \ldots$ denote elements of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$, respectively. Then by (b) we get a relation

(c) $$KH = H'K'.$$

---

[1]) L. RÉDEI, Die Anwendungen des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für die reine und angewandte Math.* (Under press.) In this paper, RÉDEI defines a group $\mathfrak{G}$ arising from two given groups $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ by relations which are essentially identical with the relations (2), (3), (4). He showed that this group $\mathfrak{G}$ has subgroups isomorphic to $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$, and that their orders satisfy the relation $(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{H})(\mathfrak{K})$. He gives a new proof, and partly an improvement, of our results contained in §§ 1—2.

[2]) G. ZAPPA, Costituzione dei gruppi prodotte di due dati sottogruppi permutabili tra loro, *Atti Secondo Congresso Unione Mat. Italiana Bologna* 1940, p. 115—125.

[3]) J. SZÉP, Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen, *Commentarii Math. Helvetici,* **22** (1948), p. 31–33.

where H' and K' are uniquely defined whenever both H and K are given. When H fixed, then K' together with K runs over all elements of $\mathfrak{K}$. We may thus associate with each H the following permutation of elements of $\mathfrak{K}$

$$H \longrightarrow \Pi_H = \binom{K}{K'}.$$

It is readily seen that $\Pi_H \Pi_{\bar{H}} = \Pi_{H\bar{H}}$ holds.

Theorem A: *The permutations Π_H of the elements of $\mathfrak{K}$ form a group $\Pi(\mathfrak{K})$ and $\mathfrak{H} \sim \Pi(\mathfrak{K})$. In this homomorphism to the unit element of $\Pi(\mathfrak{K})$ corresponds a maximal normal subgroup $\mathfrak{N}$ of $\mathfrak{G}$*[4]) *which is a normal subgroup of $\mathfrak{H}$ and*

$$\mathfrak{H}/\mathfrak{N} \cong \Pi(\mathfrak{K}).$$

In an exactly similar way, leaving K fixed in $H'K' = KH$, H' runs together with H over all elements of $\mathfrak{H}$. Again, we associate with the element K the permutation $\Pi_K = \binom{H}{H'}$ of the elements of $\mathfrak{H}$. As easily seen, $\Pi_{\bar{K}} \Pi_K = \Pi_{K\bar{K}}$.

Owing to the symmetry of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$, theorem A holds also if we change their rôle.

§ 1.

We shall introduce a new notation for the permutations Π and for H' and K' in (c):

$$KH = H^{[K]} K^{[H]}, \tag{1}$$

that is, we denote by $K^{[H]}$ the element K' into which K passes by the permutation $[H] = \Pi_H$. The notation $H^{[K]}$ should be understood in a similar way.

By (1), the product of two elements of $\mathfrak{G}$ may be written as

$$HKH'K' = HH'^{[K]} K^{[H']} K'. \tag{2}$$

The elements of $\mathfrak{G}$ have to satisfy the associative law

$$(HKH'K')H''K'' = HH'^{[K]} K^{[H']} K'H''K'' = HH'^{[K]} H''^{[K^{[H']}K']} (K^{[H']} K')^{[H'']} K'',$$

$$HK(H'K'H''K'') = HKH'H''^{[K']} K'^{[H'']} K'' = H(H'H''^{[K']})^{[K]} K^{[H'H''^{[K']}]} K'^{[H'']} K''.$$

Comparing these we get

$$(H'H''^{[K']})^{[K]} = H'^{[K]} H''^{[K^{[H']}K']}, \quad (K^{[H']} K')^{[H'']} = K^{[H'H''^{[K']}]} K'^{[H'']}.$$

As these relations must hold for every H and K, they may be written in a similar form:

$$(HH')^{[K]} = H^{[K]} H'^{[K^{[H]}]}, \quad (KK')^{[H]} = K^{[H^{[K']}]} K'^{[H]}. \tag{3}$$

---

[4]) This means that $\mathfrak{G}$ has no normal subgroup $\mathfrak{N}'$ $((\mathfrak{N}') > (\mathfrak{N}))$ which is a subgroup of $\mathfrak{H}$.

We may add to these the relations given by the definition of $H^{[K]}$ and $K^{[H]}$:

(4) $$(H^{[K]})^{[K']}=H^{[K][K']},\quad (K^{[H]})^{[H']}=K^{[H][H']}.$$

It may easily be proved, that if we have for example $\mathfrak{H}\simeq[\mathfrak{K}]$ by the given permutations of $[\mathfrak{K}]$, the permutations of $[\mathfrak{H}]$ are uniquely defined.

§ 2.

The elements $[H]$ of the group $[\mathfrak{K}]$ are permutations of the group $\mathfrak{K}$. From now on let these permutations be automorphisms of the group $\mathfrak{K}$. If similar condition holds for the $[\mathfrak{H}]$ too, i. e., the elements $[K]$ of the group $[\mathfrak{H}]$ are automorphisms of the group $\mathfrak{H}$, we call the group $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ a group of automorphic composition. If only one of these two conditions holds, I shall denote the group $\mathfrak{G}$ a group of semiautomorphic composition.

Theorem 1. *Every group of automorphic or semiautomorphic composition has a proper normal subgroup.*

Proof. By (c) we have $KH=H'K'$. If $H'=H$ for every H, when K' runs over all elements of $\mathfrak{K}$ simultaneously with K, our theorem is evident, since $\mathfrak{K}H=H\mathfrak{K}$ holds for every H, i. e. $\mathfrak{K}$ is a normal subgroup.

Let now $H'\neq H$, then we have $KH=H'K'$, $\bar{K}H=\bar{H}'\bar{K}'$, thus we get $\bar{K}K^{-1}H'=\bar{H}'\bar{K}'K'^{-1}$. Since the permutation $[H]=\begin{pmatrix}K\\K'\end{pmatrix}$ is an automorphism of the group $\mathfrak{K}$, we have in $[H]$: $\bar{K}K^{-1}\to\bar{K}'K'^{-1}$ and we get

$$[H']=\begin{pmatrix}\bar{K}K^{-1}\\ \bar{K}'K'^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K\\K'\end{pmatrix}=[H],$$

thus $[H'][H]^{-1}=[H'H^{-1}]=E$. Consequently, according to theorem A, $\mathfrak{H}$ has a proper normal subgroup $\mathfrak{N}$, which is also a normal subgroup of $\mathfrak{G}$.

The proof runs similarly for $\mathfrak{K}$.

Corollary 1. 1. *Let $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ be given. If the order of the automorphism group of $\mathfrak{K}$ is relatively prime to the order of $\mathfrak{H}$ and the same holds for the automorphism group of $\mathfrak{H}$, then there is only one group $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ of automorphic composition and $\mathfrak{G}$ is the direct product of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$.*

Corollary 1. 2. *If the group $\mathfrak{G}$ is a group of automorphic composition and if $[\mathfrak{H}]\simeq\mathfrak{K}$, then $\mathfrak{H}$ is a normal subgroup.*

According to (1), $K\to K^{[H]}$, $K'\to K'^{[H]}$, ... In a group of automorphic composition we have $KK'\to(KK')^{[H]}=K^{[H]}K'^{[H]}$. Similarly, for the elements of $\mathfrak{H}$ we have $HH'\to(HH')^{[K]}=H^{[K]}H'^{[K]}$.

For the group $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ of automorphic composition the relations (2), (3), (4) become

(2′) $$HKH'K'=HH'^{[K]}K^{[H']}K',$$

(3′) $$(HH')^{[K]}=H^{[K]}H'^{[K]}, (KK')^{[H]}=K^{[H]}K'^{[H]},$$

(4′) $$(H^{[K]})^{[K']}=H^{[K][K']}, (K^{[H]})^{[H']}=K^{[H][H']}.$$

Comparing (3′) with (3),

(5) $$[K^{[H]}]=[K], [H^{[K']}]=[H];$$

(5) holds for every $H\in\mathfrak{H}$ and $K'\in\mathfrak{K}$. Let now $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{H}$ be the maximal normal subgroup of $\mathfrak{G}$[4]) (defined by theorem A), further let $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{K}$ similarly defined. Then (5) means that the automorphism $[H]$ transforms the element K into the coset of the factor-group $\mathfrak{K}/\mathfrak{M}$ containing K. Similar statement holds for $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$.

Hence in groups of automorphic composition, the elements of $[\mathfrak{K}]$ transform every coset $K\mathfrak{M}=F_K$ of the factor-group $\mathfrak{K}/\mathfrak{M}$ into itself, i. e., using the notation of (c), $F_K H=H'F_K$. Similarly, $[\mathfrak{H}]$ transforms every coset $H\mathfrak{N}=F_H$ of the factor-group $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ into itself, $F_H K'=KF_H$. As $H'F_K=F_K H$, if H varies over all the elements of $\mathfrak{H}$, H' does the same; $\binom{H}{H'}=[K]=[F_K]$. The permutation $\binom{H}{H'}$ transforms F_H into itself, thus $F_H F_K=F_K F_H$ for every $H\in\mathfrak{H}$ and $K\in\mathfrak{K}$.

Since $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ have no common element other than the unit element, $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ is again a normal subgroup of $\mathfrak{G}$ (the sign $\times$ denotes direct product). Hence we get the following theorem:

Theorem 2. *Let $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ be a group of automorphic composition, let $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{H}$ be the maximal normal subgroup of $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{M}$ the same for $\mathfrak{K}$. Then the factor-group $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ breaks down into the direct product of two of its subgroups*

$$\mathfrak{G}/(\mathfrak{M}\times\mathfrak{N})\cong\mathfrak{K}/\mathfrak{M}\times\mathfrak{H}/\mathfrak{N}.$$

Corollary 2. 1.[5]) *$\mathfrak{G}$ contains, besides $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$, two normal subgroups $\mathfrak{K}'$ and $\mathfrak{H}'$, such that*

$$\mathfrak{H}'/\mathfrak{M}\cong\mathfrak{H},\ \mathfrak{K}'/\mathfrak{N}\cong\mathfrak{K}.$$

Corollary 2. 2.[6]) *We have*

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}'\cong\mathfrak{K}'/(\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}),\ \mathfrak{G}/\mathfrak{K}'\cong\mathfrak{H}'/(\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}).$$

It is easily proved, that if $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ is a group of semiautomorphic composition, i. e. for example if the permutations for $[\mathfrak{H}]$ are automorphisms of the group $\mathfrak{H}$, then the factor-group $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ breaks down into the product

---

[5]) This follows from theorem 2 when combined with theorem 20 of A. Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 3rd edition (Berlin, 1937).

[6]) This follows from corollary 2. 1 when combined with theorem 23 of Speiser, l. c. [5]).

of two of its subgroups

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \simeq (\mathfrak{K}/\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{H},$$

where $\mathfrak{H}$ is a normal subgroup of the group $(\mathfrak{K}/\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{H}$.

§ 3.

Theorem 3. *If in the finite group $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ the orders of the groups $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ are relatively prime, then every normal subgroup $\overline{\mathfrak{G}}$ of $\mathfrak{G}$ is either a normal subgroup of $\mathfrak{H}$ or of $\mathfrak{K}$, or it is of the form $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{H}}\overline{\mathfrak{K}}$ where $\overline{\mathfrak{H}}$ and $\overline{\mathfrak{K}}$ are normal subgroups of $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$, respectively.*

Proof. Let the elements of $\overline{\mathfrak{G}}$ be $H_1K_1, H_2K_2, \ldots$; then

$$H_iK_i \in \overline{\mathfrak{G}} \xrightarrow{7)} K_i(H_iK_i)K_i^{-1} = K_iH_i \in \overline{\mathfrak{G}} \longrightarrow H_iK_iK_iH_i = H_iK_i^2H_i \in \overline{\mathfrak{G}} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_i(H_iK_i^2H_i)H_i^{-1} = H_i^2K_i^2 \in \overline{\mathfrak{G}} \longrightarrow H_i^2K_i^2K_iH_i = H_i^2K_i^3H_i \in \overline{\mathfrak{G}} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_i(H_i^2K_i^3H_i)H_i^{-1} = H_i^3K_i^3 \in \overline{\mathfrak{G}} \longrightarrow \ldots$$

i. e. $H_iK_i \in \overline{\mathfrak{G}}$ implies $H_i^rK_i^r \in \overline{\mathfrak{G}}$ for $r = 1, 2, \ldots$. If r is the order of the element H_i, then $K_i^r \in \overline{\mathfrak{G}}$, i. e. $K_i \in \overline{\mathfrak{G}}$ (since r and the order of K_i are relatively prime). By a similar reasoning we find $H_i \in \overline{\mathfrak{G}}$. Hence we conclude:

$$\overline{\mathfrak{H}}\overline{\mathfrak{K}} = \overline{\mathfrak{G}} \quad (\overline{\mathfrak{H}} = \{H_1, H_2, \ldots\},\ \overline{\mathfrak{K}} = \{K_1, K_2, \ldots\}).$$

$H^{-1}\overline{\mathfrak{H}}H \subset \mathfrak{H}$ and $H^{-1}\overline{\mathfrak{H}}H \subset \overline{\mathfrak{G}}$ $(H \in \mathfrak{H})$ imply that $\overline{\mathfrak{H}}$ is a normal subgroup of $\mathfrak{H}$. Similarly, $\overline{\mathfrak{K}}$ is a normal subgroup of $\mathfrak{K}$.

Corollary 3. *If in the finite group $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$, where $((\mathfrak{H}), (\mathfrak{K})) = 1$, the groups $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{K}$ are simple and $[\mathfrak{H}] \simeq \mathfrak{K}$, $[\mathfrak{K}] \simeq \mathfrak{H}$, then the group $\mathfrak{G}$ is necessarily simple.*

(Received July 15, 1949.)

[7]) The sign $\longrightarrow$ is the sign of implication.

Some packing and covering theorems.

By LÁSZLÓ FEJES TÓTH in Budapest.

Let us consider an infinite set of equal circles placed in the plane in such a way that no two circles overlap. According to a remarkable result of A. THUE [1]) the density of such a set is $\leqq \pi/\sqrt{12} = 0{,}9069\ldots$ [2]). The dual counterpart of this result is due to R. KERSHNER [3]) and it states the fact that the density of an infinite set of equal circles covering the plane is $\geqq 2\pi/\sqrt{27} = 1{,}209\ldots$ [4]).

The density of a set of domains strewn over the plane is defined here by a suitable limit value. It can be interpreted as the sum of the areas of the domains pro the unit of the area of the plane, or the sum of the areas of the domains divided by the area of the whole plane.

In the present paper we are going to extend these results in different directions. Instead of equal circles we shall consider first arbitrary congruent convex domains, then incongruent circles. In addition to these generalisations we shall consider, instead of the whole plane, a finite region of the plane, namely a convex polygon having at most six sides. We shall call such a polygon shortly a hexagon.

Our results are as follows [5]).

Theorem 1. *If n is the number of certain congruent convex domains lying in a hexagon $\mathfrak{h}$ so that no two of them overlap, then*

$$n \leqq \mathfrak{h}/h, \tag{1}$$

where h denotes the hexagon of the smallest area circumscribed about a domain.

---

1) A. THUE, Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer, *Naturforskermode* 1892, pp. 352—353; Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene, *Christiania Videnskaberne Selskabs Skrifter* 1910, p. 9.

2) The constant $\pi/\sqrt{12}$ equals the density of the closest lattice of equal circles, or the ratio of the area of a circle to the area of the circumscribed regular hexagon.

3) R. KERSHNER, The number of circles covering a set, *American Journal of Math.*, **61** (1939), pp. 665—671.

4) $2\pi/\sqrt{27}$ equals the density of the smallest lattice of equal circles covering the plane, or the ratio of the area of a circle to the area of the inscribed regular hexagon.

5) For a domain and its area the same symbol will be used.

Theorem 2. *If N is the number of certain congruent convex domains covering a hexagon $\mathfrak{h}$ in such a way that the boundaries of the domains intersect one another in at most two points*[6]), *then*

$$N \geqq \mathfrak{h}/H, \tag{2}$$

where H denotes the hexagon of the largest area inscribed in a domain.

Theorem 3. *Let $c_1, \ldots, c_n$ be n circles lying in a hexagon $\mathfrak{h}$ so that no two of them overlap, then for any $\alpha \leqq 1-(4-\sqrt{27}/\pi)^2/24 = 0{,}77\ldots$*[7]) *we have*

$$n\left(\frac{c_1^\alpha + \ldots + c_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqq \frac{\pi}{\sqrt{12}}\,\mathfrak{h}. \tag{3}$$

Theorem 4. *Let $C_1, \ldots, C_N$ be N circles covering the hexagon $\mathfrak{h}$, then for any $\beta \geqq 1+(2+\sqrt{27}/\pi)^2/12 = 2{,}11\ldots$ we have*

$$N\left(\frac{C_1^\beta + \ldots + C_N^\beta}{N}\right)^{\frac{1}{\beta}} \geqq \frac{2\pi}{\sqrt{27}}\,\mathfrak{h}. \tag{4}$$

Let us mention some special cases of these inequalities.

In the case of equal circles (1) and (3) and (2) and (4) are equivalent and they imply the results mentioned above.

A further consequence of Theorem 1 is the fact that *the density of an irregular packing of an infinite set of non-overlapping congruent convex domains having a centre of symmetry cannot exceed the density of the closest lattice of the domains*[8]). For, denoting a domain by d, the density of the closest lattice in question equals d/h.[9]) On the other hand, we have by (1) $nd/\mathfrak{h} \leqq d/h$, whence the assertion.

As a corollary of Theorem 3 let us mention the following fact. If $r_1, \ldots, r_n$ denote the radii of n non-overlapping circles lying e. g. in a square

---

[6]) The restriction about the points of intersection of the curves bordering the domains is probably superfluous and it diminishes not only the beauty of Theorem 2 but disturbs also the duality of Theorem 1 and 2. Therefore it would be very desirable to get rid Theorem 2 from this restriction.

[7]) The constants occurring in Theorems 3 and 4 are not the best possible ones. On the other hand, the set of circles arising from the closest packing of congruent circles by means of placing into each gap a smaller circle yields an example which shows that for values of α such that $1+(2/\sqrt{3}-1)^{2\alpha} > 3^{1-\alpha}$, i. e. $\alpha > 0{,}94\ldots$, Theorem 3 does not hold any more.

[8]) As I have learnt by the kind information of I. Fáry, this result was also found by K. Mahler who announced this fact during a lecture of Chabauty held in Paris in October 1949. — Let us still note that the tesselation of the plane by oblongs like the parquetry shows that in certain cases the density of the closest lattice can be reached also by not lattice-like packings of the domains.

[9]) Compare Theorem 3 of the paper of Dowker quoted in footnote 11.

S, then $r_1+\ldots+r_n<\sqrt{nS}/\sqrt{12}$. This means that if we will make the total length of the perimeters of a great (but given) number of non-overlapping circles lying in a square (or in an arbitrarily given domain) possibly large then we have to take congruent circles of convenient size and arrange them in "hexagonal close-packing". An analogous statement concerning the areas of the circles does not hold.

The simple idea of the following proofs of (1) and (2) is, apart from some slight modifications, the same used previously by the author in the case of ellipses[10]). The extension to the general case follows by means of certain results of C. H. DOWKER[11]) to which my attention was called recently by P. TURÁN.

The results of DOWKER in question state that if $a(\nu)$ is the area of the ν-gon of the smallest area circumscribed about an arbitrarily given convex domain and $A(\nu)$ the area of the ν-gon of the largest area inscribed in the domain, then the sets $a(\nu)$ and $A(\nu)$ ($\nu=3,4,\ldots$) are convex. More precisely for any $\nu\geqq 4$ $a(\nu-1)+a(\nu+1)\geqq 2a(\nu)$ and $A(\nu-1)+A(\nu+1)\leqq 2A(\nu)$ hold.

We shall still need the following well known consequence of EULER's formula. If we decompose a hexagon into $n\geqq 1$ convex polygons the number of the sides of which being $\nu_1,\ldots,\nu_n$, then

$$\frac{\nu_1+\ldots+\nu_n}{n}\leqq 6. \tag{5}$$

Let now $d_1,\ldots,d_n$ be the domains satisfying the conditions of Theorem 1. Let us replace d_1 by a convex domain p_1 having no common inner point with $d_2,\ldots,d_n$ so that $d_1\subset p_1\subset \mathfrak{h}$ and that no other convex domain $\supset p_1$ has these properties. p_1 is a convex polygon having, say, ν_1 sides. Let us construct successively to each domain d_i a polygon p_i defined analogously as p_1 the number of the sides of which being ν_i. Although the polygons p_i generally do not fill out the hexagon $\mathfrak{h}$ it is easy to see that the inequality (5) holds unaltered.

Consider now the ν-gon of the smallest area $a(\nu)$ circumscribed about a domain d_i. Since the set $a(\nu)$ is convex we can extend the definition of $a(\nu)$ to any $\nu\geqq 3$ so that the function obtained should be a decreasing function convex from below. Thus, by JENSEN's inequality

---

10) FEJES L., Extremális pontrendszerek a síkban, a gömbfelületen és a térben; *Acta Sci. Math. Naturalium, Kolozsvár* **23** (1944), pp. 15–18. — The case of congruent ellipses seems to involve some interest in crystallography. *Cf.* W. NOWACKI, Über Ellipsenpackungen in der Kristallebene, *Schweizerische Mineralogische und Petrographische Mitteilungen*, **28** (1948), pp. 501–508.

11) C. H. DOWKER, On minimum circumscribed polygons, *Bulletin American Math. Society*, **50** (1944), pp. 120–122.

$$\mathfrak{h} \geqq p_1+\ldots+p_n \geqq a(\nu_1)+\ldots+a(\nu_n) \geqq n\,a\left(\frac{\nu_1+\ldots+\nu_n}{n}\right) \geqq n\,a(6), \text{ q. e. d.}$$

The proof of (2) is analogous to the previous one. Let $D_1, \ldots, D_N$ be the domains considered in Theorem 2. Let us replace D_1 by the least convex domain D_1' such that the domains $D_1', D_2, \ldots, D_N$ should cover $\mathfrak{h}$ and that the boundary of D_1' intersect the boundaries of the domains $D_2, \ldots, D_N$ in at most two points. By constructing successively to each domain D_i the domain D_i' defined analogously as D_1', it may occur that some of the domains D_i' overlap. In this case let us continue the above process until each domain D_i will contract to a polygon P_i having no common inner point with another one. Denoting the number of the sides of P_i by μ_i, we have $\mu_1+\ldots+\mu_N \leqq 6N$. Hence, $A(\mu)$, $\mu \geqq 3$, being an increasing function concave from below such that for $\mu=3, 4, \ldots$ the function $A(\mu)$ equals the maximum of the areas of the μ-gons inscribed in a domain D_i, we have

$$\mathfrak{h} = P_1+\ldots+P_N \leqq A(\mu_1)+\ldots+A(\mu_N) \leqq NA\left(\frac{\mu_1+\ldots+\mu_N}{N}\right) \leqq NA(6), \text{ q. e. d.}$$

To the proofs of (3) and (4) we make two remarks.

Remark 1. The function $\Phi(x,y)$ of the two variables $x \geqq 0$, $y \geqq 3$ defined by

$$\Phi(x,y) = x^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(y) \quad , \quad \varphi(y) = \frac{y}{\pi} \tan\frac{\pi}{y},$$

is for any $\alpha \leqq 0{,}77\ldots$ $(\alpha \neq 0)$ convex from below.

For, the condition of the convexity is

$$\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2 = \alpha^{-2} x^{2\alpha-2} [(1-\alpha)\varphi\varphi'' - \varphi'^2] \geqq 0,$$

i. e.

$$\pi^2 y^2 \cos^2\frac{\pi}{y} [(1-\alpha)\varphi\varphi'' - \varphi'^2] = 2\pi^2(1-\alpha)\sin^2\frac{\pi}{y} - \left(\pi - y\sin\frac{\pi}{y}\cos\frac{\pi}{y}\right)^2 \geqq 0$$

or

$$2\pi^2(1-\alpha) \geqq [f(y)]^2 \; , \quad f(y) = \pi \operatorname{cosec}\frac{\pi}{y} - y\cos\frac{\pi}{y}.$$

But $f(y)$ being for $y \geqq 3$ a decreasing function[12]) of y, the condition of the convexity is satisfied if $2\pi^2(1-\alpha) \geqq [f(3)]^2$.

Remark 2. The function $\Psi(x,y)$ of the two variables $x \geqq 0$, $y \geqq 3$ defined by

$$\Psi(x,y) = x^{\frac{1}{\beta}} \psi(y) \quad , \quad \psi(y) = \frac{y}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{y},$$

is for any $\beta \geqq 2, 11\ldots$ concave from below.

[12]) We have $y^2\tan\frac{\pi}{y}\sin\frac{\pi}{y} f'(y) = \pi^2 - \sin^2\frac{\pi}{y}\left(y^2 + \pi y\tan\frac{\pi}{y}\right) < \pi^2 - \sin^2\frac{\pi}{y}\left(y^2+\pi^2\right) =$
$= \pi^2\cos^2\frac{\pi}{y} - y^2\sin^2\frac{\pi}{y} < 0.$

The condition of the concavity is namely

$$\Psi_{xx}\Psi_{yy}-\Psi_{xy}^2=-\beta^{-2}x^{2\beta-2}[(\beta-1)\psi\psi''+\psi'^2]\geqq 0.$$

This is equivalent with

$$-4\pi^2y^2[(\beta-1)\psi\psi''+\psi'^2]=4\pi^2(\beta-1)\sin^2\frac{2\pi}{y}-\left(y\sin\frac{2\pi}{y}-2\pi\cos\frac{2\pi}{y}\right)^2\geqq 0$$

or with

$$4\pi^2(\beta-1)\geqq[g(y)]^2,\quad g(y)=y-2\pi\cot\frac{2\pi}{y}.$$

But $g(y)$ being for $y\geqq 3$ a decreasing function[13]) of y the above condition is satisfied if $4\pi^2(\beta-1)\geqq[g(3)]^2$.

Now, preserving the notations of the above proofs of (1) and (2), we have $p_i\geqq c_i\varphi(\nu_i)$. This follows from the fact that among the ν-gons containing a circle the circumscribed regular ν-gon has the minimal area. Hence, applying JENSEN's inequality to the function $\Phi(x,y)$ of Remark 1

$$\mathfrak{h}\geqq p_1+\ldots+p_n\geqq(c_1^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(\nu_1)+\ldots+(c_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(\nu_n)\geqq$$

$$\geqq n\left(\frac{c_1^\alpha+\ldots+c_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\varphi\left(\frac{\nu_1+\ldots+\nu_n}{n}\right)\geqq n\left(\frac{c_1^\alpha+\ldots+c_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(6).$$

But this is just the inequality (3) to be proved.

We can proceed analogously at the proof of (4). Since among the μ-gons containing a circle the inscribed regular μ-gon has the maximal area, we have $P_i\leqq C_i\psi(\mu_i)$. Hence Remark 2 and JENSEN's inequality imply that

$$\mathfrak{h}=P_1+\ldots+P_N\leqq(C_1^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\psi(\mu_1)+\ldots+(C_N^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\psi(\mu_N)\leqq$$

$$\leqq N\left(\frac{C_1^\beta+\ldots+C_N^\beta}{N}\right)^{\frac{1}{\beta}}\psi\left(\frac{\mu_1+\ldots+\mu_N}{N}\right)\leqq N\left(\frac{C_1^\beta+\ldots+C_N^\beta}{N}\right)^{\frac{1}{\beta}}\psi(6).$$

This concludes the proof.

The above proofs show that Theorems 1 and 2 hold also under the more general condition that the domains, instead of being congruent, arise from a convex domain by affine transformations preserving the area. Analogously, we can take in Theorems 3 and 4, instead of circles, arbitrary elliptical discs, provided that no two ellipses intersect one another in more than two points.

At last let us note that by means of the above considerations inequalities analogous to (3) and (4) can also be derived between the surface area and the radii of the incircles or circumcircles of the faces of a polyhedron. For

---

[13]) We have $\sin^2\frac{2\pi}{y}\,g'(y)=\sin^2\frac{2\pi}{y}-\frac{4\pi^2}{y^2}<0.$

example, if $r_1, \ldots, r_f$ denote the radii of the incircles of the faces of a polyhedron of area F having e edges and f faces, then

$$(r_1 + \ldots + r_f)^2 \leqq \frac{f^2 F}{2e} \cot \frac{\pi f}{2e}.$$

Equality holds only if all faces are congruent regular polygons.

For Eulerian polyhedra we have

$$(r_1 + \ldots + r_f)^2 \leqq \frac{f^2 F}{6f - 12} \cot \frac{\pi f}{6f - 12} \quad \left(< \frac{fF}{\sqrt{12}} \right),$$

where equality holds only for the regular tetrahedron, hexahedron and dodecahedron.

(Received August 25, 1949, revised January 17, 1950.)

Sur un produit infini.

Par MIKLÓS MIKOLÁS à Budapest.

C'est une remarque de M. LÉOPOLD FEJÉR sur la formule de WALLIS:

$$\frac{2^2}{1.3}\cdot\frac{4^2}{3.5}\cdot\frac{5^2}{5.7}\cdots=\frac{\pi}{2},$$

qui nous conduisait à considérer, d'une manière plus générale, les produits de type

$$P=\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{a_\nu+a_{\nu+1}+\ldots+a_{\nu+p}}{p+1}\right)^{p+1}}{a_\nu . a_{\nu+1}\ldots a_{\nu+p}}\qquad (p\geqq 1),$$

$\{a_\nu\}$ étant une suite croissante de nombres positifs.

Nous démontrons d'abord la proposition suivante:

I. *Pour que le produit infini P converge, il faut et il suffit que la série*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{a_{\nu+p}}{a_\nu}-1\right)^2$$

soit convergente.

Comme tous les facteurs de P sont supérieurs à 1, il suffira de montrer que notre condition est nécessaire et suffisante pour la convergence de

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{a_\nu+a_{\nu+1}+\ldots+a_{\nu+p}}{(p+1)\sqrt[p+1]{a_\nu a_{\nu+1}\ldots a_{\nu+p}}}-1\right).$$

Écrivons

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\frac{p+1+x_1+x_2+\ldots+x_p}{(p+1)\sqrt[p+1]{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_p)}}-1\,;$$

le terme général de la série résulte en posant

$$x_i=\alpha_{i\nu}=\frac{a_{\nu+i}}{a_\nu}-1\qquad (i=1,2,\ldots,p).$$

On a d'après la formule de Taylor,

$$F(x_1,\ldots,x_p)=\frac{1}{2(p+1)^2}\left(p\sum_{i=1}^{p}x_i^2-2\sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{p}x_ix_k\right)+\sum_{i,k,l=1}^{p}A_{ikl}x_ix_kx_l \tag{1}$$

où

$$A_{ikl}=\frac{1}{6}\frac{\partial^3 F}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}(\vartheta x_1,\ldots,\vartheta x_p)\qquad (0\leqq\vartheta\leqq 1);$$

on a donc pour $x_1\to 0,\ldots,x_p\to 0$,

$$A_{ikl}\to\frac{1}{6}\frac{\partial^3 F}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}(0,\ldots,0)=c_{ikl}.$$

C'est-à-dire, $\xi>0$ désignant un nombre assez petit, on aura pour $\sum\limits_{i=1}^{p}|x_i|<\xi$,

$$|A_{ikl}|<2\,\mathrm{Max}\,|c_{ikl}|=2K\qquad (i,k,l=1,2,\ldots,p).$$

D'autre part, on a pour $x_1\geqq 0,\ldots,x_p\geqq 0$,

$$p\sum_{i=1}^{p}x_i^2-2\sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{p}x_ix_k\geqq\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\right)^2-2\sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{p}x_ix_k=\sum_{i=1}^{p}x_i^2\geqq\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\right)^2$$

et

$$p\sum_{i=1}^{p}x_i^2-2\sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{p}x_ix_k=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{p}(x_i-x_k{}^2+\sum_{i=1}^{p}x_i^2.$$

On obtient donc par (1):

$$\left|\frac{F(x_1,\ldots,x_p)}{\sum\limits_{i=1}^{p}x_i^2+\frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{p}(x_i-x_k)^2}-\frac{1}{2(p+1)^2}\right|= \tag{2}$$

$$=\frac{\left|\sum\limits_{i,k,l=1}^{p}A_{ikl}x_ix_kx_l\right|}{p\sum\limits_{i=1}^{p}x_i^2-2\sum\limits_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{p}x_ix_k}\leqq\frac{2K\left(\sum\limits_{i=1}^{p}x_i\right)^3}{\frac{1}{p}\left(\sum\limits_{i=1}^{p}x_i\right)^2}=2Kp\sum_{i=1}^{p}x_i<\varepsilon,$$

pourvu que $x_i>0$ $(i=1,2,\ldots,p)$, $\sum\limits_{i=1}^{p}x_i<\mathrm{Min}\left(\xi,\frac{\varepsilon}{2pK}\right)$.

1. Supposons que P converge; on a alors

$$\lim_{\nu\to\infty}F(\alpha_{1\nu},\alpha_{2\nu},\ldots,\alpha_{p\nu})=0. \tag{3}$$

En écrivant

$$y_0=1,\ y_i=\sqrt[p+1]{1+\alpha_{i\nu}}\qquad (i=1,\ldots,p),$$

on a l'identité de HURWITZ-MUIRHEAD[1])

---

[1]) A. HURWITZ, Über den Vergleich des arithmetischen und des geometrischen Mittels, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **108** (1891), pp. 266–268; R. F. MUIRHEAD, Proofs that the aritmetic mean is greater than the geometric mean, *Math. Gazette* **2** (1904), pp. 283–287.

$$(4)\qquad F(\alpha_{1\nu},\ldots,\alpha_{p\nu})=\frac{y_0^{p+1}+y_1^{p+1}+\ldots+y_p^{p+1}}{p+1}-y_0y_1\ldots y_p=$$

$$=\frac{1}{2(p+1)!}\left[\sum!\overline{(y_0^p-y_1^p)(y_0-y_1)}+\sum!\overline{(y_0^{p-1}-y_1^{p-1})(y_0-y_1)y_2}+\right.$$

$$\left.+\sum!\overline{(y_0^{p-2}-y_1^{p-2})(y_0-y_1)y_2y_3}+\ldots+\sum!\overline{(y_0-y_1)(y_0-y_1)y_2y_3\ldots y_p}\right]$$

où

$$\sum!\,\overline{\varphi(y_0,y_1,\ldots,y_p)}$$

désigne la somme des $(p+1)!$ quantités résultant de $\varphi(y_0,y_1,\ldots,y_p)$ si l'on en permute les y_i.

Comme chaque terme entre crochets est évidemment positif, on trouve en particulier par (3) que, pour $\nu\to\infty$,

$$(y_i^p-y_0^p)(y_i-y_0)=(\sqrt[p+1]{1+\alpha_{i\nu}}-1)^2\left[1+(1+\alpha_{i\nu})^{\frac{1}{p+1}}+\ldots+(1+\alpha_{i\nu})^{\frac{p-1}{p+1}}\right]\to 0$$

et par conséquent,

$$\lim_{\nu\to\infty}\alpha_{i\nu}=0\qquad (i=1,2,\ldots,p).$$

Faisant usage de (2), on voit donc que l'inégalité

$$\left(\frac{1}{2(p+1)^2}-\varepsilon\right)\sum_{\nu=N}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{p}\alpha_{i\nu}^2+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{p}(\alpha_{i\nu}-\alpha_{k\nu})^2\right]<\sum_{\nu=N}^{\infty}F(\alpha_{1\nu},\ldots,\alpha_{p\nu})$$

subsiste pour $N=N(\varepsilon)$ suffisamment grand.

Il en résulte que les séries

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{i\nu}^2=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{a_{\nu+i}}{a_\nu}-1\right)^2\qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

sont convergentes.

2. Réciproquement, si $\Sigma\alpha_{p\nu}^2$ converge, on aura aussi

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{i\nu}^2<\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{p\nu}^2<\infty,\quad \sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha_{i\nu}-\alpha_{k\nu})^2<\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{p\nu}^2<\infty\qquad (i,k=1,2,\ldots,p).$$

Comme $\alpha_{i\nu}\to 0$ $(i=1,2,\ldots,p)$, on peut appliquer (2), ce qui donne

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}F(\alpha_{i\nu},\ldots,\alpha_{p\nu})<M\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{i\nu}^2+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{p}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha_{i\nu}-\alpha_{k\nu})^2\right)<\infty,$$

$M>0$ désignant une constante convenable. Donc P converge, c. q. f. d.

Dans le cas où $\{a_\nu\}$ est une progression arithmétique, on peut trouver pour P une expression fermée:

II. *Soit* $a_\nu=\varkappa\nu+\lambda$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$, $(\varkappa,\lambda)=1$. *Pour* p *pair* $(p=2\varrho)$

$$(5)\qquad \frac{1}{P}=\left(\frac{a_0}{a_{2\varrho-1}}\right)^1\left(\frac{a_1}{a_{2\varrho-2}}\right)^2\ldots\left(\frac{a_{\varrho-1}}{a_\varrho}\right)^\varrho$$

et pour p impair,

(6) $$\frac{1}{P}=\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2},\frac{\lambda}{\varkappa}+\frac{p}{2}\right)\cdot\mathfrak{S}\left(\frac{3}{2},\frac{\lambda}{\varkappa}+\frac{p}{2}\right)\cdots\mathfrak{S}\left(\frac{p}{2},\frac{\lambda}{\varkappa}+\frac{p}{2}\right)$$

où

$$\mathfrak{S}(t,\gamma)=\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{(\nu+\gamma)^2}\right).$$ [2])

Soit p pair, $p=2\varrho$; on peut alors écrire

$$\prod_{\nu=0}^{N}\frac{a_\nu a_{\nu+1}\ldots a_{\nu+2\varrho-1}a_{\nu+2\varrho}}{a_{\nu+\varrho}^{2\varrho+1}}=\frac{a_0a_1^2\ldots a_{2\varrho-1}^{2\varrho}a_{2\varrho}^{2\varrho+1}\ldots a_N^{2\varrho+1}a_{N+1}^{2\varrho}\ldots a_{N+2\varrho-1}^{2}a_{N+2\varrho}}{a_\varrho^{2\varrho+1}a_{\varrho+1}^{2\varrho+1}\ldots a_{N+\varrho-1}^{2\varrho+1}a_{N+\varrho}^{2\varrho+1}}.$$

En simplifiant par les facteurs $a_{2\varrho},\ldots,a_N$ à la puissance $2\varrho+1$, on obtient

$$\frac{1}{P}=\lim_{N\to\infty}\frac{a_0^1a_1^2\ldots a_{2\varrho-1}^{2\varrho}}{a_\varrho^{2\varrho+1}\ldots a_{2\varrho-1}^{2\varrho+1}}\cdot\frac{a_{N+1}^{2\varrho}\ldots a_{N+2\varrho-1}^{2}a_{N+2\varrho}^{1}}{a_{N+1}^{2\varrho+1}\ldots a_{N+\varrho}^{2\varrho+1}}=$$

$$=\frac{a_0^1a_1^2\ldots a_{\varrho-1}^{\varrho}}{a_\varrho^{\varrho}a_{\varrho+1}^{\varrho-1}\ldots a_{2\varrho-1}^{1}}\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{a_{N+\varrho+1}^{\varrho}\ldots a_{N+2\varrho-1}^{2}a_{N+2\varrho}^{1}}{a_{N+1}^{1}\ldots a_{N+\varrho-1}^{\varrho-1}a_{N+\varrho}^{\varrho}}=\left(\frac{a_0}{a_{2\varrho-1}}\right)^1\left(\frac{a_1}{a_{2\varrho-2}}\right)^2\cdots\left(\frac{a_{\varrho-1}}{a_\varrho}\right)^\varrho.$$

Soit p maintenant impair et posons $q_\nu=\varkappa\left(\nu+\frac{p}{2}\right)+\lambda$. On aura

(7) $$\prod_{\nu=0}^{N}\frac{a_\nu a_{\nu+1}\ldots a_{\nu+p}}{\left(\frac{a_\nu+a_{\nu+1}+\ldots+a_{\nu+p}}{p+1}\right)^{p+1}}=$$

$$=\prod_{\nu=0}^{N}\frac{\left(q_\nu-\varkappa\frac{p}{2}\right)\left[q_\nu-\varkappa\left(\frac{p}{2}-1\right)\right]\cdots\left(q_\nu-\frac{\varkappa}{2}\right)\left(q_\nu+\frac{\varkappa}{2}\right)\cdots\left[q_\nu+\varkappa\left(\frac{p}{2}-1\right)\right]\left(q_\nu+\varkappa\frac{p}{2}\right)}{q_\nu^{p+1}}=$$

$$=\prod_{\nu=0}^{N}\left[1-\frac{\varkappa^2\left(\frac{p}{2}\right)^2}{q_\nu^2}\right]\cdot\prod_{\nu=0}^{N}\left[1-\frac{\varkappa^2\left(\frac{p}{2}-1\right)^2}{q_\nu^2}\right]\cdots\prod_{\nu=0}^{N}\left[1-\frac{\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2}{q_\nu^2}\right]$$

et par conséquent, [3])

$$\frac{1}{P}=\prod_{\nu=0}^{\infty}\left[1-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\nu+\frac{p}{2}+\frac{\lambda}{\varkappa}\right)^2}\right]\cdot\prod_{\nu=0}^{\infty}\left[1-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\nu+\frac{p}{2}+\frac{\lambda}{\varkappa}\right)^2}\right]\cdots\prod_{\nu=0}^{\infty}\left[1-\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^2}{\left(\nu+\frac{p}{2}+\frac{\lambda}{\varkappa}\right)^2}\right]=$$

$$=\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2},\frac{\lambda}{\varkappa}+\frac{p}{2}\right)\cdot\mathfrak{S}\left(\frac{3}{2},\frac{\lambda}{\varkappa}+\frac{p}{2}\right)\cdots\mathfrak{S}\left(\frac{p}{2},\frac{\lambda}{\varkappa}+\frac{p}{2}\right).$$

C. q. f. d.

---

[2]) Ainsi, par exemple,

$$\mathfrak{S}(t,1)=\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{(\nu+1)^2}\right)=\frac{\sin\pi t}{\pi t},\quad\mathfrak{S}\left(t,\frac{1}{2}\right)=\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{(2\nu+1)^2}\right)=\cos\pi t.$$

[3]) La convergence des produits (7) est évidente.

Envisageons deux cas particuliers: $a_\nu = \nu + 1$ et $a_\nu = 2\nu + 1$ avec $p = 2\varrho - 1$. En faisant usage de (6), on obtient pour $\varrho \geqq 1$

$$(8) \quad \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+2\varrho)}{(\nu+\varrho+\frac{1}{2})^{2\varrho}} =$$

$$= (3.5\dots(2\varrho-1))^3 \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\varrho} \prod_{\substack{m,n=1\\ m<n}}^{\varrho} \frac{1}{[(2m-1)^2-(2n-1)^2]^2},$$

$$(9) \quad \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{[2(\nu+\varrho)]^{2\varrho}}{(2\nu+1)(2\nu+3)\dots(2\nu+4\varrho-1)} =$$

$$= 3.5\dots(2\varrho-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\varrho} \prod_{n=1}^{\varrho-1} \left|1-\left(\frac{1}{2n}\right)^2\right| \left|1-\left(\frac{3}{2n}\right)^2\right| \dots \left|1-\left(\frac{2\varrho-1}{2n}\right)^2\right|.$$

Si $\varrho = 1$, le dernier produit doit être remplacé par 1; (9) se transforme alors en la formule de WALLIS.

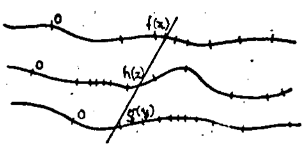
(Reçu le 9 septembre 1949)

Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen.

Von J. ACZÉL in Szeged.

Einleitung.

Die Aufgabe, Differentialgleichungen für die Funktionen $z=z(x, y)$ anzugeben, deren Erfüllung notwendig und hinreichend ist, damit z durch eine Fluchtentafel darstellbar sei[1]), wurde von GRONWALL, KELLOGG und BARROW[2]) erledigt. DUPORCQ[3]) ermittelte eine Charakterisierung durch Funktionalgleichungen. Seine Funktionalgleichungen enthielten außer den veränderlichen Werten der Variabeln x, y, z auch deren konstante Werte. (Wir werden im Folgenden nicht von Funktionalgleichungen dieser Art sprechen, sondern von solchen, in denen nur veränderliche Werte der Variabeln vorkommen.)



Figur 1.

In § 1 geben wir Differentialgleichungen an, die notwendig und hinreichend sind, damit sich die Funktion durch solche Fluchtentafeln darstellen läßt, deren sämtliche Träger Gerade

---

[1]) Eine Fluchtentafel besteht bekanntlich aus drei geraden oder krummen Linien (den Trägern) deren jede in eine Skala (die Leiter) eingeteilt ist, die die drei Veränderlichen x, y und z darstellen (undzwar pflegen aus praktischen Gründen die Träger der zwei unabhängigen Veränderlichen meist an den beiden Rändern der Figur Platz zu nehmen). Die Verbindungslinie zweier Punkte an den beiden unabhängigen Skalen soll aus der dritten Leiter den Funktionswert herausschneiden (Figur 1). Die drei Skalen bedeuten offensichtlich drei Funktionen ($S_1=f(x)$, $S_2=g(y)$, $S_3=h(z)$): jede die betreffende Bogenlänge als Funktion der zugehörigen Veränderlichen x bzw. y bzw. z. — In der Praxis sind diese Funktionen immer streng monoton, dies wollen wir auch hier annehmen.

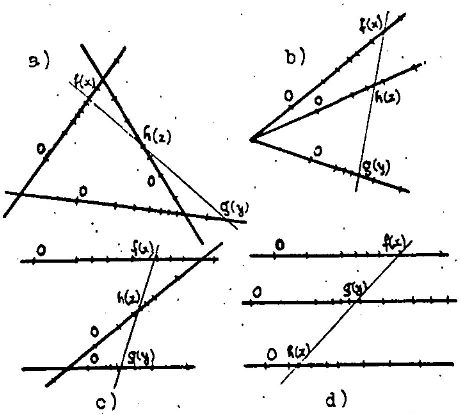
[2]) T. H. GRONWALL, Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés, *Journal de Math. pures et appliquées*, (6) **8** (1912), S. 59 - 102 O. D. KELLOGG, Nomograms with points in alignment, *Zeitschrift für Math. und Phys.*, **63** (1915), S. 159—173. — D. F. BARROW, Expressing a function of three variables in nomograph form, *Duke Math. Journal*, **15** (1948), S. 433—437.

[3]) M. E. DUPORCQ, Sur la théorie des abaques à alignement, *Bulletin des Sciences Math.*, (2) **22** (1898), S. 287—291.

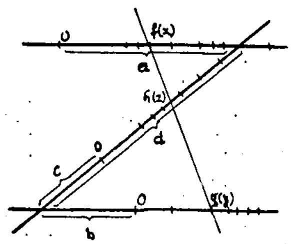
sind (Figur 2, Figur 3 und Figur 4). Da die Gültigkeit einer Fluchtentafel bei einer projektiven Transformation unverändert bleibt, können offenbar die vier Typen von geraden Nomogrammen auf jene zwei der Figur 3 und 4 reduziert werden[4]). Die Rechnungen bei diesen zwei Figuren zeigen auch, daß alle geraden Nomogramme dadurch charakterisiert sind, daß zu ihnen drei (streng monotone) Funktionen $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ angegeben werden können, derart, daß

$$F(x)+G(y)=H(z). \tag{1}$$

Die von uns anzugebenden Differentialgleichungen sind (einander äquivalent[5]) und) alle Folgen der einen schon von P. Saint Robert[6]) gefundenen Differentialgleichung dritter Ordnung (9), ihr Interesse liegt aber darin, daß sie den expliziten Ausdruck der Funktionen $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ aus $z=z(x, y)$ (und aus ihren Ableitungen) ermöglichen [(10)].



Figur 2.



$$\frac{a-f(x)}{d-c-h(z)}=\frac{g(y)+b}{h(z)+c}$$

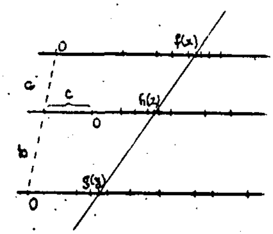
$$F(x)=\log[a-f(x)]$$

$$G(y)=-\log[g(y)+b]$$

$$H(z)=\log\left(\frac{d}{h(z)+c}-1\right)$$

$$F(x)+G(y)=H(z)$$

Figur 3.



$$\frac{f(x)-h(z)-c}{a}=\frac{h(z)+c-g(y)}{b}$$

$$F(x)=bf(x)$$

$$G(y)=ag(y)$$

$$H(z)=(a+b)h(z)+(a+b)c$$

$$F(x)+G(y)=H(z)$$

Figur 4.

[4]) Es genügt offenbar sogar, wenn man sich auf Nomogramme mit äquidistanten parallelen Trägern beschränkt. — Alle diese Tatsachen machen aber natürlich die geraden Nomogramme von anderen Typen gar nicht überflüßig; oft geben diese günstigere Darstellungsmöglichkeiten (z. B. leichter konstruierbare und ablesbare Skalenfunktionen) als die scheinbar einfachste parallele Fluchtentafel.

[5]) Siehe J. Aczél, Einige, aus Funktionalgleichungen zweier Veränderlichen ableitbare Differentialgleichungen (zu erscheinen in *diesen Acta,* sowie auch J. Aczél—St. Fenyő, Über die Theorie der Mittelwerte, *diese Acta,* **11** (1948), S. 239–245. Aus letzterer Arbeit ist es auch ersichtlich, zur Lösung welcher Frage die Differentialgleichungen des § 1 den Verf. ursprünglich begegneten. — Damit die Differentialgleichungen des § 1 überhaupt einen Sinn haben, setzen wir die Funktionen $z(x, y)$, $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ differenzierbar, meist sogar zweimal oder dreimal differenzierbar voraus.

[6]) P. Saint Robert, De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante, *Memorie delle R. Accad. di Scienze di Torino,* (2) **25** (1871), S. 53–72.

In § 2 behandeln wir Spezialfälle, in denen einige der Skalen einander ähnlich sind und wir charakterisieren die Funktionen, die durch Nomogramme dieser Art darstellbar sind, mittels Angabe von Randbedingungen zu den Differentialgleichungen des § 1, bzw. mittels Spezialisierung dieser Differentialgleichungen, bzw. mittels Funktionalgleichungen. [In diesen Spezialfällen fallen mehrere der Funktionen [(10)] $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ zusammen. Für diese erhalten wir in dieser Weise mehrfache Ausrechnungsmöglichkeiten.] Eine dieser Funktionalgleichungen (§ 2 d) ist mit einer von L. FEJÉR gestellten Frage[7]) eng verbunden.

In § 3 werden einige Probleme aufgeworfen.

§ 1.

Wir beweisen den folgenden

Satz. *Damit es zur Funktion $z(x, y)$ drei streng monotone (und differenzierbare) Funktionen $F(t)$, $G(t)$ und $H(t)$ derart gibt, daß die Relation*

$$(1) \qquad F(x)+G(y)=H(z), \quad d.\ h. \quad z=H^{-1}[F(x)+G(y)]$$

gilt, ist notwendig und hinreichend, daß die Funktion z in ihren beiden Veränderlichen streng monoton (und differenzierbar) ist und einem der folgenden acht äquivalenten Differentialgleichungen genügt:[5])

$$(2)\ \frac{z_x}{z_y}=\frac{f(x)}{g(y)},\text{[8])} \quad (3)\ z_x=\frac{f(x)}{h(z)}, \quad (4)\ z_y=\frac{g(y)}{h(z)}, \quad (5)\ \frac{f(x)}{z_x}=\frac{g(y)}{z_y}=h(z),$$

$$(6)\ \frac{z_{xy}}{z_y}-\frac{z_{xx}}{z_x}=X(x), \quad 7)\ \frac{z_{xy}}{z_x}-\frac{z_{yy}}{z_y}=Y(y), \quad (8)\ \frac{z_{xy}}{z_x z_y}=Z(z),$$

$$(9)\ \frac{z_{xxy}}{z_x}-\frac{z_{xx}z_{xy}}{z_x^2}=\frac{z_{xyy}}{z_y}-\frac{z_{xy}z_{yy}}{z_y^2}\text{[6])}, \ d.h.\ z_x^2(z_{xy}z_{yy}-z_{xyy}z_y)=z_y^2(z_{xx}z_{xy}-z_x z_{xxy}).$$

Diese Gleichungen geben auch die explizite Form von $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ an:

$$F(t)=c\int f(t)\,dt=\int \exp\left[-\int X(t)\,dt\right]dt, \quad G(t)=c\int g(t)\,dt=\int \exp\left[-\int Y(t)\,dt\right]dt,$$

$$H(t)=c\int h(t)\,dt=\int \exp\left[-\int Z(t)\,dt\right]dt.$$

Beweis. Die Notwendigkeit und das Hinreichen der strengen Monotonie (und Differenzierbarkeit) von z zur strengen Monotonie (und Differenzierbarkeit) der Funktionen F, G, H bedarf keines Beweises.

Die Äquivalenz der angegebenen Differentialgleichungen untereinander erhellt sich sofort aus der Tatsache, daß der Gleichung (9) alle übrigen

---

[7]) Siehe J. HORVÁTH, Note sur un problème de L. FEJÉR, *Bulletin École Polytechnique Jassy*, **3** (1948), S. 164–168.

[8]) Diese Gleichung würde für einen Spezialfall unseres Problems (siehe § 2) von N. H. ABEL gefunden: Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Größen x und y wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f[z, f(x, y)]$ eine symmetrische Function von z, x und y ist, *Journal für reine und angew. Math.*, 1 (1826), S. 11–15.

äquivalent sind. Die Gleichung (5) ist eine einfache Zusammenfassung der Gleichungen (2), (3), (4). Durch Logarithmieren und Derivieren nach x bzw. nach y folgen aus (2) die Gleichungen (6) bzw. (7) und aus (4), bzw. (3) die Gleichung (8). Derivieren wir (6) bzw. (7) nach y bzw. x, so erhalten wir (9). Aber auch aus der Gleichung (8) folgt (9), indem wir die Jacobische Determinante der beiden Funktionen $z(x, y)$ und $w(x, y) = \frac{z_{xy}}{z_x z_y}$ bilden, die wegen der aus dem Bestehen der Gleichung (8) folgenden Abhängigkeit der Funktionen z und w gleich 0 ist, und dies ist eben die Gleichung (9). Da alle gemachten Schlüsse umkehrbar sind, so ist die Äquivalenz unserer Gleichungen vollständig bewiesen. Unsere Betrachtungen zeigen auch, daß

$$X(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)}, \quad Y(t) = -\frac{g'(t)}{g(t)}, \quad Z(t) = -\frac{h'(t)}{h(t)}. \tag{10}$$

Zum Beweise der Notwendigkeit und des Hinreichens unserer Gleichungen für das Bestehen von (1) genügt es also die Notwendigkeit bzw. das Hinreichen *einer* dieser Gleichungen, etwa der Gleichung (2) zu beweisen.

Derivieren wir (1) nach x, bzw. nach y, so erhalten wir $F'(x) = H'(z) z_x$ und $G'(y) = H'(z) z_y$, woraus (2) [und auch (3) und (4)] folgt.

Umgekehrt folgt aus (2):

$$\begin{vmatrix} z_x & z_y \\ \frac{\partial}{\partial x}\left[c\int f(x)\,dx + c\int g(y)\,dy\right] & \frac{\partial}{\partial y}\left[c\int f(x)\,dx + c\int g(y)\,dy\right] \end{vmatrix} =$$

$$= c z_x g(y) - c z_y f(x) = 0;$$

also $[c\int f(x)\,dx + c\int g(y)\,dy = H(z)]$, $F(x) + G(y) = H(z)$. Aus (10) folgt dann auch die letzte Aussage des Satzes.

§ 2.

Einige interessanten Spezialfälle, in denen es zueinander ähnliche Leiter gibt, können folgenderweise charakterisiert werden:

a) Betrachten wir zuerst parallele Träger, wo die zwei unabhängigen Skalen einander ähnlich sind (Figur 5). Dies bedeutet offensichtlich

$$aF(x) + bF(y) = H(z), \text{ d. h. } z = H^{-1}[aF(x) + bF(y)]. \tag{11}$$

Man sieht unmittelbar, daß die in dieser Weise darstellbaren Funktionen vollständig charakterisiert werden wenn man einer unserer Differentialgleichungen (2)—(9) noch die Randbedingung

$$\frac{z_x(t, t)}{z_y(t, t)} = \text{konstant}\left(= \frac{a}{b}\right) \tag{12}$$

beilegt. Es ist also $f(t) = kg(t)$ und $X(t) = Y(t)$. Die Charakterisierung kann auch durch Spezialisierung der Gleichung (2) erfolgen:

(2') $$\frac{z_x}{z_y} = k\,\frac{f(x)}{f(y)}$$

Die Bedeutung der durch (11) angegebenen Funktionen besteht darin, daß eben aus ihnen durch „Mittelbildung“ d. h. durch Lösung der Gleichung $z(m, m) = z(x, y)$, die Mittelwerte der Gestalt $m(x, y) = F^{-1}[(1-q)F(x) + qF(y)]$ gebildet werden können. [Daß diese wirklich Mittelwerte sind, ist klar: $m(t, t) = t$.] Dies sind die sogenannten „quasiarithmetischen Mittelwerte“. Sie fallen mit den sogenannten „bisymmetrischen Mittelwerten“ [9]) zusammen. [Siehe unter c)].

b) Sind alle drei Skalen einander ähnlich (Figur 6), so haben wir

(13) $$aF(x) + bF(y) + c = F(z), \text{ d. h. } z = F^{-1}[aF(x) + bF(y) + c].$$

Es wurde an einer anderen Stelle[9]) bewiesen, daß diese Funktionen dadurch charakterisiert sind, daß sie „bisymmetrische Funktionen“ sind, d. h. der Funktionalgleichung

(14) $$z[z(x_1, y_1), z(x_2, y_2)] = z[z(x_1, x_2), z(y_1, y_2)]$$

genügen. Mit Differentialgleichungen können die Funktionen der Form (13) auch charakterisiert werden[5]), indem wir einer der Differentialgleichungen (2)–(9) *die Randbedingungsgleichung im erweiterten Sinne*

(8') $$\frac{z_{xy}}{z_x z_y} = \frac{z_{xy}[z(x, y), z(x, y)]}{z_y[z(x, y), z(x, y)]} - \frac{z_{xx}[z(x, y), z(x, y)]}{z_x[z(x, y), z(x, y)]},$$

oder

(8'') $$\frac{z_{xy}}{z_x z_y} = \frac{z_{xy}[z(x, y), z(x, y)]}{z_x[z(x, y), z(x, y)]} - \frac{z_{yy}[z(x, y), z(x, y)]}{z_y[z(x, y), z(x, y)]}$$

und die eigentliche Randbedingung (12) beifügen. [Es ist also $X(t) = Y(t) = Z(t)$.] Statt (12) kann wieder die spezielle Differentialgleichung (2') vorausgesetzt werden, dies macht aber (8') oder (8'') nicht überflüssig. Unsere Differentialgleichungen (2)—(9) sowie die Bedingungsgleichungen (12), (8') und (8'') wurden auch aus der Funktionalgleichung (14) *direkt* abgeleitet[5]).

c) Sind die drei Skalen nicht nur ähnlich, sondern sogar gleich, und fallen auch ihre Anfangspunkte in eine Gerade (Figur 7), so erhalten wir:

(15) $$(1-q)F(x) + qF(y) = F(z), \text{ d. h. } z = F^{-1}[(1-q)F(x) + qF(y)].$$

Diese Funktionen sind die quasiarithmetischen Mittelwerte. Sie sind[9]) durch die Funktionalgleichung (14) der Bisymmetrie und durch

(16) $$z(t, t) = t$$

charakterisiert. Mit Differentialgleichungen geschieht die Charakterisierung, indem wir einer der Gleichungen (2)—(9) außer der Randbedingung (12) noch die zweite Randbedingung (16) hinzunehmen (beide geben die Werte

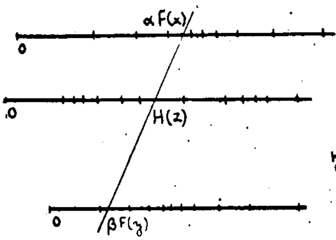
---

[9]) Siehe J. Aczél, On mean values, *Bulletin of the American Math. Society*, **54** (1948), S. 392—400.

der Funktion bzw. ihrer Derivierten auf der Gerade $y=x$ an). (In unserem Falle kann offensichtlich (12) durch

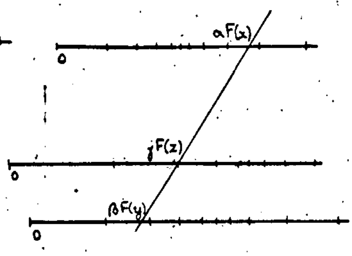
$$(12') \qquad z_y(t,t) = \text{konstant} \ (=q)$$

ersetzt werden.) Es wurde an anderer Stelle[5]) bewiesen, daß aus der Funktionalgleichung (14) nebst der Bedingung (16) *direkt* die Differentialgleichungen (2)—(9), sowie die Randbedingungen (12) und (12′) abgeleitet werden können [(2) ergibt sich auch hier in der Form (2′)]



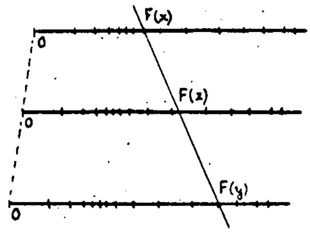
$a\,F(x) + b\,F(y) = H(z)$

Figur 5.



$a\,F(x) + b\,F(y) + c = F(z)$

Figur 6.



$(1-q)F(x) + q\,F(y) = F(z)$

Figur 7.

d) In Figur 8 wird das Nomogramm der Figur 7 noch weiter spezialisiert, indem auch noch die drei Träger äquidistant gezeichnet wurden. Dies bedeutet offenbar

$$(17) \qquad F(x)+F(y) = 2F(z), \ \text{d. h.} \ z = F^{-1}\left[\frac{F(x)+F(y)}{2}\right];$$

das sind die symmetrischen quasiarithmetischen Mittelwerte. Sie und nur sie[9]) erfüllen die Gleichungen (14), (16) und

$$(18) \qquad z(x,y) = z(y,x).$$

Bei der Charakterisierung durch Differentialgleichungen[5]) braucht man außer einer von unseren Differentialgleichungen und der Randbedingung (16), [statt (12)] die Randbedingung

$$(12'') \quad z_x(t,t) = z_y(t,t) \qquad \left[(2'') \quad \frac{z_x}{z_y} = \frac{f(x)}{f(y)}\right].$$

Übrigens folgt aus (16) und (18) die Gleichung (12′) mit $q=\frac{1}{2}$. Auch hier bleibt natürlich die Bemerkung am Ende von c) über die direkte Ableitbarkeit der Differentialgleichungen gültig.

(17) läßt sich auch in der Form $F^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right) = z[F^{-1}(u), F^{-1}(v)]$ schreiben. Das Interesse in der Untersuchung dieser Gleichung wurde von L. Fejér[7]) gezeigt.

Natürlich kann man ähnlich wie wir es hier getan haben, auch die Fälle a) und b) symmetrisieren durch das „in die Mitte-Rücken" der z-Skala (und durch Gleichsetzung der Skaleneinteilung der zwei unabhängigen Träger).

e) Sind die drei Träger parallel und äquidistant, fallen die Anfangspunkte der Skalen in eine Gerade und sind die zwei unabhängigen Skalen einander gleich und die z-Skale ihnen ähnlich mit halbiertem Maßstabe (Figur 9), so bedeutet dies

$$(19) \qquad F(x)+F(y)=F(z), \text{ d. h. } z=F^{-1}[F(x)+F(y)].$$

Diese Funktionen sind, wie es gezeigt wurde[10]), dadurch charakterisiert, daß sie „assoziativ" sind, d. h. der Funktionalgleichung

$$(20) \qquad z[z(x_1, x_2), x_3]=z[x_1, z(x_2, x_3)]$$

genügen. Wie wir es an anderer Stelle[5]) bewiesen haben, können die Funktionen (19) mit den aus (3) bzw. (4) spezialisierten Differentialgleichungen

$$(3') \quad z_x=\frac{f(x)}{f(z)} \qquad \textit{oder} \qquad (4') \quad z_y=\frac{g(y)}{g(z)}$$

nebst der Randbedingung (12″) charakterisiert werden. Diese folgen auch *direkt* aus (20)[5]). [ABEL[8]) leitete aus dieser Funktionalgleichung (20) *und* der Symmetrie (18) die Gleichungen (2″) und (19) ab.]

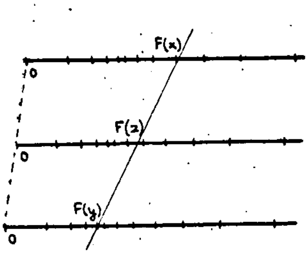
f) Sind die Träger parallel und äquidistant, fallen die Anfangspunkte in dieselbe Gerade und ist die z-Skala der x-Skala wieder mit halbem Maßstabe ähnlich, während die y-Skala einfach linear ist (Figur 10), so haben wir

$$(21) \qquad F(x)+y=F(z), \quad \text{d. h.} \quad z=F^{-1}[F(x)+y].$$

In einer in Vorbereitung stehenden Arbeit von J. MIKUSINSKI und dem Verf. wird gezeigt, daß diese Funktionen und nur diese die „Translationsgleichung" erfüllen:

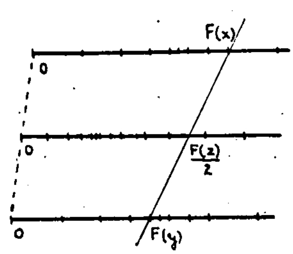
$$(22) \qquad z(x, y_1+y_2)=z[z(x, y_1), y_2].$$

Es wurde auch bewiesen[5]), daß die Funktionen (21) mit der [aus (22) direkt



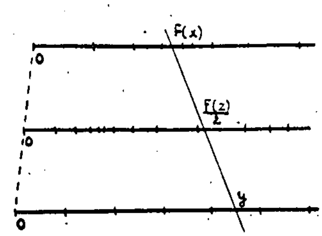
$\frac{F(x)+F(y)}{2}=F(z)$

Figur 8.



$F(x)+F(y)=F(z)$

Figur 9.



$F(x)+y=F(z)$

Figur 10.

---

10) J. ACZÉL, Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bulletin de la Société Math. de France,* **76** (1948), S. 59–64.

ableitbaren] Differentialgleichung (23) $\frac{z_x}{z_y}=f(x)$ (von y unabhängig) *oder*

$$(24)\quad z_y=k(z) \quad \textit{oder} \quad (25)\quad \frac{z_{xy}}{z_x}=\frac{z_{yy}}{z_y}$$

und der Randbedingung (16′) $z(x, 0)=x$ vollständig charakterisiert werden können.

§ 3.

Dem Leser wird es wohl auffallen, daß die Funktionstypen in § 1 (1) und § 2 a) (11) durch Funktionalgleichungen nicht charakterisiert wurden [da hier mehr als eine willkürliche Funktion auftritt, konnten wir ja *nicht* Funktionalgleichungen *desselben Typus* wie (14), (20), (22) erwarten], während in § 2 b) und e) eben die einer der ursprünglichen Differentialgleichungen (2)—(9) beigefügten charakteristischen *(eigentlichen)* Randbedingungen fehlten; dagegen gelang es uns in § 2 b), c), d), e), f) nicht mit der Spezialisierung *einer* der ursprünglichen Differentialgleichungen, *ohne Randbedingungen* auszukommen.

Es wäre kaum uninteressant diese Betrachtungen in dem Sinne zu verallgemeinern, daß jeder Funktionentypus in allen drei Weisen charakterisiert sei: A) durch eine Funktionalgleichung, B) durch eine spezialisierte Differentialgleichung, C) durch Beifügung von (eigentlichen) Randbedingungen zu einer ursprünglichen Differentialgleichung.

In manchen Spezialfällen ist es möglich, diese Lücken auszufüllen. Bezeichnen wir z. B. in § 2 e) die zweite Umkehrfunktion von $z=z(x, y)$ mit $y=z^{-1}(x, z)$. Falls die Funktion $e(x)=z^{-1}(x, x)$ existiert [wie man aus dem Beispiel der Funktion $z(x, y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$ sieht, muß sie nicht immer existieren; es ist leicht einzusehen, daß sie, falls existiert, konstant sein muß], so können wir die ursprünglich fehlende Charakterisierungsweise C) der Funktionen (19) ermitteln, indem wir der ursprünglichen Differentialgleichung (3) [*oder* (4)] die beiden Randbedingungen $z_x[x, e(x)]=1$ *und* $z_y[x, e(x)]=1$ beifügen. Die ähnliche Erledigung von Fällen, wo $e(x)$ nicht existiert, wäre hier besonders interessant.

(Eingegangen am 4. September 1949.)

Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique.

Par HENRI CARTAN à Paris et JACQUES DENY à Strasbourg.

1.

Dans la théorie classique du potentiel newtonien (ou plus généralement des potentiels d'ordre α de M. RIESZ), on peut distinguer deux problèmes fondamentaux:

Le *problème d'équilibre:* Tout compact C admet-il une distribution d'équilibre? Autrement dit: existe-t-il une distribution *positive* portée par C dont le potentiel soit égal à 1 sur C, à l'exception des points d'un sous-ensemble de capacité nulle?

Le *problème du balayage:* Toute distribution positive μ peut-elle être "balayée" sur un ensemble fermé quelconque F? Autrement dit: existe-t-il une distribution μ' portée par F, telle que les potentiels engendrés par μ et μ' soient égaux sur F, à l'exception des points d'un sous-ensemble de capacité nulle? [1])

On sait que le problème d'équilibre reçoit une réponse affirmative pour $0<\alpha\leqq 2$.[2]) La solution donnée par O. FROSTMAN [5] repose sur la remarque suivante, que l'auteur nomme "principe (élémentaire) du maximum": un potentiel continu, engendré par une distribution à support [3]) compact C, atteint son maximum sur C. Ce théorème s'étend au cas d'un potentiel qui n'est

---

[1]) Avec cette définition la distribution balayée μ' n'est *unique* que lorsque μ ne charge pas l'ensemble des points "irréguliers" de F, ce qui a lieu notamment lorsque le support de μ est disjoint de F, ou lorsque μ est d'énergie finie; dans le cas contraire la définition du balayage doit être précisée (cf. par exemple [6] et [3]). Dans ce travail il sera seulement question du balayage d'une distribution d'énergie finie ou d'une masse ponctuelle située dans l'extérieur de l'ensemble fermé sur lequel on effectue le balayage, de sorte qu'on pourra adopter la définition du texte.

[2]) Pour $2<\alpha<m$ (où m est la dimension de l'espace), il existe encore une solution (et une seule) dans le champ des distributions de SCHWARTZ (cf. [4], chap. I), mais ce n'est plus une distribution *positive.*

[3]) Rappelons que le *support* d'une mesure μ est le plus petit ensemble *fermé* dont le complémentaire est de mesure nulle pour μ.

pas continu, sous la forme suivante, que nous appellerons *premier principe du maximum* ou *principe de Frostman:* Si le potentiel U d'une distribution positive μ est majoré par une constante c sur le support de μ, on a $U \leqq c$ dans tout l'espace [4]).

Soit maintenant F un ensemble fermé et x un point extérieur à F; le problème du balayage sur F de la distribution ε^x (masse-unité placée au point x) se ramène aussitôt, grâce à la transformation de KELVIN, au problème d'équilibre pour le compact F' déduit de F par une inversion de centre x. C'est le point de vue de M. RIESZ [10]. Du balayage d'une masse ponctuelle on passe ensuite facilement au cas général.

Pour des généralisations ultérieures, il est utile d'édifier une théorie autonome du balayage, indépendamment du problème d'équilibre. On sait qu'on peut le faire en utilisant le résultat suivant, que nous appellerons *second principe du maximum:* soient U et V les potentiels engendrés par des distributions positives d'énergie finie μ et ν; si on a $U \leqq V$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour μ (nous dirons alors: *presque partout pour* μ), on a $U \leqq V$ dans tout l'espace. [5])

Dans la première partie de ce travail nous envisagerons des potentiels pris par rapport à un *noyau quelconque* K (satisfaisant toutefois à des conditions précisées au paragraphe 2). Nous donnerons plusieurs systèmes (équivalents) de conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir ce noyau K pour que le problème d'équilibre et le problème du balayage d'une distribution positive d'énergie finie admettent tous les deux une réponse affirmative. Nous verrons notamment que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le "premier principe du maximum" et le "second principe du maximum" soient vérifiés tous deux. La conjonction de ces deux principes sera appelée *principe complet du maximum.*

Dans la deuxième partie de ce travail nous imposerons a priori des conditions de "régularité" au noyau K. Pour de tels noyaux *réguliers,* nous donnerons un critère (théorème 3) qui permet de reconnaître effectivement si un noyau donné (supposé régulier) satisfait au principe complet du maximum.

Chemin faisant, nous aurons été amenés à introduire diverses classes de fonctions positives. Lorsque le second principe est satisfait, toutes ces classes coïncident; les fonctions de ces classes jouent alors, pour le noyau K, le rôle joué par les fonctions surharmoniques $\geqq 0$ dans le cas du noyau newtonien. Une étude plus approfondie de ces fonctions "surharmoniques" (déjà considérées par M. RIESZ et O. FROSTMAN dans le cas des "noyaux d'ordre α") fera l'objet d'une publication ultérieure.

---

[4]) Ce théorème a été établi par A. J. MARIA [8] dans le cas newtonien et par O. FROSTMAN [5] pour les potentiels d'ordre α.

[5]) Ce théorème, qui est vrai notamment dans le cas du noyau d'ordre α pour $0<\alpha \leqq 2$, est appelé *principe du maximum* dans l'article [1], de la terminologie duquel nous nous écartons donc un peu.

I. NOYAUX GÉNÉRAUX.

2. Rappel de définitions et lemmes.

On se placera une fois pour toutes dans l'espace euclidien R^m à m dimensions. On emploiera la notation additive pour les opérations du groupe R^m, et on désignera par $|x|$ la distance euclidienne du point x à l'origine 0.

Dans un but de concision on appellera "mesure" (mesure de RADON) toute distribution *positive*. La mesure invariante par translation sera notée dx.

On supposera toujours que le noyau K est une mesure de type positif dont la transformée de Fourier est une fonction (positive) à croissance lente ainsi que son inverse[6]); il ne sera pas fait d'autre hypothèse sur K dans cette première partie.

Par définition le *potentiel* engendré par la mesure μ est la mesure $K*\mu$, pourvu que ce produit de composition ait un sens (ce qui a certainement lieu si μ est à support compact). Si la mesure $K*\mu*\check{\mu}$ est définie et est à densité continue f[7]) on dit que μ est d'énergie finie (infinie dans le cas contraire); *l'énergie* de μ est alors le nombre $f(0) = \mathrm{Sp}\, K*\mu*\check{\mu}$ (trace de f), qui est non négatif, et nul dans le seul cas $\mu \equiv 0$. On désigne par $\|\mu\|$ la racine carrée de ce nombre.

Si λ et μ sont d'énergie finie, la mesure $K*\lambda*\check{\mu}$ est à densité continue; la quantité $(\lambda, \mu) = \mathrm{Sp}\, K*\lambda*\check{\mu}$ est appelée *énergie mutuelle* de λ et μ; elle vérifie l'inégalité de Schwarz: $(\lambda, \mu) \leqq \|\lambda\|\,\|\mu\|$.

On peut définir l'énergie de la distribution $\lambda - \mu$, différence de deux mesures λ et μ d'énergie finie: c'est le nombre non négatif $\|\lambda - \mu\|^2 = \|\lambda\|^2 + \|\mu\|^2 - 2(\lambda, \mu)$ (nul seulement si $\lambda = \mu$). La racine carrée de l'énergie est une norme sur l'espace vectoriel de ces distributions (la "norme-énergie"). Ainsi normé, cet espace vectoriel (préhilbertien) H n'est pas complet en général, mais *les sous-ensembles E et E_F de H, constitués respectivement par les mesures* (positives) *d'énergie finie et par les mesures d'énergie finie portées par un ensemble fermé F de R^m sont complets.*

Comme en théorie classique la notion d'énergie permet de définir la *capacité* d'un ensemble compact, puis les capacités intérieure et extérieure d'un ensemble quelconque. Un ensemble de capacité intérieure nulle est de mesure intérieure nulle pour la mesure invariante. Nous dirons qu'une propriété a lieu à peu près partout (à p.p.p.) si elle ne tombe en défaut qu'aux points d'un ensemble de capacité intérieure nulle; elle a lieu quasi-partout (q.p.) si l'ensemble exceptionnel est de capacité extérieure nulle.

---

[6]) C'est-à-dire: si $\mathfrak{K}$ est la transformée de K, il existe un nombre $p > 0$ tel que les intégrales $\int \frac{\mathfrak{K}\, dx}{(1+|x|^2)^p}$ et $\int \frac{dx}{\mathfrak{K}(1+|x|^2)^p}$ soient toutes deux finies. Cette restriction suffit pour entraîner les lemmes qui vont être rappelés et dont on pourra trouver la démonstration dans [4], chap. I et II.

[7]) C'est-à-dire si les mesures $K*\mu*\check{\mu}$ et $f\,dx$ coïncident; $\check{\mu}$ désigne la mesure symétrique de μ.

Si μ est une mesure d'énergie finie, le produit de composition $K*\mu$ est défini. C'est une mesure (positive), dont on montre qu'elle a la forme $f(x)dx$, où f est une fonction sommable sur tout compact (pour la mesure de Lebesgue). A priori, cette fonction n'est définie qu'à un ensemble de mesure nulle près; mais on montre ([4], Chap. II, théorème 1) qu'on peut la préciser à un ensemble de capacité extérieure nulle près. On a le résultat précis suivant: à chaque mesure μ d'énergie finie est associée une classe $\Phi(\mu)$ de fonctions $\geqq 0$, deux à deux égales q.p., de telle manière que les conditions suivantes soient satisfaites:

1° si $K*\mu$ est à densité continue f, la fonction f appartient à la classe $\Phi(\mu)$;

2° la classe $\Phi(\mu_1+\mu_2)$ est constituée par les sommes d'une fonction de $\Phi(\mu_1)$ et d'une fonction de $\Phi(\mu_2)$;

3° si $f\in\Phi(\mu)$ et si $\lambda\in E$, l'énergie mutuelle (μ, λ) est égale à l'intégrale $\int f d\lambda$;

4° si une suite de mesures $\mu_n \in E$ converge fortement[8]) vers une $\mu\in E$, et si $f_n\in\Phi(\mu_n)$, il existe une suite partielle telle que les fonctions f_{n_k} convergent q.p. vers une fonction $f\in\Phi(\mu)$, la convergence étant uniforme sur le complémentaire d'un ensemble ouvert de capacité arbitrairement petite.

Il en résulte que si $f\in\Phi(\mu)$, il existe, pour tout nombre $h>0$, un ouvert ω de capacité $\leqq h$, tel que la restriction de f au complémentaire de ω soit une fonction *continue*.

Désormais, on désignera par U^μ l'une quelconque des fonctions de la classe $\Phi(\mu)$, et on l'appellera le *potentiel* de la mesure μ supposée d'énergie finie.

Les lemmes suivants seront constamment utilisés par la suite:

L e m m e 1. (Régularisation.) *Soit $\{\alpha_n\}$ une suite de mesures portées par un compact fixe et convergeant vaguement*[9]) *vers la mesure ε (masse-unité à l'origine). Pour toute $\mu\in E$, le produit de composition $\mu_n=\mu*\alpha_n$ est une mesure de E qui converge fortement vers μ. On peut donc extraire, de la suite des potentiels U^{μ_n}, une suite partielle convergeant p.q. vers U^μ (la convergence étant uniforme sur le complémentaire d'un ouvert de capacité arbitrairement petite).*

Si les mesures α_n sont de la forme $\varphi_n(x)dx$ (où chaque φ_n est sommable et bornée), les potentiels U^{μ_n} sont *continus*; la suite μ_n est alors dite *régularisante* pour μ.

L e m m e 2. (Suites monotones de potentiels.) *Si $\{U^{\mu_n}\}$ est une suite décroissante (q.p.) de potentiels d'énergie finie, ou une suite croissante (q.p.) de*

8) C'est-à-dire $\|\mu-\mu_n\|$ tend vers 0.

9) Ceci signifie que $\lim \int f(x)\,d\alpha_n(x)=f(0)$ pour toute fonction continue f.

potentiels d'énergie uniformément bornée, μ_n converge fortement vers une mesure $\mu \in E$, et on a: $\lim U^{\mu_n} = U^{\mu}$ *q.p.*

Lemme 3. (Propriété de minimum.) *Soient F un ensemble fermé, et f une fonction positive, sommable pour toute mesure de E, et majorée sur F par un potentiel d'énergie finie; il existe une mesure de E_F et une seule, soit μ, qui vérifie:*

$$U^{\mu} \geqq f \text{ à p.p.p. sur } F,$$
$$U^{\mu} = f \text{ presque partout pour } \mu;$$

cette mesure μ est, parmi les mesures $\nu \in E_F$, celle qui rend minimum l'intégrale:

$$I_f(\nu) = \int (U^{\nu} - 2f)\, d\nu. \text{ [10]}$$

Si $f = U^{\lambda}$, avec $\lambda \in E$, l'opération qui fait passer de λ à μ est appelée dans [5] le "balayage imprécis de λ sur F". Si λ admet une balayée λ' sur F (au sens donné au § 1), on a $\mu = \lambda'$.

Si F est compact, la constante 1 satisfait aux hypothèses du lemme 3. La mesure μ correspondante coïncide avec la distribution d'équilibre dans le cas où celle-ci existe.

3. Classes de fonctions associées au noyau.

Dans ce paragraphe et le suivant, on ne considère que des fonctions f positives jouissant de la propriété suivante: *la restriction de f à tout compact est sommable pour toute mesure d'énergie finie.* Un potentiel d'énergie finie, une fonction continue positive, vérifient cette condition. Parmi ces fonctions, on va considérer trois classes de plus en plus restreintes, qui toutes contiennent trivialement la constante 0.

Fonctions de la classe α. *Une fonction f est dans la classe α si, pour tout compact C, il existe une mesure $\mu \in E_C$ telle que $U^{\mu} = f$ à p.p.p. sur C.*

Les fonctions de la classe α jouissent des propriétés suivantes:

(i) La mesure μ associée à une telle fonction f et à un compact quelconque C satisfait à *$U^{\mu} \leqq f$ à p.p.p. dans l'espace.* En effet cette mesure satisfait aux conditions du lemme 3 et par conséquent est *unique;* soit alors c un compact en tout point duquel on ait $U^{\mu} > f$, et ν la mesure (unique) de E_F telle que $U^{\nu} = f$ à p.p.p. sur l'ensemble fermé $F = C \cup c$; puisque $\mu \in E_F$, on a $\mu = \nu$ (lemme 3), ce qui exige que c soit de capacité nulle.

(ii) La somme de deux fonctions de la classe α est dans la classe α.

---

[10]) Sous différentes formes ce lemme est d'un usage courant en théorie du potentiel (cf. notamment [5], p. 66, et [1], § V). L'existence et l'unicité de la mesure minimisant "l'intégrale de Gauss" $I_f(\nu)$ résultent facilement de ce que l'espace E_F est convexe et complet (application d'un théorème bien connu de F. Riesz).

Fonctions de la classe β. *Une fonction f est dans la classe β si*
a) *sur tout compact, f est majorée par un potentiel d'énergie finie*[11]),

b) *pour toute $\mu \in E$ à support compact F_μ, la relation $U^\mu \leqq f$ à p.p.p. sur F_μ entraîne $U^\mu \leqq f$ à p.p.p. dans l'espace.*

Observons qu'on obtient encore la classe β en substituant à b) la condition en apparence plus forte :

b′) *Pour toute $\mu \in E$ la relation $U^\mu \leqq f$ presque partout pour μ entraîne $U^\mu \leqq f$ à p.p.p. dans tout l'espace.*

Il suffit évidemment de montrer que toute fonction f de la classe β satisfait à b′): soit en effet μ une mesure de E (à support quelconque), avec $U^\mu \leqq f$ presque partout pour μ. Il existe une suite croissante de compacts E_n contenus dans l'ensemble des points où $U^\mu \leqq f$, et tels que μ soit limite des restrictions μ_n de μ aux ensembles E_n. D'après le lemme 2, on a $U^\mu = \lim U^{\mu_n}$ q.p. Or on a $U^{\mu_n} \leqq f$ à p.p.p. dans l'espace (d'après b)), donc, à la limite, $U^\mu \leqq f$ à p.p.p. Par suite f satisfait à b′).

Les fonctions de la classe β jouissent des propriétés suivantes:

(i) La borne inférieure de deux fonctions de la classe β est dans la classe β.

(ii) Si une fonction de la classe β est majorée par un potentiel d'énergie finie, elle est à p.p.p. égale à un potentiel d'énergie finie.

(iii) La restriction d'une fonction de la classe β à un compact C est égale à p.p.p. sur C au potentiel d'une mesure de E_C.

(i) est évident; quant aux propriétés (ii) et (iii), elles s'obtiennent très simplement à l'aide du lemme 3 et de la propriété b′), en prenant pour l'ensemble F qui figure dans l'énoncé du lemme 3 soit l'espace R^m tout entier, soit le compact C. La propriété (iii) exprime que *la classe β est contenue dans la classe α.*

Fonctions de la classe γ. *Une fonction f est dans la classe γ si elle vérifie la condition* a) *et si, pour toute mesure $\mu \in E$, la fonction $\inf(U^\mu, f)$ est à p.p.p. égale à un potentiel d'énergie finie.*

Les fonctions de la classe γ jouissent des propriétés évidentes :

(i) La borne inférieure de deux fonctions de la classe γ est dans la classe γ.

(ii) Si une fonction de la classe γ est majorée par un potentiel d'énergie finie, elle est à p.p.p. égale à un potentiel d'énergie finie.

La classe γ est contenue dans la classe β (et a fortiori dans la classe α): il suffit de montrer que toute fonction f de la classe γ satisfait à b′; or soit μ une mesure de E telle que $U^\mu \leqq f$ presque partout pour μ; posons

---

11) Si f et g sont deux fonctions définies à p.p.p., on dit que f est majorée par g si on a $f \leqq g$ à p.p.p.

$\inf(U^{\mu}, f) = U^{\nu}$ à p. p. p.; comme U^{ν} est majorée par U^{μ} et $U^{\nu} = U^{\mu}$ presque partout pour μ, on a: $\|\mu - \nu\|^2 = \int (U^{\mu} - U^{\nu})\, d\mu - \int (U^{\mu} - U^{\nu})\, d\nu \leqq 0$, d'où $\mu = \nu$, ce qui entraîne $U^{\mu} \leqq f$ à p. p. p.

4. Second principe du maximum.

Considérons les hypothèses suivantes:

Hypothèse I. *La classe α contient tous les potentiels d'énergie finie.*

Cette hypothèse exprime *la possibilité de faire le balayage de toute mesure d'énergie finie sur tout compact.* La propriété (i) des fonctions de la classe α montre que *le potentiel engendré par la mesure balayée est majoré dans tout l'espace par le potentiel de la mesure donnée.* En considérant des suites croissantes de compacts on en déduit la possibilité de faire le balayage sur tout fermé.

L'hypothèse I est satisfaite si on suppose seulement que la classe α contient les potentiels continus d'énergie finie. A cet effet désignons par V l'espace hilbertien obtenu en complétant (pour la norme-énergie) l'espace déjà considéré H des distributions qui sont différences de deux mesures de E; désignons par V_C l'espace obtenu d'une manière analogue à partir de E_C (V_C est un sous-espace linéaire de V). Dire que le potentiel U^{μ} est dans la classe α revient à dire que, pour tout compact C, la "projection" de μ sur V_C appartient au sous-ensemble E_C [12]). Or les mesures de potentiels continus (et même les mesures à densité continue et support compact) sont denses dans E (d'après les lemmes 1 et 2); si les projections sur V_C de ces mesures sont des éléments de E_C, il en est de même pour toutes les mesures de E, d'où le résultat.

Hypothèse II. *La classe β contient tous les potentiels d'énergie finie.*

Autrement dit, si μ et ν sont des mesures quelconques de E, et si $U^{\mu} \leqq U^{\nu}$ presque partout pour μ, on a $U^{\mu} \leqq U^{\nu}$ à p. p. p. (donc q. p., comme on le voit aussitôt en régularisant). Cette hypothèse n'est autre que l'énoncé du *second principe du maximum,* rappelé au § 1 (à cette différence près que la dernière majoration a lieu seulement q. p., puisque, dans le cas général envisagé ici, un potentiel est une fonction qui n'est définie qu'à un ensemble de capacité extérieure nulle près).

Hypothèse III. *La classe γ contient tous les potentiels d'énergie finie.*

Autrement dit, si λ et μ sont des mesures quelconques de E, il existe une mesure $\nu \in E$ telle que $U^{\nu} = \inf(U^{\lambda}, U^{\mu})$ à p. p. p. (et on peut montrer que l'égalité a même lieu q. p)

---

12) En effet si la projection de μ sur V_C est une *mesure* μ', on a $(\mu, \nu) = (\mu', \nu)$ pour toute $\nu \in E$, ce qui exprime que $U^{\mu'} = U^{\mu}$ à p. p. p. sur C; si inversement μ admet une balayée μ' sur C, la distribution $\mu - \mu'$ est orthogonale à toutes les mesures $\nu \in E_C$, donc à V_C.

Théorème 1. *Les trois hypothèses précédentes sont équivalentes; lorsqu'elles sont satisfaites, les classes α, β et γ sont identiques.*

A priori les hypothèses I, II et III sont de plus en plus fortes, puisque les classes α, β et γ sont de plus en plus restreintes. Il suffit donc de montrer que, moyennant l'hypothèse I, toute fonction de la classe α est dans la classe β, et toute fonction de la classe β est dans la classe γ.

Faisons donc l'hypothèse I, et soient f une fonction de la classe α, et μ une mesure de E à support compact C, telle que $U^{\mu} \leqq f$ à p. p. p. sur C; il s'agit de montrer que $U^{\mu} \leqq f$ à p. p. p. dans l'espace. Puisque f est dans la classe α il existe dans E_C une mesure ν (unique) satisfaisant à $U^{\nu} = f$ à p. p. p. sur C, $U^{\nu} \leqq f$ à p. p. p. dans l'espace. D'après l'hypothèse I toute $\lambda \in E$ admet une balayée λ' sur C, et on a $(\lambda', \mu) = (\lambda, \mu)$, $(\lambda', \nu) = (\lambda, \nu)$ (puisque μ et ν sont deux éléments de E_C). Comme U^{μ} est majoré sur C par U^{ν}, on a $(\lambda', \mu) \leqq (\lambda', \nu)$, d'où $(\lambda, \mu) \leqq (\lambda, \nu)$ pour toute $\lambda \in E$, ce qui entraîne $U^{\mu} \leqq U^{\nu}$ à p. p. p., et a fortiori $U^{\mu} \leqq f$ à p. p. p.

Soient maintenant f une fonction de la classe β, et μ une mesure quelconque de E. U^{μ} est dans la classe β, puisque U^{μ} est dans la classe α par hypothèse, et qu'on vient de montrer que toute fonction de la classe α est dans la classe β. D'après les propriétés (i) et (ii) des fonctions de la classe β, la fonction $\inf(f, U^{\mu})$ est un potentiel d'énergie finie, ce qui montre bien que f est dans la classe γ.

Remarques: *a*) L'hypothèse II est satisfaite si on suppose seulement que les potentiels *continus* d'énergie finie [13]) sont dans la classe β, car alors ils sont aussi dans la classe α, et on a montré que dans ce cas l'hypothèse I est satisfaite.

b) De même l'hypothèse III est satisfaite si on suppose seulement que les potentiels continus d'énergie finie sont dans la classe γ, mais on peut même donner un énoncé un peu meilleur: l'hypothèse III est satisfaite si on suppose seulement que la borne inférieure de deux potentiels *continus* d'énergie finie est un potentiel. [14])

c) La somme de deux fonctions de la classe α est dans la classe α; donc, moyennant l'une quelconque des hypothèses I, II ou III, la somme de deux fonctions de la classe β (ou de la classe γ) appartient à la même classe.

---

[13]) Ou même seulement si les potentiels engendrés par les mesures à densité continue et à support compact sont dans la classe β.

[14]) Pour établir ce résultat on montre d'abord que l'hypothèse affaiblie entraîne la propriété suivante: Si $\{U^{\nu_n}\}$ est une suite de potentiels continus et si l'énergie $\|\nu_n\|$ est uniformément bornée, il existe une mesure $\nu \in E$ telle que $\liminf U^{\nu_n} = U^{\nu}$ q. p. (c'est une conséquence facile du lemme 2). Soient alors λ et μ deux mesures quelconques de E; il suffit de considérer deux suites régularisantes $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$ convergeant fortement vers λ et μ, les potentiels continus U^{λ_n} et U^{μ_n} convergeant q. p. vers U^{λ} et U^{μ} (lemme 1), et d'appliquer la propriété précédente à la suite $\{\nu_n\}$ définie par $U^{\nu_n} = \inf(U^{\lambda_n}, U^{\mu_n})$.

5. Le principe complet du maximum.

Nous venons d'établir trois énoncés équivalents du second principe du maximum (hypothèses I, II et III). Occupons-nous maintenant du problème d'équilibre; à cet effet exprimons successivement que la constante *un* est dans l'une des classes α, β ou γ; on obtient les conditions suivantes, qui sont de force croissante, mais qui deviennent équivalentes si le noyau satisfait au second principe:

Condition (1): *Tout compact admet une distribution d'équilibre.* Le potentiel engendré (potentiel d'équilibre) est alors ≤ 1 à p. p. p. (et même q. p.) dans tout l'espace (propriété (i) des fonctions de la classe α).

Condition (2): *Si le potentiel U^μ est majoré par* 1 (à p. p. p.) *sur le support de μ* (qu'on peut supposer compact), *il en est de même dans tout l'espace.* C'est le *principe de Frostman* (cf. § 1); il entraîne la condition (1), c'est-à-dire l'existence d'une distribution d'équilibre pour tout compact (même si on ne suppose pas que le noyau satisfait au second principe).

Condition (3): *Quelle que soit la mesure $\mu \in E$, la fonction* $\inf(U^\mu, 1)$ *est un potentiel.*

On appellera *principe complet du maximum* la conjonction de l'une quelconque des hypothèses I, II ou III et de l'une quelconque des conditions (1), (2) ou (3), c'est-à-dire la conjonction du second principe du maximum et du principe de Frostman. Il revient au même de dire que les potentiels d'énergie finie et les constantes non négatives sont dans la classe β, ou encore (d'après la remarque *c*, § 4) que la classe β contient les fonctions de la forme $U^\nu + c$, où ν est une mesure de E et c une constante non négative.

Finalement on obtient l'énoncé suivant du principe complet: *Quelles que soient les mesures μ et ν de E et la constante $c \geq 0$, la relation $U^\mu \leq U^\nu + c$ presque partout pour μ entraîne $U^\mu \leq U^\nu + c$ q. p. dans l'espace.* Il est utile d'observer que dans cet énoncé on peut se borner à considérer des potentiels U^ν *continus* (remarque *a*, § 4) et des mesures μ à *support compact.* Nous verrons que dans le cas d'un noyau "régulier" on peut également supposer les potentiels U^μ continus.

II. NOYAUX RÉGULIERS.

6. Définitions.

Nous supposerons dans cette deuxième partie que le noyau K, satisfaisant toujours aux hypothèses générales de la première partie (§ 2), vérifie également les trois conditions de régularité suivantes:

(a) *Le noyau est une fonction $K(x)$*[15]) *strictement positive, continue, finie en tout point x sauf peut-être en* 0.

[15]) C'est-à-dire que la mesure K est de la forme $K(x)dx$, la fonction $K(x)$ étant sommable sur tout compact; d'ailleurs la sommabilité de $K(x)$ sur tout compact résulte aussi de la condition (c).

(b) *L'ensemble e_s des points x tels que $K(x) \geqq s$ est compact quel que soit $s > 0$, et convexe pour s suffisamment grand.*

(c) *Il existe un nombre $h < m$ (où m est la dimension de l'espace R^m), tel que $K(x) \leqq 2^h K(2x)$ pour tout x d'un voisinage de 0.*

Remarques. 1⁰) Puisque K est de type positif, on a $K(x) = K(-x)$ pour tout x; *les compacts e_s admettent donc l'origine pour centre de symétrie.*

2⁰) Si $K(0) < +\infty$, la seconde partie de la condition (b) est satisfaite (les e_s étant vides pour $s > K(0)$); la condition (c) est aussi satisfaite.

3⁰) Si $K = K(r)$ est une fonction continue de la seule distance $|x| = r$, strictement positive, décroissante pour $r > 0$, avec $K(r) \to 0$ pour $r \to +\infty$, la condition (b) est satisfaite.

Notation. Si F désigne un ensemble quelconque, on notera F^x l'ensemble déduit de F par la translation x; de même μ^x sera la mesure déduite de la mesure μ par cette translation.

Lemme 4: *Dans un voisinage de 0 la valeur moyenne $K_s(x)$ de K sur le compact e_s^x est majorée par $AK(x)$, où A est une constante indépendante de s (suffisamment grand).*[16])

Esquissons brièvement la démonstration: on observe d'abord que, pour s assez grand, $K_s(0) \leqq 2^h s/(1-2^{h-m})$; pour cela désignons par I_k l'ensemble des points x définis par $K(2^k x) \geqq s$, $K(2^{k+1} x) < s$ $(k = 0, 1, \ldots)$; e_s, privé de l'origine, est la réunion des I_k; or on a $K(x) \leqq 2^h s$ pour $x \in I_0$ et, par récurrence, $K(x) \leqq 2^{h(k+1)} s$ pour $x \in I_k$; de ces majorations on déduit aisément l'inégalité annoncée.

Soit alors x un point arbitraire d'un voisinage (suffisamment petit) de 0. Posons $K(x/2) = t$, $F = e_s^x \cap e_t$, $F' = e_s^x \cap (R^m - e_t)$ (F est vide pour $s > t$, d'après la convexité et la symétrie des e_s); on a $\int_{F'} K(y)\,dy / \text{mes}(e_s^x) \leqq t \leqq 2^h K(x)$ (dans tous les cas); $\int_F K(y)\,dy / \text{mes}(e_s^x) = 0$ pour $s > t$, sinon cette quantité est, d'après la première partie de la démonstration, $\leqq 2^h t/(1-2^{h-m})$; on a donc bien $K_s(x) \leqq AK(x)$, en prenant $A = 2^h(1 + 2^h/(1-2^{h-m}))$.

Suivant l'usage classique, nous appellerons *potentiel* engendré par une mesure (positive) quelconque μ, la fonction $\int K(x-y)\,d\mu(y)$, qui est définie pour *tout* x (à valeurs finies ou infinies) et *semi-continue inférieurement* (s. c. i.). Désignons-la provisoirement par $V^\mu(x)$. Il faut vérifier que cette définition du potentiel est en accord avec celle donnée dans la première partie (§ 2),

---

[16]) Ce lemme a été établi par O. Frostman ([5], p. 27) dans le cas des potentiels d'ordre α.

autrement dit que la fonction V^{μ} est dans la classe $\Phi(\mu)$, lorsque μ est une mesure d'énergie finie. Le théorème 2 ci-dessous montrera qu'il en est bien ainsi. Avant de le démontrer, il nous faut étudier la fonction V^{μ} dans le cas où la mesure μ est à support compact; si $K(0)<+\infty$, V^{μ} est alors continue, et par suite appartient à la classe $\Phi(\mu)$. On peut donc se borner au cas où $K(0)=+\infty$; dans ce cas:

Lemme 5. *Soit μ une mesure à support compact; en tout point x la valeur moyenne $V_s^{\mu}(x)$ de V^{μ} sur e_s^x converge vers $V^{\mu}(x)$ lorsque s tend vers $+\infty$.*

Ce lemme est évident si $V^{\mu}(x)=+\infty$ (grâce à la s. c. i.); sinon il existe un voisinage de x tel que, si μ' est la restriction de μ à ce voisinage, $V^{\mu'}(x)$ soit arbitrairement petit. Il suffit alors d'appliquer le lemme 4, qui entraîne $V_s^{\mu'}(x)\leqq A V^{\mu'}(x)$ pour s assez grand, et de tenir compte de la continuité de $V^{\mu-\mu'}$ au voisinage de x.

Remarque. Le lemme 5 exprime que V^{μ} est partout limite de ses régularisées par les fonctions $\psi_n/\mathrm{mes}(e_n)$, où ψ_n est la fonction caractéristique de e_n. V^{μ} est également limite de ses régularisées par une suite de fonctions continues $\varphi_n\geqq 0$; ne dépendant que de $K(x)$, s'annulant, pour n assez grand, en dehors de voisinages de plus en plus petits de l'origine, et telles enfin que $\int \varphi_n(x)\,dx=1$.

On peut alors énoncer d'une façon précise:

Théorème 2. *Pour qu'une mesure μ soit d'énergie finie, il faut et il suffit que l'intégrale*

$$\iint K(x-y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) \tag{1}$$

soit finie, et alors sa valeur est égale à l'énergie $\|\mu\|^2$. Dans ce cas la fonction $V^{\mu}(x)=\int K(x-y)\,d\mu(y)$ est dans la classe $\Phi(\mu)$.

Par la suite nous pourrons donc adopter la notation usuelle U^{μ} au lieu de V^{μ}, que μ soit d'énergie finie ou non.

Pour démontrer le théorème, considérons d'abord une mesure μ de E à support compact, et soit μ_n le produit de composition de μ par la distribution homogène de la masse $+1$ sur e_n; V^{μ_n} est continue, donc appartient à la classe $\Phi(\mu_n)$; comme μ_n converge fortement vers μ, on peut extraire de la suite V^{μ_n} une suite partielle convergeant q. p. vers une fonction $U^{\mu}\in\Phi(\mu)$ (lemme 1), mais comme V^{μ_n} converge partout vers V^{μ} (lemme 5), on a bien $V^{\mu}\in\Phi(\mu)$ et par suite, pour toute $\lambda\in E$:

$$(\lambda,\mu)=\int U^{\mu}d\lambda=\int V^{\mu}d\lambda;$$

en particulier:

$$\|\mu\|^2=\int V^{\mu}d\mu=\iint K(x-y)\,d\mu(x)\,d\mu(y).$$

Soit inversement μ une mesure à support compact, pour laquelle l'intégrale (1) soit finie; les régularisées μ_n sont d'énergie finie et il résulte du lemme 2 que $\|\mu_n\|^2 = \int V^{\mu_n} d\mu_n$ converge vers $\int V^{\mu} d\mu$ [17]); $\|\mu_n\|$ étant uniformément bornée, μ_n converge faiblement vers une mesure de E qui n'est autre que μ (puisque μ_n converge vaguement vers μ); μ_n converge donc fortement vers μ (puisque μ_n est la régularisée de μ qui, on vient de le voir, est d'énergie finie), et $\|\mu\|^2 = \lim \|\mu_n\|^2 = \int V^{\mu} d\mu$. On a bien montré l'identité entre les deux définitions de l'énergie pour toute mesure à support compact.

Soit enfin μ une mesure quelconque, μ_p sa restriction à la boule $B(0, p)$; on a dans tous les cas (compte tenu de la s. c. i.): $\|\mu\|^2 = \lim \|\mu_p\|^2 = \lim \int V^{\mu_p} d\mu_p = \int V^{\mu} d\mu$, et d'autre part: $V^{\mu} = \lim V^{\mu_p}$ partout, ce qui achève de démontrer le théorème.

Pour la suite il sera utile d'étendre le lemme 5 à certaines mesures qui ne sont pas à support compact; un point essentiel de la démonstration du lemme 5 était la continuité du potentiel $U^{\mu-\mu'}$ au voisinage de x; la généralisation suivante est donc immédiate, et il suffit de l'énoncer:

L e m m e 5 bis. Soit μ une mesure telle que, pour tout point x, on puisse trouver un compact C tel que le potentiel engendré par les masses extérieures à C soit arbitrairement petit au voisinage de x; alors *la valeur moyenne $U_s^{\mu}(x)$ de U^{μ} sur e_s^x converge vers $U^{\mu}(x)$ lorsque s tend vers $+\infty$.*

R e m a r q u e s. 1⁰) Avec des hypothèses convenables de "régularité à l'infini" pour K, *toute* mesure de potentiel non identiquement infini satisfait aux conditions du lemme 5 bis, et par suite tout potentiel est partout limite de ses régularisés [18]). Par exemple il en est ainsi lorsque la condition suivante est vérifiée: A tout compact C on peut associer un nombre k et un compact C' tels que $K(x-y) \leq kK(x-z)$ pour tous points $y \in C$, $z \in C$, x non $\in C'$. Les conséquences d'une telle hypothèse rélativement à la théorie des fonctions "surharmoniques" seront étudiées dans un travail ultérieur.

2⁰) Si K satisfait au principe de Frostman, toute mesure μ d'énergie finie dont le potentiel est majoré par le potentiel d'une mesure λ à support compact satisfait aux conditions du lemme 5 bis. En effet à tout nombre $\alpha > 0$ on peut associer un compact C tel que U^{λ}, donc U^{μ}, soit $\leq \alpha$ sur le

---

17) En effet on a, d'après le théorème de FUBINI-TONELLI, $\int V^{\mu} d\mu = V^{\nu}(0)$, avec $\nu = \mu * \check{\mu}$, et $\int V^{\mu_n} d\mu_n = V^{\nu_n}(0)$, où ν_n s'obtient en régularisant ν par *deux* médiations successives.

18) La nécessité d'une hypothèse de régularité à l'infini est mise en évidence par l'exemple suivant: $K(x) = e^{-x^2}$ (avec $m = 1$), $\mu = e^{x^2} dx/(1+x^2)$; on a $U^{\mu}(0) < +\infty$, $U^{\mu}(x) = +\infty$ pour tout $x \neq 0$, donc $\lim\limits_{s \to \infty} U_s^{\mu}(0) = +\infty \neq U^{\mu}(0)$. Notons toutefois que ce noyau, bien que de type positif, ne satisfait pas à toutes les hypothèses exigées au § 2 (l'inverse e^{x^2} de sa transformée de Fourier n'est pas à croissance lente).

complémentaire de C; or soit μ_1 la restriction de μ au complémentaire de C; a fortiori $U^{\mu_1} \leqq \alpha$ sur le complémentaire de C, donc $U^{\mu_1} \leqq \alpha$ q. p. (principe de FROSTMAN), et enfin $U^{\mu_1} \leqq \alpha$ partout (d'après la s. c. i. de U^{μ_1}).

7. Le théorème d'Evans-Vasilesco.

Soit μ une mesure à support compact, ou plus généralement une mesure satisfaisant aux conditions du lemme 5 bis; le théorème suivant, établi par G. C. EVANS [4 bis] et F. VASILESCO [11] dans le cas newtonien, et étendu par O. FROSTMAN [5] (p. 26) aux potentiels d'ordre α, est également une conséquence des hypothèses de régularité:

Lemme 6. *Si la restriction de U^μ au support d'une telle mesure μ est continue, U^μ est une fonction continue dans tout l'espace.*

Une simple adaptation des démonstrations classiques montre en effet que le résultat est vrai toutes les fois que, dans un voisinage de 0, la relation $K(x) \leqq K(y)$ entraîne $K(x) \leqq qK(x-y)$, où q est une constante positive indépendante de x et de y (le noyau K étant supposé d'autre part continu, symétrique et fini pour $x \neq 0$). Or cette condition est réalisée lorsque les compacts e_s sont convexes pour s assez grand et que la relation $K(x) \leqq qK(2x)$ est satisfaite pour x voisin de 0.

On en déduit la conséquence suivante:

Lemme 7. *Toute mesure $\mu \in E$ est limite croissante de mesures μ_n à support compact, dont le potentiel U^{μ_n} est continu dans tout l'espace et converge partout vers U^μ.*

Soit en effet $\{\omega_n\}$ une suite décroissante d'ouverts dont la capacité tend vers 0 avec $1/n$, la restriction de U^μ au complémentaire de ω_n étant continue (une telle suite existe puisque la fonction partout définie U^μ est dans la classe $\Phi(\mu)$). Désignons par μ_n la restriction de μ au compact $C_n = B_n - B_n \cap \omega_n$, où B_n est la boule fermée $B(0, n)$; la suite croissante $\{\mu_n\}$ converge vaguement (et même fortement) vers μ [19]), et le potentiel U^{μ_n} converge partout vers U^μ. [20]).

Il reste à montrer que U^{μ_n} est continu dans tout l'espace, et pour cela que la restriction de U^{μ_n} au compact C_n, qui contient le support de μ_n, est continue. Or les restrictions à C_n des fonctions s. c. i. U^{μ_n} et $U^{\mu-\mu_n}$ ayant pour somme une fonction continue (la restriction de U^μ), chacune d'elles est continue.

---

[19]) Les μ_n ont en effet une limite (vague ou forte) $\nu \leqq \mu$, et la différence $\mu - \nu$ est portée par l'intersection des ω_n, qui est de capacité extérieure nulle; il en résulte que tout compact contenu dans cette intersection est de mesure nulle pour la mesure $\mu - \nu$ dont l'énergie est finie, et donc que $\mu - \nu$ est nulle.

[20]) Cela résulte des propriétés élémentaires de l'intégrale d'une fonction s. c. i. (non négative) par rapport à une suite croissante de mesures.

Remarque. Si F est un ensemble de mesure nulle pour μ, on peut évidemment astreindre les mesures μ_n de l'énoncé ci-dessus à avoir leur support contenu dans le complémentaire de F.

8. Classes de fonctions associées à un noyau régulier.

Considérons les deux classes de fonctions $\geqq 0$, dont l'analogie avec les classes β et γ de la première partie est évidente [21]).

Classe B: *f est dans la classe B si f est s. c. i. et si, pour toute $\mu \in E$, la relation $U^{\mu} \leqq f$ presque partout pour μ entraîne $U^{\mu} \leqq f$ partout.*

Classe C: *f est dans la classe C si, pour toute $\mu \in E$, la fonction* $\inf(U^{\mu}, f)$ *est partout égale à un potentiel (d'énergie évidemment finie).*

Ces définitions entraînent aisément les remarques suivantes:

1⁰) *La classe C est contenue dans la classe B*: on observe d'abord que toute fonction f de la classe C est s. c. i. [22]); soit alors μ une mesure quelconque de E, avec $U^{\mu} \leqq f$ presque partout pour μ, et posons $U^{\nu} = \inf(U^{\mu}, f)$; le raisonnement utilisé au § 3 pour montrer que la classe γ est contenue dans la classe β prouve encore que $\mu = \nu$, d'où $U^{\mu} \leqq f$ partout.

2⁰) *La classe B est identique à la suivante* (qui est plus large en apparence seulement):

Classe B': *f est dans la classe B' si f est s. c. i. et si, pour toute mesure μ à support compact et à potentiel continu, la relation $U^{\mu} \leqq f$ sur le support de μ entraîne $U^{\mu} \leqq f$ partout.*

Il suffit de montrer que toute fonction f de la classe B' est dans la classe B; or soit $\mu \in E$, avec $U^{\mu} \leqq f$ presque partout pour μ. D'après le lemme 7 et la remarque qui le suit, μ est limite d'une suite croissante de mesures μ_n dont le support est compact et contenu dans l'ensemble des points x tels que $U^{\mu}(x) \leqq f(x)$, et dont le potentiel U^{μ_n} est continu et converge partout vers U^{μ}; comme f est dans la classe B', on a partout $U^{\mu_n} \leqq f$, d'où, à la limite, la propriété à démontrer: $U^{\mu} \leqq f$ partout.

3⁰) *La borne inférieure de deux fonctions de la classe B (respect. de la classe C) est dans la même classe.*

C'est une conséquence évidente des définitions.

---

[21]) On pourrait aussi définir une classe A analogue à la classe α, mais cela exigerait une étude approfondie des points irréguliers que nous n'envisagerons pas ici; dans le cas du noyau d'ordre α $(0 < \alpha < 2)$, cela conduirait à la définition bien connue des fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire de M. Riesz [10] et O. Frostman [7].

[22]) Si en effet on pose $U^{\nu_n} = \inf(n U^{\mu}, f)$, où μ est une mesure de E non nulle (donc de potentiel strictement positif dans tout l'espace), on voit que f est partout limite d'une suite croissante de fonctions s. c. i., donc est elle-même s. c. i.

4°) *Si une fonction f de la classe B est majorée par un potentiel d'énergie finie, il existe une $\mu \in E$ telle que $U^{\mu} \leqq f$ partout, $U^{\mu} = f$ à p. p. p.*; en effet f est alors dans la classe β, et, d'après la propriété (ii) des fonctions de cette classe, il existe une $\mu \in E$ avec $U^{\mu} = f$ à p. p. p., donc $U^{\mu} \leqq f$ partout (puisque f est dans la classe B).

Comme application de la remarque 2°), montrons que, dans le cas d'un noyau régulier, le principe complet du maximum (§ 5) est équivalent à la forme suivante, qu'on peut appeler la "forme élémentaire" (par analogie avec la forme élémentaire du principe de Frostman):

(M) *Si les potentiels d'énergie finie U^{μ} et U^{ν} sont continus, et si la borne supérieure de $U^{\mu} - U^{\nu}$ est strictement positive, cette borne est atteinte sur le support de μ, supposé compact.*

En effet, d'après la définition du § 5, le principe complet exprime que la classe B contient toutes les fonctions de la forme $U^{\nu} + c$, où U^{ν} est un potentiel *continu* d'énergie finie, et c une constante non négative. Il est clair que cette hypothèse entraîne (M); inversement on voit facilement, en raisonnant par l'absurde, que si (M) est vérifié, les fonctions de la forme $U^{\nu} + c$ sont dans la classe B', et par suite dans la classe B; d'où le résultat.

9. Critère pour le principe complet du maximum.

Le théorème suivant donne un critère pour le principe complet, et met en évidence les propriétés principales des fonctions surharmoniques par rapport à un noyau régulier satisfaisant à ce principe:

Théorème 3. *Pour qu'un noyau régulier K satisfasse au principe complet du maximum, il faut et il suffit qu'il existe une famille $\mathfrak{F}$ de mesures σ, distinctes de ε*[23]), *de masse totale $\leqq 1$, telles que $U^{\sigma} \leqq K$ partout, et telles que, pour tout voisinage V de 0, il existe une mesure $\sigma \in \mathfrak{F}$ avec $U^{\sigma} = K$ hors de V.*

S'il en est ainsi, tout potentiel, toute constante $\geqq 0$ est dans les classes B et C; en outre, pour une fonction $f \geqq 0$ et s. c. i., les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) *f est dans la classe B.*

(ii) *f est dans la classe C.*

(iii) *f est limite d'une suite croissante de potentiels d'énergie finie.*

(iv) *f satisfait en tout point x à la relation:*

(2) $$f(x) \geqq \int f(x+y)\, d\sigma(y) \quad \text{pour toute } \sigma \in \mathfrak{F}.$$

---

[23]) Rappelons que ε désigne la mesure qui consiste en une masse $+1$ placée à l'origine.

Pour démontrer ce théorème nous établirons successivement les propositions suivantes:

Proposition 1. *Si le noyau $K(x)$ satisfait au principe complet, il est dans la classe B.*

Il suffit de montrer que K est alors dans la classe B': soit donc μ une mesure à support compact F, dont le potentiel est continu et majoré par K sur F; d'après la continuité de K et de U^μ on a, pour toute constante $c>0$, $U^\mu \leqq K+c$ dans un voisinage de F; si donc U^{μ_n} et K_n sont les régularisés de U^μ et de K (par exemple par médiations sur les e_n^x) on a $U^{\mu_n} \leqq K_n + c$ sur le support de μ_n pour n assez grand; K_n étant lui-même un potentiel d'énergie finie, cette relation a lieu dans tout l'espace (principe complet); il suffit alors de faire $n \to +\infty$, puis $c \to 0$, pour obtenir la relation à démontrer: $U^\mu \leqq K$ partout.

Proposition 2. *Si le noyau satisfait au principe complet, il existe une famille $\mathfrak{F}$.*

On va montrer qu'on peut "balayer" la mesure ε (qui est d'énergie finie seulement si $K(0) < +\infty$) sur l'ensemble fermé (non borné) F_s des points x tels que $K(x) \leqq s$; ou tout au moins qu'on peut trouver, pour tout $s>0$, une mesure ε_s de masse totale $\leqq 1$, portée par F_s, dont le potentiel vaut K en tout point intérieur de F_s et est majoré partout par K. De telles mesures ε_s constitueront évidemment une famille $\mathfrak{F}$.

Soit à cet effet un nombre t $(0<t<s)$; K est borné sur le compact $F_s \cap e_t$, donc il existe (d'après le lemme 3 et la proposition 1 ci-dessus) une mesure μ de E portée par ce compact, avec $U^\mu = K$ à p. p. p. sur ce compact, $U^\mu \leqq K$ partout.

La masse totale de cette mesure μ est $\leqq 1$: soit en effet γ la distribution d'équilibre de la boule fermée $B_r = B(0, r)$ (l'existence de γ découle du principe complet); par définition $U^\gamma \leqq 1$ q. p., $U^\gamma = 1$ q. p. sur B_r; comme γ est à support compact, le lemme 5 entraîne $U^\gamma \leqq 1$ partout, $U^\gamma = 1$ en tout point intérieur de B_r; on peut donc écrire:

$$\int_{B_r} d\mu \leqq \int U^\gamma d\mu = \int U^\mu d\gamma \leqq \int K d\gamma = U^\gamma(0) = 1,$$

d'où le résultat, pour $r \to +\infty$.

L'énergie de μ est donc bornée, indépendamment de t; lorsque t tend vers 0 en décroissant, U^μ croît (d'après le second principe), donc μ converge fortement vers une mesure ε_s portée par F_s, de masse totale $\leqq 1$, de potentiel $U^{\varepsilon_s} = K$ q. p. sur F_s (lemme 3), donc $\leqq K$ partout (proposition 1). Il reste à vérifier qu'on a effectivement $U^\mu = K$ en tout point intérieur de F_s, ce qui résulte de la continuité de K et de ce que U^{μ} est partout limite de ses régularisées (remarque 2° du lemme 5 bis). [24])

D é f i n i t i o n. Nous venons de voir que le critère est nécessaire; *à l'avenir nous supposerons l'existence d'une famille* $\mathfrak{F}$ et nous appellerons *fonction surharmonique* toute fonction $f \geqq 0$, s. c. i., telle que, en tout point x, on ait la relation

$$f(x) \geqq \int f(x+y)\, d\sigma(y) = \int f\, d\sigma^{x} \text{ pour toute } \sigma \in \mathfrak{F}. \tag{2}$$

Cette condition est indépendante de la famille $\mathfrak{F}$ particulière considérée, comme cela résultera du théorème 3 lorsqu'il aura été démontré: l'une quelconque des conditions (i), (ii), (iii) de ce théorème caractérisera en effet les fonctions surharmoniques.

P r o p o s i t i o n 3. *Tout potentiel est surharmonique.*

Un potentiel U^{μ} (engendré par une mesure positive tout à fait arbitraire) étant s. c. i., il suffit de montrer (2), qui est une conséquence du théorème de Fubini (que les intégrales écrites soient finies ou non):

$$\int U^{\mu}\, d\sigma^{x} = \int U^{\sigma^{x}}\, d\mu \leqq \int K(y-x)\, d\mu(y) = U^{\mu}(x).$$

On démontre aussi facilement les propositions suivantes:

Toute constante c $(0 \leqq c \leqq +\infty)$ est surharmonique.

La borne inférieure de deux fonctions surharmoniques est surharmonique.

La limite d'une suite croissante de fonctions surharmoniques est surharmonique.

P r o p o s i t i o n 4. *Toute fonction surharmonique est dans la classe B.*

Il suffit de montrer qu'une telle fonction f est dans la classe B'; ou encore: si une mesure μ, à support compact C, engendre un potentiel continu, et si la borne supérieure c de $U^{\mu}-f$ est strictement positive, cette borne est atteinte en un point de C (au moins).

A cet effet désignons par F l'ensemble des points x tels que $U^{\mu}(x)-f(x)=c$; cet ensemble est non-vide et compact [25]); nous allons montrer que l'hypothèse: "C est disjoint de F" conduit à une contradiction.

[24]) On peut même préciser davantage: pour s assez grand, $U^{\mu_s} = K$ en tout point de F_s sans exception. Supposons en effet s assez grand pour que e_s soit convexe, et soit x un point frontière; on peut trouver un voisinage V de x tel que, si μ est la restriction de ε_s à V, $U^{\mu}(x)$ soit arbitrairement petit. Pour t assez grand la valeur moyenne de U^{μ} sur $e_t^x \cap F_s$ est $\leqq 2^m A\, U^{\mu}(x)$ (d'après le lemme 4 et les hypothèses de convexité), d'où le résultat, compte tenu de la continuité de $U^{\varepsilon_s - \mu}$ au voisinage de x.

[25]) Car $U^{\mu}-f$ est semi continue supérieurement, et $U^{\mu}(x)$ est arbitrairement petit pour $|x|$ assez grand (μ étant à support compact).

En effet la distance de tout point de C à tout point de F est alors bornée inférieurement par un nombre strictement positif; il existe donc une mesure $\sigma \in \mathfrak{F}$ telle que la fonction $U^{\sigma}(y-x)$, potentiel engendré au point y par la mesure σ^x déduite de σ par la translation x, soit égale à $K(y-x)$ quels que soient $y \in C$ et $x \in F$. On a donc:

$$\int U^{\mu}(x+y)\,d\sigma(y) = \int U^{\mu} d\sigma^x = \int U^{\sigma^x} d\mu = \int K(y-x)\,d\mu(y) = U^{\mu}(x).$$

En rapprochant de (2) il vient, pour tout $x \in E$:

$$\int (U^{\mu}-f)\,d\sigma^x \geqq U^{\mu}(x) - f(x) = c.$$

La moyenne, par rapport à la mesure σ^x, de la fonction $U^{\mu}-f-c \leqq 0$ étant $\geqq 0$, l'ensemble des points où cette fonction est <0 est de mesure nulle pour σ^x; comme cet ensemble est ouvert (car f est s. c. i.), on a $U^{\mu}-f=c$ en tout point du support de σ^x (et en outre la masse totale de σ^x doit être égale à 1).

Le support F_{σ} de σ n'est pas réduit au seul point 0 (puisque σ est de masse totale 1 et est, par hypothèse, distincte de ε); soit un point $z \neq 0$, $z \in F_{\sigma}$; le point $x_1 = x+z$ appartient au support de σ^x, donc aussi à F; en recommençant le raisonnement avec x_1 on met en évidence une suite infinie de points $x_k = x+kz$ $(k=0, 1, \ldots)$ appartenant tous à F, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que F est compact.

Le résultat est donc établi. Il résulte des propositions 3 et 4 que tout potentiel et toute constante positive sont dans la classe B, ce qui démontre que tout noyau régulier qui possède une famille $\mathfrak{F}$ satisfait au principe complet.

La démonstration du théorème fondamental sera achevée si nous prouvons les propositions 6 et 7 qu'on va lire ci-dessous; voici d'abord une proposition auxiliaire:

P r o p o s i t i o n 5. *Soient U^{μ} un potentiel quelconque, et f une fonction s. c. i.; si on a $U^{\mu} \leqq f$ partout, et $U^{\mu}=f$ presque partout (pour la mesure de Lebesgue), alors $U^{\mu}=f$ partout.*

Si U^{μ} est majorée par le potentiel d'une mesure à support compact, U^{μ} est partout limite de ses régularisées (lemme 5 bis), qui sont égales aux régularisées de f, d'où $U^{\mu} \geqq f$ (en vertu de la s. c. i. de f), et par suite $U^{\mu}=f$ partout.

Dans le cas général, soit ν une mesure de E à support compact; $g = \inf(U^{\mu}, U^{\nu})$ est surharmonique (proposition 3); elle est donc dans la classe B, et il existe une mesure $\lambda \in E$ avec $U^{\lambda}=g$ à p. p. p., $U^{\lambda} \leqq g$ partout (remarque 4° du § 8). D'après la première partie de la démonstration, $U^{\lambda}=g$ partout, d'où $U^{\lambda} = \inf(U^{\nu}, f)$ presque partout, et $U^{\lambda} \leqq \inf(U^{\nu}, f)$ partout, ce qui entraîne (toujours d'après la première partie) $U^{\lambda} = \inf(U^{\nu}, f)$ partout. En résumé on a $\inf(U^{\mu}, U^{\nu}) = \inf(f, U^{\nu})$ pour toute $\nu \in E$ à support compact, d'où finalement $U^{\mu} = f$ partout.

Proposition 6. *La classe B est contenue dans la classe C.*

Soient effet f une fonction de la classe B, et U^{μ} un potentiel d'énergie finie; U^{μ} est dans la classe B et il en est de même de $\inf(U^{\mu}, f)$ (remarque 3° du § 8); cette fonction étant majorée par un potentiel d'énergie finie, il existe une mesure $\lambda \in E$ avec $U^{\lambda} \leq \inf(U^{\mu}, f)$ partout, $U^{\lambda} = \inf(U^{\mu}, f)$ à p. p. (remarque 4° du § 8); la proposition 5 entraîne alors l'égalité à démontrer: $U^{\lambda} = \inf(U^{\mu}, f)$ partout.

Proposition 7. *Toute fonction de la classe C est limite d'une suite croissante de potentiels d'énergie finie.*

Soient en effet f une telle fonction et μ une mesure de E non identiquement nulle; la fonction $\inf(nU^{\mu}, f)$ est partout égale à un potentiel d'énergie finie U^{μ_n} (proposition 6), et on a partout: $f = \lim U^{\mu_n}$.

Ceci achève la démonstration du théorème. Signalons les corollaires suivants: *tout potentiel est limite d'une suite croissante de potentiels d'énergie finie; toute fonction surharmonique majorée par un potentiel d'énergie finie est partout égale à un potentiel d'énergie finie.*

10. Remarques finales.

a) Rappelons que la forme élémentaire du principe de FROSTMAN est vérifiée lorsque le noyau régulier K est sousharmonique (au sens ordinaire) en tout point $x \neq 0$ (cf. [5]); pour un tel noyau, tout compact admet une distribution d'équilibre dont le potentiel vaut 1 en tout point intérieur au compact.

b) La définition donnée par F. RIESZ des fonctions surharmoniques [9] concorde bien avec celle donnée ici lorsque le noyau est le noyau newtonien r^{2-m} (dans l'espace de dimension $m \geq 3$); en effet il suffit alors de prendre pour famille $\mathfrak{F}$ celle des distributions homogènes, de masse totale un, portées par les sphères de centre 0.

c) Un noyau régulier étant donné, il se peut qu'une famille $\mathfrak{F}$ soit en évidence a priori. Par exemple si le noyau est $r^{\alpha-m}$ ($m \geq 2, 0 < \alpha < 2$), on obtient les mesures d'une famille $\mathfrak{F}$ en effectuant la transformation de KELVIN sur les distributions d'équilibre des boules de centre 0 (cf. [10]). En utilisant cette famille $\mathfrak{F}$ pour caractériser les fonctions surharmoniques relatives à un tel noyau, on retrouve une des deux définitions des fonctions "surharmoniques d'ordre α" données par M. RIESZ; elle généralise la définition de F. RIESZ.

Signalons rapidement un autre exemple de noyau pour lequel une famille $\mathfrak{F}$ est en évidence a priori: il s'agit de la solution élémentaire, bien connue, de l'équation $\Delta U - a^2 U = 0$ (a constante > 0). Par exemple, pour trois dimensions, on obtient le noyau e^{-ar}/r, qui est évidemment régulier; sa transformée de Fourier $(a^2 + 4\pi^2 r^2)^{-1}$ (à un facteur constant positif près) est bien une fonction positive à croissance lente, ainsi que son inverse, de sorte que la fonction e^{-ar}/r est bien le noyau d'une théorie du potentiel. Pour ce noyau, associons à la sphère de centre 0 et de rayon r la distribution de la masse totale $ar/\operatorname{sh} ar$, répartie uniformément sur la sphère: lorsque r varie on obtient une famille $\mathfrak{F}$ dont l'existence prouve que *le noyau* e^{-ar}/r *satisfait au principe complet.* Dans un travail ultérieur, nous étudierons plus en détail ce noyau et les fonctions surharmoniques correspondantes.

Références bibliographiques.

[1] H. Cartan, Sur les fondements de la théorie du potentiel, *Bulletin de la Société Math. de France,* **69** (1941), p. 71—96.

[2] H Cartan, Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels, *ibidem,* **73** (1945); p. 74—106.

[3] H. Cartan, Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, *Annales Université de Grenoble,* **22** (1946), p. 221—280.

[4] J. Deny, Les potentiels d'énergie finie, *Acta Math.,* **82** (1950), p. 107—183.

[4 bis] G. C. Evans, On potentials of positive mass, *Transactions American Math. Society,* **37** (1935), p. 226—253.

[5] O. Frostman, Potentiels d'équilibre et capacité des ensembles, *Thèse* (Lund, 1935).

[6] O. Frostman, Sur le balayage des masses, *ces Acta,* **9** (1938), p. 43—51.

[7] O. Frostman, Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire, *Arkiv för Math., Astronomi och Fysik,* **26 A** (1939).

[8] A. J. Maria, The potential of a positive mass and the weight function of Wiener, *Proceedings National Academy of Sciences, USA,* **20** (1934), p. 485—489.

[9] F. Riesz, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, *Acta Math.,* **54** (1930), p. 321—360.

[10] M. Riesz, Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels, *ces Acta,* **9** (1938), p. 1—42.

[11] F. Vasilesco, Sur la continuité du potentiel à travers les masses, etc., *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **200** (1935), p. 1173—1174.

(Reçu le 27 octobre 1949)

Remarques sur l'approximation des fonctions continues.

Par J. FAVARD à Paris.

1. On sait fort peu de choses sur l'approximation orientée dans les espaces fonctionnels réticulés. En dehors de quelques évidences, seuls sont connus un petit nombre de résultats dûs presque tous à M. L. FEJÉR[1]); ils concernent les séries de cosinus (où de sinus) des fonctions positives monotones (ou concaves) dans l'intervalle $0 < x < \pi$.

Dans cette note nous allons nous occuper d'un problème analogue, mais avec des données interpolatrices, c'est-à-dire que sont connues les valeurs de la fonction sur un ensemble dénombrable de valeurs de la variable, dense sur le segment où la fonction est définie.

Le résultat que nous avons en vue se déduit d'une remarque sur la suite des polynomes de Bernstein donnant le théorème qui nous intéresse dans le cas des points divisant le segment en parties égales.

Chemin faisant nous indiquons une voie nouvelle pour établir un résultat que j'ai déjà donné[2]) sur les fonctions dont les différences divisées d'un ordre donné restent bornées ou ne changent pas de signe.

2. Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x, définie et continue, par exemple, pour $0 \leqq x \leqq 1$; pour n entier naturel posons:

$$\Delta_n^1(k) = f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$\Delta_n^2(k) = \Delta_n^1(k+1) - \Delta_n^1(k) = f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et, en général,

$$\Delta_n^p(k) = \Delta_n^{p-1}(k+1) - \Delta_n^{p-1}(k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-p).$$

Désignons par $x_0, x_1, \ldots$ des valeurs différentes de la variable, comprises dans le segment: $0 \leqq x \leqq 1$; en posant $[x] = f(x)$, les différences divisées

---

[1]) L. FEJÉR. Gestaltliches über die Partialsummen und ihre Mittelwerte bei der Fourierreihe und der Potenzreihe, *Zeitschrift für angewandte Math. und Mech.*, **13** (1933), pp. 80–88; On new properties of the arithmetical means of the partial sums of Fourier series, *Journal of Math. and Phys.*, **13** (1934), pp. 1–17.

[2]) J. FAVARD, Sur une généralisation de la condition de Lipschitz d'ordre un, *Mathematica, Timişoara*, **18** (1942), pp. 26–36.

d'ordre $1, 2, \ldots, p$ sont définies de proche en proche par:

$$[x_0, x_1] = \frac{[x_0]-[x_1]}{x_0-x_1}; \ldots; [x_0, x_1, \ldots, x_p] = \frac{[x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}]-[x_1, x_2, \ldots, x_p]}{x_0-x_p};$$

ce sont des fonctions symétriques des noeuds, et si la dérivée d'ordre p de $f(x)$ existe et est continue, on a

$$[x_0, x_1, \ldots, x_p] = \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!}$$

où ξ désigne un nombre compris entre les x_i $(0 \leqq i \leqq p)$.

On trouve immédiatement

$$\left[\frac{k+1}{n}, \frac{k}{n}\right] = n\Delta_n^1(k), \ldots, \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \ldots, \frac{k+p}{n}\right] = \frac{n^p}{p!}\Delta_n^p(k), \ldots.$$

Enfin la relation

$$[x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p, x_{p+1}](x_{p+1}-x_0) = [x_0, \ldots, x_p](x_i-x_0) + \\ + [x_1, \ldots, x_{p+1}](x_{p+1}-x_i)$$

montre qu'étant donné un ensemble quelconque de noeuds, les différences divisées d'ordre p sont comprises entre les bornes inférieure et supérieure des différences divisées formées avec $p+1$ points consécutifs; de cette remarque et de la continuité de la fonction, on déduit que si, pour p donné, les quantités

$$\frac{n^p}{p!}\Delta_n^p(k) \qquad (k=0, \ldots, n-p;\ n \geqq p)$$

restent bornées en module, ou gardent un signe constant, il en est de même des différences divisées $[x_0, x_1, \ldots, x_p]$, quelles que soient les valeurs x_i.

3. On sait que, lorsque n augmente indéfiniment, la suite des polynomes de Bernstein

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

converge uniformément vers $f(x)$ dans le segment $0 \leqq x \leqq 1$; un calcul simple donne

$$B_n'(f) = n\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n^1(k)\binom{n-1}{k} x^k(1-x)^{n-k-1},$$

c'est-à-dire que $B_n'(f)$ est le polynome de Bernstein d'ordre $n-1$ d'une fonction qui, au point $\frac{k}{n-1}$, prend la valeur $n\Delta_n^1(k) = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$. De là on passe immédiatement à la dérivée d'ordre p $(\leqq n)$

$$B_n^{(p)}(f) = n(n-1)\ldots(n-p+1)\sum_{k=0}^{n-p} \Delta_n^p(k)\binom{n-p}{k} x^k(1-x)^{n-k-p} =$$

$$= p!\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-p}\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \ldots, \frac{k+p}{n}\right]\binom{n-p}{k} x^k(1-x)^{n-k-p}.$$

Ces relations montrent immédiatement qu'une fonction telle que

$$\Delta_n^p(k) \geqq 0 \qquad (k = 0, \ldots, n-p\,;\; n \geqq p)$$

peut être approchée par une suite de polynomes ayant une dérivée d'ordre p positive; en particulier toute fonction monotone, ou concave, ou convexe peut être approchée par une suite de polynomes monotones, ou concaves, ou convexes à partir de la suite des données $\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$.

4. À titre d'application, montrons par exemple qu'une fonction continue telle que

$$|n^2 \Delta_n^2(k)| \leqq M_2$$

où M_2 désigne une constante, admet presque-partout une dérivée seconde bornée. Soit M_0 une borne supérieure de $|f|$, on a

$$|B_n(f)| \leqq M_0, \quad |B_n''(f)| \leqq M_2;$$

il s'ensuit que

$$|B_n'(f)| \leqq 2M_0 + \frac{M_2}{2}.$$

Les polynomes $\{B_n'(f)\}$ forment donc une suite uniformément bornée et également continue en vertu de $|B_n''| \leqq M_2$; on peut donc en extraire une suite $B_\nu'(f)$ convergeant uniformément vers une limite qui est d'ailleurs la fonction $f'(x)$ dont l'existence est ainsi démontrée. On voit aussi que l'extraction conduisant de la suite $\{B_n'\}$ à la suite $\{B_\nu'\}$ n'est pas nécessaire, puisque toute suite convergente extraite de $\{B_n'\}$ doit converger vers $f'(x)$; la suite $\{B_n'\}$ converge donc uniformément vers $f'(x)$ qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre 1 à cause de $|B_n''| \leqq M_2$, ce qui achève la démonstration.

Par des considérations analogues, on voit plus généralement qu'une fonction $f(x)$ continue telle que

$$|n^p \Delta_n^p(k)| \leqq M_p,$$

admet presque partout une dérivée bornée d'ordre p.

Remarquons d'ailleurs que, dans la démonstration ci-dessus $(p = 2)$, la convergence de B_n' vers f' aurait pu être démontrée directement grâce à l'inégalité, meilleure que celle utilisée,

$$|B_n'(f)| \leqq \inf \left\{2M_0 + \frac{M_2}{2},\; 2\sqrt{M_0 M_2}\right\},$$

mais la démonstration du texte se généralise plus facilement pour p quelconque.

Lorsque $f(x)$ est telle que $\Delta_n^p(k) \geqq 0$, on peut montrer, d'une manière analogue, que $f(x)$ admet presque partout dans le segment: $\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$, une dérivée bornée d'ordre $p-1$ croissante $(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, aussi petit que l'on veut); ce théorème s'obtient à partir du résultat suivant:

Si une fonction $\varphi(x)$, continue pour $0 \leqq x \leqq 1$, admet des dérivées jusque à l'ordre p, la dernière non décroissante, alors les dérivées $\varphi^{(q)}(x)$ $(q < p)$ sont bornées dans le segment $\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$, par des nombres qui ne dépendent que de ε et du maximum de $|\varphi(x)|$.

5. Venons enfin au résultat que nous voulons obtenir. Donnons une suite de noeuds $\{s_k^n\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ avec

$$0 \leqq s_1^n < s_2^n < \ldots < s_n^n \leqq 1;$$

supposons cette suite dense dans le segment $0 \leqq x \leqq 1$. Pour une fonction $f(x)$ continue, la fonction $\varphi_n(x)$ telle que: $\varphi_n(s_k^n) = f(s_k^n)$ $(0 \leqq k \leqq n)$, linéaire entre s_k^n et s_{k+1}^n $(0 \leqq k \leqq n-1)$ et constante pour $0 \leqq x \leqq s_0^n$ et pour $s_n^n \leqq x \leqq 1$, tend uniformément vers $f(x)$ lorsque n augmente indéfiniment, on a donc

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Or $\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)$ est une combinaison linéaire de deux $f(s_k^n)$ au plus, par suite on peut écrire

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(s_k^n)\, A_k^n(x) \tag{1}$$

où les $A_k^n(x)$ sont des polynomes de degré n au plus qui ne dépendent que des s_k^n et tels que $A_k^n(x) \geqq 0$ pour $0 \leqq x \leqq 1$.[3]

Lorsque $f(x)$ est de plus monotone, φ_n l'est aussi et dans le même sens, ainsi que le polynome du second membre de (1).

Si l'on suppose maintenant la fonction $f(x)$ convexe (ou concave), la fonction $\varphi_n(x)$ définie comme ci-dessus, sauf dans les segments $0 \leqq x \leqq s_0^n$ et $s_n^n \leqq x \leqq 1$ où $\varphi_n(x)$ est le prolongement linéaire de sa détermination d'entre s_0^n et s_1^n, respectivement d'entre s_{n-1}^n et s_n^n, est, elle aussi, convexe (ou concave) et tend uniformément vers $f(x)$. Donc on a le théorème:

La suite $\{s_k^n\}$ étant donnée, on peut indiquer une suite de polynomes $\{B_k^n(x)\}$ telle que, pour toute fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$,

$$P_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f(s_k^n)\, B_k^n(x)$$

tende uniformément vers $f(x)$, et que de plus, pour toute fonction $f(x)$ convexe (ou concave), $P_n(f; x)$ soit également convexe (ou concave).

Lorsque $f(x)$ admet une dérivée d'ordre $p > 1$, monotone dans l'intervalle $0 < x < 1$, je ne possède pas de méthode permettant, en général, de former, à partir de la connaissance des $f(s_k^n)$, une suite de polynomes à dérivée $p^{\text{ième}}$ monotone et tendant vers $f(x)$.

(Reçu le 3 novembre 1949)

---

[3]) J'ai donné ce résultat dans un article "Sur l'interpolation", *Bulletin de la Société Math. de France,* **67** (1939), pp. 102–113.

The meet-decomposition of elements in lattice-ordered semi-groups.

By LADISLAS FUCHS in Budapest.

1. In this paper we propose to deal with the structure of elements in a lattice-ordered semi-group, with special emphasis on properties similar to the decomposition theorems of ideal theory. Some concepts of abstract ideal theory are here generalized by using the cardinal notion of *"closure operator"*. The interest of this new method of discussing such problems lies not only in the novelty of the method, but also in the far-reaching generality of the theorems. The two fundamental ideal-theoretic concepts introduced on the basis of closure operator are "*Φ-prime*" and "*Φ-primary*" whose definitions are given in sections 3 and 4, respectively. We shall show how to extend the theory of primary and quasi-primary ideals to cover the new concepts. The theorems remain essentially the same; the proofs are logically complete here, only in some of the applications make we use of well-known results or familiar methods without giving any details.

2. Let G be a *commutative l-semi-group,* i. e. a closed[1]) lattice in which a binary commutative and associative multiplication is defined satisfying the distributive law

(2. 1) $$a(b \cup c) = ab \cup ac.$$

Let G have a zero 0 and a unity e such that

(2. 2) $$0 \leq x \leq e \quad \text{for all } x \in G,$$

(2. 3) $$0x = 0, \; ex = x \quad \text{for all } x \in G.$$

It is easy to show that (2. 1) implies the monotony of multiplication:

(2. 4) $$a \leq b \text{ implies } ax \leq bx \text{ for all } x \in G,$$

and this together with (2. 2) and (2. 3) implies

(2. 5) $$a_1 a_2 \ldots a_k \leq a_1 \cap a_2 \cap \ldots \cap a_k \quad \text{for any } k.$$

[1]) A lattice is called closed if it contains the join and meet of any subset of its elements.

We further assume that G enjoys the *ascending chain condition: no infinite ascending chain $a_1 < a_2 < \ldots$ with different terms exists.*

Let Φ be a *"closure operator"* defined on G; that is, Φ is a mapping $x \to \Phi(x)$ of all elements of G onto a subset of G such that[2])

(i) $x \leqq \Phi(x)$ *(extensivity)*;

(ii) $\Phi(\Phi(x)) = \Phi(x)$ *(idempotency)*;

(iii) $x \leqq y$ *implies* $\Phi(x) \leqq \Phi(y)$ *(monotony).*

$\Phi(x)$ will said to be the *closure of* x. If $\Phi(x) = x$, x is called *closed.* For the subset of all closed elements we may write $\Phi(G)$.

It is an elementary fact, used several times, that $x \leqq \Phi(y)$ is equivalent to $\Phi(x) \leqq \Phi(y)$. (Apply (i), (ii) and (iii).)

We shall consider closure operatoıs which are *linear*[3]) in the sense that

(iv) $$\Phi(x \cap y) = \Phi(x) \cap \Phi(y).$$

We observe that (iii) is a simple consequence of (iv), while (iii) implies only $\Phi(x \cap y) \leqq \Phi(x) \cap \Phi(y)$.

In what follows Φ will always mean any fixed linear closure operator.

As is shown in Birkhoff [1, p. 201], one may define in G the *residual $a : b$ of a by b* as the join of all x with $bx \leqq a$; this residual always exists under our assumptions on G. For the residuals one has the following important rules:

(2.6) $$(\wedge a_n) : b = \wedge (a_n : b),$$

(2.7) $$a : (\vee b_i) = \wedge (a : b_i),$$

(2.8) $$a : (bc) = (a : b) : c.$$

After these preliminaries we are now ready to introduce the fundamental concepts mentioned at the beginning.

3. An element p of G will be called *Φ-prime,* if $a_1 a_2 \ldots a_k \leqq p$ (k arbitrary) implies $a_i \leqq \Phi(p)$ for some subscript i. Trivial Φ-primes are e itself and all elements whose Φ-closure is e.

Defining the *radical* r of an element a as the join of all x such that $x^n \leqq a$ for some $n = n(x)$, we prove that if p is Φ-prime, then so is its radical r. In fact, supposing $a_1 \ldots a_k \leqq r$, we have[4]) $a_1^n \ldots a_k^n \leqq p$ for some n, and hence by the Φ-prime character of p, $a_i \leqq \Phi(p)$ for some i. Considering that $p \leqq r$, by (iii) we are led to $a_i \leqq \Phi(r)$, as stated.

E x a m p l e s. α) Let identically $\Phi(x) = \iota(x) = x$, that is to say, ι is the identity operator leaving every element of G unchanged. The ι-prime elements are those which are commonly called primes.

---

[2]) *"Closure operator"* is here used in the sense of Ward [1]. — Numbers in brackets refer to the bibliography given at the end of the paper.

[3]) This definition is due to Ward [1]. He has defined four types of linearity, of which our is the third.

[4]) Here we apply the ascending chain condition.

We note the trivial fact that x is necessarily Φ-prime if $\Phi(x)$ is ι-prime. It is further immediate that a Φ-closed element is Φ-prime if and only if it is ι-prime.

β) Let $\Phi(x)=\varrho(x)$ be the radical of x. Then the ϱ-primes are the *quasi-primary* elements in the sense that $ab\leqq p$ implies that some power of a or of b is $\leqq p$ (cf. FUCHS [1]). In this case one can prove that p is ϱ-prime if and only if its radical is ϱ-prime. For, if r is ϱ-prime and $a_1\dots a_k\leqq p\leqq r$, then $a_\iota\leqq\varrho(r)=r=\varrho(p)$; (the converse has already been proved in the second paragraph of this section). Since every radical is ϱ-closed, it follows the important fact that p is ϱ-prime if and only if its radical is ι-prime (cf. FUCHS [1], Definition 2).

γ) Let $\psi(x)$ be any fixed linear closure operator and define $\mu(x)$ as the meet of all ψ-primes which are minimal[5]) in G and contain x. It is clear that those elements which are contained in only one minimal ψ-prime of G are necessarily μ-primes. The most important and interesting subcase is when $\psi=\iota$; then taking for G the l-semi-group of the ideals of a commutative integrity domain with identity, integrally closed in its quotient-field, the μ-primes are those elements which are quasi-equal to some power of an ι-prime (quasi-equality is here to be taken in the sense of VAN DER WAERDEN-ARTIN[6])).

We turn now our attention to the consideration of the meet of Φ-primes.

Theorem 1.[7]) *The meet of a finite number of Φ-primes $p=p_1\cap\dots\cap p_r$ is Φ-prime again, if and only if one closure $\Phi(p_s)$ is contained in all other $\Phi(p_t)$.*

For, if this condition holds, then by linearity $\Phi(p)=\Phi(p_1\cap\dots\cap p_r)=$ $=\Phi(p_1)\cap\dots\cap\Phi(p_r)=\Phi(p_s)$, and $a_1\dots a_k\leqq p$ implies $a_1\dots a_k\leqq p_s$, whence $a_\iota\leqq\Phi(p_s)=\Phi(p)$ for some i, proving the assertion.

However, if in the set $\Phi(p_1),\dots,\Phi(p_r)$ there exist at least two different minimal ones, then $p=p_1\cap\dots\cap p_r$ is never Φ-prime. To prove this, suppose that p is Φ-prime. By formula (2.5) we get $p_1\dots p_r\leqq p$ and hence conclude that $p_s\leqq\Phi(p)$ for at least one subscript s, i.e., $\Phi(p_s)\leqq\Phi(p)$, and since $\Phi(p)\leqq\Phi(p_t)$ for $t=1,2,\dots,r$, this result proves what is stated in theorem 1.

Consider the set P of the meets of all subsets of Φ-primes in G. P is clearly closed under meet and consists, by the ascending chain condition, of all elements in G representable as the finite meet of Φ-primes. For

5) Minimal means that it contains no other ψ-prime.

6) See VAN DER WAERDEN [1], p. 93. — A new closure operation would be $x\to\varkappa(x)$ where $\varkappa(x)$ is the *kernel* of x defined in KRULL [1], or $x\to\varepsilon(x)$, the greatest element quasi-equal to x.

7) Cf. FUCHS [1], Theorem 1.

example, taking for G the set of all ideals of a commutative ring (with maximal condition), in case α) P is equal to the set of half-prime ideals (the set of radicals, cf. KRULL [1]) and in case β) P exhausts all elements of G (cf. FUCHS [1], Theorem 5).

Theorem 2.[8]) *Assume that $a \in P$ and $a = p_1 \cap \ldots \cap p_r = q_1 \cap \ldots \cap q_s$, where the components p_i, q_j are Φ-primes. If both decompositions are shortest in the sense that no component may be omitted and no subset of the p_i or of the q_j has a Φ-prime meet, then $r = s$ and by proper arrangement we have $\Phi(p_i) = \Phi(q_i)$*

Considering that $p_1 \ldots p_r \leqq a \leqq q_j$ implies $p_i \leqq \Phi(q_j)$ for some $i = i(j)$, we have $\Phi(p_i) \leqq \Phi(q_j)$. With this j the same reasoning yields $\Phi(q_j) \leqq \Phi(p_k)$ for some $k = k(j)$. Thus $\Phi(p_i) \leqq \Phi(q_j) \leqq \Phi(p_k)$, implying by theorem 1 that $p_i \cap p_k$ is again Φ-prime. This is contradictory to hypothesis if $i \neq k$; hence $i = k$ and $\Phi(p_i) = \Phi(q_j)$, as stated.

Corollary. *Every element of P may be represented as a finite meet of Φ-primes, where the closures of the components are uniquely determined.*

4. An element y of G will said to be *Φ-primary* if $a_1 \ldots a_k \leqq y$ (k arbitrary) implies $a_1 \leqq y$ or $a_2 \leqq \Phi(y), \ldots,$ or $a_k \leqq \Phi(y)$. It is immediate that each Φ-primary element is at the same time Φ-prime and all y satisfying $\Phi(y) = e$ are necessarily Φ-primary.

The reader will readily convince himself that the two concepts: "ι-prime" and "ι-primary" coincide, and that the ϱ-primary elements are those which are primary in the ordinary sense.

Theorem 3.[9]) *An irredundant meet of a finite number of Φ-primary elements, $y = y_1 \cap \ldots \cap y_r$ is again Φ-primary, if and only if all y_i have the same closure.*

Assume $y = y_1 \cap \ldots \cap y_r$ with Φ-primary components possessing the same $\Phi(y_i)$; $\Phi(y_i) = \Phi(y)$. Further let $a_1 \ldots a_n \leqq y$. If none of a_i ($i = 2, \ldots, n$) is contained in $\Phi(y)$, then $a_1 \ldots a_n \leqq y_k$ implies by the Φ-primary character of y_k that $a_1 \leqq y_k$. Since this relation holds for all k, we have $a_1 \leqq y$, indeed.

Let conversely $y = y_1 \cap \ldots \cap y_r$ be an *irredundant* meet of Φ-primary elements. The case where all $\Phi(y_i)$ are different is capable of uniting all y_i with the same $\Phi(y_i)$ into one Φ-primary element, in accordance with what has already been proved. Supposing this case with $r \geqq 2$, we may clearly choose a $\Phi(y_i)$, say $\Phi(y_1)$, containing no other $\Phi(y_i)$. If y were Φ-primary, then $y_1 \ldots y_r \leqq y$ would imply $y_k \leqq \Phi(y)$ for at least one $k \geqq 2$, considering that

---

8) See FUCHS [1], Theorem 6.

9) Cf. e. g. VAN DER WAERDEN [1], pp. 32—24. The term "irredundant" will mean that no component may be omitted. Note that irredundancy is needed only in the "necessary" part of the proof.

by irredundancy $y_1 \leq y$ is impossible. We thus get $\Phi(y_k) \leq \Phi(y) < \Phi(y_1)$ for some $k \geq 2$, contrary to the choice of y_1. Q. e. d.

Now we define the set Y in the same manner as the set P was defined in the foregoing section, with the sole modification that instead of "Φ-prime" we use the term "Φ-primary". As is readily seen, Y is a subset of P and if G is the set of ideals of a commutative ring, then Y coincides with G.

The following theorem will correspond to theorem 2.

Theorem 4.[10]) *Let $a = y_1 \cap \ldots \cap y_n = z_1 \cap \ldots \cap z_m$ be any two shortest decompositions of $a \in Y$ into Φ-primary components. Then $n = m$ and the closures of the components are the same in both decompositions.*

If $\Phi(y_i)$ is maximal among the closures $\Phi(y_1), \ldots, \Phi(y_n)$, $\Phi(z_1), \ldots, \Phi(z_m)$, then one may find a $\Phi(z_j)$ containing $\Phi(y_i)$. For, if this were not so, if e. g. although $\Phi(y_n)$ is maximal none of $\Phi(z_j)$ contained $\Phi(y_n)$, we should have from

$$(4.1) \qquad a : y_n = (y_1 : y_n) \cap \ldots \cap (y_n : y_n) = (z_1 : y_n) \cap \ldots \cap (z_m : y_n)$$

(cf. (2.6)) the relation

$$(4.2) \qquad y_1 \cap \ldots \cap y_{n-1} = z_1 \cap \ldots \cap z_m = a,$$

since $\Phi(y_n)$, and hence y_n is contained in none of $\Phi(y_1), \ldots, \Phi(y_{n-1})$, $\Phi(z_1), \ldots, \Phi(z_m)$, by hypothesis.[11]) Consequently, y would be redundant. This is absurd!

From this fact we conclude at once that the same maximal closures are associated with both representations. When e. g. $\Phi(y_n) = \Phi(z_m)$ is maximal, then with $y = y_n z_m$ by (2.6) and (2.8) we get

$$(4.3) \qquad a_1 = a : y = (y_1 : y) \cap \ldots \cap (y_n : y) = y_1 \cap \ldots \cap y_{n-1}$$

and on the other hand

$$(4.4) \qquad a_1 = (z_1 : y) \cap \ldots \cap (z_m : y) = z_1 \cap \ldots \cap z_{m-1}.$$

Our theorem is now by induction completely proved.

In addition, whenever $\Phi(y_1) = \Phi(z_1)$ is a minimal one in the set of the $\Phi(y_i)$, then $y_1 = z_1$. In other words, this means that the isolated Φ primary components of a, i. e., those associated with a minimal $\Phi(y_i)$, are unique.

For the proof we first observe that if y is Φ-primary and none of the closures associated with the Φ-primary representations of $b \in Y$ is $\leq \Phi(y)$, then $y : b = y$. In fact, if b is Φ-primary, the statement is evident; if not, suppose $b = x_1 \cap \ldots \cap x_k$ is a Φ-primary decomposition of b. Then using (2.8) repeatedly we have by hypothesis

---

10) See Noether [1], p. 44, or van der Waerden [1], pp. 35–36.

11) We have made use of the simple fact that if y is Φ-primary and a is not $\leq \Phi(y)$, then $y : a = y$, this being an immediate consequence of the definition of Φ-primary elements.

$$(4.5)\quad y \leqq y : b = y : (x_1 \cap \ldots \cap x_k) \leqq y : (x_1 \ldots x_k) = \\ = (y : x_1) : (x_2 \ldots x_k) = y : (x_2 \ldots x_k) = \ldots = y$$

proving the assertion.

Now the minimality of $\Phi(y_1) = \Phi(z_1)$ implies that none of the closures associated with the Φ-primary representations of $c = y_2 \cap \ldots \cap y_n \cap z_2 \cap \ldots \cap z_m$ is $\leqq \Phi(y_1)$, consequently,

$$(4.6)\qquad a : c = (y_1 : c) \cap (y_2 : c) \cap \ldots \cap (y_n : c) = y_1 \cap e \cap \ldots \cap e = y_1$$

and similarly $a : c = z_1$, whence $y_1 = z_1$ as we wished to prove.

The following corollary is immediate.

Corollary. *Any element of Y has a decomposition into the meet of Φ-primary elements: in two such decompositions the closures of the components as well as the isolated components themselves are necessarily the same.*

5. It is a matter of some interest to have information about an interesting connection between Φ-prime and Φ-primary elements.

Define q *Φ-maximal,* if while $\Phi(q) \neq e$, $\Phi(q) < \Phi(x)$ implies $\Phi(x) = e$. Then we have

Theorem 5. *If the only element x with $\Phi(x) = e$ is $x = e$, then every Φ-maximal Φ-prime element is Φ-primary.*

Assume p Φ-maximal and Φ-prime, and $a_1 \ldots a_n \leqq p$, where a_i is not $\leqq \Phi(p)$ for $i \geqq 2$. We have to show that $a_1 \leqq p$. Now $\Phi(p \cup a_i) \geqq \Phi(p) \cup \Phi(a_i) > \Phi(p)$, (because $\Phi(a_i)$ is not $\leqq \Phi(p)$), and hence $\Phi(p \cup a_i) = e$ for $i \geqq 2$, by the Φ-maxi mality of p. By hypothesis, $p \cup a_i = e$ for $i \geqq 2$. From $a_1 \ldots a_n \leqq p$ now it follows by (2. 1) that

$$(5.1)\qquad a_1(p \cup a_2) \ldots (p \cup a_n) \leqq p$$

and as $p \cup a_i = e$ for $i \geqq 2$, we are directly led to $a_1 \leqq p$, q. e d.

In particular, when G is the set of ideals of an integrity domain, then theorem 5 expresses the fact that if e is the sole element with radical e (this means that the ring has a unit element), then the quasi-primary ideals with minimal prime radicals are simply primary (Fuchs [1], Theorem 8).

6. We conclude by giving the following notion[12]).

We shall call a *Φ-primary to b* if $b : a \leqq \Phi(b)$. In case b is Φ-primary, just the elements x satisfying $x \leqq b$ are Φ-primary to b. Although it is quite clear it seems to be worth while noticing that "*a is ι-primary to b*" means nothing else, than a is prime to b in the common sense defined by Noether [1], p. 45; cf. also van der Waerden [1], p. 25.

Assume $b = y_1 \cap \ldots \cap y_n$ is a shortest Φ-primary decomposition of $b \in Y$, where $y_1, \ldots, y_k$ $(k \leqq n)$ are isolated, $y_{k+1}, \ldots, y_n$, if any, are not isolated

---

[12]) The concept "*a is primary to b*" is defined in Fuchs [2], cf. also Fuchs [4]. A generalization of it, essentially equivalent to Φ-primarity, may be found in Fuchs [3].

Φ-primary components of b. If a is not $\leqq y_j$ for $j=1,\ldots,k$, or, what is the same, if $y_j : a \leqq \Phi(y_j)$ for $j \leqq k$, then a is Φ-primary to b. In fact, hypotheses imply

(6. 1) $\quad b : a = (y_1 : a) \cap \ldots \cap (y_n : a) \leqq \Phi(y_1) \cap \ldots \cap \Phi(y_k) \cap e \cap \ldots \cap e = \Phi(b)$.

If we impose a further restriction on the Φ-operation, namely,

(*) *if y, y_1, y_2 are Φ-primary elements, then $\Phi(y_1) \cap \Phi(y_2) \leqq \Phi(y)$ implies $\Phi(y_1) \leqq \Phi(y)$ or $\Phi(y_2) \leqq \Phi(y)$*,[13])

we can prove even the converse of our last statement: *For $b : a \leqq \Phi(b)$ it is necessary that a be not $\leqq y_j$ for $j \leqq k$.* To verify this, suppose $b : a \leqq \Phi(b)$ and, say, $a \leqq y_1$. Then

$$a(y_2 \cap \ldots \cap y_n) \leqq a \cap y_2 \cap \ldots \cap y_n \leqq b$$

and hence by hypothesis we get

$$y_2 \cap \ldots \cap y_n \leqq \Phi(b) \leqq \Phi(y_1).$$

In view of our new restriction (*) on Φ, we conclude, using a simple induction, that $\Phi(y_i) \leqq \Phi(y_1)$ for some $i \geqq 2$, contrary to the isolated character of y_1. To sum up, we have proved

Theorem 6. *Supposing (*), a is Φ-primary to $b \in Y$, if and only if a is Φ-primary to all isolated Φ-primary components of b.*

Bibliography.

G. Birkhoff, [1] *Lattice theory*, American Math. Society Colloquium Publications, vol. **25**, 2nd ed. (New York, 1948).

L. Fuchs, [1] On quasi-primary ideals, *these Acta*, **11** (1947), pp. 174—183; [2] On relatively primary ideals, *Norske Vid. Selsk. Forh.*, **20** (1947), no 7, pp. 25—28; [3] Further generalization of the notion of relatively prime ideals, *Bulletin Calcutta Math. Society*, **39** (1947), pp. 143—146; [4] The extension of the notion "relatively prime", *these Acta*, **13** (1949), pp. 43—47.

W. Krull, [1] Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, *Math. Annalen*, **101** (1929), pp. 729—744.

E. Noether, [1] Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Annalen*, **83** (1921), pp. 24—66

B. L. van der Waerden, [1] *Moderne Algebra*, vol. II, 2nd ed., (Berlin, 1940).

M. Ward, [1] The closure operators of a lattice, *Annals of Math.*, **43** (1942), pp. 191—196.

(Received September 10, 1949.)

13) This restriction is satisfied in all important special cases.

On the imbedding of n-dimensional sets in $2n$-dimensional absolute retracts.

By KAROL BORSUK in Warszawa.

1. Under "imbedding theorems"[1]) one understands theorems dealing with the possibility of homeomorphic mapping of spaces of some kind onto subsets of some other spaces of more regular properties.

From the homological point of view, a space has a regular structure if it is compact and if its groups of homology have a simple algebraic structure. From the homotopic point of view, the simple structure of the fundamental group is also an important requirement, and so is also the regularity of the local structure, guaranteed, for instance, by local contractibility[2]).

Thus we may regard as the simplest point sets those local contractible compacta for which the groups of homology and the fundamental group consist only of the identity. For spaces of finite dimension these conditions characterise the absolute retracts[3]). Hence the problem of imbedding a space in a space of possible simplest homological and homotopic structure and smallest dimension can be formulated as follows:

---

[1]) Such are for instance: 1. the classic theorem of Urysohn that every metric separable space is topologically contained in the Hilbert cube, 2. the Menger—Nöbeling theorem that every n-dimensional metric separable space is homeomorphic to a subset of the cartesian $(2n+1)$-dimensional space C_{2n+1}, 3. the theorem that every metric separable space is topologically contained in a compact space of the same dimension, 4. the theorem that every metric separable space of positive dimension is homeomorphic to a subset of a Peano space of the same dimension.

[2]) A space M is said to be *locally contractible* in the point $a \in M$ if every neighborhood U of a contains another neighborhood V which is contractible in U, i. e. such that there exists a continuous mapping $f(x, t)$ defined for $x \in V$ and $0 \leqq t \leqq 1$ and satisfying to the conditions $f(x, 0) = x$, $f(x, t) \in U$, $f(x, 1) = a$ for every $x \in V$ and $0 \leqq t \leqq 1$. Every polytope is locally contractible. Every locally contractible space is locally connected in all dimensions.

[3]) A continuous mapping f of a space M onto its subset E is said to be a *retraction*, if $f x) = x$ for every $x \in E$. Then the set E is called the *retract* of M. The compactum A is said to be an *absolute retract* if it is a topological image of a retract of the Hilbert cube. A necessary and sufficient condition for a compactum A of finite dimension to be an absolute retract is that A be locally contractible, acyclic in all dimensions and that the fundamental group of A consists only of the identity. See W. HUREWICZ, Beiträge zur Topologie der Deformationen, I. Höherdimensionale Homotopiegruppen, *Proceedings Academy Amsterdam*, **38** (1938), p. 113.

What is the smallest number m such that every metric separable space of dimension n is topologically contained in an absolute retract of dimension m?

By the imbedding theorem of MENGER and NÖBELING[4]), every metric separable n-dimensional space is homeomorphic to a subset of the cartesian $(2n+1)$-dimensional simplex. Hence $m \leq 2n+1$.

The purpose of this paper is to show that $m \leq 2n$ provided that n is positive[5]).

2. Lemma 1. *Let Δ_0 be an $(n-1)$-dimensional simplex lying in the cartesian n-dimensional space C_n and L a polygonal simple arc having the barycentric center a_0 of Δ_0 as one of its ends. If $\Delta_0 \cdot L = a_0$, then there exists a simplicial homeomorphism h of C_n into itself such that $h(x) = x$ for every $x \in \Delta_0$ and that $h(L)$ is a segment perpendicular to Δ_0.*

Proof. Let k denote the number of segments constituting L. If $k=1$, then L is a segment and there exists an affine transformation mapping the $(n-1)$-dimensional hyperplane containing Δ_0 by identity and the segment L into a segment perpendicular to Δ_0. Let us assume that $k>1$ and that the lemma is valid for polygonal arcs constituted by $<k$ segments. Let a_1 denote the end of L different from a_0 and let $L_1, L_2, \ldots, L_k$ be all segments of L in the order in which they occur in L from a_1 to a_0. We can assume that, for $i=1, 2, \ldots, (k-1)$, the segment L_{i+1} is not a straight line prolongation of the segment L_i. Let a_2 be the common end of the segments L_1 and L and let a_3 denote a point lying on the straight line prolongation of the segment L_2 beyond the end a_2 so near to a_2, that the common part of L and the triangle $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ is L_1.

Let H denote an $(n-1)$-dimensional hyperplane passing through the segment $\overline{a_1 a_3}$ but not containing the point a_2. It is clear that there exists in H an $(n-1)$-dimensional simplex $\Delta_1 = \Delta(b_1', b_2', \ldots, b_n')$ containing $\overline{a_1 a_3}$ in its interior and such that the intersection of the n-dimensional simplex $\Delta_2' = \Delta(a_2, b_1', b_2', \ldots, b_n')$ with the set $L + \Delta_0$ is the segment L_1. Let us choose, for every $i = 1, 2, \ldots, n$, a point b_i lying on the straight line prolongation of the segment $\overline{a_2 b_i'}$ beyond the end b_i'. It is easy to see that, provided that the distances $\varrho(b_i, b_i')$ are sufficiently small, the n-dimensional simplex $\Delta_2 = \Delta(a_2, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ satisfies the following conditions: 1) $\Delta_2 \cdot (L + \Delta_0) = L_1$, 2) $L_1 - (a_2)$ lies in the interior of Δ_2.

Let us decompose Δ_2 into $n+1$ n-dimensional simplexes having a_1 as their common vertex and the $(n-1)$-faces of Δ_2 as their bases. Putting

$$\varphi(a_1) = a_3, \; \varphi(a_2) = a_2 \text{ and } \varphi(b_i) = b_i, \text{ for } i = 1, 2, \ldots, n,$$

4) See, for instance, W. HUREWICZ and H. WALLMAN, *Dimension Theory* (Princeton, 1941), p. 60.

5) Cf. my paper: Sur le plongement des espaces dans les rétractes absolus, *Fundamenta Math.*, **27** (1936), p. 242, where I expressed the conjecture that $m = n+1$.

we define a simplicial transformation φ of Δ_2 in itself such that it is the identity on the boundary of Δ_2 and maps the segment L_1 onto the segment $\overline{a_2a_3}$. If we put

$$\varphi(x)=x, \text{ for every } x\in C_n-\Delta_2,$$

we obtain a simplicial homeomorphism φ which is the identity on Δ_0 and maps the polygonal arc L onto the polygonal arc

$$L'=(\overline{a_2a_3}+L_2)+L_3+\ldots+L_k.$$

But $\overline{a_2a_3}+L_2$ is a segment, hence the polygonal arc L' consists of $k-1$ segments. By the hypothesis of induction applied to Δ_0 and L' there exists a simplicial homeomorphism ψ being the identity on Δ_0 and mapping L onto a segment perpendicular to Δ_0. If we put

$$h(x)=\psi\varphi(x) \qquad \text{for every } x\in C_n,$$

we obtain the desired simplicial homeomorphism h of C_n into itself mapping L onto a segment perpendicular to Δ_0 and satisfying the condition $h(x)=x$ for every $x\in\Delta_0$.

3. Lemma 2. *Let P be an m-dimensional strongly connected polytope lying in the m-dimensional $(m>1)$ cartesian space C_m and let T be a triangulation of P. If Δ_0 is an $(m-1)$-dimensional simplex of T lying on the boundary B of P and E a compact subset of $P-\Delta_0$ such that $\dim E<m-1$, then there exists a simplicial retraction $r(x)$ of P satisfying the following conditions: 1) $E+B-\Delta_0\subset r(P)$, 2) for every m-dimensional simplex Δ of the triangulation T: $\Delta\cdot(P-r(P))\neq 0$.*

Proof. In every m-dimensional simplex of the triangulation T let us choose an interior point belonging to $P-E$. Thus we obtain a finite system of points $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Since P is strongly connected, there exists a polygonal simple arc L such that

1. L has as one of its ends the barycentric center a_0 of the simplex Δ_0,
2. $L-(a_0)\subset P-B-E$,
3. $a_i\in L$ for every $i=1,2,\ldots,k$.

By lemma 1, there exists a simplicial homeomorphism h mapping C_m on itself in such a manner that $h(x)=x$ for every $x\in\Delta_0$ and that $h(L)$ is a segment perpendicular to Δ_0. The point a_0 is one of the ends of the segment $h(L)$. Let b_0 be the other end of $h(L)$. The set $P_1=h(P)$ is a strongly connected polytope containing $h(L)-(a_0)$ in its interior and Δ_0 on its boundary. Let Δ_0' denote an $(n-1)$-dimensional simplex contained in Δ_0 and being a neighborhood of a_0 in Δ_0 so small that for every $x\in\Delta_0'$ the segment $\overline{xb_0}$ lies in the interior of P_1. The sum of all segments $\overline{xb_0}$ with $x\in\Delta_0'$ is an m-dimensional simplex Δ_1 having Δ_0' as one of its faces. Let us denote by Λ the sum of all faces of Δ_1 different from Δ_0'. Consider, for every $y\in\Delta_1$, the straight line Γ_y passing through y and perpendicular to Δ_0. Clearly Γ_y cuts

Λ in one point; let us denote this point by $r_1(y)$. Moreover, if we put $r_1(y)=y$ for every $y \in P_1 - \Delta_1$, we obtain a simplicial retraction r_1 of P_1 to the closure of the set $P_1 - \Delta_1$. Putting

$$r(x) = h^{-1} r_1 h(x) \qquad \text{for every } x \in P,$$

we obtain the required retraction.

4. Theorem. *Every metric separable n-dimensional space E is homeomorphic to a subset of some absolute retract of dimension $\leq 2n$ lying in the cartesian $(2n+1)$-dimensional space C_{2n+1}.*

Proof. By the Menger-Nöbeling imbedding theorem we can assume that E is a subset of a $(2n+1)$-dimensional simplex Δ having the diameter ≤ 1. Let us denote by T_k the result of the process of barycentric subdivision when iterated k times. The diameters of all simplexes of the triangulation T_k are $\leq \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^k$ [6]).

Now let us define the sequence $\{r_k\}$ of retractions as follows:

Putting $r_0(x) = x$ for every $x \in \Delta$, let us assume that the retraction $r_k(x)$ mapping Δ into a polytope $r_k(\Delta) \supset E$ has been already defined for some k in such a manner that no one of the $(2n+1)$-dimensional simplexes belonging to T_k is contained in $r_k(\Delta)$.

If $\Delta_1^{(k)}, \Delta_2^{(k)}, \ldots, \Delta_{m_k}^{(k)}$ are all $(2n+1)$-dimensional simplexes of the triangulation T_k, then

$$r_k(\Delta) = \sum_{\nu=1}^{m_k} \Delta_\nu^{(k)} \cdot r_k(\Delta).$$

Every of the sets $\Delta_\nu^{(k)} \cdot r_k(\Delta)$, $\nu = 1, 2, \ldots, m_k$ is a polytope. Hence there exists a polytope $P_0(\nu, k)$ of dimension $\leq 2n$ and a system of strongly connected $(2n+1)$-dimensional polytopes $P_1(\nu, k)$, $P_2(\nu, k), \ldots, P_{\alpha_{\nu,k}}(\nu, k)$ such that

$$\Delta_\nu^{(k)} \cdot r_k(\Delta) = P_0(\nu, k) + P_1(\nu, k) + \ldots + P_{\alpha_{\nu,k}}(\nu, k)$$

and that, for $i \neq j$

$$\dim P_i(\nu, k) \cdot P_j(\nu, k) \leq 2n - 1.$$

Consider a simplicial decomposition $T_i(\nu, k)$ of $P_i(\nu, k)$, which is a subdivision of the triangulation T_{k+1}. Since $P_i(\nu, k) \subsetneqq \Delta_\nu^{(k)}$, there exists in the triangulation $T_i(\nu, k)$ a $2n$-dimensional simplex $\Delta_i(\nu, k)$ lying on the boundary $B_i(\nu, k)$ of $P_i(\nu, k)$, but not contained in the boundary of $\Delta_\nu^{(k)}$. Applying the lemma 2 we infer that there exists a simplicial retraction $\varphi_i^{(\nu,k)}$ of the polytope $P_i(\nu, k)$ satisfying to following conditions:

1. $E \cdot P_i(\nu, k) + B_i(\nu, k) - \Delta_i\ \nu, k) \subset \varphi_i^{(\nu,k)}(P_i(\nu, k))$.
2. No one of the $(2n+1)$-dimensional simplexes of the triangulation $T_i(\nu, k)$ is contained in $\varphi_i^{(\nu,k)}(P_i(\nu, k))$.

[6]) See, for instance, P. ALEXANDROFF and H. HOPF, *Topologie*. I (Berlin, 1935), p. 136.

Hence for different systems of indices i, ν and j, μ we have

$$P_i(\nu, k)\cdot(P_j(\mu, k) \subset B_i(\nu, k) - \operatorname{Int}[\Delta_i(\nu, k)],$$

where $\operatorname{Int}[\Delta_i(\nu, k)]$ denotes the interior of the simplex $\Delta_i(\nu, k)$. Hence $\varphi_i^{(\nu, k)}(x)=x$ for every $x \in P_i(\nu, k)\cdot P_j(\mu, k)$. It follows that if we put $\varphi(x)=\varphi_i^{(\nu, k)}(x)$ for $x \in P_i(\nu, k)$, we obtain a simplicial retraction φ of the polytope $r_k(\Delta)$. Putting $r_{k+1}(x)=\varphi r_k(x)$ for every $x \in \Delta$, we obtain a simplicial retraction of Δ into the polytope $\varphi r_k(\Delta)$ such that no one of the $(2n+1)$-dimensional simplexes belonging to the triangulation T_{k+1} is contained in $\varphi r_k(\Delta)$. Moreover, by our construction the points $r_k(x)$ and $r_{k+1}(x)=\varphi r_k(x)$ are points of one of the simplexes of the triangulation T_k. Hence

$$\varrho(r_k(x), r_{k+1}(x)) \leqq \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^k$$

for every $x \in \Delta$. It follows that the sequence $\{r_k\}$ is uniformly convergent to a continuous transformation r of Δ. Evidently,

$$r(\Delta)=\prod_{k=1}^{\infty} r_k(\Delta) \text{ and } r(x)=x \text{ for every } x \in r(\Delta). \tag{1}$$

Hence r is a retraction of Δ to an absolute retract $r(\Delta) \supset E$. Moreover, by (1) and the construction of $r_k(\Delta)$, we infer that no one of the $(2n+1)$-dimensional simplexes belonging to T_k $(k=1, 2, \ldots)$ is contained in $r_k(\Delta)$. Since the diameters of the simplexes belonging to T_k are $\leqq\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^k$ it follows that the dimension of $r(\Delta)$ is $<2n+1$. Thus the proof of the theorem is achieved.

4. Corollary. *There exists a $2n$-dimensional absolute retract such that every metric separable space of dimension $\leqq n$ is topologically contained in it.*

Applying the last theorem to the universal n-dimensional compact space M_n of Menger[7]) which contains topologically every metric separable space of dimension $\leqq n$, we obtain a $2n$-dimensional absolute retract with the required property.

Let us remark that M_1 cannot be imbedded in a 2-dimensional polytope. Indeed, M_1 is not contained obviously in no 1-dimensional polytope. Hence if M_1 is homeomorphic to a subset of some triangulated 2-dimensional polytope, there exists an open subset G of M_1 homeomorphic to a subset of the cartesian plane C_2. But this is impossible, because G contains topologically every curve.

(Received November 6, 1949.)

[7]) K. Menger, Über umfassendste n-dimensionale Mengen, *Proceedings Academy Amsterdam,* **29** (1926), p. 1125–1128.

Sur certaines inégalités géométriques.

Par ISTVÁN FÁRY à Paris.

1. Introduction. En utilisant des formules de la *géométrie intégrale* nous allons démontrer des inégalités, portant sur la courbure intégrale d'une courbe ou d'une surface d'une part, et sur sa longueur ou aire respectivement d'autre part (voir (10), (11), (14)). Ces inégalités sont suggérées par l'intuition géométrique: si une longue courbe, ou une surface dont l'aire est grande, est comprimée sur un espace petit, elle doit être très tortueuse, en d'autres termes sa courbure intégrale doit être grande.

Soulignons que dans nos démonstrations l'utilisation des formules de la géométrie intégrale est décisive; les formules de la géométrie différentielle ne semblaient pas être adéquates pour démontrer des inégalités de ce genre, quoique les données figurant dans celles-ci peuvent être définies aussi à l'aide des formules de la géométrie différentielle (voir [1]), [4])).

2. Un lemme sur l'intégration. Notations. Nous considérons constamment l'espace euclidien à trois dimensions.

Notons par R la sphère dont le centre est à l'origine o de l'espace, et dont le rayon est l'unité; un point générique de R est désigné par x, y. *Les intégrations par rapport à dx, dy $(x, y \in R)$ sont toujours étendues sur toute la surface de la sphère R.* Nous convenons d'appeler D_x le grand cercle (non orienté) de R, dont le plan a la direction $\pm x$; les points $\pm x$ sont appelés aussi pôles de D_x. Nous utilisons sur D_x une coordonnée polaire φ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ dont l'origine est arbitraire; un point variable de D_x est alors noté aussi par sa coordonnée φ.

Nous nommons direction d'un plan l'une des directions de ses deux normales; nous déterminons une direction par le point x de R, tel que $\overrightarrow{ox}$ ait la direction donnée. *Nous considérons toujours (sans le mentionner désormais) des plans et des droites non orientées;* la direction de ceux-ci n'est alors déterminée qu'au signe près. Ainsi, à chaque plan P correspondent les points $\pm x$ de R; le plan est noté aussi P_x. La même remarque vaut pour une droite e.

Lemme 1. *Soit $f(x)$ une fonction sommable, définie sur R. Soit D_x le grand cercle variable de pôle x. Considérons la moyenne de f sur D_x,*

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi \qquad (\varphi \in D_x), \tag{1}$$

où φ est une coordonnée polaire sur D_x. On a alors la relation

$$\int f(x)\, dx = \int \bar{f}(x)\, dx. \tag{2}$$

Démonstration. $f(x)$ étant une fonction sommable sur R, l'ensemble des cercles D_y sur lesquels $f(x)$ n'est pas sommable, est de mesure nulle. Il en résulte que $\bar{f}(x)$ est définie presque partout sur R. Désignons par $F(f)$ et $F^*(f)$ le premier et le deuxième membre de l'équation (2), considérés comme fonctionnelles définies pour chaque fonction sommable f. La sphère R est un espace homogène (quotient du groupe orthogonal par le tore à une dimension). Or, dans un espace homogène l'intégrale invariante est unique à un facteur près (voir par exemple Weil [7], p. 42—45; Pontrjagin [5], p. 91—99). L'intégrale invariante $F(f)$ est caractérisée par les propriétés suivantes:

1⁰ $F(f)$ est définie pour chaque fonction sommable f;

2⁰ $F(af+bg) = aF(f) + bF(g)$, si a, b sont constantes;

3⁰ $|F(f)| \leqq C$, si $|f| \leqq c$, et $F(f) \geqq K > 0$, si $f \geqq k > 0$;

4⁰ la fonctionnelle $F(f)$ est invariante par rapport aux transformations du groupe (dans le cas de la sphère: par rapport aux rotations).

On voit immédiatement que $F^*(f)$ jouit aussi des propriétés 1⁰—4⁰, par conséquent, d'après le théorème d'unicité mentionné, le rapport des deux fonctionnelles est constant. Comme de plus, $F(1) = F^*(1)$, la relation (2) est vérifiée.

3. Courbes. On appelle courbe l'image univoque et continue d'un segment. Nous allons démontrer certaines formules qui seront utiles plus tard. Dans ces formules nous supposons que la courbe C est rectifiable et nous notons par $L(C)$ sa longueur.

Désignons par P le plan générique de l'espace, et notons par $n(P)$ le nombre des points $P \cap C$; un point d'intersection doit être compté avec sa multiplicité sur la courbe. Nous avons

$$L(C) = \frac{1}{\pi} \int n(P)\, dP, \tag{3}$$

dP désignant la densité des plans de l'espace: $dP = d\varrho\, dx$ où ϱ est la distance du plan de l'origine, x sa direction.

Démonstration de (3): Évaluons d'abord (3) pour un segment de longueur 1. Considérons de coordonnées cartésiennes dans l'espace, et soit C le segment d'origine $(0, 0, 0)$ et d'extrémité $(0, 0, 1)$. On prend sur la sphère

R des coordonnées polaires ϑ et φ $(0 \leqq \vartheta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$. Le second membre de (3) s'écrit

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi = 1,$$

ce qui démontre la formule (3) pour un segment. L'intégrale étant additive, on obtient ainsi (3) pour les polygones. Par un passage à la limite on peut la démontrer pour les courbes suffisamment régulières (voir MAAK [4]), et ceci achève la démonstration.

Supposons que la courbe C est située dans un plan. Désignons par a la droite générique du plan, et notons par $n(a)$ le nombre de points $a \cap C$; alors

(4) $$L(C) = \frac{1}{2}\int n(a)\, da,$$

où da est la densité des droites dans le plan, $da = d\varrho\, d\varphi$, ϱ désignant la distance de a de l'origine du plan, φ sa direction (voir BLASCHKE [1]).

Soit C' une courbe rectifiable, *située sur la sphère* R. En désignant par D_x le grand cercle variable de R, notons par $n(x)$ le nombre de points $D_x \cap C'$. Nous avons alors

(5) $$L(C') = \frac{1}{4}\int n(x)\, dx.$$

Démonstration de (5). Le second membre de (5) prend la même valeur pour deux arcs géodésiques C_1, C_2 (arcs d'un grand cercle) de longueurs égales. En effet, la valeur de l'intégrale n'est pas changée par une rotation qui amène C_1 sur C_2. Or, si C' est un grand cercle, on a $n(x) = 2$ (sauf pour un x), (5) est alors valable pour un arc géodésique. L'intégrale étant additive, on obtient (5) pour les polygones composés d'arcs géodésiques, et ainsi pour des courbes rectifiables.

Soit C une courbe dans l'espace, et désignons par C_x sa projection sur un plan dont la direction est $\pm x$. On a

(6) $$L(C) = \frac{1}{\pi^2}\int L(C_x)\, dx.$$

Démonstration de (6). Pour le segment $(0,0,0)$, $(0,0,1)$ le deuxième membre de (6) s'écrit

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\vartheta = 1,$$

et on n'a qu'à utiliser l'additivité de l'intégrale pour obtenir (6) dans le cas où C est un polygone, et ainsi en toute généralité.

4. Soit p le point générique de la courbe continûment dérivable C, et notons par $x(p)$ la direction de la tangente à C au point p. Si p parcourt C, $x(p)$ trace une courbe C' sur la surface de la sphère R, appelée *première image sphérique de C. La longueur de C' est appelée courbure intégrale $G(C)$ de la courbe C.*[1])

Si C est une courbe plane on peut évaluer sa courbure intégrale de la façon suivante. On désigne par $t(\varphi)$ $(0 \leqq \varphi < \pi)$ le nombre des tangentes (non orientées) à C de direction φ. Alors

$$G(C) = \int_0^\pi t(\varphi)\, d\varphi \qquad (C \subset P). \tag{7}$$

Dans le cas général nous avons la proposition suivante.

Proposition 1. *Désignons par $t(x)$ le nombre des plans de direction $\pm x$, qui contiennent une tangente à la courbe C; chaque plan est compté autant de fois qu'il contient de tangentes de C, une droite avec deux points de contacts compte deux fois, etc. La formule*

$$G(C) = \frac{1}{4} \int t(x)\, dx \tag{8}$$

est valable, pourvu que la courbure intégrale $G(C)$ existe.

Démonstration. Soit C' la première image sphérique de la courbe C. D'après la définition même de $t(x)$, C' est coupée suivant $t(x)$ points par le grand cercle D_x de direction $\pm x$. On a alors $t(x) = n(x)$, le second membre ayant la même signification que dans (5); (5) entraîne alors (8).

Théorème 1. *Soit C une courbe dont la courbure intégrale existe; désignons par C_x la projection de C sur un plan de direction $\pm x$. Nous avons*

$$G(C) = \frac{1}{4\pi} \int G(C_x)\, dx. \tag{9}$$

Démonstration. Substituons au premier membre de (9) l'intégrale déduit de (8). Nous appliquons à cette intégrale le lemme 1, nous faisons varier alors x sur un grand cercle D_y et nous calculons l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} t(\varphi)\, d\varphi \qquad (x = \varphi \in D_y).$$

---

[1]) Si C: $r(s) = (\xi(s), \eta(s), \zeta(s))$ $(0 \leqq s \leqq l)$ est deux fois continûment dérivable, s étant le paramètre d'arc, on a

$$G(C) = \int_0^l |r''(s)|\, ds$$

(voir par exemple Fáry [3]). Dans ma note citée j'ai appelé $G(C)$ "courbure totale", mais, étant donné que ce mot a une autre signification dans la théorie classique des surfaces, il est préférable de l'appeler *courbure intégrale* (en allemand *Gesammtkrümmung*).

Or, il est évident que $t(x)$ $(x \in D_y)$ est le nombre des tangentes de direction x à la courbe projetée C_x, la valeur de l'intégrale ci-dessus est alors $2G(C_x)$ (puisqu'on considère des droites non orientées). D'après le lemme 1 nous avons la formule (9).[2])

Théorème 2. *Soit C une courbe fermée située dans une boule de rayon r. Nous avons l'inégalité*

$$L(C) \leqq \frac{4r}{\pi} G(C). \tag{10}$$

Démonstration. Démontrons d'abord que, *si la courbe C est située dans un plan P,* on a l'inégalité plus précise

$$L(C) \leqq rG(C) \qquad (C \subset P), \tag{11}$$

inégalité qui est la meilleure possible, comme le montre le cercle de rayon r, pour lequel $L(C) = rG(C)$.

Or, (11) est une conséquence immédiate de (4) et (7). En effet, si a_φ désigne une droite de direction φ, $n(a_\varphi) = n$, et si $p_1, \ldots, p_n$ sont les points de $a_\varphi \cap C$, alors les arcs $p_1p_2, \ldots, p_{n-1}p_n, p_np_1$ contiennent n points où la direction de la tangente est φ. Nous avons alors $n(a_\varphi) \leqq t(\varphi)$, donc

$$L(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^r n(a_\varphi)\, d\varrho\, d\varphi \leqq \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} t(\varphi)\, d\varphi = r\, G(C),$$

ce qui achève la démonstration de (11).

Soit maintenant C une courbe gauche. D'après (11) nous avons $L(C_x) \leqq rG(C_x)$, la courbe projetée C_x étant contenu dans un cercle de rayon r. En utilisant les formules (6) et (9), nous obtenons (10), et la démonstration est achevée.

5. Surfaces. Un ensemble S de l'espace est appelé *surface* s'il est homéomorphe à un polyèdre à deux dimensions. La surface S est compacte, si le polyèdre est fini; dans ce cas S est évidemment bornée. S est appelée continûment différentiable, si chaque point de S admet un entourage, doué d'une représentation paramétrique continûment différentiable.

Il est bien connu que les différentes définitions classiques de *l'aire d'une surface* peuvent bien attacher à la même surface des aires différentes, même si celle-ci est relativement simple (voir par exemple Radó [6], en particulier l'introduction). Dans cette note nous nous servons d'une définition basée sur le *principe de la projection.* Vu les difficultés mentionnées *nous ne*

---

[2]) J'ai démontré ce théorème dans ma Note cité, puis, en collaboration avec M. Ottó Varga, nous avons trouvé une autre démonstration, utilisant des formules de la géométrie intégrale et en même temps celles de la géométrie différentielle. La démonstration du texte est différente de ces deux premières.

considérons que des surfaces deux fois continûment différentiables[3]); dans ce cas les définitions classiques de l'aire se confondent.

Nous énonçons sans démonstration la proposition suivante, qui peut être considérée comme définition, après avoir justifiée la formule ci-dessous pour une surface élémentaire, par exemple pour une sphère (voir RADÓ [6], BLASCHKE [1]).

Proposition 2. *Soit S une surface deux fois continûment différentiable, et désignons par $A(S)$ l'aire de la surface. Pour chaque droite e de l'espace désignons par $N(e)$ $(0 \leqq N(e) \leqq +\infty)$ le nombre des points de l'intersection $e \cap S$. Alors*

$$A(S) = \frac{1}{\pi} \int N(e)\, de \tag{12}$$

où de désigne la densité des droites (non orientées) de l'espace.

6. Introduisons la notion de la courbure intégrale d'une surface S. Celle-là étant supposée continûment dérivable, nous pouvons déterminer, pour chaque point $p \in S$, les deux directions $\pm x(p)$ du plan tangent de S au point p $(\pm x(p) \in R)$. (Si S est unilatère (orientable) et si l'on choisit en un point l'une des directions du plan tangent, cette détermination se prolonge par continuité sur toute la surface.) Le point $x(p)$ décrit une partie de R, quand p parcourt S; un point de R est couvert autant de fois qu'il y a de plans tangents de cette direction. Cette partie de R (considérée avec la multiplicité de ses points) est appelée l'image sphérique de la surface; la courbure intégrale est définie par l'aire de cette partie. Nous posons ainsi la définition suivante.

Définition. Soit S une surface continûment dérivable. Désignons par $T(x)$ le nombre des plans tangents de direction $\pm x$. Nous posons

$$K(S) = \frac{1}{2} \int T(x)\, dx \tag{13}$$

et nous appelons $K(S)$ la *courbure intégrale* de S[4]).

[3]) Pour la définition de la courbure integrale cette restriction n'est pas essentielle. En remplaçant la notion du plan tangent par celle de paratingent (plus précisement par un paratingent de dimension deux, définie d'une façon convenable), on peut étendre la définition ci-dessus à tout ensemble fermé.

[4]) Si $R = 1/R_1 R_2$ désigne la courbure riemannienne de la surface S (supposée deux fois continûment différentiable), on a

$$K(S) = \int_S |R|\, do,$$

où do est l'élément de la surface (voir CARTAN [2], pp. 187 et 191). Il est à noter que $K(S)$ est bien différent de

$$\int_S R\, do,$$

qui ne dépend que du genre de S, si S est close.

7. Nous pouvons énoncer maintenant le théorème suivant.

Théorème 3. *Soit S une surface compacte, deux fois continûment différentiable, qui est la frontière commune de deux domaines de l'espace. Si r est le rayon d'une boule contenant S, on a l'inégalité*

$$A(S) \leqq \frac{4}{\pi} r^2 K(S) \tag{14}$$

entre l'aire $A(S)$ de la surface et sa courbure intégrale $K(S)$.

Démonstration. Dans la démonstration nous supposons que chaque point p admet un entourage dans lequel $x(p)$ est une application biunivoque sauf les p qui appartiennent à des lignes singulières. On voit aisément que le cas général se ramène à ce cas spécial.

Nous désignons par D_y le grand cercle variable (de pôle y) de R, par $\pm x(p)$ $(p \in S)$ les directions du plan tangent de S au point p, enfin P_y désigne un plan de direction y, passant par l'origine.

(a) Soit $C_y \subset S$ l'ensemble de points p de S, tels que $\pm x(p) \in D_y$; C_y est la réunion des *courbes fermées.*

Le complémentaire de C_y est l'ensemble de points p, tels que $\pm x(p)$ appartient à des hemisphères, complémentaires de D_y. Or, $x(p)$ étant localement biunivoque C_y ne contient pas de points intérieurs. D'autre part C_y est la frontière de domaines, il est ainsi la réunion des courbes fermées.

(b) Désignons par C_y^* la projection de C_y (voir **(a)**) sur le plan P_y. On a

$$K(S) = \frac{1}{2\pi} \int G(C_y^*)\, dy \tag{15}$$

où $G(C_y^*)$ désigne la somme des courbures intégrales des courbes, dont la réunion est C_y^*.

Nous appliquons le lemme 1. Si x varie sur D_y, $T(x)$ est le nombre de tangentes des courbes de C_y^*, et d'après (7) la valeur de

$$\int_0^{2\pi} T(\varphi)\, d\varphi \qquad (\varphi \in D_y)$$

est $2G(C_y^*)$; (15) s'obtient immédiatement d'après le lemme 1.

Dans l'intégrale (12) nous pouvons séparer les variables

$$A(S) = \frac{1}{2\pi} \int N(e)\, dp\, dy \tag{16}$$

où dp est l'élément du plan P_y, qui est perpendiculaire à la droite e (voir Blaschke [1]). Nous fixons maintenant la direction y de la droite e.

(c) Soit a la droite variable du plan P_y $(C_y^* \subset P_y)$, et désignons par $n(a)$ le nombre des points $a \cap C_y^*$. Si la droite e (qui est perpendiculaire à P_y) coupe a, on a

$$N(e) \leqq n(a) \qquad (e \perp a;\ e \cap a \neq 0). \tag{17}$$

Notons par P_a le plan passant par a et perpendiculaire à P_y. $P_a \cap S$ est un système de courbes fermées, car S est la frontière commune de deux domaines de l'espace. D'autre part, $e \cap S$ $(\subset P_a \cap S)$ est composé de $N(e)$ points situés sur les courbes $P_a \cap S$, et les divisant en un nombre $\geqq N(e)$ d'arcs. Il existent alors $\geqq N(e)$ droites tangentes de direction e aux courbes $P_a \cap S$. Ces droites sont contenues en un nombre $\geqq N(e)$ de plans tangents, dont le point de contact p est tel que $\pm x(p) \in D_y$, c'est-à-dire $p \in C_y$, la projection de p est située sur a et en même temps sur C_y^*. Ceci montre l'inégalité (17).

Faisons varier e (toujours perpendiculaire à P_y) le long de la droite a, et posons

$$\bar{N}(a) = \max_{e \cap a \neq 0} N(e). \tag{18}$$

Avec cette notation on a $\bar{N}(a) \leqq n(a)$ (d'après (17)) et[5])

$$\int N(e)\, dp \leqq \frac{2r}{\pi} \int \bar{N}(a)\, da \leqq \frac{2r}{\pi} \int n(a)\, da.$$

D'après la définition de $n(a)$ et d'après (4),

$$\frac{2r}{\pi} \int n(a)\, da = \frac{4r}{\pi} L(C_y^*)$$

est valable, où $L(C_y^*)$ désigne la somme des longueurs des courbes dont la réunion constitue C_y^*. En utilisant (11) nous obtenons

$$\iint N(e)\, dp\, dy \leqq \frac{4r}{\pi} \int L(C_y^*)\, dy \leqq \frac{4r^2}{\pi} \int G(C_y^*)\, dy. \tag{19}$$

L'inégalité (14) du théorème s'ensuit alors immédiatement de (16), (15) et (19).

Bibliographie.

1. W. Blaschke, *Vorlesungen über Integralgeometrie.* I, II (Leipzig, 1935).
2. E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* (Paris, 1928).
3. I. Fáry, Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un noeud, *Bulletin de la Société Math. de France,* **77** (1949), p. 128—138.
4. W. Maak, Integralgeometrie 18, *Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Univ.,* **12** (1937), p. 83–110.
5. L. Pontrjagin, *Topological groups* (Princeton, 1946).
6. T. Radó, *Length and Area* (New York, 1948).
7. A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (Paris, 1940).

(Reçu le 10 décembre 1949)

---

5) Soit $f(p)$ une fonction de point. On a

$$\int f(p)\, dp = \frac{1}{\pi} \int \left(\int f(t)\, dt \right) da$$

où t est le point variable de la droite a.

On the convergence in measure.

By S. HARTMAN*) and E. MARCZEWSKI in Wrocław (Poland).

In 1909 F. RIESZ introduced the important notion of *convergence in measure* (called later by other authors *asymptotical convergence*) of sequences of functions [1]). The importance of this concept increased particularly since KOLMOGOROFF gave the measure-theoretical interpretation of probability theory [2]). In that interpretation the so-called *convergence in probability* (e. g. in Bernoulli's law of large numbers) is the same as the convergence in measure.

The present contribution to the study of the convergence in measure has been suggested by the following theorem, frequently used in the probability theory: If a sequence $\{f_n\}$ of measurable functions is convergent in measure to a function f, then the distribution functions F_n of f_n are convergent to the distribution function F of f in each continuity point of F [3]). Here we give a stronger condition which is not only necessary but also sufficient for the convergence in measure of a sequence of functions (Theorems 3 and 3') [4]). Our result gives a new relation between the properties of functions and those of the sets obtained from them by the operation of converse image.

The last paragraph contains some applications to the study of stochastically independent functions.

1. Preliminaries.

We consider an abstract space X, a σ-field $\mathbf{M}$ of subsets of X and a σ-measure (i. e. a σ-additive and non negative set function) $\mu(E)$ in $\mathbf{M}$ such that $\mu(X)=1$. Points of X will be denoted by x [5]).

---

*) Scholar of the Commission for the Restoration of Polish Science.

1) F. RIESZ, Sur les suites de fonctions mesurables, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **148** (1909), pp. 1303–1305.

2) A. KOLMOGOROFF, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Berlin, 1933).

3) See e. g. M. FRÉCHET, *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*. I (Paris, 1937), p. 170 and S. MAZURKIEWICZ, Sur les espaces de variables aléatoires, *Fundamenta Math.*, **36** (1949), pp. 288–302, especially p. 291.

4) Another necessary and sufficient condition was given by W. KOZAKIEWICZ, Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence stochastique, *Fundamenta Math.*, **31** (1938), pp. 160–178.

5) With indices if necessary.

We consider a metric space Y; we denote by y[5]) its points and by $\varrho(y_1, y_2)$ the distance of y_1 and y_2. For each subset E of Y we design by $\mathrm{Fr}E$ the boundary of E, i. e. the set $\overline{E}\cdot\overline{(Y-E)}$. In general our set-theoretical terminology and notation is that of KURATOWSKI's *Topologie* [6]).

Each σ-measure defined in the class of Borel subsets of Y will be called a *Borel measure* in Y.

In the sequel the letter f (and g)[5]), if nothing to the contrary is explicitly stated, shall denote a mapping $y=f(x)$ of X into Y which is measurable with respect to μ, i. e. such that $f^{-1}(B)\in\mathbf{M}$ for each Borel subset B of Y. Obviously

(i) For each f the set function $\mu[f^{-1}(B)]$ is a Borel measure in Y.

We say, following F. RIESZ, that a sequence $\{f_n\}$ *converges in measure* to f or, else, *μ-converges* to f and we write $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$, if for each $\varepsilon>0$

$$\lim_{n=\infty} \mu \underset{x}{E}\{\varrho[f_n(x), f(x)]>\varepsilon\}=0.$$

We say that a sequence of sets $E_n\in\mathbf{M}$ is *μ-convergent* to a set $E\in\mathbf{M}$ and we write $E_n \underset{\mu}{\rightarrow} E$, if the sequence of characteristic functions of E_n is μ-convergent to the characteristic function of E, or, in other words, if $\lim\limits_{n=\infty} \mu(E_n \dot{-} E)=0$ (where $A \dot{-} B$ denotes the *symmetric difference* of A and B, i. e. the set $(A-B)+(B-A)$)[7]).

It easily follows from elementary properties of the symmetric difference[8]) that

(ii) If $A_n \underset{\mu}{\rightarrow} A$ and $B_n \underset{\mu}{\rightarrow} B$, then

$$A_n+B_n \underset{\mu}{\rightarrow} A+B, \quad A_nB_n \underset{\mu}{\rightarrow} AB, \quad A_n-B_n \underset{\mu}{\rightarrow} A-B.$$

(iii) If $A_n \underset{\mu}{\rightarrow} A$, then $\lim\limits_{n=\infty} \mu(A_n)=\mu(A)$.

Q and **K** being two subclasses of **M** we say that **Q** is *μ-dense* on **K** if for each $E\in\mathbf{K}$ there is a sequence of sets $E_n\in\mathbf{Q}$ μ-convergent to E.

A class **V** of Borel subsets of Y is called a *basis* of Y, if each open set $G\subset Y$ is the sum of a denumerable subclass of **V**. Obviously

(iv) If **V** is a denumerable basis of Y, then for each $\varepsilon>0$ the class of all sets $V\in\mathbf{V}$ with $\delta(V)<\varepsilon$ is again a basis of Y.

(v) If Y is a separable metric space (i. e. if there is a denumerable basis of Y) then each basis of Y contains a denumerable basis.

---

[6]) C. KURATOWSKI, *Topologie* I, deuxième édition (Warszawa-Wrocław, 1948).

[7]) The number $\mu(A \dot{-} B)$ may be considered as the distance of A and B See e. g. O. NIKODYM, Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, *Fundamenta Math.*, **15** (1930), pp. 131—179, especially p. 137.

[8]) See e. g. F. HAUSDORFF, *Mengenlehre* (Berlin—Leipzig, 1935), Ergänzungen, pp. 276—278 and E. MARCZEWSKI, Concerning the symmetric difference in the Theory of Sets and in Boolean algebras, *Colloquium Math.*, **1** (1948), pp. 199–202, especially pp. 200–201.

Now let us prove that

(vi) For each finite Borel measure $\varphi(B)$ in Y the class $\mathbf{J}_\varphi$ of all open subsets G of Y with $\varphi(\mathrm{Fr}\, G)=0$ is an additive basis of Y.

The relation $\mathrm{Fr}\, A+\mathrm{Fr}\, B\supset\mathrm{Fr}\,(A+B)$ implies the additivity of $\mathbf{J}_\varphi$. Further, since for each open set $G\subset Y$ the set R of all $r>0$ such that

$$\varphi\{\underset{y}{E}[\varrho(y, Y-G)=r]\}>0$$

is denumerable, there exists a sequence of positive numbers $r_n \overline{\in} R$ convergent to 0. Putting

$$V_n=\underset{y}{E}[\varrho(y, Y-G)>r_n]$$

we have $V_n\in\mathbf{J}_\varphi$ and $G=V_1+V_2+\ldots$, whence $\mathbf{J}_\varphi$ is a basis of Y.

We call a *generalized basis* of Y each class $\mathbf{V}$ of Borel sets such that the smallest field $\mathbf{V}_0$ containing $\mathbf{V}$ is a basis of Y. Consequently

(vii) Each basis of Y is a generalized basis of Y.

We shall deal with an important case of the generalized basis for the Euclidean space R^k. Let L_a denote, for each $a=(a_1, a_2, \ldots, a_k)\in R^k$, the set

$$\underset{(\xi_1,\ldots,\xi_k)}{E}[\xi_1<a_1,\ldots,\xi_k<a_k].$$

It is obvious that

(viii) The set of all subsets L_a of R^k where a runs over a dense subset of R^k is a generalized basis of R^k.

(ix) For each finite Borel measure φ in R^k the set of the continuity points of the function $F(a)=\varphi(L_a)$ (where a runs over R^k) is dense in R^k.

(x) For each function f, the values of which belong to R^k, its distribution function, i. e. the function $F(a)=\mu[f^{-1}(L_a)]$, is continuous at $a_0\in R^k$, if and only if $\mu[f^{-1}(\mathrm{Fr}\, L_{a_0})]=0$.

2. Convergence in measure of functions characterized by that of sets.

Theorem 1. *If $f_n \underset{\mu}{\longrightarrow} f$ and, if E is a Borel subset of Y such that*

$$\mu[f^{-1}(\mathrm{Fr}\, E)]=0 \tag{1}$$

then $f_n^{-1}(E)\underset{\mu}{\longrightarrow} f^{-1}(E)$.

Proof. Put for positive integers j and n

$$A_j^n=\underset{x}{E}\{\varrho[f(x), f_n(x)]\geq 1/j\},$$

$$H_j=\underset{y}{E}[\varrho(y, E)<1/j]\cdot\underset{y}{E}[\varrho(y, Y-E)<1/j].$$

Consequently we have

$$H_1\supset H_2\supset\ldots,\qquad H_1\cdot H_2\ldots=\mathrm{Fr}\, E \tag{2}$$

$$f^{-1}(E)\dot{-}f_n^{-1}(E)\subset A_j^n+f^{-1}(H_j)\qquad\text{for } j=1, 2,\ldots,\ n=1, 2,\ldots. \tag{3}$$

By (1) and (2) we have

$$\lim_{j=\infty} \mu[f^{-1}(H_j)] = \mu[f^{-1}(\operatorname{Fr} E)] = 0.$$

Thus, for any $\varepsilon > 0$ there is a positive integer j_0 such that

(4) $$\mu[f^{-1}(H_{j_0})] < \varepsilon/2.$$

The sequence $\{f_n\}$ being μ-convergent to f, there is a positive integer N such that

(5) $$\mu(A_{j_0}^n) < \varepsilon/2 \qquad \text{for } n > N.$$

From (3), (4) and (5) we obtain $\mu[f^{-1}(E) \dot{-} f_n^{-1}(E)] < \varepsilon$ for $n > N$, q. e. d.

Theorem 1 and propositions 1 (iii) and 1 (x) imply the well-known theorem on the convergence of distribution functions, quoted in the Introduction above.

Theorem 2. *Let* $\mathbf{V}$ *be a denumerable generalized basis of* Y. *If*

(6) $$f_n^{-1}(V) \xrightarrow[\mu]{} f^{-1}(V)$$

for each $V \in \mathbf{V}$, *then* $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$.

Proof. Since (6) holds for each $V \in \mathbf{V}$, it also holds by 1 (ii) for each V belonging to the smallest field $\mathbf{V}_0$ containing $\mathbf{V}$.

Let us suppose that the sequence $\{f_n\}$ is not μ-convergent to f, or, in other words, that there are two numbers $\varepsilon > 0$ and $\eta > 0$, and an increasing sequence $\{k_n\}$ of positive integers such that

(7) $$\mu(E_n) > \eta \qquad \text{for } n = 1, 2, \ldots,$$

where

$$E_n = \underset{x}{E}\{\varrho[f_{k_n}(x), f(x)] > \varepsilon\}.$$

By definition of generalized basis and 1 (iv), there is a sequence $\{V_n\}$ of sets belonging to $\mathbf{V}_0$ such that $Y = V_1 + V_2 + \ldots$ and $\delta(V_n) < \varepsilon$.

Further, by the σ-additivity of the measure μ there is a positive integer s such that putting $Y_0 = V_1 + V_2 + \ldots + V_s$ we have $\mu[f^{-1}(Y - Y_0)] < \eta/2$.

From this and (7) we obtain

(8) $$\mu[E_n \cdot f^{-1}(Y_0)] = \mu[E_n - f^{-1}(Y - Y_0)] > \eta/2.$$

Since $E_n \cdot f^{-1}(Y_0) = E_n[f^{-1}(V_1) + f^{-1}(V_2) + \ldots + f^{-1}(V_s)]$, there is by (8) for each positive integer n a positive integer j_n such that

$$\mu[E_n \cdot f^{-1}(V_{j_n})] > \eta/2s \qquad 1 \leqq j_n \leqq s.$$

Thus, there is a positive integer j_0 and an increasing sequence $\{l_n\}$ of positive integers such that $j_{l_n} = j_0$ for $n = 1, 2, \ldots$. Denoting by V the set V_{j_0} we obtain

(9) $$\mu[E_{l_n} \cdot f^{-1}(V)] > \eta/2s \qquad \text{for } n = 1, 2, \ldots.$$

If $x \in E_{l_n} \cdot f^{-1}(V)$, then

$$f(x) \in V \quad \text{and} \quad \varrho[f(x), f_{k_{l_n}}(x)] > \varepsilon,$$

whence, in virtue of the inequality $\delta(V) < \varepsilon$, we have $f_{k_{l_n}}(x) \overline{\in} V$. Consequently

$$f_{k_{l_n}}^{-1}(V) \cdot f^{-1}(V) \cdot E_{l_n} = 0,$$

whence

$$f^{-1}(V) \dot{-} f_{k_{l_n}}^{-1}(V) \supset f^{-1}(V) - f_{k_{l_n}}^{-1}(V) \supset E_{l_n} \cdot f^{-1}(V)$$

and finally

$$\mu[f^{-1}(V) \dot{-} f_{k_{l_n}}^{-1}(V)] > \eta/2s \qquad \text{for } n = 1, 2, \ldots.$$

Therefore the sequence $f_{k_{l_n}}^{-1}(V)$ is not μ-convergent to $f^{-1}(V)$, which contradicts the hypothesis. The proof is thus complete.

Comparing Theorems 1 and 2, we obtain the

Theorem 3. *If Y is separable, then the following conditions are equivalent:*

I. $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$.

II. *There is a denumerable generalized basis* $\mathbf{V}$ *of Y such that* $f_n^{-1}(V) \xrightarrow[\mu]{} f^{-1}(V)$ *for each* $V \in \mathbf{V}$.

III. *There is a denumerable basis* $\mathbf{V}$ *of Y such that* $f_n^{-1}(V) \xrightarrow[\mu]{} f^{-1}(V)$ *for each* $V \in \mathbf{V}$.

IV. $f_n^{-1}(B) \xrightarrow[\mu]{} f^{-1}(B)$ *for each Borel set* $B \subset Y$ *such that* $\mu[f^{-1}(\mathrm{Fr}\, B)] = 0$.

In fact: the implication I $\to$ IV is stated by Theorem 1; IV $\to$ III in virtue of 1 (vi) and 1 (v); III $\to$ II in view of 1 (vii), and finally Theorem 2 gives the implication II $\to$ I.

From Theorem 3 and the propositions 1 (i) and 1 (viii—x) we obtain

Theorem 3'. *If the values of f_n and f are points of the Euclidean space R^k, the following conditions are equivalent:*

I. $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$.

V. *There is a dense subset D of R^k such that* $f_n^{-1}(L_a) \xrightarrow[\mu]{} f^{-1}(L_a)$ *for each* $a \in D$.

VI. $f_n^{-1}(L_a) \xrightarrow[\mu]{} f^{-1}(L_a)$ *for each continuity point a of the distribution function of f.*

3. Convergence in measure and stochastic independence.

Two sets $A, B \in \mathbf{M}$ are called *stochastically independent* or simply *independent* if $\mu(AB) = \mu(A) \cdot \mu(B)$. Two classes $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ contained in $\mathbf{M}$ are called independent, if any two sets $A \in \mathbf{A}$ and $B \in \mathbf{B}$ are independent. Two functions f and g are called independent, if for any two Borel sets A and B in Y we have $\mu[f^{-1}(A) \cdot g^{-1}(B)] = \mu[f^{-1}(A)] \cdot \mu[g^{-1}(B)]$ or, in other words, if the classes $\mathbf{B}_f$ and $\mathbf{B}_g$ of all converse images of Borel sets under f and g respectively are independent.

In virtue of 1(ii) and 1(iii):

(i) If for each positive integer n the sets $A_n \in \mathbf{M}$ and $B_n \in \mathbf{M}$ are independent, and if $A_n \xrightarrow[\mu]{} A$ and $B_n \xrightarrow[\mu]{} B$, then A and B are independent.

Consequently:

(ii) If the classes $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ are contained in $\mathbf{M}$, and if $\mathbf{Q}_j$ is μ-dense on $\mathbf{K}_j$ for $j=1,2$, then the independence of $\mathbf{Q}_1$ and $\mathbf{Q}_2$ implies that of $\mathbf{K}_1$ and $\mathbf{K}_2$.

Now we prove the following lemma:

(iii) If $\mathbf{V}$ is an additive basis of Y, and if φ is a finite Borel measure in Y, then $\mathbf{V}$ is φ-dense on the class $\mathbf{B}$ of all Borel sets in Y.

It is well known that for each Borel set B and each $\eta > 0$ there is an open set $G \supset B$ such that $\varphi(G-B) < \eta$[9]. The class $\mathbf{V}$ being an additive basis of Y, there is an increasing sequence of sets $V_n \in \mathbf{V}$ such that $G = V_1 + V_2 + \ldots$. Consequently, by the σ-additivity of μ there is a positive integer s such that $\varphi(G - V_s) < \eta$. Since

$$B \dot{-} V_s \subset (B \dot{-} G) + (G \dot{-} V_s) = (G-B) + (G-V_s),$$

we obtain finally $\varphi(B \dot{-} V_s) < 2\eta$, q. e. d.

For every class $\mathbf{Q}$ of subsets of Y and for every f let $\mathbf{Q}_f$ denote the class of the converse images of all $E \in \mathbf{Q}$ under f. Then, from (ii) and (iii) we obtain:

(iv) For each additive basis $\mathbf{V}$ of Y the independence of $\mathbf{V}_f$ and $\mathbf{V}_g$ is a necessary and sufficient condition for the independence of f and g[10].

The necessity of the condition is obvious. For the sufficiency it is enough 1^0 to apply (iii) for two Borel measures in Y:

$$\varphi(B) = \mu[f^{-1}(B)] \text{ and } \psi(B) = \mu[g^{-1}(B)],$$

2^0 to remark that the φ-density and the ψ-density of $\mathbf{V}$ on the class $\mathbf{B}$ of all Borel subsets of Y imply the μ-density of $\mathbf{V}_f$ on $\mathbf{B}_f$ and the μ-density of $\mathbf{V}_g$ on $\mathbf{B}_g$, 3^0 to apply (ii).

Theorem 4. *If f_n and g_n are independent for each positive integer n, if, further, $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ and $g_n \xrightarrow[\mu]{} g$, then f and g are independent.*

Proof. By Theorem 1

$$f_n^{-1}(G) \xrightarrow[\mu]{} f^{-1}(G) \text{ and } g_n^{-1}(G) \xrightarrow[\mu]{} g^{-1}(G) \tag{1}$$

---

[9]) Or, which is the same for finite measures, B is contained in a set G_δ the measure of which is equal to $\mu(B)$. See e. g. E. Marczewski and R. Sikorski, Remark on measure and category, *Colloquium Math.*, **2** (1949), pp. 13—19, especially p. 14.

[10]) This theorem is a special case of a theorem proved (in a more complicated way) by S. Hartman, Sur l'indépendance stochastique de familles d'ensembles, *Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław*, **1** (in print), Théorème 5.

for every G such that

$$\mu[f^{-1}(\mathrm{Fr}\,G)] = 0 = \mu[g^{-1}(\mathrm{Fr}\,G)]. \tag{2}$$

In virtue of 1(i) the set function

$$\gamma(B) = \mu[f^{-1}(B)] + \mu[g^{-1}(B)]$$

is a Borel measure in Y and, consequently, according to 1(vi), the class $\mathbf{V}$ of all open sets G satisfying (2) is an additive basis of Y. The functions f_n and g_n being independent, it follows from (1) and (i) that $\mathbf{V}_f$ and $\mathbf{V}_g$ are independent and from (iv) that f and g are independent. Theorem 4 is thus proved.

We shall prove the following lemma:

(v) If Y is of the power of the continuum[11]), then f is independent with respect to itself, if and only if f is constant almost everywhere (i. e. if there is an y_0 such that $\mu\{\underset{x}{E}[f(x) \neq y_0]\} = 0$).

The sufficiency is obvious. To prove the necessity it is enough 1° to remark that if f and f are independent, then the Borel measure $\mu[f^{-1}(B)]$ in Y assumes only the values 0 and 1, and 2° to make use of the fact that for each Borel measure in Y, which assumes only the values 0 and 1, there is an $y_0 \in Y$ such that $\varphi[(y_0)] = 1$.[12])

From Theorem 4 and (v) we obtain

Theorem 5. *If Y is of the power of the continuum*[11]), $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ *and for each N there exist $k > l > N$ such that f_k and f_l are independent, then f is constant almost everywhere.*

(Received November 25, 1949.)

---

[11]) And more generally, if the power of Y is less than the first aleph inaccessible in the strong sense.

[12]) The proof is easy in case Y separable. For the non-separable case see E. Marczewski and R. Sikorski, Measures in non-separable metric spaces, *Colloquium Math.*, 1 (1948), pp. 132—139, especially p. 139, Theorem VI. We remark besides that Theorem III in the same paper (p. 137) permits to replace the hypothesis of separability of Y in Theorems 2 and 3 in the present paper by the weaker hypothesis that the separability character $\mathfrak{m}$ of Y is $\aleph_0$, $\aleph_1$ or, more generally, that $\mathfrak{m}$ is less than the first aleph inaccessible in the weak sense.

Über den Zusammenhang der Krümmungsaffinoren in zwei eineindeutig aufeinander abgebildeten Finslerschen Räumen.

Von O. VARGA in Debrecen.

Entsprechen einander zwei Finslersche Räume in einer Abbildung umkehrbar eindeutig, so ist dieser Tatbestand damit äquivalent, daß ein und derselben Mannigfaltigkeit zwei verschiedene Finslersche Maßbestimmungen aufgeprägt sind. Wir wollen bei der Untersuchung des Zusammenhanges der Krümmungsaffinoren, die zu den beiden aufeinander abgebildeten Mannigfaltigkeiten gehören, von dieser Auffassung ausgehen. Der Zusammenhang der Krümmungsaffinoren wird dann durch diejenigen typischen Affinoren bestimmt, die bei der Bildung der Differenz der zwei verschiedenen Übertragungen auftreten.

1. Affinoren, die in der Differenz der beiden Übertragungen auftreten.

Seien $L(\xi, v)$ bzw. $\bar{L}(\xi, v)$ die verschiedenen Grundfunktionen zweier Finslerscher Maßbestimmungen, die zu derselben Linienelementmannigfaltigkeit $(\xi^\varkappa, v^\varkappa)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ gehören [1]).

Die invarianten Differenziale der Einheitsvektoren

$$l^\varkappa = \frac{v^\varkappa}{L}, \quad \bar{l}^\varkappa = \frac{v^\varkappa}{\bar{L}} \tag{1, 1}$$

sind durch

$$\begin{aligned} \delta l^\varkappa &\overset{\text{def}}{=} \omega^\varkappa(d) = dl^\varkappa + \frac{1}{L} G^\varkappa_\varrho \, d\xi^\varrho, \\ \delta \bar{l}^\varkappa &\overset{\text{def}}{=} \bar{\omega}^\varkappa(d) = d\bar{l}^\varkappa + \frac{1}{\bar{L}} \bar{G}^\varkappa_\varrho \, d\xi^\varrho \text{ [2])} \end{aligned} \tag{1, 2}$$

---

[1]) ξ^ν bezeichnet die Koordinaten des Punktes, während v^ν die homogenen Koordinaten der Richtung sind.

[2]) Siehe E. CARTAN, Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles,* **79** (Paris, 1934), S. 16, Formel XIII. Wir haben im Text G^ν_ϱ statt $\frac{\partial G^\nu}{\partial v^\varrho}$ gesetzt.

bestimmt. Wegen (1, 1) und (1, 2) ist der Zusammenhang von $\omega^\varkappa$ und $\overline{\omega}^\varkappa$ durch

$$\overline{\omega}^\varkappa(d) = \frac{L}{\overline{L}}\omega^\varkappa + V^\varkappa_\varrho d\xi^\varrho + l^\varkappa d\left(\frac{L}{\overline{L}}\right) \tag{1, 3}$$

gegeben, wobei für den Affinor $V^\varkappa_\varrho$

$$V^\varkappa_\varrho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\overline{L}}(\overline{G}^\varkappa_\varrho - G^\varkappa_\varrho) \tag{1, 4}$$

gilt.

Die zu $L(\xi, v)$ bezw. $\overline{L}(\xi, v)$ gehörigen Übertragungen sind durch Pfaffsche Formen ω^ν_ϱ bezw. $\overline{\omega}^\nu_\varrho$ der Gestalt

$$\omega^\nu_\varrho(d) = A_{\lambda\varrho}{}^{\nu}\,\omega^\lambda(d) + \Gamma^{*\nu}_{\lambda\varrho} d\xi^\lambda \tag{1, 5}$$

bestimmt und entsprechendes gilt natürlich für die überstrichenen Größen $\overline{\omega}^\nu_\varrho$ [3]).

Wir wollen nun die Differenz der beiden Pfaffschen Formen, als Form der ω^ν und $d\xi^\nu$ bestimmen. Wegen (1, 3) und der Eigenschaft

$$A_{\lambda\varrho}{}^{\nu}\, v^\lambda = A_{\varrho\lambda}{}^{\nu}\, v^\lambda = 0 \;{}^{4)} \tag{1, 6}$$

ergibt sich

$$\varrho^\nu_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\omega}^\nu_\lambda - \omega^\nu_\lambda = E_{\varrho\lambda}{}^{\nu}\,\omega^\varrho + F_{\varrho\lambda}{}^{\nu}\, d\xi^\varrho, \tag{1, 7}$$

wobei

$$E_{\varrho\lambda}{}^{\nu} = \overline{A}_{\varrho\lambda}{}^{\nu}\frac{L}{\overline{L}} - A_{\varrho\lambda}{}^{\nu}, \tag{1, 8}$$

$$F_{\varrho\lambda}{}^{\nu} = V^\mu_\varrho \overline{A}_{\mu\lambda}{}^{\nu} + \overline{\Gamma}^{*\nu}_{\varrho\lambda} - \Gamma^{*\nu}_{\varrho\lambda} \tag{1, 9}$$

gesetzt wurde. Wegen (1, 6) gilt für den in den unteren Zeigern symmetrischen Affinor (1, 8) insbesondere

$$E_{\varrho\lambda}{}^{\nu}\, l^\varrho = E_{\lambda\varrho}{}^{\nu}\, l^\varrho = 0. \tag{1, 10}$$

2. Der Zusammenhang der Krümmungsaffinoren.

Bei der Herleitung des Zusammenhanges der Krümmungsaffinoren verwenden wir die Cartansche Darstellung der Krümmungstheorie. In derselben sind die Krümmungsaffinoren die Koeffizienten der äußeren Formen

$$\Omega^\lambda_\tau = -\,\omega^{\lambda\,\prime}_\tau + [\omega^\mu_\tau\,\omega^\lambda_\mu], \tag{2, 1}$$

$$\overline{\Omega}^\lambda_\tau = -\,\overline{\omega}^{\lambda\,\prime}_\tau + [\overline{\omega}^\mu_\tau\,\omega^\lambda_\mu]. \tag{2, 1'}$$

Unter Beachtung von (1, 7) erhält man aus (2, 1) und (2, 1')

$$\overline{\Omega}^\lambda_\tau - \Omega^\lambda_\tau = -\,\varrho^{\lambda\,\prime}_\tau + [\varrho^\sigma_\tau\,\varrho^\lambda_\sigma] + [\varrho^\sigma_\tau\,\omega^\lambda_\sigma] - [\varrho^\lambda_\sigma\,\omega^\sigma_\tau]. \tag{2, 2}$$

---

3) Siehe E. Cartan, *loc. cit.*, S. 32.

4) Siehe E. Cartan, *loc. cit.*, S. 10 - 11.

Für die äußere Form zweiten Grades $\bar{\Omega}_\tau^\lambda$ gilt nun die Darstellung

$$\bar{\Omega}_\tau^\lambda = \frac{1}{2} S_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} [\bar{\omega}^\nu \bar{\omega}^\mu] + P_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} [d\xi^\nu \omega^\mu] + \frac{1}{2} R_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} [d\xi^\nu d\xi^\mu] \tag{2, 3}$$

und entsprechend für die nicht überstrichene Form [5]). Wir führen nun auf der rechten Seite von (2, 3) für die $\bar{\omega}^\nu$ die Ausdrücke (1, 3) ein. Wegen (1, 6) und den Beziehungen

$$S_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} l^\mu = P_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} l^\mu = 0 \text{ [6])}$$

erhält man so für die $\bar{\Omega}_\tau^\lambda$ eine äußere Form zweiten Grades in den ω^ν und $d\xi^\nu$. Eine formale Rechnung, die hier übergangen werden soll, ergibt dann für die linke Seite von (2, 2)

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_\tau^\lambda - \Omega_\tau^\lambda = & \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{\bar{L}^2} \bar{S}_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} - S_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}\right)[\omega^\nu \omega^\mu] + \\ & + \left(\frac{L}{\bar{L}} \bar{P}_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} - P_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + \frac{L}{\bar{L}} \bar{S}_{\mu\varrho\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} V_\nu^\varrho\right)[d\xi^\nu \omega^\mu] + \\ & + \frac{1}{2}(\bar{R}_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} - R_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + V_\mu^\varrho V_\nu^\sigma \bar{S}_{\varrho\sigma\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + V_{[\mu}^\sigma \bar{P}_{|\sigma|\nu]\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda})[d\xi^\nu d\xi^\mu]. \end{aligned} \tag{2, 4}$$

Bei der Berechnung der rechten Seite von (2, 2) hat man außer (1, 8) und (1, 9) noch die beiden kovarianten Ableitungen eines Affinors zu benützen. Es bedeutet z. B. $\nabla_\mu E_{\varrho\lambda}^{\cdot\cdot\tau}$ die von E. CARTAN definierte kovariante Ableitung des Affinors $E_{\varrho\lambda}^{\cdot\cdot\tau}$, [7]) während die zweite kovariante Ableitung durch

$$\overset{*}{\nabla}_\mu E_{\varrho\lambda}^{\cdot\cdot\tau} = L \frac{\partial E_{\varrho\lambda}^{\cdot\cdot\tau}}{\partial v^\mu} + A_{\mu\sigma}^{\cdot\cdot\tau} E_{\varrho\lambda}^{\cdot\cdot\sigma} - A_{\mu\varrho}^{\cdot\cdot\sigma} E_{\sigma\lambda}^{\cdot\cdot\tau} - A_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\sigma} E_{\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\tau} \tag{2, 5}$$

bestimmt ist und entsprechendes gilt natürlich für einen Affinor beliebiger Valenz. Man erhält so für die rechte Seite von (2, 2) die Beziehung

$$\begin{aligned} (-\varrho_\tau^\lambda)' + [\varrho_\tau^\sigma \varrho_\sigma^\lambda] + [\varrho_\tau^\sigma \omega_\sigma^\lambda] - [\varrho_\sigma^\lambda \omega_\tau^\sigma] = \\ = \frac{1}{2}(\overset{*}{\Delta}_{[\mu} E_{\nu]\tau}^{\cdot\cdot\lambda} + E_{[\mu|\sigma|}^{\cdot\cdot\lambda} E_{\nu]\tau}^{\cdot\cdot\sigma})[\omega^\nu \omega^\mu] + \\ + (\overset{*}{\Delta}_\mu F_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\lambda} - \Delta_\nu E_{\mu\tau}^{\cdot\cdot\lambda} + A_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\sigma} F_{\sigma\tau}^{\cdot\cdot\lambda} + E_{\mu\sigma}^{\cdot\cdot\lambda} F_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\sigma} - \\ - E_{\mu\tau}^{\cdot\cdot\sigma} F_{\nu\sigma}^{\cdot\cdot\lambda} + P_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\sigma} E_{\sigma\tau}^{\cdot\cdot\lambda})[d\xi^\nu \omega^\mu] + \\ + \frac{1}{2}(\Delta_{[\mu} F_{\nu]\tau}^{\cdot\cdot\lambda} + F_{[\mu|\sigma|}^{\cdot\cdot\lambda} F_{\nu]\tau}^{\cdot\cdot\sigma} + R_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\sigma} E_{\sigma\tau}^{\cdot\cdot\lambda})[d\xi^\nu d\xi^\mu], \end{aligned} \tag{2, 6}$$

---

[5]) Siehe E. CARTAN, *loc. cit.*, S. 33. Formel (41). Dort werden die drei Affinoren des Textes mit $S_{\tau\ \nu\mu}^{\ \lambda}$, $P_{\tau\ \lambda\mu}^{\ \lambda}$ und $R_{\tau\ \nu\mu}^{\ \lambda}$ bezeichnet.

[6]) Siehe E. CARTAN, *loc. cit.*, S. 33.

[7]) Siehe E. CARTAN, *loc. cit.*, S. 17—18. Dort steht $E_{\varrho\lambda\ /\mu}^{\cdot\cdot\tau}$ an Stelle der im Text benützten Bezeichnung.

wobei

(2, 7) $$P_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} P_{\mu\nu\zeta}^{\cdot\cdot\cdot\,\sigma} v^{\zeta},$$

(2, 7′) $$R_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\mu\nu\zeta}^{\cdot\cdot\cdot\,\sigma} v^{\zeta}$$

gesetzt wurde[8]).

Ersetzt man die linke Seite von (2, 2) durch (2, 4), die rechte Seite durch (2, 6), so erhält man einen Ausdruck der Gestalt

(2, 8) $$Q_{\nu\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda}[\omega^{\nu}\omega^{\mu}] + M_{\nu\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda}[d\xi^{\nu}\omega^{\mu}] + N_{\nu\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda}[d\xi^{\nu}\, d\xi^{\mu}] = 0.$$

Entsprechende Wahl der $d\xi^{\nu}$ bezw. ω^{ν} zeigt, daß die drei, auf der rechten Seite von (2, 8) auftretenden äußeren Formen einzeln verschwinden müssen. Wegen der Relationen

$$\omega_{\varrho} l^{\varrho} = 0$$

folgt aus dem Verschwinden der ersten und zweiten äußeren Form, falls $Q_{\nu\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda}$ und $M_{\nu\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda}$ in den Zeigern ν, μ schiefsymmetrisch sind,

(2, 9) $$Q_{\nu\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} - Q_{\nu\zeta\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} v^{\zeta}\cdot l_{\mu} + Q_{\mu\zeta\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} v^{\zeta}\cdot l_{\nu} = 0$$

und

(2, 10) $$M_{\nu\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} - l_{\mu} M_{\nu\zeta\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} v^{\zeta} = 0,$$

während das Verschwinden der dritten Form

(2, 11) $$N_{\nu\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} = 0$$

gibt. Aus den Relationen (1, 10) folgt aber bei Beachtung der expliziten Gestalt der Krümmungsaffinoren $S_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda}$ und $P_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda}$, daß

$$Q_{\nu\zeta\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} v^{\zeta} = M_{\nu\zeta\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} v^{\zeta} = 0$$

ist. Es reduzieren sich somit (2, 9) und (2, 10) auf

(2, 9′) $$Q_{\nu\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} = 0$$

und

(2, 10′) $$M_{\nu\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} = 0.$$

Die Berechnung der expliziten Ausdrücke für (2, 9′), (2, 10′) und (2, 11) führt zu den gesuchten Zusammenhängen der Krümmungsaffinoren

(2, 12) $$\frac{L^2}{\bar{L}^2}\bar{S}_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} - S_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} = \overset{*}{\varDelta}_{[\mu} E_{\nu]\tau}^{\cdot\cdot\,\lambda} + E_{[\mu|\sigma|}^{\cdot\cdot\,\lambda} E_{\nu]\tau}^{\cdot\cdot\,\sigma},$$

(2, 13) $$\frac{L}{\bar{L}}\bar{P}_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} - P_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} + \frac{L}{\bar{L}}\bar{S}_{\mu\sigma\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} V_{\nu}^{\sigma} = \overset{*}{\varDelta}_{\mu} F_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\,\lambda} - \varDelta_{\nu} E_{\mu\tau}^{\cdot\cdot\,\lambda} +$$
$$+ A_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\sigma} F_{\sigma\tau}^{\cdot\cdot\,\lambda} + E_{\mu\sigma}^{\cdot\cdot\,\lambda} F_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\,\sigma} - E_{\mu\tau}^{\cdot\cdot\,\sigma} F_{\nu\sigma}^{\cdot\cdot\,\lambda} + P_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\sigma} E_{\sigma\tau}^{\cdot\cdot\,\lambda},$$

(2, 14) $$\bar{R}_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} - R_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} + V_{\mu}^{\varrho} V_{\nu}^{\sigma} \bar{S}_{\varrho\sigma\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} + V_{[\mu}^{\varrho} \bar{P}_{|\varrho|\nu]\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} =$$
$$= \varDelta_{[\mu} F_{\nu]\tau}^{\cdot\cdot\,\lambda} + F_{[\mu|\sigma|}^{\cdot\cdot\,\lambda} F_{\nu]\tau}^{\cdot\cdot\,\sigma} + R_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\sigma} E_{\sigma\tau}^{\cdot\cdot\,\lambda}.$$

(Eingegangen am 12. Septemter 1949.)

---

[8]) Bei E. CARTAN, *loc. cit.*, insbes. S. 13, mit $P_{\mu\nu 0}^{\sigma}$ und $R_{\mu\nu 0}^{\sigma}$ bezeichnet.

On a geometrical extremum problem.

By STEPHEN VINCZE in Budapest.

1. In what follows we shall consider an extremum problem concerning polygons.[1]) Throughout this paper U_n will mean a convex polygon with n sides each of which has the length 1. The diameter of the polygon, i. e. the longest diagonal, will be discussed.

Trying to find a U_n with the smallest possible diameter, P. ERDŐS found in the cases $n=4$ and 5 that the extemal figures are only the corresponding regular ones. It was expected that this is true generally; but ERDŐS surprisingly found this not be true for $n=6$. The diameter of the regular hexagon is 2, while the hexagon, the angles of which are alternately $\pi/2$ and $3\pi/5$, has a diameter $\sqrt{2+\sqrt{3}}<2$.

It would be interesting to find for every n the polygons U_n with the *minimal diameter* $\varDelta_n$. The results of this paper show that the answer to this question depends upon the numbertheoretical structure of n. Our answers are not complete.

As to the part of the question regarding the value of $\varDelta_n$, we obtain that if n has at least one odd prime factor, then $\varDelta_n$ equals to the radius of the circumscribed circle of a regular U_{2n}, i. e. we have

Theorem 1. *If $n=(2k+1)2^s$, where $k\geq 1$, $s\geq 0$, then*

$$\varDelta_n=\left(2\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{-1}. \tag{1}$$

Thus the problem of the minimum remains open only if $n=2^s>4$. We have for all n the

Theorem 2. *If $n\geq 3$, then*

$$\varDelta_n\geq\left(2\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{-1}. \tag{2}$$

As an upper estimation of the value of $\varDelta_n$ $(n\geq 3)$ we have

$$\varDelta_n\leq\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1}, \tag{3}$$

[1]) *Added in proof:* After my paper was finished, I have read the paper of K. REINHARDT, Extremale Polygone gegebenen Durchmessers, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, 31 (1922), pp. 251—270, which deals with a nearly related subject and contains many of my results. Nevertheless I think my paper has some proper interest because of its different point of view and treatment.

Δ_n being evidently at most as large as the diameter of the regular n-gon, which again is not larger than the diameter of its circumscribed circle. This remark as well as our theorem 2 is of significance only if $n=2^s$. In case of $s \geqq 3$ I did not succeed in deciding whether or not the sign of equality can be reached in estimation (2) or (3). If $s=3$ something more can be said, namely

Theorem 3. $\Delta_8 < \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^{-1}$, *i. e. the diameter of the regular octagon does not give the minimum belonging to* $n=8$.

It seems likely that this holds also for $n=2^s>8$.

As to the question of unicity of the extremal figure the answer is generally negative. In this respect the dependence upon the numbertheoretical structure of n is more conspicuous. This is clearly shown by the following

Theorem 4. *If the decomposition of n into prime-factors contains at least two odd prime-factors (equal or not), then there are at least two essentially different extremal polygons U_n. If $n=2k+1$, then the regular n-gon is among the extremal polygons; if $n=(2k+1)\cdot 2^s$, $k \geqq 1$, $s \geqq 1$, it is not.*

In the first mentioned case, when $n=p\cdot q\cdot n'$ (p, q being primes, n' an integer). I shall show that forming the so-called Reuleaux-polygons[2]) with p resp. pq vertices, they can be completed by new points on the periphery into n-gons in such a way that they form extremal U_n's. I could not find *all* extremal polygons so far, if $n>6$.

2. If the general question is raised, which convex closed curves with a given length l of periphery have the minimal diameter, the well known answer is given by the following formula

$$l=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} B(\varphi)\,d\varphi, \tag{4}$$

where $B(\varphi)$ means the distance between two parallel lines of support, both belonging to the φ-direction of the convex curve. As

$$D=\max_{(\varphi)} B(\varphi) \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} B(\varphi)\,d\varphi=\frac{l}{\pi}$$

holds for the diameter D of the curve, D takes its minimal value for, and only for a curve of constant width.

---

[2]) See for ex. T. Bonnesen—W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper* (Berlin, 1934), p. 130.

3. The inequalities (2) and (3) lead to the inequality

$$\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} \leqq \pi \frac{\Delta_n}{n} \leqq \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}},$$

from which it follows for the asymptotical value of the minimal diameter Δ_n that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_n}{n} = \frac{1}{\pi}.$$

4. Now we turn to the proof of our theorem 2, since theorems 1 and 4 can be deduced without difficulty from it. That our extremal problem has at least one solution, it follows easily by using a classical argument.

For the proof of our theorem 2 we shall need the following:

Theorem 5. *The necessary condition for a polygon U_n being a minimal figure is that each vertex should have an opposite vertex, i. e. a vertex in the distance equal to the diameter.*

We shall prove this theorem in the next paragraph, for the moment let us assume that it has been proved.

Remark: It follows from the example constructed by ERDŐS in the case $n=6$ that our condition is not sufficient. The regular hexagon possesses the above mentioned property, but it is no minimal figure.

We shall use also the following theorem[3]):

Any set with the diameter Δ may be completed to form a domain, the boundary of which is a curve of constant width, with the same diameter.

Finally we shall use the following theorem[4]):

Any closed domain the boundary of which is a curve of constant width Δ, contains together with two of its points P_1 and P_2 all circular arcs passing across P_1 and P_2, which are smaller than a half circle and the radius of which is $\geqq \Delta$.

To prove our theorem 2, let us now consider a polygon which is a minimal figure with the diameter Δ_n. Let us complete it in some way to form a domain with the boundary G a curve of constant width. G has the diameter resp. width Δ_n and periphery $\pi\Delta_n$. We prove that every vertex of the polygon is a point of curve G. Assuming that vertex A does not lie on curve G, let us consider the opposite vertex A' of A and continue $\overrightarrow{A'A}$ in this direction. This line would intersect G at the point A'' for which $\overline{A'A''} > \Delta_n$ would hold.

We denote by J_i the part of G between the ith and $(i+1)$th vertex A_i resp. A_{i+1} i. e. the vertices of the minimal figure. The length of J_i shall

[3]) See loc. cit. [2]), p. 130.

[4]) See loc. cit. [2]), p. 129.

be s_i. But the closed domain determined by G contains with its points A_i and A_{i+1} the circular arc C_i the radius of which is Δ_n (according to theorem[3])). We observe that in the circle of radius Δ_n the opening of the central angle belonging to the arc $\widehat{A_i A_{i+1}}$ is evidently independent of i; it may be denoted by ω. Now the length of the circular arc is $\omega \Delta_n$. Let us now consider the convex, closed curves L_1 and L_2. L_1 consisting of the arc J_i and of $\overline{A_i A_{i+1}}$, while L_2 of C_i and of $\overline{A_i A_{i+1}}$. Evidently L_1 contains L_2; hence according to a well-known theorem the periphery of L_1 is at least as large as the periphery of L_2; or in other words the length of the circular arc is not longer than that of the arc J_i: $\omega \Delta_n \leqq s_i$. If these inequalities are summed with regard to the index i, we obtain $n \omega \Delta_n \leqq \sum_1^n{}' s_i = \pi \Delta_n$, thus

$$\omega \leqq \frac{\pi}{n}. \tag{6}$$

But in consequence of the definition of ω, we have

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2\Delta_n}, \quad \Delta_n = \left(2 \sin \frac{\omega}{2}\right)^{-1},$$

thus, by (5),

$$\Delta_n \geqq \left(2 \sin \frac{\pi}{2n}\right)^{-1},$$

which proves our theorem 2.

5. To prove our theorems 1 and 4 we proceed as follows. From theorem 2 it obviously follows that the value of Δ_n cannot be smaller than $\left(2 \sin \frac{\pi}{2n}\right)^{-1}$. Hence theorem 1 will be proved if we can show that this lower bound is actually attained if $n = (2k+1)2^s$. In the case $n = 2k+1$ this follows simply taking a regular n-gon; this shows at the same time that in this case the regular n-gon is one of the the extremal n-gons. If n is even, the diameter d_n of the regular n-gon is

$$d_n = \left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^{-1} > \left(2 \sin \frac{\pi}{2n}\right)^{-1};$$

hence if we show, in the case $n = (2k+1)2^s$, $k \geqq 1$, $s \geqq 1$, that for an other polygon U_n the lower bound $\left(2 \sin \frac{\pi}{2n}\right)^{-1}$ can be attained, this will show that $\left(2 \sin \frac{\pi}{2n}\right)^{-1}$ is the minimal value also in that case and that the corresponding regular n-gon is *not* among the extremal polygons.

Let p be an odd factor of n. Let us consider the p-sided Reuleaux-polygon with the constant width, i. e. with the diameter $\Delta_n = \left(2 \sin \frac{\pi}{2n}\right)^{-1}$.

From any of its vertices the opposite circular arc can be seen at an angle $\frac{\pi}{p}$. We can inscribe in this arc a broken line consisting of $\frac{\pi}{p}:\frac{\pi}{n}=\frac{n}{p}$ sides of length 1. The union of these broken lines forms a polygon U_n with diameter $\varDelta_n$. Taking different odd factors of n and applying the same procedure we obtain different Reuleaux-polygons, i. e. different minimal U_n polygons. This completes the proof of our theorem 1.

6. Now we turn to the proof of our theorem 5. For this purpose we need the following four lemmas:

Lemma 1. *If parallel lines of support can be drawn through the end points of a chord of a convex plane curve, then this chord intersects all diameters.*

Let the chord C have the above mentioned property and let the parallel lines of support passing through its endpoints be s_1 and s_2. If a diameter D would exist which did not intersect C, then D would lie in one of the areas determined by s_1, s_2 and C. D being a diameter the normals passing through its endpoints are lines of support, i. e. they contain the curve and consequently C. It is easy to see that this is only possible if C and D have at least one common endpoint.

Lemma 2. *Consider two angles α and β issued from a point E of a straight line e and lying in the same halfplane determined by e, and having no common points except E. If we turn α round E towards β (resp. in the opposite direction, but in the same halfplane) so that they should have no common point except E, then each point of α will get nearer (resp. farther) to each point of β except E itself.*

Let the point A of the angle α be denoted in its new position by A' and let B be a point of β. Let a be the normal of the distance $\overline{AA'}$ in its centre. Then all points which are nearer to A' than to A form the halfplane determined by a and containing A'. But at the same time all points of β are contained there too, q. e. d.

Lemma 3. *If V_n is a minimal figure having an angle π, then we can construct an other minimal figure V_n', all angles of which are $<\pi$.*

If the angle of V_n in the vertex A is π, then A can not have an opposite vertex, for the opposite vertex of A would be at a greater distance from one of the two neighbouring vertices of A. Let A_1A and AA_2 be the two sides of V_n, which form an angle π in the point A, and let A' be the vertex through which a line of support parallel to $\overline{A_1A_2}$ passes. According to lemma 1 all diameters of the polygon intersect the chord AA', therefore the endpoint of the diameters lie on both sides of this chord. It must be remarked, that the part of V_n between A_1 and A', which does not contain A, as well as its part between A' and A_2, which does not contain A, lie in such angles, which are on one side of the supporting line through A'. One of these angles is determined for example by the line $A'A_1$ and by that side of V_n starting from A' which lies on the same side of $A'A$ as A_1. Let us now insert hinges at the vertices A_1, A, A_2, A'. Let us furthermore fix the vertex A' and the line of support going through it, and let us shift the vertex A in the direction of the normal of A_1A_2 and away from A'. According to our lemma 2, all diameters except those starting from vertex A' will decrease.

In the following we may assume that two sides of a minimal figure do not lie on one line, i. e. by applying our hinge method the convexity will not be violated.

Lemma 4. *In the case of minimal figures not all diameters start from the same vertex.*

Let us suppose that all diameters would start from the vertex A. Let the order (in a certain direction) of the opposite vertices be $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Let the vertex preceeding A_1 in the mentioned sense be A', and the vertex succeeding A_r be A''. (In consequence of the trivial fact that in the case of $n>3$, $\Delta_n>1$, A' and A'' cannot coincide with A.) Let us insert hinges at the vertices A, A', A_1, A_r, A''. Let the maximum of all diagonals, the length of which differs from Δ_n, be $\delta_n<\Delta_n$. Let us now fix vertex A and shift the distance A_1A_r in the direction of its own normal towards A. Then each point A_i gets into such a new position A'_i for which $\overline{A'_iA}\leq \Delta'_n<\Delta_n$. Although there will be such diagonals which still increase, if the change of position is small enough, we see immediately that the maximum of the diagonals not starting from A will not surpass a value $\delta'_n<\Delta'_n$. This would contradict to our assumption that the original polygon is a minimal figure.

To prove our theorem 5 let us now assume that the minimal figure has a vertex A which has no opposite vertex. Let us consider a line of support in A and a line of support through A' parallel to the former one. Let us further consider the vertices A_1 and A_2 neighbouring A. According to our lemma 1, AA' intersects all diameters. Consequently their endpoints lie on opposite sides of AA' and at least one of them may be in A'. We remark further that the parts of the polygon lying between the vertices A' and A_1, resp. A' and A_2, neither of which contains A, are contained in two angels, both in conformity to the assumption of our lemma 2. Let us now shift A along the normal of $\overline{A_1A_2}$ so as to increase its distance from $\overline{A_1A_2}$. Since no diameter starts from A it can be attained that δ_A, i. e. the maximal distance of A from a vertex, is only slightly modified — while all diameters not starting from A

decrease according to our lemma 2. Thus we obtained a polygon each diameter of which may start only from A', which fact would contradict lemma 4.

7. To prove theorem 3 we construct a U_8[5]) the diameter of which is smaller than that of the regular U_8, i. e. smaller than $\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^{-1}$.

First we observe that the function

$$f(x)=\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}+\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}+\sqrt{1-\left(\frac{x^2-x-1}{2x}\right)^2}-\sqrt{x^2-1}$$

has only one real zero in the interval $2\leqq x\leqq 3$ and this zero is smaller than $\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^{-1}$. Indeed, a numerical calculation yields

$$f(2)>0>f\left(\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^{-1}\right)>f(3)$$

while $\frac{d}{dx}f(x)<0$ for $2\leqq x\leqq 3$.

Denote this real zero of $f(x)$ by d and the positive quantities $\sqrt{1-\left(\frac{d-1}{2}\right)^2}$, $\sqrt{1-\frac{1}{4d^2}}$, $\sqrt{1-\left(\frac{d^2-d-1}{2d}\right)^2}$, $\sqrt{d^2-1}$ by p_1, p_2, p_3, p_4, respectively; we have evidently $p_1+p_2+p_3-p_4=0$.

Let us now consider the octagon determined by the points $P_1\left(x_1=\frac{1}{2}, y_1=0\right)$, $P_2\left(x_2=\frac{d}{2}, y_2=p_1\right)$, $P_3\left(x_3=\frac{d^2-1}{2d}, y_3=p_1+p_2\right)$, $P_4\left(x_4=\frac{1}{2}, y_4=p_1+p_2+p_3=p_4\right)$, $P_5(x_5=-x_4, y_5=y_4)$, $P_6(x_6=-x_3, y_6=y_3)$, $P_7(x_7=-x_2, y_7=y_2)$, $P_8(x_8=-x_1, y_8=y_1)$ on the (x, y) plane, which is obviously symmetric with respect to the y-axis.

Theorem 3 is proved if we show that this is a U_8 with diameter d.

At first it is easy to see that $\overline{P_iP_{i+1}}=1$ $(i=1, 2, \ldots, 8;\ P_9=P_1)$.

The convexity follows from the inequalities $y_1<y_2<y_3<y_4$, $x_1<x_2>x_3>x_4$ and from the fact that the projection of the side $\overline{P_2P_3}$ on the x-axis, i. e. $v_2=\sqrt{1-p_2^2}=\frac{1}{2d}$, is smaller than that of $\overline{P_3P_4}$, i. e. $v_3=\sqrt{1-p_3^2}=\sqrt{\frac{d^2-d-1}{2}}$.

Further we have

$$\overline{P_1P_5}=\overline{P_2P_6}=\overline{P_2P_7}=\overline{P_3P_7}=\overline{P_4P_8}=d,$$

and a simple calculation shows that the other diagonals are smaller than d, q. e. d.

(Received September 15, 1949.)

---

[5]) I am indebted for this example to my wife.

Über vertauschbare Matrizen.

Von B. GYIRES in Debrecen.

In der vorliegenden Arbeit geben wir einen sehr einfachen Beweis für zwei Sätze von FROBENIUS, die von ihm ohne Beweis angeführt wurden[1]. Diese beiden Sätze beziehen sich auf die Vertauschbarkeit von quadratischen Matrizen n-ter Ordnung, die sich auf Diagonalgestalt transformieren lassen. Sei A eine solche Matrix aus einem beliebigen kommutativen Körper, worüber wir nur annehmen, daß er alle Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des charakteristischen Polynoms

$$(1)\qquad (x-\alpha_1)^{e_1} \ldots (x-\alpha_r)^{e_r} \qquad (\alpha_i \neq \alpha_k \text{ für } i \neq k)$$

von A enthält. Unsere Voraussetzung, daß A eine auf Diagonalgestalt transformierbare Matrix ist, kommt bekanntlich darauf hinaus, daß

$$(2)\qquad m(x) = (x-\alpha_1) \ldots (x-\alpha_r)$$

das Minimalpolynom von A ist[2]. Wir wollen noch die Bezeichnung

$$(3)\qquad m_i(x) = \frac{m(x)}{x-\alpha_i} \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

einführen. Die erwähnten Sätze lauten dann:

Satz 1. *Läßt sich die Matrix A auf Diagonalgestalt transformieren und hat sie das Minimalpolynom* (2), *so ist die allgemeine Form einer mit A vertauschbaren Matrix*

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{r} m_i(A) B_i m_i(A),$$

wobei die B_i beliebige Matrizen n-ter Ordnung sein können.

Satz 2. *Hat das charakteristische Polynom der Matrix A lauter einfache Nullstellen, so läßt sich A nur mit denjenigen Matrizen vertauschen, die Polynome von A (mit skalaren Koeffizienten) sind.*

---

[1]) G. FROBENIUS, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, *Journal für die reine und angew. Math.*, **84** (1878), S. 1—63, insbesondere S. 28.

[2]) Siehe z. B. SCHREIER—SPERNER, *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra.* II (Leipzig, 1935), S. 83.

Im folgenden soll die Matrix

$$\begin{pmatrix} M_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{k_u} \end{pmatrix},$$

wobei M_{k_i} eine quadratische Matrix k_i-ter Ordnung bedeutet, der Kürze halber mit $(M_{k_1}, \ldots, M_{k_u})$ bezeichnet werden. Ferner bezeichne $(1)_h$ und $(0)_h$ die Einheitsmatrix bzw. die Nullmatrix h-ter Ordnung.

Zur obigen Matrix A ordnen wir die Diagonalmatrix

$$D = (\alpha_1 (1)_{e_1}, \ldots, \alpha_r (1)_{e_r}) \tag{5}$$

(ebenfalls n-ter Ordnung) zu. Die Aussage, daß sich A auf Diagonalgestalt transformieren läßt, ist bekanntlich gleichbedeutend mit der Existenz einer regulären Matrix T, wofür

$$A = TDT^{-1} \tag{6}$$

gilt. Wählen wir nun eine solche T fest. Die mit A vertauschbaren Matrizen sind offenbar identisch mit allen TVT^{-1}, wobei V eine beliebige, mit D vertauschbare Matrix bezeichnet. Diese V lassen sich aber nach (5) in der Form $(M_{e_1}, \ldots, M_{e_r})$ schreiben mit beliebigen Matrizen M_{e_i} von der Ordnung e_i. Somit haben wir bewiesen den folgenden

Hilfssatz: *Die Matrizen*

$$T(M_{e_1}, \ldots, M_{e_r})\, T^{-1} \tag{7}$$

(wobei M_{e_i} eine beliebige Matrix e_i-ter Ordnung bezeichnet), und nur diese, sind mit A vertauschbar.

Auf Grund dieses Hilfssatzes beweisen wir nun die Sätze 1, 2. Wir zeigen zuerst, daß die Matrix (4) mit A vertauschbar ist. Nach (3) gilt nämlich

$$(x-\alpha_i)\, m_i(x) = m_i(x)\,(x-\alpha_i) = m(x),$$

d. h.

$$(A-\alpha_i(1)_n)\, m_i(A) = m_i(A)\,(A-\alpha_i(1)_n) = m(A) = (0)_n.$$

Daraus folgt

$$A \cdot m_i(A) = m_i(A) \cdot A = \alpha_i m_i(A) \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

was die Vertauschbarkeit von (4) mit A augenscheinlich macht.

Um den Beweis des Satzes 1 zu vollenden, müßen wir nur noch zeigen, daß eine Matrix (7) immer auf die Form (4) gebracht werden kann. Für diesen Zweck berechnen wir zunächst die Matrix $m_i(A)$ auf Grund von (6), (5), (3), (2):

$$m_i(A) = T m_i(D)\, T^{-1} = T \prod_{k \neq i} (D - \alpha_k (1)_n)\, T^{-1}.$$

Ein Blick auf (5) zeigt, daß die Diagonalmatrix

$$\prod_{k \neq i} (D - \alpha_k (1)_n)$$

von Null verschiedene Elemente nur im i-ten „Diagonalkästchen" enthält;

wo nämlich (in der Diagonale) lauter Elemente

$$\prod_{k \neq i} (\alpha_i - \alpha_k) = m_i(\alpha_i)$$

stehen. Mithin gilt

(8) $$m_i(A) = T((0)_{e_1}, \ldots, m_i(\alpha_i)(1)_{e_i}, (0)_{e_{i+1}}, \ldots, (0)_{e_r})\, T^{-1}.$$

Nach dieser Vorbereitung können wir (7) leicht auf die Form (4) bringen. Vor allem läßt sich (7) in die Summe

$$\sum_{i=1}^{r} T((0)_{e_1}, \ldots, M_{e_i}, (0)_{e_{i+1}}, \ldots, (0)_{e_r})\, T^{-1}$$

zerlegen und somit genügt es die Gültigkeit der Gleichung

$$T((0)_{e_1}, \ldots, M_{e_i}, \ldots, (0)_{e_r})\, T^{-1} = m_i(A) B_i m_i(A)$$

mit einer geeigneten Matrix B_i zu zeigen. Die Matrix

$$B_i = T\left((0)_{e_1}, \ldots, \frac{1}{m_i(\alpha_i)^2} M_{e_i}, \ldots, (0)_{e_r}\right) T^{-1}$$

genügt aber nach (8) offensichtlich der letzten Gleichung (und hier ist $m_i(\alpha_i) \neq 0$, da die Nullstellen von $m(x)$ nach Voraussetzung lauter verschieden sind), womit der Beweis des Satzes 1 beendet ist.

Der Beweis des Satzes 2 ergibt sich noch einfacher aus unserem Hilfssatz. Nach der Annahme gilt jetzt $e_1 = \ldots = e_r = 1$ (und folglich $r = n$), woraus folgt, daß in diesem Falle jede mit A vertauschbare Matrix von der Form

$$T(c_1, \ldots, c_n)\, T^{-1}$$

ist. Um Satz 2 zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß sich für jede, beliebig vorgeschriebene Diagonalmatrix $(c_1, \ldots, c_n)$ ein Polynom

(9) $$f(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

derart bestimmen läßt, daß die Gleichung

$$T(c_1, \ldots, c_n)\, T^{-1} = f(A)$$

gilt. Nach (6) gilt $f(A) = T f(D)\, T^{-1}$, und so besagt die letzte Gleichung dasselbe wie

$$(c_1, \ldots, c_n) = f(D) = b_0 (1)_n + b_1 D + \ldots + b_{n-1} D^{n-1}.$$

Da aber D die Diagonalmatrix $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ bezeichnet, ist es klar, daß die letzte Gleichung mit der linearen Gleichungssystem

(10) $$f(\alpha_i) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

äquivalent ist. Das System (10) hat aber ersichtlich eine Lösung für die unbekannten Koeffizienten von $f(x)$, denn seine Determinante (als die durch die $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ bestimmte Vandermondesche Determinante) ist von Null verschieden. Damit ist der Beweis von Satz 2 beendet.

(Eingegangen am 15. Januar 1949.)

Über die Anwendung einer Klasse von Integralgleichungen für Existenzbeweise in der Potentialtheorie.

Von ROLF NEVANLINNA in Helsinki.

In einigen früheren Arbeiten habe ich die alternierenden Verfahren von SCHWARZ und NEUMANN analysiert und den Zusammenhang dieser wichtigen Methoden mit der Theorie der Integralgleichungen dargelegt. Auf den folgenden Seiten soll eine kurze Synthese dieser Zusammenhänge gemacht werden. Ich werde zeigen, daß die potentialtheoretischen Probleme von Schwarz und Neumann eine einheitliche Formulierung gestatten, was auch implizite durch meine früheren Untersuchungen hervorgegangen ist, und daß die Verschiedenheit der Konvergenzbetrachtungen bei Schwarz und Neumann nur von den verschiedenen Möglichkeiten herrühren, welche bei der Verteilung der Eigenwerte der assoziierten Integralgleichung vorkommen können und die durch die metrischen Verhältnisse der in Betracht kommenden Riemannschen Flächenstücke bedingt sind. Um die einheitliche Behandlung dieser Existenzfragen zu ermöglichen, ist es notwendig, sämtliche in Betracht gezogenen Gebiete oder Riemannschen Flächenstücke F als *offen* (nichtberandet) anzunehmen. Der Fall der *berandeten* Flächen, der besonders für die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie (Problem von SCHWARZ) wichtig ist, wird hierdurch nicht ausgeschlossen, denn dieser Fall entspricht nur der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Fläche F als Teilfläche einer umfassenderen Fläche F^* gegeben ist, so daß der ideale Rand von F eine „reelle" Darstellung durch eine Punktmenge auf F^* erhält.

Die Betrachtung offener Flächen bedeutet aber gleichzeitig eine weitgehende Erweiterung der klassischen Problemstellung von SCHWARZ und NEUMANN, für welche die Voraussetzung der Kompaktheit der Flächenstücke F wesentlich war. Diese Verallgemeinerung ist für viele Probleme in der Theorie der offenen Riemannschen Flächen bedeutungsvoll.

Die folgende Darstellung knüpft sich an meine Arbeit „Über die Neumannsche Methode zur Konstruktion von Abelschen Integralen" (*Commentarii Math. Helvetici*, **22** (1949), S. 302—316). Um Wiederholungen zu vermeiden, werde ich wegen Einzelheiten (§ 2, 3) an die Ausführungen jener Untersuchung verweisen.

§ 1. Hilfsbetrachtungen.

1. Jordankomplexe. Es sei F eine abstrakt gegebene offene oder geschlossene Riemannsche Fläche. Auf F sei gegeben eine Punktmenge (α), die einen Komplex (Jordankomplex) von folgender Art bildet:

1. Es ist (α) die Vereinigungsmenge einer Menge von Jordanbögen α auf F (jedes einzelne α ist also topologisches Bild einer abgeschlossenen Parameterstrecke $0 \leq t \leq 1$).
2. Jeder innere Punkt eines Bogens α ist äußerer Punkt für alle übrigen Bögen α.
3. Von jedem Endpunkt eines Bogens α gehen genau zwei Bögen α aus.
4. Die Bögen (α) häufen sich nicht im Inneren von F, d. h. für jede kompakte Punktmenge F_0 auf F gilt, daß sie mit höchstens endlich vielen Bögen α Punkte gemeinsam hat.

Aus 4. folgt, daß die Menge der Bögen (α) jedenfalls abzählbar ist; für eine geschlossene Fläche F ist sie sogar endlich (was auch für eine offene Fläche nicht ausgeschlossen ist). Der Komplex α zerfällt in abzählbar viele punktfremde, zusammenhängende Jordanzüge, die auf F entweder geschlossen (Rückkehrschnitte) oder nach beiden Seiten offen (Querschnitte) sind.

2. Jordangebiete. Sei A ein *Gebiet* auf F (d. h. eine zusammenhängende offene Punktmenge) mit folgenden Eigenschaften:

1. A ist ein echtes Teilgebiet von F, und seine Randpunktmenge α ist ein Komplex.
2. In der Umgebung jedes Randpunktes gibt es äußere Punkte von A (d. h. Punkte von F, welche nicht in der Menge $A + \alpha$ enthalten sind).

Aus 2. folgt, daß der Komplex α die Fläche F zerlegt.

Ein Gebiet mit den Eigenschaften 1. und 2. möge kurz *Jordangebiet* heißen.

3. Lösung der Randwertaufgabe für ein Jordangebiet. Sei A ein Jordangebiet auf F. Wir unterscheiden zwei Fälle, jenachdem $A + \alpha$ kompakt oder nichtkompakt ist.

Falls erstens $A + \alpha$ *kompakt* ist, so kann man durch bekannte Methoden das harmonische Maß $\omega(z, \alpha_0)$ eines Teilbogens α_0[1]) von α im Punkte z in Bezug auf A bilden, d. h. diejenige in A eindeutige, beschränkte harmonische Funktion, welche in jedem inneren Punkte des Bogens α_0 stetig und gleich 1 ist, während sie in jedem Punkte des Komplementes $\alpha - \alpha_0$ (falls dieses nicht leer ist) verschwindet[2]). Es ist ω durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt.

[1]) D. h., α_0 ist eine zusammenhängende Menge von Punkten α.

[2]) Die Herstellung von ω kann z. B. durch das alternierende Verfahren, kombiniert mit wohlbekannten Konvergenzprozessen gelöst werden. Die Verwendung des alternierenden Verfahrens, welches doch Gegenstand der nachstehenden Untersuchungen ist, bedeutet keinen Zirkel, denn die zur Gewinnung von ω nötigen Schritte können bekanntlich so eingerichtet werden, daß die jeweils vorkommende Randwertaufgabe *elementar* lösbar ist (z. B. durch das Poissonsche Integral).

Nachdem man das Maß ω so (für ein gegebens z und) für jedes „Intervall" α_0 definiert hat, bestätigt man, daß ω eine additive Intervallfunktion ist, und ferner, daß sie eine stetige Funktion der Endpunkte der Intervalle ist. Auf dieser Grundlage kann man also, wenn $f(\zeta)$ als eine stetige Folge von Werten auf α gegeben ist, das Riemannsche Integral

$$u(z) = \int_{\alpha} f(\zeta)\, d\omega(\zeta, z) \tag{1}$$

bilden und bestätigt leicht, daß es in A harmonisch ist und den vorgegebenen Randwerten f für $z \to \zeta$ zustrebt[3]).

Es ist zu bemerken, daß im vorliegenden Fall

$$\int_{\alpha} d\omega = 1. \tag{2}$$

4. Falls $A + \alpha$ *nicht kompakt* ist, so läßt sich das harmonische Maß eines Intervalles α_0 auf α definieren durch einen Grenzprozeß, indem man A durch eine Folge $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ von kompakten Jordangebieten $A_n + \alpha_n$ ausschöpft, wobei α_0 ein Teil von α_n sein soll. Die entsprechenden harmonischen Maße bilden eine monoton wachsende Folge und konvergieren gegen eine Grenzfunktion $\omega(z, \alpha_0)$, die folgende Eigenschaften hat:

1. ω ist harmonisch in A;
2. $\omega \to 1$, wenn z gegen einen inneren Punkt von α_0 strebt;
3. ω ist die untere Grenze aller in A positiven Funktionen, welche den Bedingungen 1. und 2. genügen.

Die Überlegungen von Nr. 3 lassen sich nun wiederholen, und man kann die Randwertaufgabe mit einer *stetigen* und *beschränkten* Randbelegung f auf α durch das Integral (1) lösen: Diese Funktion ist harmonisch und beschränkt in A und hat den Randwert $f(\zeta)$ im Punkte ζ des Komplexes α.

5. Maß des idealen Randteiles von A. Die Bedingung der Beschränktheit wurde hier vorausgesetzt, um die Konvergenz des Integrales (1) zu sichern, wozu wegen der jetzt möglichen Nichtkompaktheit von $A + \alpha$ die bloße Stetigkeit von f noch nicht genügt[4]).

Die Frage über die Eindeutigkeit der gestellten Randwertaufgabe kompliziert sich auch wegen der Nichtkompaktheit des Gebietes A. Für diese Frage ist folgende Fallunterscheidung von fundamentaler Bedeutung. Es folgt aus der Konstruktion des harmonischen Maßes, daß $0 < \omega \leq 1$, oder also

$$0 < \int_{\alpha} d\omega \leq 1 \tag{3}$$

[3]) Es ist ferner möglich, auf α einen Meßbarkeitsbegriff in Bezug auf A und Lebesgue—Stieltjessche Integrale einzuführen.

[4]) Man könnte im folgenden auch nur die absolute Konvergenz von (1) als Voraussetzung einführen. Diese Konvergenz ist für *alle* Aufpunkte z in A gleichzeitig erfüllt oder nicht erfüllt. So würde auch eine Klasse von nichtbeschränkten Funktionen zugelassen sein.

für jedes z in A. Mit Hilfe des Maximumprinzipes sieht man sofort ein, daß *entweder* (2) für alle Punkte in A *oder*

$$0 < \int_{\alpha} d\omega < 1 \tag{2'}$$

für jedes z in A gilt.

Definiert man das harmonische Maß $\omega(z, \bar{\alpha})$ des *idealen* Randteiles $\bar{\alpha}$ von A durch die Differenz

$$\omega(z, \bar{\alpha}) = 1 - \omega(z, \alpha) = 1 - \int_{\alpha} d\omega(\zeta, z),$$

so kann man sagen, (2) trete dann und nur dann ein, wenn $\bar{\alpha}$ das harmonische Maß Null in Bezug auf A hat. Falls insbesondere α *kompakt* ist, so umfaßt $\bar{\alpha}$ die ganze ideale Berandung der gegebenen Fläche F, und die Bedingung $\omega(z, \bar{\alpha}) \equiv 0$ spricht dann aus, daß die ganze gegebene Fläche *nullberandet* ist, ein Begriff, der sich in verschiedenen Zusammenhängen für die Theorie der Riemannschen Flächen als wichtig gezeigt hat.

Mit Hilfe des Maximumprinzipes ist es unmittelbar einzusehen, daß das harmonische Maß ω des idealen Randteiles sicher dann Null ist, wenn die Fläche F nullberandet ist, während das Umgekehrte offensichtlich nicht gilt.

6. Die Eindeutigkeit der Lösung der Randwertaufgabe. Ist nun $\bar{\alpha}$ vom Maß Null, so wird das Integral (1) die einzige *beschränkte* Lösung der Randwertaufgabe sein, was wieder mit dem Maximumprinzip leicht zu beweisen ist.

Anders verhält es sich, wenn $\bar{\alpha}$ ein positives harmonisches Maß hat. Dann gibt es eine *unendliche* Menge von beschränkten Lösungen der Aufgabe. In der Tat ist dann das harmonische Maß $\omega(z, \bar{\alpha}) = 1 - \omega(z, \alpha)$ von $\bar{\alpha}$ eine in A *positive* harmonische Funktion mit den Randwerten Null auf α, und der Ausdruck

$$\int_{\alpha} f\, d\omega + \lambda\, \omega(z, \bar{\alpha}), \tag{4}$$

wo λ eine beliebige Konstante ist, ergibt eine unendliche Schar von Lösungen des Problems.

Es wäre für gewisse allgemeine Fragestellungen wichtig zu entscheiden, ob die Schar (4) *alle* beschränkten Lösungen der Randwertaufgabe umfaßt oder nicht. Im allgemeinen, d. h. bei nicht sehr komplizierten Konfigurationen, gibt es noch weitere beschränkte Lösungen als (4) und deshalb will ich diesen Fall als den *regulären* bezeichnen, während der entgegengesetze *singuläre* Fall dann eintreten würde, wenn (4) die allgemeine Lösung darstellt.

Der singuläre Charakter eines (nichtkompakten) Gebietes bedeutet also, daß jede in A beschränkte, auf α verschwindende eindeutige Potentialfunktion von dem harmonischen Maß $\omega(z, \bar{\alpha})$ des idealen Randteiles *linear abhängt*.

Falls $\omega(z, \bar{\alpha}) = 0$, so tritt der singuläre Fall immer ein, denn dann ist nach Obigem die Konstante Null die einzige beschränkte Potentialfunktion, die in A eindeutig ist und auf α verschwindet. Ob der singuläre Fall auch für $\omega(z, \bar{\alpha}) > 0$ eintreten kann, ist eine für gewisse allgemeine Probleme wichtige Frage, die ich allgemein nicht zu entscheiden vermocht habe.*)

Damit die obige Definition des singulären Charakters eines Gebietes A unabhängig von der Wahl der beschränkten Randbelegung sei, muß noch gezeigt werden, daß die in der Definition gegebene Bedingung in Kraft ist für jede solche Belegung f, sobald sie für eine besondere Belegung f_0 gilt. Dies ist auch sofort einzusehen. Denn angenommen, es sei A in Bezug auf f nichtsingulär, so würde es eine Lösung der Randwertaufgabe geben:

$$\int_{\alpha} f\, d\omega_{\alpha} + u,$$

wo die Funktion u, die auf α verschwindet, von $\omega(z, \bar{\alpha})$ linear unabhängig ist. Dann würde aber auch

$$\int_{\alpha} f_0\, d\omega_{\alpha} + u$$

nicht singulär sein, im Widerspruch zur Voraussetzung.

7. Extremaleigenschaft des Integrales (1). Es möge $f \geqq 0$ sein. Unter dieser Voraussetzung ist das Integral (1) durch die Eigenschaft eindeutig festgelegt, daß es die untere Grenze aller nichtnegativer Potentialfunktionen ist, die auf α gleich f sind. Man beweist dies leicht mit dem Maximumprinzip, angewandt auf ein Näherungsgebiet der Folge A_n, durch welche das harmonische Maß konstruiert wurde. Falls wiederum f *nichtpositiv* ist, so ist das Integral (1) die obere Grenze sämtlicher nichtpositiver eindeutiger Potentialfunktionen, die auf α gleich f sind.

8. Randverhalten der Lösung (4). Um die Sonderstellung der Lösungen (4) im Vergleich mit den Lösungen, die durch Addition einer auf α verschwindenden von $\omega(z, \bar{\alpha})$ linear unabhängigen Potentialfunktion u erhalten wird, (im Falle eines nichtsingulären Gebietes) sei noch Folgendes hervorgehoben.

Der nichtsinguläre Fall setzt als notwendige Bedingung voraus, daß das Maß $\omega(z, \bar{\alpha})$ in A positiv ist. Betrachten wir nun den Fall, wo sowohl die Bedingung $\omega(z, \bar{\alpha}) > 0$ als auch der nichtsinguläre Charakter von A offensichtlich in Kraft sind:

Wir nehmen an, A sei eingebettet als Teilgebiet in einer Riemannschen Fläche A^*, so daß sowohl α als auch ein gewisser Teil von $\bar{\alpha}$ durch innere

*) *Zusatz bei der Korrektur:* Ich verdanke Herrn Ahlfors die briefliche Mitteilung eines Beispiels, aus dem hervorgeht, daß der singuläre Fall auch für $\omega(z, \bar{\alpha}) > 0$ tatsächlich vorkommen kann.

Komplexe (α) bzw. $(\bar{\alpha})$ von A^* dargestellt werden. Dann folgt aus der Konstruktion der Lösung (4), daß sie noch auf dem (jetzt „reell" dargestellten) Randteil $\bar{\alpha}$ stetig und konstant gleich λ ist. Für $\lambda = 0$ findet man, daß das Integral (1) auf $\bar{\alpha}$ verschwindet.

Man könnte nun diese wesentliche Eigenschaft der Ausdrücke (4) auch für den allgemeinsten Fall aussprechen, wo A nicht „über $\bar{\alpha}$ fortsetzbar" ist. Durch die Uniformisierung von A mit Hilfe ihrer universellen Überlagerungsfläche A^∞ wird die ganze Randwertaufgabe zurückgeführt auf die Theorie des Poissonschen Integrals und es ergibt sich der konstante Randwert λ der Lösung „fast überall" auf dem idealen Randteil $\bar{\alpha}$. Diese Eigenschaft, die das anschauliche Verständnis der nachfolgenden nicht ganz leicht begreiflichen Betrachtungen erleichtert, werden wir im Folgenden nicht benützen[5]).

§ 2. Das Schwarz—Neumannsche Problem.

9. Es seien nun gegeben zwei Jordangebiete A und B auf der Fläche F, welche zusammen F überdecken $(A + B = F)$, so daß die Randkomplexe α und β von A und B punktfremd sind. Der nichtleere (offene) Durchschnitt AB besteht aus einem oder mehreren, eventuell (abzählbar) unendlich vielen Jordangebieten, die nebst ihren Randkomplexen, paarweise punktfremd sind. Der Rand α verläuft in B, der Rand β in A. Die Vereinigungsmenge $\alpha + \beta$ ist Randkomplex von AB.

Seien noch A_0 und B_0 zwei Gebiete der Fläche F, welche die Durchschnittsmenge AB enthalten und so beschaffen sind, daß beide Durchschnitte AA_0 und BB_0 zusammenhängend sind. (Nichts hindert, daß $A_0 \equiv B_0$ wäre. Falls schon AB zusammenhängend ist, so könnte sogar $A_0 \equiv B_0 = AB$ sein.)

Im Gebiet AA_0 sei gegeben eine eindeutige harmonische Funktion a, die in jedem Punkt des Komplexes $\alpha + \beta$ stetig ist, und entsprechend im Gebiete BB_0 eine eindeutige harmonische Funktion b, welche ebenfalls auf $\alpha + \beta$ stetig ist. Über die Fortsetzbarkeit von a außerhalb A_0 in A bzw. von b außerhalb B_0 in B werden keine Voraussetzungen gemacht, es sei aber hervorgehoben, daß ein für gewisse Anwendungen wichtiger Fall derjenige ist, wo a in ganz A (oder b in ganz B) als eine eindeutige reguläre Potentialfunktion existiert.

10. Problem. *Es soll eine in $A_0 + B_0$ eindeutige reguläre Potentialfunktion f konstruiert werden, so daß die Funktion $f - a$ in A und die Funktion $f - b$ in B als eindeutige und beschränkte Funktionen harmonisch fortsetzbar sind*[6]).

Für das Folgende ist es wichtig zu bemerken, daß wenn f eine Lösung des Problems ist, sie auch dasjenige Problem löst, zu welchem man kommt,

---

[5]) Vgl. meine Arbeit: Über die Lösbarkeit des Dirichletschen Problems für eine Riemannsche Fläche, *Göttinger Nachrichten*, (2) **1** (1939), S. 181—193.

[6]) Vgl. meine anfangs zitierte Arbeit.

wenn man zu a eine in A eindeutige, reguläre, beschränkte Potentialfunktion a_0 addiert, die auf α stetig ist. Entsprechendes gilt, wenn man b um eine in B eindeutige, beschränkte und reguläre, auf β stetige Potentialfunktion b_0 vermehrt. Es liegt also in der Natur des Problems, daß die Funktionen a und b nur modulo solche Funktionen als gegeben vorauszusetzen sind. Von dieser Freiheit in der Wahl von a und b soll bald Gebrauch gemacht werden.

11. Allgemeine Lösung des Problems. Falls f_1 und f_2 zwei Lösungen des Problems sind, so ist die Differenz $u=f_1-f_2$, welche in A_0+B_0 eindeutig und beschränkt ist, sowohl nach A wie nach B als eine eindeutige beschränkte Funktion harmonisch fortsetzbar. Es ist also u auf der ganzen Fläche F eindeutig, harmonisch und beschränkt. Umgekehrt ergibt die Addition einer solchen Funktion zu einer gegebenen Lösung f wieder eine Lösung und es gilt somit:

Die allgemeine Lösung des Problems ist durch den Ausdruck

$$f=f_0+u \tag{5}$$

bestimmt, wo f_0 eine partikuläre Lösung ist und u eine beliebige auf F eindeutige, beschränkte, harmonische Funktion ist.

Die Menge solcher Funktionen u soll kurz die „Klasse E“ heißen.

Das Problem ist so zurückgeführt auf: 1. Bestimmung einer Partikulärlösung, 2. Bestimmung der Klasse E.

12. Die Klasse E. Ich betrachte die lineare Mannigfaltigkeit der Differentiale du der Klasse E. Falls diese Mannigfaltigkeit sich auf $du\equiv 0$ reduziert, so sage ich, der ideale Rand γ der Fläche F habe das Maß Null in Bezug auf die Klasse E,[7])

$$\operatorname{mes}\gamma=0\ (E) \tag{6}$$

(Ich spreche von einem „Rand γ“ auch für eine geschlossene Fläche F, bei welcher er fehlt. Man könnte übrigens durch eine Punktierung von F erreichen, daß F offen wird mit dem ausgeschlossenen Punkt als Rand γ.) Im Anschluß an die Terminologie von Nr. 6 könnte man in diesem Fall die Fläche F oder ihren Rand γ „singulär“ nennen, denn es wird sich zeigen, daß die Bedingung (6) für die Fläche F dann und nur dann gilt, wenn jedes Jordangebiet auf F singulär gemäß der Definition von Nr. 6 ist.

Es ist bekannt und leicht zu beweisen, daß alle nullberandeten (vgl. Nr. 6) Flächen F singulär sind: Die Konstanten sind die einzigen eindeutigen, beschränkten, harmonischen Funktionen auf einer solchen Fläche. Ob es weitere singuläre Flächen gibt, ist, wie schon bemerkt wurde, eine offene Frage.[7a])

[7]) Vgl. meine Note: Sur l'existence de certaines classes de différentielles analytiques, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **228** (1949), S. 2002–2004.

[7a]) *Zusatz bei der Korrektur:* Durch das in Nr. 6 erwähnte Beispiel von AHLFORS ist die Existenz solcher singulärer Flächen sichergestellt.

Jedenfalls kann man behaupten, daß eine positivberandete (nicht nullberandete) Fläche F im Allgemeinen nicht singulär ist. Dies ist z. B. immer dann der Fall, wenn die Fläche durch einen Komplex in zwei nichtkompakte zusammenhängende Jordangebiete F_1 und F_2 zerlegbar ist, so daß die harmonischen Maße der entsprechenden idealen Randteile γ_1 und γ_2 (in Bezug auf F_1 bzw. F_2) beide positiv sind, was z. B. für eine positivberandete Fläche mit endlichem Geschlecht stets möglich ist. Auf diese Frage, auf welche ich in einer bald erscheinenden Arbeit näher eingegangen bin, kommen wir im Laufe der nachfolgenden Untersuchungen noch zurück.

13. Hierdurch wird die Beziehung unseres allgemeinen Problems zu der klassischen Fragestellung von NEUMANN klargelegt. Das Neumannsche Problem ordnet sich in den Fall der singulären Flächen ein. Denn bei ihm wurde die Geschlossenheit von F vorausgesetzt, der Rand γ fehlt also, und die Fläche ist trivialerweise singulär.

14. Zusatzbedingung für die Lösung des Schwarz—Neumannschen Problems. Um die Beziehungen des allgemeinen Problems von Nr. 9 zu der von Schwarz mit seinem alternierenden Verfahren behandelten Randwertaufgabe aufzuklären, ist es nötig, den Lösungen jenes Problems eine weitere Bedingung aufzuerlegen.

Wir kommen zu dieser Bedingung auf natürliche Weise, wenn wir zuerst den Fall betrachten, wo das eine der im Problem von Nr. 9 erwähnten Jordangebiete A und B, z. B. A entweder kompakt ist oder einen idealen Randteil $\overline{\alpha}$ vom harmonischen Maß Null hat. Das bedeutet m. a. W., daß

$$\int_{\alpha} d\omega_\alpha \equiv 1. \tag{7}$$

Nach Nr. 6 ist dann, da $f-a$ in A eindeutig, harmonisch und beschränkt ist,

$$f(z)-a(z)=\int_{\alpha}\{f(\zeta)-a(\zeta)\}\,d\omega_\alpha(\zeta,z) \tag{8}$$

in jedem Punkt z von A. Entsprechend ist in B

$$f(z)-b(z)=\int_{\beta}\{f(\zeta)-b(\zeta)\}\,d\omega_\beta(\zeta,z), \tag{8'}$$

falls

$$\int_{\beta} d\omega_\beta \equiv 1. \tag{7'}$$

Dies gilt also für *jede* Lösung f des Problems (es ist zu bemerken, daß es auch für nichtsinguläre Flächen F Konfigurationen A, B gibt, für welche (7) und (7') in Kraft sind, und dann gibt es ja unendlich viele Lösungsdifferentiale df.[8])

[8]) Die Gebiete A und B sind hingegen unter den Bedingungen (7) und (7') stets singulär (Nr. 6.).

15. Gehen wir nun zu dem Fall über, wo die Bedingungen (7) und (7') *nicht* gelten. Sei z. B.

$$\int_\alpha d\omega_\alpha < 1$$

in A. Das bedeutet, daß der ideale Randteil $\bar{\alpha}$ *positives* harmonisches Maß in Bezug auf A hat.

Sei nun wieder f eine Lösung des Problems Dann wird die Bedingung (8) *nicht* mehr allgemein gelten. Man wird aber natürlich zu diesem enger abgegrenzten Problem geführt:

Es sollen diejenigen Lösungen f des Problems von Nr. 10 bestimmt werden, für welche die Zusatzbedingungen

$$f-a=\int_\alpha (f-a)\,d\omega_\alpha \quad \textit{in } A, \tag{7}$$

$$f-b=\int_\beta (f-a)\,d\omega_\beta \quad \textit{in } B \tag{7'}$$

gelten.

16. Wollen wir nun sehen, wie diese Normierung, falls sie überhaupt erfüllbar ist, die Menge der Lösungen (5) einschränkt.

Sei also jetzt f_0 eine Lösung des Problems, welche (7) und (7') befriedigt. Der allgemeine Ausdruck, ohne die Zusatzbedingungen (7) und (7'), war

$$f=f_0+u, \tag{9}$$

wo u eine Funktion E ist (sie ist eindeutig, beschränkt und harmonisch auf der Fläche F). Soll nun f auch noch die Zusatzbedingungen erfüllen, so muß u den Bedingungen

$$\int_\alpha (f_0+u-a)\,d\omega_\alpha = f_0+u-a \quad \text{in} \quad A$$

$$\int_\beta (f_0+u-b)\,d\omega_\beta = f_0+u-b \quad \text{in} \quad B$$

genügen, oder, da f_0 jene Bedingungen befriedigt,

$$u=\int_\alpha u\,d\omega_\alpha \ \text{ in } A, \qquad u=\int_\beta u\,d\omega_\beta \ \text{ in } B. \tag{9'}$$

Diese Bedingungen sind notwendig und, wie man sofort sieht, auch hinreichend, damit $f=f_0+u$ die Zusatzbedingungen erfüllt.

Falls nun

$$\int_\alpha d\omega_\alpha = \int_\beta d\omega_\beta \equiv 1,$$

oder, m. a. W., falls die idealen Randteile $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ die harmonischen Maße Null (in Bezug auf A bzw. B) haben, so ist (9') automatisch erfüllt für jedes

u der Klasse E, und die Bedingungen (7) und (7′) bedeuten keine Einschränkung, was schon oben bemerkt wurde.

Wenn das eine Maß, etwa $\omega(z, \overline{\alpha}) > 0$, während das andere $\omega(z, \overline{\beta}) = 0$, so ist die zweite Bedingung (9′) ohne weiteres in Kraft. Die erste Bedingung (9′) bedeutet aber eine wesentliche Einschränkung für u, und dies gilt umsomehr für die Bedingungen (9′), falls beide Maße $\omega(z, \overline{\alpha})$ und $\omega(z, \overline{\beta})$ positiv sind.

17. Zusammenhang mit dem Schwarzschen Problem. Um die Natur der durch die Zusatzbedingung eingeführten Einschränkung besser verständlich zu machen, wollen wir wie in Nr. 8 für einen Augenblick voraussetzen, daß z. B. das Gebiet A fortsetzbar sei, so daß $\overline{\alpha}$ (oder ein Teil von $\overline{\alpha}$) als ein Jordanbogen $\overline{\alpha}^*$ auf einer umfassenderen Fläche A^* darstellbar ist. Dies setzt voraus, daß $\omega(z, \overline{\alpha}) > 0$. Nach Nr. 8 bedeutet dann die Normierung, daß die Funktion $f - a$, welche in A eindeutig beschränkt und harmonisch ist, auf dem Randteil $\overline{\alpha}^*$ noch stetig ist und dort verschwindet. Diese Bedingungen sind aber für eine beliebige Lösung f des Problems (ohne Normierung) i. A. nicht in Kraft.

Der Sinn der Bedingung (9′) ist entsprechend auch der, daß u auf $\overline{\alpha}_*$ stetig gleich Null wird[9]).

18. Nun wollen wir speziell annehmen, die ganze Fläche F sei auf eine Fläche F^* fortsetzbar, so daß die Ränder $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ z. B. eine Darstellung als gewisse Jordankomplexe $\overline{\alpha}^*$ und $\overline{\beta}^*$ auf F^* erhalten, welche einen Teil der ganzen Berandung γ^* von F auf F^* ausmachen.

Das *Schwarzsche Problem* fordert die Lösung der Randwertaufgabe für $F = A + B$, falls die Aufgabe für A und für B als lösbar vorausgesetzt wird. Geben wir uns dementsprechend eine beliebige integrable z. B. stetige Randwertfolge φ auf $\overline{\alpha}^* + \overline{\beta}^*$ und nehmen wir an, es gebe zwei Potentialfunktionen a und b, die in A bzw. B regulär und beschränkt sind und auf $\overline{\alpha}^*$ bzw. $\overline{\beta}^*$ die gegebenen Randwerte φ annehmen. Dann folgt aus Nr. 17, daß das Problem aus Nr. 10 mit der Zusatzbedingung genau mit der Schwarzschen Aufgabe übereinstimmt: Jede Lösung f unseres Problems ist auf F harmonisch, eindeutig und beschränkt und nimmt die gegebenen Randwerte φ auf $\overline{\alpha}^* + \overline{\beta}^*$ an.

19. Notwendige Bedingung für *a* und *b*. Die letzten Betrachtungen zeigen schon, daß die Erfüllbarkeit der Normierung (7) und (7′) in manchen Fällen die Einführung einer zusätzlichen Bedingung für die gegebenen Funktionen a und b impliziert. Nehmen wir als ein sehr einfaches Beispiel den

---

[9]) Nach der Bemerkung am Schluß von Nr. 8 kann man, auch wenn die genannte Fortsetzung der Flächen A und B über $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ nicht möglich ist, immer noch behaupten, daß die Zusatzbedingung äquivalent mit der Forderung ist, daß die Funktion $f - a$ auf dem idealen Randteil $\overline{\alpha}$ (bzw. $f - b$ auf $\overline{\beta}$) verschwindet, allerdings nur „fast überall“, in einem zu präzisierenden Sinne.

Fall, wo F das Innere eines von einer ebenen Jordankurve γ begrenzten Gebietes der z-Ebene ist, und wählen wir die Teilgebiete A und B $(A+B=F)$ so, daß sie von zwei noch auf γ stetigen Querschnitten α bzw. β begrenzt werden. Die „idealen" Randteile $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ sind zwei Teilbogen von γ und es möge der Durchschnitt $\overline{\alpha}\overline{\beta}$ nicht aus zwei Punkten, sondern aus zwei Teilbögen von γ zusammengesetzt sein, ein Fall, der durch unsere sehr allgemeinen Voraussetzungen nicht ausgeschlossen wird. Da nun die Bedingungen (7) und (7') das Verschwinden von $f-a$ und $f-b$ auf $\overline{\alpha}\overline{\beta}$ fordern, so muß also sein

$$a=b \text{ auf } \overline{\alpha}\overline{\beta},$$

eine Bedingung, die überflüssig wäre, wenn $\overline{\alpha}\overline{\beta}$ punkthaft ist.

Um solche vom Standpunkt der Anwendungen unbequeme Voraussetzungen zu vermeiden, wollen wir Fälle, wie den oben betrachteten, ausschließen, indem wir die folgende, die Konfiguration (A, B, F) betreffende Bedingung einführen:

Das harmonische Maß des idealen Randteiles $\overline{\alpha}\overline{\beta}$ von AB (in Bezug auf AB) ist gleich Null.

Dann spielt das Verhalten von a und b in der Nähe von $\overline{\alpha}\overline{\beta}$ überhaupt keine Rolle und es wird nicht nötig sein, zusätzliche Bedingungen über das Verhalten dieser Funktionen einzuführen.

20. Beispiel. Um die obigen Zusammenhänge zu beleuchten, betrachten wir den möglichst einfachen Fall, wo F der Einheitskreis $|z|<1$ ist, der offensichtlich eine nichtsinguläre Fläche darstellt. Dann reduziert sich die lineare Mannigfaltigkeit der Differentiale du der Klasse E nicht auf Null.

Als Komplex α nehme man einen Querschnitt von F, erklärt durch zwei Gleichungen $(\log z = s+it)$:

$$(\alpha) \qquad t=\varphi(s), \quad t=\varphi(s)+\pi,$$

wo $\varphi(s)$ eine beliebige für $-\infty \leqq s < 0$ eindeutige und stetige Funktion ist. Das Jordangebiet A sei durch

$$(A) \qquad \varphi(s) < t < \varphi(s)+\pi$$

gegeben.

Um B zu erklären, wähle man eine beliebige Zahl $s_0<0$ und nehme eine beliebige, für $s_0 \leqq s < 0$ eindeutige stetige Funktion $\psi_1(s)$, so daß $0<\psi_1(s)<\pi$, ferner eine ebenfalls für $s_0 \leqq s < 0$ eindeutige stetige Funktion $\psi_2(s)$, die für $s=s_0$ gleich $\psi_1(s_0)$ ist und für $s_0<s<0$ im Intervall $\psi_1(s)<\psi_2(s)<\pi$ liegt. Der Komplex β wird durch

$$(\beta) \qquad t=\varphi(s)+\psi_1(s), \quad t=\varphi(s)+\psi_2(s) \qquad (s_0 \leqq s < 0),$$

und B als das Komplement der Punktmenge

$$(\overline{B}) \qquad \varphi(s)+\psi_1(s) \leqq t \leqq \varphi(s)+\psi_2(s)$$

definiert.

Man betrachte nun die Menge der Häufungspunkte γ_α von α auf der Peripherie $|z|=1$. Sie besteht aus 1⁰) zwei isolierten Punkten oder 2⁰) zwei getrennten Bögen von der Länge $<\pi$ oder 3⁰) der ganzen Peripherie $|z|=1$.

In den Fällen 1⁰ und 2⁰ ist das harmonische Maß $\omega(z, \bar{\alpha})$ des idealen Randteiles $\bar{\alpha}$, der jetzt einen durch einen freien Teilbogen der Kreisperipherie $|z|=1$ dargestellten Teil enhält, positiv. Im Falle 3⁰ ist hingegen $\omega(z, \bar{\alpha})=0$, was unmittelbar aus dem Fundamentalsatz über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung von einfachzusammenhängenden schlichten Jordangebieten (Satz von CARATHÉODORY) folgt.

Für das Gebiet B gilt entsprechendes. Tritt 1⁰ oder 2⁰ für A ein, so kann man in beiden Fällen nach obigen Vorschriften B stets so wählen, daß entweder 1⁰ oder 2⁰ für B gilt. Hingegen wird der Fall 3⁰ stets gleichzeitig für beide Gebiete A und B eintreten.

Auf Grund dieser Diskussion gehen wir zum Schwarz-Neumannschen Problem über. Ein aufschlußreiches Beispiel erhält man, wenn man $A_0=B_0=AB$ wählt (was wegen des Zusammenhanges von AB erlaubt ist), und für a und b eine beliebige Funktion nimmt,

$$a=b,$$

die in AB eindeutig, harmonisch und beschränkt ist. Das Problem von Nr. 9 hat dann offenbar $f=a=b$ als Partikulärlösung und die allgemeine Lösung wird somit

$$f=a+u,$$

wo u eine beliebige Funktion der Klasse E ist. Das Problem ist also *in hohem Grade unbestimmt.*

Führt man nun die Normierung von Nr. 15 ein, so wird im Fall 3⁰ wo beide Gebiete A und B einen „Nullrand" haben $(\omega(z, \bar{\alpha})=\omega(z, \bar{\beta})=0)$, diese Bedingung keine weitere Einschränkung bedeuten, und die allgemeine Lösung wird *nicht beeinflußt.* Im Fall 2⁰ schalten sich dagegen diejenigen u aus, die auf dem zu $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ komplementären Teil der Peripherie nicht verschwinden. Im Fall 1⁰ wird die Lösung eindeutig, denn $u\equiv 0$.

§ 3. Die assoziierte Integralgleichung.

21. Notwendige Bedingung für die Lösbarkait des Schwarz—Neumannschen Problems. Angenommen, daß das durch die Normierung von Nr. 15 eingeschränkte Problem von Nr. 10 eine Lösung $f(z)$ hat, gelten für die Potentialfunktionen

(10) $$f-a=u, \quad f-b=v,$$

welche in A bzw. B eindeutig, regulär und beschränkt sind, die Darstellungen

$$u(z)=\int_\alpha u(y)\, d\omega_\alpha(y, z), \quad v(x)=\int_\beta v(z)\, d\omega_\beta(z, x),$$

wobei z in A, x in B liegt.

Nimmt man z auf β, so wird

$$v(z)=f-b=u+a-b=\int_{\alpha} u(y)\, d\omega_{\alpha}(y,z)+a-b$$

und daher

$$v(x)=u(x)+a(x)-b(x)=$$
$$=\int_{\beta}\Big(\int_{\alpha} u(y)\, d\omega_{\alpha}(y,z)\Big)\, d\omega_{\beta}(z,x)+\int_{\beta}\{a(z)-b(z)\}\, d\omega_{\beta}(z,x),$$

also für x auf α

(11) $$u(x)=\int_{\alpha} u(y)\, d\varphi(y,x)+u_0(x),$$

wo

(12) $$u_0(x)=\int_{\beta}\{a(z)-b(z)\}\, d\omega_{\beta}(z,x)-\{a(x)-b(x)\}$$

und

(13) $$d\varphi(y,x)=d\int_{\beta}\omega_{\alpha}(y,z)\, d\omega_{\beta}(z,x).$$

Es ist also u_0 gleich der Differenz von $b-a$ und derjenigen *normierten* Potentialfunktion, welche durch die Randwerte $b-a$ auf β in B bestimmt ist.

Man lasse den Punkt y einmal den ganzen (kompakten oder nichtkompakten) Randkomplex α beschreiben. Dabei ist $d\varphi(y,x)$ nicht negativ, und die totale Variation

(14) $$\int_{\alpha} d\varphi(y,x)\leqq 1,$$

da das harmonische Maß des ganzen Komplexes α für z auf $\beta \leqq 1$ ist (vgl. 13) und dasselbe auch für das harmonische Maß des ganzen Komplexes β in B, also speziell auf α gilt. Hieraus folgt:

In (14) steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die idealen Randteile $\bar{\alpha}$ bzw. $\bar{\beta}$ das harmonische Maß Null in Bezug auf A bzw. B haben.

Diese spezielle Bedingung ist sicher dann erfüllt, falls die ganze Fläche $F=A+B$ nullberandet ist, kann aber, wie aus dem Beispiel von Nr. 20 folgt, auch für positivberandete Flächen F eintreffen.

Es ist so hervorgegangen:

Eine notwendige Bedingung dafür, daß f eine Lösung des Problems ist, ist, daß die Funktion $u=f-a$ auf α der Integralgleichung (11) *genügt.*

22. Hinreichende Bedingung. Umgekehrt ist die Lösbarkeit der Integralgleichung (11) auch für die Lösung des gestellten Problems hinreichend. Die stetigen und beschränkten Lösungen u der Integralgleichung (11) und die Lösungen f des Problems entsprechen einander eineindeutig und zwar durch die Formel (z in A)

$$f(z) = a(z) + \int_\alpha u(x)\, d\omega_\alpha(x, z). \tag{15}$$

Die harmonische Fortsetzung von $f - b$ in B wird gegeben durch das Integral

$$\int_\beta (f(y) - b(y))\, d\omega_\beta(y, z).$$

Es genügt hierzu zu zeigen, daß das letzte Integral in AB gleich $f(z) - b(z)$ ist, wobei f die in (15) definierte Funktion ist, was mit Hilfe des Maximumprinzips leicht zu beweisen ist. Wir verweisen auf unseren Beweis, loc. cit. (Einleitung), der fast wörtlich in dem jetzt vorliegenden allgemeinen Fall wiederholt werden kann.

23. Über die Lösung der Integralgleichung. Wir machen hier auf gewisse Fälle aufmerksam, bei der die Lösung der Integralgleichung leicht konstruiert werden kann.

1°. Die obere Grenze von

$$\int_\alpha d\varphi(y, x) = \theta(x) \leqq 1$$

auf α ist kleiner als 1 $(0 < \theta(x) < q < 1)$.

Dann sieht man sofort ein, daß die Integralgleichung (11) keine Eigenlösung hat, und das Problem ist ohne irgendwelche Zusatzbedingungen für a und b stets lösbar.

Zwei für die Anwendungen wichtige Fälle, wo diese Bedingungen $0 < \theta < q$ offensichtlich erfüllt sind, sind die folgenden:

1. Das Durchschnittsgebiet AB ist kompakt und das harmonische Maß von mindestens einem der idealen Randteile $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ ist positiv.

2. Das Durchschnittsgebiet AB ist nichtkompakt, der Randteil $\bar{\alpha}$ (oder $\bar{\beta}$), hat positives harmonisches Maß, und das Durchschnittsgebiet AB enthält die Punktmenge (z), wofür

$$q \leqq \int_\alpha d\omega_\alpha(x, z) < 1.$$

Dies ist die klassische Bedingung von Schwarz in etwas verallgemeinerter Form.

2°. AB ist nicht kompakt und

$$\theta(x) < 1, \quad \text{aber} \quad \text{fin sup}\, \theta = 1.$$

Dann können Eigenlösungen vorkommen, und es gibt Konfigurationen (F, A, B), bei denen sogar die Menge der *beschränkten* Eigenlösungen enorm mächtig wird. Dies zeigt schon das Beispiel von Nr. 20, Fall 2°. Betrachtet man nämlich eine beliebige für $|z| < 1$ beschränkte Potentialfunktion f, die auf den „freien" idealen Randteilen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ von A bzw. B verschwindet, auf dem komplementären Randteil (der positives Maß hat) hingegen ganz beliebige Werte annimmt, so wähle man $a \equiv b \equiv 0$ in AB[10]). f ist dann eine Lösung des Problems und genügt somit, da $u_0 \equiv 0$, der homogenen Integralgleichung

$$f(x) = \int f(y)\, d\varphi(y, x),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Die Erklärung dieser zunächst etwas paradox erscheinenden Tatsache ist darin zu finden, daß im vorliegenden Fall die monotone Funktion $\varphi(y, x)$, die allerdings auf α eine beliebig oft differenzierbare Funktion ihrer Argumente ist (z. B. nach der Bogenlänge s), in der Nähe des idealen Randes kompliziert variiert. Die erste Ableitung von φ nach s wird so stark und unregelmäßig ins Unendliche wachsen, daß die klassische Theorie der Integralgleichungen versagt.

Trotzdem läßt sich auch bei solchen Komplikationen direkt zeigen, daß die Integralgleichung (und das gesamte Problem) lösbar ist unter sehr allgemeinen Voraussetzungen. Dies ist z. B. immer dann der Fall, wenn die gegebenen Funktionen a und b als in ganz A bzw. B beschränkte reguläre Funktionen gegeben sind, ein Fall, der für die Anwendungen wichtig ist. Die allgemeine Lösung wird aber in manchen Fällen dann in hohem Maße unbestimmt bleiben, wie das obige Beispiel schon zeigt.

3°. Es ist

$$\int_\alpha d\varphi(y, x) = \theta(x) \equiv 1.$$

Dann hat die Integralgleichung mindestens jede Konstante als Eigenlösung und die Existenz der Lösungen der Gleichung mit $u_0 \neq 0$ fordert dann schon im Falle, wo die Integralgleichung nicht schwer singulär ist, jedenfalls, daß gewisse Orthogonalitätsbedingungen erfüllt sind.

Ein besonders einfacher Fall ergibt sich beim klassischen Problem von Neumann, wo also das Gebiet AB kompakt ist. Dann sind die Konstanten die einzigen Eigenlösungen. Die Orthogonalitätsbedingung, welche für die Lösbarkeit des Problems erforderlich ist, reduziert sich dann (vgl. loc. cit.) auf die Bedingung, daß die konjugierte Potentialfunktion zu $a - b$ im Gebiet $A_0 + B_0$ eindeutig ist. Das ist gerade die klassische Bedingung von Neumann.

Schwer singuläre Fälle können hingegen wieder bei nichtkompakten Durchschnitten AB vorkommen. Das Beispiel von Nr. 20, Fall 3°, beleuchtet die Komplikationen, die hier möglich sind. Für $a \equiv b$ gibt jede beliebige für $|z| < 1$ reguläre, beschränkte Potentialfunktion eine Eigenlösung.

(Eingegangen am 27. Dezember 1949.)

[10]) Der ideale Randteil von AB hat das harmonische Maß Null in Bezug auf AB.

О некоторых новых достижениях теории приближения функций действительной переменной.

С. Н. БЕРНШТЕЙН (Москва).

§ 1. Когда в 1912 году мною впервые было установлено [1] [2] существование предела[1])

$$\mu = \lim_{n=\infty} n E_n |x|, \tag{1}$$

из глубины технически сложного доказательства лишь неясно вырисовывалась какая-то связь решенной задачи с теорией целых трансцендентных функций. Казалось также правдоподобным, что и при всяком $s > 0$ должен существовать предел

$$\mu(s) = \lim_{n=\infty} n^s E_n |x|^s = \lim_{n=\infty} E_n |n x|^s = \lim_{n=\infty} E_n (|x|^s; n). \tag{2}$$

Однако прошло еще 25 лет прежде, чем мне удалось доказать [3] общее равенство (2) и выяснить его истинный смысл. А именно: в работе [4] 1938 г. я показал, что $\mu(s)$ *есть наилучшее приближение* $|x|^s$ *на всей действительной оси посредством целых функций первой степени*[2]) ($\mu(s) = A_1 |x|^s$); вообще

$$\frac{\mu(s)}{p^s} = \lim_{n=\infty} E_n\left(|x|^s; \frac{n}{p}\right) = A_p |x|^s \tag{3}$$

при любом данном p, где $A_p f(x)$ означает *наилучшее приближение функции*

---

[1]) $E_n(f(x); \lambda)$ означает наилучшее приближение функции $f(x)$ при помощи многочленов степени n на отрезке $(-\lambda, \lambda)$ при данном $\lambda > 0$; в случае $\lambda = 1$ пишем просто $E_n f(x)$.

[2]) Функцию действительной переменной $G_p(x)$ мы называем *целой функцией конечной степени* p, если она бесконечно дифференцируема и регулярна на всей оси и в какой-нибудь точке (например, $x = 0$)

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|G_p^{(n)}(0)|} = p, \tag{I}$$

эти функции совпадают с целыми трансцендентными функциями первого порядка экспоненциального типа с показателем p, так как равенство [I] равноценно равенству

$$\overline{\lim_{x=\infty}} x^{-1} \log |G_p(x e^{i\vartheta})| = p$$

во всей комплексной плоскости.

$f(x)$ при помощи целых функций данной степени p на всей действительной оси. Тогда же было установлено [**3**] [**5**], что

$$\lim_{n=\infty} n^s E_n |x-c|^s = (1-c^2)^{\frac{s}{2}} \mu(s) \qquad (-1<c<1) \tag{4}$$

и было также найдено точное значение предела

$$\lim_{n=\infty} n^s E_n F(x), \quad \text{где} \quad F(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k |x-c_k|^s$$

которое оказалось равным $\mu(s) \operatorname*{Max}_{1 \leq k \leq m} |a_k (1-c_k^2)^{\frac{s}{2}}|$ при любых данных a_k и c_k $(-1<c_k<1)$.

Хотя моя работа [**4**] 1938 года связана со старым мемуаром [**6**] из *Acta Mathematica* 1913 года, содержавшим первое доказательство равенства (1), но связь эта, по преимуществу, формальная. Теперь руководящим принципом исследования становится углубление и уточнение аналогий между свойствами алгебраических многочленов и целых функций конечной степени, и, в частности, доказательство равенства (3) свелось к установлению того факта, что *последовательность многочленов степени n наименее уклоняющихся от $|x|^s$ на отрезке $\left[-\frac{n}{p}, \frac{n}{p}\right]$ стремится при $n \to \infty$ $(p>0)$ к целой функции $G_p(x)$ степени p наименее уклоняющейся от $|x|^s$ на всей действительной оси.*

Существование целой функции $G_p(x)$, которая среди всех функций степени p наименее уклоняется от $|x|^s$ следовало из моей теоремы [**7**] 1923 года о максимуме модуля производной целой функции $G_p(x)$ степени p *ограниченной* на всей оси (использование формул мемуара из *Acta Mathematica* обобщенных в русской монографии [**8**], нужно было здесь, в сущности, лишь, как способ построения целой функции первой степени, уклонение которой от $|x|^s$ ограничено на всей оси). Вышеупомянутая *теорема о максимуме модуля производной*, которая для периодических функций была доказана [**1**] еще в 1912 году, утверждает как известно, что *неравенство*

$$|G_p(x)| \leq L \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{5}$$

влечет для всех функций степени p

$$|G'_p(x)| \leq Lp \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{6}$$

представляла собой первый простейший пример аналогии целых функций конечной степени p с многочленами $P_n(x)$ степени n, относительно которых в 1912 году было установлено [**1**], что *неравенство*

$$|P_n(x)| \leq L \qquad (-\lambda \leq x \leq \lambda) \tag{5$^{\text{bis}}$}$$

влечет

$$|P_n'(x)| \leq L \frac{n}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} \qquad (-\lambda < x < \lambda). \tag{6^{\text{bis}}}$$

Поэтому, если для некоторой последовательности многочленов $n \to \infty$, а $\frac{n}{\lambda} = p$ фиксировано, то в каждой данной точке x

$$\lim_{n=\infty} |P_n'(x)| \leq L \frac{n}{\lambda} = L p \tag{7}$$

которое совпадает с неравенством (6). При этом замечательно, что в то время как знак равенства в (6^{bis}) осуществляется для многочленов Чебышева

$$L\, T_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = L \cos\left(n \arcsin \frac{x}{\lambda}\right)$$

(n четное), последние имеют пределом целую функцию степени p

$$\lim_{n=\infty} L\, T_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = L \cos p x \qquad \left(p = \frac{n}{\lambda}\right),$$

для которой осуществляется знак равенства в (6).

§ 2. Соответствующим образом развивая последнее замечание, можно придти к исчерпывающему обобщению предельного равенства (2), которое доказано в статье **[9]** в следующем виде:

Теорема I. *Если существует такое число $p_0 < \infty$, что $A_{p_0} f(x) < \infty$, то для всех $p > \gamma p_0$ имеют место предельные равенства* [3])

$$\lim_{n=\infty} E_n\left(f(x);\, \frac{n}{p+0}\right) = A_p f(x), \qquad \lim_{n=\infty} E_n\left(f(x);\, \frac{n}{p-0}\right) = A_{p-0} f(x), \tag{8}$$

где $\gamma \approx 1{,}51$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\gamma}\sqrt{\gamma^2+1} = \log\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2+1}\right). \tag{9}$$

При етом нижняя грань γp_0 значений p, для которых (8) *справедливо, в общем случае не может быть снижена.*

Отсюда следует, в частности, что равенства (8) справедливы для всех $p > 0$, если $A_p f(x) < \infty$ для всех $p > 0$.

Таким образом, благодаря лемме **[10]**, утверждающей, что $A_p f(x) < \infty$ при всяком $p > 0$, если $f(x)$ имеет равномерно непрерывную производную

---

[3]) Нетрудно показать, что $A_p f(x)$ рассматриваемая как функция p, есть функция монотонно убывающая непрерывная справа. Согласно общему свойству монотонных функций, множество ее точек разрыва исчислимо; из равенств (8) видно, что в точках непрерывности A_p равенства (8) приводятся к единственному равенству

$$\lim_{n=\infty} E_n\left(f(x);\, \frac{n}{p}\right) = A_p f(x). \tag{8 bis}$$

порядка $k \geqq 0$ при $x \leqq a \leqq b$ и порядка $l \geqq 0$ при $x \geqq b$, из теоремы I сразу получается не только формула (2), но и различные ее обобщения **[10]**. Например: если $s > 0$ и $m > 0$ *целые* числа, то существует предел

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^s}{(\log n)^{m-1}} E_n [x^s (\log |x|)^m] = \lim_{n=\infty} \frac{1}{(\log n)^{m-1}} E_n \left[x^s \left(\log\left|\frac{x}{n}\right|\right)^m; n\right] =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{(\log n)^{m-1}} E_n \left[x^s \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (\log n)^k (\log |x|)^{m-k}; n\right] =$$

$$= m \lim_{n=\infty} E_n [x^s (\log |x|); n] = m A_1 (x^s \log |x|)$$

между тем, как (если $s > 0$ *любое вещественное* число, $m \geqq 0$ *целое* число)

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^s}{(\log n)^m} E_n [|x|^s (\log |x|)^m] = \lim_{n=\infty} E_n \left[|x|^s \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \left(\frac{\log |x|}{\log n}\right)^{m-k}; n\right] =$$

$$= \lim_{n=\infty} E_n (|x|^s; n) = A_1 |x|^s = \mu(s).$$

Вместо того, чтобы ограничивать априори класс рассматриваемых функций $f(x)$ условием $A_{p_0} f(x) < \infty$ (т. е. возможностью грубого приближения функции $f(x)$ при помощи целой функции G_{p_0} некоторой данной конечной степени p_0) фактически более интересно рассматривать классы функций, характеризуемые быстротою их возрастания на действительной оси. Этот подход связан с обобщением вышеупомянутой теоремы о максимуме модуля производной, опубликованным **[11]** также в 1923 г.: *Если целая функция $G_p(x)$ степени p удовлетворяет условию*

$$|G_p(x)| \leqq |H(x)| = \sqrt{s^2(x) + t^2(x)} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

где $H(x) = s(x) + i\,t(x)$ есть целая функция нулевого рода, корни которой $\alpha_k - i\beta_k$ $(\beta_k > 0)$ лежат в нижней полуплоскости[4]), *то производные любого порядка $n > 0$ удовлетворяют неравенствам:*

$$|G_p^{(n)}(x)| \leqq |\{(s(x) + i\,t(x))\, e^{-ipx}\}^{(n)}|. \tag{10}$$

В связи с этим в заметке **[12]** мною доказана соответствующая

Теорема II. *Если*

$$|f(x)| \leqq H(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{11}$$

где $H(x)$ четная функция нулевого рода, то предельные равенства (8)

---

[4]) Общее доказательство этой теоремы, которая мною была доказана в **[8]**, **[13]** лишь при некоторых дополнительных ограничениях, дано впервые Н. И. Ахиезером в **[14]**, где он кроме того неожиданно для меня распространил мою теорему на некоторые случаи, когда $s(x) + i\,t(x)$ является функцией конечной степени, т. е. первого, а не нулевого рода.

справедливы при всяком $p > 0$.[5]) (В частности, теорема II остается в силе, если $A_p f(x) = \infty$ при $p < p_0 \leq \infty$: в этом случае имеем также

$$\lim_{n=\infty} E_n\left(f(x); \frac{n}{p}\right) = \infty \text{ при тех же } p < p_0.)$$

§. 3. Из предыдущего следует, в частности, что к функции $f(x) \in S_{k,\alpha}(M)$, дифференцируемой k раз и удовлетворяющей при всех x и h $(-\infty < x < \infty, h \geqq 0)$

$$(12) \qquad |f^{(k)}(x+h) - f^{(k)}(x)| \leqq M h^\alpha \qquad (0 < \alpha \leqq 1)$$

предельные вазенства (8) применимы при всех $p > 0$. Очевидно также, что утверждения: 1) $f(x) \in S_{k,\alpha}(1)$, 2) $M f(x) \in S_{k,\alpha}(M)$, 3) $f(px) \in S_{k,\alpha}(p^{k+\alpha})$ попарно равнозначны, и с другой стороны, для всякой функции $f(x)$ справедливо равенство

$$(13) \qquad A_p f(x) = A_1 f\left(\frac{x}{p}\right).$$

Поэтому справедливость неравенства

$$(14) \qquad A_1 f(x) \leqq C_{k,\alpha}$$

для всех функций $f(x) \in S_{k,\alpha}(1)$, где $C_{k,\alpha}$ некоторая, зависящая от k и α постоянная (которая не может быть снижена), равнозначна справедливости неравенств для всех $f(x) \in S_{k,\alpha}(1)$

$$(15) \qquad A_p f(x) \leqq \frac{C_{k,\alpha}}{p^{k+\alpha}} \text{ при любом } p > 0.$$

Прием фактического построения функции $G_p(x)$ данной степени p, приближающей любую функцию $f(x) \in S_{k,\alpha}(1)$ указанный, например, в заметке **[17]**, дает некоторые конечные верхние границы для постоянных $C_{k,\alpha}$.

Как мы видим, неравенства (15), аналогичные классическим неравенствам Джексона **[18]** для наилучшего приближения 2π-периодической функции $E_n^* f(x)$ посредством тригонометрических полиномов порядка n вытекают без всяких вычислений из определения класса $S_{k,\alpha}$ и из очевидного равенства (13). При этом сами упомянутые неравенства Джексона являются прямым следствием из (15), так как во всяком случае существуют неравенства

$$(16) \qquad E_n^* f(x) \leqq \frac{C^*_{k,\alpha,n}}{(n+1)^{k+\alpha}} \qquad (n \geqq 0 \text{ целое число})$$

---

[5]) Полагая, в частности

$$H(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{\beta_k^2}\right); \quad \beta_k = (k+1)\,[\log(k+1)]^\alpha, \quad \alpha > 1,$$

видим, например, что теорема II применима к функции $f(x)$, если

$$\log|f(x)| \leqq \frac{c|x|}{[\log|x|]^\alpha} \qquad (c > 0; -\infty < x < \infty).$$

Благодаря указанной выше работе Н. И. Ахиезера **[14]** и последним исследованиям Б. Я. Левина **[15]**, дающим исчерпывающее распространение теоремы о модуле производной, условие теоремы II может быть несколько расширено.

для всех 2π-периодических функций $f(x) \in S_{k,\alpha}(1)$, где постоянные $C^*_{k,\alpha,n}$ (зависящие от k, α, n) не могут быть более снижены. Но учитывая **[19]**, что функцией $G_{n+\delta}(x)$ степени не выше $n+\delta$ $(0 \leq \delta < 1)$ наименее уклоняющейся от 2π-периодической функции $f(x)$ служит тригонометрический полином $S_n(x)$ порядка n, имеем вследствие (15) и (16)

$$\frac{C^*_{k,\alpha,n}}{(n+1)^{k+\alpha}} \leq \frac{C_{k,\alpha}}{(n+\delta)^{k+\alpha}}, \text{ т. е. } C_{k,\alpha,n} \leq C_{k,\alpha}. \tag{17}$$

Как известно, FAVARD **[20]** и, независимо от него, Н. И. АХИЕЗЕР и М. Г. КРЕЙН **[21]** нашли точное значение постоянной $C^*_{k,\alpha,n}$ для случая $\alpha = 1$, которая также оказалась независимой от n: а именно,

$$C^*_{k,1,n} = C^*_{k,1} = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{kl}}{(2l+1)^{k+2}}. \tag{18}$$

Недавно (благодаря предельным равенствам, аналогичным (8)), я доказал **[16]**, что при всех $\alpha \leq 1$

$$\lim_{n=\infty} C^*_{k,\alpha,n} = C_{k,\alpha}. \tag{19}$$

Отсюда следует, в частности, что[6])

$$C_{k,1} = C^*_{k,1}. \tag{20}$$

Принципиальный интерес представляет существование другого предельного равенства, аналогичного (19)

$$\lim_{n=\infty} C_{k,\alpha,1} = C_{k,\alpha} \tag{19bis}$$

(получающегося из предельных равенств (8)), где $C_{k,\alpha,n}$ наименьшая постояннаяа в неравенствах

$$E_n f(x) \leq \frac{C_{k,\alpha,n}}{n^{k+1}} \qquad (f(\alpha) \in S_{k,\alpha}(1)). \tag{16bis}$$

Таким образом, из (19) и (19bis) заключаем **[16]**, что

$$\lim_{n=\infty} C_{k,\alpha,n} = \lim_{n=\infty} C^*_{k,\alpha,n} = C_{k,\alpha} \tag{21}$$

при всех[7]) целых $k \geq 0$ и $0 < \alpha \leq 1$.

§ 4. Принявши в 1912 году за основу классификации всех непрерывных на отрезке $(-1, 1)$ функций закон убывания их наилучших приближений $E_n f(x)$, я имел в виду главным образом создание единообразного метода для выявления того, обладает ли или нет заданная так или иначе функция определенным дифференциальными или структурными свойствами (например, принадлежит ли $f(x)$ к классу Липшица $S_{k,\alpha}$ с данными k, α, явля-

---

[6]) Справедливость равенства (20) М. Г. Крейном [22] была установлена непосредственно.

[7]) Равенство $\lim\limits_{n=\infty} C_{0,1,n} = C^*_{0,1}$ впервые было доказано С. М. Никольским [23].

ется ли $f(x)$ аналитической функцией, регулярной на $(-1, 1)$ и т. д.). Не останавливаясь подробно на новых достижениях в этом направлении, укажу, что, как видно из предыдущего, при классификации и приближении функций $f(x)$ непрерывных *на всей оси вместо многочленов следует применять целые функции $G_p(x)$ конечной степени, причем заком убывания $A_p f(x)$ характеризует, подобно $E_n f(x)$ на $(-1, +1)$ соответствующие структурные свойства $f(x)$ на всей действительной оси.*

В качестве достойного внимания обобщения классов Липшица рассмотрим совокупность функций $f(x) \in S_q(p_1, \ldots, p_k; a_1, \ldots, a_k; M)$ характеризуемую свойством [17]

$$(22) \qquad \left| \sum_{i=1}^{k} p_i \left(f(x+a_i; h) - f(x) \right) \right| \leqq M \cdot h^q \qquad (-\infty < x < \infty),$$

где, для определенности, полагаем: 1) $a_1 = 1 < a_2 < \ldots < a_k$, 2) $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Посредством тех же соображений, которые в § 3 привели нас к неравенству (15), заключаем, что из (22) следуют неравенства для всех функций $f(x) \in S_q(p_1, \ldots p_k; a_1, \ldots a_k; M)$

$$(23) \qquad A_p f(x) \leqq \frac{C_s M}{p^q},$$

где постоянная C_s зависит только от q, p_i, a_i, но не зависит от p. Полагая значение $M < \infty$ произвольным в неравенстве (22) мы будем говорить, что $f(x) \in S_q(p_i, a_i) = S_q(p_1, \ldots, p_k; a_1, \ldots, a_k)$ принадлежит *специальному однородному классу* $S_q(p_i, a_i)$ порядка q. Из (23) видно, что для всякой данной функции $f(x) \in S_q(p_i, a_i)$ справедливы при *всех* $p > 0$ неравенства вида

$$(23^{\text{bis}}) \qquad A_p f(x) \leqq \frac{R}{p^q}$$

с одной и той же постоянной R (зависящей от $f(x)$). Класс Ω_q, где $R < \infty$ называем *основным однородным классом порядка* q: таким образом, согласно вышесказанному, из $f(x) \in S_q(p_i, q_i)$ следует $f(x) \in \Omega_q$. Давно известно, что в случае (12) класса Липшица $f(x) \in S_{k,\alpha}$ обратное утверждение верно только при $\alpha < 1$.

Полное решение[8]) вопроса об условии эквивалентности между собой двух различных специальных классов $S_q(p_i, a_i)$ и $S_q(p_i^*, a_i^*)$, а также об эквивалентности $S_q(p_i, a_i)$ основному классу Ω_q дано мною в заметках **[17]**, **[25]**. Для этого необходимо ввести в рассмотрение *целое* число m_0, которое я

---

[8]) Важный шаг в исследовании этого вопроса (решающую роль играет применение теоремы о максимуме модуля производной) для периодических функции сделан Zygmund'ом **[24]** в 1945 году.

называю *характеристикой* класса $S_q(p_i, a_i)$, определяемое как *наименьшее из целых* $m > 0$, для которых $\sum_{i=1}^{k} p_i a_i^m \gtrless 0$. В таком случае *все специальные классы порядка* q *эквивалентны между собой, когда их характеристики равны.* Поэтому все специальные однородные классы можем, для краткости, обозначать через $S_q^{(m_0)}$ указывая явно лишь порядок q и характеристику m_0. Если, кроме того, $q \leq m_0 < q+1$, то *все эти специальные классы* $S_q^{(m_0)}$ *эквивалентны классу Липшица* $S_{k,\alpha}$, *где* $k = m_0 - 1$, $0 < \alpha = q - k = q + 1 - m_0 \leq 1$ (т. е. пользуясь для обозначения *эквивалентности* классов знаком $=$) $S_{k+\alpha}^{(k+1)} = S_{k,\alpha}$, при любых целых $k \geq 0$ и $0 < \alpha \leq 1$. Хотя эти результаты существенным образом опираются на рассмотрение основного однородного класса Ω_q, однако при исследовании вопроса об эквивалентности основного класса Ω_q соответствующим специальным классам $S_q^{(m_0)}$ следует иметь в виду, что первый, Ω_q, вообще шире последних, так как, из (22) следует, что $f(x)$ *алгебраического роста* (т. е. существует $m < \infty$, для которого $\frac{f(x)}{x^m} \to 0$, при $x = \infty$), между тем как это не обязательно при (23).

Поэтому для получения простых условий эквивалентности надо вводить те или иные ограничения **[17]**, **[25]**. Если, например, мы предположим, для простоты, функции $f(x)$ *ограниченными* **[17]** (в частности, периодическими), то $S_q^{(m_0)} = \Omega_q$ при всех $q < m_0$. Что касается распространения изложенных здесь резултатов на функции нескольких переменных, которое является одной из важных целей теории наилучшего приближения, то, останавливаясь на этом вопросе, отмечу лишь заметки **[25]**, **[26]**, **[27]**.

Цитированная литература. [9])

[1] О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, *Сообщ. Харьк. Мат. Общества*, **13** (1912), стр. 49—194.

[2] Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes, *Proceedings 5. International Math. Congress, Cambridge*, **1** (1912), p. 256-266.

[3] Sur la meilleure approximation des fonctions non regulières, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **205** (1937), p. 825-827.

[4] О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени, *ИАН*, № 2 (1938), стр. 169-190.

[5] О наилучшем приближении $|x-c|^p$, *ДАН*, **18** (1938), стр. 358-388.

[6] Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés, *Acta math.*, **37** (1913), p. 1-57.

[7] Sur une propriété des fonctions entières, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **176** (1923), p. 1603-1605.

---

[9]) Работы, приведенные без указания имени автора, принадлежат С. Н. Бернштейну. *ДАН=Доклады Академии Наук СССР; ИАН=Известия Академии Наук СССР*. сер. мат.

[8] *Екстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной*, ч. 1 (Ленинград—Москва, 1937 .

[9] Предельные законы теории наилучших приближений, *ДАН*, **58** (1947), стр. 525-528.

[10] Новый вывод и обобщение некоторых формул наилучшего приближений, *ДАН*, **54** (1946), стр. 667-678.

[11] Sur les propriétés extrémales des polynomes et de fonctions entières sur l'axe réel, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **170** (1923), p. 1782-1785.

[12] О приближении функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени, *ДАН*, **54** (1946), стр. 479—482.

[13] *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle* (Paris, 1926).

[14] Н. И. Ахиезер, О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа, *ДАН*, **10** (1946), стр. 411—428.

[15] Б. Я. Левин, О некоторых экстремальных свойствах целых функций конечной степени, *ДАН*, **65** (1949), стр. 605—608.

[16] О предельных зависимостях между константами теории наилучшего приближения, *ДАН*, **57** (1947), стр. 3—5.

[17] О свойствах однородных функциональных классов, *ДАН*, **57** (1947), стр. 111—114.

[18] D. Jackson, Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen, *Dissertation Göttingen*, 1911.

[19] Конструктивная теория функций, как развитие идей Чебышева, *ДАН*, **9** (1945), стр. 145—157.

[20] J. Favard, Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques, *Bulletin des Sciences Math.*, **61** (1937), p. 209—224, 243—256.

[21] Н. И. Ахиезер и М. Крейн, О наилучшем приближении периодических функций, *ДАН*, **15** (1937) стр. 107—111.

[22] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации* (Москва—Ленинград, 1947).

[23] С. М. Никольский, Наилучшие приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, *ДАН*, **52** (1946), стр. 7—9.

[24] A. Zygmund, Smooth functions, *Duke Math. Journal*, **12** (1945), p. 47—76.

[25] Вторая заметка об однородных функциональных классах, *ДАН*, **59**, (1948), стр. 1379—1384.

[26] О целых функциях конечной степени многих вещественных переменных, *ДАН*, **60** (1948), стр. 949—952.

[27] С. М. Никольский, Обобщение одного предложения С. Н. Бернштейна о дифференцируемых функциях многих переменных, *ДАН*, **59** (1948), стр. 1533—1536.

(*Поступило 9/XI 1949 г.*)

О сходимости тригонометрических рядов.

Д. МЕНЬШОВ (Москва).

Введение. Настоящая статья содержит краткий обзор работ по теории тригонометрических рядов, выполненных автором за последнее время. В первых двух параграфах (§ § 1 и 2) рассматриваются ряды Фурье от непрерывных функций; в последних двух параграфах (§§ 3 и 4) — произвольные тригонометрические ряды.

§. 1. Как известно, при изучении тригонометрических рядов мы встречаемся с большими трудностями. Повидимому, наибольшие трудности связаны с вопросом о сходимости рядов Фурье от суммируемых функций. Доказано, что существуют ряды Фурье от суммируемых функций, расходящиеся в каждой точке [**2**]. Однако остается открытым вопрос о сходимости почти всюду рядов Фурье от измеримых функций с суммируемым квадратом. Мы не можем даже ответить на вопрос о сходимости почти всюду ряда Фурье от любой непрерывной функции.

Известно, что существуют непрерывные функции, ряды Фурье которых расходятся в отдельных точках [**12**]. Однако во всех примерах таких непрерывных функций, которые известны до настоящего времени, мера множества точек расходимости соответствующих рядов Фурье всегда равняется нулю, хотя это множество, вообще говоря, может иметь мощнось континуума и даже может быть второй категории.

Интересно отметить, что все расходящиеся ряды Фурье от непрерывных функций, которые были сперва найдены, обладали тем свойством, что последовательности их частных сумм содержали равномерно сходящиеся подпоследовательности. Именно, метод построения таких рядов Фурье состоял в следующем: определяли тригонометрический ряд, расходящийся в отдельных точках, у которого последовательность частных сумм содержала подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $f(x)$. Отсюда, далее, заключали, что $f(x)$ непрерывна и что первоначально построенный тригонометрический ряд является рядом Фурье от этой функции $f(x)$.[1]

[1] Приведенный здесь метод рассуждения принадлежит L. Fejér'у [**12**].

В связи с изложенным методом построения расходящихся рядов Фурье от непрерывных функций возник следующий вопрос: не будет ли последовательность частных сумм любого ряда Фурье от непрерывной функции всегда содержать равномерно сходящуюся подпоследовательность? Как выяснилось, эта гипотеза не оправдывается. Именно, оказалось, что существует ряд Фурье от непрерывной функции, у которого любая подпоследовательность частных сумм расходится по крайней мере в одной точке **[8]**. Однако можно доказать следующую теорему:

Теорема I. *Любую функцию $f(x)$, непрерывную для всех x и имеющую период 2π, можно представить, как сумму двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, обладающих теми же свойствами, как и функция $f(x)$, и таких что последовательность частных сумм ряда Фурье каждой из этих двух функций содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся для всех x* **[8]**.

Изложим вкратце идею доказательства этой теоремы. Для данной функций $f(x)$ мы определяем последовательность тригонометрических полиномов $T_l(x)$, $l=1, 2, \dots$, и последовательность натуральных чисел n_l, $l=1, 2, \dots$, следующим образом. Положим

$$T_1(x)=1, \quad n_1=1.$$

Предполагая затем, что тригонометрические полиномы $T_s(x)$ и числа n_s уже определены для всех $s=1, 2, \dots, l-1$, где $l>1$, обозначим через n_l наименьшее из натуральных чисел, превосходящих все числа n_s и ν_s, $s=1, 2, \dots, l-1$, где ν_s есть порядок полинома $T_s(x)$, т. е.

$$T_s(x)=\frac{c_0}{2}+\sum_{j=1}^{\nu_s}(c_j\cos jx+d_j\sin jx).$$

Определим затем тригонометрический полином $T_l(x)$ так, чтобы для всех x выполнялось неравенство

$$|f(x)-T_l(x)|<\frac{1}{n_l 2^l}.$$

Таким образом мы определим шаг за шагом тригонометрические полиномы $T_l(x)$ и натуральные числа n_l для всех $l=1, 2, \dots$.

Ясно, что ряд

$$\sum_{l=2}^{\infty}|T_l(x)-T_{l-1}(x)|$$

сходится равномерно для всех x и, кроме того,

$$T_1(x)+\sum_{l=2}^{\infty}[T_l(x)-T_{l-1}(x)]=f(x)$$

для любого x. Если положить

$$f_1(x)=T_1(x)+\sum_{j=1}^{\infty}[T_{2_{j+1}}(x)-T_{2_j}(x)],\quad f_2(x)=\sum_{j=1}^{\infty}[T_{2_j}(x)-T_{2_{j-1}}(x)],$$

то можно доказать, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы I.

Теорема I является частным случаем более общей теоремы, которая формулируется следующим образом:

Теорема II. *Предположим, что $f(x)$ есть функция с периодом 2π, суммируемая на сегменте $[-\pi,\pi]$ и непрерывная в каждой точке некоторого сегмента $[a,b]$. Тогда эту функцию можно представить в виде суммы двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, обладающих теми же свойствами, как и функция $f(x)$, и таких, что последовательность частных сумм ряда Фурье каждой из этих двух функций содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на сегменте $[a,b]$* [**8**].

§ 2. Как было уже упомянуто, существуют ряды Фурье от непрерывных функций, расходящиеся на множестве мощности континуума. Тогда возникает вопрос, нельзя ли „улучшить“ сходимость любого ряда Фурье от непрерывной функции, изменяя эту функцию на множестве сколь угодно малой меры. Оказывается, что такое улучшение действительно возможно; а именно, оказывается, что любую непрерывную функцию можно изменить на множестве сколь угодно малой меры таким образом, что для полученной новой функции ряд Фурье будет равномерно сходиться на всем бесконечном интервале $-\infty<x<+\infty$ [**7**].

Как доказал Н. Лузин [**3**], любая измеримая функция, конечная почти всюду на некотором сегменте $[a,\ b]$, непрерывна на совершенном множестве $P\subset[a,\ b]$, мера которого больше $b-a-\varepsilon$, где ε — любое, наперед заданное положительное число. В таком случае из сказанного выше следует, что должна быть справедлива

Теорема III. *Любую измеримую функцию $f(x)$, конечную почти всюду на сегменте $[-\pi,\pi]$, можно изменить на множестве сколь угодно малой меры таким, образом, чтобы полученная новая функция была непрерывна и чтобы ее ряд Фурье равномерно сходился на всем бесконечном интервале $-\infty<x<+\infty$* [**7**].

Доказательство теоремы III опирается на две леммы, из которых первая нужна для доказательства второй.

Лемма 1. *Пусть заданы два натуральных числа q и ν, $\nu>8$, и какой-нибудь сегмент $[c,d]$. Положим*

$$\delta=\frac{d-c}{\nu q},\quad c_s=c+s\nu\delta,\quad a_s=c_s-\delta\qquad(s=0,1,2,\ldots,q).$$

Тогда

$$\left|\sum_{s=1}^{q}\int\limits_{a_s}^{c_s}\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt\right|<L \quad \left(c+\frac{d-c}{\nu}\leqq x\leqq d-\frac{d-c}{\nu},\ \ n=1,2,\ldots\right),$$

где L *абсолютная постояния.*

Лемма 2. *Пусть заданы сегмент* $[a, b]$, *лежащий на* $[-\pi, \pi]$, *и некоторое действительное число* γ. *Тогда можно определить для каждого положительного числа* ε *и для каждого натурального числа* $\nu>8$ *функцию* $\psi(x)$ *и измеримое множество* E, *которые обладают следующими свойствами:*

1) $\psi(x)$ *непрерывна на* $[-\pi, \pi]$ *и изображается геометрически ломаной линией с конечным числом звеньев;*

2) $\psi(x)=0$ *для* $-\pi\leqq x\leqq a$ *и для* $b\leqq x\leqq\pi$;

3) $\operatorname{mes} E>(b-a)\left(1-\frac{3}{\nu}\right)$, $E\subset(a, b)$; [2]

4) $\psi(x)=\gamma \quad (x\in E)$;

5) $|\psi(x)|\leqq 2|\gamma|\nu \quad (-\pi\leqq x\leqq\pi)$;

6) $\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\,dt\right|<\varepsilon$ *для любых* α *и* β, *удовлетворяющих условию* $-\pi\leqq\alpha<\beta\leqq\pi$;

7) $\left|\int\limits_{a}^{b}\psi(t)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt\right|\leqq B|\gamma|\nu \qquad (-\infty<x<+\infty,\ n=1,2,\ldots)$,

где B *есть абсолютная постоянная.*

Приведем эскиз доказательства теоремы III. Прежде всего, в силу замечания, сделанного в начале § 2, эту теорему достаточно доказать для непрерывных функций $f(x)$. Тогда мы можем написать

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_m(x) \qquad (-\pi\leqq x\leqq\pi), \tag{2, 1}$$

где $\Phi_m(x)$, $m=1, 2, \ldots$, ступенчатые функции, т. е. каждая из них постоянна на любом из интервалов в конечном числе полученных подразделением сегмента $[-\pi, \pi]$. Мы можем предположить, кроме того, что

$$|\Phi_m(x)|<\frac{\sigma}{2^m} \qquad (-\pi\leqq x\leqq\pi,\ m=2, 3, \ldots), \tag{2, 2}$$

где σ есть любое, наперед заданное положительное число.

Обозначим через Δ_{jm}, $j=1, 2, \ldots, N_m$, интервалы постоянства функции $\Phi_m(x)$. Мы можем всегда предположить, что длина каждого из них меньше $\frac{\pi}{2}$.

---

[2]) Мы обозначаем через (a, b) открытый интервал, причем предполагаем, что $a<b$.

Положим

(2, 3)
$$\nu_0=0,\ \nu_m=\sum_{\mu=1}^{m} N_\mu \qquad (m=1,\ 2,\dots)$$

и обозначим через (b_k, b_k'), $b_k<b_k'$, $k=1, 2, \dots$, все интервалы $\varDelta_{jm}$, $1\leqq j\leqq N_m$, $m=1, 2, \dots$, перенумерованные таким образом, чтобы выполнялось неравенство $l<k$, если $(b_l, b_l')=\varDelta_{i\mu}$, $(b_k, b_k')=\varDelta_{jm}$ и, в то же время, $\mu<m$ или $\mu=m$, $i<j$. Тогда ясно, что каждая из функций $\Phi_m(x)$, $m=1, 2,\dots$, равна постоянной величине γ_k на интервале (b_k, b_k'), где k есть любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $\nu_{m-1}<k\leqq\nu_m$.

Возьмым теперь последовательность натуральных чисел n_k, $k=1, 2, \dots$, точные значения которых будут определены ниже, и будем рассматривать натуральное число m, как функцию от k, определяемую из неравенства

(2, 4)
$$\nu_{m-1}<k\leqq\nu_m.$$

Положим

(2, 5)
$$\varepsilon_k=\frac{1}{n_k k^2} \qquad (k=1,\ 2,\dots),$$

(2, 6)
$$N_m'=\left(\left[\frac{2\pi}{\sigma}\right]+1\right)2^{m+3},$$ [3])

откуда следует, что

(2, 7)
$$8<N_m'<\frac{\pi}{\sigma}\,2^{m+5}.$$

Так как $[b_k, b_k']\subset[-\pi, \pi]$, $k=1, 2, \dots$, то для любого натурального k мы можем определить на сегменте $[-\pi, \pi]$ функцию $\psi_k(x)$ и измеримое множество E_k, удовлетворяющие всем условиям, 1)—7), перечисленным в лемме 2, в которых нужно взять $\psi_k(x)$, E_k вместо $\psi(x)$, E и $[b_k, b_k']$, γ_k, ε_k, N_m' вместо $[a, b]$, γ, ε, ν. Затем мы определяем функции $\psi_k(x)$ вне сегмента $[-\pi, \pi]$, как периодические функции с периодом 2π.

Принимая во внимание свойства функций $\psi_k(x)$ и $\Phi_m(x)$, мы можем доказать, что

(2, 8)
$$\psi_k(x)=\Phi_m(x) \qquad (x\in E_k,\ k=1,\ 2,\dots),$$

где натуральное число m есть функция от k, определяемая из неравенства (2, 4).

Из определения функций $\psi_k(x)$ следует, что эти функции имеют период 2π и абсолютно непрерывны на любом конечном интервале. В таком случае ряд Фурье от каждой из функций $\psi_k(x)$ сходится равномерно к этой функции на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Следовательно,

[3]) Мы обозначаем через $\left[\frac{2\pi}{\sigma}\right]$ целую часть от $\frac{2\pi}{\sigma}$. При этом мы предполагаем, что $\sigma<2\pi$.

$$\psi_k(x) = J_{nk}(x) + \varepsilon_{nk}(x) \quad (k=1, 2, \ldots, n=1, 2, \ldots), \tag{2, 9}$$

где

$$J_{nk}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \psi_k(x) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt$$

и $\varepsilon_{nk}(x)$ стремиться равномерно к нулю на интервале $(-\infty, +\infty)$, когда $n \to \infty$ и k сохраняет постоянное значение.

Определение функций $\psi_k(x)$ и множеств E_k зависит от выбора натуральных чисел n_k, $k=1, 2, \ldots$. Определим теперь эти числа следующим образом. Положим $n_1=1$. Предположим затем, что числа n_l уже определены для всех натуральных l, удовлетворяющих условию $1 \leq l < k$, где $k > 1$. Из предыдущего следует, что функция $\psi_l(x)$ определена на интервале $(-\infty, \infty)$, если задано число n_l. Следовательно, в нашем случае функции $\psi_l(x)$ определены для всех l, удовлетворяющих условию $1 \leq l < k$. Тогда, в силу равенства (2, 9), для тех же l и для всех натуральных чисел n будут определены функции $\varepsilon_{nl}(x)$, причем, как мы знаем, для каждого фиксированного l эти функции стремятся равномерно к нулю на интервале $(-\infty, +\infty)$, когда $n \to \infty$. Отсюда следует, что мы можем определить натуральное число n_k, для которого удовлетворяются условия:

$$\left| \sum_{l=1}^{k-1} \varepsilon_{nl}(x) \right| < \frac{1}{k} \qquad (-\infty < x < +\infty, \ n > n_k) \tag{2, 10}$$

$$n_k > n_{k-1}. \tag{2, 11}$$

Таким образом, мы определяем число n_k, если уже орределены числа n_l для l, удовлетворяющих неравенству $1 \leq l < k$. Следовательно, отправляясь от числа n_1, мы можем определить шаг за шагом все числа n_k, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда будут определены все функции $\psi_k(x)$ и все множества E_k, причем эти функции и множества будут обладать всеми упомянутыми выше свойствами.

Пользуясь свойствами функций $\psi_k(x)$, мы можем доказать, что ряд с общим членом $\psi_k(x)$ равномерно сходится на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Тогда функция $G(x)$, определяемая из равенства

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \tag{2, 12}$$

будет непрерывна для всех x. Кроме того, так как каждая из функций $\psi_k(x)$ имеет период 2π, то функция $G(x)$, обладает тем же свойством.

Полагая

$$\Omega_m = \sum_{k=\nu_{m-1}+1}^{\nu_m} E_k, \quad \Omega = \prod_{m=1}^{\infty} \Omega_m, \tag{2, 13}$$

мы получаем на основании свойств множеств E_k [см. условие 3) леммы 2] и неравенства (2, 7):

$$\text{mes}\ \Omega > 2\pi - \sigma, \quad \Omega \subset [-\pi, \pi]. \tag{2, 14}$$

Далее, пользуясь свойствами функций $\psi_k(x)$ и $\Phi_m(x)$, мы можем доказать, что

$$G(x) = f(x) \qquad (x \in \Omega). \tag{2, 15}$$

Наконец, принимая во внимание равенство (2, 9), неравенство (2, 10) и свойства функций $\psi_k(x)$, мы можем доказать что ряд Фурье от функции $G(x)$ равномерно сходится на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Итак, для любого положительного числа σ мы можем определить множество Ω и функцию $G(x)$, непрерывную для всех x, для которых удовлетворяются условия (2, 14) и (2, 15), причем ряд Фурье от функции $G(x)$ равномерно сходится на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Иначе говоря, мы можем изменить функцию $f(x)$, определенную на сегменте $[-\pi, \pi]$, на множестве сколь угодно малой меры таким образом, чтобы для полученной новой функции $G(x)$ ряд Фурье сходился равномерно на $(-\infty, +\infty)$. Тем самым теорема III доказана.

§ 3. В этом параграфе мы будем рассматривать тригонометрические ряды общего вида, т. е. такие, которые не обязательно являются рядами Фурье от суммируемых функций. В том случае, когда мы имеем ряд Фурье от суммируемой функции, последовательность его частных сумм всегда содержит сходящуюся почти всюду подпоследовательность. В самом деле, если $S_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ являются частными суммами ряда Фурье от суммируемой функции, $f(x)$, то, как известно [1],

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)|^{1-\varepsilon} dx = 0,$$

где ε есть любое постоянное положительное число, меньшее единицы.[4]) Отсюда следует, что последовательность функций $S_n(x)$, $n=1, 2 \ldots$, сходится по мере и, следовательно, содержит сходящуюся почти всюду подпследнвательность.

Предположим теперь, что

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3, 1}$$

есть произвольный тригонометрический ряд, коэффициенты которого стремятся к нулю при $n \to \infty$. Возникает вопрос, содержит ли последовательность частных сумм такого ряда сходящуюся почти всюду подпоследовательность. Как выяснилось, это предположение не оправдывается; а именно, можно определить тригонометрический ряд (3, 1), удовлетворяющий условию

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} b_n = 0, \tag{3, 2}$$

у которого любая подпоследовательность частных сумм не сходится почти всюду к конечному пределу [9].

---

[4]) Иначе говоря, последовательность функций $S_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, сильно сходится на сегменте $[-\pi, \pi]$ относительно показателя $1-\varepsilon$ [11].

Интересно изучить те тригонометрические ряды, последовательности частных сумм которых содержат сходящиеся почти всюду подпоследовательности. В частности, можно спросить себя, каковы тригонометрические ряды, которые можно получить путем сложения таких рядов. Можно доказать, что любой тригонометрический ряд (3, 1) может быть представлен в виде суммы двух тригонометрических рядов

$$\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx) \tag{3, 3}$$

и

$$\frac{a_0''}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n''\cos nx+b_n''\sin nx), \tag{3, 4}$$

для каждого из которых последовательность частных сумм содержит подпоследовательнотсь, сходящуюся почти всюду к конечному пределу [5]). При этом, если коэффициенты первоначалного ряда (3, 1) стремятся к нулю при $n\to\infty$, то ряды (3, 3) и (3, 4) можно определить таким образом, чтобы их коэффициенты также стремились к нулю при $n\to\infty$.

Это утверждение является частным случаем более общей теоремы, для формулировки которой мы введем следующее определение. Будем называть тригонометрический ряд (3, 1) *универсальным,* если для любой измеримой функции $f(x)$, имеющей в каждой точке сегмента $[-\pi,\pi]$ определенное значение [6]) можно определить последовательность частных сумм $S_{n_i}(x)$, $i=1,2,\ldots,$ этого ряда, с возрастающими номерами n_i, которая сходится к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi,\pi]$.

Можно доказать следующую теорему.

Теорема IV. *Всякий тригонометрический ряд* (3, 1) *есть сумма двух универсальных тригонометрических рядов* (3, 3) *и* (3, 4), *коэффициенты которых удовлетворяют условиям*

$$\limsup_{n\to\infty}|a_n'|\leqq\limsup_{n\to\infty}|a_n|,\ \limsup_{n\to\infty}|a_n''|\leqq\limsup_{n\to\infty}|a_n|,$$

$$\limsup_{n\to\infty}|b_n'|\leqq\limsup_{n\to\infty}|b_n|,\ \limsup_{n\to\infty}|b_n''|\leqq\limsup_{n\to\infty}|b_n|\ \textbf{[9]}.$$

Ясно, что упомянутое выше утверждение является непосредственным следствием теоремы IV.

Доказательство теоремы IV опирается на три леммы, из которых первая нужна для доказательства второй.

---

[5]) Номера членов получаемых подпоследовательностей для рядов (3, 3) и (3, 4), вообще говоря, различны.

[6]) $f(x)$ может быть равна $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

Лемма 1. *Каковы бы ни были натуральные числа m и p, $m<p$, можно определить тригонометрические ряды*

$$1+\sum_{n=p}^{\infty}(a'_n\cos nx+b'_n\sin nx),$$

$$\cos mx+\sum_{n=p}^{\infty}(a''_n\cos nx+b''_n\sin nx),$$

$$\sin mx+\sum_{n=p}^{\infty}(a'''_n\cos nx+b'''_n\sin nx),$$

которые сходятся почти всюду к нулю и коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$|a'_n|<c\,,\,|b'_n|<c\,,\,|a''_n|<c\,,\,|b''_n|<c\,,\,|a'''_n|<c\,,\,|b'''_n|<c$$

при $n=p+1, p+2\ldots,$ *где c не зависит от m и p.*

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ — любая измеримая функция, конечная почти всюду на сегменте $[-\pi,\pi]$. Для всякого положительного числа ε и для каждого натурального r можно определить тригонометрический полином*

$$T(x)=\sum_{n=r}^{\nu}(c_n\cos nx+d_n\sin nx) \tag{3, 5}$$

и измеримое множество E, которые обладают следующими свойствами;

α) $|f(x)-T(x)|<\varepsilon \qquad (x\in E)$;

β) $\text{mes}\,E>2\pi-\varepsilon,\ E\subset[-\pi,\pi]$;

γ) $|c_n|<\varepsilon\,,\,|d_n|<\varepsilon \qquad (n=r, r+1,\ldots,\nu)$.[7]

Лемма 3. *Какова бы ни была измеримая функция $f(x)$, имеющая в каждой точке сегмента $[-\pi,\pi]$ определенное значение, конечное или бесконечное, можно определить последовательность различных тригонометрических полиномов $\tau_\nu(x)$ $\nu=1, 2,\ldots,$ с рациональными коэффициентами, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{\nu\to\infty}\tau_\nu(x)=f(x)$$

почти всюду на $[-\pi,\pi]$.

Приведем эскиз доказательства теоремы IV. Перенумеруем все тригонометрические полиномы с рациональными коэффициентами в каком-нибудь порядке и обозначим их через

$$T_1(x),\ T_2(x),\ldots,\ T_m(x),\ldots \tag{3, 6}$$

[7]) Доказательство этой леммы, отличное от доказательства автора, было также дано А. Н. Колмогоровым (доказательство не было опубликовано).

Определим рекуррентным образом две возрастающие последовательности неотрицательных целых чисел:

(3, 7) $$\mu_0,\ \mu_1,\ \dots,\ \mu_m,\ \dots$$

(3, 8) $$\nu_1,\ \nu_2,\ \dots,\ \nu_m,\ \dots$$

и последовательность действительных чисел

(3, 9) $$a_0',\ a_0'',\ a_n',\ a_n'',\ b_n',\ b_n'' \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

следующим образом. Положим

$$\mu_0 = 0,\ a_0' = a_0,\ a_0'' = 0$$

и допустим, что целое неотрицательное число μ_{m-1}, а также действительные числа a_n', a_n'', $n=0, 1, 2, \dots, \mu_{m-1}$ и b_n', b_n'', $n=1, 2, \dots, \mu_{m-1}$ [8]) уже определены, где m какое-нибудь натуральное число.

Мы будем пользоваться обозначениями

$$S_n'(x) = \frac{a_0''}{2} + \sum_{l=1}^{n} (a_l' \cos lx + b_l' \sin lx);$$

$$S_n''(x) = \frac{a_0''}{2} + \sum_{l=1}^{n} (a_l'' \cos lx + b_l'' \sin lx)$$

всякий раз, когда числа a_l', a_l'', b_l', b_l'', $l = 1, 2, \dots, n$, уже определены, и мы положим, кроме того, $S_0'(x) = \frac{a_0'}{2}$, $S_0''(x) = \frac{a_0''}{2}$.

В силу леммы 2, в которой мы положим $f(x) = T_m(x) - S'_{\mu_{m-1}}(x)$, $\varepsilon = \frac{1}{m^2}$, $r = \mu_{m-1} + 1$, мы можем определить тригонометрический полином

(3, 10) $$\tau_m(x) = \sum_{n=\mu_{m-1}+1}^{\nu_m} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

и измеримое множество E_m, которые удовлетворяют условиям:

(3, 11) $$|T_m(x) - S'_{\mu_{m-1}}(x) - \tau_m(x)| < \frac{1}{m^2} \qquad (x \in E_m);$$

(3, 12) $$\operatorname{mes} E_m > 2\pi - \frac{1}{m^2}, \qquad E_m \subset [-\pi, \pi];$$

(3, 13) $$|\alpha_n| < \frac{1}{m^2}, \qquad |\beta_n| < \frac{1}{m^2} \qquad (n = \mu_{m-1} + 1, \dots, \nu_m).$$

Положим, далее,

(3, 14) $$a_n' = \alpha_n,\ b_n' = \beta_n,\ a_n'' = a_n - \alpha_n,\ b_n'' = b_n - \beta_n \ (n = \mu_{m-1} + 1, \dots, \nu_m).$$

---

[8]) Если $\mu_{m-1} = 0$, то числа b_n' и b_n'' не существуют.

Мы определим таким способом натуральное число $\nu_m > \mu_{m-1}$, измеримое множество E_m и действительные числа a'_n, b'_n, a''_n, b''_n, $n = \mu_{m-1} + 1, \ldots, \nu_m$. Снова применяя лемму 2, в которой теперь полагаем $f(x) = T_m(x) - S''_{\nu_m}(x)$, $\varepsilon = \frac{1}{m^2}$, $r = \nu_m + 1$, мы можем определить тригонометрический полином

$$\sigma_m(x) = \sum_{n=\nu_m+1}^{\mu_m} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \tag{3, 15}$$

и измеримое множество G_m, удовлетворяющие условиям

$$|T_m(x) - S''_{\nu_m}(x) - \sigma_m(x)| < \frac{1}{m^2} \qquad (x \in G_m); \tag{3, 16}$$

$$\operatorname{mes} G_m > 2\pi - \frac{1}{m^2}, \quad G_m \subset [-\pi, \pi]; \tag{3, 17}$$

$$|\alpha_n| < \frac{1}{m^2}, \; |\beta_n| < \frac{1}{m^2} \qquad (n = \nu_{m-1} + 1, \ldots, \nu_m). \tag{3, 18}$$

Положим, кроме того,

$$a'_n = a_n - \alpha_n, \quad b'_n = b_n - \beta_n, \quad a''_n = \alpha_n, \quad b''_n = \alpha_n \quad (n = \nu_m + 1, \ldots, \mu_m). \tag{3, 19}$$

Таким образом мы определяем натуральное число $\mu_m > \nu_m$, измеримое множество G_m и действительные числа a'_n, b'_n, a''_n, b''_n, $n = \nu_m + 1, \ldots, \mu_m$).

Отправляясь от чисел μ_0, a'_0, a''_0, мы определим шаг за шагом все числа μ_m и ν_m, образующие возрастающие последовательности (3, 7) и (3, 8), и все действительные числа (3, 9). В то же время мы определяем измеримые множества E_m, G_m, $m = 1, 2, \ldots$, действительные числа α_n, β_n, $n = 1, 2, \ldots$, и тригонометрические полиномы $\tau_m(x)$, $\sigma_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, для которых имеют место соотношения (3, 10) — (3, 19). Отметим еще, что мы имеем неравенства $\mu_{m-1} < \nu_m < \mu_m$, $m = 1, 2, \ldots$ Если воспользоватся леммой 3, то можно доказать, что тригонометрические ряды (3, 3) и (3, 4), коэффициентами которых служат определённые нами числа (3, 9), удовлетворяют всем условиям теоремы IV.

§ 4. Мы видели в прошлом параграфе, что сущдетвуют тригонометрические ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю при $n \to \infty$, у которых любая подпоследовательность частных сумм не сходится к конечному пределу почти всюду. В то же время мы видели, что существуют универсальные тригонометрические ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим теперь класс тригонометрических рядов, сходящихся почти всюду к конечному пределу. Прежде всего естественно поставить вопрос, какие функции могут быть суммами таких рядов. Как известно, для того, чтобы конечная почти всюду функция $f(x)$ была суммой сходящегося почти всюду тригонометрического ряда, необходимо, чтобы $f(x)$ была измеримой. Можно доказать, что это условие является также достаточным; а именно, можно доказать следующую теорему:

Теорема V. *Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, можно определить тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{4, 1}$$

сходящийся к этой функции почти всюду на $[-\pi, \pi]$ [6]. [9])

Идея доказательства теоремы V состоит в следующем. Пользуясь теоремой III, а также рассуждениями, которые применяются при построении тригонометрического ряда, сходящегося почти всюду к нулю [5], мы можем определить для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, непрерывную функцию $F(x)$ такую, что

$$-\frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \frac{d D_n(t-x)}{dt} dt = f(x) \tag{4, 2}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$, где

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Предположим, что ряд (4, 1) получается в результате почленного дифференцирования ряда Фурье от функции $F(x)$. Легко видеть, что

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \frac{d D_n(t-x)}{dt} dt = S_n(x),$$

где $S_n(x)$ есть сумма n первых членов ряда (4, 1). В таком случае, на основании (4, 2), ряд (4, 1) сходится к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$, откуда следует доказательство теоремы V.

Будем теперь рассматривать тригонометрические ряды, имеющие почти всюду определенную сумму, конечную или бесконечную. Естественно поставить вопрос, будет ли справедлива теорема V, если в ее формулировке отказаться от требования конечности почти всюду функции $f(x)$. В частности, возникает вопрос, существует ли тригонометрический ряд, сходящийся почти всюду к $+\infty$. [10])

Ответа на эти вопросы до сих пор не было дано. Однако, если вместо обычной сходимости рассматривать сходимость по мере, то мы будем иметь положительный ответ на поставленные вопросы.

---

[9]) Эта теорема является обобщением теоремы Н. Лузина, который доказал, что для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, можно определить тригонометрический ряд, который суммируется к ней методом Poisson'а [4].

[10]) Этот вопрос был поставлен Н. Лузиным.

Введем следующие определения и обозначения. Будем говорить, что функция определена всюду на некотором множестве E, если она имеет определенное значение, конечное или равное $+\infty$ или $-\infty$, в каждой точке этого множества. Через $\{f_n(x)\}$ будем обозначать последовательность функций $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$, измеримых и конечных почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$.

Мы скажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере на сегменте $[a, b]$ к измеримой функции $f(x)$, определенной почти всюду на этом сегменте ($f(x)$ необязательно должна быть конечной почти всюду на $[a, b]$), если функции $f_n(x)$ можно представить в виде

$$f_n(x) = g_n(x) + \alpha_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $g_n(x)$ и $\alpha_n(x)$ конечны почти всюду на $[a, b]$,

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = f(x)$$

почти всюду на этот сегменте и $\alpha_n(x)$ сходится по мере к нулю на $[a, b]$, когда $n \to \infty$.[11])

Можно доказать следующую теорему.

Теорема VI. *Для любой измеримой функции $f(x)$, определенной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, существует тригонометрический ряд* (5, 1), *сходящийся по мере к $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющий условию*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 0 \quad \textbf{[10]}. \tag{5, 3}$$

Это утверждение является частным случаем более общих теорем, для формулировки которых нам потребуются следующие определения. Мы скажем, что функция $F(x)$, определенная почти всюду на сегменте $[a, b]$, есть *верхний предел по мере на* $[a, b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$, если $F(x)$ измерима и удовлетворяет следующим условиям:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{mes} \{E\,[f_n(x) > \varphi(x)] . E\,[\varphi(x) > F(x)]\} = 0$ [12])

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определеной почти всюду на $[a, b]$;

2) $\limsup\limits_{n \to \infty} \operatorname{mes} \{E\,[f_n(x) > \psi(x)] .\ E\,[F(x) > \psi(x)]\} > 0$

для любой измеримой функции $\psi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\operatorname{mes} E\,[F(x) > \psi(x)] > 0$.

---

[11]) Это определение совпадает с обычным определением сходимости по мере, если $f(x)$ конечна почти всюду на $[a, b]$.

[12]) Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две какие-нибудь измеримые функции, определенные почти всюду на $[a, b]$, то мы будем обозначать, как обычно, через $E\,[\varphi_1(x) > \varphi_2(x)]$ множество всех точек на $[a, b]$, для которых $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$.

Функцию $G(x)$, определенную почти всюду на $[a, b]$, мы будем называть *нижним пределом по мере на* $[a, b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$, если $-G(x)$ есть верхний предел по мере на $[a, b]$ последовательности $\{-f_n(x)\}$.

Для верхних и нижних пределов по мере на $[a, b]$ последовательности. $\{f_n(x)\}$ можно доказать следующие утверждения:

A. Любая последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет хотя бы один верхний предел и хотя бы один нижний предел по мере на $[a, b]$.

B. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются верхними пределами по мере на $[a, b]$ для одной и той же последовательности $\{f_n(x)\}$, то $F_1(x) = F_2(x)$ почти всюду на $[a, b]$

C. Если $G_1(x)$ и $G_2(x)$ являются нижними пределеми по мере на $[a, b]$ для одной и той же последовательности $\{f_n(x)\}$, то $G_1(x) = G_2(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

D. Если $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[a, b]$ одной и той же последовательнсcти $\{f_n(x)\}$, то $G(x) \leqq F(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

E. Если верхний и нижний пределы по мере на $[a, b]$ послеговательности $\{f_n(x)\}$ равны функции $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$ то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере к $f(x)$ на данном сегменте.

Будем называть функции $F(x)$ и $G(x)$ верхним и нижним пределами по мере на $[a, b]$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, если они являются такими пределами для частних сумм этого ряда. Можно доказать следующие теоремы:

Теорема VII. *Для любых двух измеримых функций $F(x)$ и $G(x)$, определенных почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и таких, что $G(x) \leqq F(x)$ почти всюду на этом сегменте, существует тригонометрический ряд* (4, 1) *обладающий следующими свойствами:*

1) *$F(x)$ и $G(x)$ являются верхним и нижним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ рядя* (4, 1).

2) *Какова бы ни была измеримая функция $\psi(x)$, определенная почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющая условию $G(x) \leqq \psi(x) \leqq F(x)$ почти всюду на этом сегменте, можно определить последовательност $S_{n_k}(x)$, $k=1, 2, \ldots$, частных сумм ряда* (4, 1) *с возрастающими индексами n_k, которая сходится к $\psi(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$.*

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Ясно, что теорема VI является частным случаем теоремы VII.

Теорема VIII. *Для любых измеримых функций $F(x)$, $G(x)$ и $\psi_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, p$, определенных почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющих неравенствам*

$$G(x) \leqq \psi_i(x) \leqq F(x) \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$

почти всюду на этом сегменте, можно определить тригонометрический ряд (4, 1) *который обладает следующими свойствами:*

1) $F(x)$ *и* $G(x)$ *являются верхним и нижним пределами по мере на* $[-\pi, \pi]$ *ряда* (4, 1).

2) *Для любого* $i=1, 2, \ldots, p$ *существует последовательность частных сумм* $S_{n_{ik}}(x)$, $k=1, 2, \ldots$, *ряда* (4, 1) *с возрастающими индексами* n_{ik}, $k=1, 2, \ldots$, *которая сходится к* $\psi_i(x)$ *почти всюду на* $[-\pi, \pi]$.

3) *Если какая нибудь последовательность частных сумм ряда* (4, 1) *с возрастающими иддексами сходится на множестве* E *положительной меры к функции* $\psi(x)$, $E \subset [-\pi, \pi]$, *то для одного из значений* $i=1, 2, \ldots, p$ $\psi(x)=\psi_i(x)$ *почти всюду на* E.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ [10].

Литература.

А. Колмогоров

[1] Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **7** (1925), стр. 23—28.

[2] Une série de Fourier divergente partout, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **183** (1926), стр. 1327—1328.

Н. Лузин

[3] Sur les propriétés de fonctions mesurables, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **154** (1912), стр. 1688—1690.

[4] *Интеграл и тригонометрический ряд* (1915), стр. 1—242.

Д. Меньшов

[5] Sur l'unicité du développement trigonométrique, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **163** (1916), стр. 433—436.

[6] Sur la représentation des fonctions mesurables par des séries trigonométriques, *Мат. Сборник*, **9** (1941), стр. 669—692.

[7] Sur la convergence uniforme des séries de Fourier, *Мат. Сборник*, **11** (1942), стр. 69—96.

[8] Sur les sommes partielles des séries de Fourier des fonctions continues, *Мат. Сборник*, **15** (1944), стр. 385—432.

[9] О частных суммах тригонометрических рядов, *Мат. Сборник*, **20** (1947), стр. 197—238.

[10] О сходимости по мере тригонометрических рядов, *Доклады Акад. Наук СССР*, **59** (1948), стр. 849—852.

F. Riesz

[11] Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Annalen*, **69** (1910), стр. 449—496.

L. Fejér

[12] Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, *Journal für die reine und angew. Math.*, **138** (1910), стр. 22—53.

(*Поступило 9/XI 1949 г.*)

О наилучшем приближении дифференцируемых непериодических функций многочленами.[1]

С. М. НИКОЛЬСКИЙ (Москва).

§ I.

Функции, имеющие разрывные производные с достаточно регулярными разрывами, обладают тем замечательным свойством, что для их наилучшего приближения при помощи многочленов данной степени можно установить не только порядок убывания, но и асимптотическое поведение.

Впервые это обстоятельство в простейших важных случаях было обнаружено С. Н. БЕРНШТЕЙНом. В своих работах [2, 3] он показал, что для наилучшего приближения $E_n(|x|^s)$ [2] $(s=1,2,\ldots)$ функции $|x|^s$ на отрезке $(-1,+1)$ при помощи многочленов $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ степени n существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n^s E_n(|x|^s)=\mu(s), \tag{1.1}$$

т. е. имеет место асимптотическое равенство

$$E_n(|x|^s)\approx\frac{\mu(s)}{n^s}\qquad(n\to\infty).$$

В дальнейшем С. Н. БЕРНШТЕЙН обобщил этот результат, показав, что, если определенная на отрезке $(-1,+1)$ функция $f(x)$ может быть записана в виде

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m} a_k\,|x-x_k|^s+\varphi(x) \tag{1.2}$$

где m конечно, точки x_k $(k=1,\ldots,m)$ принадлежат к отрезку $(-1,+1)$, а функция $\varphi(x)$ имеет всюду на этом отрезке непрерывную производную порядка s, то

---

[1] Краткие сообщения о результатах этой статьи были опубликованы в моих заметках [8, 9, 11, 12].

[2] Здесь и в дальнейшем $E_n(f)$, как обычно, обозначает наименьший максимум $\max\limits_{-1\le x\le 1}|f(x)-P_n(x)|$ при варьировании всевозможными многочленами степени n.

$$E_n(f) \approx \frac{\varkappa\, \mu(s)}{n^s} \qquad (n \to \infty), \tag{1.3}$$

где

$$\varkappa = \max_{1 \leq k \leq m} |a_k| (1-a_k^2)^{s/2}. \tag{1.4}$$

Но можно высказать по этому поводу общее утверждение, относящееся к более обширному классу функций.

Именно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть s — нечетное число и функция $f(x)$ имеет на сегменте $-1 \leq x \leq 1$ (абсолютно непрерывную) производную порядка $s-1$, являющуся, в свою очередь, неопределенным интегралом от фунхции $\varphi(x) = f^{(s)}(x)$ со следующими свойствами:*

1) *$\varphi(x)$ конечна на сегменте $-1 \leq x \leq 1$ и имеет разрывы только первого рода;*

2) *$\varphi(x)$ имеет по меньшей мере один существенний разрыв в некоторой точке x_* интервала $-1 < x < 1$ $(\varphi(x_*+0) \neq \varphi(x_*-0))$.*

Тогда

$$E_n(f) \approx \frac{\varkappa\, \mu(s)}{2\, s!\, n^s} \qquad (n \to \infty), \tag{1.5}$$

где

$$\varkappa = \max_{-1 \leq x \leq 1} |\varphi(x+0) - \varphi(x-0)| (1-x^2)^{s/2}, \tag{1.6}$$

а $\mu(s)$ определяется при помощи (1.1).

Доказательству этой теоремы посвящается § 2 настоящей работы. Краткое сообщение о ней было опубликовано в 1947 г. в моей заметке **[8]**.

Совершенно аналогичная теорема естественно имеет место и в случае четного s. Разница заключается в том, что вместо $\mu(s)$ в равенстве (1.5) нужно поставить константу

$$\nu(s) = \lim_{n \to \infty} n^s E_n(x|x|^{s-1}),$$

связанную с наилучшим приближением функции $x|x|^{s-1}$. *)

Отметим, что с помощью теоремы 1 выделяется сравнительно обширный класс дифференцируемых s-раз функций f, наилучшие приближения $E_n(f)$ которых не только оцениваются сверху с помощью неравенства Джексона, но и снизу

$$\frac{C_1}{n^s} < E_n(f) < \frac{C_2}{n^s} \qquad (0 < C_1 < C_2).$$

В § 3 аналогичный вопрос рассматривается в метрике (L) — пространства суммируемых функций и доказывается теорема 2, являющаяся аналогом теоремы 1. В этом случае оказывается естественним рассматривать функции

---

*) Ряд исследований о $E_n(|x|x^s)$ принадлежит И. И. Ибрагимову, см. *Известия Академии Наук СССР*, сер. мат. **10** (1946), стр. 429—460.

$f(x)$, имеющие на отрезке $(-1,+1)$ производную $f^{(s)}(x)$ порядка s ограниченной вариации, вместо предположения, что $f^{(s)}(x)$ имеет разрывы первого рода.

Наконец, в § 4 нас интересует другая задача, решение которой впрочем связано с применением аппарата, уротребленного в предыдущих параграфах.

Именно, мы предлагаем линейный метод приближения функций $f(x)$, имеющих производную $f^{(s-1)}(x) = \varphi(x)$ порядка $s-1$ ограниченной вариации, с вариацией на $(-1,+1)$ не превышающей единицу, являющийся для этого класса функций в известном смысле (в метрике L) наилучшим.

Этим самым мы получаем в непериодическим случае результаты, подобние известным результатам Н. И. АХИЕЗЕРа и М. Г. КРЕЙНа [1], J. FAVARD'а [5], B. SZ.-NAGY [6] и моим [7], относящимся к периодическому случаю. На вопросе о наилучшем линейном методе в непериодическом случае в равномерной метрике (C) мы здесь останавливаться не будем.

§ 2.

Доказательство теоремы 1. Пусть функция $f(x)$, заданная на отрезке $(-1, +1)$, имеет на нем абсолютно непрерывную производную порядка $s-1$, которая в свою очередь есть неопределенный интеграл от функции $\varphi(x)=f^{(s)}(x)$, имеющей на замкнутом отрезке $(-1, +1)$ разрывы первого рода. В таком случае функция $\varphi(x)$ органичена на $(-1,+1)$ и существует самое большее счетное число точек $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ принадлежащих к интервалу $-1 < x < 1$, где $\varphi(x)$ терпит разрывы.

Воспользовавшись формулой Тейлора, с остатком в интегральном виде, представим функцию $f(x)$ следующим образом

$$f(x) = P_{s-1}(x) + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-1}^{x} (x-t)^{s-1} \varphi(t)\, dt, \tag{2. 1}$$

где

$$P_{s-1}(x) = \sum_{k=1}^{s-1} \frac{f^{(k)}(-1)}{k\,!} (x+1)^k$$

есть многочлен степени $s-1$. Свойства функции $\varphi(x)$ и равенство (2. 1) не нарушатся, если мы видоизменим $\varphi(x)$ в точках a_i так, чтобы $\varphi(a_i+0) = \varphi(a_i)$, что мы будем предполагать. Далее очевидно

$$A_i = \varphi(a_i+0) - \varphi(a_i-0) \to 0 \qquad (i \to \infty)$$

и, если предположить, что функция $\varphi(x)$ имеет на открытом интервале $(-1, +1)$ хотя бы одну точку разрыва, то существует натуральное r, при котором

$$\varkappa = \max_x |\varphi(x+0) - \varphi(x-0)|(1-x^2)^{s/2} =$$

$$= \max_i |A_i|(1-a_i^2)^{s/2} = |A_r|(1-a_r^2)^{s/2}.$$

Зададим теперь $\varepsilon>0$ и подберем $m>r$ так, чтобы $|A_i|<\varepsilon$ $(i=m+1, m+2, \ldots)$.

Введем в рассмотрение элементарные функции скачков $\sigma_a(t)$, определяемые равенствами $\sigma_a(t)=1$ $(t\geq a)$ и $\sigma_a(t)=0$ $(t<a)$ и заметим, что

$$(2.2)\qquad \frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{s-1}\sigma_a(t)\,dt=\begin{cases}\dfrac{(x-a)^s}{\Gamma(s+1)} & (x\geq a)\\ 0 & (x<a)\end{cases}=\frac{|x-a|^s+(x-a)^s}{2\,\Gamma(s+1)}$$

(s нечетное).

Положим

$$(2.3)\qquad \varphi(t)=\sum_{i=1}^{m}A_i\sigma_{a_i}(t)+r(t)=g(t)+r(t).$$

Колебание функции $r(t)$ в любой точке сегмента $-1\leq t\leq 1$, очевидно, не превышает ε и поэтому можно подобрать такое $\delta>0$, что для всех значений t' и t'' из сегмента $-1\leq t\leq 1$, выполняется $|r(t')-r(t'')|<2\varepsilon$.

Таким образом, модуль колебания

$$\omega(h)=\sup|r(t')-r(t'')|\qquad (|t'-t''|\leq h,\ -1\leq t'<t''\leq 1)$$

функции $r(t)$ подчиняется при $h<\delta$ неравенству $\omega(h)<2\varepsilon$ и, на основании неравенства Джэксона,

$$(2.4)\qquad E_n(r)<c\,\omega\left(\frac{2}{n}\right)<2\varepsilon c$$

при $n\delta>2$, где c абсолютная константа.

Вследствие (2. 1), (2. 2) и (2. 3) функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=\frac{1}{2\,s\,!}\sum_{i=1}^{m}A_i|x-a_i|^s+R(x)+Q_s(x),$$

где $Q_s(x)$ есть некоторый многочлен степени s, а $R(x)$ — функция, полученная путем s-кратного интегрирования функции $r(x)$. Если $n-s>2/\delta$, то на основании (2. 4) существует многочлен $P_{n-s}(x)$ степени $n-s$, для которого имеет место

$$|r(x)-P_{n-s}(x)|<2\varepsilon c.$$

Поэтому, если $P_n(x)$ есть s-кратный интеграл от $P_{n-s}(x)$, то, используя неравенство Джэксона, получим

$$(2.5)\qquad E_n(R)=E_n(R-P_n)<\frac{\varepsilon c_1}{n^s}\qquad (n>N)$$

при достаточно большом N, где c_1 постоянная.

С другой стороны, на основании асимптотического равенства (1. 3) С. Н. Бернштейна для функции

$$(2.6)\qquad g(x)=\frac{1}{2\,s\,!}\sum_{i=1}^{m}A_i|x-a_i|^s$$

имеет место

$$(2.7)\qquad (1-\varepsilon)\frac{\varkappa\,\mu(s)}{2\,s\,!\,n^s}<E_n(g)<(1+\varepsilon)\frac{\varkappa\,\mu(s)}{2\,s\,!\,n^s}\qquad (n>N)$$

где N достаточно велико.

Теперь утверждение теоремы 1 следует из (2. 5), (2. 6) и (2. 7), приняв во внимание, что при $n \geqq s$

$$E_n(f) = E_n(g+R), \quad | E_n(g+R) - E_n(g) | \leqq E_n(R).$$

При s четном правая часть (2. 2) заменяется выражением

$$\frac{(x-a)\,|x-a|^{s-1} + (x-a)^s,}{2\,\Gamma(s+1)}$$

чем и об'ясняется, что асимптотическое выражение $f(x)$ в этом случае связано с константой

$$\nu(s) = \lim_{n \to \infty} n^s E_n(x\,|x|^{s-1}),$$

§ 3.

Если $f(x)$ есть суммируемая на интервале $(-1,+1)$ функция, то обозначим через

$$E_n(f)_L = \min_{P_n} \int_{-1}^{+1} | f(x) - P_n(x) |\, dx,$$

где минимум распространен на всевозможные многочлены P_n степени n.

Т е о р е м а 2. *Пусть s — нечетное число и функция $f(x)$ имеет на сегменте $-1 \leqq x \leqq 1$ абсолютно непрерывную производную порядка $s-1$, которая в свою очередь является неопределенным интегралом от функции $\varphi(x) = f^{(s)}(x)$, обладающей следующими свойствами:* 1) *$\varphi(x)$ имеет ограниченную вариацию на сегменте $-1 \leqq x \leqq 1$ и разлагается в виде суммы $\varphi(x) = g(x) + h(x)$, где $g(x)$ есть функция скачков, а $h(x)$ — абсолютно непрерывная функция;* 2) *$\varphi(x)$ фактически имеет хотя бы один разрыв в интервале $-1 < x < 1$. Тогда*

$$E_n(f)_L \approx \frac{1}{n^{s+1}} \frac{M_s}{2\,s\,!} \sum_{k=1}^{\infty} (1-a_k^2)^{\frac{s+1}{2}} \,| A_k | \qquad (n \to \infty),$$

где $a_1, a_2, \ldots\ldots$ точки в которых $\varphi(x)$ имеет существенные разрывы со скачками

$$A_k = \varphi(a_k+0) - \varphi(a_k-0) \neq 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

и

$$M_s = s\,! \,\frac{8}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{s+2}}.$$

Доказательство теоремы 2 базируется на следующей лемме, доказанной в моей статье [10] (см. равенство (5. 37)).

Л е м м а 1.[3]) *Если s нечетное, $-1 < a_1 < a_2 < \ldots. < a_m < 1$,*

---

[3]) Фактически мы сформулировали частный случай доказанной в [10] леммы, т. к. там предполагается s произвольным, но не четным, удовлетворяющим неравенству $s > -1$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m} A_k\,|x-a_k|^s,$$

то

$$E_n(f)_L \approx \frac{M_s}{n^{s+1}} \sum_{k=1}^{m} |A_k|(1-a_k^2)^{\frac{s+1}{2}} \qquad (h \to \infty). \tag{3.1}$$

Докажем еще вторую лемму

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $(-1,+1)$, то имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_L \leqq \frac{\pi}{2}\,\frac{\operatorname{var} f}{n},$$

в котором константа в правой части не может быть уменьшена.

Доказательство. Пусть H обозначает класс функций $\varphi(\vartheta)$ периода 2π с вариацией на периоде не превышающей единицу. Для каждой такой функции (см. [7]) можно подобрать тригонометрический полином $T_{n+1}(\vartheta)$ порядка $n-1$, для которого

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(\vartheta)-T_{n-1}(\vartheta)|\,d\vartheta \leqq \frac{\pi}{2n}.$$

Причем $T_{n-1}(\vartheta)$ четный полином, если $\varphi(\vartheta)$ четная функция. Если теперь $f(x)$ функция ограниченной вариации на отрезке $(-1,+1)$ с вариацией не превышающей единицу, то $f(\cos\vartheta)$ имеет на отрезке $(0, 2\pi)$ вариацию не превышающую 2.

Поэтому существует полином $T_{n-1}(\vartheta)$ такой, что

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |f(\cos\vartheta)-T_{n-1}(\vartheta)|\,d\vartheta \leqq \frac{\pi}{2n}.$$

Отсюда

$$E_{n-1}(f) \leqq \int_{-1}^{+1} |f(x)-T_{n-1}(\arccos x)|\,dx \leqq \int_0^{\pi} |f(\cos\vartheta)-T_{n-1}(\vartheta)|\,d\vartheta \leqq \frac{\pi}{2n}.$$

Вторая часть утверждения вытекает из того обстоятельства, что для функции $\varphi(x)=\operatorname{sgn}(x)$

$$E_{n-1}(\varphi)_L = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n},$$

как показывают несложные рассуждения, на которых мы останавливаться не будем.

Доказательство теоремы 2. Функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы, можно представить в виде

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{s-1}\varphi(t)\,dt + P_{s-1}(x) =$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{s-1} g(t)\,dt + H(x) + P_{s-1}(x) = g(x)+H(x)+P_{s-1}(x),$$

где $P_{s-1}(x)$ — многочлен степени $s-1$, а $H(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка s. При этом, не изменяя этих равенств, функции φ и g можно видоизменить на счетном множестве точек так, чтобы они были непрерывными справа для $-1<x<1$.

Покажем, что

(3.2) $$E_n(H)_L = O(n^{-s-1}) \qquad (n \to \infty).$$

В самом деле, если $F(x)$ — абсолютно непрерывная функция, то она есть неопределенный интеграл от $F'(x)$. Существует последовательность многочленов $P_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ таких, что

$$\int_{-1}^{+1} |F'(x) - P_n(x)|\, dx = \varepsilon_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Если поэтому $Q'_{n+1}(x) = P_n(x)$, то в силу леммы 1,

$$E_{n+1}(F)_L = E_{n+1}(F - Q_{n+1})_L \leqq \frac{\pi}{2} \frac{\varepsilon_n}{n+1} = o(n^{-1})$$

и мы доказали (3.2) при $s=0$. При произвольном целом эти обычные рассуждения надо повторить по индукции.

Функция скачков равна $g(x) = \sum A_k \sigma_{a_k}(x)$, где $\sigma_a(x)=1$ для $x \geqq a$ и $\sigma_a(x)=0$ для $x<a$, и так как

(3.3) $$\sum_k |A_k| < \infty$$

и имеет место (2.2), то $G(x) = A(x) + P_s(x)$, где

$$A(x) = \frac{1}{2s!} \sum_k A_k |x - a_k|^s$$

а $P_s(x)$ есть многочлен степени s.

Наша теорема будет доказана, если будет установлено асимптотическое равенство

(3.4) $$E_n(A)_L \approx \frac{1}{n^{s+1}} \frac{M}{2s!} \sum_{k=1}^{\infty} (1-a_k^2)^{\frac{s+1}{2}} |A_k|.$$

Обозначая через $E_n(f; c, d)$ наилучшее приближение в среднем функции f на сегменте $[c, d]$, будем иметь

$$E_n(|x-a|^s)_L \leqq E_n(|x-a|^s; a-2, a+2)_L = E_n(|x|^s, -2, 2) =$$
$$= 2^{s+1} E_n(|x|^s)_L < \frac{c}{n^{s+1}},$$

где c константа. Последнее неравенство вытекает из леммы 1.

Зададим теперь $\varepsilon>0$ и подберем m так, чтобы

$$\sum_{m+1}^{\infty} |A_k| < \varepsilon$$

и положим

$$A(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k |x-a_k|^s + \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k |x-a_k|^s = A_1(x) + A_2(x).$$

Тогда при достаточно больших n

$$E_n(A_2)_L \leqq \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_k| \, E_n(|x-a_k|^s)_L < \frac{\varepsilon c}{n^{s+1}}.$$

С другой стороны, на основании леммы 2

$$E_n(A_1)_L \approx \frac{1}{n^{s+1}} \frac{M_s}{2s!} \sum_{k=1}^{m} (1-a_k^2)^{\frac{s+1}{2}} |A_k| \qquad (n \to \infty).$$

Оба эти соотношения влекут (3.4), если иметь в виду (3.1) и неравенство

$$|E_n(A)_L - E_n(A_1)_L| \leqq E_n(A_2)_L.$$

§ 4.

Пусть W_{s-1} обозначает класс функций f, имеющих на $(-1,+1)$ абсолютно непрерывную производную $f^{s-2}(x)$ порядка $s-2$ и производную $f^{(s-1)}(x) = \varphi(x)$ порядка $s-1$ с ограниченной вариацией, удовлетворяющей неравенству

$$\|\varphi\|_v = \operatorname*{var}_{-1 \leqq x \leqq 1} \varphi(x) \leqq 1.$$

При этом при $s=1$ считаем, что W_0 есть класс функций $f(x) = \varphi(x)$ ограниченной вариации, удовлетворяющих неравенству (4. 1).

Положим

$$E_n(\mathfrak{M})_L = \sup_{f \varepsilon \mathfrak{M}} E_n(f)_L$$

где верхняя грань распространена на множество $\mathfrak{M}$ функций.

Теорема 3. *Справедливы равенства: при* $s = 2, 4, \ldots$

(4. 1)
$$E_n(W_{s-1})_L = \frac{1}{2(s-1)!} \max_{-1 \leqq a \leqq 1} E_n(|a-x|^{s-1})_L \approx$$
$$\approx \frac{1}{2(s-1)!} E_n(|x|^{s-1})_L \approx \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{s+1}} \frac{1}{n^s} \qquad (n \to \infty);$$

при $s = 1, 3, 5, \ldots$

(4. 2)
$$E_n(W_{s-1})_L = \frac{1}{2(s-1)!} \max_{-1 \leqq a \leqq 1} E_n((a-x)|a-x|^{s-2})_L \approx$$
$$\approx \frac{1}{2(s-1)!} E_n(x|x|^{s-2})_L \approx \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{s+1}} \frac{1}{n^s} \qquad (n \to \infty).$$

Теорема 4. *Пусть*

(4. 3)
$$P_n^{(s)}(x, a) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(s)}(a) \, x^k$$

есть многочлен степени n, наилучший в среднем на отрезке $(-1,1)$ для функции $|a-x|^{s-1}$ при s четном и для функции $(a-x)|a-x|^{s-1}$ при s нечетном.

Тогда линейный метод

$$U_n(f, x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k + \frac{1}{2(s-1)!}\int_{-1}^{+1}(x-t)^{s-1}\,d\varphi(t) + U_n^*(f, x),$$

(4. 4)

$$U_n^*(f, x) = \frac{1}{2(s-1)!}\sum_{k=0}^{n} x^k \int_{-1}^{+1} \alpha_k^{(s)}(t)\,d\varphi(t) \qquad (\varphi(t) = f^{(s-1)}(t))$$

приближения функции f многочленами степени n есть (точно) наилучший для класса W_{s-1}. Иначе говоря

$$\sup_{f \in W_{s-1}} \int_{-1}^{+1} |f(x) - U_n(f, x)|\,dx = E_n(W_{s-1})_L.$$

Доказательство при s четном. Если $f \in W_{s-1}$, то, обозначая через $P_m(x)$ некоторий многочлен степени m, будем иметь ($f^{(s-1)}(x) = \varphi(x)$)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k + \frac{1}{(s-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{s-1}\,d\varphi(t) =$$

$$= P_{s-1}(x) + \frac{1}{2(s-1)!}\int_{-1}^{+1} |x-t|^{s-1}\,d\varphi(t) = P_{s-1}(x) + f_*(x).$$

где многочлен $P_{s-1}(x)$ определяется равенством

$$P_{s-1}(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k + \frac{1}{2(s-1)!}\int_{-1}^{+1}(x-t)^{s-1}\,d\varphi(t).$$

Нам предстоит аппроксимировать насколько возможно хорошо функции $f_*(x)$, соответствующие функциям φ, у которых $\|\varphi\|_v \leq 1$.

Мы их будем приближать многочленами вида $U_n^*(f, x)$, где функции $\alpha_k^{(s)}(t)$ будут далее определены. Обозначая через $g(x)$ произвольную измеримую функцию, не превышающую по абсолютной величине единицу, получим

$$\sup_{\varphi} \int_{-1}^{+1} |f_*(x) - U_n^*(f, x)|\,dx =$$

$$\sup_{\varphi} \frac{1}{2(s-1)!}\int_{-1}^{+1}\left|\int_{-1}^{+1}\left[|x-t|^{s-1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \alpha_k^{(s)}(t)\right]d\varphi(t)\right|dx =$$

$$= \sup_{\varphi}\sup_{g}\int_{-1}^{+1} g(x)\int_{-1}^{+1}\left[|x-t|^{s-1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \alpha_k^{(s)}(t)\right]d\varphi(t)\,dx =$$

$$= \sup_{g}\sup_{\varphi}\int_{-1}^{+1}\left(\int_{-1}^{+1}\left[|x-t|^{s-1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \alpha_k^{(s)}(t)\right]g(x)\,dx\right)d\varphi(t) =$$

$$= \sup_{g}\sup_{t}\left|\int_{-1}^{+1}\left[|x-t|^{s-1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \alpha_k^{(s)}(t)\right]g(x)\,dx\right| = \max_{t}\sup_{g} =$$

$$= \max_{t}\int_{-1}^{+1}\left||x-t|^{s-1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \alpha_k^{(s)}(t)\right|dx \geq E_n(|x-t_*|^{s-1})_L,$$

где $E_n(|x-t_*|^{s-1})_L = \max_t E_n(|x-t|^{s-1})_L$.

При этом последнее неравенство обращается в равенство, если функции $a_k^{(s)}(t)$ подобраны так, чтобы многочлен $P_n^{(s)}(x, a)$, определяемый при помощи (4.3), был наилучшим в среднем для функции $|x-a|^{s-1}$, т. е. чтобы для любого полинома $P_n(x)$ степени n

$$\int_{-1}^{+1} \left| |x-a|^{s-1} - P_n(x) \right| dx \geq \int_{-1}^{+1} \left| |x-a|^{s-1} - P_n^{(s)}(x, a) \right| dx.$$

Из наших рассуждений следует, что если $f \in W_{s-1}$, то

$$E_n(f)_L \leqq E_n(|t_* - x|^{s-1})_L.$$

С другой стороны, положим

$$\varphi_*(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < t_* & (t = t_*, \text{ если } t_* = -1) \\ 1 \text{ при } t \geqq t_* & (t > t_*, \text{ если } t_* = -1), \end{cases}$$

$$f_*(x) = \int_{-1}^{+1} |x-t|^{s-1}\, d\varphi_*(t) = |x-t_*|^{s-1}.$$

Очевидно $f_* \in W_{s-1}$ и для $f = f_*$ неравенства обращается в равенство. Этим доказана первая строка равенства (4.1) и теорема 4.

Перейдем теперь к доказательству остальных (асимптотических) равенств (4.1).

В моей работе [9] (см. теорему 1, равенства (3.1) и (3.2)) показано, что при s четном

$$E_n(|a-x|^{s-1})_L = \frac{M_{s-1}(1-a^2)^{s/2}}{n^s} + O\left(\frac{\log n}{n^{s+1}}\right), \tag{4.5}$$

$$M_{s-1} = (s-1)!\, \frac{8}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{s+1}} \tag{4.6}$$

равномерно относительно a, уговлетворяющих неравенству $|a| \leqq \eta \leqq 1$.

Отсюда

$$\max_{|a| \leqq \eta} E_n(|a-x|^{s-1})_L = \frac{M_{s-1}}{n^s} + O\left(\frac{\log n}{n^{s+1}}\right). \tag{4.7}$$

С другой стороны, положим

$$\eta < a \leqq 1, \quad k = \frac{1+2a-\eta}{1+\eta}, \quad \mu = \frac{2}{1+k};$$

тогда

$$\frac{1+\eta}{1-\eta} = \frac{1+a}{k-a}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1+a}{1+\eta} \leqq \frac{2}{1+\eta}, \quad k > 1$$

и, таким образом, точка μa делит отрезок $(-\mu, \mu k)$ длины 2 в том же отношении, в каком η делит отрезок $(-1, +1)$. Поэтому, обозначив через $E_n(f; a, b)_L$ наилучшее приближение f на отрезке (a, b), получим

$$E_n(|a-x|^{s-1})_L = E_n(|a-x|^{s-1};-1,+1)_L \leq$$
$$\leq E_n(|a-x|^{s-1};-1,k)_L = \frac{1}{\mu^{s-1}} E_n(|\mu a-\mu x|^{s-1};-1,k)_L =$$
$$= \frac{1}{\mu^s} E_n(|\mu a-y|^{s-1};-\mu,\mu k)_L = \frac{1}{\mu^s} E_n(|\eta-x|^{s-1})_L =$$
$$= \frac{2^s}{(1+\eta)^s} E_n(|\eta-x|^{s-1})_L \qquad (\eta<a\leq 1)$$

и в силу (4.5)

$$(4.8)\qquad \underset{\eta\leq a\leq 1}{E_n}(|a-x|^{s-1})_L \leq H(\eta)\frac{M_{s-1}}{n^s}+O\left(\frac{\log n}{n^{s+1}}\right), \qquad H(\eta)=\frac{2^s(1-\eta^2)^{s/2}}{(1+\eta)^s}.$$

Легко видеть, что существует такое $\eta=\eta_0$ $(0\leq\eta_0<1)$, что $H(\eta_0)=1$; далее, очевидно, неравенство (4.8) сохраняется при $\eta<|a|\leq 1$. Если теперь в (4.7) и (4.8) положить $\eta=\eta_0$, то получим утверждение, содержащееся во второй строке равенства (4.1).

Теоремы 3 и 4 доказаны.

Сделаем еще несколько замечаний.

Мы доказали, что максимум $E_n(|x-a|^{s-1})_L$ на сегменте $(-1,+1)$ достигается асимптотически при $a=0$. Для фиксированного n это неверно; например, вычисления показывают, что

$$E_2(|x|)_L = 0{,}118\ldots, \text{ а } E_2\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)_L = 0{,}164\ldots.$$

Доказательство при s нечетном проводится аналогично. Нужно принять во внимание, что в этом случае если $f\in W_{s-1}$ и $f^{(s-1)}(x)=\varphi(x)$, то

$$f(x)=\frac{1}{2(s-1)!}\int_{-1}^{+1}|x-t|^{s-2}(x-t)\,\varphi(t)\,dt + P_{s-1}(x)$$

и при $n\to\infty$

$$\max_{-1\leq a\leq 1} E_n((x-a)\,|x-a|^{s-2})_L \approx E_n(x\,|x|^{s-2})_L,$$

причем при n нечетном

$$E_n(x\,|x|^{s-2})_L = \left|\int_{-1}^{+1} x\,|x|^{s-2}\operatorname{sign}\sin n\arccos x\,dx\right| \approx$$
$$\approx (s-1)!\,\frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{s+1}}\,\frac{1}{n^s} \qquad (n\to\infty).$$

Функции $|x|^{s-1}/2(s-1)!$ при s четном и $x|x|^{s-2}/2(s-1)!$ при s нечетном (не зависящие от n) принадлежат к W_{s-1} и следовательно правые части равенств (4.1) и (4.2) для них достижимы.

Можно было бы рассматривать вместо W_{s-1} класс $\overline{W}_s$ функций, имеющих производную $f^{(s)}(x)$, удовлетворяющую неравенству,

$$\|f^{(s)}\|_L = \int_{-1}^{+1}|f^{(s)}(x)|\,dx \leq 1.$$

Нетрудно установить, что тогда $E_n(W_{s-1})_L = E_n(\overline{W}_s)_L$, хотя для каждой отдельной функции $f \in \overline{W}_s$

$$E_n(f)_L \approx o(n^{-s}) \qquad (n \to \infty).$$

Наконец, если через W_s^* обозначить класс функций периода 2π, имеющих производную $f^{(s)}$ порядка s, удовлетворяющую неравенству

$$\int_0^{2\pi} | f^{(s)}(x) | \, dx \leqq 1,$$

то сопоставляя доказанные теоремы с другим, полученным мною результатом ([7] § 7, п. 2), получим

$$\sup_{f \in W_s^*} E_n^*(f)_L \approx E_n(\overline{\overline{W}}_s)_L,$$

где $E_n^*(f)_L$ есть наилучшее приближение функции посредством тригонометрических полиномов порядка n.

Цитированная литература. [4])

Н. И. Ахиезер—М. Г. Крейн

[1] О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций, *ДАН*, **15** (1937), стр. 107—112.

С. Н. Бернштейн

[2] Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation de $|x|$, *Acta Math.*, **37** (1913), p. 1—57.

[3] О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени, *ИАН* (1938), стр. 169—180.

[4] О наилучшем приближении $|x-c|^p$, *ДАН*, **18** (1938), стр. 379—384.

J. Favard

[5] Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques, *Bulletin des Sciences Math.*, **61** (1937), p. 209-224.

B. Sz.-Nagy

[6] Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, *Berichte der Sächsischen Akad. der Wissenschaften zu Leipzig*, **90** (1938), S. 103—134; **91** (1939), S. 3—24.

С. М. Никольский

[7] Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, *ИАН*, **10** (1946), стр. 207—256.

[8] О наилучшем приближение функций, s-ая производная которой имеет разрывы первого рода, *ДАН*, **55** (1947), стр. 99—102.

[4]) *ДАН = Доклады Академии Наук СССР; ИАН = Известия Академии Наук СССР*, сер. мат.

[9] О наилучшем приближении многочленами в среднем функций с особенностями вида $|a-x|^s$, *ДАН*, **55** (1947), стр. 195—198.

[10] О наилучшем приближении многочленами в среднем функции $|a-x|^s$, *ИАН*, **11** (1947), стр. 139—180.

[11] Наилучшее приближение в среднем одного класса функций любыми полиномами, *ДАН*, **58** (1947), стр. 25—28.

[12] О наилучшем линейном методе приближения многочленами в среднем дифференцируемых функций, *ДАН*, **58** (1947), стр. 185—187.

Математический Институт
им. В. А. Стеклова АН СССР.

(Поступило 9/XI 1949 г.)

О наилучших приближениях в комплексной области.

С. Н. МЕРГЕЛЯН (Ереван).

Рассмотрим конечную область D со связным дополнением, совпадающую с множеством внутренних точек своего замыкания. Пусть функция $f(z)$ регулярна в D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ а $\varrho_n(f, D)$ означает нижнюю грань чисел

$$\max_{z \in D} |f(z) - P_n(z)|$$

по всевозможным полиномам степени n. Как показал М. В. КЕЛДЫШ [1] при этом $\varrho_n(f, D) \to 0$, рпи $n \to \infty$, причем скорость убывания чисел ϱ_n тесно связана со свойствами $f(z)$ на границе D, так же как это имеет место в случае наилучших приближений на отрезке $[0, 1]$. Однако, в отличие от наилучших приближений в вещественной области, основные вопросы которых хорошо изучены, в случае комплексой области на скорость убывания $\varrho_n(f, D)$ влияют в равной мере со свойствами $f(z)$ свойства границы области D.

В случае, когда область D ограничена аналитической кривой известно, что из соотношения

$$\varrho_n(f, D) < \frac{\text{Const}}{n^{k+\alpha}} \qquad (k \text{ — целое, } 0 < \alpha < 1) \tag{1}$$

следует, что $f^{(k)}(z)$ удовлетворяет в $\overline{D}$ условию Липшица порядка α и наоборот из этого обстоятельства следует неравенство (1). Таким образом в случае аналитических областей зависимость $\varrho_n(f, D)$ от $f(z)$ аналогична зависимости $E_n(f)$ от свойств $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$. Однако, уже в случае некоторых из областей с гладкой границей эта аналогия исчезает и влияние границы D на скорость убывания $\varrho_n(f, D)$ создаёт специфические особенности теории наилучших приближений в комплексной области.

В настоящей статье, не останавливаясь на всевозможных вопросах в этом направлении, мы рассмотрим лишь несколько характерных задач.

§ 1. Области с гладкой границей.

Пусть D произвольная конечная область с односвязным дополнением; через Z_R $(R > 1)$ обозначим линию уровня функции Грина $G(z)$ дополнения к D с особенностью на бесконечности:

$$Z_R: \quad G(z) = \log R;$$

D_R — конечная область ограниченная Z_R. Пусть также $f(z)$ аналитична в D_R и не превосходит там по модулю единицы.

Лемма 1. *Если диаметр D равен единице, то найдутся две абсолютные постоянные C_1 и C_2 для которых неравенство*

$$\varrho_n(f, D) < \frac{C_1}{(R-1)^{C_2} R^n} \qquad (C_2 \leqq 3)$$

выполняется при всех $R > 1$ и $n = 1, 2, 3 \ldots$.

Доказательство легко вывести, составляя интерполяционный полином Фейера с равномерно распределенными узлами, оценивая остаточный член представимый в виде интеграла Коши и учитывая, что, во-первых,

$$\text{длина } Z_R < \frac{C_3}{R-1},$$

и, во-вторых, расстояние любой точки Z_R до $\Gamma = \overline{D} - D$ превосходит $C_4(R-1)^2$, где C_3, C_4 — абсолютные постоянные.

Через $d(\zeta, R)$, где $\zeta \in \Gamma$, обозначим расстояние ζ до Z_R. Поведение $d(\zeta, R)$ при значениях R, близких к единице, зависит основном от особенностей границы области D в окрестности точки ζ. Приведем формулировку одного результата Варшавского, которым мы воспользуемся в дальнейшем.

Пусть в окрестности $|z| \leq \alpha$ точки $z = 0$ граница Γ состоит из двух дуг Γ_+ и Γ_-, уравнения которых в полярных координатах суть

$$\varphi = \Phi_+(\varrho), \qquad \varphi = \Phi_-(\varrho) \qquad (\Phi_+ < \Phi_-)$$

соответственно. Пусть также существуют пределы

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho \frac{d\Phi_+}{d\varrho}, \qquad \lim_{\varrho \to 0} \varrho \frac{d\Phi_-}{d\varrho}.$$

Через $w = w(z)$ обозначим функцию, конформно отображающую область D на круг $|w - 1| < 1$ так что $z = 0$ переходит в $w = 0$; $\Theta(\varrho) = \Phi_-(\varrho) - \Phi_+(\varrho)$

Лемма 2. (С. ВАРШАВСКИЙ [2]) *Если*

$$\int_0^a \left[\left(\frac{d\Phi_+}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi_-}{d\varrho}\right)^2\right] \frac{\varrho\, d\varrho}{\Theta(\varrho)} < \infty,$$

то в окресности точки $z = 0$ имеем

$$|w(z)| = c \exp\left\{-\pi \int_{|z|}^{a} \frac{dr}{r\Theta(r)} + O(1)\right\}$$

где C — независит от z.

Это утверждение дает возможность в ряде случаев исследовать поведение конформно отображающих функций в замкнутой области, а также оценить расстояние линий уровня функции Грина до граничной точки, в зависимости от поведения границы вблизи этой точки. Отсюда в частности следует

Лемма 3. *Если область D ограничена конечным числом гладких дуг с непрерывно вращающейся касательной, составляющих между собой углы с внешним раствором, не превышающим π, то при всяком $\varepsilon > 0$*

$$d(\zeta, R) < C(R-1)^{1-\varepsilon},$$

где C не зависит от ζ и $R < R(\varepsilon)$.

Известно, что в случае когда область D ограничена гладкой кривой с ограниченной кривизной и функция $f(z)$ удовлетворяет в $\overline{D}$ условию Липшица порядка α, то, при любом $\varepsilon > 0$

$$\rho_n(f, D) < \frac{\text{Const}}{n^{\alpha-\varepsilon}}, \qquad n > n(\varepsilon). \tag{3}$$

Ниже мы имеем в виду распространить это неравенство на произвольные области с гладкой границей. В случае дополнительных сведений о гладкости Γ неравенство (3) можно улучшить. Заметим, что если $P_n(z)$ — полином наилучшего приближения $f(z)$ в $\overline{D}$ степени n, то, с помощью интеграла Коши, легко получить неравенство

$$(*) \qquad \left|P^{(n)}_{n_k}(z) - P^{(n)}_{n_{k-1}}(z)\right| < C^n n! \, \frac{\rho_{n_{k-1}}(f, D)(1+\alpha)^{n_k}}{(d(\zeta, 1+\alpha))^n}, \qquad \alpha \text{ — любое } (\alpha > 0),$$

z принадлежит области B_ζ с границей, некасательной к Γ в ζ и принадлежащей $\overline{D}$.

Теорема 1. *Если область D ограничена гладкой кривой с непрерывно меняющейся касательной и $f(z)$ аналитична в D, непрерывна в $\overline{D}$, причем k-я производная $f(z)$ удовлетворяет с $\overline{D}$ условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \leqq 1$, то, при любом $\varepsilon > 0$,*

$$\rho_n(f, D) < \frac{C}{n^{k+\alpha-\varepsilon}}, \quad n > n(\varepsilon),$$

где C не зависит от n.

Доказательство достаточно провести для случая $k = 0$. Общий случай выводится отсюда известным приемом.

Пусть ε_0 — произвольно малое фиксированное число; допустим, что проекция D на ось OX содержит интервал $(0,1)$ и прямые $x = a$, $x = b$ $(0 < a < b < 1)$ проведены так, что они не касаются границы D и, следовательно, пересекают ее в конечном числе точек.

Часть D, расположенную справа от $x = a$ обозначим через D_a, а часть D, расположенную слева от $x = b$, через D_b. Открытые множества D_a и D_b состоят, очевидно, из конечного числа односвязных областей, расположенных на положительном расстоянии друг от друга:

$$D_a = \sum_{i=1}^{n_1} D_a^{(i)}, \quad D_b = \sum_{i=1}^{n_2} D_b^{(i)}.$$

Через $z=z(s)$ обозначим параметрическое уравнение границы D, причем параметр s представляет длину дуги $\Gamma=\overline{D}-D$ от некоторой фиксированной точки $z_0=z(0)$ до $z(s)$. Число $\varrho<1$ выберем настолько близким к единице, чтобы угол, составленный внутренней нормалью к границе D в точке $z(s)$ с внутренней линией уровня Z_ϱ $(\varrho<1)$ в точке ближайшей к $z(s)$, отличался бы от $\frac{\pi}{2}$ менее, чем на некоторое $\omega>0$ для любого значения s. Кольцевую область, заключенную между Γ и Z_ϱ, обозначим через l. Часть l, расположенную между внутренней нормалью к Γ в $z(0)$ и внутренней нормалью к Γ в $z(s)$, проведенными до их пересечения с Z_ϱ, обозначим $\sigma(s)$.

Выберем $\delta=\delta(s)$ так, чтобы множество

$$\Delta(s)=\sigma(s+\delta)-\overline{\sigma}(s)$$

представляло бы область, звездообразную относительно некоторой точки z_s при всех значениях s. $\Delta(s)$ является криволинейным четырехугольником с углами, близкими к прямым и зависит от ϱ. Через J_s обозначим прямую, проходящую через $z(s)$ и ортогональную в $z(s)$ к Γ, через J_s' — прямую проходящую через $z\left(s+\frac{\delta(s)}{4}\right)$ и параллельную J_s. Очевидно, что числа ϱ, ω и $\delta(s)$ можно выбрать, кроме того, так, чтобы часть l, расположенная между J_s и J_s', принадлежала бы пересечению областей $\Delta(s)$ и $\sigma\left(s+\frac{\delta(s)}{2}\right)$ при всех s. Достаточно за число $\delta(s)$ взять длину отрезка J_s, расположенного между $z(s)$ и ближайшей к $z(s)$ точкой пересечения J_s с Z_ϱ; за z_s можно взять пересечение диагоналей в криволинейном четырехугольнике $\Delta(s)$.

Рассмотрим одну из компонент D_a — например $D_a^{(1)}$; часть $\sigma(s)$, расположенную в $D_a^{(1)}$, обозначим $\sigma_1(s)$. Предположим, что $z(0)$ лежит вне $\overline{D}_a^{(1)}$; пусть S_0 — наибольшее из s, для которых $\sigma(s)$ не имеет общих точек с $D_a^{(1)}$, а S_1 — наименьшее из тех s, для которых пересечение l и $D_a^{(1)}$ совпадает с $\sigma_1(s)$. Через (s_0, s_1) обозначим наибольший интервал, обладающий тем свойством, что $\sigma(s_1)-\overline{\sigma}(s_0)$ принадлежит $D_a^{(1)}$. Часть $\sigma_1\left(s+\frac{\delta(s)}{2}\right)$, расположенную по ту же сторону от прямой J_s, что и J_s', обозначим $\sigma_{11}(s)$ Множество точек, расположенных от $\sigma_{11}(s)$ на расстоянии, меньшем λ, обозначим $\sigma_{11\lambda}(s)$; совокупность точек, отстоящих от $\sigma_1(s)$ на расстояние, меньшее λ — $\sigma_{1\lambda}(s)$.

Предположим, что существует полином $\pi_1(z)$ степени n со следующими свойствами:

1. $|\pi_1(z)-f(z)|<c_1 n^{-\alpha+\varepsilon_0}, \quad z\in\overline{\sigma}_1\left(s+\frac{\delta(s)}{2}\right)$,

2. $|\pi_1(z)|\leq M, \quad z\in\overline{\sigma}_{1\lambda_n}\left(s+\frac{\delta(s)}{2}\right), \quad \lambda_n=\frac{1}{n^{1-\varepsilon_0}}$,

где M — не зависит от n и s.

Область $\Delta(s)$ звездообразна относительно z_s, поэтому функция

$$f_1(z)=f\left(z_s+\frac{z-z_s}{1+\lambda}\right)$$

аналитична в области $\Delta_\lambda(s)$, получаемой из $\Delta(s)$ растяжением относительно точки z_s в $1+\lambda$ раз. В силу леммы 3 существует постоянная $c_2>0$, для которой образ окружности $|w|=1+2\lambda$ при отображении $|w|>1$ на дополнение к $\overline{\Delta}(s)$ расположен целиком в $\Delta_{c_2}\lambda^{1-\varepsilon_0}(s)$ (нас интересуют лишь малые значения $\lambda>0$).

Согласно лемме 1, найдется полином $\pi_2(z)$ степени n так, что

$$\max_{z\in Z_{1+\lambda}}|\pi_2(z)-f_1(z)|<\frac{c_4}{\lambda^{c_2}(1+\lambda)^n}$$

(под $z_{1+\lambda}$ понимаем линию уровня дополнения к $\overline{\Delta}(s)$). Одновременно в $\overline{\Delta}(s)$ будет выполнятся неравенство

$$|\pi_2(z)-f(z)|<\frac{c_4}{\lambda^{c_2}(1+\lambda)^n}+c_5\lambda^{\alpha(1-\varepsilon_0)},$$

так как при $z\in\overline{\Delta}(s)$

$$\left|f(z)-f\left(z_s+\frac{z-z_s}{1+c_2\lambda^{1-\varepsilon_0}}\right)\right|<c_5\lambda^{\alpha(1-\varepsilon_0)}.$$

Покроем область $\Delta_{c_2}\lambda^{1-\varepsilon_0}(s)$ областью $G(k)$ а $\overset{\circ}{\sigma}_{11\lambda}(s)$ — областью $B(k)$ так, чтобы $G(k)$ и $B(k)$ находились бы на положительном расстоянии друг от друга, превышающем $k>0$, а также расстоянии любой точки $B(k)$ до $\sigma_{11}\lambda(s)$, равно как и расстояние любой точки $G(k)$ до $\Delta_{c_2}\lambda^{1-\varepsilon_0}(s)$ превышало бы k (такое $k>0$, не зависящее от $\lambda\leqq\lambda_0$, найти, очевидно, можно).

Как известно, существует полином $\pi_3(z)$ степени n такой, что

$$|\pi_3(z)-\pi_1(z)|<c_7q^n, \qquad z\in\sigma_{11}\lambda(s),$$
$$|\pi_3(z)-\pi_2(z)|<c_7q^n, \qquad z\in G(k),$$

где $q<1$ зависит от k.

Пусть теперь G — конечная область с односвязным дополнением, проекция которой на ось OY больше единицы, $f(z)$ регулярна в G, непрерывна в $\overline{G}$, $G_{1+\lambda}$ — область, ограниченная внешней линией уровня $Z_{1+\lambda}$ области G, $\pi_4(z)$, $\pi_5(z)$ — два полинома степени n со следующими свойствами:

1) $|\pi_4(z)|\leqq M$ в той части $G_{1+\lambda}$, которая расположена выше прямой $y=a$, аналогично $|\pi_5(z)|\leqq M$ в части $G_{1+\lambda}$, расположенной снизу от прямой $y=b$ $(b-a=1)$; предполагаем, что отрезок $[a,b]$ принадлежит проекции G на ось OY причем $b=a+1$.

2) В части $\overline{G}$, расположенной в полуплоскости $y\geqq a$

$$|\pi_4(z)-f(z)|<\frac{c_8}{n^{\alpha-\varepsilon_0}}$$

в части же $\overline{G}$, расположенной в полуплоскости $y\leqq b$

$$|\pi_5(z)-f(z)|<\frac{c_8}{n^{\alpha-\varepsilon_0}}.$$

Допустим дополнительно, что расстояние любой точки $Z_{1+\lambda}$ до $\overline{G}-G$ меньше $c_9\lambda^{1-\varepsilon_0}$ $\left(\lambda \geqq \lambda_n = \dfrac{1}{n^{1-\varepsilon_0}}\right)$.

Лемма 4. *Существует полином $\pi_6(z)$ степени n, для которого*

1. *в области* $G_{1+\lambda_n/2}$: $\quad |\pi_6(z)| \leqq 2M$,

2. *в области* $\overline{G}$: $|\pi_6(z)-f(z)| < \dfrac{c_{10}}{n^{\alpha-3\varepsilon_0}} \quad (n > n_0)$.

Доказательство основывается на методе усреднения академика М. В. Келдыша [1].

Обозначим $\varphi(z,t) = \pi_4(z)$ при $t \geqq \frac{1}{2}(a+b)$ и $\varphi(z,t) = \pi_5(z)$ при $t < \frac{1}{2}(a+b)$, и

$$\varphi(x+iy) = \int\limits_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} \varphi(z,t)\,dt.$$

Пусть $\zeta = \xi + i\eta$. Формула

$$(5)\quad \varphi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Z_{1+\lambda}} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{G_{1+\lambda}} \frac{\varphi\left(\zeta, \eta+\frac{1}{2}\right) - \varphi\left(\zeta, \eta-\frac{1}{2}\right)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta$$

выведена в [1].

Интеграл в правой части (5) разобьем на две части: по области G и по оставшейся области $G_{1+\lambda} - \overline{G}$. Прибавляя и вычитывая к числителю в дроби под интегралом в правой части (5) $f(\zeta)$ убеждаемся о том, что первое слагаемое не превосходит

$$\frac{c_{11}}{n^{\alpha-\varepsilon_0}}\iint\limits_{G} \frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta - z|} \leqq \frac{c_{12}}{n^{\alpha-\varepsilon_0}}.$$

Второе слагаемое оцениваем на основании свойства 1, которому удовлетворяют полиномы $\pi_4(z)$ и $\pi_5(z)$

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{G_{1+\lambda}-\overline{G}}\int \frac{\varphi\left(\zeta, \eta+\frac{1}{2}\right) - \varphi\left(\zeta, \eta-\frac{1}{2}\right)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta\right| < 2M\,\frac{1}{4\pi}\int\limits_{G_{1+\lambda}-\overline{G}}\int \frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - z} \leqq$$

$$\leqq c_{13}\,\lambda^{1-\varepsilon_0}\log\frac{1}{\lambda}.$$

Но, очевидно

$$|\varphi(z) - f(z)| < \int\limits_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} |\varphi(z,t) - f(z)|\,dt \leqq \frac{c_8}{n^{\alpha-\varepsilon_0}}$$

так, что в области G

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Z_{1+\lambda_n}} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt - f(z) < \frac{c_8}{n^{\alpha-\varepsilon_0}} + c_{13}\,\frac{\log n}{n^{(1-\varepsilon_0)^2}} < \frac{c_{14}}{n^{\alpha-3\varepsilon_0}}.$$

Функция $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{z_{1+\lambda_n}} \dfrac{\varphi(t)}{t-z}\,dt$ аналитична в $G_{1+\lambda_n}$ и, как это следует из (5), ограничена там постоянной, не зависящей от n, поэтому можно найти полином $\pi_7(z)$ степени n так чтобы

$$\max_{z\in\overline{G}_{1+\lambda_n/2}} \left|\pi_7(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{z_{1+\lambda_n}}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt\right| \leq \frac{c_{15}}{\left(\dfrac{1+\lambda_n}{1+\frac{\lambda_n}{2}}-1\right)^{c_2}\left(\dfrac{1+\lambda_n}{1+\frac{\lambda_n}{2}}\right)^n} < \frac{c_{16}}{n}.$$

Следовательно, полином $\pi_7(z)$ удовлетворяет всем условиям леммы. Заметим, что предположение $b-a=1$ несущественно и было сделано для простоты. В случае $b-a\neq 1$ изменится лишь постоянная c_{10}, входящая в оценку множителем. Также несущественно то, что в качестве двух прямых взяты параллели оси OX, к этому случаю можно привести общий случай поворотом

После этого замечания мы можем применить лемму к случаю, когда в качестве G имеем область $\sigma_1(s+\delta)$ в качестве прямых $y=a$, $y=b$ — прямые J_s', J_s и полиномов $\pi_4(z)$, $\pi_5(z)$ — полиномы $\pi_1(z)$, $\pi_3(z)$ соответственно.

Таким образом, предполагая существование полинома $\pi_1(z)$ аппроксимирующего в $\overline{\sigma}_1\left(s+\dfrac{\delta}{2}\right)$ функцию $f(z)$ со скоростью $\mathrm{const.}\,n^{-\alpha+\varepsilon_0}$ и ограниченного в определенной окрестности $\sigma_1\left(s+\dfrac{\delta}{2}\right)$, приходим к существованию полинома $\pi_7(z)$, приближающего $f(z)$ в $\overline{\sigma}_1(s+\delta)$ со скоростью $\mathrm{const.}\,n^{-\alpha+3\varepsilon_0}$ и ограниченного в соответствующей окрестности $\overline{\sigma}_1(s+\delta)$.

Но легко видеть, что $\sigma_1(s_0)$ звездообразна относительно некоторой своей точки и для нее соответствующий полином $\pi_1(z)$ существует, то же можно утверждать и относительно $\sigma_1\left(s_0+\dfrac{\delta(s_0)}{2}\right)-\overline{\sigma}_1(s_0)$; далее разбиваем промежуток (s_0, s_1) на части, соответствующей длины:

$$s_0,\quad s'=s_0+\frac{\delta(s_0)}{2},\quad s''=s'+\frac{\delta(s')}{2},\ \ldots,\ s^{(k)}=s^{(k-1)}+\frac{\delta(s^{(k-1)})}{2}>S_1$$

и последовательно применяем описанный выше процесс усреднения к областям $\sigma_1(s_0)$, $\sigma_1(s')$, $\sigma_1(s'')$, ..., $\sigma_1(S_1)$ приходим, наконец, к полиному $\pi_8(z)$ степени n удовлетворяющему в области $\sigma_1(S_1)$ неравенству

$$|\pi_8(z)-f(z)|<\frac{c_{17}}{n^{\alpha-c_{18}\varepsilon_0}} \tag{6}$$

а в $\overline{c}_{1\lambda_n c_{19}}(S_1)$

$$|\pi_8(z)|\leq c_{20}M. \tag{7}$$

Проводя аналогичные рассуждения для каждой из компонент $D_a^{(i)}$ и имея в виду, что все они расположены на положительном расстоянии друг от друга, не зависящем от n, можем считать, что неравенства (6), (7) выполняются в части l_a области l, расположенной правее $x=a$. Также находим полином $\pi_9(z)$, приближающий $f(z)$ в части l_b области l расположенной левее $x=b$ со скоростью $c_{21}\, n^{-\alpha+c_{22}\varepsilon_0}$ и ограниченный в соответствующей окрестности l_b. Применим, наконец, процесс усреднения к областям l_a и l_b и полиномам $\pi_8(z)$ и $\pi_9(z)$.

Легко видеть, что, изменяя слегка доказательство формулы (5), можно получить для нашего случая формулу

(8)
$$\varphi(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Z_{1+c_{22}\lambda_n}}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Z_\varrho}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{d_n}\frac{\varphi\left(\zeta,\eta+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta,\eta-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\,d\xi\, d\eta$$

(d_n—область между $Z_{1+c_{22}}\lambda_n$ и Z_ϱ $(\varrho<1)$) (обозначения аналогичны обозначениям на стр. 203, расстояние между a и b положено, для простоты, равным единице). Пусть $z\in Z_{1+c_{22}\lambda_n}$; так как $|\varphi(z)-f(z)|<c_{23}\, n^{-\alpha+c_{21}\varepsilon_0}$ при $t\in Z_\varrho$ $(\varrho<1)$ то в силу аналитичности $f(z)$ в области D, имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Z_\varrho}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt\right|\leq\frac{c_{25}(\varrho)}{n^{\alpha-c_{21}\varepsilon_0}}.$$

Двойной интеграл в правой части (8) оцениваем так же, как это делалось при доказательстве леммы 4 (стр. 203). Полином $\pi_{10}(z)$ степени n находим так, чтобы

$$\max_{z\in\overline{D}}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Z_{1+c_{22}\lambda_n}}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt-\pi_{10}(z)\right|<\frac{c_{26}}{n}.$$

В результате имеем

$$\max_{z\in\overline{D}}\left|f(z)-\pi_{10}(z)\right|<\frac{c_{27}}{n^{\alpha-c_{28}\varepsilon_0}},$$

где c_{27} и c_{28} не зависят от n. Выбирая $\varepsilon_0<\frac{\varepsilon}{c_{28}}$ достаточно малым, приходим к доказательству теоремы.

Если $\omega(\delta)$ означает модуль непрерывности $f(z)$ в $\overline{D}$, то совершенно аналогично можно доказать следующее предложение.

Теорема 2. *Для любого $\varepsilon>0$ существует постоянная $c>0$ так, что*

$$\varrho_n(f,D)<c\,\omega\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right),\qquad n>n(\varepsilon).$$

Рассмотрим теперь связь между скоростью наилучшего приближения и свойствами функций при некоторых дополнительных ограничениях на гладкость границы.

Через $\gamma(\delta)$ обозначим модуль непрерывности функции $z'(s)$ ($z(s)$ — параметрическое уравнение границы, s — длина дуги Γ).

Теорема 3. *Если*

$$\int_{\varepsilon}^{c} \frac{\gamma(x)}{x}\,dx > |\log\log\varepsilon|\,|\log\log\log\varepsilon|,$$

то, вообще говоря, найдется функция $\varphi(z)$ *класса* $\mathrm{Lip}\,\alpha$ *так, что*

$$\limsup \frac{\varrho_n(\varphi, D)\,n^{\alpha}}{(\log n)^{\alpha}} = \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим область D, для которой модуль непрерывности $z'(s)$ не превосходит $\gamma(\delta)$ и в некоторой окрестности точки $z=0$

$$\Theta(r) = \pi + \gamma(r)$$

(такие области, очевидно, существуют). С помощью леммы 2 легко получить неравенство

$$d(0, 1+r) > c'\,\frac{r}{|\log r|\,|\log\log r|}.$$

Предположим теперь что для некоторой функции $f(z)$ регулярной в D и непрерывной в $\overline{D}$ существует полином $P_n(z)$ степени n так, что

$$\varrho_n(f, D) \leq \max_{z\in\overline{D}} |f(z)-P_n(z)| < \mathrm{Const}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\alpha}.$$

Оценим модуль непрерывности $f(z)$ в D — $\omega(\delta)$:

$$(**)\qquad \begin{aligned} |f(z')-f(z'')| &\leq \sum_{k=1}^{m} |P_{2^k}(z')-P_{2^{k-1}}(z')-P_{2^k}(z'')+P_{2^{k-1}}(z'')| + \\ &+ |P_1(z')-P_1(z'')| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |P_{2^k}(z')-P_{2^{k-1}}(z')-P_{2^k}(z'')+P_{2^{k-1}}(z'')|. \end{aligned}$$

Из (*) находим

$$|P'_{2^k}(z)-P'_{2^{k-1}}(z)| < \mathrm{Const}\left(\frac{k}{2^k}\right)^{\alpha}\frac{2^k}{k\log k} = \mathrm{Const}\,\frac{2^{k(1-\alpha)}}{k^{1-\alpha}\log k}.$$

Учитывая это, получаем

$$|f(z')-f(z'')| < \mathrm{Const}\left[\delta\sum_{k=2}^{m}\frac{2^{k(1-\alpha)}}{k^{1-\alpha}\log k} + \delta + \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{k^{\alpha}}{2^{k\alpha}}\right].$$

Оценивая суммы и полагая m равным целой части решения уравнения

$$2^x = \frac{x}{\delta}\log\log\log\frac{1}{\delta}$$

находим

$$(9)\qquad \omega(\delta) = \sup_{|z'-z''|\leq\delta} |f(z')-f(z'')| < \mathrm{Const}\,\frac{\delta^{\alpha}}{\log\log\log\frac{1}{\delta}}.$$

Предположим теперь, что $\varphi(z)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, однако, дополнительному условию (9) не удовлетворяет (например, $\varphi(z)=z^{\alpha}$) тогда, согласно доказанному, должно выполняться соотношение

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\varrho_n(\varphi, D)\,n^{\alpha}}{(\log n)^{\alpha}} = \infty.$$

Если, например $\gamma(r) = |\log r|^{-\lambda}$, то при $\lambda > 1$ оценка $\varrho_n < \left(\frac{\log n}{n}\right)^\alpha$ верна, если же $\lambda = 1$ или $\lambda < 1$ то она уже перестает быть справедливой в общем случае. Пусть

$$\gamma(r) = \frac{c}{|\log r| \, |\log \log r| \ldots |\log_q r|^\lambda}.$$

Теорема 4. *Если $\lambda = 1$, то, вообще говоря, для некоторых $f(z) \in \mathrm{Lip}\, \alpha$*

$$\varrho_n(f, D) > \mathrm{Const} \left(\frac{\log_q n}{n}\right)^\alpha,$$

если же $\lambda < 1$, то для некоторых $f(z) \in \mathrm{Lip}\, \alpha$, справедливо неравенство

$$\varrho_n(f, D) > \mathrm{Const} \left\{\frac{1}{n} \exp\left[\frac{1}{1-\lambda} (\log_q n)^{1-\lambda}\right]\right\}^\alpha.$$

Доказательство мы не приводим, так как оно подобно доказательству теоремы 3.

Пусть выполняется $\int\limits_0^c \frac{\gamma(x)}{x} \, dx < \infty$ и

$$\varrho_n(f, D) < \frac{\mathrm{Const}}{n^{k+\alpha}} \tag{10}$$

где k — целое, $0 < \alpha \leq 1$.

Теорема 5. *Если $\alpha < 1$, то $f^{(k)}(z) \in \mathrm{Lip}\, \alpha$ в $\overline{D}$, если же $\alpha = 1$, то это заключение, как известно, неверно уже для аналитических областей. В случае $\alpha = 1$ для того, чтобы $f^{(k)}(z)$ удовлетворяла бы условию Липшица первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \varrho_n(f, D) < \infty. \tag{11}$$

Доказательство. С помощью леммы 2 легко показать, что при условии $\int\limits_0^c \frac{\gamma(x)}{x} \, dx < \infty$ найдется постоянная c, для которой неравенство

$$d(\xi, x) > c(x - 1) \tag{12}$$

имеет место для всех граничных точек ξ. Отсюда заключаем, что

$$|P'_{2^n}(z) - P'_{2^{n-1}}(z)| \leq 2^{n+1} \varrho_{2^{n-1}}(f, D).$$

Далее поступаем точно так же, как при доказательстве соответствующего результата в вещественной области (теорема С. Н. Бернштейна). Докажем теперь вторую часть теоремы, когда $\alpha = 1$.

Условие (11) необходимо; полагая для простоты $k = 0$ рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = -(1-z) \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^{n-1}$$

в единичном круге, где $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \geqq \ldots$ произвольная последовательность монотонно убывающих чисел, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty.$$

Частичные суммы ее ряда Тейлора приближаются к ней в $|z| \leqq 1$— со скоростью α_n, однако, $f(z)$ не удовлетворяет условию Липшица первого порядка, так как для любого сколь угодно большого N можно найти целое m и $\delta < \frac{1}{m}$ так, чтобы

$$|f(1)-f(1-\delta)| \geqq \delta \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (1-\delta)^k \geqq \delta \frac{\sum\limits_1^m \alpha_k}{e} \geq \delta \frac{N}{e}.$$

Докажем достаточность условия (11). Учитывая (12), легко получить неравенство

$$|P_{2^n}^{(k)}(z') - P_{2^{n-1}}^{(k)}(z') - P_{2^n}^{(k)}(z'') + P_{2^{n-1}}^{(k)}(z'')| \leqq |z'-z''|\, 2.2^{n(k+1)} \varrho_{2^n-1}(f, D).$$

На основании (**) имеем

$$|f^{(k)}(z') - f^{(k)}(z'')| \leq c\delta \sum_{k=1}^{M} 2^{n(k+1)} \varrho_{2^n-1}(f, D) + c\delta + \sum_{M+1}^{\infty} 2^{nk} \varrho_{2^n}(f, D).$$

Выберем M, в зависимости от δ, так, чтобы

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} 2^{ik} \varrho_{2^i}(f, D) < \delta.$$

Отметим следующее предложение, на доказательстве которого мы не будем останавливаться.

Лемма. *Пусть $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \geqq \ldots$ произвольная, монотонно убывающая к нулю, последовательность чисел, а $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ — возрастающая поседовательность целых чисел. Для того, чтобы из сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ всегда следовала бы сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} n_i \alpha_{n_i}$, достаточно, чтобы существовало положительное число μ, такое, что для всех к,*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq 1 + \mu.$$

В частности, отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(k+1)} \varrho_{2^n-1}(f, D) < \infty,$$

т. е. $f^{(k)}(z)$ удовлетворяет условию Лупшица первого порядка.

Что же касается общего случая областей с гладкой границей, не удовлетворяющих условию $\int\limits_0^c \frac{\gamma(x)}{x} dx < \infty$, то для $f(z) \in \mathrm{Lip}\, \alpha$ дать оценку

$\varrho_n(f, D)$, относящуюся ко всему классу областей с гладкой границей и лучшую, нежели

$$\varrho_n(f, D) < \frac{\mathrm{Const}}{n^{\alpha-\varepsilon}}$$

нельзя, так как можно доказать следующее.

Пусть $\psi(\delta)$ — монотонная функция, убывающая к нулю при $\delta \to +0$ и при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяющая условию

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\delta^\varepsilon}{\psi(\delta)} = 0 .$$

Существует область D_1 с гладкой границей, такая, что скорость приближения $n^{-k-\alpha}$ (k — целое, $0 < \alpha < 1$) гарантирует для некоторых граничных точек ξ неравенство

$$| f^{(k)}(z') - f^{(k)}(z'') | < \mathrm{Const}\, | z' - z'' |^\alpha \psi(| z' - z'' |)$$

(z' и z'' принадлежат B_ξ (стр. 200)) и существует другая область D_2 также с гладкой границей и функция $f(z)$ так, что $\varrho_n(f, D) < n^{-k-\alpha}$, однако, для некоторых граничных точек ξ

$$\sup_{z', z'' \in B_\xi} |f^{(k)}(z') - f^{(k)}(z'')| > \mathrm{Const}\, \frac{|z' - z''|^\alpha}{\psi(|z' - z''|)} .$$

Доказательство этого утверждения подобно приведенному выше доказательству теоремы 3.

§ 2. Обратное неравенство для $\varrho_n(f, D)$.

Пусть D означает конечную область, ограниченную жордановой кривой Γ; через $d(\zeta; r)$ обозначим расстояние образа окружности $|w| = 1 + r$ при конформном отображении внешности единичного круга на дополнение к $\overline{D}$ до граничной точки ζ. Через B_ζ обозначим произвольную подобласть D обладающую только тем свойством, что отношение расстояния любой точки B_ζ до ζ к расстоянию той же точки до Γ ограничено сверху равномерно относительно всех точек B_ζ. Класс функций, регулярных в какой-либо области G, k-я производная которых удовлетворяет в $\overline{G}$ условию Липшица порядка $\alpha > 0$ обозначим $Z(G; k+\alpha)$.

Следует отметить, что под модулем непрерывности $f(z)$ в G $w(\delta)$ мы подразумеваем верхнюю грань величин $| f(z') - f(z'') |$ по всевозможным парам z', z'' принадлежащим $\overline{G}$ и таким, что z' можно соединить с z'' спрямляемой кривой, расположенной целиком в $\overline{G}$ и по длине не превосходящей δ; для некоторых областей это определение, очевидно, не совпадает с тем определением модуля непрерывности, которое дается в вещественной области; соответственно этому иной смысл, вообще говоря, вкладывается в удовлетворение условию Липшица в замкнутой области $\overline{G}$.

Теорема 6. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \varrho_n(f,D)}{\log d\left(\zeta,\frac{1}{n}\right)} = A,$$

то, при всяком $\varepsilon > 0$, $f(z) \in Z(B_\zeta; A-\varepsilon)$, *если же* $A = \infty$ *то* $f(z)$ *неограниченно диференцируема в* $\overline{B}_\zeta$.

Доказательство. Для любого целого $k > 0$ определим целое число n_k из условия

$$d\left(\zeta;\frac{1}{n_k}\right) \geqq \frac{1}{2^k} > d\left(\zeta;\frac{1}{n_k+1}\right). \tag{13}$$

Числа $\{n_k\}$ составляют, очевидно, возрастающую последовательность. Пусть z означает произвольную точку $\overline{B}_\zeta$, $r > 0$, p — некоторое целое, а $P_m(z)$ — полином степени m, наименее уклоняющийся от $f(z)$ в $\overline{D}$.

Имеем, очевидно

$$P^{(p)}_{n_k}(z) - P^{(p)}_{n_{k-1}}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{|t-z|=z} \frac{P_{n_k}(t) - P_{n_{k-1}}(t)}{(t-z)^{p-1}}\,dt. \tag{14}$$

Но из определения B_ζ следует, что существует $c_0 > 0$ так, что круг $|t-z| < c_0 d(\zeta,\varepsilon)$ содержится целиком в области $D_{1+\varepsilon}$ ограниченной внешней линией уровня $Z_{1+\varepsilon}$. Известно, что если $\max\limits_{z\in\overline{D}} |Q_n(z)| = M$, то $\max\limits_{z\in D_\varrho} |Q_n(z)| \leqq M\varrho^n$ $(\varrho > 1)$. Имея в виду, что

$$\max_{z\in\overline{D}} |P_{n_k}(z) - P_{n_{k-1}}(z)| < \varrho_{n_k}(f,D) + \varrho_{n_{k-1}}(f,D) \leqq 2\varrho_{n_{k-1}}(f,D)$$

и полагая $r = c_0 d\left(\zeta,\frac{1}{n_k}\right)$, применим это к оценке разности стоящей под интегралом в (14):

$$\begin{aligned} |P^{(p)}_{n_k}(z) - P^{(p)}_{n_{k-1}}(z)| &\leqq \frac{p!}{2\pi}\int\limits_{|t-z|=c_0 d\left(\zeta;\frac{1}{n_k}\right)} \frac{2\varrho_{n_{k-1}}(f,D)\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}}{|z-t|^{p+1}}\,dt \leqq \\ &\leqq \frac{2e}{c_0^p}\,p!\,\frac{\varrho_{n_{k-1}}(f,D)}{\left[d\left(\zeta;\frac{1}{n_k}\right)\right]^p} \leqq \frac{2^{p+1}e}{c_0^p}\,p!\,\frac{\varrho_{n_{k-1}}(f,D)}{\left[d\left(\zeta;\frac{1}{n_{k-1}}\right)\right]^p}. \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть $[a]$ означает, как обычно, целую часть a, $\{a\} = a - [a]$. Положим $p = [A-\varepsilon]$. Т. к. $A > 0$ и $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $\{A-\varepsilon\} > 0$. Из условий теоремы следует

$$|P^{(p)}_{n_k}(z) - P^{(p)}_{n_{k-1}}| < \frac{2^{p+1}e}{C_0^p}\,p!\left(d\left(\zeta,\frac{1}{n_{k-1}}\right)\right)^{\{A-\varepsilon\}} \leqq p!\,C^p\,\frac{1}{2^{k\{A-\varepsilon\}}}. \tag{16}$$

Следовательно, ряд

$$P_{n_0}^{(p)}(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(P_{n_k}^{(p)}(z)-P_{n_{k-1}}^{(p)}(z)\right) \qquad (p=[A-\varepsilon])$$

представляющий в D $f^{(p)}(z)$, равномерно сходится в $\overline{B}_{\zeta}$, т. е. $f^{(p)}(z)$ непрерывна в $\overline{B}_{\zeta}$.

Оценим ее модуль непрерывности в замкнутой области $\overline{B}_{\zeta}$. Пусть z', z'' — точки $\overline{B}_{\zeta}$. Имеем

$$\left|f^{(p)}(z')-f^{(p)}(z'')\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left|P_{n_k}^{(p)}(z')-P_{k-1}^{(p)}(z')-P_{n_k}^{(p)}(z'')+P_{n_{k-1}}^{(p)}(z'')\right|+ \tag{17}$$

$$+\left|P_{n_0}^{(p)}(z')-P_{n_0}^{(p)}(z'')\right|+\sum_{k=m+1}^{m}\left|P_{n_k}^{(p)}(z')-P_{n_{k-1}}^{(p)}(z')-P_{n_k}^{(p)}(z'')+P_{n_{k-1}}^{(p)}(z'')\right|.$$

Но общий член написанной только что суммы не превосходит

$$\max_{z\in\overline{B}_{\zeta}}\left|P_{n_k}^{(p+1)}(z)-P_{n_{k-1}}^{(p+1)}(z)\right|\int_{z'}^{z'}d\,s$$

где путь интегрирования лежит целиком в $\overline{B}_{\zeta}$. Первый сомножитель, аналогично вышеприведенному, легко оценить с помощью интеграла Коши, а относительно второго предположим, что $\int_{z'}^{z''}d\,s\leq\delta$. В результате получим

$$\left|P_{n_k}^{(p)}(z')-P_{n_{k-1}}^{(p)}(z')-P_{n_k}^{(p)}(z'')+P_{n_{k-1}}^{(p)}(z'')\right|\leq c^p\,p\,!\,\delta\,2^{k\left(1-\{A-\varepsilon\}\right)}.$$

Но

$$\left|P_{n_0}^{(p)}(z')-P_{n_0}^{(p)}(z'')\right|<c^p\,\delta \qquad (c=\mathrm{Const}).$$

Общий же член последней суммы в правой части (17) оцениваем на основании (16).

Таким образом, имеем

$$\left|f^{(p)}(z')-f^{(p)}(z'')\right|<c^p\,p\,!\left(\delta\sum_{k=1}^{m}2^{k\left(1-\{A-\varepsilon\}\right)}+\delta+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^{k\{A-\varepsilon\}}}\right).$$

Полагая теперь $m=\left[\frac{|\log\delta|}{\log 2}\right]$ и беря любые пары точек z', z'' из $\overline{B}_{\zeta}$ с соблюдением условия $\int_{z'}^{z''}d\,s\leq\delta$, получаем $\omega(\delta)<\mathrm{Const}\;\delta^{\{A-\varepsilon\}}$ где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f^{(p)}(z)$ в B_{ζ}. Следовательно, включение $f(z)\in Z(\overline{B}_{\zeta}, A-\varepsilon)$ доказано при всяком $\varepsilon>0$.

Из вышеприведенных рассуждений видно, что при $A=\infty$ $f(z)$ неограниченно диференцируема в $\overline{B}_{\zeta}$.

Следствие. Таким образом, произвольно медленная скорость приближения $\varrho_n(f\ D)$ обеспечивает неограниченную диференцируемость аппроксимируемой функции в некоторых граничных точках, если только область расположена соответствующим образом около этих точек.

Цитированная литература.

[1] М. В. Келдыш, О представлении функций комплексного переменного рядами полиномов в замкнутых областях, *Мат. сборник*, **16** (1945), стр. 249—257.

[2] S. E. Warschawski, On conformal mapping of infinite strips, *Transactions American Math. Society*, **51** (1942), p. 280—335.

(Поступило 9/XI 1949 г.)

Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications.

Par JACQUES DIXMIER à Paris.

Introduction.

La notion de moyenne invariante dans un groupe a été considérée par J. VON NEUMANN [13]. Cette question est exposée (pour les semi-groupes) au n° 1 de ce travail. Au n° 2, on donne des exemples de groupes sur lesquels *il n'existe pas de moyenne invariante.* Au n° 3, *on envisage, avec* ALAOGLU et BIRKHOFF [1], les moyennes de fonctions prenant leurs valeurs dans un espace de Banach.

Une application à la théorie ergodique est exposée au n° 6, d'après [1]. Une autre application, concernant les mesures invariantes dans un espace où opère un semi-groupe de transformations, est exposée au n° 7, d'après [13].

Si le semi-groupe considéré est le semi-groupe additif des nombres entiers $\geqq 0$, ou des nombres réels $\geqq 0$, on obtient la notion de limite généralisée (cf. BANACH [3]). En utilisant cette notion, BÉLA SZ.-NAGY a démontré [16] que tout opérateur V d'un espace de Hilbert, tel que $\|V^n\| \leqq K < +\infty$ pour $-\infty < n < +\infty$, est semblable à un opérateur unitaire, et que tout groupe à un paramètre d'opérateurs uniformément bornés est semblable à un groupe d'opérateurs unitaires. Sa méthode s'étend immédiatement aux représentations des groupes sur lesquels existe une moyenne invariante. Cette application est exposée au n° 5 avec quelques conséquences pour des problèmes de géométrie hilbertienne. C'est d'ailleurs la lecture de [16] qui est à l'origine du présent mémoire.

On verra, par les détails donnés au début de chaque numéro, que ce mémoire contient beaucoup plus de résultats connus que de résultats nouveaux. Mais il est peut-être intéressant de les grouper. D'autre part, je pense avoir simplifié, à diverses reprises, les anciennes démonstrations.

Je remercie M. BÉLA SZ.-NAGY, qui, par de nombreux conseils, m'a permis d'améliorer grandement ce mémoire.

1. Moyennes invariantes dans les semi-groupes.

Dans ce n°, on définit et on étudie les moyennes invariantes pour un semi-groupe topologique. Le théorème 1 est nouveau. Le théorème 2 est dû (pour les groupes discrets) à J. VON NEUMANN ([13], pp. 79—80); la partie α) résulte aussi d'un théorème de MARKOV [12], démontré aussi par KAKUTANI [6] et KREIN [7]. La démonstration donnée ici est nouvelle.

Soit G un *semi-groupe topologique*, c'est-à-dire un espace topologique dans lequel une multiplication xy est définie qui est associative et continue par rapport à l'ensemble des facteurs x, y. Soit $C = C(G)$ l'espace de Banach des fonctions *réelles continues bornées* sur G, la norme de $f \in C$ étant $\|f\| = \sup\limits_{x \in G} |f(x)|$. (Si G est discret, C est l'ensemble des fonctions réelles bornées quelconques sur G.)

Une fonctionnelle linéaire φ sur C est dite *positive* lorsque $\varphi(f) \geqq 0$ pour $f(x) \geqq 0$. Une telle fonctionnelle est bornée, de norme $\varphi(1)$.

Une fonctionnelle linéaire positive φ telle que $\varphi(1) = 1$ s'appelle une *moyenne*. Elle est dite *invariante à gauche* si $\varphi({}_sf) = \varphi(f)$ pour chaque $s \in G$, ${}_sf(x)$ désignant la fonction $f(sx)$. Les moyennes *invariantes à droite*, et les moyennes invariantes à gauche et à droite (ou *invariantes* tout court) se définissent d'une manière analogue: $\varphi(f_s) = \varphi(f)$, resp. $\varphi({}_sf_{s'}) = \varphi(f)$, où $f_s(x) = f(xs)$ et ${}_sf_{s'}(x) = f(sxs')$.[1])

Lorsque G est un groupe, on voit immédiatement que, si $\varphi(f)$ est une moyenne invariante à gauche, alors $\psi(f) = \varphi(\tilde{f})$, où $\tilde{f}(x) = f(x^{-1})$, est une moyenne invariante à droite, et inversement.

G étant encore un groupe, si on restreint C à l'ensemble des fonctions presque-périodiques [14] ou plus généralement ergodiques [5], on sait qu'il existe toujours une moyenne invariante. Mais le fait de considérer l'ensemble de *toutes* les fonctions continues modifie essentiellement le problème, comme on le verra.

Théorème 1. *Pour que le semi-groupe G possède une moyenne invariante à gauche il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété*

---

[1]) Soit, dans le dual de l'espace de Banach C, Ω l'ensemble des fonctionnelles χ telles que $\chi(fg) = \chi(f)\chi(g)$, $\chi(1) = 1$; muni de sa topologie faible, Ω est le "spectre" de l'algèbre C; c'est un espace compact; on peut identifier canoniquement G à un sous-espace partout dense de Ω, et toute fonction de C est prolongeable de manière unique en une fonction continue sur Ω (si G est complètement régulier). Les translations de G sont prolongeables à Ω, de sorte que G peut être considéré comme opérant, soit à droite, soit à gauche, sur Ω. Le fait pour G de posséder une moyenne invariante à gauche, par exemple, signifie qu'il existe sur l'ensemble C Ω) des fonctions continues sur Ω une moyenne invariante à gauche par G. S'il en est ainsi, et si Ω' est un espace compact quelconque sur lequel G opère à gauche, il existe sur $C(\Omega')$ une moyenne invariante par G, d'après notre théorème 8. (Cette remarque m'a été suggérée par R. GODEMENT.)

(P_g): *Si $f^1, f^2, \ldots, f^n$ sont des éléments de C, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ des éléments de G, et a un nombre réel, tels que $f^1 - {}_{s_1}f^1 + f^2 - {}_{s_2}f^2 + \ldots + f^n - {}_{s_n}f^n \geqq a$, on a: $a \leqq 0$.*

Pour que G possède une moyenne invariante, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété

(P): *Si $f^1, f^2, \ldots, f^n$ sont des éléments de C, $s_1, s_2, \ldots, s_n, s'_1, s'_2, \ldots, s'_n$ des éléments de G, et a un nombre réel, tels que $f^1 - {}_{s_1}f^1_{s'_1} + f^2 - {}_{s_2}f^2_{s'_2} + \ldots + f^n - {}_{s_n}f^n_{s'_n} \geqq a$, on a: $a \leqq 0$.*

Démonstration. Lorsque G possède la moyenne invariante à gauche φ, alors il résulte de l'inégalité $f^1 - {}_{s_1}f^1 + \ldots + f^n - {}_{s_n}f^n \geqq a$ que

$$a = a\varphi(1) = \varphi(a) \leqq \sum_{i=1}^{n} [\varphi(f^i) - \varphi({}_{s_i}f^i)] = 0,$$

donc G a la propriété (P_g).

Supposons inversement que G jouit de la propriété (P_g) Soit $E \subset C$ l'ensemble des éléments de la forme $\sum_{i=1}^{n} (f^i - {}_{s_i}f^i)$; E est un sous-espace vectoriel de C. Soit $K \subset C$ l'ensemble des f tels que $\inf_{x \in G} f(x) > 0$. K est convexe et ouvert. La propriété (P_g) veut dire que $E \cap K$ est vide. D'après le théorème de Hahn-Banach tel qu'il est énoncé dans [4], il existe alors un hyperplan E' [2]), tel que $E' \supset E$, $E' \cap K = \Theta$. Soit ψ une fonctionnelle $\neq 0$ s'annulant sur E'. Le signe de ψ est constant sur K. Pour λ bien choisi, on a donc $\lambda\psi(1) = 1$, et $\lambda\psi(f) > 0$ pour $f \in K$, donc par continuité $\lambda\psi(f) \geqq 0$ pour $f \geqq 0$. Alors $\varphi = \lambda\psi$ est une moyenne, et φ s'annule sur E, ce qui prouve son invariance à gauche.

La proposition concernant la propriété (P) se démontre d'une manière analogue.

Théorème 2. α) *Tout semi-groupe abélien possède une moyenne invariante.*

β) *Tout groupe compact possède une moyenne invariante.*

γ) *Soit H un sous-semi groupe distingué de G [3]). Si H, considéré comme sous-semi-groupe topologique de G, possède une moyenne invariante à gauche (resp. invariante), et si G/H, considéré comme semi-groupe discret, possède une moyenne invariante à gauche (resp. invariante), alors G possède une moyenne invariante à gauche (resp. invariante).*

---

[2]) C'est-à-dire un sous-espace vectoriel de C tel que l'espace quotient C/E' soit de dimension 1.

[3]) Nous adopterons par exemple les définitions suivantes. Soit H un sous-semi-groupe de G. Etant donnés deux éléments x, y de G, nous écrirons $x \approx y$ s'il existe des éléments $x', y' \in H$ tels que $xx' = yy'$; nous écrirons $x \sim y$ s'il existe des éléments $s, t, \ldots, u$ de G tels que $x \approx s \approx t \approx \ldots \approx u \approx y$. On voit aisément que $x \sim y$ est une relation d'équi-

δ) Soit (H_α) une famille de sous-semi-groupes de G filtrante croissante par inclusion, et telle que $G = \bigcup\limits_\alpha H_\alpha$. Si tous les H_α, considérés comme sous-semi-groupes topologiques de G, possèdent des moyennes invariantes à gauche (resp. invariantes), alors G possède une moyenne invariante à gauche (resp. invariante).

Démonstration. Supposons G abélien. Soient $f^1, f^2, \ldots, f^n$ des éléments de C, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ des éléments de G, et a un nombre réel tels que $f^1 - {}_{s_1}f^1 + \ldots + f^n - {}_{s_n}f^n \geqq a$. Pour tout entier $p \geqq 0$, désignons par A_p l'ensemble des éléments de G de la forme $s_1^{\lambda_1} s_2^{\lambda_2} \ldots s_n^{\lambda_n}$ où $1 \leqq \lambda_i \leqq p$ (λ_i entier). Si $\mu(A)$ désigne le nombre d'éléments d'un ensemble A, on a $\mu(A_p) \leqq p^n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un p tel que $\mu(A_{p+1}) < (1+\varepsilon)\mu(A_p)$. (En effet, l'inégalité $\mu(A_{p+1}) \geqq (1+\varepsilon)\mu(A_p)$ pour tout p entrainerait $\mu(A_p) \geqq (1+\varepsilon)^{p-1}\mu(A_1)$, ce qui est contradictoire à $\mu(A_p) \leqq p^n$.) Si p est ainsi choisi, on a :

$$a\mu(A_p) \leqq \sum_{x \in A_p} [f^1(x) - {}_{s_1}f^1(x) + \ldots + f^n(x) - {}_{s_n}f^n(x)] =$$
$$= \sum_{x \in A_p} f^1(x) - \sum_{x \in s_1 A_p} f^1(x) + \ldots + \sum_{x \in A_p} f^n(x) - \sum_{x \in s_n A_p} f^n(x) \leqq$$
$$\leqq \sum_{x \in A_p - s_1 A_p} |f^1(x)| + \sum_{x \in s_1 A_p - A_p} |f^1(x)| + \ldots + \sum_{x \in A_p - s_n A_p} |f^n(x)| + \sum_{x \in s_n A_p - A_p} |f^n(x)|,$$

d'où, en désignant par M une borne supérieure commune des $|f^i(x)|$, en remarquant que $s_i A_p \subset A_{p+1}$, et que $\mu(s_i A_p - A_p) = \mu(A_p - s_i A_p)$, on obtient que $a\mu(A_p) \leqq 2nM\mu(A_{p+1} - A_p)$ ou $a \leqq 2nM\varepsilon$, et, comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, $a \leqq 0$; ceci, avec le théorème 1, prouve l'existence d'une moyenne invariante à gauche, donc invariante puisque G est abélien.

Si G est un groupe compact, l'intégrale de Haar est une moyenne invariante [15].

Prouvons maintenant γ) dans le cas des moyennes invariantes à gauche. Soit ψ (resp. ω) une moyenne invariante à gauche pour H (resp. G/H). Soit $f \in \mathcal{C}(G)$. Soient x', x'' deux éléments de G tels que $x' \approx x''$. On a : $x'y' = x''y''$, où y', y'' sont des éléments de H. Donc :

$$\psi({}_{x''}f) = \psi({}_{y''}({}_{x''}f)) = \psi({}_{x''y''}f) = \psi({}_{x'y'}f) = \psi({}_{y'}({}_{x'}f)) = \psi({}_{x'}f)$$

les fonctions considérées étant restreintes à H (et continues bornées sur H). Par suite, la relation $x' \sim x''$ entraîne aussi $\psi({}_{x''}f) = \psi({}_{x'}f)$. Nous pouvons donc poser : $\psi({}_{x'}f) = \bar{f}(x)$, où x est la classe de x' dans G/H, et $\bar{f}$ est une fonction bornée sur G/H. Posons enfin : $\omega(\bar{f}) = \varphi(f)$. La fonctionnelle φ est

---

valence, et nous appellerons classes à gauche (suivant H) les classes d'équivalence correspondantes. On définit de même les classes à droite. Si les classes à gauche et à droite coïncident, H sera dit *distingué*. Alors, on vérifie aussitôt que les relations $x \sim y$, $x_1 \sim y_1$ entrainent $xx_1 \sim yy_1$, de sorte que l'ensemble des classes d'équivalence forme un semi-groupe que nous noterons G/H. Si G est un groupe et H un sous-groupe, on retrouve les notions classiques de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

évidemment une moyenne. D'ailleurs, si $t' \in G$, et si $t \in G/H$ est la classe de t', on a:

$$\overline{{}_{t'}f}(x) = \psi({}_{x'}({}_{t'}f)) = \psi({}_{t'x'}f) = \bar{f}(tx) = {}_t\bar{f}(x),$$

donc $\omega(\overline{{}_{t'}f}) = \omega(\bar{f})$, $\varphi({}_{t'}f) = \varphi(f)$.

Prouvons δ) dans le cas des moyennes invariantes à gauche. Soient $f^1, f^2, \ldots, f^n$ des éléments de $C(G)$, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ des éléments de G, et a un nombre réel, tels que $f^1 - {}_{s_1}f^1 + \ldots + f^n - {}_{s_n}f^n \geqq a$. Il existe un α tel que tous les s_i soient dans H_α. Alors, comme H_α vérifie (P_g) on a: $a \leqq 0$. Donc G vérifie (P_g).

Le théorème 2 permet, sachant qu'il existe des moyennes invariantes sur certains semi-groupes, de conclure qu'il en existe aussi sur des semi-groupes "plus grands". Le théorème suivant joue un rôle inverse.

Théorème 3. α) *Si le semi-groupe G possède une moyenne invariante à gauche (resp. invariante), il en est de même pour tout semi-groupe quotient de G.*

β) *Soient G un groupe, G' un sous-groupe, $x \to x^*$ l'application continue de G dans l'espace homogène G/G' des classes à droite suivant G'. Supposons qu'il existe une application continue $y \to \tilde{y}$ de G/G' dans G telle que $\tilde{y} \in y$ (ce qui est toujours le cas si G est discret). Alors, si G possède une moyenne invariante à gauche, il en est de même de G'.*

Démonstration. Prouvons α) pour les moyennes invariantes à gauche. Soient φ une moyenne invariante à gauche sur G, H un sous-semi-groupe distingué de G. $F(x)$ étant une fonction continue bornée sur G/H, la fonction $f(x') = F(x)$ (où $x' \in G$, x étant la classe de x' suivant H) est continue bornée sur G (on suppose G/H muni d'une topologie telle que l'application $x' \to x$ de G sur G/H est continue). Posons: $\psi(F) = \varphi(f)$. On vérifie aussitôt que ψ est une moyenne invariante à gauche sur G/H.

Prouvons β). Soit F une fonction continue bornée sur G'. Définissons une fonction continue bornée f sur G en posant $f(x) = F(x\tilde{x}^{*-1})$. Puis, posons: $\psi(F) = \varphi(f)$, où φ est une moyenne invariante à gauche pour G. On vérifie aussitôt que ψ est une moyenne invariante à gauche pour G'.

2. Exemples de groupes sans moyennes invariantes.

Voici maintenant une classe étendue de groupes *ne possédant pas* de moyenne invariante à gauche. Le cas du groupe libre à deux générateurs est implicitement traité dans [13].

Théorème 4. *Si G est un groupe discret engendré par une famille d'éléments $(s_i)_{i \in I}$, avec des relations de la forme $s_i^{r_i} = e$[4]) (i parcourant un sous-ensemble J de I), G ne possède pas de moyenne invariante à gauche,*

[4]) e désigne l'élément neutre de G.

sauf si I ne contient qu'un élément, ou si, I contenant deux éléments, les relations sont de la forme $s_1^2=s_2^2=e$; dans ces deux cas particuliers, G possède une moyenne invariante.

Démonstration. Envisageons d'abord les cas particuliers du théorème. Si I contient un seul élément, G est abélien, donc possède une moyenne invariante (théorème 2). Si I contient deux éléments s_1, s_2, et si les relations sont de la forme $s_1^2=s_2^2=e$, les éléments de G peuvent être mis en tableau de la manière suivante:

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots s_2s_1s_2s_1s_2 & s_2s_1s_2 & s_2 & s_1 & s_1s_2s_1 & s_1s_2s_1s_2s_1 \ldots \\ \ldots\ldots s_2s_1s_2s_1 & s_2s_1 & e & s_1s_2 & s_1s_2s_1s_2 \ldots\ldots \end{array}$$

Les éléments de la deuxième ligne forment un sous-groupe distingué abélien et le groupe quotient correspondant est d'ordre 2, donc G possède une moyenne invariante (théorème 2).

Supposons maintenant G discret engendré par un famille $(s_i)_{i\in I}$ avec les relations $s_i^{r_i}=e$ pour $i\in J$, les deux cas précédents étant écartés. Tout $x\in G$, $x\neq e$, se représente canoniquement sous la forme $x=s_{i_1}^{\lambda_1}s_{i_2}^{\lambda_2}\ldots s_{i_n}^{\lambda_n}$, où $i_p\neq i_{p+1}$ et où λ_p est un entier quelconque $\neq 0$ si $i_p\in I-J$, et un entier de l'intervalle $[1, r_{i_p}-1]$ si $i_p\in J$. Posons alors: $s_{i_1}=s(x)$, $\lambda_1=\lambda(x)$. Soit C_i' l'ensemble des x tels que $s(x)\neq s_i$, et $C_i=C_i'\cup\{e\}$; $s_i^kC_i$ (où $k\neq 0$ si $i\in I-J$, et $k\in[1, r_i-1]$ si $i\in J$) est l'ensemble des x tels que $s(x)=s_i$, $\lambda(x)=k$. Si alors I comprend au moins trois éléments, soient s_1, s_2, s_3 trois distincts des s_i et considérons les ensembles:

$$A_1=C_1,\ A_2=C_2,\ A_3=C_3,\ B_1=s_1C_1,\ B_2=s_2C_2,\ B_3=s_3C_3.$$

Pour tout $x\in G$, le nombre d'ensembles A_i contenant x est strictement supérieur au nombre d'ensembles B_i contenant x. Les fonctions caractéristiques de ces ensembles mettent donc (P_g) en défaut. Supposons enfin que G est engendré par deux éléments s_1, s_2 avec éventuellement des relations $s_1^{r_1}=e$, $s_2^{r_2}=e$, mais par exemple $s_1^2\neq e$. Considérons les ensembles:

$$A_1=A_3=A_5=A_7=A_9=C_1,\quad A_2=A_4=A_6=A_8=C_2,$$
$$B_1=B_5=B_9=s_1C_1,\quad B_3=B_7=s_1^2C_1,\quad B_2=B_4=B_6=B_8=s_2C_2.$$

On a: $e\in A_1, A_2, \ldots, A_9$; $s_1\in A_2, A_4, A_6, A_8, B_1, B_5, B_9$;

$s_1^2\in A_2, A_4, A_6, A_8, B_3, B_7$; $s_2\in A_1, A_3, A_5, A_7, A_9, B_2, B_4, B_6, B_8$.

Si $s(x)=s_1$, $\lambda(x)\neq 1, 2$, $x\in A_2, A_4, A_6, A_8$.
Si $s(x)=s_2$, $\lambda(x)\neq 1$, $x\in A_1, A_3, A_5, A_7, A_9$.

On voit encore que G n'a pas la propriété (P_g).

Le plus simple de ces groupes est le groupe engendré par deux éléments s_1, s_2, avec les relations $s_1^2=s_2^3=e$, c'est-à-dire le *groupe modulaire arithmétique*.

D'après [13], le groupe G_n des rotations autour d'un point dans l'espace euclidien à n dimensions contient un sous-groupe libre engendré par deux éléments, pour $n \geqq 3$. D'après les théorèmes 3 et 4, G_n, *considéré comme groupe discret,* ne possède pas de moyenne invariante à gauche pour $n \geqq 3$. Par contre, muni de sa topologie habituelle, G_n est compact donc possède une moyenne invariante.

3. Extension de la notion de moyenne invariante.

Le théorème 5 est dû essentiellement à ALAOGLU et BIRKHOFF [1].

Soient G un semi-groupe topologique, $\mathfrak{B}$ un espace de Banach réel, $\mathfrak{B}'$ son dual, $\mathfrak{B}''$ son bidual. Soit $C_{\mathfrak{B}} = C_{\mathfrak{B}}(G)$ (resp. $C_{\mathfrak{B}'} = C_{\mathfrak{B}'}(G)$) l'espace des fonctions $f(x)$, définies pour $x \in G$, *à valeurs dans* $\mathfrak{B}$ *(resp.* $\mathfrak{B}'$*), bornées en norme, et faiblement continues,* c'est-à-dire telles que, pour tout $g \in \mathfrak{B}'$ (resp. $\mathfrak{B}$), $(f(x), g)$ soit une fonction continue de x (à valeurs réelles). Avec la norme $\|f\| = \sup\limits_{x \in G} \|f(x)\|$, $C_{\mathfrak{B}}$ et $C_{\mathfrak{B}'}$ sont des espaces de Banach réels. Nous considérons aussi *des sous-espaces vectoriels* $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ *de* $C_{\mathfrak{B}}$ tels que, si $f \in \tilde{C}_{\mathfrak{B}}$, alors *a*) ${}_s f_{s'} \in \tilde{C}_{\mathfrak{B}}$; *b*) l'ensemble convexe fermé[5]) engendré dans $\mathfrak{B}$ par les valeurs de $f(x)$, $x \in G$, est *faiblement compact.*

Théorème 5. *Si G possède une moyenne invariante à gauche, il existe une application linéaire continue Φ de $C_{\mathfrak{B}'}$ (resp. $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$) dans $\mathfrak{B}'$ (resp. $\mathfrak{B}$), telle que α) $\Phi(f)$ appartient à l'ensemble convexe faiblement fermé engendré par les valeurs de $f(x)$, β) $\Phi({}_s f) = \Phi(f)$.*

Des faits analogues subsistent si G possède une moyenne invariante à droite ou une moyenne invariante à gauche et à droite.

Démonstration. Il suffit d'envisager le cas d'une mesure invariante à gauche φ. Prenons d'abord le cas de $\mathfrak{B}'$ et $C_{\mathfrak{B}'}$. Soit $f \in C_{\mathfrak{B}'}$. La fonction $(f(x), g)$ est, pour tout $g \in \mathfrak{B}$, une fonction de C. Le nombre $\varphi[(f(x), g)]$, est une fonctionnelle en g, qui est évidemment linéaire et bornée. Il existe donc un élément unique $\Phi(f)$ de $\mathfrak{B}'$ tel que:

$$(1) \qquad (\Phi(f), g) = \varphi[(f(x), g)]$$

et il est immédiat que Φ est linéaire et bornée. Prouvons α. D'après [8], il suffit de montrer que l'hypothèse $(f(x), g) \geqq \lambda$ pour $x \in G$ entraîne $(\Phi(f), g) \geqq \lambda$. Or, ceci résulte aussitôt de (1) et des propriétés de φ. Enfin on a

$$(\Phi({}_s f), g) = \varphi[{}_s f(x), g)] = \varphi[(f(x), g)] = (\Phi(f), g),$$

d'où $\Phi({}_s f) = \Phi(f)$. Si φ est invariante aussi à droite, il en est de même de Φ.

---

[5]) Rappelons que, dans un espace de Banach $\mathfrak{B}$, les notions d'ensembles convexes (en particulier de sous-espaces vectoriels) fortement et faiblement fermés coïncident (cf. par exemple [2]); ici, et plusieurs fois dans la suite, il est donc inutile de préciser dans quel sens l'ensemble est fermé. Il n'en est pas de même dans le dual $\mathfrak{B}'$ de $\mathfrak{B}$, mais on a alors la propriété que les ensembles bornés faiblement fermés sont faiblement compacts (cf. par exemple [4]).

Faisons maintenant jouer à $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{B}''$ le rôle précédemment tenu par $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$. On voit qu'il existe une application linéaire continue Φ_1 de $C_{\mathfrak{B}''}$ dans $\mathfrak{B}''$ avec certaines propriétés. Soit Φ la restriction de Φ_1 à $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ (noter que $C_{\mathfrak{B}}$ donc $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ peut être identifié canoniquement à un sous-espace de $C_{\mathfrak{B}''}$). Φ est une application linéaire continue de $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ dans $\mathfrak{B}''$, avec la propriété β) du théorème. Si $f \in \tilde{C}_{\mathfrak{B}}$, $\Phi(f) = \Phi_1(f)$ appartient, on l'a vu, à l'ensemble convexe faiblement fermé engendré dans $\mathfrak{B}''$ par les valeurs de $f(x)$. Mais, d'après la définition de $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$, cet ensemble est contenu dans $\mathfrak{B}$. Ainsi, Φ est une application de $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ dans $\mathfrak{B}$ avec la propriété α) du théorème.

Si $\mathfrak{B}$ est *réflexif*, $\mathfrak{B}$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{B}''$, de sorte qu'on peut prendre $\tilde{C}_{\mathfrak{B}} = C_{\mathfrak{B}}$.

4. Remarques diverses.

1. Au lieu de prendre pour C, au nº 1, l'espace des fonctions *réelles* continues bornées, on pourrait prendre l'espace des fonctions *complexes* continues bornées. La propriété (P_g) (par exemple) entraîne l'existence sur cet espace d'une fonctionnelle φ^c ayant des propriétés identiques à celles de φ, avec de plus $\varphi^c(\bar{f}) = \overline{\varphi^c(f)}$. De même, on peut, au nº 3, remplacer les espaces de Banach réels par des espaces de Banach complexes, en considérant l'espace de Banach réel sous-jacent à un espace de Banach complexe.

2. On peut aussi prendre pour C l'ensemble de *toutes les fonctions bornées* sur G, avec la norme $\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|$. Mais ceci revient simplement à considérer G comme discret (c'est-à-dire sans topologie), et on retombe donc sur un cas particulier du cas étudié. Par exemple, si G est un semi-groupe abélien (éventuellement muni d'une topologie quelconque, mais ceci n'a aucune importance) il existe pour l'ensemble des fonctions bornées une moyenne invariante.

3. Si G est un groupe localement compact, on peut considérer l'espace des *fonctions réelles mesurables* (pour la mesure de Haar μ invariante à gauche) bornées, avec la norme $\|f\| = \text{ess. sup.}_{x \in G} |f(x)|$. Le théorème 1 s'étend immédiatement (en remplaçant (P_g) par une propriété (P'_g) dont l'énoncé est évident) et on obtient sans peine les résultats suivants, que nous énonçons sans démonstration :

a) G jouit de la propriété (P'_g) si et seulement si G possède la propriété suivante : $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ étant des parties mesurables de G, A_i et B_i se déduisant l'un de l'autre par une translation à gauche (dépendant de i), le nombre d'ensembles B_i contenant un $x \in G$ est au moins égal au nombre d'ensembles A_i contenant x pour tous les x d'un ensemble de mesure > 0.

b) Pour que G possède la propriété (P'_g), la condition suivante est suffisante: pour tout système fini d'éléments de G, $s_1, s_2, \ldots, s_n$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie A de G, mesurable et de mesure finie > 0, telle que $\mu(s_i A - A) \leqq \varepsilon \mu(A)$ pour $1 \leqq i \leqq n$ (cette propriété est vérifiée si G possède un sous-groupe compact H tel que G/H soit abélien).

Quand (P'_g) est vérifiée, la fonctionnelle φ prend la même valeur pour deux fonctions égales presque-partout, ce qui précise un peu les propriétés connues des limites généralisées dans le cas du groupe des nombres réels par exemple (mais φ n'existe alors que pour les fonctions mesurables).

5. Applications aux représentations des groupes.

Théorème 6. *Si le groupe G possède une moyenne invariante à droite φ, toute représentation fortement continue et bornée de G dans un espace de Hilbert est semblable à une représentation unitaire.*

Démonstration. Elle est calquée sur celle de Sz.-Nagy [16].

Une représentation fortement continue et bornée de G dans un espace de Hilbert H, par exemple complexe, est une application $s \to V_s$ de G dans l'ensemble des applications linéaires bicontinues de H sur H, telle que: α) $V_{st^{-1}} = V_s V_t^{-1}$, β) $K = \sup\limits_{s \in G} \|V_s\| < +\infty$, γ) $V_s f$ dépend continûment de s (pour la topologie forte de H), quel que soit $f \in H$.

Pour $f \in H$, $g \in H$, posons $(f, g)_1 = \varphi[(V_s f, V_s g)]$.

Il est immédiat que $(f, g)_1$ dépend linéairement de f, et que $(f, g)_1 = \overline{(g, f)}_1$. On a de plus:

$$K^{-2}\|f\|^2 \leqq \inf_{s \in G} \|V_s f\|^2 \leqq \varphi(\|V_s f\|^2) = (f, f)_1 \leqq \sup_{s \in G} \|V_s f\|^2 \leqq K^2 \|f\|^2,$$

donc il existe, comme on sait, un opérateur self-adjoint bicontinu A de H tel que:

$$\varphi[(V_s f, V_s g)] = (f, g)_1 = (Af, Ag),$$

d'où:

$$\|A V_{s_0} A^{-1} f\|^2 = \varphi(\|V_s V_{s_0} A^{-1} f\|^2) = \varphi(\|V_s A^{-1} f\|^2) = \|f\|^2,$$

quel que soit $f \in H$, ce qui prouve que $A V_{s_0} A^{-1}$ est unitaire.

Problèmes. Est-ce que toute représentation bornée d'un groupe quelconque dans H est semblable à une représentation unitaire? Est-ce que, au contraire, cette propriété équivalente à l'existence d'une moyenne invariante à droite?

On pourrait déjà étudier cette question pour le groupe modulaire arithmétique qui, on l'a vu, ne possède pas la propriété (P_g).

Remarquons à ce sujet que toute représentation bornée d'un groupe G dans un espace de Banach $\mathfrak{B}$ est semblable à une représentation par des opérateurs isométriques dans un autre espace de Banach $\mathfrak{C}$. En effet

$\|x\|_1 = \sup \|V_s x\|$ est une norme sur $\mathfrak{B}$ équivalente à $\|x\|$, et définit donc un espace de Banach $\mathfrak{C}$ avec une application biunivoque et bicontinue de $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{C}$. Les V_s sont évidemment isométriques dans $\mathfrak{C}$.

Cas particuliers:

a) Soit V une application linéaire biunivoque et bicontinue de H sur H, telle que $\sup\limits_{-\infty<n<+\infty} \|V^n\| < +\infty$. L'application $n \to V^n$ constitue une représentation bornée du groupe abélien discret des entiers rationnels. Donc V est semblable à un opérateur unitaire.

De même, si V_s $(-\infty < s < +\infty)$ est un groupe à un paramètre d'applications linéaires biunivoques et bicontinues de H sur H uniformément bornées, ce groupe est semblable à un groupe d'opérateurs unitaires.

Ces deux applications sont celles que Sz.-Nagy avait en vue dans [16]. La première notamment met en évidence la structure des opérateurs considérés par Lorch [9], dans le cas d'un espace de Hilbert. Dans le cas des espaces de Banach quelconques, une de nos remarques antérieures prouve qu'un opérateur V tel que $\sup\limits_{-\infty<n<+\infty} \|V^n\| < +\infty$ est semblable à un opérateur isométrique (mais ceci ne donne aucun renseignement sur la structure de ces opérateurs). Remarquons enfin que si $s \to V_s$ est une représentation bornée d'un groupe quelconque dans un espace de Hilbert, chaque opérateur de la représentation est semblable à un opérateur unitaire, puisque les opérateurs $V_s^n = V_{s^n}$ sont uniformément bornés.

b) Soit S un opérateur biunivoque et bicontinu de H tel que $S^2 = 1$. S est une "symétrie oblique", c'est-à-dire qu'il existe deux variétés linéaires fermées V, W, avec $V \cap W = 0$, $V + W = H$, $Sx = x$ pour $x \in V$, $Sx = -x$ pour $x \in W$. S est unitaire si et seulement si V et W sont orthogonales. Soit S' une autre symétrie oblique, V' et W' les variétés correspondantes. Supposons que les produits $(SS')^n$ $(-\infty < n < +\infty)$ sont uniformément bornés; il en est alors de même des opérateurs du groupe engendré par S et S'. Ce groupe constitue alors une représentation bornée d'un des groupes exceptionnels du théorème 4. Donc ce groupe est semblable à un groupe d'opérateurs unitaires; autrement dit, il existe une application linéaire L biunivoque et bicontinue de H sur H telle que $L(V)$ et $L(W)$ d'une part, $L(V')$ et $L(W')$ d'autre part, soient complètement orthogonales.

c) Soit I un ensemble abstrait. Soit $\mathfrak{P}$ un ensemble de parties de I contenant la partie vide Θ et la partie pleine I, tel que, si ω et ω' appartiennent à $\mathfrak{P}$, il en est de même de $\omega \cap \omega$, $\omega \cup \omega'$, $\omega - \omega'$.

Soit, dans H, une famille $\{E_\omega\}$ d'opérateurs *bornés idempotents* $(E_\omega^2 = E_\omega)$ définis pour $\omega \in \mathfrak{P}$. Faisons sur cette famille les hypothèses suivantes:

$$E_{\omega_1} \cdot E_{\omega_2} = E_{\omega_1 \cap \omega_2},\ E_{\omega_1} + E_{\omega_2} = E_{\omega_1 \cup \omega_2} \text{ si } \omega_1 \cap \omega_2 = \Theta,\ E_\Theta = 0,\ E_I = 1,$$
$$\sup \|E_\omega\| < +\infty \quad (\omega \in P).$$

Alors il existe une famille de projecteurs semblable à la famille d'opérateurs donnés. En effet, considérons les opérateurs $2E_\omega - 1$ $(\omega \in \mathfrak{S})$. Ils sont uniformément bornés, et on a:

$$(2E_\omega - 1)^2 = 1 \text{ et } (2E_\omega - 1)(2E_{\omega'} - 1) = 2E_{\omega''} - 1$$

où $\omega'' = \omega \cap \omega' + (I - \omega) \cap (I - \omega')$; donc ils forment un groupe abélien. Il existe alors une application A linéaire biunivoque et bicontinue de H sur H telle que $A(2E_\omega - 1)A^{-1}$ soit unitaire, donc une symétrie. Alors, $AE_\omega A^{-1}$ est un projecteur (orthogonal).

On voit ainsi que certaines familles d'idempotents mises par LORCH [10] à la base d'un "calcul opérationnel" dans les espaces de Banach réflexifs, et appelées par lui *lattices bornées,* se ramènent aux classiques décompositions de l'unité dans le cas de l'espace de Hilbert.

d) Soit dans H une famille de vecteurs $(\varphi_i)_{i\in I}$ telle que 1) $0 < \inf_{i\in I} \|\varphi_i\| \leq \leq \sup_{i\in I} \|\varphi_i\| < +\infty$, 2) si J et J' sont deux parties complémentaires de I, l'une ou l'autre *finie,* on a pour les variétés linéaires fermées V_J et $V_{J'}$ sous-tendue respectivement par les $(\varphi_i)_{i\in J}$ et les $(\varphi_i)_{i\in J'}$: $V_J + V_{J'} = H$, $V_J \cap V_{J'} = 0$, et les projecteurs correspondants E_J ($E_J x = 0$ pour $x \in V_{J'}$, $E_J x = x$ pour $x \in V_J$) et $E_{J'} = I - E_J$ sont uniformément bornés.

Alors, $(\psi_i)_{i\in I}$ étant un système orthonormal complet[6]), il existe une application linéaire A biunivoque et bicontinue de H sur H telle que $A\varphi_i = \psi_i$ pour $i \in I$.

Ce résultat, ainsi que d'autres analogues, sont dus encore à LORCH [11]. Pour le démontrer prenons pour $\mathfrak{S}$ la famille des sous-ensembles de I qui sont finis ou de complémentaires finis. On voit aussitôt qu'on est dans les conditions d'application de la démonstration précédente. Donc il existe une application A_1 linéaire biunivoque et bicontinue de H sur H telle que $A_1(V_J)$ et $A_1(V_{J'})$ soient complètement orthogonales pour J et J' complémentaires, $J \in \mathfrak{S}, J' \in \mathfrak{S}$. Alors, les $\varphi'_i = A_1(\varphi_i)$ forment un système *orthogonal* complet, et $\|A_1^{-1}\|^{-1} \inf \|\varphi_i\| \leq \|\varphi'_i\| \leq \|A_1\| \sup \|\varphi_i\|$, de sorte que, par $A_2\varphi'_i = \psi_i$, on définit un opérateur biunivoque et bicontinu. On n'a qu'à poser $A = A_2 A_1$.

6. Application à la théorie ergodique.

Cette application est due à ALAOGLU et BIRKHOFF [1].

Théorème 7. *Soit G un semi-groupe possédant une moyenne invariante à droite et une moyenne invariante à gauche. Soit V_s une représentation bornée faiblement continue*[7]) *de G dans un espace de Banach réel $\mathfrak{B}$. Soit $\mathfrak{B}_0$ le*

---

[6]) Il est facile de voir, à partir de la propriété 2, que la famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ a même puissance que tout système orthonormal complet.

[7]) C'est-à-dire que $(V_s f, g)$ est une fonction réelle continue de s pour tout $f \in \mathfrak{B}$ et tout $g \in \mathfrak{B}'$.

sous-espace vectoriel fermé des $x\in\mathfrak{B}$ tels que $V_s x = x$ pour tout $s\in G$; et $\mathfrak{B}_1$ le sous-espace vectoriel fermé engendré par les éléments de la forme $V_s x - x$ où $x\in\mathfrak{B}$ et $s\in G$. Si, pour tout $x\in\mathfrak{B}$, l'ensemble convexe fermé engendré par les $V_s x$ est faiblement compact (ce qui est toujours le cas si $\mathfrak{B}$ est réflexif), on a:

a) *$\mathfrak{B}_0\cap\mathfrak{B}_1=0$ et $\mathfrak{B}_0+\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}$, de sorte que $\mathfrak{B}_0$ et $\mathfrak{B}_1$ définissent un opérateur T idempotent, projection de $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{B}_0$,*

b) *pour tout $x\in\mathfrak{B}$, l'ensemble convexe fermé engendré par les $V_s x$ a un seul point dans $\mathfrak{B}_0$ qui n'est autre que Tx.*

Démonstration 1. Soit φ une moyenne invariante à gauche sur G. Adoptant les notations du nº 3, nous prenons pour espace $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ l'espace des fonctions $V_s x$ où x est un élément fixe, arbitraire, de $\mathfrak{B}$, et nous obtenons une application Φ de $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ dans $\mathfrak{B}$ avec les propriétés du théorème 5. On définit par $x\to\Phi(V_s x)$ une application linéaire continue T de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{B}$. Si $x\in\mathfrak{B}_0$, $V_s x = x$ pour tout s, on a $Tx=x$. Si x est quelconque dans $\mathfrak{B}$, et y dans $\mathfrak{B}'$ (le dual de $\mathfrak{B}$), on a:

$$(V_{s_0}Tx, y)=(Tx, V_{s_0}^* y)=\varphi[(V_s x, V_{s_0}^* y)]=\varphi[(V_{s_0 s}x, y)]=\varphi[(V_s x, y)]=(Tx, y),$$

donc $V_{s_0}Tx=Tx$, et par suite $Tx\in\mathfrak{B}_0$. Donc T est un *idempotent,* et est une projection de $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{B}_0$. Soit $\mathfrak{B}_1$ le sous-espace vectoriel fermé des $x\in\mathfrak{B}$ tels que $Tx=0$. Évidemment, $\mathfrak{B}_0\cap\mathfrak{B}_1=0$, $\mathfrak{B}_0+\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}$.

2. D'après le théorème 5, Tx appartient à l'ensemble convexe fortement fermé K_x engendré par les $V_s x$.

3. Soit φ' une moyenne invariante à droite sur G. Opérant avec φ' comme avec φ, on définit une application linéaire continue T' de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{B}$, telle que $T'x=x$ pour $x\in\mathfrak{B}_0$, et telle que, pour $x\in\mathfrak{B}$, $y\in\mathfrak{B}'$:

$$(T' V_{s_0}x, y)=\varphi'[(V_s V_{s_0}x, y)]=\varphi'[(V_s x, y)]=(T'x, y)$$

d'où $T'V_{s_0}x=T'x$, et par suite $T'z=T'x$ pour tout $z\in K_x$; en particulier, $T'(Tx)=T'x$. Comme $Tx\in\mathfrak{B}_0$, il en vient que $Tx=T'x$, $T=T'$. On a par conséquent: $TV_s=T$.

4. Si $x\in\mathfrak{B}_1$, on a: $TV_s x=Tx=0$, donc $V_s x\in\mathfrak{B}_1$. Donc $K_x\subset\mathfrak{B}_1$. Si maintenant x est quelconque, on a $x-Tx\in\mathfrak{B}_1$, donc $K_{x-Tx}\subset\mathfrak{B}_1$. Or:

$$K_x=K_{(x-Tx)+Tx}=Tx+K_{x-Tx}\subset Tx+\mathfrak{B}_1,$$

donc Tx est bien le point *unique* où K_x rencontre $\mathfrak{B}_0$.

5. Si x est quelconque, on vient de voir que $TV_s x=Tx$, $T(x-V_s x)=0$, d'où $x-V_s x\in\mathfrak{B}_1$. Réciproquement, soit $z\in\mathfrak{B}_1$. D'après ce qui précède, $K_z\cap\mathfrak{B}_0=\{0\}$, donc il existe, pour tout $\varepsilon>0$, des nombres réels $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$, et des éléments $s_1, s_2,\dots,s_n$ de G, tels que: $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$, $\left\|\sum_{i=1}^n\lambda_i V_{s_i}z\right\|\leqq\varepsilon$. D'où:

$$z=z-\sum_{i=1}^n\lambda_i V_{s_i}z+z_1=\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)z-\sum_{i=1}^n\lambda_i V_{s_i}z+z_1=\sum_{i=1}^n\lambda_i(z-V_{s_i}z)+z_1$$

avec $||z_1|| \leqq \varepsilon$, ce qui prouve bien que $\mathfrak{B}_1$ est le sous-espace vectoriel *fermé* engendré par les $x - V_s x$.

7. Applications à la théorie des mesures invariantes.

Le théorème 8 (ainsi que l'exemple a)) sont dûs, à la forme près, à J. v. NEUMANN [13]; la démonstration donnée ici est légèrement simplifiée. Le lemme est peut-être nouveau.

Soit S un ensemble abstrait, G *un semi-groupe discret de transformations de* S; si $x \in S$ et $s \in G$, on notera sx le transformé de x par s, et on suppose: $(st)x = s(tx)$. Soit E l'ensemble des fonctions réelles bornées sur S. E est un espace vectoriel réel. Si $f \in E$, on définit ${}_sf$ par ${}_sf(x) = f(sx)$. Une fonctionnelle linéaire ψ sur *un sous-espace vectoriel de* E *invariant par* G sera dite positive si $\psi(f) \geqq 0$ pour $f(x) \geqq 0$, et invariante si $\psi({}_sf) = \psi(f)$.

Théorème 8. *Supposons que* G *possède une moyenne invariante à gauche* φ. *Il existe sur* E *une fonctionnelle* χ *linéaire positive invariante telle que* $\chi(1) = 1$.

Plus généralement, soit $g \in E$ *une fonction* $\geqq 0$. *Soit* $E' \subset E$ *le sous-espace vectoriel engendré par les* ${}_sg$, *et* E'' *le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions* $\geqq 0$ *majorées par des fonctions de* E' $(E' \subset E'' \subset E)$. *S'il existe sur* E' *une fonctionnelle linéaire* $\psi \neq 0$, *positive, invariante par* G[8]) *il existe sur* E'' *une fonctionnelle linéaire* χ *positive, invariante par* G, *telle que* $\chi(g) = 1$.

Démonstration. Envisageons tout de suite le cas général. D'après un lemme sur lequel nous reviendrons dans un instant, il existe une fonctionnelle linéaire ω sur E'', positive, coïncidant à un facteur près $\neq 0$ avec ψ sur E'. On peut donc supposer $\omega({}_sg) = 1$ pour tout $s \in G$. Maintenant, pour $f \in E''$, posons: $\chi(f) = \varphi[\omega({}_sf)]$, où $\omega({}_sf)$ est considérée comme une fonction de s, bornée comme on le voit aisément d'après la définition de E''. Il est immédiat que χ vérifie les conditions du théorème.

Le lemme sur lequel nous nous sommes appuyés, et qui présente un intérêt propre, est le suivant (pour l'appliquer à la démonstration précédente, il faut y remplacer E par E'').

Lemme. *Soient* E *un espace vectoriel réel,* $E' \subset E$ *un sous-espace vectoriel,* H' *un hyperplan de* E', $K \subset E$ *un ensemble convexe tel que* $K \cap E'$ *ne traverse pas* H'[9]). *Supposons de plus que, pour tout* $y \in E$, *il existe un* $x \in E'$ *tel que* $x + \lambda y \in K$ *pour* $|\lambda|$ *assez petit*[10]). *Alors il existe un hyperplan* H *de* E *tel que* K *ne traverse pas* H, *et tel que* $H \cap E' = H'$.

---

8) Cette condition est évidemment vérifiée si $g = 1$.

9) Autrement dit, si $\mu \neq 0$ est une fonctionnelle linéaire sur E' s'annulant sur H', on a $\mu(x)\mu(y) \geqq 0$ si x et y sont deux points quelconques de $K \cap E'$.

10) Si cette condition est omise, le lemme peut être mis en défaut. Notons que cette condition est certainement remplie si K possède dans E' un point *interne* (x est

Démonstration. Soit M l'ensemble des couples (E^*, H^*), où E^* est un sous-espace vectoriel de E et H^* un hyperplan de E^*, tels que $K \cap E^*$ ne traverse pas H^*, et tels que $E^* \supset E'$, $H^* \cap E' = H'$. On ordonne cet ensemble, la relation d'ordre entre deux couples (E_1, H_1) et (E_2, H_2) étant définie par $E_1 \subset E_2$, $H_1 \subset H_2$. Il est facile de voir que tout sous-ensemble totalement ordonné de M admet une borne supérieure. Soit donc (E_0, H_0) un couple *maximal*. Il suffit de prouver que $E_0 = E$ (H_0 sera alors le H du lemme). Si $E_0 \neq E$, soit $E_0' \supset E_0$ un sous-espace vectoriel tel que E_0'/E_0 soit de dimension 1. Soit $K_0 = E_0' \cap K$. *Si on raisonne modulo* H_0, l'image de E_0' est un plan, l'image de E_0 est une droite d passant par l'origine 0, et l'image de K_0 est un ensemble convexe k dont l'intersection avec d *ne traverse pas* 0; de plus, d'après la condition du lemme, l'image modulo H_0 d'un certain point de E' (image qui $\in d$) est centre d'un segment situé dans k *et non porté par* d. Alors, on construit aisément une droite δ, distincte de d, passant par 0, ne traversant pas k. Soit H_0' l'ensemble des classes modulo H_0 des points de δ. (E_0', H_0') constitue un couple de M, ce qui est absurde puisque (E_0, H_0) est maximal.

Exemples. a) Prenons pour S l'espace euclidien à deux dimensions, pour G le groupe des déplacements, pour g la fonction caractéristique d'un carré de côté 1. G possède une moyenne invariante d'après le théorème 2: en effet, si G_1 est le sous-groupe distingué des translations, G_1 et G/G_1 sont abéliens. De même, g vérifie la condition du théorème: il suffit de prendre pour ψ l'intégrale ordinaire des fonctions de E'. E'' est l'ensemble des fonctions bornées nulles en dehors d'un ensemble borné. Il existe donc sur E'' une fonctionnelle linéaire positive, invariante par déplacement, égale à 1 pour g. En particulier, on peut attacher à tout ensemble borné une mesure $\geqq 0$, $< +\infty$, qui possède l'additivité restreinte, et invariante par déplacement. En attribuant la mesure $+\infty$ aux ensembles non bornés, on obtient une mesure définie pour tous les ensembles, ayant les mêmes propriétés, et égale à 1 pour le carré de côté 1 (cf. [13]).

b) Prenons pour S l'espace euclidien à deux dimensions, pour G le groupe des similitudes. G possède une moyenne invariante, car, si G_1 est le

interne pour K si, quel que soit $y \in E$, $x + \lambda y \in K$ pour $|\lambda|$ assez petit; par exemple, un point intérieur de K, si E est topologique, est interne). Dans ce cas particulier, on peut déduire le lemme du théorème de HAHN-BANACH énoncé sous la forme: Si tous les points de K', ensemble convexe, sont internes, et si un sous-espace vectoriel est disjoint de K', il existe un hyperplan plus grand disjoint de K' (on considère l'ensemble des points internes de K). Mais le lemme sous sa forme générale (indispensable ici) ne peut se déduire du théorème de HAHN-BANACH. Au contraire, le théorème de HAHN-BANACH se déduit immédiatement du lemme. Le lemme est donc une généralisation de ce théorème, qui me paraît devoir être utile dans divers cas.

sous-groupe distingué des translations, G_1 et G/G_1 sont abéliens. On peut donc définir pour tous les ensembles une mesure, qui possède l'additivité restreinte, invariante par similitude, égale à 1 pour tout le plan (donc à 0 pour les ensembles bornés).

Remarque (communiquée à l'auteur par R. GODEMENT): Soit G un groupe fuchsien, réalisé comme groupe discret d'automorphismes du disque $|z| \leqq 1$; soit S la circonférence $|z| = 1$. Sauf dans des cas exceptionnels, on peut montrer qu'il n'existe aucune mesure de Radon $\neq 0$ sur S invariante par G. Il n'existe donc pas de mesure invariante à gauche sur G (théorème 8). Les cas exceptionnels se ramènent, par représentation conforme, aux suivants: 1) G sous-groupe du groupe des similitudes. 2) G engendré par les substitutions $z \to az$ $(a > 0)$ et $z \to bz^{-1}$ $(b < 0)$. 3) G fini. (Dans ces trois cas, il existe une moyenne invariante sur G: théorèmes 2 et 3.)

Bibliographie.

[1] L. ALAOGLU et G. BIRKHOFF, General ergodic theorems, *Proceedings National Academy of Sciences U. S. A.*, **25** (1939), p. 628–630.

[2] G. ASCOLI, Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari, *Annali Mat. pura appl.*, **10** (1932), p. 33—81.

[3] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires* (Varsovie, 1932).

[4] J. DIEUDONNÉ, La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, *Annales de l'École Normale Supérieure*, **59** (1942), p. 107–139.

[5] R. GODEMENT, Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, *Transactions American Math. Society*, **63** (1948), p. 1–84.

[6] S. KAKUTANI, Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets, *Proceedings Imperial Acad. Tokyo*, **14** (1938), p. 242—245.

[7] M. KREIN, Opérations linéaires transformant un certain ensemble conique en lui-même, *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS*, (N. S.) **23** (1939), p. 749—752.

[8] M. KREIN et V. SMULIAN, On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space, *Annals of Math.*, **41** (1940), p. 556–583.

[9] E. R. LORCH, The integral representation of weakly almost periodic transformations in reflexive vector spaces, *Transactions American Math. Society*, **49** (1941), p. 18—40.

[10] E. R. LORCH, On a calculus of operators in reflexive vector spaces, *ibidem*, **45** (1939), p. 217–234.

[11] E. R. LORCH, Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces, *Bulletin American Math. Society*, **45** (1939), p. 564—569.

[12] A. MARKOV, Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens, *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS*, (N. S.) **1** (1936), p. 311—313.

[13] J. VON NEUMANN, Zur allgemeinen Theorie des Maßes, *Fundamenta Math.*, **13** (1929), p. 73–116.

[14] J. VON NEUMANN, Almost periodic functions in a group, *Transactions American Math. Society*, **36** (1934), p. 445—492.

[15] J. VON NEUMANN, Zum Haarschen Maß in topologischen Gruppen, *Compositio Math.*, **1** (1934), p. 106—114.

[16] B. SZ.-NAGY, On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *ces Acta*, **11** (1947), p. 152–157.

(Reçu le 2 août 1949)

Une caractérisation affine de l'ensemble des fonctions positives dans l'espace L^2.

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

1. Il y a 12 ans, j'ai trouvé le théorème suivant[1]):

Soit $\mathfrak{R}$ *l'espace de Hilbert (séparable) ou un espace euclidien de dimension finie, et soit* $\mathfrak{P}$ *un sous-ensemble de* $\mathfrak{R}$ *Pour qu'on puisse réaliser* $\mathfrak{R}$ *par un espace* L^2 *de façon à faire correspondre à* $\mathfrak{P}$ *l'ensemble des fonctions positives dans* L^2, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

A. *Pour* $u, v \in \mathfrak{P}$ *on a* $(u, v) \geqq 0$, *et inversement*: $(u, v) \geqq 0$ *pour un* $u \in \mathfrak{R}$ *et pour tout* $v \in \mathfrak{P}$ *entraîne que* $u \in \mathfrak{P}$.

B. *Lorsque pour* $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{P}$ *on a* $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, *alors il existe des éléments* $w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22} \in \mathfrak{P}$ *tels que* $u_1 = w_{11} + w_{12}$, $u_2 = w_{21} + w_{22}$, $v_1 = w_{11} + w_{21}$, $v_2 = w_{12} + w_{22}$.

Par un espace L^2 on entend ici l'espace des fonctions à carré sommable par rapport à une certaine distribution de masses positives dans l'intervalle (a, b). "Réaliser" veut dire "appliquer linéairement et isométriquement".

Le théorème subsiste aussi bien pour les espaces complexes que pour les espaces réels. Le cas complexe ne présentant pas de problèmes particuliers essentiels, nous nous bornerons dans la présente Note à l'étude des espaces réels.

Dans la démonstration de ce théorème je m'étais beaucoup servi des méthodes de la théorie générale des opérations linéaires de M. FRÉDÉRIC RIESZ[2]); dans cette théorie la condition **B** joue un rôle fondamental.

La propriété **A** entraîne les suivantes:

A$_1$. *Si* $u \in \mathfrak{P}$, *on a* $\lambda u \in \mathfrak{P}$ *pour* $\lambda \geqq 0$ *et, si* $u \neq 0$, λu *non* $\in \mathfrak{P}$ *pour* $\lambda < 0$.

A$_2$. *Si* $u, v \in \mathfrak{P}$, *on a aussi* $u + v \in \mathfrak{P}$.

---

[1]) B. SZ.-NAGY, On the set of positive functions in L_2, *Annals of Math.*, **39** (1938), p. 1—13. Un théorème voisin a été trouvé indépendemment par H. FREUDENTHAL, Teilweise geordnete Moduln, *Proceedings Acad. Amsterdam*, **39** (1936), p. 641—651.

[2]) F. RIESZ, Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, *Annals of Math.*, **41** (1940), p. 174—206. Rédaction revue d'un Mémoire précédent en hongrois, *Matematikai és Természettudományi Értesitő*, **56** (1937), p. 1—46.

$\mathbf{A}_3$. *Si $u_n \in \mathfrak{P}$ et si $u_n \to u$, on a aussi $u \in \mathfrak{P}$.*

$\mathbf{A}_4$. *Si $u_n, v_n \in \mathfrak{P}$ et si $u_n + v_n \to 0$, on a aussi $u_n \to 0$.* [3])

$\mathbf{A}_5$. *Tout élément $f \in \mathfrak{R}$ admet une décomposition en différence de deux éléments de $\mathfrak{P}$* [4])

Les propriétés $\mathbf{A}_1$—$\mathbf{A}_3$ sont celles d'un *ensemble conique fermé;* la propriété $\mathbf{A}_5$ est celle d'un *ensemble reproducteur.* Enfin, la propriété $\mathbf{A}_4$ est évidemment équivalente, pour tout ensemble conique, à la suivante:

$\mathbf{A}'_4$. *Il existe une constante K telle que $\|u\| \leqq K\|u+v\|$ pour tous $u, v \in \mathfrak{P}$.*

On exprimera ce fait en disant que l'ensemble conique $\mathfrak{P}$ est *normal.* (Ces dénominations sont empruntées à M. KREIN[5]).)

Tandis que **A** est une propriété *métrique,* ses conséquences $\mathbf{A}_1$—$\mathbf{A}_5$, ainsi que **B** sont des propriétés *affines,* c'est-à-dire invariantes par rapport à toute *affinité* (= application linéaire biunivoque et bicontinue) de l'espace $\mathfrak{R}$ sur lui-même ou sur un autre espace de Hilbert.

Or, dans le cas d'un espace $\mathfrak{R}_n$ de dimension finie n, les seules conditions $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_5$, **B** suffisent pour qu'il existe une affinité de $\mathfrak{R}_n$ sur l'espace des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ de sorte que $\mathfrak{P}$ ait pour image l'ensemble des vecteurs pour lesquels $x_i \geqq 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$.[6])

Le but de cette Note est d'étudier le même problème pour les espaces de dimension infinie. Nous établirons le

Théorème. *Les conditions $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_5$ et **B** sont nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une affinité de l'espace $\mathfrak{R}$ sur un espace L^2 telle que $\mathfrak{P}$ ait pour image l'ensemble des fonctions $f(x) \geqq 0$ dans L^2.*

C'est évidemment la *suffisance* de ces conditions qui reste à démontrer. Dans la démonstration, je ne ferai pas usage des résultats de mes précédents articles. D'autre part le théorème "métrique" cité n'est pas un simple corollaire du théorème que je viens d'énoncer.

2. Nous supposerons dans ce qui suit que $\mathfrak{P}$ satisfasse aux conditions du théorème. Soient

$\mathfrak{P}^*$: *l'ensemble des $f \in \mathfrak{R}$ tels que $(u, f) \geqq 0$ pour tout $u \in \mathfrak{P}$,*

$\mathfrak{P}^{**}$: *l'ensemble des $u \in \mathfrak{R}$ tels que $(u, f) \geqq 0$ pour tout $f \in \mathfrak{P}^*$.*

Il est manifeste que $\mathfrak{P}^*$ est aussi un ensemble conique fermé; en particulier $\pm f \in \mathfrak{P}^*$ entraîne $f = 0$ parce que, $\mathfrak{P}$ étant un ensemble reproducteur, le seul élément orthogonal à $\mathfrak{P}$ est 0.

---

[3]) En effet, puisque $(u_n, v_n) \geqq 0$, on a $\|u_n + v_n\|^2 \geqq \|u_n\|^2 + \|v_n\|^2$.

[4]) Dans un espace complexe, on a la décomposition $f = (u - v) + i(w - t)$ avec $u, v, w, t \in \mathfrak{P}$.

[5]) M. KREIN, Propriétés fondamentales des ensembles coniques normaux dans l'espace de Banach, *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS,* **28** (1940), p. 13—17.

[6]) Cf. B. SZ.-NAGY, Sur les lattis linéaires de dimension finie, *Commentarii Math. Helvetici,* **17** (1944), p. 209—213.

Il est aussi manifeste que $\mathfrak{P} \subseteqq \mathfrak{P}^{**}$. Montrons que tout élément v de $\mathfrak{P}^{**}$ appartient aussi à $\mathfrak{P}$ et que, par conséquent, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{**}$.

Soit u_0 l'élément de $\mathfrak{P}$ qui est le plus proche de v (un tel élément existe puisque $\mathfrak{P}$ est convexe et fermé). Lorsque u_0 est différent du sommet 0 de $\mathfrak{P}$, $v-u_0$ est nécessairement orthogonal à la génératrice λu_0 ($\lambda \geqq 0$) de $\mathfrak{P}$ passant par u_0,

(1) $$(v-u_0, u_0) = 0;$$

(1) subsiste d'ailleurs évidemment aussi lorsque $u_0 = 0$. De plus, $v-u_0$ fait un angle droit ou obtus avec tout vecteur issu de u_0 et dirigé vers un élément u de $\mathfrak{P}$:

(2) $$(v-u_0, u-u_0) \leqq 0.$$

En ajoutant (1) à (2), il résulte que

$$(v-u_0, u) \leqq 0$$

pour tout $u \in \mathfrak{P}$, donc $u_0 - v \in \mathfrak{P}^*$. Comme v était un élément de $\mathfrak{P}^{**}$, on aura par conséquent

(3) $$(u_0 - v, v) \geqq 0.$$

Il résulte de (1) et (3) que

$$(v-u_0, v-u_0) = (v-u_0, v) - (v-u_0, u_0) \leqq 0,$$

donc $v - u_0 = 0$, $v = u_0 \in \mathfrak{P}$. C. Q. F. D.

Cela étant, nous rappelons les théorèmes suivants de KREIN[7]) et de GROSBERG et KREIN[8]):

Soit $\mathfrak{K}$ un ensemble conique fermé (conditions $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3$) dans un espace de Banach $\mathfrak{B}$. Soit $\overline{\mathfrak{K}}$ le sous-ensemble de l'espace conjugué $\overline{\mathfrak{B}}$ formé des fonctionnelles linéaires de $\mathfrak{B}$ qui assument des valeurs non-négatives sur $\mathfrak{K}$.

a) *Pour que $\overline{\mathfrak{K}}$ soit un ensemble reproducteur dans $\overline{\mathfrak{B}}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{K}$ soit normal* (condition $\mathbf{A}_4$ ou $\mathbf{A}_4'$).

b) *Pour qu'il existe une constante C telle que tout $f \in \overline{\mathfrak{B}}$ admette une décomposition $f = g - h$ $(g, h \in \overline{\mathfrak{K}})$ avec $\|g\| + \|h\| \leqq C\|f\|$, il faut et il suffit que $\mathfrak{K}$ soit normal.*

Appliquons ces théorèmes à l'espace $\mathfrak{R}$, identique à son conjugué, et d'abord aux ensembles $\mathfrak{K} = \mathfrak{P}$, $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{P}^*$, puis aux ensembles $\mathfrak{K} = \mathfrak{P}^*$, $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{P}^{**} = \mathfrak{P}$. Comme $\mathfrak{P}$ est normal par hypothèse, $\mathfrak{P}^*$ est reproducteur et il existe une constante C^* telle que

(4) *tout $f \in \mathfrak{R}$ admet une décomposition $f = g - h$ $(g, h \in \mathfrak{P}^*)$ telle que* $$\|g\| + \|h\| \leqq C^*\|f\|.$$

Puisque $\mathfrak{P}^{**} = \mathfrak{P}$ est reproducteur par hypothèse, $\mathfrak{P}^*$ est normal; et puisque

---

[7]) *Loc. cit.* [5]), théorème 2.

[8]) J. GROSBERG et M. KREIN, Sur la décomposition des fonctionnelles en composantes positives, *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS*, **25** (1939), p. 723—726 (théorème 1).

$\mathfrak{P}^*$ est normal, il existe une constante C telle que

(5) *tout* $f \in \mathfrak{R}$ *admet une décomposition* $f = u - v$ $(u, v \in \mathfrak{P})$ *telle que*
$$\|u\| + \|v\| \leqq C\|f\|.$$

L'ensemble $\mathfrak{P}^*$ satisfait donc à toutes les conditions $\mathbf{A}_1$—$\mathbf{A}_5$. On verra que la condition **B** est aussi vérifiée par $\mathfrak{P}^*$.

3. En écrivant $f \geqq g$ lorsque $f - g \in \mathfrak{P}$, on introduit dans $\mathfrak{R}$ une relation d'ordre avec des propriétés évidentes. Par $\mathbf{A}_4'$ et par (5), il existe des constantes K et C de façon que

$\mathbf{A}_4''$: $f \geqq g \geqq 0$ *entraîne* $\|g\| \leqq K\|f\|$.

$\mathbf{A}_5''$. *tout* $f \in \mathfrak{R}$ *admet une décomposition* $f = g - h$ *telle que* $g \geqq 0$, $h \geqq 0$, $\|g\| + \|h\| \leqq C\|f\|$.

L'ensemble $\mathfrak{P}^*$ engendre une relation d'ordre analogue: $f \geqq^* g$ lorsque $f - g \in \mathfrak{P}^*$.

Nous allons montrer que, pour chacune de ces relations d'ordre, *chaque ensemble majorable admet un plus petit majorant et chaque ensemble minorable admet un plus grand minorant.*

Commençons par l'établir pour l'ordre $\geqq^*$. Il suffit de montrer que chaque ensemble $\{f\}$ d'éléments $f \geqq^* 0$ admet un plus grand minorant. La construction suivante suit la méthode de F. RIESZ[2]).

Soit $u \geqq 0$. Envisageons toutes les sommes $s = \sum_1^m (u_i, f_i)$ où m est arbitraire, les f_i sont tirés arbitrairement de $\{f\}$ et les u_i sont tels que $u_i \geqq 0$, $\sum_1^m u_i = u$. Variant sous ces conditions, la somme s (étant toujours $\geqq 0$) admet une borne inférieure $L(u) \geqq 0$. On a évidemment

(6) $L(u) \leqq (u, f)$ pour tout $f \in \{f\}$,

(7) $L(u) \geqq (u, g)$ pour tout g tel que $g \leqq^* f$, quel que soit $f \in \{f\}$.

Les relations $L(\lambda u) = \lambda L(u)$ $(\lambda > 0)$ et $L(u+v) \leqq L(u) + L(v)$ sont immédiates.

Faisant usage (ici pour la première fois) de la propriété **B** de $\mathfrak{P}$ qui se généralise d'ailleurs sans peine sous la forme:

"*lorsque* $\sum_{i=1}^m u_i = \sum_{k=1}^n v_k$ $(u_i, v_k \in \mathfrak{P};\ m \geqq 2,\ n \geqq 2)$, *il existe des* $w_{ik} \in \mathfrak{P}$ *tels que* $u_i = \sum_{k=1}^n w_{ik}$, $v_k = \sum_{i=1}^m w_{ik}$",

on démontre que $L(u)$ est même additive:
$$L(u) + L(v) = L(u+v) \quad \text{pour} \quad u, v \geqq 0.$$

En posant $L(u-v) = L(u) - L(v)$, la fonctionnelle L s'étend à tout l'espace $\mathfrak{R}$, tout en restant homogène et additive. En choisissant la décomposition $h=u-v$ comme en (5), on aura

$$|L(h)|=|L(u)-L(v)|\leqq L(u)+L(v)\leqq (u,f)+(v,f)\leqq C\|f\|\,\|h\|,$$

quel que soit $f\in\{f\}$.

La fonctionnelle linéaire $L(h)$ est donc bornée; par conséquent il existe un élément $f_0\in\mathfrak{R}$ tel que $L(h)=(h,f_0)$. Par (6) et (7), $f_0\leqq^* f$ pour tout $f\in\{f\}$, et $f_0\geqq^* g$ pour tout autre g tel que $g\leqq^* f$ pour tout $f\in\{f\}$, ce qui exprime justement que f_0 est le plus grand minorant de $\{f\}$.

Désignons les opérations de prendre le plus grand minorant et le plus petit majorant par les signes $\wedge^*$, $\vee^*$. Tout système fini $\{f_k\}_1^n$ est majorable et minorable (en effet, et décomposant chaque f_k en g_k-h_k où $g_k, h_k\geqq^* 0$, on aura $-\sum\limits_i h_i\leqq^* f_k\leqq^*\sum\limits_i g_i$), donc on peut toujours former

$$\bigvee_k{}^* f_k=f_1\vee^* f_2\vee^*\dots\vee^* f_n,\quad \bigwedge_k{}^* f_k=f_1\wedge^* f_2\wedge^*\dots\wedge^* f_n.$$

L'espace $\mathfrak{R}$ devient donc, par la relation $\geqq^*$, un *„lattice“ vectoriel σ-complet*[9]. On a en particulier

$$(8)\qquad (f\vee^* g)+(f\wedge^* g)=f+g,$$

d'où il s'ensuit, comme l'avait observé F. RIESZ[10]), que la condition **B** est vérifiée aussi par $\mathfrak{P}^*$.

La symétrie entre $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^*$ devenant ainsi complète, tous les résultats obtenus pour l'ordre $\geqq^*$ s'établissent du même coup aussi pour l'ordre $\geqq$. Nous n'aurons d'ailleurs à faire désormais qu'avec l'ordre $\geqq$ et avec les notions $\vee$, $\wedge$ correspondantes.

Parmi les règles de calcul avec ces signes, citons les évidentes

$$(8a)\qquad (f+h)\vee(g+h)=(f\vee g)+h,\quad (f+h)\wedge(g+h)=(f\wedge g)+h$$

et l'analogue de (8), puis les lois *commutative* et *associative*, enfin les lois *distributives* $(f\vee g)\wedge h=(f\wedge h)\vee(g\wedge h)$, $(f\wedge g)\vee h=(f\vee h)\wedge(g\vee h)$.[11]) Ces dernières lois se généralisent d'ailleurs par induction en

$$(9)\qquad \left(\bigvee_\alpha f_\alpha\right)\wedge h=\bigvee_\alpha(f_\alpha\wedge h),\quad \left(\bigwedge_\alpha f_\alpha\right)\vee h=\bigwedge_\alpha(f_\alpha\vee h),$$

$\{f_\alpha\}$ étant un système fini d'éléments quelconques.

Les éléments $f, g\geqq 0$ sont dits *disjoints* lorsque $f\wedge g=0$, ou ce qui revient au même grâce à (8), lorsque $f\vee g=f+g$. On a, d'une façon plus générale,

$$(10)\qquad \bigvee_\alpha f_\alpha=\sum_\alpha f_\alpha \text{ pour des } f_\alpha\geqq 0 \text{ disjoints deux-à-deux,}$$

ce qu'on vérifie sans peine par induction, faisant usage aussi de (9).

---

[9]) Dans le sens de G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, 2ième édition (New York, 1948), Chap. XV.

[10]) *Loc. cit.* [2]), en particulier p. 176–178.

[11]) Cf. FREUDENTHAL, *loc. cit.* [1]), ou BIRKHOFF, *loc. cit.* [9]), p. 219.

Remarquons enfin que si les f_α sont disjoints et si c_α, c'_α sont des nombres $\geqq 0$, l'équation $\Sigma c_\alpha f_\alpha = \Sigma c'_\alpha f_\alpha$ entraîne que $c_\alpha f_\alpha = c'_\alpha f_\alpha$, donc $c_\alpha = c'_\alpha$ lorsque $f_\alpha \neq 0$. En effet, chaque terme étant majoré par la somme, on a, faisant usage aussi de (9) et (10),

$$c_\alpha f_\alpha = c_\alpha f_\alpha \wedge \sum_\beta c'_\beta f_\beta = c_\alpha f_\alpha \wedge (\bigvee_\beta c'_\beta f_\beta) = \bigvee_\beta (c_\alpha f_\alpha \wedge c'_\beta f_\beta) = c_\alpha f_\alpha \wedge c'_\alpha f_\alpha \leqq c'_\alpha f_\alpha$$

et, d'une manière analogue, $c'_\alpha f_\alpha \leqq c_\alpha f_\alpha$. Donc $c_\alpha f_\alpha = c'_\alpha f_\alpha$.

4. L'espace $\mathfrak{R}$ étant supposé séparable, il existe dans $\mathfrak{P}$ un ensemble dénombrable partout dense, soit $\{f_\alpha\}_1^\infty$. En choisissant les $c_\alpha > 0$ convenablement, on peut rendre la série $\Sigma c_\alpha f_\alpha$ convergente; sa somme e appartient à $\mathfrak{P}$, $e \neq 0$. Un élément $f \geqq 0$ est dit borné par rapport à e, lorsqu'on a $f \leqq \Lambda e$ pour Λ suffisamment grand; chacun des f_α est borné, $f_\alpha \leqq c_\alpha^{-1} e$. Les éléments bornés par rapport à e sont donc denses dans $\mathfrak{P}$.

Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble des éléments h tels que $0 \leqq h \leqq e$ et $h \wedge (e-h) = 0$. On a $0 \in \mathfrak{B}$, $e \in \mathfrak{B}$; avec $h_1, h_2 \in \mathfrak{B}$ on a $h_1 \wedge h_2 \in \mathfrak{B}$, $h_1 \vee h_2 \in \mathfrak{B}$ et, lorsque $h_1 \geqq h_2$, on a aussi $h_1 - h_2 \in \mathfrak{B}$.[12]) $\mathfrak{B}$ est donc une algèbre de Boole.

f étant un élément borné, $0 \leqq f \leqq \Lambda e$, on montre[13]) qu'il existe une famille $\{e_\lambda\}$ $(0 \leqq \lambda \leqq \Lambda)$ d'éléments de $\mathfrak{B}$ telle que $e_0 = 0$, $e_\Lambda = e$, $e_\mu \geqq e_\lambda$ pour $\mu > \lambda$, et telle que $f = \int \lambda \, de_\lambda$ dans le sens que pour $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n+1} = \Lambda$ et pour $h_\alpha = e_{\lambda_{\alpha+1}} - e_{\lambda_\alpha}$, on a

$$\sum_1^n \lambda_\alpha h_\alpha \leqq f \leqq \sum_1^n \lambda_{\alpha+1} h_\alpha.\text{[13a])}$$

Lorsque $\lambda_{\alpha+1} - \lambda_\alpha \leqq \delta$, on aura donc

$$0 \leqq f - \sum_1^n \lambda_\alpha h_\alpha \leqq \sum_1^n (\lambda_{\alpha+1} - \lambda_\alpha) h_\alpha \leqq \delta \sum_1^n h_\alpha = \delta e.$$

En vertu de la condition A'_4 il en vient que

$$\|f - \Sigma \lambda_\alpha h_\alpha\| \leqq K\delta \|e\| < \varepsilon \qquad \text{pour } \delta \text{ assez petit.}$$

Les éléments de la forme $\Sigma \lambda_\alpha h_\alpha$ où les h_α sont des éléments de $\mathfrak{B}$, deux-à-deux disjoints et de somme égale à e, et où les coefficients λ_α sont non-négatifs, forment donc un ensemble $\mathfrak{L}$ partout dense parmi les éléments bornés par rapport à e, et alors partout dense aussi dans $\mathfrak{P}$.

---

[12]) Cf. Freudenthal, *loc. cit.* [1])

[13]) Cf. Freudenthal, *loc. cit.* [1]), ou Birkhoff, *lot. cit.* [9]). On peut se servir aussi de la méthode de F. Riesz, *loc. cit.* [2]), Chap. VII, mais alors il faut d'abord observer que toute suite croissante bornée d'éléments de $\mathfrak{R}$ converge faiblement vers son plus petit majorant, ce qui est d'ailleurs une conséquence immédiate de notre construction du plus petit majorant. On peut montrer que la convergence est même forte.

[13a]) Les h_α sont disjoints. En effet, pour $\lambda < \mu \leqq \nu < \varrho$ on a $e_\mu - e_\lambda \leqq e_\mu$ et $e_\varrho - e_\nu \leqq e - e_\mu$, et par conséquent $(e_\mu - e_\lambda) \wedge (e_\varrho - e_\nu) \leqq e_\mu \wedge (e - e_\mu) = 0$.

Il est manifeste que $\mathfrak{L}$ contient avec l aussi λl $(\lambda \geqq 0)$; montrons que $\mathfrak{L}$ contient avec $l = \Sigma \lambda_\alpha h_\alpha$ et $l' = \Sigma \lambda'_\beta h'_\beta$ aussi $l + l'$. En effet, les éléments $h_{\alpha\beta} = h_\alpha \wedge h'_\beta \in \mathfrak{B}$ étant tous disjoints, on a par (9) et (10)

$$h_\alpha = h_\alpha \wedge e = h_\alpha \wedge (\vee_\beta h'_\beta) = \vee_\beta (h_\alpha \wedge h'_\beta) = \vee_\beta h_{\alpha\beta} = \sum_\beta h_{\alpha\beta}$$

et, d'une manière analogue, $h'_\beta = \sum_\alpha h_{\alpha\beta}$. Donc

$$l = \sum_{\alpha\beta} \lambda_\alpha h_{\alpha\beta}, \quad l' = \sum_{\alpha\beta} \lambda'_\beta h_{\alpha\beta}, \quad l + l' = \sum_{\alpha\beta} (\lambda_\alpha + \lambda'_\beta) h_{\alpha\beta}; \tag{11}$$

vu encore que $e = \vee_\alpha h_\alpha = \vee_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$, cela prouve que $l + l' \in \mathfrak{L}$.

Fixons un élément $g \in \mathfrak{B}$ et définissons une transformation de l'espace $\mathfrak{R}$ de la manière suivante.

Pour $l = \Sigma \lambda_\alpha h_\alpha \in \mathfrak{L}$ posons $P_g l = \Sigma \lambda_\alpha (g \wedge h_\alpha)$. Montrons que cette définition ne dépend pas de la représentation particulière de l, et que, sur $\mathfrak{L}$, la transformation est additive et positivement homogène. Envisageons à cet effet encore un élément $l' = \Sigma \lambda'_\beta h'_\beta \in \mathfrak{L}$. Faisant intervenir de nouveau les éléments $h_{\alpha\beta} = h_\alpha \wedge h'_\beta$, on aura par (9) et (10)

$$P_g l = \sum \lambda_\alpha (g \wedge h_\alpha) = \sum_\alpha \lambda_\alpha (g \wedge (\vee_\beta h_{\alpha\beta})) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \vee_\beta (g \wedge h_{\alpha\beta}) =$$
$$= \sum_\alpha \lambda_\alpha \sum_\beta (g \wedge h_{\alpha\beta}),$$

donc

$$P_g l = \sum_{\alpha\beta} \lambda_\alpha (g \wedge h_{\alpha\beta}) \quad \text{et aussi} \quad P_g l' = \sum_{\alpha\beta} \lambda'_\beta (g \wedge h_{\alpha\beta}). \tag{12}$$

Si l'on a $l = l'$, il résulte des décompositions (11), en vertu d'une remarque faite à la fin du n° 3, que $\lambda_\alpha = \lambda'_\beta$ dès que $h_{\alpha\beta} \neq 0$, ce qui assure, grâce à (12), que $P_g l = P_g l'$. La définition de P_g est donc univoque. L'additivité est alors une conséquence immédiate de (11), et l'homogénéité pour des facteurs positifs est évidente.

Observons encore que $0 \leqq P_g l \leqq l$ pour tout $l \in \mathfrak{L}$, d'où il résulte, en vertu de la condition $\mathbf{A}'_4$, que

$$\|P_g l\| \leqq K \|l\|. \tag{13}$$

Étendons la définition de P_g à l'ensemble $\mathfrak{M}$ des différences $f = l - l'$ $(l, l' \in \mathfrak{L})$ en posant $P_g(l - l') = P_g l - P_g l'$. $\mathfrak{M}$ est évidemment une variété linéaire; $\mathfrak{L}$ étant dense dans $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{M}$ sera dense dans $\mathfrak{R}$. L'additivité de P_g sur $\mathfrak{L}$ entraîne que P_g est univoque et additive aussi sur $\mathfrak{M}$; l'homogénéité est manifeste.

Faisant intervenir une fois de plus les décompositions (11), on aura $f = l - l' = \Sigma \mu_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$ où $\mu_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha - \lambda'_\beta$, donc

$$f = f^+ - f^- \text{ avec } f^+ = \Sigma \mu^+_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \ f^- = \Sigma \mu^-_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}.^{14)}$$

---

[14]) Pour un nombre réel μ, on écrit $\mu^+ = \max(\mu, 0)$ et $\mu^- = -\min(\mu, 0)$.

Tous les éléments $k^+_{\alpha\beta}=\mu^+_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$, $k^-_{\alpha\beta}=\mu^-_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$ étant disjoints, on a par (8a) et (10)

$$f\vee 0=(f^+-f^-)\vee 0=(f^+\vee f^-)-f^-=(\vee\, k^+_{\alpha\beta})\vee(\vee\, k^-_{\alpha\beta})-f^-=$$
$$=\Sigma(k^+_{\alpha\beta}+k^-_{\alpha\beta})-f^-,$$

donc $f\vee 0=(f^++f^-)-f^-=f^+$ et, pour une raison analogue, $f\wedge 0=-f^-$.

Il s'ensuit que pour toute autre décomposition $f=f'-f''$ où $f'\geqq 0$, $f''\geqq 0$, on a $f'\geqq f^+$ et $f''\geqq f^-$ et par conséquent $\|f^+\|\leqq K\|f'\|$, $\|f^-\|\leqq K\|f''\|$. Or il existe d'après (5) une décomposition $f=f'-f''$ pour laquelle $\|f'\|+\|f''\|\leqq C\|f\|$, d'où il résulte que

$$\|f^+\|+\|f^-\|\leqq CK\|f\|.$$

Les éléments f^+, f^- appartenant à $\mathfrak{L}$, on aura, vu aussi (13),

$$\|P_gf\|=\|P_gf^+-P_gf^-\|\leqq\|P_gf^+\|+\|P_gf^-\|\leqq K(\|f^+\|+\|f^-\|)\leqq CK^2\|f\|.$$

Puisque P_g est une transformation linéaire bornée sur la variété linéaire $\mathfrak{M}$ dense dans $\mathfrak{R}$, elle se prolonge par continuité sur l'espace entier $\mathfrak{R}$. Observons que $\|P_g\|$ reste inférieure à la quantité CK^2 qui *ne dépend pas* de l'élément $g\in\mathfrak{B}$.

Les transformations linéaires bornées P_g ainsi définies fournissent une *représentation* de l'algèbre de Boole $\mathfrak{B}$, ce qui veut dire que $P_0=0$, $P_e=I$, $P_{g_1\wedge g_2}=P_{g_1}P_{g_2}$, $P_{e-g}=I-P_g$.[15])

Il suffit d'établir ces relations pour les éléments $h\in\mathfrak{B}$ parce que leurs combinaisons linéaires sont denses dans $\mathfrak{R}$. Or on a $0\wedge h=0$, $e\wedge h=h$, $g_1\wedge(g_2\wedge h)=(g_1\wedge g_2)\wedge h$, enfin

$$(g\wedge h)+((e-g)\wedge h)=(g\wedge h)\vee((e-g)\wedge h)=(g\vee(e-g))\wedge h=e\wedge h=h,$$

ce qui prouve nos assertions.

Or J. Dixmier vient de montrer que *toute représentation d'une algèbre de Boole par des transformations linéaires uniformément bornées d'un espace de Hilbert, est semblable à une représentation par des projections (orthogonales)*[16]). Cela veut dire qu'il existe une transformation linéaire bicontinue T de $\mathfrak{R}$ sur lui-même telle que les transformations $Q_g=TP_gT^{-1}$ sont des projections. Ce résultat est un corollaire du théorème de cet auteur affirmant que, pour une certaine classe de groupes embrassant tous les groupes abéliens, toute représentation bornée par des transformations linéaires dans l'espace de Hilbert, est semblable à une représentation par des transformations unitaires. La démonstration utilise des moyennes généralisées et est modelée

---

[15]) Puisque $g_1\vee g_2=e+(g_1-e)\vee(g_2-e)=e-(e-g_1)\wedge(e-g_2)$, on a
$$P_{g_1\wedge g_2}=I-(I-P_{g_1})(I-P_{g_2})=P_{g_1}+P_{g_2}\quad P_{g_1}P_{g_2}.$$

[16]) J. Dixmier, Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications, *ces Acta*, **12 A** (1950), p. 213–227, en particulier pp. 222—223.

sur la démonstration donnée par l'auteur pour les groupes additifs des nombres entiers et des nombres réels.[17])

5. Les transformations P_h sont permutables $(P_h P_g = P_{h\wedge g} = P_{g\wedge h} = P_g P_h)$, et il en est alors de même pour les projections Q_h. Par conséquent, il existe une résolution spectrale simultanée des Q_h, soit

$$Q_h = \int_0^1 h(x)\, dE_x,$$

où $\{E_x\}$ est une famille spectrale de projections et la fonction $h(x)$, correspondant à Q_h, est la fonction caractéristique d'un certain sous-ensemble de $[0, 1]$ qu'on peut d'ailleurs choisir un ensemble borélien.[18])

Soit $r(x)$ une fonction bornée borélienne quelconque; $R = \int_0^1 r(x)\, dE_x$ est alors une transformation linéaire bornée de $\mathfrak{R}$. Les combinaisons linéaires $\varphi = \mu_\alpha h_\alpha$ $(h \in \mathfrak{B})$ étant partout denses dans $\mathfrak{R}$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un tel φ qui approche l'élément $T^{-1}RTe$ à $\varepsilon/\|T\|$ près. On aura alors $\|RTe - T\varphi\| \leqq \varepsilon$. Comme on a $Q_h Te = TP_h e = Th$, il en résulte que

$$\int_0^1 (r(x) - \Sigma \mu_\alpha h_\alpha(x))^2\, d\|E_x Te\|^2 = \|(R - \Sigma \mu_\alpha Q_{h_\alpha})\, Te\|^2 = \|RTe - T\varphi\|^2 < \varepsilon^2.$$

Les combinaisons linéaires $\Sigma \mu_\alpha h_\alpha(x)$ sont donc denses dans l'espace L^2 des fonctions à carré sommable par rapport à la fonction croissante $\varrho(x) = \|E_x Te\|^2$. On peut même supposer que les fonctions $h_\alpha(x)$ figurant dans la même combinaison linéaire soient telles que $h_\alpha(x)\, h_\beta(x) = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, presque partout par rapport à $\varrho(x)$. Cela résulte du fait que les éléments h_α figurant dans $\Sigma \mu_\alpha h_\alpha$ peuvent être choisis disjoints (voir n° 4) et que $h \wedge h' = 0$ entraîne $P_h P_{h'} = P_{h\wedge h'} = P_0 = 0$ et aussi $Q_h Q_{h'} = \int_0^1 h(x)\, h'(x)\, dE_x = 0$.

Pour $\varphi = \Sigma \mu_\alpha h_\alpha$ et $\varphi(x) = \Sigma \mu_\alpha h_\alpha(x)$ on a, puisque $Th = Q_h Te$,

$$\|T\varphi\|^2 = \|\Sigma \mu_\alpha Q_{h_\alpha} Te\|^2 = \int_0^1 [\varphi(x)]^2\, d\varrho(x).$$

Cela exprime que la correspondance entre $T\varphi \in \mathfrak{R}$ et $\varphi(x) \in L^2$ est isométrique. Ces éléments étant denses respectivement dans $T\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ et dans L^2, la correspondance se prolonge par continuité aux espaces entiers: $Tf \longleftrightarrow f(x)$, linéarité et isométrie restant conservées T étant une affinité de $\mathfrak{R}$ sur lui-même, la correspondance $f \longleftrightarrow f(x)$ qui s'en dérive, est une affinité de $\mathfrak{R}$ sur L^2.

---

[17]) B. Sz.-Nagy, On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *ces Acta*, **11** (1947), p. 152—157. Là, il est montre aussi que si l'espace $\mathfrak{R}$ est supposé séparable, on peut éviter de faire usage de l'axiome de Zermelo.

[18]) Cf. par ex. B. Sz.-Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (Berlin, 1942), Chap. X.

Montrons que, dans cette affinité, les éléments $f \in \mathfrak{P}$ et les fonctions $f(x) \geqq 0$ se correspondent.

En effet, tout $f \in \mathfrak{P}$ est limite de sommes $\Sigma \lambda_\alpha h_\alpha$ avec $\lambda_\alpha \geqq 0$; la fonction correspondante $f(x)$ est alors la limite, dans L^2, des sommes $\Sigma \lambda_\alpha h_\alpha(x) \geqq 0$ et par conséquent aussi $f(x) \geqq 0$.

Soit, inversement, $f(x) \geqq 0$ dans L^2; on sait qu'elle est la limite de sommes $\Sigma \mu_\alpha h_\alpha(x)$ où les $h_\alpha(x)$ sont des fonctions caractéristiques de certains sous-ensembles de $[0, 1]$ et $h_\alpha(x) h_\beta(x) = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, p. p. par rapport à $\varrho(x)$. On a alors $|f(x) - \Sigma \mu_\alpha h_\alpha(x)| \geqq |f(x) - \Sigma \mu_\alpha^+ h_\alpha(x)|$ p. p.; par conséquent, $f(x)$ est la limite aussi des sommes $\Sigma \mu_\alpha^+ h_\alpha(x)$. L'élément correspondant $f \in \mathfrak{R}$ est alors la limite des sommes $\Sigma \mu_\alpha^+ h_\alpha$ appartenant à $\mathfrak{P}$, donc aussi $f \in \mathfrak{P}$.

Cela achève la démonstration de notre théorème.

6. L'existence d'un espace L^2 du type exigé étant ainsi établie, cherchons dans quelle mesure la fonction $\varrho(x)$ qui sert à le construire, est déterminée.

Appelons génératrice extrémale de $\mathfrak{P}$ toute demi-droite (issue de 0) portée par un élément $u \in \mathfrak{P}$, $u \neq 0$, qui n'admet d'autres décompositions $u = u_1 + u_2$ $(u_1, u_2 \in \mathfrak{P})$ que celles évidentes $u = ku + (1-k)u$ avec $0 \leqq k \leqq 1$. Il est évident que la fonction $u(x) \in L^2$ qui correspond à un tel élément doit être équivalente à une fonction s'annulant partout sauf en un seul point de mesure positive. À toute génératrice extrémale de $\mathfrak{P}$ correspond ainsi un point de discontinuité de la fonction monotone $\varrho(x)$. On arrive ainsi au résultat suivant:

La fonction $\varrho(x)$ doit avoir autant de sauts que $\mathfrak{P}$ a de génératrices extrémales; $\varrho(x)$ est une fonction pure des sauts (c'est-à-dire à partie continue constante) si et seulement si $\mathfrak{P}$ est engendré par ses génératrices extrémales.

Faisons correspondre à une fonction monotone le symbole (i, j) où $i = 0$ ou $i = 1$ selon que la partie continue est constante ou non, et où j désigne le nombre des sauts; $j = 0, 1, \ldots$ ou dénombrablement infini. Le type (i, j) de la fonction $\varrho(x)$ est déterminé, comme nous venons de l'observer, par des invariants affines de $\mathfrak{P}$. Or ce système d'invariants est aussi *complet.*

Cela résulte du fait que les espaces L^2 construits à l'aide de fonctions $\varrho(x)$, $\varrho'(x')$ du même type (i, j) peuvent être appliqués l'un sur l'autre d'une façon linéaire, isométrique et conservant l'ordre. S'il s'agit du type $(0, j)$, soient ξ_n, ξ_n' les points de discontinuité et u_n, u_n' les sauts correspondants de ϱ, ϱ'. L'application des deux espaces $f(x) \leftrightarrow f'(x')$, définie par

$$f(\xi_n)\sqrt{u_n} = f'(\xi_n')\sqrt{u_n'} \qquad (n = 0, 1, \ldots, j),$$

répond évidemment à nos exigences. Dans le cas du type opposé $(1, 0)$, envisageons l'inverse de $\varrho(x)$, soit $x(\varrho)$, définie dans l'intervalle fini ou infini (ϱ_1, ϱ_2). Soit $\varrho = \sigma(t)$ une fonction absolument continue, strictement croissante et appliquant l'intervalle $0 < t < 1$ sur l'intervalle $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$. En posant

$X(t)=x(\sigma(t))$, on a

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\varrho(x)=\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\varphi(x(\varrho))\,d\varrho=\int_0^1\varphi(X(t))\frac{d\sigma(t)}{dt}dt$$

pour toute fonction $\varphi(x)$ intégrable par rapport à $\varrho(x)$, ou, ce qui revient au même, pour laquelle $\varphi(X(t))\sqrt{d\sigma/dt}$ est intégrable au sens usuel.

Faisant correspondre des fonctions analogues à $\varrho'(x')$, on voit que l'application $f(x)\leftrightarrow f'(x')$, définie par

$$f(X(t))\sqrt{d\sigma(t)/dt}=f'(X'(t))\sqrt{d\sigma'(t)/dt},$$

répond à nos exigences. Enfin, dans le cas mixte $(1,j)$ $(j>0)$, on procède en superposant les deux méthodes.

7. Appelons un espace linéaire topologique un *"lattice" vectoriel normal*, lorsqu'il est un "lattice" vectoriel[19]) et que de plus (i) $f_n\geqq 0$ et $f_n\to f$ entraînent $f\geqq 0$, (ii) $f_n\geqq g_n\geqq 0$, $f_n\to 0$ entraînent $g_n\to 0$.

Notre théorème admet le corollaire suivant:

Tout espace L^2 est, par l'ordre naturel des fonctions, un "lattice" vectoriel normal. Tout espace de Hilbert qui est en même temps un "lattice" vectoriel normal, est l'image affine et conservant l'ordre d'un espace L^2.

Remarque. Nous nous sommes bornés à l'étude des espaces de Hilbert séparables. Or le théorème et son corollaire pourraient être étendus aussi à des espaces non séparables et cela par une décomposition convenable de l'espace envisagé en espaces séparables, proposée à propos de certains problèmes voisins par WECKEN et KAKUTANI[20]).

(Reçu le 5 octobre 1949)

---

19) Cf. BIRKHOFF, *loc. cit.* 9).

20) F. WECKEN, Unitärinvarianten selbstadjungierter Operatoren, *Math. Annalen*, **116** (1938), p. 422–455; S. KAKUTANI, Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem, *Annals of Math.*, **42** (1941), p. 525–537.

Zum Begriff der rekursiven reellen Zahl.

Von RÓZSA PÉTER in Budapest.

§ 1. Unter rekursiven Funktionen werde ich primitiv-rekursive zahlentheoretische Funktionen verstehen, d. h. solche, die für nicht-negative ganze Argumente definiert sind, und aus 0 und $n+1$ ausgehend durch endlich viele Substitutionen und Rekursionen der Form

$$\varphi(0, a_1, \ldots, a_r) = \alpha(a_1, \ldots, a_r),$$
$$\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r) = \beta(n, a_1, \ldots, a_r, \varphi(n, a_1, \ldots, a_r))$$

entstehen, wobei α und β bereits definierte Funktionen sind. Eine Beziehung zwischen den Variablen $a_1, \ldots, a_r$ heißt rekursiv, wenn es eine rekursive Funktion $\beta(a_1, \ldots, a_r)$ gibt, welche für ein beliebiges r-Tupel $a_1, \ldots, a_r$ dann und nur dann verschwindet, wenn unter $a_1, \ldots, a_r$ die betreffende Beziehung besteht.

Man kann beweisen, daß die Funktionen und Beziehungen, die in der elementaren Zahlentheorie eine Rolle spielen, rekursiv sind[1]).

In den Folgenden werde ich die bekannte Tatsache benutzen, daß die Beziehungen

$$a = b, \; a \geqq b$$

und die Funktionen

$$a + n, \; n \cdot a, \; \max(a_1, \ldots, a_r), \; \sigma(n), \; n \dot{-} 1, \; \left[\frac{a}{n}\right]$$

rekursiv sind; hierbei ist $\sigma(n)$ die Teilersumme von n,

$$n \dot{-} 1 = \begin{cases} n-1, & \text{falls } n > 0 \\ 0 & \text{falls } n = 0, \end{cases}$$

und

$$\left[\frac{a}{n}\right] = \begin{cases} \text{die in } \dfrac{a}{n} \text{ enthaltene größte ganze Zahl, falls } n \neq 0, \\ 0, \text{ falls } n = 0; \end{cases}$$

---

1) Siehe TH. SKOLEM, Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise, *Videnskapsselskapets Skrifter, I. Mat.-Naturw. Klasse,* **6** (1923), S. 3–38; K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, *Monatshefte für Math. und Phys.,* **38** (1931), S. 173—198.

ferner, daß die Rekursivität der Funktionen $\alpha_1(n)$, $\alpha_2(n)$ und der Beziehung $B(n)$ die Rekursivität der durch

$$\varphi(n)=\begin{cases}\alpha_1(n), \text{ falls } B(n) \text{ besteht,}\\ \alpha_2(n) \text{ sonst,}\end{cases}$$

definierten Funktion $\varphi(n)$ nach sich zieht.

Der Einfachheit halber werde ich mich in den folgenden Erweiterungen des Rekursivitätsbegriffes auf nicht-negative Zahlen beschränken; das ist aber unwesentlich.

§ 2. Die Werte einer rekursiven Funktion lassen sich an einer jeden Stelle in endlich vielen Schritten berechnen. So ist es naheliegend, die „vagen" Begriffe der „Konstruktivität", „Effektivität", in den verschiedenen Gebieten der Mathematik, mit Hilfe der rekursiven Funktionen zu präzisieren.

Specker[2]) nennt eine Folge

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

von positiven rationalen Zahlen rekursiv, wenn

$$a_n = \frac{\alpha(n)}{\beta(n)},$$

wobei α und β rekursiv sind, und $\beta(n) \geqq 1$ ist.

Man sagt, eine solche Folge konvergiere rekursiv, falls es eine rekursive Funktion $\nu(m)$ gibt, so daß für $n, n^* \geqq \nu(m)$

$$|a_n - a_{n^*}| < \frac{1}{m}$$

gilt. Eine positive reelle Zahl r heißt nach Specker rekursiv, falls eine rekursive Folge rationaler Zahlen rekursiv gegen r konvergiert.

Diese Begriffsbildung ist aber nicht befriedigend, da sie nicht gewisse naheliegende Konstruktivitätsforderungen erfüllt. Nennen wir in der Tat mit Specker die reelle Zahl r in einen rekursiven Dezimalbruch entwickelbar, falls

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots,$$

wobei $0 \leqq a_n \leqq 9$ für alle $n \geqq 1$, und a_n eine rekursive Funktion von n ist; und sagen wir, r definiere einen rekursiven Schnitt, falls

$$\frac{m}{n+1} > r$$

eine rekursive Beziehung zwischen m und n ist, so zeigt Specker, daß sich nicht jede rekursive reelle Zahl in einen rekursiven Dezimalbruch entwickeln läßt, und daß nicht jede Zahl, die sich in einen rekursiven Dezimalbruch entwickeln läßt, einen rekursiven Schnitt definiert.

---

[2]) E. Specker, Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, *Journal of Symbolic Logic*, **14** (1949), S. 145–158.

Definiert dagegen r einen rekursiven Schnitt, so sieht man sowohl für rationales als auch für irrationales r leicht ein, daß sich r nicht nur in einen rekursiven Dezimalbruch entwickeln läßt, sondern auch folgendes gilt: Ist b_n eine beliebige rekursive Funktion von n, für die $b_1 \geqq 1$, $b_n \geqq 2$ $(n > 1)$, so läßt sich r in eine Reihe

$$r = a_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} + \ldots$$

mit

$$0 \leqq a_n \leqq b_n - 1 \qquad (n \geqq 1)$$

rekursiv, d. h. derart entwickeln, daß a_n eine rekursive Funktion von n ist.

§ 3. Da

$$\frac{m}{n+1} > r, \text{ das heißt } m > (n+1)r,$$

damit gleichbedeutend ist, daß m wenigstens um 1 größer ist, als die in $(n+1)r$ enthaltene größte ganze Zahl:

$$m \geqq [(n+1)r] + 1,$$

so folgt aus der Rekursivität von $[nr]$, daß r einen rekursiven Schnitt definiert.

Für positives rationales r ist $[nr]$ rekursiv; daher definiert ein positives rationales r immer einen rekursiven Schnitt.

Für irrationales r ist $[nr]$ dann und nur dann rekursiv, wenn in der Fakultätenentwicklung

$$r = a_0 + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \ldots + \frac{a_n}{n!} + \ldots \quad \text{mit} \quad a_n \leqq n-1 \text{ für } n \geqq 1,$$

a_n eine rekursive Funktion von n ist[3]). Die Fakultätenentwicklung ist aber ein Spezialfall der Entwicklungen von r, die nach dem vorigen Punkt zu einem rekursiven a_n führen falls r einen rekursiven Schnitt definiert.

Demnach *definiert r dann und nur dann einen rekursiven Schnitt, wenn $[nr]$ rekursiv ist.*

§ 4. Man hat die rationalen und die irrationalen r gesondert zu betrachten, da es für den Beweis wesentlich ist, daß man in der Fakultätenentwicklung

$$r = a_0 + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \ldots + \frac{a_n}{n!} + \ldots \quad \text{mit} \quad a_n \leqq n-1 \text{ für } n \geqq 1$$

entweder ein ν bestimmen kann, so daß für jedes $n \geqq \nu$ $a_n = n-1$ gilt (d. h.

---

[3]) R. Péter, Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, *Math. Annalen*, **110** (1934), S. 612–632; insbesondere Fußnote [9]). Da wurde noch nicht hervorgehoben, daß man die Fälle, wo r rational oder irrational ist, getrennt behandeln muß.

r rational ist), oder für jedes ν ein $n \geqq \nu$ bestimmen kann, für welches

$$a_n < n - 1$$

(was für ein irrationales r zutrifft). Läßt sich dagegen für die Koeffizienten der Fakultätenentwicklung einer Zahl r nicht entscheiden, ob über alle Grenzen ein n mit

$$a_n < n - 1$$

vorkommt, so kann man von der Rekursivität von a_n noch nicht auf eine „effektive" Rekursivität von $[n r]$ schließen. Denn z. B., da die Gleichung

$$\sigma(m) = 2m$$

(wobei $\sigma(m)$ wie gesagt die Teilersumme von m bedeutet), die vollkommenen Zahlen charakterisiert, so läßt sich nach unserem heutigen Wissen für

$$a_n = \begin{cases} 0, \text{ falls } \sigma(2n+1) = 2(2n+1), \\ n \dot{-} 1 \text{ sonst,} \end{cases}$$

nicht entscheiden, ob es überhaupt ein n gibt, für welches $a_n < n - 1$; trotzdem für alle n $a_n \leqq n - 1$ gilt, und a_n eine rekursive Funktion von n ist. Wird mit den Werten von a_n als Koeffizienten die Reihe

$$a_0 + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \ldots + \frac{a_n}{n!} + \ldots$$

gebildet, so konvergiert diese Reihe gegen eine Zahl r. Aber trotz der Rekursivität von a_n ist

$$[n r]$$

keinem bekannten rekursiven Funktion gleich, denn mit unserem heutigen Wissen können wir nicht einmal an der Stelle $n = 1$ den Wert von $[n r]$ bestimmen. Gibt es nämlich keine ungerade vollkommene Zahl, so ist

$$r = 0 + \frac{1-1}{1!} + \frac{2-1}{2!} + \frac{3-1}{3!} + \ldots = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots = 1,$$

also

$$[1 \cdot r] = 1;$$

gibt es aber auch ungerade vollkommene Zahlen, so tritt hier an Stelle wenigstens eines — positiven — Gliedes 0, also ist

$$r < 1 \text{ und so } [1 \cdot r] = 0.$$

(Man kann freilich sagen, daß, falls es keine ungerade vollkommene Zahl gibt, $[n r] = n$, im entgegengesetzten Falle aber $[n r]$ gleich einer anderen, zur Zeit unbekannten rekursiven Funktion ist; dies ist aber offenbar nicht das, was man angemessenerweise von einer rekursiven Funktion verlangt.)

Es lassen sich freilich auch mit Hilfe anderer bisher unentschiedenen zahlentheoretischen Probleme ähnliche Beispiele konstruieren, und vermutlich werden zu jeder Zeit solche unentschiedene Probleme vorhanden sein.

§ 5. Daß hier die Entscheidbarkeit der Rationalität oder Irrationalität von r eine wichtige Rolle spielt, stellt sich auch aus den Folgenden heraus.

Es sei r eine rekursive positive reelle Zahl, d. h., es gebe eine Folge a_n rekursiver positiver rationaler Zahlen, die gegen r konvergieren, und zwar rekursiv, so daß es eine rekursive Funktion $\nu_1(m)$ gibt, für welche bei $n, n^* \geqq \nu_1(m)$

$$|a_n - a_{n^*}| < \frac{1}{m}$$

gilt.

r ist dann und nur dann irrational, wenn es zu einem beliebigen Bruch $\frac{p}{q}$ ein $k > 0$ und ein N gibt, so daß sich a_n für alle $n \geqq N$ um mehr als $\frac{1}{k}$ von $\frac{p}{q}$ unterscheidet.

Ich behaupte: *Wenn es in einem solchen konstruktiven Sinn besteht, daß es rekursive Funktionen $\varkappa(p,q) > 0$ und $\nu_2(p,q)$ gibt, so daß für alle positive ganze p und q, und für $n \geqq \nu_2(p,q)$*

$$\left| a_n - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{\varkappa(p,q)}$$

gilt, dann ist diese „rekursive Irrationalität" von r schon hinreichend dafür, daß r einen rekursiven Schnitt definiert.

Ich werde nämlich — unter Benutzung eines für andere Zwecke eingeführten Beweisgedankens von GOODSTEIN[4]) — zeigen, daß es unter diesen Bedingungen eine rekursive Funktion $\nu(m)$ gibt, so daß für $n \geqq \nu(m)$

$$[m\, a_n] = [m\, a_{\nu(m)}]$$

ist, woraus dann die Behauptung leicht folgt.

§ 6. Nehmen wir also an, daß die Bedingungen der vorigen Nummer erfüllt sind; und es sei

$$[m\, a_{\nu_1(2m)}] = \gamma_m.$$

γ_m ist freilich eine rekursive Funktion von m. Unterscheiden wir die beiden Fälle:

(1) $$0 \leqq m a_{\nu_1(2m)} - \gamma_m \leqq \frac{1}{2}$$

und

(2) $$m a_{\nu_1(2m)} - \gamma_m > \frac{1}{2}, \text{ das heißt } 0 < \gamma_m + 1 - m a_{\nu_1(2m)} < \frac{1}{2}.$$

Betrachten wir den Fall (1) Wird $\nu_1(2m)$ für n^* gewählt, so ist nach der Annahme für $n \geqq \nu_1(2m)$

---

4) R. L. GOODSTEIN, The strong convergence of the exponential function, *Journal London Math. Soc.*, **22** (1947), S. 200—205.

$$|a_n - a_{\nu_1(2m)}| < \frac{1}{2m}, \quad \text{also} \quad |ma_n - ma_{\nu_1(2m)}| < \frac{1}{2},$$

und dies ergibt mit (1)

$$|ma_n - \gamma_m| < 1.$$

Andererseits ist nach Annahme für $n \geqq \nu_2(\gamma_m, m)$

$$\left| a_n - \frac{\gamma_m}{m} \right| > \frac{1}{\varkappa(\gamma_m, m)}, \quad \text{also} \quad |ma_n - \gamma_m| > \frac{m}{\varkappa(\gamma_m, m)};$$

dies kann aber nach den Vorigen nur der Fall sein, falls

$$k_m = \frac{m}{\varkappa(\gamma_m, m)} < 1$$

ist.

Ist demnach

$$n \geqq \max(\nu_1(2m), \nu_2(\gamma_m, m)),$$

so gilt

$$k_m < |ma_n - \gamma_m| < 1,$$

und daher fällt für solche n ein jedes ma_n in eine der offenen Intervallen

$$(\gamma_m + k_m, \gamma_m + 1), \; (\gamma_m - 1, \gamma_m - k_m).$$

Der Abstand des Anfangspunktes $\gamma_m + k_m$ des ersten Intervalls vom Endpunkt $\gamma_m - k_m$ des (links davon liegenden) zweiten Intervalls beträgt $2k_m$. Für genügend großes n unterscheiden sich aber die Glieder der Folge ma_n weniger als $2k_m$ voneinander; nach der Annahme ist ja für $n, n^* \geqq \nu_1(\varkappa(\gamma_m, m))$

$$|a_n - a_{n^*}| < \frac{1}{\varkappa(\gamma_m, m)}, \quad \text{also} \quad |ma_n - ma_{n^*}| < \frac{m}{\varkappa(\gamma_m, m)} = k_m.$$

Für hinreichend große Indizes können also die Glieder der Folge ma_n nur in *einem* der genannten beiden offenen Intervallen enthalten sein: ist nämlich

$$\nu_0(m) = \max(\nu_1(2m), \nu_2(\gamma_m, m), \nu_1(\varkappa(\gamma_m, m))),$$

so gilt entweder für alle $n \geqq \nu_0(m)$

$$\gamma_m + k_m < ma_n < \gamma_m + 1,$$

woraus

$$\gamma_m < ma_n < \gamma_m + 1, \quad \text{also} \quad [ma_n] = \gamma_m$$

folgt; oder aber gilt für alle $n \geqq \nu_0(m)$

$$\gamma_m - 1 < ma_n < \gamma_m - k_m$$

und demnach

$$\gamma_m - 1 < ma_n < \gamma_m, \quad \text{also} \quad [ma_n] = \gamma_m - 1.$$

Für $n \geqq \nu_0(m)$ ist daher der Wert von $[ma_n]$ jedenfalls unabhängig von n, und daher stets gleich dem zum Index $n = \nu_0(m)$ gehörigen Wert:

$$\text{für } n \geqq \nu_0(m) \text{ gilt } [ma_n] = [ma_{\nu_0(m)}].$$

Dieser Gedankengang läßt sich auch im Fall (2) genau wiederholen, wenn nur überall $\gamma_m + 1$ statt γ_m gesetzt wird; und so ergibt sich, daß es auch in diesem Fall eine rekursive Funktion $\nu_0'(m)$ gibt, so daß

$$\text{für } n \geqq \nu_0'(m) \quad [m a_n] = [m a_{\nu_0'(m)}] \quad \text{gilt.}$$

Wird also

$$\nu(m) = \max(\nu_0(m), \nu_0'(m))$$

gesetzt, so ist der Wert von $[m a_n]$ in beiden Fällen unabhängig von n und so tatsächlich

$$\text{für } n \geqq \nu(m) \quad [m a_n] = [m a_{\nu(m)}].$$

§ **7.** Daraus folgt aber, daß auch

$$[m r] = [m a_{\nu(m)}]$$

ist. Nach dem Ergebnis der vorigen Nummer ist ja für $n \geqq \nu(m)$

$$m a_n = [m a_n] + r_{m n} = [m a_{\nu(m)}] + r_{m n},$$

wo

$$0 \leqq r_{m n} < 1,$$

und so fällt der Grenzwert mr der Folge $m a_n$ zwischen den folgenden Schranken:

$$[m a_{\nu(m)}] \leqq m r \leqq [m a_{\nu(m)}] + 1.$$

Hier kann wegen der Irrationalität von r keine Gleichheit bestehen; also ist tatsächlich

$$[m r] = [m a_{\nu(m)}].$$

Nun ist aber $[m a_{\nu(m)}]$ rekursiv, und so hat es sich erwiesen, daß auch $[m r]$ rekursiv ist.

Nach § 3 folgt daraus aber, daß r einen rekursiven Schnitt definiert, und so (nach § 2), daß die üblichen Reihenentwicklungen von r rekursiv sind. Dies gilt also für alle rekursive reelle Zahlen, die „rekursiv irrational" sind.

(Eingegangen am 3. Dezember 1949.)

Translation of figures between lattice points.

By G. HAJÓS in Budapest.

We consider in the n-dimensional euclidean space R_n an n-dimensional point-lattice L and a figure F. This figure may be an arbitrary point set, but will be specialized later on. We apply to F all translations of R_n and consider those of these translated figures which do not contain any point of L. There may be points (apart from the points of L) which can not be covered by any of these translated figures, i. e. which can not be covered by a figure arising from F by translation without covering by the same figure a point of L too. The present paper deals with the question what can be said about the set U of these "uncoverable" points[1]).

1. For any figure F in R_n, let $F+\mathbf{v}$ denote the figure arising from F when translated by the vector $\mathbf{v}$.

We call a point set G a *point group* if for each vector $\mathbf{v}$ the sets $G+\mathbf{v}$ and G are identical or have no point in common. The vectors $\mathbf{v}$, for which $G+\mathbf{v}=G$, form an additive group and will be called *G-vectors.* Two points are *G-homologous* if the vector joining them is a G-vector. A point group is a *point-lattice* if it consists of isolated points.

We shall consider a point-lattice L and a point set F, and denote, according to the introduction, by U the set of points P for which each $F+\mathbf{v}$ containing P contains at least one point of L too. Consequently, U contains all points of L. We denote by $[F]$ the union of all sets $F+\mathbf{l}$ where $\mathbf{l}$ is an L-vector. It is possible that U contains all points of R_n. This is the case if and only if $[F]$ is the whole space R_n. As easily seen, U contains all points which are L-homologous to one of its points.

2. *U contains the set $L+\mathbf{u}$ if and only if $[F]+\mathbf{u}$ contains $[F]$.* $U \supset L+\mathbf{u}$ (i. e U contains $L+\mathbf{u}$) means that, translating an arbitrary point P of F in

---

[1]) In the two dimensional case our problem could be stated as follows: We clean up the floor with a brush. There are outstandig nails in the floor which form a point-lattice. The brush may be slid or lifted up remaining always parallel to its former positions. What can be said about the poin s where the dirt is gathering, which can not be cleaned up?

a point of $L+\mathbf{u}$, there will be a point Q of F which covers after this translation a point of L. The translated Q belongs to L if and only if the translated $Q+\mathbf{u}$ belongs to $L+\mathbf{u}$, consequently, if and only if $Q+\mathbf{u}$ and P are L-homologous points. The supposition $U \supset L+\mathbf{u}$ is therefore equivalent to the fact that there exists to each point P of F a point Q of F for which $Q+\mathbf{u}$ and P are L-homologous. This is just the content of our proposition.

If U contains $L+\mathbf{u}_1$ and $L+\mathbf{u}_2$, it contains $L+(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)$ too. In fact, if $[F]+\mathbf{u}_1$ and $[F]+\mathbf{u}_2$ contain $[F]$, we have $[F]+(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=([F]+\mathbf{u}_1)+ +\mathbf{u}_2 \supset [F]+\mathbf{u}_2 \supset [F]$.

We could say therefore that U is a "point semigroup". U would be a point group if it would contain $L-\mathbf{u}$ together with $L+\mathbf{u}$. But this is not in general the case. We show this by the

Example 1. L consists of the points of R_1 with integer coordinates: F consists of the points $p\alpha$, where α is irrational and $p=1, 2, \ldots$ The corresponding set U consists of the points $q-p\alpha$, where q is integer and $p=0, 1, 2, \ldots$.

This example shows that U need not be closed in general.

3. *If F is open, then U is closed.* In fact, the complementary of U is a sum of open sets $F+\mathbf{v}$.

If F is bounded and closed, then U is closed. Let P be the limit point of a sequence P_n. If P does not belong to U, there exists an $F+\mathbf{v}$ containing P but none of the points of L. Since $F+\mathbf{v}$ is closed, each lattice point has a positive distance from it. Since $F+\mathbf{v}$ is bounded, there is only a finite number of lattice points whose distance from it is less than 1 and these distances have a positive lower bound ε. Consequently, if we translate $F+\mathbf{v}$ at a distance less than ε, the new figure contains no lattice point. But these newly translated figures cover the ε-neighbourhood of P and so almost all points of the sequence P_n too. These do not belong to U.

We remark that U need not be closed if F is only measurable. This is shown by example 1.

If U is closed, then U is a point group. Let $\mathbf{u}$ be a vector for which $L+\mathbf{u}$ belongs to U. It contains consequently, for any positive integer m, the set $L+m\mathbf{u}$ too. According to DIRICHLET's theorem we can find to any positive ε an integer m for which the points of $L+m\mathbf{u}$ are contained in the ε-neighbourhoods of the lattice points. The points of $L+(m-1)\mathbf{u}$ are, therefore, in the ε-neighbourhoods of the points of $L-\mathbf{u}$. The latters are then limit points of U and belong to U. The vectors $\mathbf{u}$, for which $L+\mathbf{u} \subset U$, form an additive group, i. e. U is a point group.

Resuming our statement, we have the following result:

If F is open, or bounded and closed, then U is a closed point group.

Since, in the considered case, $[F]+\mathbf{u}\supset[F]$ implies in succession $U\supset L+\mathbf{u}$, $U\supset L-\mathbf{u}$, $[F]-\mathbf{u}\supset[F]$, and this is equivalent to $[F]+\mathbf{u}\subset[F]$, we proved:

If F is open, or bounded and closed, then U consists of the lattices $L+\mathbf{u}$ for which $[F]+\mathbf{u}=[F]$.

4. We call a set of R_n *k-dimensional* if it is contained in a k-dimensional linear subspace of R_n but is not contained in any linear subspace of lower dimension.

An n dimensional closed point group G of R_n is either a point-lattice, or coincides with R_n itself, or else it consists of isolated parallel linear k-dimensional subspaces ($k=1, 2, \ldots, n-1$).

We consider a point P of G and the set of points of G which are in an ε-neighbourhood of P. The dimension of this point set can not increase with decreasing ε. If ε is sufficiently little, this dimension becomes minimal. We denote this local dimension of G by k and the k-dimensional linear subspace containing this k-dimensional neighbourhood by S. If $k=0$, P is isolated and G is a point-lattice. Since k is minimal, there are k points of G in every prescribed neighbourhood of P in S which form with P a k-dimensional set. The lattices generated by these sets belong to G and assure that G is everywhere dense in S. As G is closed, it contains all points of S. If $k=n$, G is identical with R_n. If $0<k<n$, the k-dimensional subspace S is isolated in G, since otherwise the local dimension at P could not be k. Because G is a point group, it consists of isolated subspaces parallel to S.

We have obtained the following result:

If F is open or if F is bounded and closed, then U is either a point-lattice, or coincides with R_n, or else it consists of isolated parallel linear subspaces.

It is easy to find special figures which realize all these different possibilities. The case $U=R_n$ has no special interest. The case in which U consists of parallel subspaces may be easily reduced to the case where U is a point-lattice. This can be done by projecting the lattice L and the figure F on an $(n-k)$-dimensional linear subspace T which is totally orthogonal to S. The projected figure F_T and the projected lattice L_T define the set U_T. As easily proved, U_T is a point-lattice and U consists of subspaces parallel to S through the points of U_T. We are therefore interested only in the case where U is a point-lattice.

5. If U is a point-lattice, the question arises if it can have other points than the points of L. This may happen even if F is a simply connected region. We show this by the

Example 2. Let L be two dimensional and we define F by deleting from a fundamental parallelogram of L the ε-neighbourhoods of the vertices and of the midpoints of two opposite sides. The corresponding U is the lattice generated by L and these midpoints, whether F is open or closed.

We specialize the figure F and examine the case of (open or closed) convex figures.

If the set U corresponding to the open or closed convex figure F is a point-lattice, then U is identical with L if the dimension n is equal to 1 *or* 2, *but it may be different from L if $n \geqq 3$.*

The one dimensional case is obvious.

In two dimensions we distinguish two cases. Since we shall need the first part of this argument later on also in three dimensions, we shall speak in this part simultaneously from two and three dimensions. Since F is convex and U is a lattice, F is necessarily bounded.

We consider first the case in which the boundary of $[F]$ does not consist of isolated points. We denote by $\mathbf{u}$ a U-vector which is not an L-vector and by $\mathbf{l}$ the L-vectors. We consider a part B of the boundary of $[F]$, of the same topological dimension as this boundary. This part B is covered by parts of the boundaries of the figures $F+\mathbf{l}$, and simultaneously, since $[F]=[F+\mathbf{u}]$, by parts of the boundaries of the figures $F+\mathbf{u}+\mathbf{l}$. The number of these parts is finite, because F is bounded. We can choose, therefore, an interior point P in the common part of two of them in which $[F]$ has a tangent line (plane). P has L-homologous points P_1 resp. $P_2+\mathbf{u}$ on the boundaries of F resp. $F+\mathbf{u}$, the tangent lines (planes) in which exist and are parallel to the tangent line (plane) in P. The resulting points P_1 and P_2 are on the boundary of F and of $[F]$, are U-homologous to each other, and F has parallel tangent lines (planes) in them. It follows that all the points of the chord P_1P_2 are on the boundary of F.

We could have chosen, instead of B, any other part of the boundary of $[F]$. Since U is a lattice, $[F]$ must have boundaries in all directions, more precisely: there exist to each prescribed direction parts of the boundary of $[F]$, all the supporting half-planes (-spaces) in the points of which contain the prescribed direction in their interior, i. e. contain an interior half line of the prescribed direction. In each of these parts we can find points to take the part of P. In the two dimensional case our reasoning leads to at least three pairs of U-homologous points on the boundary of F which are all different from each other. They define an inscribed hexagon $P_1P_2Q_1Q_2R_1R_2$ in F.

If the boundary of $[F]$ consists of isolated points, each of them is on the boundary of at least three figures $F+\mathbf{l}$ and defines three L-homologous points on the boundary of F (necessarily open in this case) An other isolated point of the boundary of $[F]$, U-homologous but not L-homologous to the former one, defines three L-homologous points on the boundary of F which are U-homologous to the former ones and different from them. Thus we have in this case an inscribed hexagon in F with U-homologous vertices.

It is sufficient therefore to prove the impossibility of the hexagon of the first case. We do this with the help of following elementary geometrical

Lemma. *A convex hexagon has at least one vertex with the property that its symmetric with respect to the midpoint of the diagonal joining the two adjacent vertices is in the interior of the hexagon.*

If the sum of the angles at A and B of the convex quadrangle $ABCD$ exceeds π, it is immediately seen that the symmetric of A or of B with respect to the midpoint of BD resp. AC is in the interior of the quadrangle, or in the interior of the side CD. Since the total sum of the angles of our hexagon is 4π, there must be two adjacent angles whose sum exceeds π. One of them has consequently the asserted property.

If e. g. the symmetrical of P_2 with respect to the midpoint of P_1Q_1 is in the interior of the hexagon, the latter is an interior point of F and U-homologous to Q_1. We have two U-homologous points, one of them is an interior point of $[F]$, the other on its boundary. This contradicts the fact that we have $[F]+\mathbf{u}=[F]$ for each U vector $\mathbf{u}$.

In three dimensions we give two examples where U is not identical with L. Both examples can be easily checked.

Example 3. F is the open tetrahedron with vertices $(2, \pm 4, 0)$, $(-2, 0, \pm 4)$. L is formed by the points with odd integer coordinates whose sum is $\equiv 1 \pmod 4$. The corresponding U consists of all points with odd integer coordinates. U remains the same if we take instead of F a (not too much) diminished, open or *closed* homothetic of F.

Example 4. F is the open octahedron with vertices $(\pm 3, 0, 0)$, $(0, \pm 3, 0)$, $(0, 0, \pm 3)$. L is the same as in example 3 and the corresponding U is the same too. The set U corresponding to any homothetically diminished figure is in this case identical with L.

Finally, we prove our statement for higher than three dimensions. We consider a three dimensional subspace R_3 of R_n. We construct in R_3, according to the examples 3 or 4, a lattice L_3 and an open resp. closed figure F_3. They define a lattice $U_3 \neq L_3$. We choose an n-dimensional lattice L in R_n which contains the points of L_3, and which has no further points in R_3. The points of R_n whose orthogonal projection on R_3 belongs to F_3, and which have a distance $<\varepsilon$ resp. $\leq \varepsilon$ from R_3, form an open resp closed figure F. It is easily seen that the set U corresponding to L and F contains all the points of U_3, and that U is a lattice if ε is sufficiently small. This completes our proof for each dimension.

6. We consider next the further specialization of central symmetrical convex figures. As to open central symmetrical convex figures the result of 5 can not be improved. This is shown by Example 4.

If the set U corresponding to the closed, central symmetrical, convex figure F is a point-lattice, then U is identical with L for the dimensions $n = 1, 2, 3$, *but may be different from L if* $n \geqq 4$.

The cases of one and two dimensions are contained in the result of 5.

In three dimensions we apply the argument of 5. This argument provides two points P_1 and P_2 on the boundary of F which are on the boundary of $[F]$, are U-homologous to each other, F has parallel tangent planes in them, and the chord P_1P_2 is on the boundary of F. Since F is symmetrical with respect to O, the symmetrical points P_1' and P_2' of P_1 and P_2 with respect to O have the same properties. We apply the argument of 5 again to get four points Q_1, Q_2, Q_1', Q_2' which have the same properties, and the tangent planes of F in which are not parallel with P_1P_2. Consequently the lines Q_1Q_2 and $Q_1'Q_2'$ are not parallel with P_1P_2 and $P_1'P_2'$. Since F has parallel tangent planes at the ends of these lines, the other sides of the parallelograms $P_1P_2P_1'P_2'$ and $Q_1Q_2Q_1'Q_2'$ run in the interior of F. The vertices of these parallelograms are necessarily all different.

We consider the polyhedron which is the least convex cover of both parallelograms. We draw a straight line through O, parallel to P_1P_2. It cuts the surface of the polyhedron in two points A and A' which are in the interior or on the boundary of two, with respect to O symmetrically situated, polygons belonging to the surface of the polyhedron. We consider first the case that A and A' are not on the periphery of the parallelogram $P_1P_2P_1'P_2'$. The distance of the planes of the two polygons, measured in the direction of P_1P_2, is in this case greater than P_1P_2. It is easily seen that, if two central symmetrically situated polygons in the plane have common points, then each of them has at least one vertex in the interior or on the boundary of the other. Applying this to the parallel projections of our two polygons, formed by rays parallel to P_1P_2, we obtain one of the vertices of our parallelograms, the vector P_1P_2 traced out from which leads in an interior point of the polyhedron. Consequently, this vertex has a U-homologous in the interior of F. This is against the fact that the vertices of our parallelograms are on the boundary of $[F]$.

We have therefore to discuss only the case that A and A' are on the periphery of the parallelogram $P_1P_2P_1'P_2'$. In this case the whole periphery of this parallelogram is on the surface of the polyhedron. By the same reason we are entitled to suppose this also from the parallelogram $Q_1Q_2Q_1'Q_2'$. Both these parallelograms have a couple of opposite sides running on the boundary of F and the other two sides running in the interior of F. Obviously, the sides on the boundary can not cut the sides running in the interior. Even two sides on the boundary can not cut each other, since the tangent plane in Q_1 and Q_2 (containing the line Q_1Q_2) is not parallel with P_1P_2. The only possibility is (employing a convenient notation) that the sides P_2P_1' and Q_2Q_1', resp. P_1P_2' and Q_1Q_2' cut each other. The two plane quadrangles $P_2Q_2P_1'Q_1'$ and $P_1Q_1P_2'Q_2'$ are then on the surface of the polyhedron. These quadrangles are not parallelograms, because they are central symmetrically situated and the lines P_1P_2 and Q_1Q_2 are not parallel. Therefore, according to the proof of our lemma in 5, there is a vertex of $P_2Q_2P_1'Q_1'$, e.g. P_1', whose symmetric X with respect to the midpoint of Q_2Q_1' is on the closed quadrangle itself and is not one of its vertices. Consequently, X is in the interior of F and U-homologous to P_1 since the vectors P_1X and Q_1Q_2 are equal. Namely, the triangles $P_1Q_1Q_2'$ and XQ_2Q_1' are congruent and parallel, since both are central symmetrically situated to the triangle $P_1'Q_1'Q_2$. Our result that P_1 has a U-homologous in the interior of F is against the fact that P_1 is on the boundary of $[F]$. This impossibility proves our statement for three dimensions.

It will be shown by the example 5 that in higher than three dimensions the case $U \neq L$ is possible for lattices U corresponding to convex central symmetrical figures.

7. We specialize at last the figure F to be a parallelotope. The case in which F is a cube, would not be a real further specialization, since the whole problem of this paper is an affine geometrical one.

If the set U corresponding to the open or closed parallelotope F is a lattice, then U is identical with L if the dimension n is 1, 2, or 3, but it may be different from L if $n \geqq 4$.

The cases $n=1,2$ and that of a closed parallelepiped in R_3, are contained in our previous results.

Let F be an open parallelepiped in R_3 with the corresponding lattice $U \neq L$. If the boundary of $[F]$ does not consist of isolated points, the impossibility may be shown by the argument of 6.

We restrict ourselves therefore to the case in which the boundary of $[F]$ consists of isolated points. We choose a face of F. Four parallel edges of F are cut by the plane of this face. We draw a parallel to these edges through a point P of the boundary of $[F]$. Since in a neighbourhood of P all the points of this parallel belong to $[F]$, there must be an interior point P_1 of the chosen face which is L-homologous to P. If $\mathbf{u}$ denotes a U-vector which is not an L-vector, we find by the same way an L-homologous P_2 of $P+\mathbf{u}$ in the interior of the same face. P_1 and P_2 are necessarily different. We apply our argument again to a face of F which is not parallel to P_1P_2. We obtain two points Q_1, Q_2 on this other face with the same properties, the distance of which is not parallel to P_1P_2. We are able now to apply the argument of 6 also in this case, since the points defined here have all the properties of the points used there.

For dimensions higher than three we can apply the last remark of 5.

The proof of our statement will therefore be completed by an example in four dimensions.

Example 5. F is an open or closed cube in R_4 whose edges are parallel to the coordinate axes and are of length 2. The lattice L is formed by the points with integer coordinates x_1, x_2, x_3, x_4 for which

$$a = \frac{x_1 + x_3}{2} + x_4 \quad \text{and} \quad b = \frac{x_2 + x_4}{2} + x_3$$

are even integers. The corresponding U is the lattice formed by the points of integer coordinates for which a and b are both even or odd In fact, if the vertices of F have integer coordinates, we may dissect all the cubes $F+1$ which form $[F]$ in 16 unit cubes whose vertices have integer coordinates. We may therefore, in order to obtain the vectors $\mathbf{u}$ for which $[F]+\mathbf{u}=[F]$, replace F by the set S of 16 points whose coordinates are all 0 or 1. There are only two couples $(0,0,0,0)$, $(1,1,1,1)$ and $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,1)$ among these 16 points which are L-homologous to each other. As easily seen, there are 16 classes of L-homologous points with integer coordinates. 14 from these are represented in S. The points $(2,0,0,0)$ and $(0,0,2,0)$ determine the remaining two classes. These two classes form a lattice arising by translation from the lattice U defined above.

At the end of all our specializations we may point out the surprising fact that in higher dimensions, even in case of most regular figures, it may happen that some points, apart from the lattice points, can not be covered by a translated figure without covering a lattice point too, however the whole neighbourhood of the lattice points can be covered by it.

(Received January 20, 1950.)

INDEX. — TARTALOM.

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM
SZEGED (HUNGARIA), ADY-TÉR 1.

TOMUM IUBILAREM COMPLURIBUS ADIUVANTIBUS REDIGEBAT **BÉLA SZ.-NAGY**	AZ ÜNNEPI KÖTETET TÖBBEK KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL SZERKESZTETTE **SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA**

Délmagyarország Nyomda NV. Szeged.

Felelős vezető: PRISKIN SÁNDOR