54858

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS IX.

1938–1940

SZEGED

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA

LITTERARUM AC SCIENTIARUM

REGIAE UNIVERSITATIS HUNGARICAE FRANCISCO-IOSEPHINAE

SECTIO

SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

REDIGUNT:

B. DE KERÉKJÁRTÓ — F. RIESZ.

TOMUS IX.

1938–1940.

SZEGED.

A M. KIR. FERENC JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM ÉS

A ROTHERMERE-ALAP TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA:

AZ EGYETEM BARÁTAINAK EGYESÜLETE.

A M. KIR. FERENC JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK

SZERKESZTIK:

KERÉKJÁRTÓ BÉLA — RIESZ FRIGYES.

IX. KÖTET.

1938—1940.

A kiadásért felelős
Szőkefalvi-Nagy Béla
Eredeti kiadásról készült változatlan utánnyomás
Minden jog fenntartva
Külföldi terjesztés:
KULTURA KÖNYV- ÉS HÍRLAP
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT
BUDAPEST 62,
P. O. B. 149

This book is a reproduction of the original, published
in Budapest

All rights reserved

General Distributors:
KULTURA Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,
Hungary
Printed in Hungary, 1968

68-2412 – Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat

INDEX — TARTALOM.

Tomus IX. — 1938/40. — IX. kötet.

BIBLIOGRAPHIE.

Intégrales de Riemann—Liouville et potentiels.

Par MARCEL RIESZ à Lund.

Introduction.

La définition de l'intégrale de RIEMANN—LIOUVILLE peut s'étendre de beaucoup de manières à l'espace à plusieurs dimensions. On peut en particulier considérer certains procédés d'intégration de caractère elliptique, hyperbolique et parabolique respectivement. Dans tous ces procédés l'intégrale d'ordre deux joue un rôle particulier, elle constitue l'inverse des opérations qui figurent respectivement dans l'équation de LAPLACE, celle des ondes et celle de la chaleur. Nous nous sommes occupé en particulier des deux premiers procédés et nous avons l'intention de rassembler nos recherches dans un mémoire élaboré. En attendant, nous donnons dans le présent travail un résumé assez détaillé de nos résultats concernant l'intégration elliptique et les potentiels[1]) qui y correspondent. En ce qui concerne l'intégration hyperbolique, une conférence faite récemment[2]) à Paris à la Réunion de la *Société Mathématique de France* sur ce procédé et son application au probléme de CAUCHY pour l'équation des ondes va paraître dans le *Bulletin* de la Société.

Les recherches indiquées dans le Chapitre I (et la plus grande partie de celles concernant l'intégration hyperbolique) datent de mars—avril 1933, tandis que celles concernant les masses et la fonction de GREEN et leurs applications ne furent commen-

---

[1]) Ces potentiels sont considérés depuis longtemps en Analyse et en Physique mathématique.

[2]) Le 9 juillet 1937.

cées qu'en novembre 1935 et terminées en mai 1936.[3]) Nos recherches embrassent aussi le cas newtonien. La fonction de GREEN est toujours considérée comme potentiel défini dans l'espace entier. Dans les chapitres VIII et IX il est aussi question des rapports entre le problème de DIRICHLET (généralisé) de la théorie classique et le potentiel newtonien.

Nous venons de dire que nous donnons ici un résumé assez détaillé. Bien entendu, nous avons omis beaucoup de démonstrations, les unes parce qu'elles sont très simples, les autres parce qu'elles sont trop longues. En ce qui concerne les dernières, nous avons tâché d'en faire ressortir les points essentiels.

Chapitre I. — Les intégrales de Riemann—Liouville.

1. L'intégrale de R.—L.

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)\,(x-t)^{\alpha-1} dt; \qquad \alpha > 0, \tag{1}$$

satisfait aux relations fondamentales

$$I^{\alpha}\,(I^{\beta} f(x)) = I^{\alpha+\beta} f(x) \tag{2}$$

et

$$\frac{d}{dx} I^{\alpha+1} f(x) = I^{\alpha} f(x). \tag{3}$$

En tout point de continuité de $f(x)$ l'intégrale peut se définir pour l'indice $\alpha = 0$ par un passage à la limite; on obtient alors $I^0 f(x) = f(x)$. Dans des conditions de dérivabilité appropriées on peut définir cette intégrale, comme l'a montré M. HADAMARD, aussi pour des indices négatifs non entiers en retranchant de l'intégrale divergente certaines parties infinies d'ordre fractionnaire. On arrive ainsi à la notion importante de la partie finie des intégrales. On peut atteindre le même but, et cela aussi pour l'indice zéro et les indices entiers négatifs par une méthode qui nous semble très naturelle, celle du prolongement analytique par rapport à l'indice α. Ce prolongement peut s'effectuer p. ex. au moyen de la formule obtenue par un certain nombre d'intégrations par parties

---

[3]) Deux aperçus succincts de ces procédés d'intégration et de leurs applications viennent de paraître dans les *Comptes rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo,* 1936, t. II.

$$(4) \qquad I^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (x-a)^{k} + I^{\alpha+n} f^{(n)}(x).$$

La dernière expression s'écrit

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_{a}^{x} f^{(n)}(t)\,(x-t)^{\alpha+n-1},$$

l'intégrale étant convergente pour $\alpha > -n$. Le prolongement analytique se trouve donc effectué pour tous ces indices. On trouve en particulier $I^{-k} f(x) = f^{(k)}(x)$. La présence du facteur $1/\Gamma(\alpha)$ devant l'intégrale est essentielle pour la validité de la dernière relation.

2. La généralisation de l'intégrale de R.—L. dont il sera question ici se rapporte à un espace Ω_m ou plus brièvement Ω à un nombre quelconque $m \geqq 1$ de dimensions. La distance (euclidienne) de deux points P et Q sera désignée par $r_{PQ} = r_{QP}$. Nous posons pour α positif

$$(5) \qquad I^{\alpha} f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{\Omega} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, dQ,$$

avec

$$(6) \qquad H_m(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} 2^{\alpha}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)},$$

l'intégration s'étendant à l'espace entier et dQ désignant l'élément de volume de cet espace. Quant à la fonction f, nous supposons seulement que toutes les intégrales où elle intervient sont absolument convergentes. On a alors les formules fondamentales, où Δ désigne l'opérateur de LAPLACE,

$$(7) \qquad I^{\alpha}(I^{\beta} f(P)) = I^{\alpha+\beta} f(P); \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha+\beta < m$$

et

$$(8) \qquad \Delta I^{\alpha+2} f(P) = -I^{\alpha} f(P),$$

qui d'ailleurs déterminent entièrement le facteur $H_m(\alpha)$.

En tout point de continuité de f, on obtient par un passage à la limite $I^{0} f(P) = f(P)$. Dans des hypothèses de dérivabilité convenables, on peut par prolongement analytique étendre la définition de l'intégrale à des valeurs négatives de α. On appliquera la formule (8), ou bien on remplacera la formule (4) par une autre qu'on obtient par une application (itérée) de la formule de GREEN. On trouve en particulier

$$I^{-2k}f(P) = (-1)^k \Delta^k f(P).$$

Observons encore qu'il peut avoir un certain intérêt d'étendre la formule (7) aussi au cas où $\alpha + \beta \geqq m$. On le fait encore par prolongement analytique. A la fin du présent travail on trouve un exemple de l'utilité de cette extension.

3. La formule (8) met en évidence le fait que l'opérateur I^2 est dans un certain sens l'inverse de l'opérateur de LAPLACE (au signe près) et on comprend alors qu'il mérite une attention particulière. On trouve pour $m \neq 2$

$$I^2 f(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \int_{\Omega} f(Q) r_{PQ}^{2-m} dQ$$

qu'on peut désigner sous le nom de *potentiel newtonien* correspondant à la couche de densité spatiale $f(Q)$, bien que le facteur devant l'intégrale n'intervienne pas dans la forme usuelle de ce potentiel.

L'interprétation qui précède échoue pour $m = 2$. L'intégrale est alors indépendante de P et le facteur devant l'intégrale devient infini. Cependant, dans l'hypothèse particulière que l'intégrale de $f(Q)$ étendue à l'espace entier, c'est-à-dire la masse totale, s'annule, on peut poser

$$I^2 f(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} I^{2-\varepsilon} f(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi 2^{2-\varepsilon} \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \int_{\Omega_2} f(Q) r_{PQ}^{-\varepsilon} dQ =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi 2^{2-\varepsilon} \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \int_{\Omega_2} f(Q) (r_{PQ}^{-\varepsilon} - 1) dQ =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_2} f(Q) \log \frac{1}{r_{PQ}} dQ,$$

c'est le potentiel logarithmique.

Dans le cas où la masse totale est différente de zéro, on arrive encore au potentiel logarithmique par un passage à la limite modifié. En effet, on peut poser

$$I^2 f(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} (I^{2-\varepsilon} f(P) + I^{2+\varepsilon} f(P)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_2} f(Q) \log \frac{1}{r_{PQ}} dQ.$$

Les choses se passent d'une manière analogue pour une dimension m quelconque, bien entendu non plus pour $\alpha = 2$ mais pour $\alpha = m$. Le potentiel $I^m f(P)$ pourra toujours être interprété comme un potentiel logarithmique, la seule différence étant que l'indice $\alpha = m$ n'est un indice particulièrement important que dans le cas $m = 2$ où les indices $\alpha = m$ et $\alpha = 2$ deviennent identiques.

4. On peut aussi remplacer la fonction f par une différentielle de STIELTJES et poser[4])

$$U^\alpha(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_\Omega r_{PQ}^{\alpha-m} d\mu(Q); \qquad \alpha > 0, \tag{9}$$

μ étant une fonction additive d'ensemble. On aura alors

$$I^\alpha U^\beta(P) = U^{\alpha+\beta}(P); \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta < m \tag{10}$$

et

$$\Delta U^{\alpha+2}(P) = -U^\alpha(P). \tag{11}$$

En formant dans le même ordre d'idées la fonction

$$V^\beta(\beta) = \frac{1}{H_m(\beta)} \int_\Omega r_{PQ}^{\beta-m} d\nu(Q),$$

on a la formule de composition ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < m$)

$$\int_\Omega U^\alpha(T)\, V^\beta(T)\, dT = \frac{1}{H_m(\alpha+\beta)} \iint_\Omega r_{PQ}^{\alpha+\beta-m} d\mu(P)\, d\nu(Q). \tag{12}$$

En spécialisant les fonctions et les indices, on en tire pour $0 < \alpha < m$

$$\iint_\Omega r_{PQ}^{\alpha-m} d\mu(P)\, d\mu(Q) = H_m(\alpha) \int_\Omega \left[U^{\frac{\alpha}{2}}(T)\right]^2 dT, \tag{13}$$

formule qui joue un rôle décisif dans les recherches de M. FROSTMAN sur le potentiel d'équilibre.

Le second membre de la formule ci-dessus étant non négatif, on voit que l'intégrale double, qui n'est autre que l'intégrale

---

4) Jusqu'à nouvel ordre nous supposons que toutes les intégrales de STIELTJES figurant dans le texte soient absolument convergentes. Pour une hypothèse plus générale *voir* le chapitre III.

d'énergie, est $\geqq 0$ pour $0 < \alpha < m$.[5]) On peut facilement préciser cette inégalité en démontrant que le signe d'égalité ne peut avoir lieu que dans le cas évident où la fonction d'ensemble μ s'annule identiquement. En effet on voit par la formule (13) que l'égalité entraîne que la fonction $U^{\frac{\alpha}{2}}(T)$ s'annule presque partout, et alors le fait énoncé découle du théorème d'unicité démontré plus loin (n° **10**).

Dans le cas où la masse totale s'annule, la formule (13) devient à la limite

$$\iint\limits_{\Omega} \log\frac{1}{r_{PQ}}\, d\mu(P)\, d\mu(Q) = 2^{m-1}\pi^{\frac{m}{2}}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\int\limits_{\Omega}\left[U^{\frac{m}{2}}(T)\right]^2 dT,$$

identité qui joue le même rôle dans la théorie du potentiel logarithmique que l'identité (13) dans le cas général.

Chapitre II. — Capacité et potentiel d'équilibre.

5. En supprimant le facteur $1/H_m(\alpha)$ qui figure dans les considérations précédentes, nous allons considérer des potentiels de la forme $\int r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\mu(Q)$. Quant à l'exposant α, nous admettons ici et sauf avis contraire dans la suite qu'il satisfait aux inégalités $0 < \alpha \leqq 2$,[6]) l'exposant $\alpha = 2$ donnant le cas le plus important, le potentiel newtonien. Pour $m = 2$ (le cas du plan) nous excluons cet exposant, le potentiel newtonien étant alors à remplacer (*voir* le n° **3**) par le potentiel logarithmique qui n'interviendra plus dans la suite. Pour $m = 1$, nous nous restreignons en général à ceux des exposants α qui satisfont aux inégalités $0 < \alpha < 1$ (*voir* pourtant le n° **34**). D'ailleurs en ce qui concerne les dimensions $m = 1$ et 2, le lecteur trouvera souvent dans cet exposé des lacunes faciles à combler.

Ce chapitre traite de la *capacité* des ensembles et de leur *potentiel d'équilibre*. En nous contentant de rendre compte de l'état actuel de ces problèmes, nous aurons avant tout à parler du pro-

---

[5]) Récemment (O. Frostman, La méthode de variation de Gauss et les fonctions sousharmoniques, *ces Acta*, **8** (1937), p. 149—159) M. Frostman a montré que l'intégrale d'énergie est encore $\geqq 0$, si l'on remplace le noyau du texte par la fonction de Green.

[6]) Pour la dernière limitation *voir* p. 40 de la Thèse de M. Frostman citée ci-après.

grès marqué par un travail fondamental de M. DE LA VALLÉE POUSSIN[7]) et par la Thèse de M. FROSTMAN.[8])

6. Voici comment on peut définir la capacité d'un ensemble mesurable au sens de BOREL[9]).

Pour toutes les répartitions positives de la masse unité sur l'ensemble E, l'intégrale d'énergie

$$\iint_E r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\mu(P)\, d\mu(Q)$$

a une borne inférieure W_E, finie ou infinie. D'autre part le potentiel correspondant à une telle répartition

$$\int_E r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\mu(Q)$$

a une borne supérieure, finie ou infinie. Désignons par V_E la borne inférieure, finie ou non, de ces bornes supérieures. On a alors $V_E = W_E$ et la capacité $C(E)$[10]) de l'ensemble E peut se définir par $C(E) = W_E^{-1} = V_E^{-1}$.

Voici deux propriétés de la capacité, dont la première est évidente et la seconde facile à démontrer. Si l'ensemble E_1 est compris dans l'ensemble E_2, on a toujours $C(E_1) \leqq C(E_2)$. D'autre part, pour un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles E_n on a toujours $C(\Sigma E_n) \leqq \Sigma C(E_n)$.

7. Il faut prêter une attention particulière aux *ensembles de capacité nulle*. D'après ce qu'on vient de dire, un tel ensemble est caractérisé par le fait qu'il ne peut porter aucune masse positive dont le potentiel reste borné partout. Pour un ensemble fermé de capacité nulle on peut même démontrer que le potentiel de toute répartition positive portée par un tel ensemble devient infini en un point au moins de l'ensemble.[11]) On tire des propriétés précéden-

---

7) C. DE LA VALLÉE POUSSIN, Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet, *Annales de l'Institut H. Poincaré*, **2** (1932), p. 169—232.

8) O. FROSTMAN, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, *Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem.*, **3** (1935), p. 1—118, citée dans la suite comme „*Thèse*".

9) *Thèse*, p. 48.

10) Notre façon de normer la capacité est différente de celle de M. FROSTMAN. La valeur $C(E)$ du texte s'écrit dans la notation de M. FROSTMAN $[C(E)]^{m-\alpha}$

11) *Thèse*, p. 83.

tes que la masse partielle portée par un ensemble de capacité nulle s'évanouit si le potentiel dû à la masse totale est fini partout ou si l'intégrale d'énergie est finie. Ce fait remarquable permet de *négliger les ensembles de capacité nulle dans toute intégration suivant des répartitions produisant des potentiels finis.* Il s'agissait ici de potentiels dus à des masses positives. Pour un complément important concernant les potentiels dus à des masses de signe variable *voir* le n° **13.**

Notons encore que la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de capacité nulle est de capacité nulle et qu'un ensemble de capacité nulle est toujours en même temps un ensemble de mesure nulle au sens de LEBESGUE.

8. Passons maintenant aux ensembles de capacité positive et en particulier aux ensembles fermés de cette espèce. Au sujet de tels ensembles M. FROSTMAN donne le théorème fondamental[12]) que voici.

Soit F un ensemble fermé et borné quelconque de capacité $C(F) > 0$; il existe alors une répartition unique de masse positive sur F dont le potentiel est constant et égal à un sur F sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle ne contenant aucun point intérieur de F. Le potentiel de cette répartition est partout $\leqq 1$, sa masse totale et l'intégrale d'énergie correspondante ont la valeur commune $C(F)$. Toute autre répartition de la masse $C(F)$ sur F engendre un potentiel dont la borne supérieure est > 1 et une intégrale d'énergie $> C(F)$.

C'est précisément comme solution des problèmes de minimum auxquels lesdites propriétés donnent lieu que M. FROSTMAN, en rétablissant en toute rigueur un principe de variation dû à GAUSS, obtient la répartition en question. Le potentiel engendré s'appelle *le potentiel d'équilibre* attaché à l'ensemble F. Arrêtons-nous un instant sur les différences entre le cas général $0 < \alpha < 2$ et le cas classique, celui du potentiel newtonien correspondant à $\alpha = 2$, en notant quelques faits importants qui pour ainsi dire sont caractéristiques pour ce dernier cas. Ni la capacité ni le potentiel d'équilibre newtoniens ne sont changés si l'on ajoute ou retranche un ensemble de points faisant partie d'un domaine complètement limité au dehors par F ou un sous-ensemble de F.[13]) Cela pro-

[12]) *Thèse*, p. 56.

[13]) *Thèse*, p. 39 et 55.

vient de la propriété très remarquable, particulière au cas classique, que les masses produisant le potentiel d'équilibre se trouvent toujours sur la frontière (externe). Le potentiel est $=1$ en tout point extérieur à F n'appartenant pas au domaine connexe infini limité par F. Dans ce dernier domaine le potentiel est <1. Pour les autres exposants le potentiel d'équilibre est <1 en tout point extérieur à F. Cela découle immédiatement du fait que le laplacien est positif en tous ces points.

Chapitre III. — Quelques propriétés générales du potentiel.

9. Dans sa Thèse M. FROSTMAN démontre un théorème important disant que *le potentiel d'une distribution positive ne devient infini que sauf peut-être dans un ensemble de capacité nulle*[14]).

Remarquons que M. FROSTMAN admet toujours que les masses sont situées dans un domaine borné, hypothèse commode et très naturelle à son point de vue, puisque c'est le potentiel d'équilibre des ensembles bornés qui l'intéresse en premier lieu. *Il nous sera utile de nous placer dans la suite dans des hypothèses un peu plus générales.* Nous admettrons des potentiels dus à des masses qui peuvent s'étendre à l'infini. La masse portée par un ensemble borné sera toujours finie, tandis que la masse totale peut bien devenir infinie. Il faut alors faire une hypothèse complémentaire. En supposant d'abord les masses positives nous admettrons, pour un point fixé P, que le potentiel devient fini si l'on écarte les masses qui se trouvent au voisinage de P. Cette hypothèse concerne en réalité l'influence des masses très éloignées et elle est évidemment indépendante du point P. Il est manifeste que le théorème de M. FROSTMAN subsiste encore dans ce cas et que notre hypothèse est équivalente à celle exigeant que le potentiel soit fini en un point au moins. Quant aux potentiels dus à des masses ν de signe variable, on admettra que ces masses peuvent s'écrire sous la forme $\nu=\nu_1-\nu_2$, ν_1 et ν_2 étant des masses positives satisfaisant aux conditions ci-dessus. La décomposition la plus avantageuse sera donnée par la formule $\nu=\nu^+-\nu^-$ où ν^+ est la variation positive et ν^- la variation négative de ν, $\nu^++\nu^-$ étant la variation totale. On a alors $d\nu=d\nu^+-d\nu^-$ et $|d\nu|=d\nu^++d\nu^-$. Un tel potentiel sera *bien déterminé* excepté

[14]) *Thèse*, p. 81.

aux points où les potentiels dus à ν^+ et à ν^- deviennent infinis tous les deux. Grâce au théorème de M. FROSTMAN on voit que ces *points d'indétermination* forment au plus un ensemble de capacité nulle.

10. Nous donnerons ici deux théorèmes d'unicité. Dans le premier nous ne ferons que la restriction $0 < \alpha < m$, tandis que dans le second il s'agira de restrictions de caractère tout à fait différent. La démonstration du premier théorème n'est pas trop simple, tandis que celle du second se fait en quelques lignes.

Tout potentiel est entièrement déterminé par les masses qui l'engendrent. La réciproque est vraie, ce qui revient à dire qu'à un potentiel identiquement nul il correspond une masse identiquement nulle.

$$v(P) = \int_{\Omega} r_{PQ}^{\alpha-m} d\nu(Q)$$

étant un potentiel qui s'annule en tout point P à l'exception au plus d'un ensemble de mesure nulle, la masse ν est identiquement nulle.

Nous indiquons brièvement la démonstration de ce théorème. Gràce à la formule (10) du n° **4** le cas $\alpha > 2$ se réduit facilement au cas $0 < \alpha \leqq 2$. Cela étant, soit $K(P)$ une fonction qui avec ses dérivées des deux premiers ordres est continue dans tout l'espace et s'annule identiquement dans la partie éloignée de l'espace. On aura alors d'après la formule qu'on vient de citer

$$K(P) = -I^2 \Delta K(P) = I^\alpha (I^{2-\alpha} h(P)) = I^\alpha k(P),$$

avec $h(P) = -\Delta K(P)$ et $k(P) = I^{2-\alpha} h(P)$. En multipliant le potentiel $v(P)$, qui s'annule presque partout, par $k(P)$, en intégrant et en admettant ici le fait que l'interversion de l'ordre des intégrations est légitime[15]), il vient

$$0 = \int_{\Omega} k(P)\, v(P)\, dP = \int_{\Omega} k(P)\, dP \int_{\Omega} r_{PQ}^{\alpha-m} d\nu(Q) =$$
$$= \int_{\Omega} d\nu(Q) \int_{\Omega} k(P) r_{PQ}^{\alpha-m} dP = H_m(\alpha) \int_{\Omega} I^\alpha k(Q)\, d\nu(Q) =$$
$$= H_m(\alpha) \int_{\Omega} K(Q)\, d\nu(Q).$$

---

[15]) La démonstration de ce fait est assez délicate dans le cas où les masses s'étendent à l'infini.

On en tire facilement par des méthodes d'approximation connues que la dernière intégrale s'annule encore sous des conditions moins restrictives concernant la fonction K; entre autres elle s'annule lorsque K désigne la fonction caractéristique d'un ensemble fermé et borné d'ailleurs quelconque. Il en résulte immédiatement que la fonction d'ensemble ν s'annule identiquement.

11. Nous passons maintenant au second théorème d'unicité dans lequel l'exposant newtonien et certains autres exposants moins intéressants font exception.

Soient F un ensemble fermé et α un exposant $\neq 2+2k$ et $\neq m+2k$ avec $k=0, 1, 2, \ldots$, et admettons que le potentiel

$$v(P)=\int\limits_F r_{PQ}^{\alpha-m}\,d\nu(Q)$$

s'annule identiquement dans un domaine partiel D de $\Omega-F$. Alors la masse ν est identiquement nulle.

Sans restreindre la généralité on peut admettre que le domaine D comprend tout l'extérieur d'une sphère de rayon très grand, le cas général pouvant facilement se réduire à ce cas-là par une transformation de KELVIN (n° **14**). L'ensemble F sera alors évidemment un ensemble borné. Formons maintenant le produit, identiquement nul dans D, $r_{PQ'}^{\alpha-m}v(P)$ où Q' désigne un point fixe de F. En faisant tendre P vers l'infini, on trouve que la masse totale $\int\limits_F d\nu(Q)=0$. En formant d'autre part les laplaciens successifs et en observant que $\Delta r^{\alpha-m}=(\alpha-2)(\alpha-m)\,r^{\alpha-2-m}$, où le facteur $(\alpha-2)(\alpha-m)\neq 0$, on voit que les potentiels qu'on obtient en remplaçant α par $\alpha-2, \alpha-4, \ldots, \alpha-2k, \ldots$ s'annulent aussi dans le domaine D. Cela étant, désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ les coordonnées respectives des points P et Q et observons que p. ex. $\dfrac{\partial v(P)}{\partial x_1}$ s'annule aussi identiquement dans D, ce qui peut s'écrire

$$0=\int\limits_F(\xi_1-x_1)\,r_{PQ}^{\alpha-2-m}\,d\nu(Q)=\int\limits_F\xi_1 r_{PQ}^{\alpha-2-m}\,d\nu(Q).$$

Il en résulte comme plus haut $\int\limits_F\xi_1 d\nu(Q)=0$. On trouve de la même façon de proche en proche que tous les moments de la distribution ν s'annulent, ce qui — F étant un ensemble borné — entraîne le fait que ν est identiquement nul.

Le théorème est évidemment en défaut dans le cas classique. P. ex. le potentiel dû à la masse $+1$ placée au centre d'une sphère et à la masse -1 distribuée uniformément sur la surface de la sphère est identiquement nul à l'extérieur de la sphère. La raison en est que, de l'évanouissement de ce potentiel, on ne peut pas conclure à celui des potentiels successifs donnés ci-dessus, puisque $\Delta r^{2-m}=0$.

12. Nous donnons maintenant un théorème de la moyenne qui admet une application intéressante au potentiel d'équilibre et par là, comme on verra plus loin, à la fonction de Green.

Soit $v(P)$ le potentiel d'une distribution positive. On a en tout point P

$$v(P)=\lim \frac{1}{s}\int_{s} v(T)\,dT,$$

s étant une sphère, décrite autour de P, de volume s et de rayon tendant vers zéro[16]). Le théorème subsiste évidemment pour des masses de signe variable en tout point P où le potentiel est bien déterminé.

Pour la démonstration on peut recourir à un procédé utilisé par M. Frostman dans une évaluation analogue[17]).

De ce théorème on conclut facilement que:

Pour que le potentiel d'équilibre u relatif à un ensemble fermé F admette la valeur 1 *en un point frontière P de l'ensemble, il faut que l'on ait*

$$\lim_{T\to P} u(T)=1$$

et il suffit que cette égalité ait lieu pour les points T extérieurs à F.

13. Le théorème suivant dont nous aurons besoin plus loin et qui est relatif à des potentiels bornés dus à des masses de signe quelconque complète sous certains rapports un théorème de M. Frostman sur les potentiels finis dus à des masses positives (n° **7**).

Si un potentiel est borné supérieurement (inférieurement) sauf

---

16) Ce théorème est bien connu dans le cas classique où il est une conséquence immédiate de la surharmonicité et de la semicontinuité inférieure. Nous donnerons aux nos **21** et **32** d'autres moyennes de structure plus compliquée qui sont mieux appropriées au cas non-newtonien que la moyenne ci-dessus.

17) *Thèse,* p. 37.

au plus dans un ensemble de capacité nulle, la variation positive (négative) de la masse s'annule sur tout ensemble de capacité nulle. Si donc le potentiel est borné dans les deux sens (sauf au plus etc.) la variation totale de la masse s'annule sur tout ensemble de capacité nulle.

Nous indiquons brièvement la démonstration. Admettons que le potentiel v dû à la masse ν soit borné supérieurement par la constante L sauf au plus dans un certain ensemble de capacité nulle. Soit alors E un ensemble fermé et borné quelconque de capacité nulle et désignons par E_n des ensembles fermés qui comprennent E et tendent en se rétrécissant vers E et qui admettent des potentiels d'équilibre u_n au sens strict. Les masses correspondantes étant désignées par μ_n on aura

$$\int_{\Omega} u_n d\nu = \int_{\Omega} v d\mu_n \leqq L \int_{\Omega} d\mu_n = L\mu_n(E_n).$$

On a $u_n = 1$ sur E_n et par conséquent sur E. D'autre part, puisque la capacité de E est nulle, $\mu_n(E_n)$ tend vers zéro et il en est de même de u_n en tout point extérieur à E. On trouve donc par un passage à la limite (légitime puisque les u_n sont bornés dans leur ensemble) $\nu(E) \leqq 0$, ce qui implique le théorème.

14. Nous terminons ce chapitre par quelques remarques sur la *transformation de* Kelvin. Soient F un ensemble fermé et M un point, extérieur à l'ensemble jusqu'à nouvel ordre. Effectuons une *inversion* de centre M, les points correspondants P et P' situés sur le même rayon issu de M étant liés par la relation

$$r_{MP} \cdot r_{MP'} = 1. \tag{1}$$

Il vient

$$r_{P'Q'} = \frac{r_{PQ}}{r_{MP} \cdot r_{MQ}}. \tag{2}$$

L'ensemble F sera transformé en un ensemble F' fermé et borné. Si deux distributions μ et μ', la première sur F, la seconde sur F', sont liées par la relation

$$d\mu'(Q') = r_{MQ}^{\alpha-m} d\mu(Q), \tag{3}$$

on a évidemment

$$\int_{F'} r_{P'Q'}^{\alpha-m} d\mu'(Q') = r_{MP}^{m-\alpha} \int_{F} r_{PQ}^{\alpha-m} d\mu(Q). \tag{4}$$

Il ressort immédiatement de cette formule que l'inversion (1) transforme des ensembles de capacité positive ou nulle en des ensembles présentant respectivement le même caractère.

Si le point M appartient à l'ensemble F, il n'y a rien à changer à la formule pourvu qu'aucune masse ne soit concentrée en M.[18]) Dans le cas contraire, la masse concentrée en M étant c, la formule (4) est à remplacer par cette autre

$$(4') \qquad \int_{F'} r_{P'Q'}^{\alpha-m} d\mu'(Q') + c = r_{MP}^{m-\alpha} \int_{F} r_{PQ}^{\alpha-m} d\mu(Q).$$

Le terme c est à considérer comme une contribution venant du point à l'infini que l'inversion fait correspondre au point M.

Dans un ordre d'idées général, à toute fonction donnée $f(P)$ on peut faire correspondre une fonction $f'(P')$ définie par la formule

$$(5) \qquad f'(P') = r_{MP}^{m-\alpha} f(P),$$

les points P et P' étant toujours liés par l'inversion (1). On voit par ce qui précède que la classe des fonctions $v(P)+c$, où $v(P)$ est un potentiel et c une constante, est invariante par rapport à cette transformation. Les fonctions de cette classe interviendront en particulier dans les derniers chapitres du présent travail.

Chapitre IV. — Les masses de Green et la fonction de Green.

15. Soient F un ensemble fermé, non nécessairement borné, de capacité positive, M un point extérieur à F, et désignons par μ' la distribution engendrant le potentiel d'équilibre sur l'ensemble fermé et borné F' que la transformation (1) du numéro précédent fait correspondre à F. En définissant alors la distribution de masse positive μ_M relative à F par la formule (3) du même numéro, il vient

$$(1) \qquad \int_{F} r_{PQ}^{\alpha-m} d\mu_M(Q) = r_{MP}^{\alpha-m},$$

égalité valable pour tout point P de F excepté peut-être pour un ensemble de capacité nulle. Le calcul étant réversible, on conclut que la distribution μ_M est entièrement déterminée par cette propriété-là. Le potentiel d'équilibre étant toujours $\leqq 1$, on a encore l'inégalité fondamentale

[18]) Evidemment l'ensemble F' cesse d'être borné.

$$h_M(P) = \int_F r_{PQ}^{\alpha - m} d\mu_M(Q) \leqq r_{MP}^{\alpha - m}, \tag{2}$$

P étant un point tout à fait arbitraire de l'espace. Nous appellerons les masses μ_M *masses de Green relatives à l'ensemble F et au pôle M.* En désignant maintenant par M et P deux points arbitraires extérieurs à F, on a la formule de symétrie $h_M(P) = h_P(M)$. On a en effet

$$h_M(P) = \int_F r_{PQ}^{\alpha - m} d\mu_M(Q) = \int_F d\mu_M(Q) \int_F r_{QT}^{\alpha - m} d\mu_P(T) =$$
$$= \iint_F r_{QT}^{\alpha - m} d\mu_M(Q)\, d\mu_P(T),$$

formule symétrique en M et en P. Observons que dans les intégrations on a négligé des ensembles de capacité nulle, ce qui est légitime d'après une remarque antérieure.

La fonction de Green se définit par la formule

$$G_M(P) = r_{MP}^{\alpha - m} - h_M(P), \tag{3}$$

M étant toujours extérieur à F. Elle est évidemment $\geqq 0$ pour tout point P, l'égalité ayant lieu en tout point de F sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle. On a aussi la relation de symétrie $G_M(P) = G_P(M)$ (M et P extérieurs à F).

Les propriétés énumérées du potentiel d'équilibre se traduisent immédiatement en des propriétés correspondantes de la fonction de Green. Au lieu d'insister ici sur les détails (nous revenons sur quelques points dans la suite) nous nous contentons de formuler le critère suivant qui se déduit immédiatement du critère analogue donné au n° **12** pour le potentiel d'équilibre.

La fonction de Green s'annule en tout point intérieur de F. Pour qu'elle s'annule en un point frontière P, il faut que l'on ait

$$\lim_{T \to P} G_M(T) = 0 \tag{4}$$

et il suffit que cette égalité ait lieu pour les points T extérieurs à F.

Observons le fait capital que les masses de Green s'évanouissent sur tout sous-ensemble de capacité nulle. Cela est une conséquence immédiate du fait qu'elles engendrent un potentiel borné (*cf.* le n° **7**).

Chapitre V. — L'intégrale de Poisson et l'inégalité de Harnack.

16. Pour déterminer la fonction de GREEN relative à l'extérieur ou à l'intérieur d'une sphère nous aurons d'abord à résoudre le problème d'équilibre pour un volume sphérique. La solution due à MM. PÓLYA et SZEGŐ[19]) pour les dimensions $m=1, 2, 3$ s'étend facilement à une dimension quelconque m.

Soient S^* l'intérieur d'une sphère S de rayon R, r_Q la distance du point Q au centre de la sphère, dQ l'élément de volume, α un exposant satisfaisant aux inégalités $0<\alpha<2$, et posons

$$(1)\qquad u(P)=\pi^{-\left(\frac{m}{2}+1\right)}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\int\limits_{S^*}(R^2-r_Q^2)^{-\frac{\alpha}{2}}r_{PQ}^{\alpha-m}dQ.$$

On a alors $u(P)=1$ pour tout point P du domaine S^*, surface comprise.

Nous omettons ici le calcul qui est assez laborieux. Un point essentiel y est l'invariance de l'expression

$$D^S_{P_1P_2}=\frac{r^2_{P_1P_2}}{\delta^S_{P_1}\cdot\delta^S_{P_2}}$$

par rapport à toute inversion.[20]) Ici on a posé

$$\delta^S_P=\frac{|R^2-r_P^2|}{R}.$$

Bien entendu, l'inversion transforme la sphère en même temps que les points. Rien n'est changé si le produit des rayons vecteurs réciproques est $\pm k^2$ au lieu de 1. Dans l'application actuelle on choisit comme centre de l'inversion le point P et on transforme la surface de la sphère S en elle-même. Le fait que $r_{PQ}^{-m}dQ$ est invariant, si l'on remplace Q par Q', facilite encore le calcul.

Du potentiel d'équilibre on déduit comme plus haut la fonction de GREEN. Soient S une sphère, M un point quelconque qui n'est pas situé sur S, et désignons par S^* celui des deux volumes sphériques limités par S auquel M est *extérieur*. On pose

---

[19]) G. PÓLYA und G. SZEGŐ, Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen, *J. f. Math.*, 165 (1931). p. 4—49.

[20]) *Cf.* M. RIESZ, Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions etc., *Fysiogr. Sällsk. Lund förh.*, 1 (1931), nº 4, p. 18—38.

$$(2) \qquad h_M(P) = \int_{S^*} r_{PQ}^{\alpha-m} \lambda_M(Q)\, dQ,$$

la masse de GREEN $\lambda_M(Q)dO$ étant donnée par la formule

$$(3) \quad \lambda_M(Q) = \pi^{-\left(\frac{m}{2}+1\right)} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \sin\frac{\pi\alpha}{2} |R^2 - r_M^2|^{\frac{\alpha}{2}} |R^2 - r_Q^2|^{-\frac{\alpha}{2}} r_{MQ}^{-m},$$

et on obtient pour tout point P de S^* (surface comprise) $h_M(P) = r_{MP}^{\alpha-m}$.

La structure du noyau (3) est très analogue à celle du noyau classique de POISSON. On peut obtenir celui-ci en faisant tendre α vers 2. En effet, grâce au facteur sinus, qui tend vers zéro, il en sera de même de $\lambda_M(Q)$ en tout point Q intérieur à S^*. Quant aux points frontières Q, la contribution d'une lamelle mince adjacente à un élément dS de la surface autour de Q tendra vers $(\omega_m R)^{-1} |R^2 - r_M^2| r_{MQ}^{-m} dS$ où ω_m est la surface totale de la sphère unité, et on retombe sur le noyau classique.

La fonction de GREEN relative au volume S^* et au pôle M s'écrit évidemment

$$G_M(P) = r_{MP}^{\alpha-m} - h_M(P).$$

17. Cela posé, soit $v(P)$ un potentiel engendré par des masses quelconques situées ou à l'extérieur ou à l'intérieur d'une certaine sphère S, et désignons par S^* celui de ces deux domaines qui renferme les masses, la surface S comprise. Nous nous proposons d'exprimer les valeurs admises par le potentiel dans le domaine complémentaire $\Omega - S^*$ par celles admises dans le domaine S^*. On arrivera ainsi à une formule qui peut être considérée comme une généralisation de *l'intégrale de Poisson.* En effet, M étant un point quelconque du domaine $\Omega - S^*$, on a

$$(4) \qquad v(M) = \int_{S^*} v(Q)\, \lambda_M(Q) d(Q).$$

Cette formule, qui s'établit facilement par l'interversion de deux intégrations, forme un cas très particulier des formules (1) et (2) du n° **19** qu'on rencontrera plus loin.

Envisageons en particulier le cas où le potentiel $v(P)$ est non négatif sur S^*. Notre formule met en évidence qu'il en sera de même en $\Omega - S^*$. Mais il y en a plus. Soient M_0 et M deux points arbitraires de ce dernier domaine. On trouve alors immédiatement *l'inégalité de* HARNACK

(5) $$v(M) \leqq \left| \frac{R^2-r_M^2}{R^2-r_{M_0}^2} \right|^{\frac{\alpha}{2}} \left| \frac{R-r_M}{R+r_{M_0}} \right|^{-m} v(M_0).$$

Appliquée à une suite de potentiels $v_n(P)$ non négatifs avec des masses situées sur S^*, notre inégalité met en évidence les faits suivants. Lorsque $v_n(M)$ tend vers zéro en un seul point M de $\Omega - S^*$, il en sera de même en tout point de ce domaine et cela uniformément dans tout domaine qui avec sa frontière est intérieur au sens strict à $\Omega - S^*$. Fait analogue lorsque la série Σv_n converge en un seul point M de $\Omega - S^*$. Ces faits s'étendent de proche en proche à tout domaine connexe qui ne renferme pas de masses.

Dans la théorie classique, on parle de fonctions harmoniques positives dans un domaine et non pas de potentiels. Cependant il est bien facile de faire rentrer le cas classique sous le point de vue adopté ici. Soit en effet D un domaine simplement connexe et u une fonction harmonique dans D. En désignant par D' un domaine intérieur au sens strict à D et de frontière assez régulière, u pourra à l'intérieur de D' s'écrire comme potentiel d'une simple couche étalée sur la frontière de D'. Pour l'extérieur de D' ce potentiel est identique à la solution du problème de Dirichlet extérieur, posé pour la frontière de D' avec des valeurs frontières coïncidant avec celles du u. Alors si u est positif, il en sera de même du potentiel dans l'espace entier.

Chapitre VI. — Etude approfondie de la fonction de Green.

18. On suppose dans ce chapitre et dans toute la suite que *F désigne un ensemble fermé de capacité positive.* Quant à l'exposant α on suppose ici $0 < \alpha \leqq 2$, le signe d'égalité inclus.

Nous donnerons d'abord une généralisation d'un théorème important de M. Bouligand.

Soient Q' un point frontière de l'ensemble F et D un domaine connexe dont la frontière est formée par F ou un sous-ensemble de F. Si la fonction de Green s'annule en Q' pour une seule position du pôle M dans D, elle s'annulera en Q' pour toute autre position du pôle dans D.

En tenant compte du critère donné à la fin du chap. IV, le théorème ci-dessus se réduit au théorème suivant.

$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ étant des points extérieurs à F tendant vers Q', si la relation

$$\lim_{P_n \to Q'} G_M(P_n) = 0$$

a lieu pour une position de M dans D, elle a lieu pour toute autre position de ce point dans D.

Observons d'abord que l'on a $G_M(P_n) = G_{P_n}(M)$. Le potentiel $G_{P_n}(M)$, dû à des masses situées sur F et en P_n, étant partout $\geqq 0$, la première application que nous avons donnée de l'inégalité de Harnack met en évidence que si ce potentiel tend vers zéro avec $n \to \infty$ pour *un* point M de D, il tend vers zéro en *tout* point de D.

Cela étant, les points exceptionnels de la frontière, c'est-à-dire les points Q'' pour lesquels on a $G_M(Q'') > 0$, sont les mêmes pour tout point M du domaine D et, grâce aux résultats sur les points exceptionnels de la fonction de Green à pôle fixe, ils forment un ensemble F''_D de capacité nulle ne dépendant que du domaine adjacent D. En remarquant qu'il existe au plus un ensemble dénombrable de domaines connexes D limités par F, on conclut que l'ensemble F'' somme des F''_D est encore un ensemble de capacité nulle, évidemment mesurable au sens de Borel. Les points Q'' de l'ensemble F'' sont appelés *points irréguliers de F.* Ils sont caractérisés par le fait qu'il existe au moins un point M extérieur à F, de sorte que $G_M(Q'') > 0$. Nous introduisons aussi les ensembles $F'_D = F - F''_D$ et leur partie commune $F' = F - F''$. Les points Q' de F'_D sont caractérisés par la propriété: $G_M(Q') = 0$ pour tout point M appartenant à D et ceux de F' par la propriété que cette égalité a lieu pour tout point M extérieur à F. Nous appelons les points de F' *points réguliers de F* et ceux de F'_D *points réguliers de F par rapport au domaine D.* Ce sont ces derniers points que d'ordinaire on désigne comme points réguliers quand il s'agit d'un problème de Dirichlet posé pour le domaine D.

Notons encore les faits suivants qui ont lieu *dans le cas newtonien* et qui résultent immédiatement des propriétés correspondantes du potentiel d'équilibre. M étant un point de D, la masse de Green μ_M se trouve sur la frontière F_D de D et l'ensemble F_D renferme l'ensemble irrégulier F''_D. Les masses de Green μ_M relatives aux ensembles F_D, F et $\Omega - D$ sont identiques. Quelques conséquences importantes de ces faits seront rassemblées au n° **24.**

19. Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème suivant que nous formulons d'abord d'une manière un peu vague. Soit $v(P)$ un potentiel engendré par des masses (inconnues) réparties sur l'ensemble F. Les valeurs de v étant connues sur F, calculer v en un point extérieur à F. Nous donnerons la solution de ce problème sous certaines conditions restrictives très naturelles en déduisant d'abord une formule tout à fait générale.

Le potentiel v étant engendré par des masses ν situées sur F, on a en tout point M extérieur à F

$$v(M) = \int_F v(Q)\,d\mu_M(Q) + \int_{F''} G_M(Q)\,d\nu(Q). \tag{1}$$

Cette formule résulte immédiatement des formules (1) et (3) du n° **15** et du fait que la fonction de Green $G_M(Q)$ s'annule en tout point régulier. Il est d'ailleurs clair que la dernière intégrale peut être prise sur F''_D au lieu de F''. Si les masses ν ne sont pas de signe constant, $v(Q)$ peut devenir indéterminé dans un sous-ensemble de F de capacité nulle, ce qui n'exerce aucune influence sur la validité de notre formule, puisque les masses de Green s'évanouissent sur un tel sous-ensemble (n° **15**).

La formule (1) se simplifie beaucoup, si les masses ν s'annulent sur l'ensemble F'' (ou F''_D). Il vient alors

$$v(M) = \int_F v(Q)\,d\mu_M(Q). \tag{2}$$

Signalons quelques cas importants où cette formule simplifiée a lieu. D'abord il en est ainsi si l'ensemble F'' est vide, c'est-à-dire que tous les points de F sont réguliers. P. ex. cela arrive toujours, d'après les résultats de M. Frostman, si tout point de l'ensemble F satisfait à la condition de Poincaré, ce qui consiste en ce que chaque point de F peut être considéré comme le sommet d'un cône de révolution dont la pointe fait partie de F. Les volumes sphériques traités au chapitre précédent fournissent les exemples les plus simples. La formule (2) est encore valide si 1) $v(P)$ est un potentiel borné partout sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, 2) $v(P)$ est un potentiel partout fini, dû à des masses positives ou la différence de tels potentiels. En effet, dans ces circonstances les masses ν s'annulent sur l'ensemble F'' qui est de capacité nulle (n^{os} **13** et **7**).

Voici deux applications de ces résultats ; on y suppose toujours que les masses sont situées sur F.

La formule simplifiée (2) *ayant lieu pour une raison ou une autre et le potentiel v étant $\geqq 0$ sur F en tout point où il est bien déterminé, il sera $\geqq 0$ en tout point extérieur à F.*

La masse totale de GREEN $\mu_M(F)$ est évidemment toujours $\leqq 1$.[21]) On peut préciser ce résultat dans le cas où F admet un potentiel d'équilibre u, ce qui, comme on sait, a toujours lieu si F est borné. On a alors $\mu_M(F) = u(M)$. Ces préliminaires posés, on comprendra l'intérêt de l'énoncé suivant qui se déduit facilement de la formule (1).

En désignant par l et L les bornes inférieure et supérieure sur F d'un potentiel v bien déterminé en tout point de F, on aura en tout point M extérieur à F

$$l\mu_M(F) \leqq v(M) \leqq L\mu_M(F).$$

Chapitre VII. — Le balayage de masses.

20. Soit ν une distribution quelconque de masses, situées en partie sur l'ensemble F, en partie sur l'ensemble complémentaire $\Omega - F$. Le problème de balayage consiste à remplacer ces dernières masses par des masses réparties sur F, de sorte que le potentiel reste conservé sur F (pour autant que cela est possible). Dans le cas où la masse extérieure à F est concentrée en un seul point M et que c'est la masse unité, ce sont les masses de GREEN μ_M qui fournissent la solution de ce problème. Le cas général se réduit facilement à ce cas particulier.

Soit e un sous-ensemble de F, mesurable au sens de BOREL, d'ailleurs arbitraire. La formule

$$\nu^*(e) = \int_{\Omega - F} \mu_M(e)\, d\nu(M) \tag{1}$$

définit une distribution de masses sur F dont on va préciser les propriétés tout à l'heure. P étant un point arbitraire de l'espace, il vient par la dernière formule et les formules (1) et (3) du n° **15**

$$\int_{\Omega - F} r_{PM}^{\alpha - m}\, d\nu(M) = \int_F r_{PO}^{\alpha - m}\, d\nu^*(O) + \int_{\Omega - F} G_M(P)\, d\nu(M).$$

En posant maintenant, sur l'ensemble F, $\bar{\nu} = \nu + \nu^*$, nous aurons

---

[21]) Pour le voir, on peut p. ex. faire tendre P vers l'infini dans l'inégalité (2) du n° **15**.

$$v(P) = \int_{\Omega} r_{PM}^{\alpha-m} d\nu(M) = \bar{v}(P) + \int_{\Omega - F} G_M(P) d\nu(M),$$

où

$$\bar{v}(P) = \int_F r_{PQ}^{\alpha-m} d\bar{\nu}(Q).$$

On a donc $\bar{v}(Q') = v(Q')$ *en tout point régulier* Q' *de* F.

Évidemment, cette égalité n'a pas lieu en général dans l'ensemble irrégulier F'' et dans l'ensemble ouvert $\Omega - F$. On peut préciser cet énoncé dans le cas important où la masse ν est de signe constant dans $\Omega - F$, p. ex. de signe *positif. Alors par le balayage le potentiel n'est jamais augmenté.* Il est diminué en tout point de $\Omega - F$ dans le cas non-newtonien, tandis que dans le cas newtonien il n'est diminué que dans ceux des domaines connexes adjacents qui, avant le balayage, contenaient de la masse.

La masse $\mu_M(e)$ s'annulant sur tout ensemble e de capacité nulle, on voit par la formule de définition (1) que la masse $\nu^*(e)$ résultant du balayage s'annule aussi sur tout tel ensemble. Par conséquent, elle s'annule sur l'ensemble des points irréguliers F'', et alors la distribution $\bar{\nu} = \nu + \nu^*$ est identique à ν sur cet ensemble. En tenant compte de ceci et de ce que $\bar{v}(Q) = v(Q)$ sauf au plus dans l'ensemble F'', on obtient à l'aide de la formule (1) du n° **19** l'expression suivante pour le potentiel $\bar{v}(M)$ en un point M extérieur à F

$$\bar{v}(M) = \int_F v(Q)\, d\mu_M(Q) + \int_{F''} G_M(Q)\, d\nu(Q). \tag{2}$$

Si en particulier l'ensemble irrégulier F'' n'existe pas ou si la variation totale de ν sur cet ensemble s'évanouit, l'expression devient

$$\bar{v}(M) = \int_F v(Q)\, d\mu_M(Q). \tag{3}$$

On pourra juger tout à l'heure de l'utilité des formules obtenues.

21. Un cas particulier intéressant, qui nous donnera aussi une formule de la moyenne, est celui où l'on balaye les masses sur l'extérieur S^* d'une sphère S de rayon R et de centre M. On trouve par spécialisation de la fonction $\lambda_M(Q)$ (formule (3) du n° **16**) que le nouveau potentiel aura en M la valeur

(4) $$v_{S^*}(M) = \int_{S^*} v(Q)\varkappa_M(Q)\,dQ,$$

avec

(5) $$\varkappa_M(Q) = \pi^{-\left(\frac{m}{2}+1\right)}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{2}R^\alpha(r_Q^2 - R^2)^{-\frac{\alpha}{2}} r_Q^{-m},$$

où l'on a posé $r_{MQ} = r_Q$. De nos résultats généraux sur le balayage on conclut immédiatement que si les masses engendrant v sont *positives,* on a

(6) $$v_{S^*}(M) \leqq v_M.$$

On en déduit facilement

(7) $$v(M) = \lim_{R\to 0} v_{S^*}(M),$$

égalité valable pour des potentiels dus à des masses de signe quelconque en tout point de détermination M. Il suffit de le montrer pour des masses positives. Or dans ce cas on le déduit de la semicontinuité inférieure, de l'identité fournie par un calcul direct

$$\int_{S^*} \varkappa_M(Q)\,dQ = 1$$

et du fait que la même intégrale étendue à la partie commune de S^* et de la sphère $r_Q \leqq \delta$ (δ un nombre positif arbitraire) tend vers 1 lorsque R tend vers 0. Ajoutons encore qu'il est à peu près évident que $v_{S^*}(M)$ croît lorsque le rayon R de la sphère décroît (*cf.* d'ailleurs les remarques du n° **24** sur les balayages successifs).

Cette valeur moyenne joue le même rôle pour les potentiels non-newtoniens que joue la valeur moyenne de Gauss

(8) $$\frac{1}{S}\int_S v(Q)\,dS$$

pour le potentiel newtonien. La dernière intégrale est étendue à la surface de la sphère S de centre M, et nous avons désigné en même temps par S la surface totale de la sphère. Pour $\alpha = 2$ la valeur moyenne (4) devient à la limite identique à celle de Gauss (*cf.* le n° **16**).

22. Nous aurons besoin dans le dernier chapitre d'une extension d'un théorème de M. Evans[22]) concernant la fonction

[22]) C. G. Evans, Potentials of Positive Mass I, *Transactions American Math. Soc.,* **37** (1935), p. 226—253, spéc. p. 231.

limite d'une suite croissante de potentiels v_n dus à des masses positives. M. EVANS suppose que les masses sont portées par un ensemble fermé et *borné* F et trouve sous cette hypothèse que les potentiels v_n tendent vers un potentiel v dû à des masses positives portées par F, sauf dans le cas où ils tendent identiquement vers ∞. Nous aurons à nous placer dans des conditions un peu plus générales en admettant que les masses peuvent s'étendre à l'espace entier. On a le théorème suivant, valable pour tout exposant $0 < \alpha \leqq 2$.

Une suite croissante de potentiels $v_n(P)$ dus à des masses positives qui ne tend pas identiquement vers l'infini, tend vers une fonction de la forme $v(P)+c$ où $v(P)$ est encore un potentiel dû à des masses positives et c une constante $\geqq 0$.

La démonstration dans le cas non-newtonien est tout analogue à celle ayant rapport au cas classique, on n'aura qu'à remplacer la valeur moyenne de GAUSS par celle donnée par la formule (4). Quant au cas classique, le lecteur n'aura aucune difficulté à compléter la démonstration de M. EVANS en ce qui concerne la légère extension donnée ci-dessus.

23. Comme application de nos résultats sur le balayage nous examinerons la distribution de la masse de GREEN sur F lorsque M est un point très voisin d'un point frontière régulier Q' de F, en montrant que presque toute la masse se trouve au voisinage de Q'. La démonstration se base sur l'existence de potentiels auxiliaires convenables dus à des masses positives réparties sur F. La méthode du balayage nous fournira de tels potentiels.

Admettons un instant qu'on puisse former un potentiel $v(P)$ dû à des masses positives réparties sur F qui ait les propriétés suivantes. 1) $v(P)=1$ au point frontière régulier Q', 2) $v(P)$ est partout $\leqq 1$, 3) $v(P) < \varepsilon$ à l'extérieur d'une sphère S de centre Q' et de rayon R, ce rayon et le nombre ε étant très petits. Cela posé, on a par la formule (2) du n° **19**, en désignant par F_S le sous-ensemble de F contenu dans S,

$$v(M)=\int\limits_F v(Q)\,d\mu_M(Q) \leqq \int\limits_{F_S} d\mu_M(Q)+\varepsilon \int\limits_{F-F_S} d\mu_M(Q)=$$
$$=\mu_M(F_S)+\varepsilon\mu_M(F-F_S) \leqq \mu_M(F_S)+\varepsilon,$$

où l'on a tenu compte des inégalités $\mu_M(F-F_S) \leqq \mu_M(F) \leqq 1$. Le point M étant voisin de Q', on aura à cause de la semicontinuité inférieure, $v(M) > v(Q') - \delta = 1 - \delta$, où δ est arbitrairement petit, et alors

$$1 \geqq \mu_M(F_S) > 1 - (\varepsilon + \delta)$$

et par suite

$$\mu_M(F - F_S) < \varepsilon + \delta.$$

Il reste à construire le potentiel auxiliaire $v(P)$. Soit s une sphère de centre Q' et de rayon $r < R$. Le potentiel d'équilibre $u(P)$ du volume sphérique s est très petit à l'extérieur de la sphère S si le rapport r/R est assez petit. En outre on a $u(Q') = 1$ et $u(P) \leqq 1$. Le balayage des masses de u sur F fournit maintenant un potentiel $v(P)$ qui remplit toutes les conditions posées. En résumé :

Si Q' est un point frontière régulier de l'ensemble F, la masse de Green μ_M qui se trouve dans un voisinage arbitrairement petit de Q' tend vers 1, et la masse extérieure à ce voisinage tend vers 0, lorsque le point M tend d'une manière quelconque vers Q'. La réciproque est vraie.

Le lecteur n'aura aucune difficulté à vérifier ce dernier énoncé en observant que ladite concentration de la masse de Green entraîne $\lim\limits_{P \to Q'} G_M(P) = 0$, pour toute position du pôle M, ce qui d'après le critère du n° **15** suffit pour assurer la régularité de Q'.

On peut préciser le théorème ci-dessus par l'énoncé suivant que nous donnons ici sans démonstration.

$V(P)$ étant un potentiel quelconque, on a avec les notations utilisées plus haut

$$\lim_{M \to Q'} \int_{F - F_S} V(Q)\, d\mu_M(Q) = 0.$$

24. Nous rassemblons ici quelques *remarques sur le cas newtonien* qui sont des conséquences faciles des faits indiqués à la fin du n° **18**.

M étant toujours un point d'un certain domaine connexe D adjacent à F, la formule (1) du n° **19** a lieu même dans le cas où les masses sont réparties sur l'ensemble (fermé) $\Omega - D$. Il en est de même de la formule (2) de ce numéro sous les conditions qu'on y trouve précisées.

Quant au balayage des masses, il ressort du calcul donné au n° **20** que si l'on ne balaye sur F que celles des masses qui se trouvent dans le domaine D, le potentiel est conservé en tout point de F'_D, c'est-à-dire en tout point régulier par rapport au domaine D[23]) (*cf.* le n° **18**).

Cela posé, il est facile de préciser les résultats du numéro précédent dans le cas newtonien. En effet, *ces résultats subsistent pour tout point Q' de F'_D.*[24]) Pour former le potentiel auxiliaire $v(P)$, on ne balaye sur F que celles des masses du potentiel d'équilibre de la sphère s qui se trouvent dans le domaine D. Le nouveau potentiel $v(P)$ a les mêmes propriétés essentielles que l'ancien sauf que ces masses sont réparties sur $\Omega - D$ au lieu de F. Alors, d'après ce qu'on vient de dire, on peut encore appliquer la formule (2) du n° **19**, et la démonstration s'achève comme plus haut.

25. Nous allons maintenant étudier de plus près la masse $\mu_M(e)$ portée par un sous-ensemble arbitraire e de F mesurable au sens de BOREL. Soient $\overline{\overline{F}}$ un second ensemble fermé comprenant F, M un point extérieur à $\overline{\overline{F}}$. Il est presque évident qu'on peut trouver les masses de GREEN μ_M par rapport à F en formant d'abord les masses de GREEN $\overline{\overline{\mu}}_M$ par rapport à $\overline{\overline{F}}$ et en balayant ensuite sur F la partie de la masse portée par $\overline{\overline{F}} - F$. En effet le procédé en question conduit à des masses positives distribuées sur F dont le potentiel est égal à $r_{MQ}^{\alpha - m}$ en tout point Q de F à l'exception au plus d'un ensemble de capacité nulle. Or, comme on a vu plus haut, il n'y a que la distribution μ_M qui engendre un tel potentiel. Ayant recours à la formule (1), ce résultat peut s'écrire

$$\mu_M(e) = \overline{\overline{\mu}}_M(e) + \int_{\overline{\overline{F}} - F} \mu_Q(e)\, d\overline{\overline{\mu}}_M(Q). \tag{9}$$

Cela posé, soit M un point extérieur à F et décrivons une sphère s contenant le point M à son intérieur et assez petite pour qu'elle ne renferme aucun point de F. Comme ensemble $\overline{\overline{F}}$ on pourra alors prendre l'extérieur de cette sphère, frontière comprise. Les formules (2) et (3) du n° **16** mettent alors en évidence que $d\overline{\overline{\mu}}_M(Q)$ peut s'écrire $\lambda_M(Q)\,dQ$, où $\lambda_M(Q)$ est une fonction analytique et régulière de M. Par conséquent, il en est de même de $\mu_M(e)$. On voit aussi que dans le cas non newtonien tout sous-ensemble de F mesurable au sens de BOREL et de mesure posi-

[23]) Cela a lieu aussi dans le cas général $0 < \alpha \leq 2$.

[24]) *Cf.* C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *loc. cit.*, p. 183 et 203.

tive porte une masse positive. Dans le cas newtonien la masse $\bar{\bar{\mu}}_M$ est toute entière située sur la surface de s et alors $\bar{\bar{\mu}}_M(e)$ s'évanouit. Par dQ on entend alors l'élément d'aire de la sphère s et $\lambda_M(Q)$ devient le noyau classique de POISSON, manifestement harmonique en M. Il en est donc de même de la masse $\mu_M(e)$.[25])

Soit maintenant de nouveau α un exposant quelconque, $0 < \alpha \leqq 2$. Alors, M_0 et M étant deux points fixes, d'ailleurs arbitraires, d'un domaine connexe adjacent à F, il existe un nombre positif K, *indépendant du sous-ensemble e de F*, tel que l'on ait

$$(10) \qquad \mu_M(e) \leqq K \mu_{M_0}(e).$$

Pour le voir, admettons d'abord qu'il existe une sphère s entourant les points M_0 et M et laissant F à son extérieur. Alors, avec les notations de tout à l'heure, l'inégalité en question pour les masses $\bar{\bar{\mu}}_{M_0}$ et $\bar{\bar{\mu}}_M$ s'établit par le même calcul qui donnait l'inégalité de HARNACK (n° **17**). Le passage aux masses μ_{M_0} et μ_M se fait alors par la formule (9). Pour M_0 et M arbitraires, on opère de proche en proche en intercalant un nombre fini de points auxiliaires.

Le résultat ci-dessus implique qu'il existe une fonction positive et bornée $\gamma_M(Q)$ telle que

$$\mu_M(e) = \int_e \gamma_M(Q)\, d\mu_{M_0}(Q).$$

La fonction $\gamma_M(Q)$ joue dans le cas général ($0 < \alpha \leqq 2$, F un ensemble fermé de capacité positive quelconque) le rôle du noyau de POISSON, l'intégrale de POISSON étant alors à former par rapport à la distribution de masses μ_{M_0}. P. ex. la formule (2) du n° **19** s'écrit pour tout point M appartenant au même domaine connexe adjacent que M_0

$$v(M) = \int_F v(Q)\, \gamma_M(Q)\, d\mu_{M_0}(Q).$$

Chapitre VIII. — Prolongement d'une fonction donnée sur un ensemble fermé.

26. Soit $f(Q)$ une fonction donnée sur l'ensemble F, et définissons pour les points M extérieurs à F un *prolongement* $\bar{f}(M)$ de f par la formule

---

[25]) *Cf.* C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *loc. cit.*, p. 182 et 203.

$$(1') \qquad \bar{f}(M) = \int_F f(Q)\, d\mu_M(Q).$$

Pour que l'intégrale ait un sens, nous admettrons que la fonction donnée $f(Q)$ est mesurable au sens de BOREL et que $|f(Q)|$ est majoré par une fonction de la forme $v(Q)+c$, où v est un potentiel dû à des masses positives et c une constante positive. Dans le cas déjà considéré où $f(Q)$ est un potentiel engendré par des masses situées sur F et s'évanouissant sur la partie irrégulière F'' de F, $\bar{f}(M)$ sera, d'après la formule (2) du n° **19**, identique à ce potentiel à l'extérieur de F, $\bar{f}(M) = v(M)$. Plus généralement, si $f(Q)$ est le potentiel de masses situées n'importe où, sauf sur F'', $\bar{f}(M)$ ne sera, d'après la formule (3) du n° **20**, que le potentiel résultant du balayage de ces masses sur F, $\bar{f}(M) = \bar{v}(M)$. Enfin dans le cas où $f(Q) = 1$ dans un certain sous-ensemble e de F et $=0$ dans $F-e$, on a $\bar{f}(M) = \mu_M(e)$.

Pour ce qui suit, il sera commode de définir $\bar{f}$ aussi pour les points de F en y posant $\bar{f}(Q) = f(Q)$. Cela posé, on voit facilement que $\bar{f}$ est continu en tout point extérieur à F et en tout point régulier de F qui est en même temps point de continuité de f (n° **23**). Pour les points extérieurs on peut même dire davantage, savoir que $\bar{f}$ y est analytique et régulière (n° **25**).

Soit de nouveau $\bar{\bar{F}}$ un ensemble fermé comprenant notre ensemble F. La fonction $\bar{f}$ étant définie par ce qui précède sur tout l'ensemble $\bar{\bar{F}}$, on pourra en former le prolongement pour l'extérieur de $\bar{\bar{F}}$ par une formule analogue à (1) portant sur $\bar{\bar{F}}$. *Ce nouveau prolongement est identique au prolongement original dans tout l'extérieur de* $\bar{\bar{F}}$. En effet, cela découle immédiatement de la formule de composition pour les masses de GREEN correspondantes donnée au numéro précédent.

Nous indiquerons maintenant la démonstration d'un théorème d'unicité où il faut de nouveau exclure l'exposant newtonien $\alpha = 2$.

Si le prolongement d'une fonction f donnée sur un ensemble fermé F s'annule identiquement dans un domaine D de $\Omega - F$, ce prolongement s'annule identiquement dans tout $\Omega - F$ et la fonction donnée f est zéro presque partout[26]).

[26]) On sait que ce théorème est faux dans le cas newtonien. Le meilleur théorème de ce genre qui puisse être vrai c'est que, sous la condition posée, f s'annule presque partout par rapport à la masse de GREEN. Je n'ai réussi à démontrer ce théorème que dans le cas bien facile où f est continu (presque partout).

Ce théorème est déjà démontré au n° **11** dans le cas particulier où f est le potentiel d'une distribution de masses sur F. Pour démontrer le théorème donné ici, on peut, sans restreindre la généralité[27]), supposer que le domaine D embrasse l'extérieur d'une sphère de rayon très grand. L'ensemble F est alors borné et intérieur à une certaine sphère S de rayon R. On pourra, pour arriver au prolongement dans D, effectuer le prolongement dans S et le poursuivre ensuite dans l'extérieur de S. Par cela on aura réduit le théorème au cas où f est donné de prime abord à l'intérieur S^* d'une sphère S. On aura alors dans les notations des n^{os} **16** et **17** pour tout point M extérieur à S

$$\bar{f}(M) = \int_{S^*} f(Q)\,\lambda_M(Q)\,dQ,$$

cette intégrale s'annulant identiquement dans D. D'où l'on voit par le raisonnement du n° **11** que tous les moments de $f(Q)\,(R^2 - r_Q^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$ s'annulent.

27. Terminons ce chapitre par quelques indications sur le cas newtonien. Pour nous approcher de l'ordre d'idées habituel, nous admettons que l'ensemble fermé F ne contienne aucun point intérieur et que la fonction f donnée sur F soit continue. Soit alors D un domaine dont la frontière est constituée par F. Le prolongement de f est harmonique dans D (n° **25**), il est borné et il admet en vertu de la propriété de la masse de Green démontrée au n° **23**, comme valeurs limites les valeurs données f en tout point régulier de F (et selon le n° **24** même en tout point de F'_D)[28]). Alors il est évident d'après le théorème d'unicité de M. Vasilesco[29]) que notre prolongement est identique à la solution

[27]) En effet la correspondance donnée par la formule (1) est invariante par rapport à la transformation de Kelvin.

[28]) *Cf.* C. de la Vallée Poussin, *loc. cit.*, p. 184 et 205.

[29]) Le théorème de M. Vasilesco dit qu'une fonction qui est harmonique et bornée dans D et qui admet la valeur limite zéro en tout point frontière de D sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, s'annule identiquement dans D; *voir* F. Vasilesco, Sur la méthode du balayage de Poincaré, son extension par M. de la Vallée Poussin et le problème de Dirichlet généralisé, *Journal de Math.*, 14 (1935), p. 209—227 et (aussi pour une généralisation) O. Frostman, La méthode de variation de Gauss et les fonctions sousharmoniques, *ces Acta*, **8** (1937), p. 149—159, spéc. p. 158. Ajoutons que le théorème de M. Vasilesco subsiste, si l'on remplace l'en-

dans le sens de M. WIENER du problème de DIRICHLET pour le domaine D avec les valeurs limites f.

Chapitre IX. — Les suites bornées de potentiels et leurs applications au problème du prolongement et au problème de Dirichlet.

28. On a vu plus haut combien il est simple de caractériser, *sans recourir aux masses de* GREEN, le prolongement d'une fonction f donnée sur un ensemble fermé F dans le cas où f coïncide sur F avec un potentiel dont les masses sont situées sur F. En effet, sous des conditions très générales, il y aura alors coïncidence dans l'espace entier. Dans le chapitre suivant nous donnerons certaines conditions sous lesquelles une fonction peut s'écrire comme potentiel. On sait par la théorie classique que la continuité de la fonction ne suffit pas pour qu'une telle représentation soit possible même dans le cas où F est un ensemble très régulier, p. ex. la surface d'une sphère. Nous allons montrer ici que par les suites bornées de potentiels on arrive dans des cas très généraux au prolongement des fonctions et alors, en particulier dans le cas newtonien, à la solution du problème de Dirichlet généralisé.

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ des potentiels tels que $|v_n| \leqq c$, c étant une constante positive. Nous allons considérer les fonctions limites de telles suites bornées. Avant d'aborder le problème indiqué plus haut remarquons en passant que les potentiels de double couche de la théorie classique peuvent être écrits comme fonctions limites de cette espèce. A titre d'exemple considérons dans l'espace à trois dimensions la double couche de la densité $1/4\pi$ étalée sur la surface de la sphère unité. On sait que le potentiel correspondant est égal à 1, $1/2$, 0 à l'intérieur, sur la surface et à l'extérieur de la sphère. Étalons maintenant uniformément les masses respectives $1/2\varepsilon$ et $-1/2\varepsilon$ sur les sphères concentriques de rayons $1/(1+\varepsilon)$ et $1/(1-\varepsilon)$. Le potentiel de simple couche correspondant v_ε a la valeur 1 à l'intérieur de la première sphère et la valeur 0 à l'extérieur de la seconde. Entre les deux sphères on a

---

semble exceptionnel de capacité nulle par un ensemble qui est de mesure nulle par rapport à la masse de GREEN relative à la frontière de D et à un point arbitraire de D.

$$0 < v_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{1}{r} - (1-\varepsilon)\right] < \frac{1}{2\varepsilon}\,[1+\varepsilon-(1-\varepsilon)] = 1$$

et en particulier sur la sphère de rayon 1, $v_\varepsilon = \frac{1}{2}$. La suite v_ε, majorée par la constante 1, admet donc bien comme fonction limite le potentiel de double couche en question.

Retournons maintenant à notre problème original et montrons que le prolongement de toute fonction *continue* f peut s'obtenir comme fonction limite d'une suite bornée de potentiels. Nous supposons encore pour simplifier que l'ensemble F soit borné. Soit alors f une fonction continue donnée sur cet ensemble. Nous construisons d'abord une suite bornée de potentiels, avec leurs masses sur F, qui tendent vers f en tout point régulier de F. Complétons à cet effet la fonction f de façon à obtenir une fonction continue définie dans l'espace entier qui s'annule dans la partie éloignée de l'espace. On peut évidemment trouver des fonctions f_n continues avec leurs dérivées des deux premiers ordres, s'annulant aussi identiquement à l'infini et tendant (uniformément) vers la fonction f dans l'espace entier et en particulier sur l'ensemble F. Ces fonctions f_n peuvent s'écrire (n° **10**)

$$f_n(P) = I^\alpha k_n(P),$$

la signification de $k_n(P)$ étant évidente. On aura donc en particulier pour les points P de F

$$f_n(P) = \int\limits_{\Omega} r_{PQ}^{\alpha-m}\,\frac{k_n(Q)}{H_m(\alpha)}\,d\,Q.$$

En balayant les masses sur F, on aura de nouveaux potentiels coïncidant avec les premiers en tout point régulier de F. Je dis que la nouvelle suite est encore bornée. En effet, les masses de f_n ayant une dérivée spatiale continue, ces masses s'évanouissent sur tout ensemble de capacité nulle et en particulier sur la partie irrégulière de F. Par conséquent le potentiel résultant du balayage sera donné par la formule (3) du n° **20** (en y remplaçant $v(Q)$ par $f_n(Q)$), ce qui met en évidence que toute borne de la première suite est en même temps une borne de la seconde.

Il est d'un certain intérêt de s'affranchir dans le résultat qui précède de l'hypothèse de continuité. Il suffit p. ex. que la fonction f puisse, sur l'ensemble F, être approchée par une suite bornée de fonctions f_n de la nature indiquée ou, ce qui revient au même, par une suite bornée de fonctions continues d'ailleurs quelconques[30]).

Nous allons montrer que les potentiels qu'on vient de construire admettent une fonction limite aussi en dehors de l'ensemble F et que cette fonction limite est précisément le prolongement de la fonction f. En effet, on peut énoncer à ce sujet le théorème suivant.

Soit $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ une suite bornée de potentiels dont les masses sont situées sur l'ensemble F. Si ces potentiels tendent vers une fonction f, sur tout l'ensemble F, sauf au plus sur un sous-ensemble de capacité nulle, ils tendent en dehors de F vers le prolongement $\bar{f}_F$ de f.

En effet, puisque les v_n sont bornés, leurs masses s'annulent d'après le n° **13** sur la partie irrégulière de F et on aura

$$v_n(M) = \int_F v_n(Q)\, d\mu_M(Q),$$

tandis que le prolongement de f est donné par la formule analogue

$$\bar{f}_F(M) = \int_F f(Q)\, d\mu_M(Q).$$

Puisque $f(Q) = \lim v_n(Q)$ sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, où la masse de Green s'annule, on n'aura qu'à intervertir l'ordre de l'intégration et du passage à la limite pour arriver à notre énoncé. Cette interversion est légitime, puisque les v_n sont bornés[31]) dans leur ensemble.

Voici un exemple pour illustrer ce résultat. Prenons comme ensemble F l'intérieur et la surface de la sphère unité et comme fonction f la fonction $=1$ à l'intérieur et $=0$ sur la surface. Cette fonction appartient à la classe de fonctions considérée tout

---

[30]) C'est-à-dire qu'il suffit que la fonction f soit bornée et qu'elle appartienne à la première classe de Baire. Tout à l'heure on trouvera une généralisation qui va beaucoup plus loin.

[31]) On peut outre les suites bornées de potentiels introduire la classe plus générale des *suites majorées de potentiels*, c'est-à-dire des suites v_n telles que $|v_n| \leq V + C$, V étant un potentiel fixe dû à des masses positives et C une constante positive. L'intégrale $\int (V+C)\, d\mu_M$ étant toujours convergente, l'interversion effectuée dans le texte est, d'après un théorème bien connu de M. Lebesgue, toujours légitime pour les suites majorées convergentes.

à l'heure. Les suites bornées de potentiels avec leurs masses à l'intérieur et sur la surface de la sphère qui y tendent vers la fonction donnée tendent à l'extérieur vers le prolongement de cette fonction. Or ce prolongement est de caractère tout différent dans le cas newtonien et dans le cas non-newtonien. Dans le premier cas, ce prolongement donné par l'intégrale classique de POISSON pour l'extérieur de la sphère est identiquement zéro. Pour un exposant α non-newtonien, on obtient comme prolongement le potentiel d'équilibre d'ordre α de la sphère.

Indiquons encore succinctement la généralisation suivante, facile à démontrer. Toute fonction bornée f appartenant à l'une quelconque des classes de BAIRE, donnée sur l'ensemble F, peut être approchée par une suite bornée de potentiels dus à des masses portées par F, cela excepté au plus sur un sous-ensemble qui est de mesure nulle par rapport aux masses de GREEN. Toute suite pareille tend en dehors de F vers le prolongement de f.

Le seconde partie de notre énoncé est immédiate. Pour établir la première, observons d'abord que, d'après l'inégalité (10) du n° **25,** les ensembles de mesure nulle par rapport aux masses de GREEN μ_M sont les mêmes pour autant que le pôle M varie dans le même domaine connexe adjacent. Cela étant, on prend un point M_k dans chacun des domaines adjacents D_k et on forme la fonction additive d'ensemble $\mu = \Sigma a_k \mu_{M_k}$ avec des $a_k > 0$ et tels que la série Σa_k converge. La fonction f étant mesurable par rapport à la fonction d'ensemble μ, on sait former, tout comme s'il s'agissait de la mesure ordinaire, une suite bornée de fonctions continues tendant vers f sauf au plus sur un sous-ensemble de mesure nulle par rapport à μ et à plus forte raison par rapport aux masses de GREEN μ_{M_k}. Enfin on remplace les fonctions continues par des fonction f_n de la nature indiquée plus haut.

29. Nos résultats permettent aussi de donner une nouvelle solution du problème de DIRICHLET généralisé. Soit F un ensemble fermé et borné et f une fonction continue (ou une fonction appartenant à la classe considérée) définie sur cet ensemble. Cette fonction peut, sauf au plus sur un sous-ensemble de capacité nulle (la partie irrégulière de F), s'écrire comme fonction limite d'une suite bornée de potentiels newtoniens dont les masses sont situées sur F. D'autre part, toute suite bornée de potentiels newtoniens dus à des masses situées sur F qui tend vers la fonction

f en tout point de F, sauf au plus dans un sous-ensemble de capacité nulle, tend en dehors de F vers une fonction bien déterminée $\bar{f}_F$. Cette fonction est harmonique en tout domaine connexe adjacent à F et forme pour un tel domaine la solution du problème de DIRICHLET, aux valeurs limites f, dans le sens de M. WIENER.

Chapitre X. — Le problème de Green et les fonctions surharmoniques.

30. Dans la théorie classique du potentiel, on désigne par problème de GREEN[32]) — appelé aussi problème de GAUSS — le problème suivant, auquel nous avons déjà fait allusion tout à l'heure. Étant donné sur un certain nombre de domaines et de surfaces, désignés dans leur ensemble par A, une certaine fonction f, écrire cette fonction comme potentiel de masses portées par A. Ce problème est résoluble et se réduit à un nombre fini de problèmes de DIRICHLET, si les surfaces données et celles formant les frontières des domaines donnés sont assez régulières et s'il en est de même de la fonction f, p. ex. si cette fonction admet un assez grand nombre de dérivées.

Dans le problème général on entendra par A un ensemble fermé arbitraire de capacité positive et on remplacera le potentiel newtonien par un potentiel d'ordre α quelconque, $0 < \alpha \leqq 2$. Ce problème, nous l'avons envisagé dans le chapitre précédent pour des fonctions de caractère très régulier (les fonctions f_n). La méthode utilisée consiste à représenter la fonction par un potentiel avec des masses situées n'importe où et à balayer ensuite ces masses sur l'ensemble donné. Cette méthode peut encore s'appliquer à des cas plus généraux; nous n'insistons pas ici. Une autre méthode sera élucidée à la fin de ce chapitre par un problème particulier très simple. La plus grande partie du présent chapitre est consacrée au problème où les masses cherchées sont *positives.* Nous commençons par le cas où l'ensemble fermé A est identique à l'espace entier, et nous allons donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction f définie en tout point de l'espace puisse s'écrire comme *potentiel de masses positives.* Dans le

---

32) W. THOMSON and P. G. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy,* II, Cambridge, 1883, p. 52.

n° **33** nous donnons la solution du problème correspondant pour un ensemble fermé quelconque.

31. Soit donc f une fonction, donnée dans l'espace entier, qu'il s'agit d'écrire comme potentiel de masses positives. *Une condition nécessaire, toujours admise dans la suite, est évidemment que la fonction f soit semicontinue inférieurement.* Pour obtenir d'autres conditions, on n'aura qu'à recourir à nos résultats sur le balayage de masses positives (n° **20**). Soient en effet F un ensemble fermé quelconque dont tous les points sont réguliers[33]) et M un point extérieur à cet ensemble. Alors, si f est un potentiel dû à des masses positives, le prolongement

$$(1) \qquad \bar{f}_F(M) = \int_F f(Q)\, d\mu_M(Q)$$

devra satisfaire à l'inégalité

$$(2) \qquad \bar{f}_F(M) \leqq f(M),$$

ce qui donne une nouvelle condition nécessaire. Remarquons que, grâce aux propriétés de la masse totale de Green, cette inégalité subsiste si f est une constante positive et alors aussi lorsque f est la somme d'un potentiel dû à des masses positives et d'une constante positive. Inversement on peut montrer que *si l'inégalité (2) a lieu pour tout ensemble F de l'espèce considérée et si la fonction f est semicontinue inférieurement, cette fonction peut, à une constante positive additive près, se mettre sous la forme d'un potentiel de masses positives.*

Les conditions données ici rappellent la définition des fonctions surharmoniques, due à M. F. Riesz[34]). En effet, on a vu plus haut que dans le cas classique le prolongement de f n'est que la solution du problème de Dirichlet (n° **27**).

Comme dans le cas classique, il est avantageux de remplacer notre condition (2) ayant rapport à des ensembles F généraux par une autre se rapportant à des ensembles très particuliers. On peut en effet démontrer (non sans quelque difficulté) que, la semicontinuité étant toujours admise, la condition (2) est entièrement équivalente à celles-ci

---

[33]) Il est commode pour simplifier les démonstrations de se restreindre à de tels ensembles. Nos énoncés restent valides, et même à plus forte raison, si l'on omet cette hypothèse restrictive.

[34]) F. Riesz, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, *Acta Math.*, **48** (1926), p. 329—343 et **54** (1930), p. 321—360.

$$(2') \qquad f \geqq 0$$

et la condition (2) posée pour l'extérieur (surface comprise) S^* d'une sphère S quelconque de centre M et de rayon R très petit, c'est-à-dire que (*cf.* le n° **21**) la valeur moyenne

$$(2'') \qquad \bar{f}_{S^*}(M) = \int_{S^*} f(Q) \varkappa_M(Q) dQ \leqq f(M),$$

inégalité dont le premier membre est à remplacer dans le cas classique par la valeur moyenne de GAUSS.

Nous appellerons les fonctions remplissant l'un ou l'autre de nos systèmes équivalents de conditions *fonctions surharmoniques d'ordre* α[35]), en supprimant le dernier attribut quand aucune confusion n'est à craindre. Parmi les propriétés presque évidentes de ces fonctions, nous nous contentons de signaler la suivante. *La fonction f étant surharmonique, il en est de même de la fonction définie par la valeur moyenne* (2''), S^* désignant l'extérieur d'une sphère variable, de rayon constant R, décrite autour du point variable M. Cette fonction qui ne dépend que du point M et du rayon R sera dans la suite désignée par $f_{(R)}(M)$. On montre comme pour les potentiels de masses positives (n° **21**) que $f_{(R)}(M)$ *tend en croissant vers $f(M)$ quand le rayon R tend en décroissant vers zéro.*

Ajoutons qu'on démontre à peu près comme dans le cas classique que f étant surharmonique dans notre sens, il en sera de même de $\bar{f}_F$.

Nous avons vu que $f_{(R)}(M)$ tend en croissant vers $f(M)$ lorsque le rayon R tend vers zéro. De la même manière on voit que $f_{(R)}(M)$ tend en décroissant vers une valeur $C \geqq 0$ quand R tend vers l'infini. On montre facilement que la valeur limite C est indépendante de la position du point M et que c'est précisément la constante additive entrant dans la représentation de notre fonction f.

On peut montrer que la fonction $f - C$ est encore positive et alors manifestement surharmonique. En désignant donc $f - C$ de nouveau par f, on aura obtenu une fonction dont la valeur moyenne tend vers zéro lorsque M tend vers l'infini. Or cette propriété appartient aussi à tout potentiel. On voit alors que le théorème

[35]) En réalité, on devrait parler de fonctions surharmoniques d'ordre α *dans l'espace entier.*

à démontrer est équivalent au suivant: Pour qu'une fonction puisse s'écrire comme potentiel de masses positives, il faut et il suffit qu'elle soit surharmonique et que sa valeur moyenne tende vers zéro quand le rayon R tend vers l'infini.

32. Nous allons maintenant indiquer la démonstration du fait que nos conditions sont suffisantes. Il s'agit d'abord d'améliorer la fonction donnée sous certains rapports, en sorte qu'on obtienne une fonction que l'on puisse facilement écrire sous la forme d'un potentiel d'ordre α. Une première opération, consistant dans la formation du prolongement de la fonction donnée par rapport à *l'intérieur* d'une sphère très grande, donne une fonction surharmonique d'ordre α qui à *l'extérieur* de cette sphère est analytique et régulière et s'annule avec ses dérivées à l'infini d'une manière convenable. A l'intérieur de la sphère, cette fonction est identique à la fonction donnée et on n'y peut donc rien dire de la dérivabilité de la fonction. Or, une seconde opération qui n'est qu'une espèce d'amélioration de l'opération (2″), appliquée à la nouvelle fonction, conduit à une fonction surharmonique d'ordre α qui dans l'espace entier est continue avec ses dérivées des deux premiers ordres et qui encore se comporte à l'infini d'une manière convenable. Cette fonction pourra donc s'écrire d'abord comme potentiel newtonien et ensuite comme potentiel d'ordre α. Grâce à la surharmonicité d'ordre α, ce dernier potentiel sera dû à des masses positives. Un passage à la limite itéré effectué sur des potentiels croissants dus à des masses positives conduit enfin à la fonction donnée qui d'après un théorème donné au n° **22** pourra elle-même, à une constante positive additive près, s'écrire comme potentiel de masses positives. On voit que la marche est bien analogue à celle suivie par M. F. Riesz dans l'une de ses démonstrations concernant le cas classique. Ne cachons pourtant pas qu'on a à surmonter des difficultés considérables.

En ce qui concerne les détails, nous devons nous contenter ici de quelques indications. La première opération signalée plus haut s'effectue par la formule (*cf.* le n° **16**)

$$\bar{f}_{S'}(M) = \int_{S'} f(Q)\,\lambda_M(Q)\,dQ, \tag{3}$$

où S' désigne *l'intérieur* d'une sphère décrite autour de l'origine O, dont on va faire tendre le rayon vers l'infini, et M signifie un point arbitraire à l'extérieur de cette sphère. Il est manifeste que dans le cas $\alpha=2$ le second membre se réduit à l'intégrale classique de POISSON formée pour l'extérieur de la sphère. On voit que la fonction $\overline{f_{S'}}$ est analytique et régulière à l'extérieur de la sphère, qu'elle s'annule à l'infini comme $r_{OM}^{\alpha-m}$ et que ses dérivées d'ordre k s'y annulent comme $r_{OM}^{\alpha-k-m}$. A l'intérieur et sur la surface on pose évidemment $\overline{f_{S'}}(M)=f(M)$. Nous appelons la fonction ainsi obtenue, qui est manifestement encore surharmonique (d'ordre α) une fonction *tronquée.* Ajoutons que *ces fonctions tendent en croissant vers la fonction donnée f quand le rayon de la sphère S' tend vers l'infini.*

La seconde opération, qui finalement sera appliquée à ces fonctions tronquées, consiste dans le procédé suivant que, pour simplifier l'écriture, on explique pour la fonction f. On forme, γ étant une constante positive arbitraire, une nouvelle moyenne $F_{(R)}(M)$ de la fonction $f_{(R)}(M)$ (définie par la formule (2″)) en posant

$$F_{(R)}(M)=\gamma\int_1^\infty \varrho^{-\gamma-1}(\varrho^2-1)^{\frac{\gamma}{2}-1} f_{(R\varrho)}(M)\,d\varrho. \tag{4}$$

Il est bien clair que la fonction $F_{(R)}(M)$ est encore *surharmonique et qu'elle tend en croissant vers $f(M)$ lorsque R tend vers zéro,* puisqu'il en est ainsi des fonctions $f_{(R\varrho)}(M)$. En désignant d'autre part par $S^*_{(R)}$ l'extérieur de la sphère de rayon R décrite autour de M, on trouve par un calcul simple la formule explicite

$$F_{(R)}(M)=\int_{S^*_{(R)}} f(Q)\,\sigma_M(Q)\,dQ, \tag{5}$$

avec

$$\sigma_M(Q)=C_{\alpha\gamma m}R^\alpha(r_{MQ}^2-R^2)^{\frac{\gamma-\alpha}{2}}\,r_{MQ}^{-\gamma-m}. \tag{6}$$

La valeur de la constante $C_{\alpha\gamma m}$, qui d'ailleurs joue un rôle peu important dans la suite, se calcule facilement si l'on observe que toute fonction constante se reproduit par nos opérations, ce qui implique que l'intégrale de $\sigma_M(Q)$ étendue à $S^*_{(R)}$ est $=1$. On en tire

$$C_{\alpha\gamma m}=\frac{\pi^{-\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}. \tag{7}$$

Remarquons en passant que d'après les dernières formules, $F_{(R)}(M)$ se réduit à $f_{(R)}(M)$ pour $\gamma=0$ et que, d'autre part, pour $\gamma>0$, la fonction $F_{(R)}(M)$ est bien définie aussi dans le cas classique et qu'elle peut alors aussi s'obtenir en remplaçant dans la formule (4) la fonction $f_{(R)}(M)$ par la valeur moyenne de GAUSS.

Le point M étant fixé, le noyau $\sigma_M(Q)$ s'annule à l'infini, indépendamment de γ, comme $r_{MQ}^{-\alpha-m}$ et ses dérivées d'ordre k s'y annulent comme $r_{MQ}^{-\alpha-k-m}$. Pour *γ assez grand*, $\sigma_M(Q)$ et ses dérivées jusqu'à un certain ordre s'annulent encore sur la sphère $r_{MQ}=R$. Le noyau étant symétrique en M et en Q, on en conclut que $F_{(R)}(M)$ *possède des dérivées d'ordre arbitrairement donné* et que toutes les dérivations peuvent être exécutées sur $\sigma_M(Q)$ sous le signe $\int$, la variation avec M du domaine $S^*_{(R)}$ n'exerçant aucune influence sur l'expression de ces dérivées.

Nous posons maintenant les *conditions supplémentaires* que, pour M éloigné, la fonction donnée $f(M)$ possède elle-même des dérivées des deux premiers ordres et que la fonction, ses dérivées premières et son laplacien aient les ordres respectifs $O(r^{\alpha-m})$, $O(r^{\alpha-1-m})$ et $O(r^{\alpha-2-m})$, où r désigne la distance de M à l'origine. On démontre alors par un calcul assez laborieux, que nous devons omettre ici, que *la fonction $F_{(R)}(M)$, ses dérivées premières et son laplacien admettent les mêmes limitations.*

Ce point acquis, il est immédiat que si la fonction $f(M)$ surharmonique (d'ordre α) satisfait à nos conditions supplémentaires, la fonction $F_{(R)}(M)$ pourra, à un facteur constant près, s'écrire comme le potentiel newtonien absolument convergent de son laplacien. Donc, par le schéma donné aux n^os **10** et **28**, $F_{(R)}(M)$ pourra encore s'écrire comme potentiel d'ordre α absolument convergent d'une masse due à une fonction de densité continue. Grâce à la surharmonicité d'ordre α de $F_{(R)}(M)$ il est presque évident que cette fonction de densité est partout $\geqq 0$. En effet, si elle était négative en un point, elle le serait encore dans une petite sphère entourant ce point. En désignant par S^* l'extérieur de cette sphère, le prolongement de la fonction surharmonique $F_{(R)}$ par rapport à S^* aura à diminuer la fonction. Or ce prolongement, identique au potentiel obtenu par le balayage sur S^* des masses négatives intérieures à la petite sphère, augmenterait au sens strict la fonction $F_{(R)}$ au lieu de la diminuer. On arrive donc à une contradiction. En résumé, si la fonction surharmonique $f(M)$

satisfait aux conditions supplémentaires, $F_{(R)}(M)$ peut s'écrire comme potentiel de masses positives. En faisant tendre R vers zéro, $F_{(R)}$ tend en croissant vers f, par conséquent f peut encore s'écrire comme potentiel de masses positives[36].

Soit maintenant f une fonction surharmonique générale. Alors la fonction tronquée $\overline{f}_{S'}$ satisfait aux conditions supplémentaires, elle peut par conséquent s'écrire comme potentiel de masses positives. Ces fonctions tronquées tendent en croissant vers f lorsque le rayon de la sphère S' tend vers l'infini. Toute fonction surharmonique peut donc, à une constante positive additive près, s'écrire comme potentiel de masses positives.

33. Pour un *ensemble fermé* général A, il suffit d'indiquer la solution du problème suivant. Trouver les conditions dans lesquelles une fonction f donnée sur A peut, sur la partie régulière de A, à une constante positive additive près, s'écrire comme potentiel de masses positives portées par A. Il est clair que la positivité et la semicontinuité inférieure sont encore des conditions nécessaires. On peut alors former le prolongement de la fonction par rapport à l'ensemble A. Ce prolongement définit une fonction $\overline{f}_A$ en tout point extérieur à l'ensemble A. Nous posons aux points réguliers de A, $\overline{f}_A = f$, tandis que, en tout point irrégulier, nous définissons $\overline{f}_A$ comme la limite inférieure des valeurs de $\overline{f}_A$ admises au voisinage de ce point. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que f puisse, sur la partie régulière de A et à une constante positive additive près, s'écrire comme potentiel de masses positives portées par A, est que la fonction $\overline{f}_A$ ainsi définie soit une fonction surharmonique.

34. La dernière méthode est évidemment applicable aussi dans le cas où l'on n'exige pas de masses positives. Cependant il paraît alors très difficile de donner des conditions effectives qui soient en même temps nécessaires et suffisantes. Au lieu d'insister sur cette question, nous donnons ici une solution explicite de caractère purement formel de notre problème dans le cas particulier où la dimension m de l'espace est $= 1$ et l'ensemble A se réduit à un intervalle. Ce problème et sa première solution

---

[36]) La constante additive s'annule puisque d'après la première condition supplémentaire, $f(M)$ tend vers zéro quand M tend vers l'infini.

sont dus à M. CARLEMAN[37]). Une solution différente fut donnée par M. ZEILON[38]).

On peut admettre que l'intervalle en question est limité par les points -1 et $+1$. Il faut donc résoudre l'équation

$$(8) \qquad \int_{-1}^{+1} \varphi(y)\,|x-y|^{\alpha-1}\,dy = f(x),$$

où $f(x)$ est donné dans l'intervalle $(-1, +1)$. On forme le prolongement de $f(x)$ pour les points extérieurs à cet intervalle

$$(9) \qquad \bar{f}(x) = \int_{-1}^{+1} f(y)\,\lambda_x(y)\,dy,$$

avec (*voir* la formule (3) du n° **16**)

$$(10) \qquad \lambda_x(y) = \pi^{-1}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,(x^2-1)^{\frac{\alpha}{2}}(1-y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}|x-y|^{-1}.$$

En remplaçant pour $|x| > 1$ la notation $\bar{f}(x)$ par $f(x)$, la formule (8) sera valable pour toute valeur de x. Or cette formule peut aussi s'écrire (formules (5) et (6) du n° **2**)

$$I^\alpha\varphi(x) = \frac{f(x)}{H_1(\alpha)},$$

avec

$$H_1(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}2^\alpha\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}.$$

Il vient par la formule (7) du même numéro

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi(y)\,|x-y|\,dy = I^2\varphi(x) = I^{2-\alpha}(I^\alpha\varphi(x)) =$$

$$= \frac{1}{H_1(2-\alpha)\,H_1(\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|^{1-\alpha}f(y)\,dy = g(x),$$

et alors

$$\varphi(x) = -g''(x).$$

Il y a pourtant ici une difficulté qu'on ne peut pas passer

[37]) T. CARLEMAN, Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen, *Math. Zeitschrift*, **15** (1922), p. 111—120.

[38]) N. ZEILON, Sur quelques points de la théorie de l'équation intégrale d'Abel, *Arkiv för Mat.*, **18** (1924), n° **5**, p. 1—19.

sous silence, c'est que la dernière intégrale diverge en général[39]). En effet, la fonction $f(x)\,(=\bar{f}(x))$ est dans le cas général du même ordre de grandeur que $|x|^{\alpha-1}$. On peut remédier à cet inconvénient en définissant l'intégrale $I^{2-\alpha}f(x)$ au moyen du prolongement analytique par rapport à l'exposant. Cela peut s'effectuer de beaucoup de manières, en voici une. La fonction $f(x)\,(=\bar{f}(x))$ définie par la formule (9) peut s'écrire pour $|x| > 1$

$$f(x) = A|x|^{\alpha-1} + Bx|x|^{\alpha-3} + O(|x|^{\alpha-3}),$$

A et B étant à des facteurs numériques près les moments d'ordres zéro et un de $f(x)(1-x^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$ par rapport à l'intervalle $(-1, +1)$. Soit alors $\varkappa(x) = a + bx$ et posons

$$k(x) = \int_{-1}^{+1} \varkappa(y)\,|x-y|^{\alpha-1}\,dy.$$

On peut déterminer les constantes a et b de sorte que les moments d'ordres zéro et un de $k(x)(1-x^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$ soient identiques à ceux de $f(x)(1-x^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$. En posant alors pour $|x| > 1$, avec une notation évidente, $k(x) = \bar{k}(x)$, on aura la formule définitive

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi(y)\,|x-y|\,dy = \frac{-1}{H_1(\alpha)\,H_1(2-\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(y)-k(y))\,|x-y|^{1-\alpha}\,dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \varkappa(y)\,|x-y|\,dy.$$

Notre méthode s'applique pour $0 < \alpha < 2$, excepté pour $\alpha = 1$, où le problème n'admet pas de solution sauf dans le cas banal où la fonction $f(x)$ est constante. Pour arriver à un problème naturel correspondant à $\alpha = 1$, il faut le poser pour le potentiel logarithmique (*cf.* le n° **3**), problème qui est facile à résoudre.

(Reçu le 26 août 1937)

---

[39]) Cette difficulté dérive du fait que la formule (7) du n° **2** n'est valable en général que pour $\alpha + \beta < m$. Or on l'applique ici pour $m = 1$ et $\alpha + \beta = 2$. On voit que la difficulté n'intervient que pour $m = 1$ et $m = 2$ et que, en résolvant le même problème pour un volume sphérique, on aura convergence dès que la dimension de l'espace est $\geqq 3$.

Sur le balayage des masses.

Par OTTO FROSTMAN à Lund.

1. Soit F un ensemble fermé dans l'espace Ω à m dimensions et supposons qu'une masse positive $=1$ soit concentrée en un point P extérieur à F. On sait par les travaux de M. M. RIESZ[1]) et de l'auteur[2]) qu'il est possible de „balayer" cette masse sur F, c'est-à-dire de faire une répartition $\mu_P(e)$ d'une masse positive $\leqq 1$ sur F de manière que son potentiel d'ordre α

$$\int_F r_{QS}^{\alpha-m}\, d\mu_P(S)$$

soit $=r_{PQ}^{\alpha-m}$ en tout point de F sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle. Ici, l'exposant α peut être un nombre réel quelconque dans l'intervalle $0<\alpha\leqq 2$, l'exposant limite $\alpha=2$ donnant le cas classique des potentiels newtoniens. M. RIESZ, qui le premier a démontré ce théorème pour un exposant général, donna à la distribution $\mu_P(e)$ le nom de „masses de GREEN". Les points Q de F dans lesquels le potentiel des masses $\mu_P(e)$ a la valeur visée $r_{PQ}^{\alpha-m}$ pour toute position de P s'appellent les points *réguliers* de F; ils embrassent en particulier tout point intérieur de F. Les points de F qui ne sont pas réguliers s'appellent points *irréguliers;* en un tel point le potentiel dû à $\mu_P(e)$ est $<r_{PQ}^{\alpha-m}$ pour certaines positions de P (non nécessairement pour toutes). Notons encore que les masses de GREEN satisfont à la loi fondamentale de *réciprocité*

---

1) M. RIESZ, Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels, *ces Acta,* 9 (1938), p. 1—42.

2) O. FROSTMAN, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, *Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem.,* 3 (1935), p. 1—118.

$$(1)\qquad \int_F r_{QS}^{\alpha-m}\, d\mu_P(S) = \int_F r_{PS}^{\alpha-m}\, d\mu_Q(S),$$

où P et Q sont deux points quelconques extérieurs à F. Cette relation est une conséquence immédiate de la formule générale

$$(2)\qquad \int_\Omega v\, d\mu = \int_\Omega u\, d\nu,$$

μ et ν étant deux distributions quelconques de masses positives, u et v leurs potentiels respectifs.

Le but du présent travail est d'étendre la notion de masses de Green aux points P appartenant à l'ensemble F et d'en faire une application importante concernant l'ensemble irrégulier de F. Quant au balayage des masses situées sur F, on serait à première vue tenté de dire qu'il n'y a ici aucun problème; en effet, en plaçant la masse unité en un point P de F on aurait sans aucun balayage une répartition de masse positive sur F dont le potentiel est, même partout, $= r_{PQ}^{\alpha-m}$. On pourrait donc définir les masses de Green relatives à un point appartenant à F tout simplement comme la masse unité concentrée en ce point-là. Or les masses de Green définies de cette manière ne satisfont pas à la loi de réciprocité (1), car s'il en était ainsi, la relation

$$(3)\qquad r_{PQ}^{\alpha-m} = \int_F r_{PS}^{\alpha-m}\, d\mu_Q(S)$$

aurait lieu quels que soient le point P de F et le point Q extérieur à F, chose qui est impossible si P est irrégulier. Cependant, *nous allons indiquer un procédé par lequel les masses de Green $\mu_P(e)$ peuvent être définies, non seulement pour les points P extérieurs à F mais aussi pour les points P appartenant à F, de manière que la relation de réciprocité subsiste. Ces masses sont ou la masse unité concentrée au point P lui-même ou une répartition continue sur F, s'annulant sur tout ensemble de capacité nulle.* En effet, enlevons d'abord à l'ensemble F les points qui peuvent se trouver dans une petite sphère $s(P, \varrho)$ de centre P et de rayon ϱ. En balayant la masse unité au point P sur la partie restante de F, on y obtient une répartition de masse positive qui sera désignée par $\mu_P^{(\varrho)}(e)$. Il est maintenant bien clair que pour $\varrho_1 < \varrho_2$ on a $\mu_P^{(\varrho_1)}(e) \leqq \mu_P^{(\varrho_2)}(e)$ pour tout ensemble e (mesurable B) à distance $\geqq \varrho_2$ du point P, car le balayage $\mu_P^{(\varrho_2)}$ peut s'interpréter comme la somme du balayage $\mu_P^{(\varrho_1)}$ et du balayage suivant de la couronne entre les deux sphères $s(P, \varrho_1)$ et $s(P, \varrho_2)$.[3]) C'est-à-dire que, pour ϱ tendant vers zéro, la fonction d'ensemble $\mu_P^{(\varrho)}(e)$ tend finalement en décroissant vers une fonction limite $\mu_P(e)$ sur tout ensemble e à distance positive de P. D'autre part, on trouve d'une manière analogue, s étant une sphère quelconque de centre P et de rayon $> \varrho_2 > \varrho_1$, $\mu_P^{(\varrho_1)}(s) \geqq \mu_P^{(\varrho_2)}(s)$, de façon que pour toute sphère s de centre P, $\mu_P^{(\varrho)}(s)$ tend finalement en croissant vers une limite déterminée $\mu_P(s)$. Ces considérations nous apprennent qu'il existe une répartition $\mu_P(e)$ bien déterminée qui dans le sens usuel de la convergence des fonctions additives d'ensemble est la limite pour $\varrho = 0$ des répartitions $\mu_P^{(\varrho)}(e)$.

L'existence d'une répartition limite μ_P étant démontrée, il nous reste à faire connaître de plus près ses propriétés. Observons d'abord que son potentiel est $= r_{PQ}^{\alpha-m}$ en tout point Q de F sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle. En effet, on démontre par un raisonnement tout à fait élémentaire que la limite d'une suite de potentiels $\{u_n(Q)\}$, dus à des répartitions de masses positives qui tendent vers une répartition limite et qui sont décroissantes au voisinage de Q, est égale au potentiel de la répartition limite. Dans le cas actuel, le potentiel dû à $\mu_P^{(\varrho)}$ est $= r_{PQ}^{\alpha-m}$ aux points de F extérieurs à $s(P, \varrho)$; le potentiel dû à μ_P est donc $= r_{PQ}^{\alpha-m}$ en tout point différent de P, exception toujours faite d'un ensemble de capacité nulle[4]). Supposons maintenant que la distribution μ_P ait une masse positive k concentrée au point P. Faisons dans ce cas un second balayage en balayant la masse $\mu_P[s(P, \varrho)]$ sur la partie de F extérieure à la sphère $s(P, \varrho)$. Or la nouvelle distribution ainsi obtenue, engendrant aux points de F extérieurs à $s(P, \varrho)$ un potentiel $= r_{PQ}^{\alpha-m}$, est identique à la distribution $\mu_P^{(\varrho)}$ obtenue par le balayage primordial de la masse unité au point P.[5]) Par suite, e étant un ensemble quelconque mesurable B extérieur à $s(P, \varrho)$,

---

[3]) M. Riesz, *loc. cit.*, n° 15 et n° 25.

[4]) La capacité d'une infinité dénombrable d'ensembles de capacité nulle est nulle. On en conclut que l'ensemble exceptionnel total provenant du balayage μ_P est de capacité nulle, car on peut toujours admettre que ϱ parcourt une suite dénombrable de valeurs tendant vers zéro.

[5]) *Cf.* note 3.

$$\mu_P^{(\varrho)}(e) \geqq \mu_P(e) + k\mu_P^{(\varrho)}(e),$$

et à la limite pour $\varrho = 0$,

$$\mu_P(e) \geqq (1+k)\mu_P(e).$$

Cette inégalité n'est cependant possible que si 1) $\mu_P(e) = 0$ ou 2) $k = 0$. Dans le premier cas, $\mu_P(e)$ s'annule sur tout ensemble ne contenant pas le point P, tandis qu'on a nécessairement $k = \mu_P(P) = 1$, le potentiel de μ_P étant $r_{PQ}^{\alpha-m}$. Dans le second cas, $\mu_P(e)$ est continu au point P et par conséquent partout, le potentiel engendré étant fini sauf peut-être en ce point-là. Pour la même raison, on conclut encore que $\mu_P(e)$ s'annule sur tout ensemble fermé de capacité nulle extérieur à P,[6]) et alors, puisque $k = \mu_P(P) = 0$, que $\mu_P(e)$ s'annule sur un ensemble *quelconque* de capacité nulle.

Nous démontrons enfin que les masses de GREEN qu'on vient de construire satisfont à la loi de réciprocité (1). En effet, en appliquant la formule (2) aux distributions $\mu_P^{(\varrho)}$ et $\mu_Q^{(\varrho)}$, dont nous désignons un moment les potentiels par $u_P^{(\varrho)}$ et $u_Q^{(\varrho)}$, nous aurons

$$\int_F u_Q^{(\varrho)}(S)\,d\mu_P^{(\varrho)}(S) = \int_F u_P^{(\varrho)}(S)\,d\mu_Q^{(\varrho)}(S). \tag{4}$$

Or $u_Q^{(\varrho)}(S) = r_{QS}^{\alpha-m}$ en tout point de F extérieur à la sphère $s(Q,\varrho)$, sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle sur lequel $\mu_P^{(\varrho)}(e)$ s'annule, et dans la sphère $s(Q,\varrho)$ on a $u_Q^{(\varrho)}(S) \leqq r_{QS}^{\alpha-m}$. Par conséquent, ϱ_0 étant un nombre fixe mais suffisamment petit,

$$\underline{\lim}_{\varrho\to 0} \int_F u_Q^{(\varrho)}(S)\,d\mu_P^{(\varrho)}(S) \geqq \lim_{\varrho\to 0} \int_{F-s(Q,\varrho_0)} u_Q^{(\varrho)}(S)\,d\mu_P^{(\varrho)}(S) =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \int_{F-s(Q,\varrho_0)} r_{QS}^{\alpha-m}\,d\mu_P^{(\varrho)}(S) = \int_{F-s(Q,\varrho_0)} r_{QS}^{\alpha-m}\,d\mu_P(S) >$$

$$> \int_F r_{QS}^{\alpha-m}\,d\mu_P(S) - \varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$\overline{\lim}_{\varrho\to 0} \int_F u_Q^{(\varrho)}(S)\,d\mu_P^{(\varrho)}(S) \leqq \lim_{\varrho\to 0} \int_F r_{QS}^{\alpha-m}\,d\mu_P^{(\varrho)}(S) = \int_F r_{QS}^{\alpha-m}\,d\mu_P(S).$$

Le premier membre de (4) tend donc vers la limite

$$\int_F r_{QS}^{\alpha-m}\,d\mu_P(S),$$

---

[6]) O. FROSTMAN, *loc. cit.*, p. 83.

et on voit de la même façon que le second membre tend vers

$$\int_F r_{PS}^{\alpha-m}\, d\mu_Q(S).$$

L'égalité (4) entraîne donc à la limite la relation (1).

R e m a r q u e. *Les masses de Green $\mu_P(e)$ ne dépendent pas du procédé particulier par lequel elles sont obtenues, mais sont uniquement déterminées par les deux conditions d'avoir un potentiel $= r_{PQ}^{\alpha-m}$ en tout point de F, sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, et de satisfaire à la loi de réciprocité.*

En effet, si P est un point extérieur à F, la distribution $\mu_P(e)$ est uniquement déterminée déjà par la première condition; si d'autre part P appartient à F et s'il y avait une seconde distribution $\nu_P(e)$ satisfaisant auxdites conditions, on aurait pour tout point Q extérieur à F

$$\int_F r_{QS}^{\alpha-m}\, d\nu_P(S) = \int_F r_{PS}^{\alpha-m}\, d\mu_Q(S) = \int_F r_{QS}^{\alpha-m}\, d\mu_P(S).$$

Or l'égalité du premier et du dernier membre de cette relation a lieu encore en tout point Q de F, sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, chaque membre étant par la première condition $= r_{PQ}^{\alpha-m}$. Dès lors, par un théorème connu[7]) d'unicité, $\nu_P(e) \equiv \mu_P(e)$.

2. Comme nous l'avons déjà indiqué dans le numéro précédent, la loi de réciprocité (1) donne lieu à la relation (3) si P est un point de F tel que $\mu_P(P) = 1$, et cela indépendamment de la position de Q. Le point P est donc dans ce cas un point *régulier* de F. Inversement, si P est régulier, on conclut facilement par le théorème d'unicité, de la même façon que dans la remarque ci-dessus, que $\mu_P(P) = 1$. *Les points réguliers de F sont donc caractérisés par le fait que $\mu_P(P) = 1$, tandis qu'en un point irrégulier on a $\mu_P(P) = 0$.* La dernière propriété revient évidemment aussi aux points extérieurs à F; les points irréguliers sont donc à ce point de vue à regarder comme n'appartenant pas à l'ensemble.

Les allures différentes que présentent les masses de GREEN aux points réguliers et irréguliers de F nous donnent immédiatement une démonstration du fait connu[8]) que *les points irréguliers*

---

[7]) M. RIESZ, *loc. cit.*, n° 10.

[8]) M. RIESZ, *loc. cit.*, n° 18.

forment un ensemble E de capacité nulle. Désignons en effet par $E^{(\varrho)}$ l'ensemble des points P de F tels que $\mu_P[s(P, \varrho)] < 1$. Si cet ensemble était de capacité positive, il en existerait un sous-ensemble fermé A de capacité positive et on pourrait encore supposer que A soit contenu dans une sphère de rayon $\frac{\varrho}{2}$. Considérons maintenant la distribution d'équilibre ν sur A, dont le potentiel v est $=1$ en tout point de A sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle. La distribution ν s'annulant sur tout ensemble de capacité nulle, on a pour tout point P de A

$$v(P) = \int_A r_{PS}^{\alpha-m}\, d\nu(S) = \int_A d\nu(S) \int_F r_{ST}^{\alpha-m} d\mu_P(T) = \int_F v(T)\, d\mu_P(T) \leqq$$
$$\leqq \mu_P[s(P, \varrho)] + \gamma \mu_P[F - s(P, \varrho)],$$

où γ est le maximum du potentiel v à l'extérieur de la sphère $s(P, \varrho)$. Ce maximum est nécessairement < 1, et on en conclurait, puisque $\mu_P[s(P, \varrho)] + \mu_P[F - s(P, \varrho)] \leqq 1$, que $v(P) < 1$. Or cela est impossible; la capacité de $E^{(\varrho)}$ est donc nulle quel que soit ϱ positif. De plus, pour $\varrho_1 > \varrho_2 > \ldots$ on a $E^{(\varrho_1)} \subset E^{(\varrho_2)} \subset \ldots$, et si ϱ_n tend vers zéro, $E = E^{(\varrho_1)} + E^{(\varrho_2)} + \ldots + E^{(\varrho_n)} + \ldots$ D'où il suit que la capacité de E est aussi nulle.

Du théorème qu'on vient de démontrer on tire immédiatement, ce qui nous sera utile dans la suite, que les masses de Green $\mu_P(e)$ s'annulent toujours sur l'ensemble irrégulier E. Car, si P est régulier, toute la masse est concentrée en ce point et s'annule sur tout ensemble extérieur à P; d'autre part, si P est irrégulier ou à l'extérieur de F, $\mu_P(e)$ s'annule sur tout ensemble de capacité nulle, donc en particulier sur E.

En supposant l'ensemble e mesurable B, $\mu_P(e)$ est, considéré comme fonction de P, une fonction de point définie dans tout l'espace, qui en général est discontinue mais évidemment mesurable B.[9]) Soit maintenant σ une distribution de masses à variation

---

[9]) On trouve facilement qu'aux points P extérieurs à F, $\mu_P(e)$ est continue (même analytique; voir l'ouvrage souvent cité de M. Riesz, nº 25), et qu'aux points P de F à distance positive de l'ensemble e, $\mu_P(e)$ est *semi-continu supérieurement.* Car, pour ϱ suffisamment petit, on a

$$\mu_P(e) \leqq \mu_P^{(\varrho)}(e) < \mu_P(e) + \varepsilon,$$

et si P' est un point très voisin de P, de sorte que la masse $\mu_{P'}^{(P, \varrho)}$ balayée du point P' sur $F - s(P, \varrho)$ diffère au plus de ε de la masse $\mu_P^{(\varrho)}$, on a encore bornée; dès lors l'intégrale

$$\sigma_F(e) = \int_{\Omega} \mu_P(e)\, d\sigma(P) \tag{5}$$

a un sens bien déterminé et définit une nouvelle distribution de masses sur l'ensemble F qui sera appelée *le balayage de σ par rapport à F*. Le potentiel dû à σ_F est égal au potentiel dû à σ en tout point de F, sauf peut-être dans l'ensemble irrégulier E. Observons encore que les masses $\sigma_F(e)$ s'annulent toujours sur cet ensemble puisqu'il en est ainsi des masses $\mu_P(e)$ pour toute position de P.

Nous définissons enfin *la fonction de Green $G(P, Q)$ de l'ensemble F par l'équation*

$$G(P, Q) = r_{PQ}^{\alpha-m} - \int_F r_{SQ}^{\alpha-m}\, d\mu_P(S), \tag{6}$$

P et Q étant deux points *quelconques* dans l'espace. Si le pôle P se trouve à l'extérieur de F, cette définition devient identique à celle donnée par M. Riesz[10]), elle en est donc une extension directe pour des pôles appartenant à F. Remarquons tout de suite que la relation classique $G(P, Q) = G(Q, P)$ subsiste, conséquence immédiate de la formule de réciprocité (1). La fonction de Green est toujours non-négative; de plus, elle s'annule certainement si l'un au moins des points P ou Q est un point régulier de F. En effet, si le pôle P est régulier, la masse de Green μ_P est concentrée en ce point et l'intégrale se réduit à $r_{PQ}^{\alpha-m}$; $G(P, Q)$ est donc identiquement nul. Le cas où le point d'argument Q

$$\mu_{P'}(e) \leqq \mu_{P'}^{(P,\varrho)}(e) \leqq \mu_P^{(\varrho)}(e) + \varepsilon < \mu_P(e) + 2\varepsilon,$$

ce qui démontre la proposition.

De cette propriété on obtient d'ailleurs une démonstration immédiate du fait que si M est un point extérieur à F tendant vers un point frontière régulier P de F, on a pour tout ϱ positif

$$\lim_{M \to P} \mu_M[s(P, \varrho)] = 1.$$

Cela est en effet une conséquence des inégalités évidentes

$$\overline{\lim_{M \to P}}\, \mu_M[F - s(P, \varrho)] \leqq \mu_P[F - s(P, \varrho)] = 0;$$

$$\underline{\lim_{M \to P}}\, \mu_M(F) \geqq \mu_P^{(\varrho)}(F) > 1 - \varepsilon.$$

10) M. Riesz, *loc. cit.*, n° 15.

est régulier se ramène au cas précédent par la relation de symétrie.

3. L'avantage de la notion de masses de Green pour des pôles appartenant à F se manifeste surtout dans l'étude des points irréguliers. Ainsi, nous pouvons facilement répondre à une question soulevée par M. Riesz au sujet d'une formule importante, donnant la valeur d'un potentiel en un point extérieur à l'ensemble qui porte les masses, par les valeurs que le potentiel admet dans cet ensemble. Soit en effet u un potentiel engendré par des masses σ situées sur l'ensemble F, on a en tout point P extérieur à F[11]

$$u(P) = \int_F u(Q)\, d\mu_P(Q) + \int_E G(P,Q)\, d\sigma(Q), \tag{7}$$

où E est comme plus haut le sous-ensemble irrégulier de F. Si la dernière intégrale est nulle, la formule se réduit à

$$u(P) = \int_F u(Q)\, d\mu_P(Q), \tag{8}$$

et pour que cela ait lieu il suffit évidemment que les masses σ s'annulent sur E. *La question est de savoir si cette condition suffisante est aussi nécessaire, c'est-à-dire si, étant donnée une distribution σ sur F telle que*

$$\int_E G(P,Q)\, d\sigma(Q) = 0$$

pour tout point P extérieur à F, on peut en conclure que cette distribution est identiquement nulle sur E. La réponse est affirmative. En effet, P étant un point *quelconque* de l'espace, nous tirons de la définition (6) de la fonction de Green

$$\begin{aligned}\int_F r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\sigma(Q) &= \int_F d\sigma(Q) \int_F r_{QS}^{\alpha-m}\, d\mu_P(S) + \int_E G(P,Q)\, d\sigma(Q) = \\ &= \int_F d\sigma(Q) \int_F r_{PS}^{\alpha-m}\, d\mu_Q(S) + \int_E G(P,Q)\, d\sigma(Q),\end{aligned}$$

où la dernière intégrale est nulle pour tout P extérieur à F, par hypothèse. Or elle est nulle aussi en tout point P de F sauf au plus dans l'ensemble E. En intervertissant l'ordre des intégrations dans le premier terme du second membre, ce qui est légitime, on obtient donc pour tout P, exception faite au plus des points

---

11) M. Riesz, *loc. cit.*, n° 19.

irréguliers et d'un ensemble de capacité nulle où le potentiel de σ peut être indéterminé,

$$\int_F r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\sigma(Q) = \int_F r_{PS}^{\alpha-m}\, d\sigma_F(S).$$

L'ensemble exceptionnel étant de capacité nulle, il en résulte immédiatement par le théorème d'unicité (*cf.* note 7) $\sigma \equiv \sigma_F$. Or σ_F s'annule sur l'ensemble E (*cf.* (5)); il en est donc de même de σ.

Il est manifeste que la formule (7) reste valide en tout point P appartenant à F où $u(P)$ est bien déterminé, et de même que la formule simplifiée (8) a lieu dans la même condition que plus haut.

(Reçu le 1 novembre 1937)

Über die Schwerpunkte der konvexen Kurven bei speziellen Belegungen.

Von STEPHAN VINCZE in Szeged.

Einleitung.

Wir werden uns im Folgenden mit gewissen auf dem Rande bzw. im Inneren einer geschlossenen konvexen Kurve definierten, stetigen, positiven Massenbelegungen, und deren Schwerpunkten, beschäftigen, ferner mit gewissen, durch jene Belegungen bestimmten Abbildungen des von der Kurve begrenzten Gebietes auf sich selbst. Der erste Teil der vorliegenden Arbeit enthält die Definitionen, ferner einen Fixpunktsatz. Nachher bringen wir den Umkreismittelpunkt mit bestimmen unendlichen Massenbelegungen in Verbindung, indem wir zeigen, daß dieser der Limespunkt einer aus den Fixpunkten der erwähnten Abbildungen bestehenden Folge ist. Im dritten Teil untersuchen wir die Einzelheiten unserer Abbildungen. Zum Schluß geben wir eine Verallgemeinerung unseres Fixpunktsatzes und einige weitere Bemerkungen.

§. 1. Ein Fixpunktsatz.

Es sei C eine geschlossene konvexe Kurve mit der Bogenlänge L und n eine positive Zahl. Das durch C und ihr Inneres definierte abgeschlossene Gebiet bezeichnen wir mit K. Zu jedem Punkt P von K sei eine stetige Massenverteilung auf der Kurve C dadurch bestimmt, daß man einem jeden Punkte Q der Kurve C die lineare Dichte $\sigma_P(Q) = r_{PQ}^n$ zuordnet, wobei r_{PQ} den Abstand der Punkte P und Q bedeutet. Die so entstehende Massenverteilung besitzt einen Schwerpunkt $S_P^{(n)}$. Wenn nun P alle Punkte des Gebietes K durchläuft, so entsteht eine Abbildung $P \rightarrow S_P^{(n)}$

:s abgeschlossenen Gebietes K auf sich selbst bzw. auf einen be-
nmten Teil des ganzen Gebietes.

Die analytischen Formeln der Abbildung sind:

$$x_P^{(n)} = \frac{\int\limits_C r_{PQ}^n \xi_Q \, ds_Q}{\int\limits_C r_{PQ}^n \, ds_Q}, \qquad y_P^{(n)} = \frac{\int\limits_C r_{PQ}^n \eta_Q \, ds_Q}{\int\limits_C r_{PQ}^n \, ds_Q},$$

wo der Punkt Q mit den Koordinaten $[\xi_Q(s_Q), \eta_Q(s_Q)]$ die Kurve C durchläuft, und als Parameter die Bogenlänge s_Q verwendet wird.

Wir beweisen, daß die Abbildung $P \to S_P^{(n)}$ einen und nur einen Fixpunkt besitzt.

Es seien (x, y) die Koordinaten des variablen Punktes P in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Wir beweisen zunächst den folgenden

Hilfssatz. *Die in der ganzen Ebene definierte stetige Funktion*

$$u_n(P) = u_n(x, y) = \int\limits_C r_{PQ}^{n+2} ds_Q = \int\limits_C \left[\sqrt{(x-\xi_Q)^2 + (y-\eta_Q)^2} \right]^{n+2} ds_Q$$

erreicht ihr Minimum in einem einzigen Punkte, und zwar im Innern von C. Dieser Punkt ist ferner der Einzige, wo die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ und $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ gleichzeitig verschwinden.

Da die Funktion $u_n(P)$ offenbar überall stetig ist und für $P \to \infty$ nach Unendlich strebt, erreicht sie ihr Minimum wenigstens in einem Punkte.

Betrachten wir nun die Funktion $u_n(x, y)$ zwischen zwei mit der Y-Achse parallelen Stützgeraden $x_1 \leqq x \leqq x_2$ der Kurve C. Wegen

$$\frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x} = (n+2) \int\limits_C r_{PQ}^n (x-\xi_Q) \, ds_Q,$$

$$\frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x^2} = (n+2) \int\limits_C r_{PQ}^{n-2} [r_{PQ}^2 + n(x-\xi_Q)^2] \, ds_Q > 0$$

ist die Funktion u_n, als Funktion von x, konvex; für festgehaltenes $y = y_0$ kann daher $u_n(x, y)$ ihren minimalen Wert höchtens in *einem* Punkte (x, y_0) erreichen. Ferner ist $\frac{\partial u_n(x, y_0)}{\partial x}$ für $x = x_1$ negativ, für $x = x_2$ positiv, folglich wird das Minimum von $u_n(x, y_0)$

im Innern des Intervalls $x_1 \leqq x \leqq x_2$ erreicht. Die Funktion $u_n(x, y)$ kann also ihren minimalen Wert nur zwischen den betrachteten parallelen Stützgeraden erreichen. Da aber die Funktion $u_n(P)$ unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist, gilt dieselbe Behauptung für jede Lage des Koordinatensystems, also für jedes parallele Stützgeradenpaar. Infolgedessen können die Minimalstellen nur im Innern von C liegen.

Gäbe es zwei oder mehrere verschiedene Minimalstellen, so könnten wir die Kurve so drehen, daß zwei Minimalstellen auf einer mit der X-Achse parallelen Gerade liegen, was aber, wie eben gesehen, unmöglich ist.

Ebenso sieht man ein, daß es nicht zwei oder mehrere verschiedene Stellen geben kann, wo $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ und $\frac{\partial u_n}{\partial y}$, also die partiellen Derivierten von u_n in *allen* Richtungen gleichzeitig verschwinden.

Damit ist aber gleichzeitig der Beweis unseres Fixpunktzatzes erbracht. Es sei nämlich $S_P^{(n)}(x_P^{(n)}, y_P^{(n)})$ der dem Punkte $P(x, y)$ zugeordnete Schwerpunkt. Unsere Behauptung besagt, daß das folgende Gleichungssystem eine und nur eine Lösung besitzt:

$$x_P^{(n)} = \frac{\int\limits_C r_{PQ}^n \xi_Q \, ds_Q}{\int\limits_C r_{PQ}^n \, ds_Q} = x$$

$$y_P^{(n)} = \frac{\int\limits_C r_{PQ}^n \eta_Q \, ds_Q}{\int\limits_C r_{PQ}^n \, ds_Q} = y.$$

Diese Gleichungen können aber in der Form

$$\int\limits_C r_{PQ}^n (x - \xi_Q) \, ds_Q = 0$$

$$\int\limits_C r_{PQ}^n (y - \eta_Q) \, ds_Q = 0$$

geschrieben werden und besagen also, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ und $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ gleichzeitig verschwinden, was nach unserem Hilfssatz wirklich für einen einzigen Punkt zutrifft.

Wir bezeichnen den so gewonnenen Fixpunkt mit $S^{(n)}$. Dieser Punkt $S^{(n)}$ kann also als die einzige Minimalstelle der Funktion $u_n(P)$ charakterisiert werden.

§. 2. Eine Schwerpunktseigenschaft des Umkreismittelpunktes.

Untersuchen wir die in §. 1 gewonnenen Fixpunkte bei wachsendem n, so erhalten wir den folgenden Satz:

Für (nicht notwendig ganzzahliges) $n \to +\infty$ konvergiert $S^{(n)}$ nach dem Umkreismittelpunkte der konvexen Kurve C.

Betrachten wir nämlich die Funktion

$$v_n(P) = \left(\frac{1}{L} u_n(P)\right)^{\frac{1}{n+2}} = \left(\frac{1}{L} \int_C r_{PQ}^{n+2} ds_Q\right)^{\frac{1}{n+2}}.$$

Sie erreicht ihren minimalen Wert ebenfalls im Punkte $S^{(n)}$. Bekanntlich ist $v_n(P)$, als Funktion von n betrachtet, nicht abnehmend (vom trivialen Falle eines Kreises mit dem Mittelpunkt P abgesehen ist sie sogar zunehmend).

Ferner gilt[1])

$$\lim_{n \to +\infty} v_n(P) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{L} \int_C r_{PQ}^{n+2} ds_Q\right)^{\frac{1}{n+2}} = \max_{Q \text{ auf } C} r_{PQ} = v(P)$$

und zwar gleichmäßig für P in K (etwa laut des Dinischen Satzes, da auch die Limesfunktion $v(P)$ offenbar stetig ist). Geometrisch bedeutet $v(P)$ den Halbmesser des kleinsten, um den Punkt P gezeichneten Kreises, die die Kurve C enthält. Unter allen diesen den verschiedenen Lagen von P entsprechenden Kreisen gibt es bekanntlich einen und nur einen Kleinsten[2]), dieser heißt der *Umkreis* der Kurve C. Die Funktion $v(P)$ nimmt also ihren minimalen Wert in einem eizigen Punkte, nämlich im Mittelpunkte O des Umkreises an. Wir wollen nun zeigen, daß die Minimalstellen $S^{(n)}$ der Funktionen $v_n(P)$ nach der Minimalstelle O der Limesfunktion $v(P)$ konvergieren. Die Punkte $S^{(n)}$ haben jedenfalls eine Häufungsstelle in K. Unsere Behauptung besagt, daß sie keine vom Punkte O verschiedene Häufungsstelle besitzen können.

Nehmen wir an, daß für eine monotone Folge ν_k $(\nu_k \to \infty)$

$$S^{(\nu_k)} \to O' \neq O$$

---

[1]) Siehe z. B. G. Pólya—G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I (Berlin, 1925), II. Abschnitt, Aufgabe No. 198, S. 78; Lösung, S. 243.

[2]) J. v. Sz. Nagy, Über einen Satz von H. Jung, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung,* 24 (1915), S. 390—392.

gilt. Wegen der Minimaleigenschaft von $S^{(n)}$ g

$$v_n(S^{(n)}) \leqq v_n(O),$$

also speziell

$$v_{\nu_k}(S^{(\nu_k)}) \leqq v_{\nu_k}(O).$$

Daraus folgt wegen der gleichmäßigen Konvergenz

$$v(O') \leqq v(O)$$

entgegen der Tatsache, daß O die einzige Minimalstelle der Funktion $v(P)$ ist.

§. 3. Über die Abbildung $P \to S_P^{(n)}$.

Bei der Definition des Punktes $S_P^{(n)}$ kann man offenbar die Voraussetzung, P gehöre an K, fallen lassen. Es sei also P ein beliebiger Punkt der Ebene. Die Bildpunkte $S_P^{(n)}$ liegen offenbar auch hier im Inneren von C. Wir werfen nun die Frage auf, ob es bei gegebenen n zu einem beliebigen Punkt S des Inneren von C ein P gibt, dessen Bild bei unserer Abbildung S ist. Wir beantworten diese Frage negativ, indem wir den folgenden Satz beweisen.

Bei gegebenem positivem n ist die Ebene durch $P \to S_P^{(n)}$ auf das Innere der Kurve C derart abgebildet, daß die Bildpunkte nicht beliebig nahe an den Rand des Bereiches rücken können.

Betrachten wir nämlich das Verhalten des Punktes $S_P^{(n)}$ für $P \to \infty$. Wir behaupten, daß dieser nach $S^{(0)}$, d. h. nach dem Schwerpunkt von C bei homogener Massenverteilung strebt. In der Tat, sei d der Durchmesser und M ein beliebiger fester Punkt von C; aus

$$x_P^{(n)} = \frac{\int\limits_C \left(\frac{r_{PQ}}{r_{PM}}\right)^n \xi_Q \, ds_Q}{\int\limits_C \left(\frac{r_{PQ}}{r_{PM}}\right)^n ds_Q}$$

folgt wegen

$$\left| \frac{r_{PQ}}{r_{PM}} - 1 \right| \leqq \frac{r_{QM}}{r_{PM}} \leqq \frac{d}{r_{PM}}$$

und $r_{PM} \to \infty$

$$x_P^{(n)} \to \frac{\int\limits_C \xi_Q \, ds_Q}{\int\limits_C ds_Q} = x^{(0)};$$

ebenso gewinnt man

$$y_P^{(n)} \to \frac{\int\limits_C \eta_Q \, ds_Q}{\int\limits_C ds_Q} = y^{(0)}.$$

Ordnet man also dem unendlichfernen Punkt der (funktionentheoretischen) Ebene den Bildpunkt $S_\infty^{(n)} = S^{(0)}$ zu, so ist unsere Abbildung $P \to S_P^{(n)}$ überall, auch im Unendlichen, stetig. Ferner liegt $S_P^{(n)}$ stets im Inneren von C, also ist der Abstand des Punktes $S_P^{(n)}$ von der Kurve stets positiv. Da dieser Abstand ebenfalls überall stetig ist, erreicht er sein Minimum, das letztere ist somit ebenfalls positiv, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Variiert man hingegen auch n, so erhalten wir, wenigstens für spezielle Kurven, folgendes Resultat:

Es sei C eine konvexe Kurve mit stetiger und überall wesentlich positiver Krümmung. Ist S ein beliebiger Punkt im Inneren von C, so existiert ein Exponent n und ein Punkt P der Ebene, der bei der Abbildung $P \to S_P^{(n)}$ in S übergeht.

Aus der Annahme über die Kurve C folgt leicht, daß es einen solchen Kreis $\mathfrak{K}$ um die Kurve C gibt, daß zu jedem Punkt desselben nur ein Punkt der Kurve C existiert, der von jenem eine maximale Entfernung besitzt.

Wir untersuchen den Bild $S_P^{(n)}$ eines Punktes P der Kreislinie $\mathfrak{K}$ bei unseren Abbildungen, wenn n von 0 bis ∞ wächst. Durch die Abbildung erhalten wir jedenfalls einen stetigen, offenen Bogen γ_P, der bei $n = 0$ aus $S^{(0)}$ entspringt, und wir zeigen, daß dieser für $n \to +\infty$ nach jenem Punkte M der Kurve C strebt, der von P einem maximalen Abstand besitzt.

In der Tat ist[8])

$$\lim_{n \to +\infty} x_P^{(n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\int\limits_C r_{PQ}^n \xi_Q \, ds_Q}{\int\limits_C r_{PQ}^n \, ds_Q} = \xi_M$$

---

[8]) G. Pólya—G. Szegő, a. a. O., Aufgabe No. 201, S. 78; Lösung, S. 244; anzuwenden auf Zähler und Nenner.

und ebenso $\lim\limits_{n\to+\infty} y_P^{(n)}=\eta_M$. Wenn nun der Punkt P den Kreis $\mathfrak{K}$ einmal umläuft, so bewegt sich der entsprechende Punkt M auf der Kurve C (und zwar im gleichen Bewegungssinn). Da aber der zu einem Punkt P gehörige Bogen γ_P sich mit diesem stetig ändert und gleichzeitig mit P in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so streift dieser lückenlos das Innere der Kurve C, womit unser Satz bewiesen ist. Aus diesem Ergebnis folgt für Kurven dieser Art auch der bekannte Satz:

Jeder innere Punkt einer konvexen Kurve läßt sich als Schwerpunkt einer positiven stetigen Massenbelegung darstellen.

§. 4. Eine Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes.

Im ersten Teil unseres Aufsatzes definierten wir zu irgendeinem Punkt der Ebene auf einer konvexen Kurve C der Ebene eine stetige Massenbelegung dadurch, daß wir einem Punkte Q der Kurve C die Dichte $\sigma_P(Q)=r_{PQ}^n$ zuordneten. Es sei nun im Allgemeinen $f(r)$ eine stetige Funktion von r, für welche $rf(r)$ eine mit ihrer ersten Ableitung stetige und stets positive Funktion ist, und es bezeichne $S_P^{(f)}$ den zu der Dichte $\sigma_P(Q)=f(r_{PQ})$ gehörigen Schwerpunkt. Dann können wir zeigen, daß *die Abbildung $P\to S_P^{(f)}$ einen und nur einen Fixpunkt besitzt.*

Der Satz wird ebenso bewiesen, wie der Spezialfall $f(r)=r^n$, nur hat man hier die folgenden Ausdrücke zu betrachten:

$$u_f(P)=u_f(x,y)=\int\limits_C F(r_{PQ})\,ds_Q, \quad \text{wo} \quad F(r)=\int\limits_0^r \varrho f(\varrho)\,d\varrho,$$

$$\frac{\partial u_f}{\partial x}=\int\limits_C F'(r_{PQ})\,\frac{(x-\xi_Q)}{r_{PQ}}\,ds_Q=\int\limits_C f(r_{PQ})\,(x-\xi_Q)\,ds_Q,$$

$$\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2}=\int\limits_C\left[F''(r_{PQ})\,\frac{(x-\xi_Q)^2}{r_{PQ}^2}+F'(r_{PQ})\,\frac{(y-\eta_Q)^2}{r_{PQ}^3}\right]ds_Q>0.$$

§. 5. Bemerkungen.

Wenn wir statt linearen Dichte eine Belegung im Inneren der Kurve mit der Flächendichte r_{PQ}^n bzw. $f(r_{PQ})$ betrachten, wobei Q ein beliebiger Punkt des Gebietes K bedeutet, so erhalten wir analoge Resultate. In diesem Falle haben wir folgende, den obigen entsprechende, Funktionen zu untersuchen:

$$U_n(P) = \iint_K r_{PQ}^{n+2}\, d\xi_Q\, d\eta_Q$$

bzw.

$$U_f(P) = \iint_K F(r_{PQ})\, d\xi_Q\, d\eta_Q.$$

Unsere Sätze gelten ohne wesentliche Veränderungen auch im mehrdimensionalen Raume, wo der Bogenlänge und dem Flächeninhalt der $n-1$ dimensionale bzw. n dimensionale Inhalt entspricht.

(Eingegangen am 2. Dezember 1935.)

Bibliographie.

H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, dritter Band, Heft 3), VII + 115 S., Berlin, J. Springer, 1934.

Die Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen hat im letzten Jahrzehnte einen bedeutenden Aufschwung durch die Untersuchungen von CARATHÉODORY, HENRI CARTAN, ÉLIE CARTAN, BEHNKE, THULLEN und anderen erreicht. Von den Ergebnissen dieser Forschungen geben die Verfasser des vorliegenden Bandes ein sehr vollständiges, lebhaftes Bild. Die grundlegenden Begriffe und die Resultate der klassischen Theorie sowie die der neuesten Untersuchungen werden in einer klaren und einheitlichen Form zur Darstellung gebracht.

Nach der Erörterung des Begriffes des analytischen Funktionselementes werden die möglichen Abschließungen des n-dimensionalen komplexen Raumes, die Bereiche im erweiterten Raum und deren analytische Abbildungen betrachtet. Im Rahmen der geometrischen Grundlagen werden die für die analytische Funktionentheorie wichtigen kreissymmetrischen Körper eingeführt. Danach werden die interressanten Sätze von HARTOGS, BEHNKE, THULLEN und H. CARTAN über die Darstellung regulärer Funktionen durch elementare Reihen entwickelt. Die singulären Mannigfaltigkeiten werden im Anschluß an die Untersuchungen von HARTOGS und H. KNESER dargestellt. Die einschneidende Rolle des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes im Lichte der modernen Theorie wird erläutert. Nach einer Darstellung der Theorie der Regularitätsbereiche und Regularitätshüllen folgt die Abbildungstheorie, die in dem H. Cartanschen Satz über die Abbildbarkeit eines beschränkten Bereiches mit unendlicher Automorphismengruppe auf einen beschränkten kreissymmetrischen Körper, und in der Einführung der invarianten Metrik von CARATHÉODORY gipfelt.

B. v. K.

Ferdinand Winter, Das Spiel der 30 bunten Würfel, ein mathematischer Zeitvertreib für jedermann, mit einem Geleitwort von GERHARD KOWALEWSKI, VI + 128 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

Das von MAC MAHON stammende reizvolle Spielzeug besteht aus dreißig Würfeln, die mit sechs Farben derart angestrichen werden, daß jeder derselben sechs verschieden getönte Seitenflächen besitzt, ferner daß je zwei Würfel, wie man sie auch drehen und wenden mag, eine verschiedene Farbenverteilung aufweisen. Das ursprüngliche Mac Mahonsche Problem erfordert das Bauen eines Würfels, mit doppelter Kantenlänge und ähnlich gefärbt wie ein als Vorlage herausgegriffener Würfel, aus acht geeignet gewählten von den übrigen 29; dabei dürfen aber immer nur gleichgefärbte Flächen in Berührung gebracht werden. Außer diesem Problem behandelt WINTER eine Reihe von Bauproblemen, die zum Teil von G. KOWALEWSKI stammen, größtenteils aber neu sind. Um gegebenenfalls leicht kontrollieren zu können, ob der Bauvorschrift genüge geleistet wurde, schlägt Verfasser eine geschickte Randkennzeichnung vor, wodurch erreicht wird, daß die gesamte Farbenverteilung eines Würfels durch einen Blick an eine einzige Seitenfläche bestimmt werden kann. Hinsichtlich einiger Probleme, wobei sämtliche Würfel im Voraus so aufgestellt werden sollen, daß die untere Fläche eine bestimmte Farbe aufweist, also nur die übrigen fünf Farben eine Rolle spielen, können die Würfel sogar durch fünffarbige quadratische Platten ersetzt werden; durch Unterdrücken der inneren Farbe, die der ursprünglichen Farbe der oberen Würfelfläche entspricht, entsteht eine Art von Farbendomino, *Kolomino* genannt. Letzteres Spielzeug kann außer Gesellschaftspiel auch zum Alleinspiel dienen, indem man sich daran unterhalten kann, unter Wahrung gewisser Anlegevorschriften „hübsche Figuren" zu legen. Endlich wird ein Zusammenhang mit magischen Quadraten besprochen.

L. Kalmár.

O. Zariski, Algebraic Surfaces (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, dritter Band, Heft 5), V + 198 S., Berlin, J. Springer, 1935.

Dieses Heft gibt eine systematische Darstellung der Theorie der algebraischen Flächen nach drei Gesichtspunkten. Die algebraisch-geometrische Theorie der Flächen wird in Kap. I—IV und VIII dargestellt. Verfasser behandelt hier die singulären Punkte und ihre Reduktion (Kap. I); die linearen Systeme algebraischer Kurven auf einer Fläche, ihre effektiven und virtuellen Charaktere, die Summe und Differenz der Linearsysteme (Kap. II); die adjungierten Linearsysteme und die Invariantentheorie (Kap. III); das arithmetische Geschlecht und den Riemann-Rochschen Satz (Kap. IV); kontinuierliche nichtlineare Kurvensysteme, äquivalente Kurven und Kurvensysteme auf einer Fläche, Basistheorie, Moduln der algebraischen Flächen (Kap. V); Verzweigungskurven mehrfacher Ebenen und kontinuierliche Systeme ebener algebraischer Kurven (Kap. VIII). Die topologischen Eigenschaften der algebraischen Flächen werden in Kapitel VI behandelt. Dieses umfasst die Theorie der zwei- und dreidimensionalen Zyklen, Homologien zwischen den Zyklen, topologische Theorie der algebraischen Korrespondenzen. Die transzendente Richtung kommt im Kapitel VII zur Geltung. Es handelt sich hier um die Theorie der einfachen und Doppelintegrale auf einer algebraischen Fläche. Anhang A bringt Untersuchungen über die Äquivalenzscharen von Punktgruppen auf einer algebraischen Fläche. Anhang B behandelt die Theorie der Korrespondenzen von algebraischen Manningfaltigkeiten. Mit dem Verfasser bedauern auch wir, daß es aus Raummangel nicht möglich war, diese gut gelungene Darstellung durch die Klassifikation der algebraischen Flächen und durch die Theorie der reellen algebraischen Flächen zu ergänzen.

Gyula (Julius) v. Sz. Nagy

W. Krull, Idealtheorie (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, vierter Band, Heft 3), VII + 152 S., Berlin, J. Springer, 1935.

Dieser höchst interessante Bericht von KRULL enthält die größtenteils von E. NOETHER, KRULL und VAN DER WAERDEN entwickelte kommutative Idealtheorie. (Für nichtkommutative Idealtheorie siehe z. B. Kapitel VI des Berichts über *Algebren* von DEURING in derselben Sammlung.)

Dem doppelten Ursprung entsprechend teilt Verfasser die Idealtheorie in *additive* und *multiplikative*. Die additive Idealtheorie behandelt die Zerlegungen der einzelnen Ideale in einem Ringe, wobei die Ideale als additive Abelsche Gruppen mit dem Ringe als multiplikativem Operatorenbereich aufgefaßt sind (§ 1. Grundlagen und Ausgangspunkte; § 2. Abstrakte additive Idealtheorie). § 3 ist der Theorie der Polynomringe und Polynomideale gewidmet, § 4 den einartigen Bereichen. Endlich behandelt Verfasser die multiplikative Idealtheorie (§ 5. Bewertungstheorie; § 6. V-Ideale und A-Ideale; Verhalten der Primideale bei Ringerweiterungen).

In der Terminologie hat Verfasser in glücklicher Weise auf die klassischen Dedekindschen Bezeichnungen verzichtet und sich eng an die Ausdrucksweise der Mengen- und Gruppentheorie angeschossen. Am Schlusse des Berichts hat Verfasser für die wichtigsten Grundbegriffe die verschiedenen üblichen Bezeichnungen zusammengestellt.

Es war natürlich unmöglich die Beweise im einzelnen auszuführen, aber wo Verfasser nicht auf Lehrbücher verweisen konnte, skizzierte er den wesentlichen Gedankengang.

Sehr wertvoll ist es für den Leser, daß Verfasser gelegentlich, in Kleindruck, Platz findet, die Aufmerksamkeit der Leser für die ungelösten Probleme zu erregen.

Der vorliegende Bericht bietet mit dem Literaturverzeichnis nicht nur für den Studenten, sondern auch für jeden, der in die Theorie der Ideale eindringen will, einen unentbehrlichen Wegweiser.

L. Zányi.

E. H. Moore, General Analysis, Part I (Memoirs of the American Philosophical Society, Volume I), VI + 231 pages, Philadelphia, The American Philosophical Society, 1935.

Striking analogies between linear equations in n-dimensional Euclidean space, Fredholm integral equations and linear equations in Hilbert space led MOORE to create a „General Analysis“, of which each of the above theories was an instance. This theory, which was postulational in character and which was worked out from 1905 to 1915, is called Moore's first General Analysis. Later he observed that his theory when interpreted for the n-dimensional Euclidean manifold rested essentially upon the presence of a finite Hermitean matrix of positive definite type. He also noted that the theory of quadratic forms in infinitely many variables rested similarly on the infinite identity matrix. Finally, the work of HELLINGER likewise could be shown to depend on a symmetric infinite positive definite matrix. All these analogies led him to the establishment of a so called second General Analysis having a more constructive character than the first one and resting upon an algebraic foundation of Hermitean matrices.

This theory was published hitherto only in fragmentary form and in scattered papers. After Moore's death in 1932 some of his friends and pupils, among them especially Professor R. W. BARNARD have undertaken the task to give a final form to, and to present, also Moore's second General Analysis. The work will be published in four volumes of which the present one is the first.

It contains first of all an introduction to the entire series by BARNARD and then, in three chapters, an „Algebra of Matrices“. The first Chapter is concerned with matrices with elements in a non-commutative field, or quasi-field, especially with their properties connected with the concept of rank. No satisfactory definition of determinant being at hand, a new approach to the problem is made necessary. This is based on the concept of reciprocals of matrix. After the introduction of a conjugate process into the quasi-field, a definition and futher investigation of Hermitean matrices is made possible (Chapter II). In Chapter III also an order relation is introduced into the quasi-field, which makes possible to define positive and definite Hermitean matrices.

One of the striking features of Moore's book is the extensive use of symbolisms. We read in the Introduction: „In accordance with Moore's pragmatic point of view, the meanings of the symbols of logic are known only through the reactions they produce in the user. Moore would attempt no explanation of these symbols, he used them and corrected misuse by further use.“ The editors of this first volume have still meant necessary to give a glossary and explanation on five pages of the symbols used.

The editors of Moore's work are to be undoubtedly congratulated upon their valuable initiative.

Béla de Sz. Nagy.

Jakob Nielsen, Vorlesungen über elementare Mechanik, übersetzt und bearbeitet von WERNER FENCHEL (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band XLIV), X + 500 S., Berlin, J. Springer, 1935.

Das vorliegende Buch ist eine umarbeitete Übersetzung der in dänischer Sprache erschienenen Vorlesungen über rationale Mechanik des Verfassers an der Dänischen Technischen Hochschule.

Das Buch besteht aus zwei Hauptteilen, von denen der erste die Statik und Kinematik, der zweite die Dynamik behandelt. Nach einem einleitenden Kapitel über Vektoren und lineare Algebra wird das Gleichgewicht von Massenpunkten, und im Anschluß an die Betrachtung von Vektorsystemen das Gleichgewicht von Körpern behandelt. Ein Kapitel über graphische Statik, und die Behandlung der Statik der Fachwerke vervollständigen den der Statik gewidmeten Teil. — Es folgt die Einführung der kinematischen Grundbegriffe der Geschwindigkeit und der Beschleunigung auf geometrischer Grundlage, die Bewegung der Körper aus kinematischem Gesichtspunkte, die Kinematik der Fachwerke, die Arbeitsgleichung und die Betrachtung der relativen Bewegung.

Der zweite Teil erbringt die Grundbegriffe und Voraussetzungen der Dynamik in einer klaren und vollständigen Behandlung, die sowohl der mathematischen Exaktheit, wie den exprimentellen Grundlagen in vollem Maße Rechnung trägt. Die geradlinige Bewegung als Grundlage der allgemeinen räumlichen Bewegung wird ausführlich betrachtet. Nach der Einführung des Potentials wird die Bewegung eines Massenpunktes in speziellen Kraftfeldern, sowie die gebundene Bewegung eines Massenpunktes untersucht. Es folgen die allgemeinen Integrationsprinzipien der Mechanik für die Bewegung der Körper, und im Anschluß daran werden die Langrangeschen Koordinaten eingeführt. Der Trägheitstensor wird im Rahmen einer allgemeinen Betrachtung der Tensoranalysis eingeführt. Die Bewegung der starren Körper, der Stoß elastischer Körper und die Bewegung biegsamer Fäden und Seile werden in den folgenden Kapiteln behandelt.

Die Abrundung des Stoffes entspricht vollkommen dem Zweck der elementaren Mechanik. Die mathematischen Hilfsmittel werden überall in einer klaren und exakten Form, und immer in Bezugnahme auf die aktuellen mechanischen Probleme dargestellt. Selbst die Bedeutung der mathematisch wichtigen Voraussetzungen wird an mechanischen Beispielen illustriert, so z. B. auf S. 236—238 die Voraussetzungen, die zum Unitätssatz der Lösungen von Differentialgleichhungen führen. Nach jedem Kapitel befindet sich eine wohl zusammengestellte Sammlung von interessanten Aufgaben.

Das Buch von NIELSEN ist ein ganz hervorragendes modernes Lehrbuch der elementaren Mechanik. Es wird jedem Leser einen Genuß bereiten, aus diesem leicht verständlichen und durchwegs interessanten Buch die Mechanik intuitiv und zugleich mit mathematischer Strenge anzueignen. B. v. K.

Paul Alexandroff und Heinz Hopf, Topologie, erster Band (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band XLV), XIV + + 636 S., Berlin, J. Springer, 1935.

Das vorliegende Werk, das auf drei Bände geplant ist, hat den Zweck, von der Topologie als einem Ganzen eine möglichst vollständige Darstellung zu geben. Dieses Ziel wird dadurch erreicht, daß diejenigen Teile der Topologie dargestellt werden, die für jedes tiefere Eindringen in diese Wissenschaft unentbehrlich sind und die für ihre weitere Entwicklung maßgebend sind.

Die frühere Einteilung der Topologie in abstrakte, kombinatorische und n-dimensionale, denen beziehungsweise die Begriffe des topologischen Raumes, des Komplexes und der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten zu Grunde liegen, ist durch die moderne Entwicklung dieser Wissenschaft hinfällig geworden. Die genannten Grundbegriffe haben ihre grundlegende Rolle beibehalten und sogar eine tiefere Bedeutung für die gesamte Topologie erworben. Die Methoden, die früher für je einen Zweig der Topologie charakteristisch waren, wurden zu ergiebigen Mitteln der gesamten Topologie ausgebildet. So stand seit einiger Zeit vor uns ein Ideal einer einheitlichen topologischen Wissenschaft, zu deren Verwirklichung aber oft die technischen Hilfsmittel fehlten.

Auch an der Schöpfung dieses Ideals haben die Verfasser des vorliegenden Werkes einen hervorragenden Anteil. In ihrem monumentalen Werk, von welchem hier der erste Band vorliegt, haben sie aber auch den Weg geebnet, der zur gewünschten gesamten Topologie führt. Es ist erstaunlich, mit welcher Gewalt sie den zerstreut vorhandenen, sehr reichen Stoff nach ihrem Zweck zur Einheit gezwungen haben, um eine lückenlose und großartige Behandlung der Topologie der Polyeder zu geben. Der zentrale Begriff, um welchen der reiche und interessante Inhalt dieses ersten Bandes gruppiert wird, ist der der Homologie. Die Verfasser zeigen, wie dieser elementare Begriff verwendet werden kann um ein überraschend großes Gebiet der gesamten Topologie vollständig zu beherrschen.

Über den Inhalt des vorliegenden ersten Bandes möge der folgende Auszug des Inhaltsverzeichnisses orientieren. Erster Teil. Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie. 1. Topologische und metrische Räume 2. Kompakte Räume. — Zweiter Teil. Topologie der Komplexe. 3. Polyeder und ihre Zellenzerlegungen. 4. Eckpunkt- und Koeffizientenbereiche. 5. Bettische Gruppen. 6. Zerspaltungen und Unterteilungen von Komplexen. 7. Spezielle Fragen aus der Theorie der Komplexe. — Dritter Teil. Topologische Invarianzsätze und anschließende Begriffsbildungen. 8. Simpliziale Approximationen stetiger Abbildungen. Stetige Zyklen. 9. Kanonische Verschiebungen. Nochmals Invarianz der Dimensionszahl und der Bettischen Gruppen. Allgemeiner Dimensionsbegriff. 10. Der Zerlegungssatz für den euklidischen Raum. Weitere Invarianzsätze. — Vierter Teil. Verschlingungen im euklidischen Raum. Stetige Abbildungen von Polyedern. 11. Verschlingungstheorie. Der Alexandersche Dualitätssatz. 12. Der Brouwersche Abbildungsgrad. Die Kroneckersche Charakteristik. 13. Homotopie- und Erweiterungssätze für Abbildungen. 14. Fixpunkte. — Anhang I. Abelsche Gruppen. — Anhang II. Der R^m und seine konvexen Zellen.

Die Lektüre des Buches erfordert fast keine Vorkenntnisse, dafür aber einen hohen Grad exakt mathematischen Denkens. Der Leser, der sich die Mühe nimmt, das Buch gründlich zu studieren — und diese Mühe lohnt sich — wird gerade in den Mittelpunkt der schöpferischen Tätigkeit der modernen Topologie geführt. Es ist klar, daß das Werk von ALEXANDROFF und HOPF, insbesondere wenn es in drei Bänden fertig vorliegen wird, ein neue Epoche in der Entwicklung der Topologie eröffnet.

B. v. K.

J. F. Koksma, Diophantische Approximationen (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, vierter Band, Heft 4), VIII + 157 S., Berlin, J. Springer, 1936.

Der Name *Diophantische Approximationen* stammt von MINKOWSKI. Damit werde bezeichnet, daß man nicht (wie bei *Diophantischen Gleichungen*) solche ganzzahligen Werte sucht, die Nullstellen gegebener Funktionen sind, sondern solche, wo die Funktionswerte angenähert verschwinden. Insbesondere stellt sich die Frage, wie und in welchem Sinne die Güte der Annäherung mit den Schranken der zugelassenen Werte wächst. Den Gegenstand des Berichtes bildet dieses Problemgebiet, welches sich schwer einheitlich zusammenfassen läßt. Eben in dieser Zusammenfassung liegt der Hauptwert dieses Heftes.

Es werden teils Einzelfälle, teils anschließende Probleme behandelt. So finden wir mit reichen Literaturangaben Berichte unter anderen über die Geometrie der Zahlen, Annäherungen mit Hilfe der Kettenbrüche, Irrationalitäts- und Transzendenzuntersuchungen, Verteilunguntersuchungen von Zahlenfolgen.

Auf Beweise wird meistens verzichtet, wohl aber auf deren Methoden und Schwierigkeiten hingewiesen. Der enge Rahmen hat leider ein Eingehen auf die Anwendungen nicht gestattet.

G. Hajós.

Dénes König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe (Math. und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern, Band 16), XI + 258 S., Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1936.

Die Graphentheorie ist ohne Zweifel aus der Unterhaltungsmathematik herangewachsen. Obzwar sie nunmehr ein wichtiger Teil der Topologie geworden ist, reich an verschiedenartigsten Anwendungen, verleiht ihr doch ihr Ursprung ein besonderes Gepräge der „von Haus aus reinen" Mathematik. Dies äußert sich in erster Linie darin, daß die graphentheoretischen Probleme an sich, unabhängig von den Anwendungen und sogar oft auch von dem Zusammenhang mit anderen Problemen der Graphentheorie, einen besonderen Reiz besitzen. Oft findet man unter den Graphentheoretikern Forscher, die sich sonst gar nicht um Topologie interessieren, ja auch Liebhaber, die sich sonst nicht mit Mathematik beschäftigen. Bei einem so weiten Interesse ist es wohl auffallend, daß vorher (außer einem Heft, 1924, ferner einem Mémorialreferat, 1926, von SAINTE-LAGUË) keine Monographie über Graphentheorie geschrieben wurde.

Der verstorbene Begründer der Sammlung, E. HILB, hat wohl einen der Geeignetesten zum Verfassen einer solchen Monographie eingeladen. D. KÖNIG hat recht viel zum Fortschritt der Graphentheorie beigetragen; unter anderem ist die Theorie der *unendlichen* Graphen gar und ganz seine eigene Schöpfung.

Der Graphenbegriff wird im Buche abstrakt-kombinatorisch aufgefaßt; d. h. ein Graph wird nicht etwa als ein im Raume eingebettetes Gebilde angesehen, sondern als eine abstrakte Zusammenfassung von beliebigen Mengenelementen, Knotenpunkte genannt, und von dieselben „verbindenden" Kanten; dabei ist eine Kante nichts anderes, als ein Inbegriff ihrer beiden Endpunkte, die aber in beliebig vielen Exemplaren existieren kann, eventuell in unendlich vielen von beliebiger Mächtigkeit. Diese Auffassung ermöglicht die Anwendung der graphentheoretischen Methoden auf Fragen der abstrakten Mengenlehre, ohne die Exaktheit einzubüßen oder etwa stillschweigend Mächtigkeitseinschränkungen zu involvieren. Natürlich läßt sich der Graphenbegriff bei solchen Anwendungen stets eliminieren; jedoch besitzt eben die Graphenterminologie einen hohen heuristischen Wert.

An der Spitze der Buches werden die Grundlagen, d. h. die ersten Definitionen und 28 einfache Sätze gestellt. Es ist wohl nicht bequem, diese anschaulich fast selbstverständlichen und daher an sich nicht sehr interessanten Sätze und deren, zum Teil mit der anschaulichen Evidenz der Sätze nicht in Verhältnis stehenden exakten Beweise durchzuarbeiten; es handelt sich aber um Sätze, die weiterhin durchwegs benötigt werden. In den nächstfolgenden beiden Kapiteln wird man schon reichlich durch interessante Probleme (Eulersche Linien und Brückenproblem, Hamiltonsche Rundreisen; Labyrinthe) entschädigt. Es folgen dann zwei Kapitel über Bäume nebst allgemeineren (nichtzusammenhängenden oder unendlichen) kreislosen Graphen und deren verschiedenen Zentren oder Achsen; auch die Anwendungen auf Chemie (Anzahl der Isomere) werden berührt, aber nicht ausführlich behandelt, da die Anzahlprobleme vom Programm des Buches ausgeschlossen wurden. Das nächste Kapitel ist speziellen Untersuchungen über unendliche Graphen gewidmet; hier findet man das wegen mannigfaltigen Anwendungen wichtige „Unendlichkeitslemma" von KÖNIG. Zwei Kapitel werden dann den gerichteten Graphen gewidmet; das erste behandelt Basisprobleme, von denen das Problem der fünf Damen auf dem Schachbrett als geläufigster Spezialfall angeführt werden möge; das zweite bringt verschiedene Anwendungen der gerichteten Graphen (Logik; Theorie der Spiele; Gruppentheorie). Als Anwendungen auf Logik werden graphentheoretische Deutungen der Peirce—Schröderschen Begriffsbildungen über Relative, ferner der Untersuchungen von HERTZ über unabhängige Axiomensysteme angeführt; Referent vermißt hier Anwendungen auf die Hilbertsche Beweistheorie bzw. auf das Entscheidungsproblem, da auch in dieser Richtung viele Anwendungsmöglichkeiten der Graphentheorie liegen. So beruht z. B. der — sich auch mit der für die Beweistheorie so wichtigen Herbrandschen Theorie der champs infinis berührende — entscheidende Schluß des Skolemschen auswahlprinziplosen Beweises für den Löwenheim-Skolemschen Satz über die abzählbare Erfüllbarkeit auf eine Anwendung des Unendlichkeitslemmas (in einem Spezialfall eben, wo dasselbe ohne Auswahlprinzip bewiesen werden kann). In den beiden nächsten Kapiteln werden gewisse mit Graphen zusammenhängende lineare Formen untersucht, nebst Anwendungen auf die Elektrizitätslehre (Anzahl der unabhängigen der Kirchhoffschen Gleichungen) und auf die Poincaré-Veblenschen Matrizen. Die folgenden drei Kapitel sind dem wichtigen Fragenkreis der Faktorenzerlegung regulärer Graphen gewidmet; dabei wird der klassische Satz von PETERSEN über reguläre Graphen dritten Grades im Anschluß an FRINK bewiesen und auch der Zusammenhang mit dem Kuratowski—Mengerschen Einbettungssatz und dem Vierfarbenproblem besprochen. Hier findet man also auch Ausführungen, die der relativen Graphentheorie (Graphen auf Flächen) angehören; diese Theorie wird sonst, der kombinatorischen Richtung des Buches entsprechend, außer Acht gelassen. Endlich werden die Sätze über Faktorenzerlegung auf unendliche Graphen übertragen. Das letzte Kapitel behandelt die trennenden Knotenpunktmengen auf Graphen (Mengerscher Satz) nebst eleganten Anwendungen auf Matrizen und besonders auf Irreduzibilitätsfragen bezüglich Determinanten.

Das Buch hat der Graphentheorie bereits viele Freunde geworben und wird bestimmt noch viele weitere gewinnen.

L. Kalmár.

Sur quelques conséquences d'une proposition de M. Lusin.

Par WACŁAW SIERPIŃSKI à Warszawa.

Il est remarquable que parmi les diverses conséquences qu'on a tiré de l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) un grand nombre peut être déduit d'une seule conséquence de cette hypothèse (sans faire appel à elle même), notamment de la proposition **L** suivante due à M. N. LUSIN[1]):

L. *Il existe un ensemble linéaire L de puissance du continu ne contenant aucun sous-ensemble indénombrable non dense.*

Le but de cette Note est de déduire de la proposition **L** les deux conséquences suivantes:

P. *Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle* $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *qui ne prennent que deux valeurs* 0 *et* 1 *et qui sont telles que quelle que soit la suite infinie croissante d'indices* $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$, *la suite infinie* $\{f_{m_i}(x)\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ *n'est convergente que pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de* x.[2])

Q. *Il existe une suite infinie d'ensembles linéaires* $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *telle que toute transformation biunivoque de la droite*

---

[1]) N. LUSIN, Sur un problème de M. Baire, *Comptes rendus Académie Paris*, **158** (1914), p. 1258—1261, esp. p. 1259. Dans mon livre *Hypothèse du continu* (Monografje Mat., t. IV, Warszawa-Lwów, 1934) j'ai consacré tout un chapitre aux conséquences de la proposition L (p. 36—75).

[2]) Cette proposition a été déduite par moi de l'hypothèse du continu (comme solution d'un problème de M. S. SAKS) dans: W. SIERPIŃSKI, Remarque sur les suites infinies de fonctions, *Fundamenta Math.*, **18** (1932), p. 110—113; *cf.* ma Note: Sur un problème de M. Ruziewicz concernant l'hypothèse du continu, *Bulletin Académie Serbe*, (A) **1** (1933), p. 67—73, esp. p. 73 et mon livre cité, p. 104 (proposition C_{60}) et p. 62 (proposition C_{13}).

en elle-même transforme tous les ensembles de cette suite, sauf, peut-être, un nombre fini d'entre eux, en ensembles non mesurables L et dépourvus de la propriété de Baire au sens large (c. à. d. relativement à la droite).[3])

A ce but nous déduirons d'abord de la proposition **L** la conséquence **C** suivante qui, par elle-même, présente quelque intérêt:

C. *Il existe une suite infinie d'ensembles linéaires* $\{E_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$, *telle que, N étant un ensemble linéaire indénombrable quelconque, il existe un nombre naturel p, tel que l'on a*

$$NE_n \neq 0 \quad \textit{et} \quad N-E_n \neq 0 \quad \textit{pour} \quad n \geqq p.$$

Démonstration. Soit L un ensemble linéaire satisfaisant à la proposition **L.** On a donc $\overline{\overline{L}}=2^{\aleph_0}$ et il existe une transformation biunivoque $f(x)$ de l'ensemble L en l'ensemble $X=f(L)$ de tous les nombres réels. Soit $g(x)$ la fonction inverse de $f(x)$ (qui transforme X en $L=g(X)$).

Désignons, pour $n=1,2,\ldots$, par H_n l'ensemble de tous les nombres de L dont le développement en fraction dyadique essentiellement infinie a comme n-ème chiffre le nombre 1 et posons $E_n=f(H_n)$. Je dis que la suite d'ensembles $\{E_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ satisfait à la proposition **C.**

Soit, en effet, N un ensemble linéaire indénombrable et admettons que la condition de **C** est en défaut pour l'ensemble N. Dans ce cas il existe ou bien une infinité d'indices n, pour lesquels on a $NE_n=0$, donc aussi $g(NE_n)=0$, ou bien une infinité d'indices n, pour lesquels on a $N-E_n=0$, donc aussi $g(N-E_n)=0$.

Posons $g(N)=N_1$: ce sera un sous-ensemble indénombrable de L. La fonction g étant à valeurs distinctes et inverse de la fonction f, on a

$$g(NE_n)=g(N)\,g(E_n)=N_1H_n$$

et

$$g(N-E_n)=g(N)-g(E_n)=N_1-H_n$$

pour $n=1,2,\ldots$ Il existe donc une infinité d'indices n pour lesquels on a soit $N_1H_n=0$, soit $N_1-H_n=0$, c. à. d. $N_1\subset H_n$.

---

[3]) La première partie de cette proposition (concernant la non-mesurabilité L) a été démontrée par une voie différente par M. E. Szpilrajn, Sur l'équivalence des suites d'ensembles et l'équivalence des fonctions, *Fundamenta Math.*, **26** (1936), p. 302–326, esp. p. 321 (théorème (iii)).

Si $N_1 H_n = 0$ pour $n = n_1, n_2, \ldots$, où $n_1 < n_2 < \ldots$, alors on a (vu que $N_1 \subset L$):

$$(1) \qquad N_1 \subset L \prod_{k=1}^{\infty} CH_{n_k}.$$

Or, il résulte tout de suite de la définition des ensembles H_n et de $n_1 < n_2 < \ldots$ que l'ensemble $T = \prod_{k=1}^{\infty} CH_{n_k}$ est non dense. L'ensemble L satisfaisant à la proposition **L**, l'ensemble LT est donc au plus dénombrable, ce qui est impossible, d'après (1) (N_1 étant indénombrable).

Si $N_1 \subset H_n$ pour $n = n_1, n_2, \ldots$, où $n_1 < n_2 < \ldots$, on trouve

$$N_1 \subset \prod_{k=1}^{\infty} H_{n_k}$$

et, l'ensemble à droite étant un sous-ensemble non dense de L, on aboutit encore à une contradiction.

Il est ainsi démontré que $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{C}$.

Désignons maintenant par $\mathbf{C}^*$ la proposition qu'on obtient de la proposition **C** lorsqu'on y remplace le mot *„indénombrable“* par *„de puissance du continu“*. On a évidemment $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^*$ (et, si l'hypothèse du continu est vraie, les propositions **C** et $\mathbf{C}^*$ coïncident).

Je démontrerai maintenant que *les ensembles E_n ($n = 1, 2, \ldots$) qui satisfont à la proposition* $\mathbf{C}^*$ (donc, à plus forte raison, aussi ceux qui satisfont à la proposition **C**) *sont tous, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, non mesurables L et dépourvus de la propriété de Baire au sens large*[4]).

Cela est une conséquence immédiate du théorème suivant, intéressant peut-être par lui-même:

Théorème. *Si $\{E_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) est une suite infinie d'ensembles linéaires mesurables (resp. jouissant de la propriété de Baire au sens large), il existe un ensemble linéaire parfait P, tel qu'on a pour une infinité d'indices n ou bien $P \subset E_n$, ou bien $P \subset CE_n$.*

Pour démontrer notre théorème, nous prouverons d'abord ce

Lemme. *Soit Q un ensemble linéaire contenant un sous-ensemble parfait et soit $Q = M_n + N_n$ et $M_n N_n = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$,*

---

4) On peut déduire cela aussi d'un théorème de M. Mazurkiewicz, Sur les suites de fonctions continues, *Fundamenta Math.*, **18** (1932), p. 114—117.

où les ensembles M_n et N_n $(n = 1, 2, \ldots)$ jouissent de la propriété α suivante: si, pour un ensemble linéaire parfait P, on a $\overline{\overline{PM_n}} > \aleph_0$ (resp. $\overline{\overline{PN_n}} > \aleph_0$), il existe un ensemble parfait $\subset PM_n$ (resp. $\subset PN_n$).[5] *Alors il existe un ensemble parfait R, tel qu'on a pour une infinité d'indices n ou bien $R \subset M_n$, ou bien $R \subset N_n$.*

Démonstration. Distinguons deux cas:

1) Quel que soit l'ensemble parfait $P \subset Q$, il existe un indice p, tel que $\overline{\overline{PM_n}} > \aleph_0$ pour $n \geqq p$.

2) Le cas 1) n'a pas lieu.

Dans le cas 1) soit P un ensemble parfait $\subset Q$ et soient P_0 et P_1 deux sous-ensembles disjoints parfaits et bornés de P, de diamètres $< 1/2$. D'après 1) il existe des nombres naturels p_0 et p_1, tels que $\overline{\overline{P_0M_n}} > \aleph_0$ pour $n \geqq p_0$ et $\overline{\overline{P_1M_n}} > \aleph_0$ pour $n \geqq p_1$. Soit $n_1 = \max(p_0, p_1)$: nous aurons $\overline{\overline{P_0M_{n_1}}} > \aleph_0$ et $\overline{\overline{P_1M_{n_1}}} > \aleph_0$ et d'après la condition α de notre lemme il existe des ensembles parfaits P_0^* et P_1^*, tels que $P_0^* \subset P_0M_{n_1}$ et $P_1^* \subset P_1M_{n_1}$. Soient P_{00} et P_{01} deux sous-ensembles parfaits disjoints de P_0^* et soient P_{10} et P_{11} deux sous-ensembles parfaits disjoints de P_1^*, tous les quatres de diamètres $< 1/2^2$. Comme plus haut, nous trouverons un indice $n_2 > n_1$, tel que $\overline{\overline{P_{00}M_{n_2}}} > \aleph_0$, $\overline{\overline{P_{01}M_{n_2}}} > \aleph_0$, $\overline{\overline{P_{10}M_{n_2}}} > \aleph_0$ et $\overline{\overline{P_{11}M_{n_2}}} > \aleph_0$.

En raisonnant ainsi de suite, nous obtiendrons un système $\{P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\}$ d'ensembles parfaits et bornés et une suite infinie croissante d'indices $n_1 < n_2 < \ldots$, tels que, pour k naturel fixe, les ensembles

$$P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k = 0, 1)$$

sont disjoints, de diamètres $< 1/2^k$ et que

$$P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \subset M_{n_k} P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}.$$

Soit, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$,

$$S_k = \sum P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k},$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes de k indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$

[5]) La propriété α a été considérée par M. N. Lusin, Sur les ensembles analytiques, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), p. 1–95, esp. p. 42 et par M^elle^ S. Braun, Sur une propriété d'ensembles, *Fundamenta Math.*, **28** (1937), p. 211—213, qui a déduit de l'hypothèse du continu l'existence de deux ensembles linéaires à propriété α dont la partie commune n'en jouit pas.

égaux à 0 ou à 1 (donc, la somme S_k contenant 2^k termes). Posons

$$R = S_1 S_2 S_3 \dots$$

On voit sans peine que l'ensemble R est parfait et que

$$R \subset M_{n_1} M_{n_2} M_{n_3} \dots$$

Dans le cas 2) il existe un ensemble parfait $P \subset Q$, tel qu'on a $\overline{\overline{PM_n}} \leqq \aleph_0$ pour une infinité d'indices n, soit pour $n = n_1, n_2, \dots$, où $n_1 < n_2 < \dots$

Posons

$$D = \sum_{k=1}^{\infty} PM_{n_k}; \tag{2}$$

nous aurons $\overline{\overline{D}} \leqq \aleph_0$ et il existe un ensemble parfait $R \subset P - D$. Vu que $R \subset P \subset Q = M_{n_k} + N_{n_k}$ et que $M_{n_k} N_{n_k} = 0$ pour $k = 1, 2, 3, \dots$, on aura, d'après (2):

$$R \subset N_{n_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots$$

Notre lemme est ainsi démontré.

Soit maintenant $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ une suite infinie d'ensembles linéaires mesurables L (resp. jouissant de la propriété de Baire au sens large). Nous pouvons donc poser $E_n = E_n^* + R_n$ et $CE_n = H_n^* + T_n$, où E_n^* et H_n^* sont des ensembles F_σ (resp. G_δ) et les ensembles R_n et T_n sont de mesure nulle (resp. de la 1[re] catégorie) pour $n = 1, 2, 3, \dots$ Soient R_n^* et T_n^* des ensembles G_δ de mesure nulle (resp. des F_σ de la 1[re] catégorie) contenant R_n et T_n respectivement.

Posons $S = \sum_{n=1}^{\infty} (R_n^* + T_n^*)$: ce sera un ensemble $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle (resp. de la 1[re] catégorie), et l'ensemble $Q = CS$ sera un $F_{\sigma\delta}$ contenant un sous-ensemble parfait.

Vu que $R_n \subset S$ et $T_n \subset S$ pour $n = 1, 2, \dots$, nous aurons pour $n = 1, 2, \dots$

$$Q = (E_n + CE_n) - S = (E_n^* - S) + (H_n^* - S) = M_n + N_n,$$

où $M_n = E_n^* - S$ et $N_n = H_n^* - S$ sont des $F_{\sigma\delta}$ et $M_n \subset E_n$, $N_n \subset CE_n$, donc $M_n N_n = 0$, pour $n = 1, 2, \dots$

Or, les ensembles M_n et N_n $(n = 1, 2, \dots)$, en tant que mesurables B, jouissent de la propriété α (puisque, comme on sait, tout ensemble mesurable B indénombrable possède un sous-ensemble parfait). On peut donc appliquer notre lemme aux suites d'ensembles $\{M_n\}$ et $\{N_n\}$, dont il résulte qu'il existe un ensemble parfait P tel qu'on a pour une infinité d'indices n soit $P \subset M_n$, soit $P \subset N_n$, donc, à plus forte raison, soit $P \subset E_n$, soit $P \subset CE_n$.

Notre théorème est ainsi démontré.

Je démontrerai maintenant (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que *les propositions* **P** *et* **C** *sont équivalentes*[6]).

1. **C** $\rightarrow$ **P**. Soit, en effet, $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ une suite infinie d'ensembles satisfaisant à la proposition **C**, et soit $f_n(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E_n (c. à. d. $f_n(x)=1$ pour $x \in E_n$ et $f_n(x)=0$ pour $x \in CE_n$). On voit sans peine que la suite infinie de fonctions $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ satisfait à la proposition **P**. On a ainsi **C** $\rightarrow$ **P**.

2. **P** $\rightarrow$ **C**. Soit $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ une suite infinie de fonctions satisfaisant à la proposition **P**. On voit sans peine qu'en posant $E_n = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f_n(x)=1]$ on obtient une suite infinie d'ensembles $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ satisfaisant à la proposition **C**. On a ainsi **P** $\rightarrow$ **C**.

L'équivalence **P** $\rightleftarrows$ **C** est ainsi démontrée. Il en résulte que **L** $\rightarrow$ **P** (puisque **L** $\rightarrow$ **C** $\rightarrow$ **P**).

Quant à la proposition **P** il est encore à remarquer que si l'on y remplace (à la fin de la proposition) les mots *„au plus dénombrable"* par *„non dense et de mesure nulle"*, on peut démontrer la proposition ainsi modifiée sans faire appel à l'hypothèse du continu, et même construire effectivement la suite correspondante $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$, notamment en définissant (pour $n=1, 2, \ldots$) la fonction $f_n(x)$ (pour x réels) par la formule

$$f_n(x) = \mathrm{E}\,2^n x - 2\,\mathrm{E}\,2^{n-1} x,$$

où $\mathrm{E}\,t$ désigne l'entier le plus grand ne dépassant pas t.

Je vais maintenant démontrer (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que *les propositions* **Q** *et* **C*** *sont équivalentes*.

1. **C*** $\rightarrow$ **Q**. Soit, en effet, $\{E_n\}$ une suite infinie d'ensembles satisfaisant à la proposition **C*** et soit $f(x)$ une transformation biunivoque quelconque de la droite en elle-même. On voit sans peine que les ensembles $E_n^* = f(E_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ satisfont encore à la proposition **C***, donc, comme j'ai démontré plus haut, ils sont tous, sauf, peut-être, un nombre fini d'entre eux, non mesurables L et dépourvus de la propriété de Baire au sens large. Ils satisfont donc à la proposition **Q**. On a ainsi **C*** $\rightarrow$ **Q**.

[6]) *Cf.* mon livre cité, p. 105.

2. $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{C}^*$. Soit $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ une suite infinie d'ensembles satisfaisant à la proposition **Q**: je dis que cette suite satisfait également à la proposition $\mathbf{C}^*$. Supposons, en effet, que ce n'est pas le cas. Il existe donc un ensemble linéaire N de puissance du continu et une suite infinie croissante d'indices $n_1 < n_2 < \ldots$, telle qu'on a soit $NE_{n_k}=0$ pour $k=1, 2, \ldots$, soit $N-E_{n_k}=0$ pour $k=1, 2, \ldots$. N étant un ensemble linéaire de puissance du continu, il existe, comme on voit sans peine, une transformation biunivoque $f(x)$ de la droite en elle-même qui transforme le complémentaire CN de N en un ensemble $f(CN)$ de mesure nulle. Si l'on a $NE_{n_k}=0$ pour $k=1, 2, \ldots$, il en résulte que $E_{n_k} \subset CN$, donc $f(E_{n_k}) \subset f(CN)$ et, comme $\operatorname{mes} f(CN)=0$, on trouve $\operatorname{mes} f(E_{n_k})=0$ pour $k=1, 2, \ldots$, contrairement à la condition de **Q**. Si l'on a $N-E_{n_k}=0$ pour $k=1, 2, \ldots$, on a $CE_{n_k} \subset CN$ et $f(CE_{n_k}) \subset f(CN)$, donc $\operatorname{mes} f(CE_{n_k})=0$ pour $k=1, 2, \ldots$ et les ensembles $f(CE_{n_k})$ $(k=1, 2, \ldots)$ sont tous mesurables L, encore contrairement à la condition de **Q**. On a ainsi $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{C}^*$.

L'équivalence $\mathbf{Q} \rightleftarrows \mathbf{C}^*$ est ainsi démontrée. Il en résulte que $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{Q}$ (puisque $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{Q}$).

Plus haut nous avons démontré que $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}$: comme $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{Q}$, il en résulte que $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$. Il est ainsi démontré (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que *la proposition* **P** *entraîne la proposition* **Q**.

Quant à la proposition **Q**, il est à remarquer que M. E. Szpilrajn a démontré sans faire appel à l'hypothèse du continu la proposition plus faible suivante[7]):

Il existe une suite infinie d'ensembles linéaires $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$, telle que toute transformation biunivoque de la droite en elle-même transforme au moins un ensemble de cette suite en un ensemble non mesurable L.

J'ai déduit de l'hypothèse du continu la proposition **S** suivante[8]) qui peut être régardée comme duale par rapport à la proposition **L**[9])

7) l. c. [3]), p. 321 (théorème (ii)). L'énoncé de M. Szpilrajn est un peu différent.

8) W. Sierpiński, Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$), *Fundamenta Math.*, 5 (1924), p. 177—187, esp. p. 184; aussi mon livre cité, p. 80 (proposition C_{26}).

9) Voir mon livre cité, p. 76. Or, M. F. Rothberger, Eine Äquivalenz zwischen der Kontinuumhypothese und der Existenz der Lusinschen und

S. *Il existe un ensemble linéaire S de puissance du continu ne contenant aucun sous-ensemble indénombrable de mesure nulle.*

Il est à remarquer qu'on peut démontrer (sans faire appel à l'hypothèse du continu) qu'on a **S → C,** donc aussi **S → P** et **S → Q.** La démonstration est basée sur le suivant

Lemme. *Soit, pour* $n=1, 2, \ldots$, H_n *l'ensemble de tous les nombres réels dont le développement dyadique essentiellement infini a comme n-ième chiffre le nombre* 1. *Quelle que soit la suite infinie croissante de nombres naturels* $n_1, n_2, \ldots$, *on a*

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{mes} \prod_{k=1}^{\infty} H_{n_k} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{mes} \prod_{k=1}^{\infty} CH_{n_k} = 0.$$

Démonstration. Il est à remarquer d'abord qu'on obtient l'ensemble H_n (resp. CH_n) ($n=1, 2, \ldots$) en divisant chaque intervalle $(p, p+1)$ (où p est un entier) en 2^n intervalles égaux et en prenant la somme de tous les intervalles de rang pair (resp. impair) numérotés d'après la grandeur de leurs extrémités droites et dépourvus de leurs extrémités gauches. Il en résulte sans peine par l'induction que, I_p désignant l'intervalle $(p, p+1)$ (où p est un entier), on a, pour $s=1, 2, \ldots$:

$$\operatorname{mes}\left(I_p \prod_{k=1}^{s} H_{n_k}\right) = \frac{1}{2^s} \quad \text{et} \quad \operatorname{mes}\left(I_p \prod_{k=1}^{s} CH_{n_k}\right) = \frac{1}{2^s},$$

ce qui donne (pour p entier)

$$\operatorname{mes}\left(I_p \prod_{k=1}^{\infty} H_{n_k}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{mes}\left(I_p \prod_{k=1}^{\infty} CH_{n_k}\right) = 0,$$

d'où résultent tout de suite les formules (3). Notre lemme est ainsi démontré.

En partant de ce lemme on démontre l'implication **S → C** d'une façon tout à fait analogue comme plus haut l'implication **L → C** (il faut seulement remplacer dans le raisonnement les ensembles non denses par les ensembles de mesure nulle).

Il est ainsi établi (sans faire appel à l'hypothèse du continu) qu'on a **S → C → P → C* → Q.**

(Reçu le 12 octobre 1938)

Sierpińskischen Mengen, *Fundamenta Math*, **30** (1938), p. 215—217, a démontré que l'ensemble des propositions **L** et **S** équivaut à l'hypothèse du continu.

Sur une propriété du mouvement brownien.

Par J. MARCINKIEWICZ à Wilno.

1. Considérons un mouvement stochastique sur une droite. Désignons par $p(x_0, t_0, x, t)\,dx$ la probabilité qu'une particule partant au moment t_0 du point x_0 se trouve au moment t dans le segment $(x, x+dx)$. La fonction p est évidemment non-négative et vérifie les deux équations suivantes:

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_0, t_0, x, t)\,dx = 1$$

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_0, t_0, x, t)\,p(x, t, x_1, t_1)\,dx = p(x_0, t_0, x_1, t_1); \quad (t_0 < t < t_1).$$

La première des ces équations exprime que la probabilité totale est égale à l'unité, et la seconde l'indépendance du mouvement dans deux segments contigus du temps.

On sait que sous des conditions très larges, la fonction p vérifie l'équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$(3) \qquad \frac{\partial p}{\partial t_0} = -A(x_0, t_0)\frac{\partial p}{\partial x_0} - B(x_0, t_0)\frac{\partial^2 p}{\partial x_0^2}; \quad B \geqq 0.$$

En particulier le mouvement brownien est décrit par l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial p}{\partial t_0} = -\frac{1}{2\mu}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x_0^2}$$

dont la solution probabilistique est la fonction

$$(5) \qquad p(x_0, t_0, x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi(t-t_0)}}\,\exp\left(-\mu\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}\right).$$

Le mouvement brownien est donc décrit par une fonction p qui ne dépend que de $t-t_0$ et $x-x_0$. Cette fonction est évidemment symétrique par rapport à x et x_0.

La forme générale de fonctions p vérifiant les deux premières conditions est

$$(6) \qquad p(x_0, t_0, x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi(t-t_0)}} \exp\left[-\mu(t-t_0)\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}-\nu\right)^2\right]$$

où μ et ν désignent deux constantes dont $\mu>0$ et ν est tout à fait arbitraire. Nous appellerons un tel mouvement le mouvement brownien au sens large. Il y a bien d'autres problèmes stochastiques décrits par les équations différentielles du second ordre et du type parabolique ou elliptique.

Ces équations ont la même source, à savoir l'équation (2) écrite pour t infiniment voisin à t_0. Dans cette note nous utilisons l'équation (3) pour trouver une propriété caractéristique du mouvement brownien.

Fixons deux points (x_0, t_0) et (x, t) $(t>t_0)$. Le produit

$$p(x_0, t_0, x, t)\, p(x, t, x_1, t_1)\, dx\, dx_1$$

exprime la probabilité qu'une particule partant du point x_0 au moment t_0 passe par le segment $(x, x+dx)$ au moment t et se trouve à l'intervalle (x_1, x_1+dx_1) au moment t_1.

Les paramètres $x_0, t_0, x_1, t_1, dx, dx_1$ étant fixés désignons par $x(t, x_0, t_0, x_1, t_1)$ ou tout court par $x(t)$ la valeur de x (dépendant de t) pour laquelle le dit produit atteind son maximum. Nous appellerons les courbes ainsi définies

$$x = x(t) = x(t, x_0, t_0, x_1, t_1)$$

tracées dans le plan (x, t) les caractéristiques du mouvement considéré. Une caractéristique montre donc la valeur la plus probable de l'abscisse x d'une particule au moment t si l'on connait sa position aux moments t_0 et t_1, $t_0<t<t_1$. En utilisant la notion de ces courbes nous allons caractériser les mouvements browniens.

Théorème 1. *Les caractéristiques du mouvement brownien au sens restreint sont des droites et la fonction correspondante p vérifie deux relations suivantes*

$$(7) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}(x-x_0)\, p(x_0, t_0, x, t)\, dx = o(t-t_0) \qquad (t\to\infty),$$

$$(8) \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{(t-t_0)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-x_0)^2 p(x_0, t_0, x, t)\, dx = 0.$$

Au contraire si une fonction quelconque $p(x_0, t_0, x, t)$ définissant *un mouvement stochastique admet pour* $t_0 < t$ *des dérivées partielles d'ordres suffisament élevées et vérifie une équation de la forme* (3) *avec A et B admettant des dérivées partielles continues et* $B > 0$, *ainsi qu'une des relations* (7) *et* (8) *et si enfin ses caractéristiques sont des droites passant par les points générateurs elle définit le mouvement brownien au sens restreint.*

Pour le mouvement brownien au sens large on a le

Théorème 2. *Les caractéristiques d'un mouvement brownien au sens large sont des droites et la fonction correspondante p vérifie la relation suivante*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)\, p(x_0, t_0, x, t)\, dx = \text{const.} \tag{9}$$

Au contraire, si la fonction p vérifie les conditions du théorème précédent sauf peut-être (7) *et* (8) *et satisfait à l'égalité* (9) *elle définit un mouvement brownien au sens large.*

L'égalité (7) exprime que l'espérance moyenne dans un segment infini du temps est nulle pour chaque point (x_0, t_0), l'égalité (8) dit que la dispersion ne croît pas trop rapidement avec le temps. Remarquons enfin qu'il est impossible de remplacer dans le théorème 2 la condition (9) par (8) avec une constante du côté droit. Une telle condition caractérise les mouvements uniformes par rapport au temps. Nous avons à cet égard le

Théorème 3. *Pour qu'un mouvement stochastique vérifiant les conditions générales du théorème* 2 *et jouissant de caractéristiques rectilignes soit uniforme par rapport au temps il faut et il suffit que l'on ait*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(t-t_0)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)^2\, p(x_0, t_0, x, t)\, dx = \text{const.} \tag{10}$$

La forme générale des mouvements de cette sorte est donnée par la fonction p

$$\begin{aligned} &p(x_0, t_0, x, t) = \\ &= \sqrt{\frac{a}{\pi(t-t_0)}} \exp\left[-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0} - \frac{\lambda^2}{4a}(t-t_0)\right] \frac{S(x)}{S(x_0)}, a>0 \end{aligned} \tag{11}$$

où l'on a posé

$$S(x) = a_1 e^{\lambda x} + a_2 e^{-\lambda x}$$

λ, a_1 et a_2 désignant des constantes telles que $a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0$ *et* $a_1 + a_2 > 0$.

2. Nous commençons par la démonstration du théorème 1. Sa première partie étant immédiate, nous nous occupons seulement de la deuxième. Remarquons d'abord que $p > 0$ car dans le cas contraire on aurait pour certains deux points, (x_0, t_0) et (x_1, t_1); $p(x_0, t_0, x_1, t_1) = 0$, ce qui donne en vertu de la positivité de la fonction f et de la formule (2)

$$p(x_0, t_0, x, t)\, p(x, t, x_1, t_1) = 0; \quad -\infty < x < +\infty, \quad t_0 < t < t_1$$

et on voit que la caractéristique $x(t, x_0, t_0, x_1, t_1)$ serait indéfinie. Etant donnée une fonction $f(x, y, u, \ldots)$, nous désignerons d'une façon générale par $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ses dérivées partielles respectivement par rapport au premier, deuxième, troisième, ... argument. Posons

$$R(x_0, t_0, x, t) = \log p(x_0, t_0, x, t).$$

D'après l'hypothèse faite sur les caractéristiques on a pour trois points collinéaires quelconques (x_0, t_0), (x, t), (x_1, t_1)

$$R_3(x_0, t_0, x, t) + R_1(x, t, x_1, t_1) = 0. \tag{12}$$

Pour obtenir de là une identité, il suffit d'exprimer x_0 au moyen de x, t, x_1, t_1 et t, ce qui donne

$$R_3\left(x - \frac{x_1 - x}{t_1 - t}(t - t_0), t_0, x, t\right) + R_1(x, t, x_1, t_1) = 0$$

ou bien

$$\frac{x_1 - x}{t_1 - t} R_{3,1}\left(x - \frac{x_1 - x}{t_1 - t}(t - t_0), t_0, x, t\right) +$$
$$+ R_{3,2}\left(x - \frac{x_0 - x}{t_1 - t}(t - t_0), t_0, x, t\right) = 0.$$

En tenant compte de l'égalité $(x_1 - x)/(t_1 - t) = (x - x_0)/(t - t_0)$ on en obtient

$$(x - x_0) R_{3,1}(x_0, t_0, x, t) + (t - t_0) R_{3,2}(x_0, t_0, x, t) = 0. \tag{13}$$

L'équation (13) est une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre en R_3. Elle s'intégre facilement de sorte qu'on obtient pour R_3 l'expression

$$R_3(x_0, t_0, x, t) = \Phi\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}, x, t\right). \tag{14}$$

De la même façon, on trouve

$$R_1(x_0, t_0, x, t) = \Psi\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}, x_0, t_0\right)$$

ce qui comparé avec (12) et (14) donne

$$(15) \qquad R_1(x_0, t_0, x, t) = -\Phi\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}, x_0, t_0\right).$$

Les formules (14) et (15) peuvent être tirées aussi immédiatement de l'équation (12). En effet, en fixant les points (x, t) et x_1, t_1 on voit que $R_3(x_0, t_0, x, t)$ conserve une valeur constante dès que le point (x_0, t_0) se déplace le long de la demi-droite $t_0 < t$ passant par les points (x, t) et (x_1, t_1). Or, cette droite peût être caractérisée par le coefficient angulair et un de ses points, dirons (x, t) et comme la connaissance du point (x, t) et de la caractéristique suffit d'après ce qui précède pour connaitre $R_3(x_0, t_0, x, t)$ il en résulte que $R_3(x_0, t_0, x, t)$ est bien de la forme (14). En raisonnant d'une façon analogue, ou bien en tenant compte des formules (14) et (15) on obtient

$$(16) \qquad R_3(x_0, t_0, x, t) = -\bar{\Phi}(u, x-ut, t)$$

$$(17) \qquad R_1(x_0, t_0, x, t) = \bar{\Phi}(u, x_0-ut_0, t_0)$$

où l'on a posé $u = (x-x_0)/(t-t_0)$. L'expression $x-ut$ a une signification géométrique à savoir elle désigne le point d'intersection de la droite passant par les points (x_0, t_0) et (x, t) avec la droite $t=0$. On a aussi

$$(18) \qquad x-ut = x_0-ut_0.$$

En tenant compte de (14) on conclut facilement que Φ_1 existe, d'où il vient l'existence de Φ_2 et Φ_3.

De même on démontre l'existence des dérivées secondes. En différentiant l'équation (14) par rapport à x_0 et l'équation (15) par rapport à x et en comparant les résultats ainsi obtenus il vient

$$(19) \qquad \Phi_1(u, x, t) = \Phi_1(u, x_0, t_0)\,; \quad u = (x-x_0)/(t-t_0).$$

En y posant $x = x_0 + u(t-t_0)$ on obtient l'identité en u, x_0, t_0 et t

$$(20) \qquad \Phi_1(u, x_0 + u(t-t_0), t) = \Phi_1(u, x_0, t_0).$$

On en tire en différentiant par rapport à t

$$u\,\Phi_{1,2}(u, x_0 + u(t-t_0), t) + \Phi_{1,3}(u, x_0 + u(t-t_0), t) = 0.$$

On aperçoit facilement que u, $x_0+u(t-t_0)$ et t peuvent prendre des valeurs tout à fait arbitraires, ce qui donne

$$u\,\Phi_{1,2}(u, x, t)+\Phi_{1,3}(u, x, t)=0. \tag{21}$$

L'équation (21) est une équation du premier ordre par rapport à Φ_1; en l'intégrant on a

$$\Phi_1(u, x, t)=K(u, x-ut) \tag{22}$$

ou bien

$$-(t-t_0)R_{1,3}(x_0, t_0, x, t)=K(u, x-ut)\,; \quad u=(x-x_0)/(t-t_0)$$

La fonction p vérifiant d'après l'hypothèse l'équation (3) R doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial R}{\partial t_0}=-A\frac{\partial R}{\partial x_0}-B\left(\frac{\partial R}{\partial x_0}\right)^2-B\frac{\partial^2 R}{\partial x_0^2} \tag{23}$$

où les arguments de R sont x_0, t_0, x et t et ceux de A et B x_0 et t_0. En différentiant l'équation (23) par rapport à x_0 et en posant $R_1=H$ on obtient

$$\frac{\partial H}{\partial t_0}=-A_1H-(A+B_1)\frac{\partial H}{\partial x_0}-B_1H^2-2BH\frac{\partial H}{\partial x_0}-B\frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2}\,. \tag{24}$$

On a d'après (16) et (18)

$$R_3(x_0, t_0, x, t)=-\bar{\Phi}(u, x_0-ut_0, t)$$

et cette formule devient pour $t_0=0$

$$R_3(x_0, 0, x, t)=-\bar{\Phi}(u, x_0, t)$$

ce qui montre que $\bar{\Phi}$ admet les dérivées partielles.

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t_0}&=\frac{(x-x_0)}{(t-t_0)^2}\bar{\Phi}_1-\frac{(x-x_0)t}{(t-t_0)^2}\bar{\Phi}_2+\bar{\Phi}_3\\ \frac{\partial H}{\partial x_0}&=-\frac{1}{t-t_0}\bar{\Phi}_1+\frac{t}{t-t_0}\bar{\Phi}_2\\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2}&=\frac{1}{(t-t_0)^2}\bar{\Phi}_{1.1}-\frac{2t}{(t-t_0)^2}\bar{\Phi}_{1,2}+\frac{t^2}{(t-t_0)^2}\bar{\Phi}_{2,2}\end{aligned} \tag{25}$$

où les arguments de H sont x_0, t_0, x, t, et ceux de $\bar{\Phi}$ u, $x-ut$ et t_0. En portant les valeurs de H, $\frac{\partial H}{\partial t_0}$, $\frac{\partial H}{\partial x_0}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2}$ tirées des formules (25) dans l'équation (24) on obtient

$$\frac{u}{t-t_0}\overline{\Phi}_1-\frac{ut}{t-t_0}\overline{\Phi}_2+\overline{\Phi}_3=-A_1\overline{\Phi}-(A+B_1)\left[-\frac{1}{t-t_0}\overline{\Phi}_1+\frac{t}{t-t_0}\overline{\Phi}_2\right]-$$

$$(26)\qquad -B_1\overline{\Phi}^2-2B\overline{\Phi}\left[-\frac{1}{t-t_0}\overline{\Phi}_1+\frac{t}{t-t_0}\overline{\Phi}_2\right]-$$

$$-B\left[\left(\frac{1}{t-t_0}\right)^2\overline{\Phi}_{1,1}-\frac{2t}{(t-t_0)^2}\overline{\Phi}_{1,2}+\frac{t^2}{(t-t_0)^2}\overline{\Phi}_{2,2}\right]$$

où les arguments de $\overline{\Phi}$ sont u, x_0-ut_0, t_0 et ceux de A et B x_0 et t_0. Or u, x_0, t_0, t peuvent être tout à fait arbitraires à l'unique condition $t>t_0$. En fixant donc u, t_0 et x_0 et en faisant tendre $t\to t_0$ on obtient facilement

$$(27)\qquad \begin{aligned} &B(x_0, t_0)\,[\overline{\Phi}_{1,1}(u, x_0-ut_0, t_0)-\\ &\qquad -2t_0\,\overline{\Phi}_{1,2}(u, x_0-ut_0, t_0)+t_0^2\,\overline{\Phi}_{2,2}(u, x_0-ut_0, t_0)]=0\end{aligned}$$

ou bien en tenant compte de l'hypothèse $B>0$

$$(28)\qquad \overline{\Phi}_{1,1}-2t_0\overline{\Phi}_{1,2}+t_0^2\overline{\Phi}_{2,2}=0$$

où les arguments de $\overline{\Phi}$ sont u, x_0-ut_0 et t_0. D'autre part en différentiant deux fois l'identité

$$\overline{\Phi}(u, x_0-ut_0, t_0)=-\Phi(u, x_0, t_0)$$

on obtient

$$(29)\qquad \overline{\Phi}_{1,1}-2t_0\overline{\Phi}_{1,2}+t_0^2\overline{\Phi}_{2,2}=-\Phi_{1,1}$$

où les arguments de $\overline{\Phi}$ sont u, x_0-ut_0, t_0 et ceux de Φ u, x_0, t_0. En comparant les équations (28) et (29) on obtient

$$\Phi_{1,1}(u, x_0, t_0)=0$$

ce qui donne

$$(30)\qquad \Phi=a(x_0, t_0)\,u+b(x_0, t_0);\quad \Phi_1(u, x_0, t_0)=a(x_0, t_0)$$

et d'après (22)

$$(31)\qquad a(x_0, t_0)=K(u, x_0-ut_0).$$

En différentiant la dernière égalité par rapport à u on a

$$K_1(u, x_0-ut_0)-t_0K_3(u, x_0-ut_0).$$

Or u, x_0-ut_0, t_0 peuvent être tout à fait arbitraires, on a donc

$$K_1(u, v)-tK_2(u, v)=0$$

ce qui donne $K_1=0$, $K_2=0$, $K=\text{const}$. L'équation (30) devient

$$(32)\qquad R_1(x_0, t_0, x, t)=\Phi(u, x_0, t_0)=2au+b(x_0, t_0);\quad a=\text{const}.$$

On a donc pour R l'équation suivante

$$(33)\quad R(x_0, t_0, x, t) = -\frac{a}{t-t_0}(x-x_0)^2 + C(x_0, t_0) + D(x, t_0, t)$$

ce qui donne en vertu de (12)

$$\frac{\partial D(x, t_0, t)}{\partial x} + \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} = 0$$

ou bien

$$D(x, t_0, t) + C(x, t) = \omega(t_0, t).$$

En portant la valeur de $D(x, t_0, t)$ tirée de cette formule dans l'équation (33) on obtient en changeant C en $-C$

$$(34)\quad R(x_0, t_0, x, t) = -a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0} + C(x, t) - C(x_0, t_0) + \omega(t_0, t).$$

L'équation (1) donne

$$(35)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^R dx = 1.$$

En différentiant cette équation par rapport à x_0 il vient

$$(36)\qquad 2a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-x_0}{t-t_0} e^R dx = \frac{\partial C}{\partial x_0}(x_0, t_0).$$

Une nouvelle différentiation par rapport à x_0 fournit la formule

$$(37)\quad -\frac{2a}{t-t_0} + 4a^2\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right)^2 e^R dx - 2a\frac{\partial C}{\partial x_0}(x_0, t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right)e^R dx = \frac{\partial^2 C}{\partial x_0^2}$$

ou bien en tenant compte de (36),

$$(38)\quad -\frac{2a}{t-t_0} + 4a^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right)^2 e^R dx = \left(\frac{\partial C}{\partial x_0}\right)^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial x_0^2}.$$

Or, ces calculs sont purement formels, mais il est facile de leur donner de la rigueur. Remarquons que $a \neq 0$. En effet dans le cas contraire on aurait

$$R = C(x, t) - C(x_0, t_0) + \omega(t, t_0)$$

et d'après (35) $C(x_0, t_0) = C(t_0)$, $R = R(t_0, t)$, ce qui est impossible. Observons d'après la formule (34) et le fait $p > 0$ que C est une fonction dérivable de x. Il suffit donc de prouver que les intégrales convenables convergent uniformément. Supposons p. ex. $a>0$, $|x_0|<\Delta$, on a

$$\int_{-\infty}^{-\lambda}(x-x_0)\exp\left[-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}+C(x,t)\right]dx\leqq$$

$$\leqq\int_{-\infty}^{-\lambda}(x-\Delta)^2\exp\left[-a\frac{(x+\Delta)^2}{t-t_0}+C\right]dx,$$

$$\int_{\lambda}^{+\infty}(x-x_0)^2\exp\left[-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}+C(x,t)\right]dx\leqq$$

$$\leqq\int_{\lambda}^{+\infty}(x+\Delta)^2\exp\left[-a\frac{(x-\Delta)^2}{t-t_0}+C\right]dx.$$

Les intégrales du côté droit existant il en résulte la proposition en question. Une démonstration analogue s'applique aussi dans le cas $a<0$. Revenons donc aux formules (36) et (38). En supposant p. ex. la formule (7), on obtient en posant dans (36) $t=\infty$

$$\frac{\partial C}{\partial x_0}(x_0,t_0)=0;\quad C(x_0,t_0)=a(t_0);$$

$$R(x_0,t_0,x,t)=-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}+\overline{\omega}(t_0,t).$$

Il en vient aussi $a>0$. L'équation (35) donne

$$\overline{\omega}(t_0,t)=\frac{1}{2}\log\frac{a}{\pi}-\frac{1}{2}\log(t-t_0),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1 si l'on suppose (7). En admettant (8), on tire de (38)

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x_0}\right)^2+\frac{\partial^2 C}{\partial x_0^2}=0,$$

ce qui s'écrit en posant $S=\exp C$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_0^2}=0;\quad S=a(t_0)x_0+b(t_0)$$

et comme $S\neq 0$, il en résulte $a=0$ ce qui prouve le théorème. Passons à la démonstration du théorème 2. En tenant compte de l'égalité (9), on obtient $\dfrac{\partial C}{\partial x_0}=\lambda$ où λ désigne une constante.

En intégrant cette équation il vient

$$C=\lambda x_0+\alpha(t_0)$$

$$R=-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}+\lambda(x-x_0)+\overline{\omega}(t_0, t).$$

Pour trouver la fonction $\overline{\omega}(t_0, t)$, il suffit de s'appuyer sur l'égalité (35) ce qui nous donne bien la formule (6).

Il nous reste à démontrer le théorème 3. Pour ce but supposons d'abord que le mouvement est uniforme par rapport au temps. Les formules (32) et (33) démontrent que $C(x_0, t_0)$ est une fonction dérivable de ses arguments. La formule (34) montre donc qu'il en est ainsi de la fonction ω dès que $t_0<t$. En tenant compte de l'hypothèse faite, l'expression

$$C(x, t)-C(x_0, t_0)+\omega(t_0, t)$$

doit être une fonction f uniquement de x_0, x et $t-t_0$, ce qui donne

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x, t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x, t-t_0).$$

On en conclut facilement que $\frac{\partial C}{\partial x}$ ne dépend que de x, d'où il vient

$$C(x, t)=f(x)+h(t),$$

ou bien comme R ne dépend que de x_0, x et $t-t_0$,

$$R=-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}+f(x)-f(x_0)+\omega(t-t_0). \tag{39}$$

En portant les valeurs des dérivées tirées de cette formule à l'équation (3) on obtient

$$-au^2-\omega'=-A(2au-f')-B(2au-f')^2+B\left(\frac{2a}{t-t_0}+f''\right);$$

$$4aB=1\,;\; A=2Bf'\,;\; Bf'^2+Bf''=q=\text{const.}$$

En posant $S=\exp f$, la dernière équation s'écrit

$$S''=hS \tag{40}$$

h désignant une constante.

La solution de l'équation différentielle (40) donne

$$S=a_1e^{\mu x}+a_2e^{-\mu x}\quad\text{ou}\quad S=a\sin\mu(x-\nu) \tag{41}$$

(a_1, a_2, a et ν constantes) d'après que $h=\mu^2$ ou $h=-\mu^2$. Or comme $S\neq 0$, la formule $h=-\mu^2$ donne $\mu=0$, $S=\text{const.}$ et on voit que le mouvement considéré est brownien. Supposons donc

$h = +\mu^2$, on doit avoir $a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0$, $a_1 + a_2 > 0$,

$$p(x_0, t_0, x, t) = e^{-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0} + \omega(t-t_0)} S(x)/S(x_0).$$

L'équation (1) montre que ω est de la forme envisagée. Supposons maintenant la formule (10). On a d'après (38)

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_0^2} + \left(\frac{\partial C}{\partial x_0}\right)^2 = \lambda^2 \tag{42}$$

où $\lambda^2 \geqq 0$. En posant $S = \exp C$ la dernière équation s'écrit

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_0^2} = \lambda^2 S,$$

ce qui donne

$$S = C_1 e^{\lambda x_0} + C_2 e^{-\lambda x_0}$$

où C_1 et C_2 sont des fonctions de t_0. Un simple calcul donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}} S(x)\,dx = \tag{43}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}(t-t_0)}\, e^{\frac{\lambda^2}{4a}(t-t_0)} \{C_1(t) e^{\lambda x_0} + C_2(t) e^{-\lambda x_0}\}$$

ce qui démontre l'égalité

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}(t-t_0)}\, e^{\frac{\lambda^2}{4a}(s-t_0)+\omega(t_0,t)} \frac{C_1(t)e^{\lambda x_0} + C_2(t)e^{-\lambda x_0}}{C_1(t_0)e^{\lambda x_0} + C_2(t_0)e^{-\lambda x_0}} = 1. \tag{44}$$

On en conclut facilement

$$C_1(t) = a_1; \quad C_2(t) = a_2$$

où a_1 et a_2 sont des constantes.

L'équation (44) se transforme en

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}(t-t_0)}\, e^{\frac{\lambda^2}{4a}(t-t_0)+\omega(t-t_0)} = 1. \tag{45}$$

L'équation (45) donne enfin

$$p(x_0, t_0, x, t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{a}(t-t_0)}} e^{-a\frac{(x-x_0)}{t-t_0} - \frac{\lambda^2}{4a}(t-t_0)} \frac{S(x)}{S(x_0)}, \tag{46}$$

ce qui est la formule (11). Un calcul direct prouve la relation (2).

(Reçu le 12 janvier 1938)

Über die Integralinvarianten, die zu einer Kurve in der Hermiteschen Geometrie gehören.

Von O. VARGA in Prag.*)

In der komplexen projektiven Ebene ist eine Gerade eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, entsprechend soll daher unter einer Kurve[1]) eine Mannigfaltigkeit verstanden werden, die in der Form $x_i = x_i(u_1, u_2)$ $(i = 1, 2, 3)$ darstellbar ist; dabei ist das Verhältnis der drei stetig differenzierbaren Funktionen $x_1(u_1, u_2)$, $x_2(u_1, u_2)$, $x_3(u_1, u_2)$ eine komplexe Größe und u_1, u_2 sind reelle Parameter. Beim Übergang zu einer Hermiteschen Geometrie wird als Maßbestimmung ein quadratisches Bogenelement eingeführt[2]). Deuten wir die Hermitesche Ebene reell, dann entspricht ihr ein vierdimensionaler Riemannscher Raum R_4, in dem man, von dem quadratischen Bogenelement ausgehend, Differentialausdrücke erster bis vierter Ordnung bilden kann. Unsere Kurve geht bei dieser Deutung in ein Flächenstück des R_4 über, für das der Differentialausdruck zweiter Ordnung $d\omega_2$ das Flächenelement ist[3]).

In der vorliegenden Arbeit soll nun eine Deutung von $\int d\omega_2$ (erstreckt längs unsrer Kurve) in der Hermiteschen Ebene selbst gegeben werden, die die reelle Deutung im R_4 nicht benützt. Dabei werden wir allerdings über die Klasse der zulässigen Kurven einschränkende Voraussetzungen machen müssen[4]). Es zeigt sich dann[4]), daß das in Frage stehende Integral bis auf den Fak-

*) Vorgetragen an der 14ten Deutschen Physiker- und Mathematikertagung in Baden-Baden, am 13. September 1938.

1) Siehe § 3.

2) Siehe § 1, Formel (7).

3) Siehe § 3.

4) Siehe § 3 und § 4.

tor $1/2\pi$ gleich dem Maß der Menge aller Treffgeraden der Kurve ist, wenn jede Gerade in derjenigen Vielfachheit gezählt wird, in der sie die Kurve trifft.

Wir beschränken uns hier auf die elliptisch-Hermitesche Geometrie[2]), obwohl unser Ergebnis auch im hyperbolischen und parabolischen Falle Gültigkeit hat.

Im § 1 stellen wir einige Ergebnisse der elliptisch-Hermiteschen Geometrie zusammen, die im folgenden benützt werden[5]). Im § 2 werden Maße für Punkt- und Geradenmengen eingeführt, und zwar in analoger Weise wie dies von Herrn W. BLASCHKE für lineare Untermannigfaltigkeiten Euklidischer und Nichteuklidischer Räume geschehen ist[6]). In § 3 wird eine neue Form für das zu einer Kurve gehörige Bogenelement hergeleitet. Diese Form des Bogenelementes wird dann zur Ableitung eines einfachen Ausdrucks für die Differentialinvariante $d\omega_2$ benützt. Schließlich stellen wir noch einen Zusammenhang zwischen $d\omega_2$ und einer in § 2 gewonnenen Differentialinvarianten her. Im § 4 beschäftigen wir uns mit dem Geradenmaß einer Kurve und werden so zu dem oben erwähnten Hauptergebnis dieser Arbeit geführt.

§ 1.

Zusammenstellung einiger Ergebnisse der elliptischen Hermiteschen Geometrie[7]).

Zu Grunde gelegt sei die komplexe projektive Ebene, in der ein Punkt $\mathfrak{x}$ durch das nichtreelle Verhältnis eines Tripels (x_1, x_2, x_3) von komplexen Zahlen bestimmt ist. Zur elliptisch-Hermiteschen Geometrie (wir werden die Abkürzung e. H. Geometrie verwenden) kommen wir, in dem wir eine reelle Punktmenge auszeichnen, die durch Nullsetzen einer definiten Hermiteschen Form entsteht, die in der kanonischen Gestalt vorgegeben sei, also

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 = 0 \tag{1}$$

oder mit einer Abkürzung, die im folgenden immer verwendet

---

[5]) Siehe darüber E. STUDY, Kürzeste Wege im komplexen Gebiet, *Math. Annalen,* 60 (1905), S. 321—377.

[6]) W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 1: *Ermittlung der Dichte für lineare Unterräume im E_n* (Actualités scientifiques et industrielles, Paris, 1935).

[7]) Siehe dazu außer der unter [5]) zitierten Arbeit noch E. CARTAN, *Leçons sur la géometrie projective complexe* (Paris, 1931), insbes. Kapitel 5.

wird,

$$(1') \qquad (\mathfrak{x}\,\bar{\mathfrak{x}}) = 0.$$

Die Kollineationen, die das durch (1) definierte absolute Gebilde in sich überführen, heißen die Bewegungen der e. H. Geometrie. Es sind die sogenannten unitären Transformationen, deren Matrizes $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ dadurch charakterisiert sind, daß

$$(2) \qquad a_{ik}\bar{a}_{lk} = \delta_{il}$$

ist, wo δ_{il} das Kroneckersche Symbol ist.

Im folgenden sollen fast ausschließlich Normalkoordinaten verwendet werden. Sind z_1, z_2, z_3 die Koordinaten eines Punktes, dann sind seine Normalkoordinaten bestimmt durch

$$(3) \qquad x_i = \frac{z_i}{z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Es gilt also für die Normalkoordinaten x_1, x_2, x_3 von $\mathfrak{x}$

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}\,\bar{\mathfrak{x}}) = 1.$$

Die Normalkoordinaten sind bestimmt bis auf einen Zahlenfaktor der Gestalt $e^{i\alpha}$ (α reell!).

Der metrische Grundbegriff der kürzesten Entfernung d zweier Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ wird festgelegt durch

$$(5) \qquad \cos\frac{d}{2} = |(\mathfrak{x}\,\bar{\mathfrak{y}})|.$$

Wir können hier auf die Überlegungen geometrischer Natur, die zu diesem Entfernungsbegriff führen, nicht eingehen, bemerkt sei bloß, daß es sich, gestützt auf das absolute Gebilde (1), um eine Cayleysche Metrik handelt. Zwei Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, die bezüglich (1) konjugiert sind — wir wollen sie auch als elliptisch-Hermitesch orthogonal bezeichnen und die Abkürzung e. H. orthogonal verwenden —, haben einen Abstand π voneinander, denn für sie gilt ja

$$(6) \qquad |(\mathfrak{x}\,\bar{\mathfrak{y}})| = 0.$$

Aus (5) folgt für das Linienelement der Ausdruck

$$(7) \qquad ds^2 = 4\left((d\mathfrak{x}\,.\,d\bar{\mathfrak{x}}) - (\mathfrak{x}\,d\bar{\mathfrak{x}})(\bar{\mathfrak{x}}\,d\mathfrak{x})\right).$$

Die Verhältniskoordinaten $\mathfrak{u}(u_1, u_2, u_3)$ einer Geraden, die durch einen Punkt $\mathfrak{x}(x_1, x_2, x_3)$ hindurchgeht, sind die Koeffizienten einer Linearform in x_1, x_2, x_3; wir denken sie ebenfalls normiert, so daß

$$(8)\qquad (\mathfrak{u}\,\overline{\mathfrak{u}}) = 1$$

gilt. Wie in der gewöhnlichen elliptischen Geometrie, herrscht auch hier volle Dualität. Der Winkel φ zweier Geraden $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ wird also bestimmt durch

$$(9)\qquad \cos\frac{\varphi}{2} = |(\mathfrak{u}\,\overline{\mathfrak{v}})|$$

und ist gleich dem Abstand der Pole (bezüglich (1)) von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$.

Wir machen noch auf einen Unterschied gegenüber der gewöhnlichen elliptischen Geometrie aufmerksam, der aus der Festsetzung (5) der Metrik hervorgeht. Wegen (6) schließen zwei konjugierte Geraden einen Winkel von der Größe π ein. Der gestreckte Winkel (es ist derjenige Winkel, der von einem Strahl überstrichen wird, der sich so lang dreht, bis er das erste Mal mit seiner Trägergerade zusammenfällt) hat also als Maßzahl 2π.

Wir wollen noch eine Abbildung der Geraden unsrer Geometrie auf die Einheitskugel besprechen, dieselbe wird für unsere Zwecke besonders wichtig sein[8]).

Die Punkte der komplexen projektiven Geraden sind durch die Verhältniskoordinaten $x \equiv (x_1, x_2)$ bestimmt ($x_1 : x_2$ komplexe Zahl!), die wir als Normalkoordinaten voraussetzen. Für sie gilt also die zu (4) entsprechende Relation

$$(4')\qquad (x\bar{x}) \equiv x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 = 1.$$

Wir betrachten einen vierdimensionalen euklidischen Raum E_4, dessen rechtwinkelige cartesische Koordinaten bestimmt sind durch

$$(10)\qquad \begin{cases} X_1 = \sqrt{2}\, x_1\bar{x}_1\,, & X_2 = \sqrt{2}\, x_2\bar{x}_2\,, \\ X_3 = x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1\,, & X_4 = \dfrac{1}{i}(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1). \end{cases}$$

Die Punkte unsrer Geraden werden auf die Oberfläche der (dreidimensionalen) Einheitskugel abgebildet. Dies sieht man so ein. Aus (10) folgt

$$(11)\qquad X_3^2 + X_4^2 = 2\,X_1 X_2.$$

[8]) Vgl. dazu § 10 und § 11 der unter [5]) zitierten Abhandlung, ferner in dem unter [7]) zitierten Buch das Kapitel 5, insbes. Nr. 273. Die Abbildung, die hier verwendet wird, findet sich außerdem in der Abhandlung: W. Wirtinger, Eine Determinantenidentität und ihre Anwendung auf analytische Gebilde in euklidischer und Hermitescher Maßbestimmung, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 44 (1936), S. 343—365.

Außerdem gilt wegen (4′)

$$X_1 + X_2 = \sqrt{2}; \tag{12}$$

(11) und (12) zusammen ergeben

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 2. \tag{13}$$

Die Punkte unsrer komplexen projektiven Geraden liegen also wegen (12) auf einer Hyperebene und wegen (13) auch auf der Oberfläche einer Hyperkugel, gehören also dem Schnitt beider an, der, wie behauptet, die Oberfläche der gewöhnlichen Einheitskugel ist.

Machen wir die komplexe projektive Gerade zu einer elliptisch-Hermiteschen, indem wir (jetzt für den Fall $n = 2$) die durch (5) erklärte Metrik einführen. Eine einfache Rechnung zeigt dann, daß durch die Abbildung (10) die Metrik auf der Geraden in die Metrik der Kugeloberfläche übergeht[9]). Sind also (x_1, x_2) und (y_1, y_2) zwei Punkte unsrer Geraden, die den Abstand d haben, und (X_1, X_2, X_3, X_4), (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) ihre Bildpunkte auf der Einheitskugel, so gilt für die sphärische Distanz φ derselben

$$\varphi = d. \tag{14}$$

Wir wollen noch den Ausdruck finden, in den das Flächenelement der Einheitskugel durch (10) übergeht. Sind $\mathfrak{E}_1(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14})$ und $\mathfrak{E}_2(E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{24})$ zwei orthogonale Einheitsvektoren auf der Kugel und $\mathfrak{X}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ der Ortsvektor eines Punktes derselben, dann ist das Flächenelement $d\Omega$ durch die Differentialform

$$d\Omega = (\mathfrak{E}_1\, d\mathfrak{X})(\mathfrak{E}_2\, d\mathfrak{X}) \tag{15}$$

bestimmt. Die beiden Pfaffschen Formen, die auf der rechten Seite von (15) auftreten, sind alternierend zu multiplizieren. Daß (15) wirklich das Flächenelement liefert, geht daraus hervor, daß dieser Ausdruck gleich dem skalaren Produkt der beiden Bivektoren ist, die beziehungsweise die Komponenten

$$\begin{matrix} (E_{11}E_{22} - E_{21}E_{12}), & (E_{11}E_{23} - E_{21}E_{13}), & (E_{11}E_{24} - E_{21}E_{14}), \\ (E_{12}E_{23} - E_{22}E_{13}), & (E_{12}E_{24} - E_{22}E_{14}), & (E_{13}E_{24} - E_{23}E_{14}) \end{matrix} \tag{16}$$

und

$$dX_1 dX_2,\ dX_1 dX_3,\ dX_1 dX_4,\ dX_2 dX_3,\ dX_2 dX_4,\ dX_3 dX_4$$

---

[9]) Siehe dazu die unter [8]) zitierte Abhandlung Wirtingers, insbes. Nr. 4.

haben[10]). Ergänzen wir noch $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ durch die Vektoren $\left(\frac{X_1}{\sqrt{2}}, \frac{X_2}{\sqrt{2}}, \frac{X_3}{\sqrt{2}}, \frac{X_4}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(\frac{X_1}{\sqrt{2}}-1, \frac{X_2}{\sqrt{2}}-1, \frac{X_3}{\sqrt{2}}, \frac{X_4}{\sqrt{2}}\right)$ zu einem normierten orthogonalen 4-Bein. Aus der Orthogonalität der Matrix

$$\left|\begin{matrix} \frac{X_1}{\sqrt{2}} & \frac{X_2}{\sqrt{2}} & \frac{X_3}{\sqrt{2}} & \frac{X_4}{\sqrt{2}} \\ \frac{X_1}{\sqrt{2}}-1 & \frac{X_2}{\sqrt{2}}-1 & \frac{X_3}{\sqrt{2}} & \frac{X_4}{\sqrt{2}} \\ E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} \end{matrix}\right| \tag{17}$$

folgt

$$\begin{aligned} E_{11}E_{22}-E_{21}E_{12} &= 0 \\ E_{11}E_{23}-E_{21}E_{13} &= -\frac{X_4}{\sqrt{2}} \\ E_{11}E_{24}-E_{21}E_{14} &= \frac{X_3}{\sqrt{2}} \\ E_{13}E_{24}-E_{23}E_{14} &= \frac{X_2-X_1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Da $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ zur Hyperebene (12) orthogonal sind, gilt weiters

$$E_{11} = -E_{12} \quad \text{und} \quad E_{21} = -E_{22}. \tag{19}$$

Wegen der Relationen (12) und (13) gilt ferner

$$dX_1 = -dX_2 \quad \text{und} \quad dX_1 = \frac{X_3dX_3+X_4dX_4}{X_2-X_1}. \tag{20}$$

Aus (10), (18), (19), (20) folgt für das durch (15) festgelegte $d\Omega$

$$d\Omega = 2(dx_1 d\bar{x}_1 + dx_2 d\bar{x}_2). \tag{21}$$

Die Bedeutung der auf der rechten Seite von (21) stehenden Differentialform wird sich im folgenden § 2 herausstellen.

§ 2.

Maße und Dichten in der ebenen elliptisch-Hermiteschen Geometrie.

Punkt und Gerade hängen in unsrer elliptisch-Hermiteschen Ebene von vier reellen Parametern ab, die also ihre Koordinaten sind. Nehmen diese vier Parameter sämtliche Werte aus einem

[10]) Vgl. dazu etwa E. Cartan, *Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann* (Paris, 1928), S. 5—10.

gewissen Bereich B des vierdimensionalen Zahlenraumes an, so erhalten wir eine gewisse Punkt- bezw. Geradenmenge. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, für eine solche Menge von Punkten bezw. Geraden ein *Maß* zu finden. Darunter ist folgendes gemeint: es soll, wenn u_1, u_2, u_3, u_4 die Parameter sind, von denen unsere Punkte (Geraden) abhängen und die im Zahlenraum in einem Bereich B variieren, ein vierfaches Integral

$$\int_B f(u_1, u_2, u_3, u_4)\, du_1\, du_2\, du_3\, du_4 \tag{22}$$

gefunden werden, das bei beliebiger Wahl von B folgende Eigenschaften besitzt.

1. $f(u_1, u_2, u_3, u_4) > 0$.
2. Parameterinvarianz: das Integral bleibt ungeändert bei Ersetzung der u_i durch beliebige v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.
3. Invarianz gegenüber den elliptisch-Hermiteschen Bewegungen.

Als Dichte ist die vierfache Differentialform

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4)\, du_1\, du_2\, du_3\, du_4 \tag{23}$$

zu verstehen. Sie besitzt dieselben Invarianzeigenschaften wie (22).

Da die Bewegungen unsrer Geometrie die Punkte (Geraden) transitiv vertauschen, ist das Maß (22) und entsprechend die Dichte (23) bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Beginnen wir mit der Ermittlung der Punktdichte. Zu dem Punkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ wählen wir in seiner Polaren (in bezug auf (1)) zwei weitere e. H. orthogonale Punkte $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$, die so wie $\mathfrak{x}$ Funktionen der $u_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sind. Für dieselben gilt

$$(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{b}}_i) = (\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{b}_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{24}$$

Wir bilden nun, aus den Pfaffschen Formen $(d\mathfrak{x}\,.\,\bar{\mathfrak{b}}_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ und den zu ihnen konjugierten, durch alternierende Multiplikation die vierfache Differentialform

$$dP = 4\,(d\bar{\mathfrak{x}}\,.\,\mathfrak{b}_1)\,(d\mathfrak{x}\,.\,\bar{\mathfrak{b}}_1)\,(d\bar{\mathfrak{x}}\,.\,\mathfrak{b}_2)\,(d\mathfrak{x}\,.\,\bar{\mathfrak{b}}_2). \tag{25}$$

Der auf der rechten Seite von (25) stehende Ausdruck hat einen negativen Wert, wir wollen aber festsetzen, ihn, immer dem Absolutbetrag nach, zu nehmen, ohne dies durch eine besondere Bezeichnung anzudeuten.

Wir behaupten nun, daß (25) die gesuchte Punktdichte ist. Um dies einzusehen, haben wir erstens zu zeigen, daß unser

Ausdruck die Eigenschaften 1—3 besitzt und weiters, daß er *a)* unabhängig ist von dem willkürlichen Faktor $e^{i\varrho}$, mit dem wir sämtliche Koordinaten eines Punktes multiplizieren dürfen, *b)* unabhängig ist von der Wahl der zueinander e. H. orthogonalen Punkte $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$.

Die Eigenschaft 1 ist zufolge unserer Voraussetzungen über (25) trivialerweise erfüllt. 2 folgt daraus, daß wir es mit dem alternierenden Produkt Pfaffscher Formen zu tun haben. Eine elementare Rechnung zeigt, daß ein Skalarprodukt der Form $(\mathfrak{p}\overline{\mathfrak{q}})$ invariant ist gegenüber elliptisch-Hermiteschen Bewegungen; daraus folgt aber, daß (25) die Eigenschaft 3 erfüllt. Aus der Gleichung

$$(26)\quad (\overline{d(\mathfrak{x}e^{i\alpha})}(\mathfrak{b}_k e^{i\beta}))\,(d(\mathfrak{x}e^{i\alpha})\,(\overline{\mathfrak{b}_k e^{i\beta}})) = (\overline{d\mathfrak{x}}.\mathfrak{b}_k)\,(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}_k) \qquad (k=1,2)$$

folgt das Erfülltsein von *a)*, es bleibt noch *b)* nachzuweisen. Mit $\mathfrak{b}_1^*$ und $\mathfrak{b}_2^*$ seien zwei beliebige e. H. orthogonale Punkte auf der Polaren von $\mathfrak{x}$ bezeichnet. Sie gehen durch eine unitäre orthogonale Transformation aus $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ hervor. Dieselbe sei

$$(27)\quad \begin{aligned}\mathfrak{b}_1^* &= a_{11}\mathfrak{b}_1 + a_{12}\mathfrak{b}_2\\ \mathfrak{b}_2^* &= a_{21}\mathfrak{b}_1 + a_{22}\mathfrak{b}_2.\end{aligned}$$

Aus

$$(28)\quad (d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}_i^*) = (d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}_i)\,\overline{a_{i1}} + (d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}_i)\,\overline{a_{i2}} \qquad (i=1,2)$$

folgt wegen (2)

$$(29)\quad 4(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}_1^*)\,(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}_1^*)\,(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}_2^*)\,(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}_2^*) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}}\\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}}\end{vmatrix} dP = dP,$$

womit *b)* nachgewiesen ist.

Wegen der Dualität von Punkt und Gerade ist (25) zugleich die Geradendichte der Polaren von $\mathfrak{x}$. Ist also G eine beliebige Gerade, die durch die beiden e. H. orthogonalen Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ aufgespannt wird und ist $\mathfrak{b}$ der Pol von G, dann ist hiernach die Geradendichte

$$(30)\quad dG = 4(d\mathfrak{a}_1\overline{\mathfrak{b}})\,(\overline{d\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b})\,(d\mathfrak{a}_2\overline{\mathfrak{b}})\,(\overline{d\mathfrak{a}_2}\mathfrak{b}).$$

Außer der Punkt- und Geradendichte betrachten wir noch relative Dichten, nämlich die Dichte eines Punktes auf einer Geraden, und die zu ihr duale Dichte einer Gerade um einen Punkt.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gerade in unsrer Ebene, $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punkt derselben und $\mathfrak{b}$ der zu ihm e. H. orthogonale Punkt. Sind $\mathfrak{g}_1$

und $\mathfrak{g}_2$ die beiden Grundpunkte auf $\mathfrak{G}$, dann ist, wenn ξ_1 und ξ_2 die Koordinaten von $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{G}$ und β_1, β_2 die entsprechenden von $\mathfrak{b}$ sind,

$$
(31) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{x} &= \xi_1 \mathfrak{g}_1 + \xi_2 \mathfrak{g}_2 \\ \mathfrak{b} &= \beta_1 \mathfrak{g}_1 + \beta_2 \mathfrak{g}_2 . \end{aligned}
$$

Wir bilden aus den Pfaffschen Formen $(d\overline{\mathfrak{x}}.\mathfrak{b}) = (d\overline{\xi}.\beta)$ und $(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}) = (d\xi.\overline{\beta})$ durch alternierende Multiplikation die zweifache Differentialform

$$
(32) \qquad dP(G) = 2\,(d\overline{\mathfrak{x}}.\mathfrak{b})\,(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}) = 2\,(d\overline{\xi}.\beta)\,(d\xi.\overline{\beta}),
$$

die ebenfalls dem Absolutbetrage nach genommen werden soll. Der Ausdruck (32) besitzt offensichtlich die Invarianzeigenschaften 1—3 und ist daher die gesuchte Dichte eines Punktes auf einer Geraden; (32) ist zugleich (wie aus der Dualität folgt) die Dichte der Polare von $\mathfrak{x}$ um den Pol von $\mathfrak{G}$.

Wir formen (32) noch auf eine Gestalt um, die später benützt wird. Aus $(\xi\overline{\beta}) = 0$ folgt

$$
(33) \qquad \overline{\beta}_1 = -\xi_2, \quad \overline{\beta}_2 = \xi_1
$$

und daher für $dP(G)$

$$
(34) \qquad \frac{1}{2}\,dP(G) = d\overline{\xi}_1\, d\xi_1\, \xi_2 \overline{\xi}_2 - d\overline{\xi}_2\, d\xi_1\, \overline{\xi}_1 \xi_2 - d\overline{\xi}_1\, d\xi_2\, \overline{\xi}_2 \xi_1 + d\overline{\xi}_2\, d\xi_2\, \xi_1 \overline{\xi}_1 .
$$

Beachtet man die durch totale Ableitung aus $(\xi\overline{\xi}) = 1$ folgende Relation

$$
(35) \qquad \overline{\xi}_1\, d\xi_1 + \overline{\xi}_2\, d\xi_2 + \xi_1\, d\overline{\xi}_1 + \xi_2\, d\overline{\xi}_2 = 0,
$$

so erhält man schließlich

$$
(36) \qquad dP(G) = 2\,(d\xi_1\, d\overline{\xi}_1 + d\xi_2\, d\overline{\xi}_2).
$$

Mit Rücksicht auf (21) ist also die relative Punktdichte gleich dem Flächenelement der Einheitskugel, auf die man $\mathfrak{G}$ vermöge (10) abbilden kann:

$$
(37) \qquad dP(G) = d\Omega .
$$

B e m e r k u n g. Zufolge der oben bemerkten Eindeutigkeit der Dichten, muß die Punktdichte (22), abgesehen von einem konstanten Faktor, mit dem schon von STUDY betrachteten (vierdimensionalen) Flächenelement der elliptisch-Hermiteschen Ebene übereinstimmen[11]). Eine einfache Rechnung, die hier unterdrückt werden soll, zeigt, daß dieser Faktor gleich Eins ist.

Schließlich sei noch erwähnt, daß eine Umformung von (22) den Ausdruck

$$(38)\qquad dP = 4\,(dx_2\,d\bar{x}_2\,dx_3\,d\bar{x}_3 + dx_1\,d\bar{x}_1\,dx_3\,d\bar{x}_3 + dx_1\,d\bar{x}_1\,dx_2\,d\bar{x}_2)\ ^{12)}$$

liefert. Da derselbe im folgenden nicht benützt wird, wollen wir die entsprechende Rechnung nicht wiedergeben.

§ 3.

Das Bogenelement und die Differentialinvariante $d\omega_2$, die zu einer analytischen Kurve in der elliptisch-Hermiteschen Ebene gehören.

In der elliptisch-Hermiteschen Ebene ist eine analytische Kurve

$$(39)\qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u_1, u_2)$$

dadurch gekennzeichnet, daß die Koordinaten x_i $(i = 1, 2, 3)$ stetig differenzierbare Funktionen der beiden reellen Parameter u_1, u_2 sind, für die die Matrix

$$(39\text{a})\qquad \left(\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{array}\right)$$

vom Range zwei ist. Wir greifen auf der Kurve $\mathfrak{C}$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ heraus und bestimmen in demselben die Tangente, die wegen der Analytizität in jedem Punkt existiert. Dazu verbinden wir $\mathfrak{x}$ mit seinem benachbarten Punkte, den wir erhalten, wenn wir zu $\mathfrak{x}$ die Zuwächse $d\mathfrak{x}$ hinzufügen. Auf der Tangente wählen wir den zu $\mathfrak{x}$ e. H. orthogonalen Punkt $\mathfrak{c}$. Zwischen $\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{c}$ besteht eine lineare Relation und es gilt daher

$$(40)\qquad d\mathfrak{x} = k_1\mathfrak{c} + k_2\mathfrak{x}.$$

---

[11]) Siehe den § 5 der unten [5]) zitierten Abhandlung Studys, wo der in Frage stehende Differentialausdruck mit $d\omega_4$ bezeichnet ist.

[12]) In Nr. 214 des unter [7]) zitierten Buches findet sich die Differentialform (38), mit demjenigen Normierungsunterschied, daß dort der Faktor 4 fehlt. Wir haben uns hier der Normierung Studys angeschlossen.

Aus (40) folgt wegen der e. H. Orthogonalität von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{c}$

(41) $$(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}})=k_1,\ (d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{x}})=k_2.$$

(40) und (41) ergeben

(42) $$\mathfrak{c}=\frac{1}{(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}})}d\mathfrak{x}-\frac{(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{x}})}{(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}})}\mathfrak{x},$$

woraus

(43) $$(d\bar{\mathfrak{x}}.\mathfrak{c})=\frac{(d\bar{\mathfrak{x}}.d\mathfrak{x})-(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{x}})(d\bar{\mathfrak{x}}.\mathfrak{x})}{(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}})}.$$

Ein Vergleich von (43) mit (7) ergibt den gesuchten Ausdruck für das Bogenelement ds, das zu unsrer Kurve $\mathfrak{C}$ gehört, nämlich

(44) $$\boxed{\frac{ds^2}{4}=(d\bar{\mathfrak{x}}.\mathfrak{c})(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}}).}$$

Es soll noch besonders darauf hingewiesen werden, daß auf der rechten Seite von (44) das gewöhnliche Produkt der beiden zu einander konjugierten Pfaffschen Formen steht.

Wir wollen nun den Zusammenhang herstellen, der zwischen (44) und demjenigen Ausdruck besteht, den man erhält, wenn das alternierende Produkt $[(d\bar{\mathfrak{x}}.\mathfrak{c})(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}})]$ gebildet und wie bisher der Absolutbetrag genommen wird.

Wir setzen

(45) $$(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}})=d\omega=a_1du_1+a_2du_2$$

und bilden das alternierende Produkt von $d\omega$ mit seiner konjugierten Form:

(46) $$[d\omega\, d\overline{\omega}]=|a_1\bar{a}_2-a_2\bar{a}_1|\,du_1\,du_2.$$

Die mit dem Faktor 4 multiplizierte quadratische Form (44) ist

(47) $$4\,d\omega\,.\,d\overline{\omega}=4\,(a_1\bar{a}_1du_1^2+(a_1\bar{a}_2+a_2\bar{a}_1)\,du_1du_2+a_2\bar{a}_2du_2^2)$$

und ihre Diskriminante g hat daher die Gestalt

(48) $$g=-4\,(a_1\bar{a}_2-a_2\bar{a}_1)^2.$$

Da auf der rechten Seite von (48) eine rein imaginäre Zahl zum Quadrat erhoben wird, ist $g>0$. Ein Vergleich von (46) und (48) zeigt, daß

(49) $$2[d\omega\,d\overline{\omega}]=\sqrt{g}\,du_1\,du_2=d\omega_1=2[(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}})(d\bar{\mathfrak{x}}.\mathfrak{x})].$$

Die Relation (49) soll nun geometrisch gedeutet werden. Die elliptisch-Hermitesche Ebene, mit dem durch die quadratische

Form (7) erklärten Bogenelement, ist, reell gedeutet, ein vierdimensionaler Riemannscher Raum, die Kurve $\mathfrak{C}$ ist in demselben eine zweidimensionale Fläche; (49) besagt nun, daß $d\omega_2$ das Flächenelement dieser Fläche ist. Im Falle, daß unsere Kurve $\mathfrak{C}$ eine Strecke ist, wird wegen (32) und (44)

$$d\omega_2 = dP(G). \tag{50}$$

Wegen (36) ist mit (50) gleichbedeutend

$$\sqrt{g}\, du_1 du_2 = 2\,|d\xi_1 d\bar{\xi}_1 + d\xi_2 d\bar{\xi}_2|. \tag{51}$$

(51) ist in einem allgemeinern Satz von W. WIRTINGER enthalten[18]). [Es wird dort gezeigt, daß eine Relation der Art (8) immer dann besteht, wenn die im vierdimensionalen Raum betrachtete Fläche synektisch ist (in der zitierten Abhandlung wird für synektische Mannigfaltigkeiten die Bezeichnung *Gebilde* verwendet), ist hingegen die Fläche nicht synektisch, so ist die linke Seite von (51) immer größer als die rechte.]

§ 4.

Das Gerademaß einer Kurve.

Zu Grunde gelegt sei wieder die schon im vorangehenden § 3 betrachtete Kurve $\mathfrak{C}$. Über dieselbe machen wir jetzt noch folgende einschränkende Voraussetzung. Es möge die Kurve $\mathfrak{C}$ mit einer beliebigen Geraden nur eine endliche Anzahl von Schnittpunkten haben. Diese Voraussetzung wird im folgenden wesentlich sein.

Wir wollen nun die Anzahl aller Treffgeraden von $\mathfrak{C}$ bestimmen, jede aber in der Vielfachheit genommen, in der sie $\mathfrak{C}$ trifft. Analytisch bedeutet dies die Berechnung des Integrals

$$\int\limits_{\mathfrak{G}} k\, dG, \tag{52}$$

wobei dG die Bedeutung von (30) hat und das Integral über alle Treffgeraden von $\mathfrak{C}$ zu erstrecken ist und k die jeweilige Anzahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{C}$ ist. Bevor wir dieses Integral berecnnen, nehmen wir eine zweckmäßige Umformung von dG vor.

18) Vgl. in der unter 8) zitierten Abhandlung Wirtingers, insbes. S. 353, Formel (48),

Wir betrachten eine beliebige Treffgerade $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{a}_1$ sei einer der Schnittpunkte mit $\mathfrak{C}$. Auf $\mathfrak{G}$ wählen wir weiters den zu $\mathfrak{a}_1$ e. H. orthogonalen Punkt $\mathfrak{a}_2$ und bezeichnen den Pol von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{b}$. Es gilt also

$$(\mathfrak{a}_1\bar{\mathfrak{a}}_2)=(\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}_1)=(\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}_2)=0. \tag{53}$$

Auf der Tangente $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{a}_1$ wählen wir ferner den zu $\mathfrak{a}_1$ e. H. orthogonalen Punkt $\mathfrak{c}$. Aus (40) und (41), die hier mit $\mathfrak{a}_1$ an Stelle von $\mathfrak{x}$ gelten, folgt

$$(d\bar{\mathfrak{a}}_1 . \mathfrak{b})=(d\bar{\mathfrak{a}} . \mathfrak{c})(\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{c}}). \tag{54}$$

Wegen (50) ist daher

$$dG=d\omega_2 . 2(\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{c}})(\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{c})(d\bar{\mathfrak{a}}_2 . \mathfrak{b})(d\mathfrak{a}_2 . \bar{\mathfrak{b}}) \tag{55}$$

Ist $\mathfrak{d}$ der Pol der Tangente $\mathfrak{T}$, dann gilt für den Winkel φ zwischen Tangente $\mathfrak{T}$ und Gerade $\mathfrak{G}$, wegen (9)

$$|(\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{b}})|=\cos\frac{\varphi}{2}. \tag{56}$$

Da wir Normalkoordinaten verwenden, gilt auch für $\mathfrak{b}$ die Relation (4), aus der wir unter Beachtung der Beziehung

$$\mathfrak{b}=p_1\mathfrak{c}+p_2\mathfrak{d} \tag{27}$$

(die daraus folgt, daß $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf einer Geraden liegen), sofort schließen

$$|(\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{d}})|^2=(\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{d}})(\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{d})=1-(\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{c}})(\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{c}). \tag{58}$$

(56) und (58) zusammen ergeben

$$(\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{c}})(\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{c})=\sin^2\frac{\varphi}{2}. \tag{59}$$

Wir finden demnach für (55) schließlich

$$dG=2\,d\omega_2\sin^2\frac{\varphi}{2}(d\bar{\mathfrak{a}}_2 . \mathfrak{b})(d\mathfrak{a}_2 . \bar{\mathfrak{b}}). \tag{60}$$

Bei der Berechnung des Integrals (52) gehen wir nun so vor: zunächst halten wir den Schnittpunkt $\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{C}$ fest und drehen $\mathfrak{G}$ so lange, bis es mit seiner Ausgangslage zusammenfällt. Als Ausgangslage dürfen wir diejenige wählen, in der $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{G}$ zusammenfällt. (Wir integrieren also zunächst nur nach $2\sin^2\frac{\varphi}{2}(d\bar{\mathfrak{a}}_2 . \mathfrak{b})(d\mathfrak{a}_2 . \bar{\mathfrak{b}})$). Da bei dieser Drehung φ schließlich zu einem gestreckten Winkel wird, so variiert φ nach einer Bemerkung, die wir im ersten Paragraphen im Anschluß an Formeln (5) und (9) gemacht haben, von 0 bis 2π. $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}$ werden bei dieser Drehung die ganze Polare von $\mathfrak{a}_1$ durchlaufen. Dieselbe kann zufolge (10) auf die Einheitskugel abgebildet werden, wobei $2(d\bar{\mathfrak{a}}_2.\mathfrak{b})(d\mathfrak{a}.\bar{\mathfrak{b}})$ wegen (37) das Flächenelement derselben ist, das also bei der obigen Bewegung die Gesamtoberfläche derselben überstreicht. Der feste Punkt $\mathfrak{b}$ (Pol von $\mathfrak{T}$) bildet sich auf einem Punkt der Kugel ab und der Winkel φ ist dann der Abstand dieses Punktes von der jeweiligen Lage des Flächenelementes[14]. Wir können wegen der Rotationssymetrie der Kugel diesen festen Punkt in den Nordpol derselben verlegen. Bezeichnen wir das Flächenelement der Einheitskugel mit $d\Omega$, dann ist

$$(61)\qquad 2\int \sin^2\frac{\varphi}{2}\,(d\bar{\mathfrak{a}}_2.\mathfrak{b})(d\mathfrak{a}_2.\bar{\mathfrak{b}}) = \int \sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\Omega.$$

Zur Berechnung von (61) führen wir Polarkoordinaten ein; in denselben ist

$$(62)\qquad d\Omega = |\sin\varphi|\,d\varphi\,d\vartheta,$$

wenn φ der Polabstand und ϑ die geographische Breite bedeuten. Man hat demnach

$$(63)\qquad 2\int \sin^2\frac{\varphi}{2}\,(d\bar{\mathfrak{a}}_2.\mathfrak{b})(d\mathfrak{a}_2.\bar{\mathfrak{b}}) = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^2\frac{\varphi}{2}|\sin\varphi|\,d\varphi\,d\vartheta = 2\pi.$$

Läßt man nun den Punkt $\mathfrak{a}_1$ die Kurve $\mathfrak{C}$ durchlaufen, so hat man, wenn noch

$$(64)\qquad \int_{\mathfrak{C}} d\omega_2 = L$$

gesetzt wird,

$$(65)\qquad \boxed{\int_{\mathfrak{C}} k\,dG = 2\pi L.}$$

Wir wollen noch denjenigen Spezialfall betrachten, in dem $\mathfrak{C}$ eine Strecke ist. Die Trägergerade dieser Strecke hat vermöge (10) die Einheitskugel als Bild und nach (21) und (51) ist L ein Stück der Oberfläche derselben. Lassen wir die Strecke in die

[14]) Vgl. dazu denjenigen Teil von § 1, der über die Abbildung der Gerade auf die Einheitskugel handelt.

ganze Gerade (von endlicher Länge) übergehen, so gibt uns (64) das Gesamtmaß der elliptisch-Hermiteschen Ebene, an Geraden. Wegen der Dualität ist dasselbe auch gleich dem gesamten (Punkt-) Inhalt der elliptisch-Hermiteschen Ebene. In der Tat ist ja

$$L = 4\pi \tag{66}$$

als Oberfläche der Einheitskugel und demnach

$$\int dP = \int dG = 8\pi^2 \tag{67}$$

wie bereits von STUDY gefunden.

(Eingegangen am 27. Oktober 1938.)

Über zyklische orthogonale Substitutionen.

Von GUSTAV RADOS in Budapest.

Zyklisch wird eine Substitution genannt, wenn dieselbe nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen zur identischen Substitution führt. Es sei

$$(C) \qquad y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eine reelle orthogonale Substitution, so kann man fragen: welche arithmetische Eigenschaften ihrer Koeffizienten ihre zyklische Beschaffenheit gewährleisten? Mit dieser Frage beschäftigen sich die nachfolgenden Ausführungen. Einige Anhaltspunkte ergeben sich bei einer Umschau im zweidimensionalen Gebiet. Es erübrigt sich hierbei mit solchen binären Substitutionen zu beschäftigen, deren Determinante gleich -1 ist. Eine solche kann stets auf die Form

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha - y' \cos\alpha \end{aligned}$$

gebracht werden und man überzeugt sich leicht, daß eine einmalige Wiederholung derselben zur identischen Substitution führt.

Es sei nun O eine binäre orthogonale Substitution, deren Determinate gleich $+1$ ist, alsdann kann diese folgendermaßen angesetzt werden:

$$(O) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \sin\alpha \\ y &= -x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}$$

Die k-malige Wiederholung dieser Substitution ist

$$(O^k) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos k\alpha + y' \sin k\alpha \\ y &= -x' \sin k\alpha + y' \cos k\alpha. \end{aligned}$$

Soll nun

$$O^k = E$$

sein, wo E die identische Substitution bedeutet, so müssen die Kongruenzen

$$\alpha \equiv \frac{2e\pi}{k} \pmod{2\pi}$$

$$(e = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

erfüllt sein. Demnach sind

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= \quad x' \cos\frac{2e\pi}{k} + y' \sin\frac{2e\pi}{k} \\ y &= -x' \sin\frac{2e\pi}{k} + y' \cos\frac{2e\pi}{k} \end{aligned}$$

$$(e = 0, 1, \ldots, k-1)$$

die sämtlichen orthogonalen Substitutionen, deren k-te Potenz die identische Substitution ist. Das Teilungsproblem der Funktion $\cos\alpha$ erheischt die Auflösung der Gleichung

$$\left(2\cos\frac{\alpha}{k}\right)^k - k\left(2\cos\frac{\alpha}{k}\right)^{k-2} + \frac{k(k-3)}{1\,.\,2}\left(2\cos\frac{\alpha}{k}\right)^{k-4} + \\ + \frac{k(k-4)(k-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(2\cos\frac{\alpha}{k}\right)^{k-6} + \ldots = 2\cos\alpha,$$[1]

deren Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind. Setzt man hierin $\alpha = 2e\pi$, so ergibt sich eine numerische Gleichung mit den Wurzeln

$$1,\ 2\cos\frac{2\pi}{k},\quad 2\cos\frac{4\pi}{k}, \ldots, 2\cos\frac{2(k-1)\pi}{k},$$

die sämtlich reelle ganze algebraische Zahlen sind. Im nachfolgenden soll eine algebraische Zahl, deren sämtlichen konjugierten Werte reell sind, *total-reell* genannt werden. Man kann daher von der zyklischen orthogonalen Substitution (1) aussagen, daß *ihre Koeffizienten total-reelle Zahlen sind. Ihre charakteristische Gleichung*

$$\begin{vmatrix} \cos\frac{2e\pi}{k} - \lambda & \sin\frac{2e\pi}{k} \\ -\sin\frac{2e\pi}{k} & \cos\frac{2e\pi}{k} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - 2\lambda\cos\frac{2e\pi}{k} + 1 = 0$$

hat ganze algebraische Koeffizienten.

---

[1]) S. H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. 1 (erste Auflage: Braunschweig, 1895), S. 435.

Diese beiden Eigenschaften der Koeffizienten: daß sie total-reell sind und daß ferner die aus ihren gebildeten Koeffizienten der charakteristischen Gleichung ganze algebraische Zahlen sind, sollen fernerhin kurz F-Eigenschaft genannt werden. Es ist somit erwiesen, *daß die F-Eigenschaft eine notwendige Bedingung für das zyklische Verhalten der binären orthogonalen Substitutionen ist.*

Ist sie hiezu auch hinreichend? Diese Frage wird durch das folgende Theorem beantwortet:

I. *Haben die Koeffizienten der n-dimensionalen orthogonalen Substitution*

(2) $$y_i = c_{i1}^{(1)} x_1 + c_{i2}^{(1)} x_2 + \ldots + c_{in}^{(1)} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

die F-Eigenschaft, alsdann ist sie zyklisch.

Es sei $K(\vartheta)$ der Körper, in welchem die sämtlichen Koeffizienten $c_{ik}^{(1)}$ eingebettet sind, wobei ϑ einer irreduziblen algebraischen Gleichung

$$\Phi(\vartheta) \equiv \vartheta^m + g_1 \vartheta^{m-1} + \ldots + g_m = 0$$

genügt. Sind

$$\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m$$

ihre Wurzeln, alsdann sind

(3) $$c_{ik}^{(h)} = r_{ik}(\vartheta_h) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n; \quad h = 1, 2, \ldots, m)$$

die konjugierten Werte der $c_{ik}^{(1)}$, wobei dei r_{ik} rationale Funktionen mit rationalen ganzzahligen numerischen Koeffizienten sind. Infolge unserer Annahme sind sämtliche $c_{ik}^{(h)}$ reell-algebraische Zahlen, da ja die $c_{ik}^{(1)}$ als total-reell vorausgesetzt wurden. Man kann nun zeigen, daß die sämtlichen Substitutionen

($2^{(h)}$) $$y_i = c_{i1}^{(h)} x_1 + c_{i2}^{(h)} x_2 \ldots + c_{in}^{(h)} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \; h = 1, 2, \ldots, m)$$

orthogonal sind. Da die Substitution (2) orthogonal ist, bestehen die $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen

$$c_{i1}^{(1)} c_{k1}^{(1)} + c_{i2}^{(1)} c_{k2}^{(1)} + \ldots + c_{in}^{(1)} c_{kn}^{(1)} = \delta_{ik}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n; \; \delta_{ik} = 1 \text{ für } i = k, \; \delta_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k)$$

oder, mit Rücksicht auf (3),

$$r_{i1}(\vartheta_1) r_{k1}(\vartheta_1) + r_{i2}(\vartheta_1) r_{k2}(\vartheta_1) + \ldots + r_{in}(\vartheta_1) r_{kn}(\vartheta_1) = \delta_{ik}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und, da $\Phi(\vartheta)$ irreduzibel ist, auch die Gleichungen

$$r_{i1}(\vartheta_h)r_{k1}(\vartheta_h)+r_{i2}(\vartheta_h)r_{k2}(\vartheta_h)+\ldots+r_{in}(\vartheta_h)r_{kn}(\vartheta_h)=\delta_{ik},$$
$$(i,k=1,2,\ldots,n;\ h=1,2,\ldots,m)$$

die mit den, den orthogonalen Charakter der Substitution $(2^{(h)})$ bezeugenden Gleichungen

$$c_{i1}^{(h)}c_{k1}^{(h)}+c_{i2}^{(h)}c_{k2}^{(h)}+\ldots+c_{in}^{(h)}c_{kn}^{(h)}=\delta_{ik}$$
$$(i,k=1,2,\ldots,n)$$

identisch sind.

Francesco Brioschi hat den Satz aufgestellt[2]) und Frobenius ihn bewiesen[3]), daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer reellen orthogonalen Substitution den absoluten Wert 1 haben und daß ferner alle ihre Elementarteiler einfach sind.

Die charakteristische Gleichung von $(2^{(h)})$ ist

$$\Psi_h(\lambda)\equiv|c_{ik}^{(h)}-\delta_{ik}\lambda|=0$$
$$(i,k=1,2,\ldots,n).$$

Bildet man die Gleichung

$$\text{Norm } \Psi_1(\lambda)=\Psi_1(\lambda)\,\Psi_2(\lambda)\ldots\Psi_m(\lambda)=0,$$

so ist in dieser der Koeffizient von λ^{nm} gleich 1, alle anderen Koeffizienten sind ganze rationale Zahlen, ihre Wurzeln haben alle den absoluten Wert 1. Im Sinne des bekannten Satzes von Kronecker[4]) sind daher ihre sämtlichen Wurzeln Einheitswurzeln; daher sind auch die Wurzeln von $\Psi_1(\lambda)=0$ Einheitswurzeln und da auch alle ihrer Elementarteiler einfach sind, ist erwiesen, daß die orthogonale Substitution (2) zyklisch ist, da nach einem von Frobenius zuerst bewiesenen Satz[5]) ist für die zyklische Beschaffenheit einer linearen Substitution notwendig und hinreichend, daß die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung Einheitswurzeln, und ihre sämtlichen Elementarteiler einfache seien.

Für binäre orthogonale Substitutionen ist demnach die *F*-Eigenschaft der Koeffizienten notwendig und hinreichend für ihre

---

[2]) F. Bioschi, Note sur un théorème relatif aux déterminants gauches, *Journal de math. pures et appliquées*, 19 (1854), S. 253—256.

[3]) G. Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, *Journal für die reine und angewandte Math.*, 84 (1878), S. 1—63, insb. S. 52.

[4]) L. Kronecker, Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten, *Journal für die reine und angewandte Math.*, 53 (1857), S. 173—175.

[5]) G. Frobenius, a. a. O., S. 16.

zyklische Beschaffenheit. Auch für n-dimensionale orthogonale Substitutionen hat sie sich als hinreichend erwiesen. Ist sie hiezu auch notwendig? Eine einfache Überlegung überzeugt uns, daß dies nicht der Fall ist. Es sei C eine zyklische orthogonale Substitution mit reellen algebraischen Koeffizienten, so daß

$$C^k = E \qquad (k \text{ ganz und rational})$$

ist. Ferner sei Q eine beliebige reelle orthogonale Substitution mit transzendenten Koeffizienten. Es ist dann

$$D = Q^{-1} C Q$$

wiederum orthogonal und zyklisch, da

$$D^k = Q^{-1} C^k Q = Q^{-1} E Q = Q^{-1} Q = E$$

ist. Gleichwohl sind ihre Koeffizienten im allgemeinen durch transzendente Zahlen infiziert und besitzen daher die F-Eigenschaft nicht.

Für n-dimensionale orthogonale Substitutionen gilt der folgende Satz:

II. *Für die zyklische Beschaffenheit einer reellen orthogonalen Substitution C ist die Existenz einer reellen orthogonalen Substitution P notwendig und hinreichend, für die die Koeffizienten der Substitution*

$$\bar{C} = P^{-1} C P$$

die F-Eigenschaft besitzen.

Der Beweis stützt sich auf einen Satz, den LUDWIG STICKELBERGER in seiner inhaltreichen Abhandlung: Über reelle orthogonale Substitutionen, *Programm der eidgenössischen polytechnischen Schule für das Schuljahr 1877/78,* S. I—XVI, insb. S. V—VI, hergeleitet hat. Dieser lautet folgendermaßen:

Ist

$$y_i = c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 + \ldots + c_{in} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eine reelle orthogonale Substitution, so kann man eine reelle orthogonale Substitution P von der Beschaffenheit finden, daß $P^{-1} C P = \bar{C}$ zu der folgenden zerlegbaren Substitution führt:

$$(\bar{C})\left\{\begin{array}{lllllll}
y_1 & = x_1\cos\vartheta_1 - x_2\sin\vartheta_1 & & & & & \\
y_2 & = x_1\sin\vartheta_1 + x_2\cos\vartheta_1 & & & & & \\
y_3 & = & x_3\cos\vartheta_2 - x_4\sin\vartheta_2 & & & & \\
y_4 & = & x_3\sin\vartheta_2 + x_4\cos\vartheta_2 & & & & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\
y_{2\lambda-1} & = & & x_{2\lambda-1}\cos\vartheta_\lambda - x_{2\lambda}\sin\vartheta_\lambda & & & \\
y_{2\lambda} & = & & x_{2\lambda-1}\sin\vartheta_\lambda + x_{2\lambda}\cos\vartheta_\lambda & & & \\
y_{2\lambda+1} & = & & & x_{2\lambda+1} & & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \\
y_{2\lambda+\mu} & = & & & & x_{2\lambda+\mu} & \\
y_{2\lambda+\mu+1} & = & & & & & -x_{2\lambda+\mu+1} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
y_n & = & & & & & -x_n.
\end{array}\right.$$

Zunächst soll gezeigt werden, daß die in II aufgestellte Bedingung eine notwendige ist. Wir nehmen an, daß C zyklisch sei, also eine Gleichung

$$C^k = E$$

besteht. Die Substitution

$$\bar{C}^k = (P^{-1}CP)^k = P^{-1}C^kP = P^{-1}EP = P^{-1}P = E$$

kann eingedenk der Zerlegbarkeit von $\bar{C}$ folgendermaßen angesetzt werden:

$$(4)\qquad \begin{array}{ll}
y_1 = x_1\cos k\vartheta_1 - x_2\sin k\vartheta_1 & \\
y_2 = x_1\sin k\vartheta_1 + x_2\cos k\vartheta_1 & \\
y_3 = & x_3\cos k\vartheta_2 - x_4\sin k\vartheta_2 \\
y_4 = & x_3\sin k\vartheta_2 + x_4\sin k\vartheta_2 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}$$

Demnach ist (4) die identische Substitution, daher

$$k\vartheta_1 \equiv k\vartheta_2 \equiv \ldots \equiv k\vartheta_\lambda \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2\pi)$$

und

$$\cos\vartheta_1,\ \cos\vartheta_2, \ldots \cos\vartheta_\lambda,\ \sin\vartheta_1,\ \sin\vartheta_2, \ldots, \sin\vartheta_\lambda,$$

die Koeffizienten von $\bar{C}$, sind total-reelle algebraische Zahlen. Da C als zyklisch vorausgesetzt ist, so sind die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung Einheitswurzeln und daher ihre Koeffizienten als elementare symmetrische Funktionen von ganzen algebraischen Zahlen, selber ganze algebraische Zahlen. Für zyklische C haben also die Koeffizienten von $\bar{C}$ die F-Eigenschaft, diese ist demnach notwendig für das zyklische Verhalten von C.

Daß sie auch hinreichend ist, zeigt die folgende einfache Überlegung. Haben die Koeffizienten von $\bar{C}$ die F-Eigenschaft, so ist diese zufolge des Theorems I zyklisch. Es besteht demnach eine Gleichung

$$\bar{C}^k = E;$$

andererseits ist

$$\bar{C}^k = (P^{-1}CP)^k = P^{-1}C^kP;$$

es ist daher

$$P^{-1}C^kP = E$$

und hieraus folgt

$$C^k = PEP^{-1} = PP^{-1} = E,$$

daß also C zyklisch ist. Hiermit ist die Richtigkeit des Theorems II vollkommen nachgewiesen.

Daß für binäre orthogonale Substitutionen die F-Eigenschaft der Koeffizienten nicht bloß hinreichend sondern auch notwendig für ihre zyklische Beschaffenheit ist, geht daraus hervor, daß binäre orthogonale Substitutionen mit der Determinante gleich 1 stets vertauschbar sind, so daß

$$P^{-1}CP = CP^{-1}P = C$$

wird.

(Eingegangen am 22. April 1938.)

Zur Theorie der Kreiskörper.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

Es sei ω eine primitive m-te Einheitswurzel, welche der primitiven Kreisteilungsgleichung $F_m(x)=0$ genügt. Bekanntlich bilden die Zahlen

$$1,\ \omega,\ \omega^2, \ldots,\ \omega^{\varphi(m)},$$

wo $\varphi(m)$ die bekannte Eulersche Funktion ist, ein Fundamentalsystem der ganzen Zahlen des Körpers $R(\omega)$, welche durch ω bestimmt wird. Ich möchte für diese bekannte Tatsache einen Beweis angeben, den ich schon vor längerer Zeit gefunden habe und der sich wesentlich auf Dedekinds Untersuchungen über außerwesentliche Diskriminantenteiler stützt.

1. Die Wurzel Ω der ganzzahligen irreduziblen Gleichung $F(x)=0$ mit dem höchsten Koeffizienten 1 bestimme den Körper $R(\Omega)$. Ist D die Diskriminante von $F(x)$, so fällt

$$(1) \qquad D = dk^2, \qquad k \text{ rational ganz}$$

aus, wo d die Diskriminante des Körpers $R(\Omega)$ bedeutet. Die Primzahlen $p|k$ werden außerwesentliche Diskriminantenteiler genannt. DEDEKIND[1]) hat die notwendige und hinreichende Bedingung aufgestellt, welche darüber entscheidet, ob p ein außerwesentlicher Teiler ist. Wir brauchen nur den folgenden Teil des Satzes, den DEDEKIND ohne Anwendung der Idealtheorie beweist:

---

[1]) R. DEDEKIND, Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen, *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,* **23** (1878), S. 1—23 = *Gesammelte math. Werke,* Bd. I. (Braunschweig, 1930), S. 202—230.

Ist p ein außerwesentlicher Teiler und gilt die Relation

(2) $$F(x) = P_1(x)^{g_1} \dots P_i(x)^{g_i} \dots P_r(x)^{g_r} + pM(x),$$

wo die $P_i(x)$ (mod p) verschiedene irreduzible Polynome bedeuten, deren höchste Koeffizienten gleich 1 sind, dann ist $M(x)$ (mod p) zumindest durch ein Polynom $P_k(x)$ teilbar, wo $g_k > 1$ ausfällt.

2. Wir müssen beweisen, daß die Diskriminante der Gleichung $F_m(x) = 0$ keinen außerwesentlichen Teiler besitzt. Da im Falle $(m, p) = 1$, $x^m - 1$ (mod p^α) keinen mehrfachen Faktor enthält, so sind die Primzahlen $(p, m) = 1$ keine außerwesentliche Teiler. Es sei nun

(3) $$m = np^\beta, \quad \beta \geqq 1, \quad (n, p) = 1.$$

Da nach SCHÖNEMANN ein (mod p^α) irreduzibles Polynom, dessen höchster Koeffizient gleich 1 ist, (mod p) eine Potenz eines (mod p) irreduziblen Polynoms ist und die Zerlegungen in Primfaktoren (mod p) eindeutig sind, so besitzt $F_n(x)$ eine Zerlegung

(4) $$F_n(x) = S_1(x) \dots S_i(x) \dots S_t(x) \qquad (\text{mod } p^2),$$

wo die $S_i(x)$ *bereits* (mod p) *irreduzibel* und verschieden ausfallen. Aus

$$F_m(x) \equiv F_n(x)^{\varphi(p^\beta)} \qquad (\text{mod } p)$$

folgt

(4*) $$F_m(x) \equiv S_1(x)^{\varphi(p^\beta)} \dots S_i(x)^{\varphi(p^\beta)} \dots S_t(x)^{\varphi(p^\beta)} \qquad (\text{mod } p),$$

also ist

(4**) $$F_m(x) = S_1(x)^{\varphi(p^\beta)} \dots S_i(x)^{\varphi(p^\beta)} \dots S_t(x)^{\varphi(p^\beta)} + pM(x).$$

Nun können wir zeigen, daß die Zahl p kein außerwesentlicher Teiler ist. Im Falle $p = 2$, $\beta = 1$ sind die Exponenten gleich 1. In den übrigen Fällen müßte $M(x)$ (mod p) durch ein gewisses Polynom $S_k(x)$ teilbar sein, $S_k(x)$ wäre also ein gemeinsamer Teiler von $F_m(x)$ und $F_n(x)$ (mod p^2). Das ist aber infolge der bekannten Relation

(5) $$\frac{x^{np^\beta} - 1}{x^{np^{\beta-1}} - 1} = (x^{np^{\beta-1}} - 1)\,(x^{np^{\beta-1}(p-2)} + 2x^{np^{\beta-1}(p-3)} + \\ + \dots + p - 1) + p$$

ausgeschlossen, womit der Satz bewiesen ist.

3. Ich möchte darauf hinweisen, daß die Zerlegung von $F_m(x)$ (mod p^α) sehr wenig ausgenützt wurde. Bekanntlich läßt sich auf elementare Weise beweisen[2]), daß die Zerlegung von $F_m(x)$ (mod p^α) in irreduzible Faktoren, deren höchste Koeffizienten gleich 1 sind, eindeutig ist. Die Grade und die Exponenten sind aus der Zerlegung von $F_m(x)$ (mod p) ableitbar.

(Eingegangen am 3. November 1937.)

---

[2]) M. Bauer, Zur Theorie der Fundamentalgleichung, *Journal für Math.*, **149** (1919), S. 89—96, § 2. Der Beweis benutzt nicht die Irreduzibilität von $F_m(x)$.

An Extremum-Problem Concerning Trigonometric Polynomials.

By PAUL ERDŐS in Manchester.

Let $S(x)$ be a trigonometric polynomial of the n^{th} order[1]) such that $|S(x)| \leqq 1$ for all real values of x. We prove that *of the graphs of all these trigonometric polynomials, those with the equations* $y = \cos(nx + \alpha)$ *(α denotes any real constant) have the maximum length of arc over* $(0, 2\pi)$.

First we need the following lemma due to VAN DER CORPUT and SCHAAKE[2]) improving upon a well known theorem of S. BERNSTEIN:

Lemma. *Let $S(x)$ be a trigonometric polynomial of the n^{th} order, such that $|S(x)| \leqq 1$. Let $T(x) = \cos nx$. Let x_1 and x_2 be two values such that*

$$-1 < S(x_1) = T(x_2) < 1,$$

then

$$|S'(x_1)| \leqq |T'(x_2)|.$$

If the sign of equality holds in a single case then it holds always, i. e. $S(x) = T(x + \alpha)$.

The following proof of the lemma[3]) is much simpler than that given by the cited authors.

Suppose the lemma be not true, i. e., although $S(x) \not\equiv T(x+\alpha)$ there is a pair of numbers x_1, x_2 such that

$$-1 < S(x_1) = T(x_2) < 1,$$
$$|S'(x_1)| \geqq |T'(x_2)|.$$

---

1) "n^{th} order" stands throughout instead of "n^{th} order at most".

2) J. G. VAN DER CORPUT und G. SCHAAKE, Ungleichungen für Polynome und trigonometrische Polynome, *Compositio Math.*, 2 (1936), p. 321—361, especially Theorem 8, p. 337.

3) This proof is a generalisation of the proof of M. RIESZ for S. Bernstein's theorem, Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome, *Jahresbericht der D. M. V.*, 23 (1914), p. 354—368.

We may suppose without loss of generality that

$$x_2 = x_1, \quad S'(x_1) \geqq T'(x_1) \geqq 0$$

(otherwise we should consider $S(x+\alpha)$ or $-S(x+\alpha)$ instead of $S(x)$, α being a suitable chosen real number).

First consider the case $|S(x)| < 1$, $S'(x_1) > T'(x_1)$.

Let x_1 belong to the interval $J_k = \left(\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right)$ (k odd). As

$$S\left(\frac{k\pi}{n}\right) > -1 = T\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

$$\left.\begin{array}{l} S(x_1-\varepsilon) < T(x_1-\varepsilon) \\ S(x_1+\varepsilon) > T(x_1+\varepsilon) \end{array}\right\} \text{ for sufficiently small } \varepsilon,$$

$$S\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) < 1 = T\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right),$$

the curves $y = S(x)$ and $y = T(x)$ have at least 3 points of intersection over J_k.

As the trigonometric polynomial of the n^{th} order $S(x) - T(x)$ alternates its sign in the consecutive multiples of $\frac{\pi}{n}$, it has at least $2n+2$ zeros, incongruent mod 2π, in contradiction to $S(x) \not\equiv T(x)$.

When $S(x)$ is allowed to assume the values ± 1, then our former arguments remain obviously valid if we observe that a point x where

$$S(x) = T(x) = \pm 1,$$

is at least a double zero of $S(x) - T(x)$.

Finally, if $S'(x_1) = T'(x_1)$, then x_1 is at least a double zero of $S(x) - T(x)$, so that we find also in this case more than $2n$ zeros, incongruent mod 2π. This completes the proof of the lemma.

Let us now consider an arbitrary trigonometric polynomial $S(x) \not\equiv T(x+\alpha)$ of the n^{th} order. Let σ and τ be two monotone arcs of the curves $y = S(x)$ and $y = T(x)$ respectively, the endpoints of which have the same ordinates y_1 and y_2 say. Let $|\sigma|$ and $|\sigma_x|$ denote the length of the arc σ resp. of its projection on the x-axis, $|\tau|$ and $|\tau_x|$ having analogous meaning for τ. Then we assert:

$$|\sigma| < |\tau| + (|\sigma_x| - |\tau_x|).$$

This follows easilv from the lemma by approximating the arcs σ and τ by means of polygons corresponding to a subdivison of the interval (y_1, y_2).

I am indebted to Dr. P. CSILLAG for the following alternative proof: We may suppose the arcs both increasing. Writing their equations in the inverse forms $x=g(y)$, and $x=f(y)$ respectively, we deduce from the lemma that $g'(y)>f'(y)$ for $y_1<y<y_2$. Hence applying the triangle inequality to the non-degenerating triangle

$$(0, 0), \quad (1, g'(y)), \quad (1, f'(y))$$

we find

$$\{1+[g'(y)]^2\}^{1/2}<\{1+[f'(y)]^2\}^{1/2}+[g'(y)-f'(y)],$$

thus

$$|\sigma|=\int_{y_1}^{y_2}\{1+[g'(y)]^2\}^{1/2}dy<\int_{y_1}^{y_2}\{1+[f'(y)]^2\}^{1/2}dy+$$
$$+[g(y)-f(y)]_{y_1}^{y_2}=\tau+|\sigma_x|-|\tau_x|.$$

Let $\sigma', \sigma'', \ldots, \sigma^{(m)}$ $(m\geqq 2n)$ be the monotone arcs of the curve $y=S(x)$ over a suitable interval of length 2π. Denote by $\tau^{(k)}$ an arc of the curve $y=T(x)$, $0\leqq x\leqq 2\pi$, corresponding to $\sigma^{(k)}$ in the above sense. We may plainly choose the arcs $\tau', \tau'', \ldots, \tau^{(m)}$ such that no two of them overlap.

We have

$$|\sigma^{(k)}|<|\tau^{(k)}|+[|\sigma_x^{(k)}|-|\tau_x^{(k)}|]$$

whence

$$\sum_1^m|\sigma^{(k)}|<\sum_1^m|\tau^{(k)}|+\left[2\pi-\sum_1^m\tau_x^{(k)}\right].$$

On the left side we find the length of the arc $y=S(x)$, $0\leqq x\leqq 2\pi$, while the expression in brackets on the right side is the sum of the projections of the arcs remaining from the curve $y=T(x)$, $0\leqq x\leqq 2\pi$, when the arcs $\tau', \tau'', \ldots, \tau^{(m)}$ are omitted. Replacing this expression by the sum of the lengths of these additional arcs, the right side increases and becomes equal to the length of the arc $y=T(x)$, $0\leqq x\leqq 2\pi$, which concludes the proof of the theorem.

I conjecture that the following theorem holds.

Let $f(x)$ be a polynomial of the n^{th} degree, $|f(x)|\leqq 1$ in $(-1, 1)$. *Of the graphs of all these polynomials that of the n^{th} Chebisheff polynomial has the maximum length of arc.*

(Received October 13, 1936; revised June 15, 1937.)

Rectification au travail "Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels"[1]).

Par Marcel Riesz à Lund.

M. Brelot a bien voulu me signaler que dans la définition des masses de Green μ_M relatives à un ensemble fermé F de capacité positive et à un pôle M, il ne suffit pas de demander que le potentiel $r_{MP}^{\alpha-m}$ soit conservé en tout point P de F sauf peut-être dans un ensemble de capacité nulle, mais qu'il faut encore ajouter quelque condition restrictive pour assurer l'unicité de la distribution de Green. L'erreur vient d'un oubli fâcheux quoique banal qui m'est arrivé en énonçant le théorème d'équilibre de M. Frostman (p. 8). Voici l'énoncé correct de ce théorème.

Soit F un ensemble fermé et borné de capacité positive; il existe alors une répartition unique de masse positive engendrant un potentiel qui est $=1$ sur F, sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, et $\leqq 1$ dans l'espace entier[2]).

J'obtiens les masses de Green de celles qui donnent le potentiel d'équilibre par une transformation de Kelvin (p. 14—15). Pour rendre le texte exact au point de vue de l'unicité on n'a en réalité qu'à intervertir l'ordre des deux dernières phrases de la page 14 après avoir remplacé les derniers mots de la première

[1]) Ces *Acta*, **9** (1938), p. 1—42.

[2]) La dernière inégalité figure dans mon travail parmi les propriétés du potentiel d'équilibre, mais elle n'intervient pas dans la définition. Or sans une telle restriction, la répartition consistant p. ex. en la masse unité concentrée au centre d'une sphère de rayon *un* pourrait aussi être considérée comme une répartition d'équilibre pour l'ensemble fermé F composé de la surface de la sphère et de son centre. En effet, son potentiel est $=1$ sur tout l'ensemble F sauf au centre, c'est-à-dire sauf dans un ensemble de capacité nulle.

phrase "cette propriété-là" par les mots "les propriétés (1) et (2)". Pour la commodité du lecteur nous donnons ici la définition corrigée complète:

15. Soient F un ensemble fermé, non nécessairement borné, de capacité positive, M un point extérieur à F, et désignons par μ' la distribution engendrant le potentiel d'équilibre sur l'ensemble fermé et borné F' que la transformation (1) du numéro précédent fait correspondre à F. En définissant alors la distribution de masse positive μ_M relative à F par la formule (3) du même numéro, il vient

$$\int_F r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\mu_M(Q) = r_{MP}^{\alpha-m}, \tag{1}$$

égalité valable pour tout point P de F excepté peut-être pour un ensemble de capacité nulle. Le potentiel d'équilibre étant toujours $\leqq 1$, on a encore l'inégalité fondamentale

$$h_M(P) = \int_F r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\mu_M(Q) \leqq r_{MP}^{\alpha-m}, \tag{2}$$

P étant un point tout à fait arbitraire de l'espace. Le calcul étant réversible, on conclut que la distribution μ_M est entièrement déterminée par les propriétés (1) et (2). Nous appellerons les masses μ_M *masses de Green relatives à l'ensemble F et au pôle M.*

Le lecteur voudra bien tenir compte de cette définition précisée des masses de GREEN dans toute question d'unicité[3]), et cela aussi en ce qui concerne le travail de M. FROSTMAN "Sur le balayage des masses" publié dans ce recueil immédiatement après le mien.

Dans mon travail je ne m'occupe pas de questions d'unicité concernant le balayage d'une distribution générale que je définis par des formules explicites au moyen des masses de GREEN. Dans un travail récent[4]) M. BRELOT donne sur ce sujet quelques théorèmes très précis. Je profite de l'occasion pour montrer comment les résultats de M. BRELOT ressortent de ceux donnés dans mon travail. M. BRELOT montre par exemple qu'en balayant sur l'ensemble fermé F de capacité positive des masses $\geqq 0$, il y a unicité si le potentiel reste conservé sur F sauf au plus sur un ensemble de capacité nulle et si en outre l'une au moins des deux conditions suivantes est remplie:

a) Le potentiel n'est pas augmenté aux points extérieurs à F.

---

[3]) Cette question intervient en particulier au n° 25 où il faut observer que les deux potentiels comparés sont partout $\leqq r_{MQ}^{\alpha-m}$.

[4]) M. BRELOT, Fonctions sous-harmoniques et balayage, *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique,* **24** (1938), p. 301—312 et p. 421—436.

b) La répartition obtenue sur F ne comporte pas de masses sur les ensembles de capacité nulle.

Démontrons d'abord l'unicité dans la condition *b)*. On voit immédiatement que le potentiel obtenu par le balayage peut à l'extérieur de F être représenté par la formule (2) du n° **19** de mon travail. Alors le potentiel est déterminé sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, et dès lors de mesure nulle; les masses sont par conséquent entièrement déterminées par le théorème d'unicité du n° **10.**

Par le théorème du n° **13,** appliqué à la différence entre le potentiel original et celui obtenu par le balayage, la condition *a)* se réduit facilement à la condition *b)*.

(Reçu le 14 novembre 1938)

Bibliographie.

G. Thomsen, Grundlagen der Elementargeometrie in gruppenalgebraischer Behandlung (Hamburger Math. Einzelschriften, 15. Heft) VIII + 88 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1933.

Das vorliegende Heft gibt eine Kennzeichnung der euklidischen ebenen Bewegungsgruppe mittels der in ihr enthaltenen involutorischen Elemente, das sind die Halbdrehungen (m. a. W. Spiegelungen an Punkten) und die Spiegelungen an Geraden. Außer den allgemeinen Gruppenaxiomen werden vier Zusatzaxiome über die beiden Arten involutorischer Elemente angenommen; diese Axiome sind sehr einfach bezüglich ihrer gruppentheoretischen Bedeutung, zwar ist ihr geometrischer Inhalt weniger übersichtlich. Die beiden Arten involutorischer Elemente werden in der aufzubauenden Geometrie als Punkte und Geraden, und die zwischen den Gruppenelementen bestehenden Beziehungen als Ausdruck der grundlegenden geometrischen Beziehungen gedeutet; so werden der Reihe nach: vereinigte Lage von Punkt und Gerade, senkrechte und parallele Lage von Geraden, Kongruenz von Strecken (d. i. von Punktepaaren) erklärt, und die grundlegenden Sätze der ebenen Elementargeometrie, einschließlich des Pascalschen Satzes, auf Grund der eingeführten Axiome bewiesen. Es geht hervor, daß die gewählten gruppentheoretischen Axiome zum Aufbau der ebenen Elementargeometrie im wesentlichen hinreichen. Es wird noch die gruppentheoretische Kennzeichnung der räumlichen euklidischen und der hyperbolischen Geometrie kurz erläutert.

Das interessante und wertvolle Werk des früh hingeschiedenen Verfassers eignet sich vorzüglich als eine Anleitung zur axiomatischen Methode. Manche vom Verfasser angegebene Probleme deuten den Weg zum weiteren Aufbau dieser schönen Theorie an.

B. v. K.

D. J. Struik, Theory of Linear Connections (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, dritter Band, Heft 2), VII + 68 S., Berlin, J. Springer, 1934.

The author presents a short summary of the theory of linear connections. His intention was not to inform us exactly and minutely of every smaller detail in this line but to give a short and easily intellegible summing up of the results as well as of the way the theory had to go in order to reach these results. He succeded brilliantly in both. The work deals with the starting points and results of the three main courses: the theory of parallel transporation in the sense of LEVI-CIVITA, then that working with the second order differential equations of VEBLEN and EISENHARDT, and finally the theory of CARTAN that links up the first of these theories with the second. Technically it can be divided into six parts: 1. Vector and tensor algebra; 2. Affin connections; 3. Connections associated with differential equations; 4. Hermitean connections; 5. Projective connections; 6. Induction. The sixth part deals with applications to the theory of surfaces and curves in the space of n dimensions. An excellent bibliography is added.

A. Rapcsák.

Karl Reinhardt, Methodische Einführung in die höhere Mathematik, V + 270 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

Seine Eigenart erhält vorliegendes Buch durch die der Differentialrechnung vorangehende und von ihr unabhängige Entwicklung der Integralrechnung. Nach Kenntnis des Referenten werden hier die Quadraturen der elementaren Funktionen (Potenz, Logarithmus, Exponentialfunktion, trigonometrische und zyklometrische Funktionen sowie deren Ableitungen) zum erstenmal sämtlich unmittelbar durchgeführt. Dies sind an und für sich interessante Beispiele. Wir halten es aber für übertrieben, die Integralrechnung völlig unabhängig von der Differentialrechnung darstellen zu wollen. Die Einführung einer neuen Integrationsveränderlichen und die Produktintegration, ohne Anwendung des Begriffes der Ableitung, sind besonders schwerfällig. Bei den erwähnten Flächenbestimmungen wird entweder der Grenzwert der oberen oder der unteren Rechteckssumme berechnet. Anschaulicher wäre es, zu zeigen, daß beide Rechteckssummen, die den zu bestimmenden Flächeninhalt einschließen, einem gemeinsamen Grenzwert zustreben. Die Rechnung bei der Quadratur von $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bzw. $y=\frac{1}{1+x^2}$, S. 35—40, würde sich auch einfacher gestalten auf Grund der leicht beweisbaren Ungleichungen $s_n < n \sin\frac{b_1}{n} < S_n$ bzw. $s_n < n \operatorname{tg}\frac{b_1}{n} < S_n$ (wobei s_n die Untersumme, S_n die Obersumme bedeutet), aus denen wegen $S_n - s_n \to 0$ folgt $\lim s_n = \lim S_n = b_1$.

In den weiteren Abschnitten werden die Differentiationsregel, der Lagrangesche Mittelwertsatz und der Hauptsatz der Integralrechnung hergeleitet, und dann wird etwas über unendliche Reihen, Produkte und Kettenbrüche auseinandergesetzt. Es wird sogar die Kettenbruchentwicklung von $\operatorname{tg} x$ begründet, was aber dem Anfänger allzuschwer ist und daher unterbleiben dürfte. Es wäre weitaus besser für unendliche Kettenbrüche einige einfache Beispiele zu geben. Auch anstatt eines allgemeinen Konvergenzsatzes über Fouriersche Reihen wäre es viel nützlicher, einige spezielle Fourierentwicklungen herzuleiten. Erst hier folgt eine allgemeine Betrachtung über Extremalwerte und Wendepunkte, wobei wir etwas mehr an interessanten Maximum- und Minimumaufgaben sowie spezielle Kurvendiskussionen für unentbehrlich hielten. Endlich wird für den Fundamentalsatz der Algebra ein neuer Beweis gegeben und zum Schluß der strenge Aufbau des reellen Zahlbereichs kurz angedeutet, die Irrationalität von e und π bewiesen.

Nach Meinung des Referenten ist diese Auswahl und diese Anordnung des Stoffes zur Überbrückung der Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik, wozu das Buch — laut dem Vorwort — beitragen will, nicht geeignet.

P. v. Szász.

J. H. M. Wedderburn, Lectures on Matrices (American Math. Society Colloquium Publications, Volume XVII), VII + 200 pages, New York, American Mathematical Society, 1934.

The theory of matrices had a great development since the fundamental works of GRASSMANN, CAYLEY and HAMILTON. Considering that this development did not stop till present days and that the theory finds a large application, a work resuming this development deserves much interest. WEDDERBURN's book gives such a recapitulating treatment. His subject is restricted to the finite quadratic matrices mostly with real or complex numbers as elements. The relations to the theory of numbers are not considered.

The theme is very exhaustively elaborated, which is best shown by reviewing the chapters. Chapter I defines the matrices by the aid of vectors and gives the *elementary notions* of the theory of matrices. Chapter II starting from algebrical operations on matrices discusses circumstantially the *characteristic equation,* considers simple and multiple roots and the reduced equation. Chapter III treats the diagonal normal form, the elementary divisors and the invariant vectors. The *equivalence problem* is solved in this chapter only for non-singular matrices. In the next chapter (after a long preparation on vector polynomials and linear sets) the singular case is discussed. Chapter V introduces compound matrices, vector and tensor products and is devoted to the *theory of representation* (of groups). The knowledge of *symmetric, skew* and *hermitean* matrices is comprised in Chapter VI. Chapter VII finally gives the *commutativity theorems* and SYLVESTER's identities.

The remaining chapters have an appendix-like character. Chapter VIII gives a very interesting outline of matrix analysis. This chapter has many connections with different other investigations and gives much possibility to further development. Chapter IX is devoted to the automorphic transformations of bilinear forms. The last chapter exposes the associative algebras from a new point of view and considers especially their connection with the theory of matrices. The book contains an excellent *bibliography.*

The treatment is everywhere exact and clear. Reviewer thinks, that the clearness could have been increased by use of examples and if some (even important) details of the proofs would not be left to the reader. The book is of much use by giving a uniform recapitulation of the theory and is especially suitable for introduction to it.

G. Hajós.

Luigi Sobrero, Theorie der ebenen Elastizität unter Benutzung eines Systems hyperkomplexer Zahlen (Hamburger Math. Einzelschriften, 17. Heft), 50 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

Eine hyperkomplexe Zahl $z = x + jy + j^2u + j^3v$ mit den Einheiten $1, j, j^2, j^3$ und die Rechenoperationen mit solchen Zahlen werden in dieser Arbeit auf Grund der Relation

$$j^4 + 2j^2 + 1 = 0$$

definiert. Wenn man jede der rellen Größen a, b, c, d als Funktionen der vier reellen Größen x, y, u, v auffaßt, so ist

$$Z = a + jb + j^2c + j^3d$$

eine Funktion der hyperkomplexen Zahl z. Verlangt man noch daß der Differentialquotient dZ/dz von der Richtung unabhängig sein soll, so ergeben sich zwölf Differentialgleichungen für $a, b, c, d,$ welche dieselbe Rolle spielen, wie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in der gewöhnlichen Funktionentheorie. Auf diese Weise läßt sich eine hyperkomplexe Funktionentheorie aufbauen, wobei eine große Anzahl der Rechengesetze der gewöhlichen Funktionentheorie ihre Gültigkeit behalten. Im Ausnahmsfalle $x = u, y = v$ ist die Multiplikation nicht umkehrbar.

Der Laplaceschen Gleichung entspricht hier die Laplacesche Doppelgleichung: $\Delta\Delta a = 0$, $\Delta\Delta b = 0$, $\Delta\Delta c = 0$, $\Delta\Delta d = 0$. Auf dieser Tatsache beruht die Anwendbarkeit dieses hyperkomplexen Kalküls zur Lösung biharmonischer Randwertaufgaben. Der Verfasser zeigt, wie man die ebene Spannungs- und Formänderungsaufgaben als Aufgaben über solche hyperkomplexe Funktionen interpretieren kann, ähnlich, wie man z. B. die ebene Potentialströmung mit Hilfe der gewöhnlichen Funktionentheorie behandelt. Zur hyperkomplexen Darstellung des ebenen Spannungszustandes werden die Spannungskomponenten σ_x, σ_y, τ mit $-c, a, d$ identifiziert. Der Punkt (x, y) der cartesischen Ebene wird mit der hyperkomplexen Zahl $x + jy$ identifiziert. Als Beispiele werden behandelt: Unendliche Scheibe mit Einzelkraft, Halbebene mit Einzelkraft und die mit kreisförmigem Loch versehene Scheibe.

Aus dem kurzgehaltenen und doch leicht lesbaren Buch wird der Mathematiker und der wissenschaftlich tätige Ingenieur manche Anregung zur weiteren Forschung bekommen. Die Literaturnachweise erleichtern das Auffinden der einschlägigen Arbeiten.

J. Barta.

A. Gloden, Sur les surfaces de Riemann, 95 pages, Luxembourg, Linden et Hansen, 1935.

L'auteur expose les premiers éléments de la théorie des surfaces de RIEMANN dans l'esprit des traités classiques.

B. de K.

O. Schreier und E. Sperner, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra, zweiter Band (Hamburger Math. Einzelschriften, 19. Heft), 308 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1935.

Der zweite Band der „Einführung in die analytische Geometrie und Algebra" ist wie der erste (Besprechung s. *diese Acta,* 5 (1930—32), S. 260—261) aus Vorlesungen von O. SCHREIER entsprungen. Das Buch zerfällt in drei Abschnitte, von denen die beiden ersten die Algebra und der letzte die analytische Geometrie zum Gegenstand haben. Der erste Abschnitt behandelt die Elemente der Gruppentheorie und den Basissatz für Abelsche Gruppen. Der zweite enthält den Stoff, mit einigen Umstellungen und Kürzungen, eines schon früher veröffentlichten Bändchens *(Vorlesungen über Matrizen)* des Verfassers. Inhalt des zweiten Abschnittes: Rechnen mit linearen Transformationen; Rechnen mit Matrizen; Minimalpolynom; invariante Teilgebilde; Diagonalgestalt von Matrizen; Elementarteilertheorie der Polynommatrizen; Normalformenproblem für Matrizen (Jordansche Normalform).

Der letzte Abschnitt über n-dimensionale projektive Geometrie behandelt die analytische Geometrie der linearen und quadratischen Formen über dem Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen. Aus dem Stoff dieses Abschnittes erwähnen wir: allgemeine projektive Koordinaten, Hyperebenenkoordinaten; Dualitätsprinzip; Doppelverhältnis; Projektivitäten; Korrelationen; Hyperflächen zweiter Ordnung; projektive Einteilung und Eigenschaften der Hyperflächen zweiter Ordnung; affine und metrische Einteilung der Hyperflächen zweiter Ordnung.

Diesen zweiten Band des Werkes charakterisiert auch, wie den ersten, die Verschmelzung der geometrischen und algebraischen Gesichtspunkte. Die Beweisführungen werden durchwegs sehr sorgfältig und ausführlich geführt und verleihen dem Buch den Charakter einer Vorlesung. (Besonders einfach und anschaulich ist die Darstellung im Abschnitt über Matrizen.) Die leicht faßliche Darstellung des Stoffes, die zahlreichen Übungsaufgaben machen das Buch besonders geeignet für Anfänger.

St. Lipka.

Emil Müller, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, vollständig neu bearbeitet von ERWIN KRUPPA, vierte Auflage in drei Teilen, erster Teil: Projektion auf eine Bildebene; zweiter Teil: Zugeordnete Normalrisse, Krumme Flächen; dritter Teil:

Axonometrie, Perspektive, Landkartenentwürfe, VII+VII+VII+390 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1936.

Dieses moderne Lehrbuch der darstallenden Geometrie ist unter Benutzung des bekannten Werkes von E. MÜLLER entstanden. Verfasser setzte durch Weglassen weniger wichtiger Einzelheiten und durch sachliche Vereinfachungen den Umfang des ursprünglichen Werkes von MÜLLER wesentlich herab. Das Buch wurde in drei Teile gegliedert. Der erste Teil behandelt die Projektion auf eine Bildebene und besteht aus folgenden Kapiteln: 1. Abbildung ebener Figuren. 2. Kurven, Flächen und ihre Abbildungen auf eine Ebene. 3. Kotierte Grundrisse und Seitenrisse (Kotierte Projektion). 4. Kurven, Kegel und Zylinder zweiter Ordnung. — Die Projektion auf eine einzige Bildebene wurde aus systematischen Gründen an die Spitze gestellt.

Der zweite Teil behandelt die Zweibildermethode und enthält folgende Kapitel: 1. Zugeordnete Normalrisse. 2. Darstellende Geometrie besonderer Flächengattungen. 3. Darstellende Geometrie der Flächenkrümmung. — *Die Behandlung der Flächenkrümmung* (Sätze von MEUSNIER und EULER) ist methodisch neu.

Der dritte Teil behandelt die Axonometrie, die Perspektive, die Landkartenentwürfe in den folgenden Kapiteln: 1. Schiefe Axonometrie. 2. Normale Axonometrie. 3. Parallelperspektive. 4. Perspektive. 5. Reliefperspektive. 6. Landkartenentwürfe.

Eine vollständige Umarbeitung erfuhren in diesem neuen Lehrbuch die Kurven- und Flächentheorie und die konstruktive Behandlung der Kurven und Flächen. Verfasser schaltete das Operieren mit unendlichkleinen Größen und unendlichbenachbarten Elementen vollständig aus und ersetzte dies durch exakte Grenzübergänge. Der Aufbau des Stoffes hat damit einen analytischen Charakter gewonnen. Das Buch enthält noch eine Reihe von Anwendungsbeispielen (z. B. aus dem Maschinenbau).

St. Lipka.

E. Trefftz, Graphostatik (Teubners math. Leitfäden, Band 42), IV + 90 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1936.

Die Darstellung der Statik mit geometrischen Mitteln nennt man Graphostatik. Ihre Bedeutung war früher so groß, daß sie sich mit der technisch-angewandter Statik sozusagen deckte. Sie ist auch heute ein unentbehrliches Zweig der Statik; ihre Bedeutung ist aber hauptsächlich auf wissenschaftliches und didaktisches Gebiet beschränkt worden, da für den gewandten Ingenieur die rechnerischen Methoden bequemere und genauere Mitteln bieten.

Das vorliegende Buch enthält die Elemente der Graphostatik: die Darstellung von Kräften in der Ebene, von Fachwerken und Balken. Weiter beschäftigt es sich mit der Ermittlung des Schwerpunktes, sowie des Momentes erster und zweiter Ordnung von Flächenstücken. Inhaltlich wird also derjenige Teil der Graphostatik umfaßt, welcher heutzutage an den meisten technischen Hochschulen in den Vorlesungen über Mechanik für Anfänger Platz findet.

Denjenigen, die Statik lernen, oder ihre älteren Kenntnisse auffrischen wollen, wird dieses Buch zweifellos gute Dienste leisten. Für den Praktiker scheinen aber die rein graphischen Methoden schon etwas überholt zu sein.

St. Menyhárd.

Wilhelm Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, erstes Heft (Hamburger Math. Einzelschriften, 20. Heft), zweite Auflage, IV + 60 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1936.

Den Rahmen des Buches bildet die ebene Euklidische Geometrie. Die Bausteine der Integralgeometrie sind gewisse Differentialformen, die als Dichten bezeichnet werden und zuerst wohl in der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten aufgetreten sind. In der ebenen Integralgeometrie, um die allein es sich hier handelt, sind diese Dichten: die „Punkt-", „Geraden-" und „kinematische Dichte". Die Punktdichte ist dabei das gewöhnliche Flächenelement eines Punktes, Geraden- und kinematische Dichte stehen zur Geraden und dem orientierten Achsenkreuz in entsprechender Beziehung wie der Punkt zu seinem Flächenelement. Durch Integration über einen bestimmten Bereich dieser Gebilde erhält man neben dem „Punkmaß" (Flächeninhalt) noch das „Geraden-" und „kinematische Maß". Diese Integrale — und entsprechend ihre Dichten — sind durch eine Reihe von Invarianzforderungen bestimmt. Die wesentlichste unter ihnen ist diejenige, die eigenlich unsere ganze euklidische Geometrie ausmacht, nämlich die Bewegungsinvarianz. Der Gegenstand, der in diesem Buche behandelt wird, besteht nun in den Beziehungen dieser Integrale zueinander.

Verfasser benützt in der Darstellung konsequenter Weise alternierende Differentialformen, gemäß dem von H. GRASSMANN, H. POINCARÉ und E. CARTAN geschaffenen Kalkül der alternierenden Differentialformen. Daß dies der für diese Untersuchungen angepässte Rechenkalkül ist, geht schon daraus hervor, daß die alternierenden Differentialformen eine Eigenschaft besitzen, die auch von den Dichten gefordert wird.

An Einzelnen werden in §§ 1—9 Anwendungen der Punkt- und Geradendichte auf eine Reihe von geometrischen Fragen, insbesondere der Theorie der konvexen Bereiche, gemacht, die einen besonders engen Zusammenhang mit der Integralgeometrie haben. §§ 9—14 behandeln das kinematische Maß. Von den zahlreichen dort behandelten Fragen mögen zwei hervorgehoben werden, die beide auf L. A. SANTALÓ zurückgehen. Die erste betrifft einen neuen Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises, der dadurch bemerkenswert ist, daß hier mit Gleichungen (statt Ungleichungen) gearbeitet wird. Aus ihnen folgt dann ohne weiteres die klassische Ungleichhung sowie Bonnesens Verschärfung derselben. Die zweite Anwendung ist eine Formel, die die Anzahl der Eibereiche angibt, die einen festen vorgegebenen treffen.

Neu gegenüber der ersten Auflage ist die vom Verfasser gefundene

„kinematische Hauptformel" (§ 17, § 18). Sie stellt eine weitgehende Verallgemeinerung der von SANTALÓ für zwei Eibereiche gefundenen Formel dar. Es werden hier zwei beschränkte Bereiche betrachtet, die von beliebigen stetig gekrümmten Jordankurven berandet sind. Die bewegte Kurve hat bei der Integration noch ein Gewicht, nämlich das Integral der Gesammtkrümmung des jeweiligen Durchschnittes der beiden Bereiche. Aus diesem Resultat ergibt sich ein großer Teil der integralgeometrischen Formeln als Spezialfall.

Daß die Voraussetzungen, unter denen die Sätze der Integralgeometrie gelten, weit reduziert werden können, hat K. MAAK gezeigt. Auch hierüber wird der Leser (in § 21) orientiert.

Das Buch bildet eine gute Einführung in Fragestellungen der ebenen Integralgeometrie.

O. Varga.

W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie. zweites Heft (Hamburger Math. Einzelschriften, 22. Heft), VI+127—60 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

In diesem Heft ist auf verhältnismäßig engem Raum eine große Fülle Stoffes behandelt. Wenn auch dieser Band hauptsächlich, in unmittelbarer Fortsetzung des ersten Heftes, dem (dreidimensionalen) Raum Euklids gewidmet ist, findet man in den gut gewählten Aufgaben die wichtigsten Fragen der Integralgeometrie auf der Kugeloberfläche, ferner Resultate derjenigen Untersuchungen, die sich ergeben, wenn man im Raum nur die Schiebungsgruppe zuläßt. Dabei tritt zwangsläufig der Begriff des „gemischten Rauminhaltes" auf, der dann auf den Zusammenhang mit dem Ideenkreis Minkowskis über konvexe Gebilde hinweist. Dazu kommt noch, daß die räumliche Integralgeometrie viel mannigfaltiger ist als die der Ebene, entsprechend der größeren Anzahl von bewegungsinvarianten Integralen.

Das Heft zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teil werden zunächst diejenigen Integrale eingeführt, die zur „Punkt-", „Geraden-", „Ebenen-" und „kinematischen Dichte" gehören. Daneben werden auch Dichten eingeführt, die zu anderen bewegungsinvarianten Figuren gehören, wie Linienelement, Flächenelement usw. Die Herleitung dieser Differentialformen erfolgt absteigend. Den Ausgang bildet die Differentialform höchsten Grades, nämlich die kinematische Dichte (eine sechsfache Differentialform). Dabei ist es leicht das Verfahren zur Bildung von Dichten zu übersehen, so daß der Leser hieraus ohne weiteres den Ausdruck der Dichte für eine lineare Untermannigfaltigkeit eines beliebig-dimensionalen euklidischen oder nichteuklidischen Raum entnehmen kann. In der weiteren Entwicklung dieses Teiles wird das kinematische Maß nicht mehr in Betracht gezogen. Es werden dann die zahlreichen Resultate, die sich seit der Entwicklung der Integralgeometrie durch die Arbeiten von M. W. CROFTON (1868) bis zu einer (nicht veröffentlichten) Vorlesung von G. HERGLOTZ (1933) ergeben haben, dargestellt. Sie beziehen sich ausschließlich auf konvexe Körper (Crofton-Herglotzsche Formel, Cauchys Formeln usw.).

Der zweite Teil behandelt die Anwendungen des kinematischen Maßes. Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht wieder die „kinematische Hauptformel" für den Raum. Verfasser beschränkt sich dabei, um nur die einfachsten Voraussetzungen machen zu müssen, auf Vielflache. Doch finden sich wieder in den Beispielen diejenigen Untersuchungen eingestreut, die die Ausdehnung dieser Begriffe auf krumme Flächen geben. Der Grundgedanke der Hauptformel ist die „Zählung" der Lagen, in denen ein bewegliches Vielflach ein festes vorgegebenes trifft. Bei dieser „Zählung" tritt noch ein Gewicht hinzu: die Eckenkrümmung des jeweiligen Durchschnittes der beiden Körper.

Das Buch ist ein unentbehrlicher Wegweiser für jeden, der sich mit dem Gegenstand bekanntmachen will.

O. Varga.

Konrad Knopp, Elemente der Funktionentheorie (Sammlung Göschen, 1109), 144 S., Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1937.

Die in dieser Sammlung erschienenen wohlbekannten und verbreiteten Bändchen des Verfassers über Funktionentheorie setzen schon die Kenntnis der ersten Elemente voraus. Das vorliegende Bändchen soll nun diese Elemente behandeln. Nach der Einführung der komplexen Zahlen und des Rechnens mit denselben werden der Begriff der Zahlenmengen, der Grenzbegriff, sowie die Lehre der unendlichen Reihen ins Komplexe übertragen. Dann werden Stetigkeit und Differenzierbarkeit für komplexwertige Funktionen eines komplexen Veränderlichen erklärt, und die Eigenschaften der durch Potenzreihen dargestellten Funktionen diskutiert. Das Büchlein enthält auch eine nähere Behandlung der elementaren Funktionen. Die Übertragung der Integralrechnung ins Komplexe wird dagegen nicht berührt.

Béla v. Sz. Nagy.

Konrad Knopp, Funktionentheorie, erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen (Sammlung Göschen, 668), fünfte Auflage, 136 S., Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1937.

Die leicht lesbare, klare, aber durchaus gründlich und streng dargestellte Knoppsche Taschen-Funktionentheorie ist eine der meistbenutzten Einführungen in dieses Gebiet. Der erste Band, der nunmehr in der fünften Auflage vorliegt, setzt nur die Kenntnis der Elemente der reellen Analysis und der analytischen Geometrie voraus. Ein einleitender Teil faßt die grundlegenden Begriffe zusammen, für deren ausführlichere Darstellung der Leser auf die oben berichteten *Elemente der Funktionentheorie* hingewiesen wird. Den im Verhältnis zum Umfang reichen Inhalt des Büchleins zeigen schon die folgenden Kapitel-Titel: Das Integral einer stetigen Funktion; Cauchyscher Integralsatz; Cauchysche Integralformeln; Reihen mit veränderlichen Gliedern; Die Entwicklungen analytischer Funktionen in Potenzreihen; Analytische Fortsetzung; Ganze transzendente Funktionen; Laurentsche Entwicklung; Die verschiedenen Arten singulärer Stellen. — Neben zahlreichen kleineren Verbesserungen und Umordnungen des Textes der früheren Auflagen begrüßt man in dieser neuesten Auflage besonders die Hinzufügung eines neuen Paragraphen über den Monodromiesatz und eines über die Umkehrung analytischer Funktionen.

Béla v. Sz. Nagy.

Ludwig Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung (Sammlung Göschen, 768), dritte Auflage, 137 S., Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1937.

Die vorliegende dritte Auflage des bekannten kleinen Bieberbachschen Buches ist mit einem Paragraphen über die Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Gebiete auf Normalgebiete ergänzt. Die übrigen Teile sind fast ungeändert geblieben.

Trotz dem kleinen Umfang des Buches ist es dem Verfasser gelungen, eine gute Übersicht des gesamten Problemkreises darzubieten und neben den allgemeinen Sätzen auch zahlreiche Beispiele zu behandeln.

Béla v. Sz. Nagy.

Günther Schulz, Formelsammlung zur praktischen Mathematik (Sammlung Göschen, 1110), 147 S., Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1937.

Eine sehr brauchbare kurze Zusammenstellung derjenigen Formeln und Rechnungsverfahren, die in praktischen Auswertungen die häufigste Verwendung finden. Die sieben Abschnitte des Büchleins behandeln allgemeine Hilfsmittel, Ausgleichungsrechnung, Auflösung von Gleichungen, Interpolation, Quadratur und Summation, Annäherung willkürlicher Funktionen durch Reihen gegebener und Integration von Differentialgleichungen.

Béla v. Sz. Nagy.

Max Zacharias, Das Parallelenproblem und seine Lösung, eine Einführung in die hyperbolische nichteuklidische Geometrie (Math.-Phys. Bibliothek, Reihe I, Bd. 92) 44 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

Ziel des vorliegenden Büchleins ist den Anfänger in die Grundelemente der hyperbolischen Geometrie einzuführen. Verfasser setzt nur die durchschnittlichen Schulkenntnisse voraus und behandelt nach einer geschichtlichen Einleitung auf leichtverständliche Weise das Parallelenproblem, die Winkelsumme und den Flächeninhalt des Dreiecks, die Linien gleichen Abstandes und die Kreislehre. Das Büchlein schließt mit einigen philosophischen Betrachtungen und einer kurzen Darstellung der elliptischen Geometrie. St. Lipka.

Robert Sauer, Projektive Liniengeometrie (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Band 23), 194 S., Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1937.

Die Liniengeometrie ist jener Zweig der räumlichen Geometrie, der statt des Punktes oder der Ebene als Grundelement die Gerade benützt. Das vorliegende Buch hat zum Gegenstand vorwiegend diejenigen liniengeometrische Beziehungen, die bei projektiven Abbildungen invariant bleiben. Ziel des Verfassers ist die Invariantentheorie der projektiven Transformationen in Geradenkoordinaten analytisch zu entwickeln, in ähnlicher Weise wie man in der kartesischen Geometrie die Bewegungsinvarianten in Punktkoordinaten aufstellt. Der erste Abschnitt behandelt die Grundbegriffe der algebraischen Liniengeometrie mit einigen Beispielen wie Regelflächen 3. Grades, Raumkurven 3. und 4. Ordnung, quadratische Geradensysteme und Geradenkomplexe (2- und 3-parametrige Geradenmengen). Der größte Teil des Buches — Abschnitte II—VI — behandelt die differentielle Liniengeometrie, und zwar die Differentialgeometrie der Geradenscharen, Geradensysteme, Geradenkomplexe und des Geradenraums. „Bei der Behandlung der Torsen und der parabolischen Geradensysteme wird die projektive Differentialgeometrie der Kurven und Flächen mit erledigt, für die die Linienkoordinaten angepaßter sind als die Punkt- und Ebenenkoordinaten. In diesem Sinne ist das Buch eine Ergänzung zum 22. Band derselben Sammlung, in dem E. Salkowski die affine Differentialgeometrie der Kurven und Flächen dargestellt hat."

Verfasser benützt die nämlichen analytischen Hilfsmittel, die W. Blaschke in der Lieschen Kugelgeometrie anwendet, er legt jedoch das Hauptgewicht nicht auf das analytische Werkzeug, sondern auf den geometrischen Inhalt.

Das Buch enthält noch sehr lehrreiche und schöne Anwendungen aus der Mechanik: Fachwerke, Ballsche Schraubentheorie, Spannungsverteilung in Membranen. Die jungen Mathematiker werden viel Anregung aus diesem schönen Werk schöpfen. St. Lipka.

A. Buhl, Nouveaux éléments d'analyse, Calcul infinitésimal, Géométrie, Physique théorique (Cours de la Faculté des Sciences de Toulouse), Tome I: Variables réelles; Tome II: Variables complexes, VII + 204 resp. VI + 214 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1937 et 1938.

„Personne ne s'est jamais étonné de trouver la Géométrie, en bonne place, dans les Traités d'Analyse. Or, les progrès de la Science montrent que les équations fondamentales de la Physique peuvent, ainsi que celles de la Géométrie, se révéler non pas précisément comme une application, mais comme l'une des formes mêmes des principes mathématiques. C'est ce que je me suis attaché à mettre en évidence dans cet Ouvrage..." — dit l'Auteur dans la préface du premier tome et l'on doit admettre qu'il a dévéloppé un effort considérable pour réaliser cette proposition.

Ainsi, on trouve les „incertitudes de HEISENBERG" mentionnées déjà sur les premières pages, dans le cadre d'un chapitre sur „ensembles, mesures, microstructures". C'est d'ailleurs à regretter que l'Auteur a laissé tant d'obscurités dans ce chapitre, même quelques fautes sérieuses dont nous ne mentionnons que la définition erronée de l'ensemble triadique de CANTOR, l'assertion qu'il y auraient d'ensembles parfaits dénombrables (page 4) et l'exposition tout à fait incorrecte et obscure de la notion de l'intégrale de STIELTJES (pages 16—18). On devrait ici soigneusement séparer les notions purement mathématiques des conceptions physiques, choses tout à fait différentes, au lieu de les confondre.

Des beaux chapitres suivent traitant les formules d'intégrale de STOKES, GAUSS et GREEN, puis des différentes questions de la Géométrie différentielle des surfaces, de la théorie des groupes continues, ainsi que de la mécanique classique et relativiste.

Le deuxième tome contient des chapitres habilement choisis de la théorie des fonctions analytiques à une variable complexe, comme par exemple une introduction à la théorie de la sommabilité taylorienne des fonctions méromorphes.

Le dernier chapitre de l'Ouvrage est intitulé: „CHARLES HERMITE et la physique théorique", et contient quelques remarques sur les théories des quanta.

Les exercices ajoutés à la fin des chapitres aident à les comprendre et à diriger le lecteur vers l'étude plus approfondie des problèmes touchés dans cet Ouvrage, qui, malgré ses faiblesses indéniables, est une intéressante lecture et une tentative remarquable.

Béla de Sz. Nagy.

LE CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHEMATICIENS

CAMBRIDGE, MASSACHUSETTS, U. S. A., 1940

A l'invitation de l'American Mathematical Society, le Congrès International des Mathématiciens se réunira à Cambridge, Massachusetts, en 1940.

Congrès Précédents

Un Congrès International des Mathématiciens se réunit en 1893, à l'occasion de la World's Columbian Exposition de Chicago. Le premier Congrès réuni en Europe eut lieu à Zurich en 1897, et le plus récent à Oslo en 1936. A part quelques exceptions causées par la Guerre, les sessions ont eu lieu très régulièrement dans l'intervalle, environ une fois tous les quatre ans. Elles se tinrent en Europe, sauf celle de 1924 qui se tint à Toronto, sous les auspices de la ville, de la province, et du Gouvernement Canadien.

Lors des Congrès récents, le nombre des pays représentés fut environ 40, celui des membres environ 600, et celui des mémoires environ 250.

Lieu et Date

La date du Congrès a été fixée comme suit: du 4 au 12 septembre 1940. Harvard University et le Massachusetts Institute of Technology seront les hôtes. Les mathématiciens qui le désireront pourront habiter dans des maisons d'étudiants de Harvard University, et les repas seront fournis à très bon compte par les restaurants de l'Université. Toutes les facilités seront prévues pour les membres de leurs familles, et particulièrement pour les enfants. Ceux qui le préféreront trouveront un large choix d'hôtels à Cambridge ou à Boston. La Société espère pouvoir fournir gratuitement la pension complète à bon nombre des hôtes étrangers pendant la semaine qu'ils passeront à Cambridge.

Organisation

Des projets pour les activités scientifiques sont actuellement en voie de développement. Conformément aux usages établis, il y aura une vingtaine de mémoires présentés sur l'invitation des organisateurs du Congrès, chacun durant une heure, et, en outre, des réunions séparées pour la présentation de mémoires plus courts.

Des conférences constitueront une innovation, suivant l'idée lancée aux récentes réunions internationales de Moscou pour la Topologie, et de Zurich pour la Probabilité. Chaque séance sera consacrée à un domaine dans lequel des progrès importants ont été faits ou sont en train de se réaliser. Le but sera d'échanger des renseignements parmi les spécialistes de chaque domaine, et de répandre les résultats nouveaux et importants parmi les mathématiciens du monde entier. Ceci sera réalisé grâce à un programme coordonnant des conférences et des discussions ouvertes. Dans le programme des conférences il y en aura une sur l'Algèbre; une sur la Théorie de la Mesure, de la Probabilité et des sujets apparentés; une sur la Logique Mathématique; et une sur la Topologie.

A titre de projet, six sections sont prévues pour la présentation des mémoires: I. Algèbre et Théorie des Nombres; II. Analyse; III. Géométrie et Topologie; IV. Probabilité, Statistique, Science Actuaire, Economie Politique; V. Physique mathématique et Mathématiques appliquées; VI. Logique, Philosophie, Histoire, Didactique. La Commission Internationale de l'Enseignement des Mathématiques se propose de tenir une session à l'occasion du Congrès.

Ces mémoires seront rédigés de préférence dans l'une des langues officielles du Congrès: anglais, français, allemand ou italien, et ne devront pas en général dépasser dix minutes.

Activités Diverses. Excursions

De nombreuses activités auront lieu à l'occasion du Congrès—réception, garden party, concert et banquet. Il y aura de plus un certain nombre d'excursions en automobile.

Tous les efforts seront faits pour permettre aux étrangers de voyager à un coût raisonnable pendant qu'ils seront aux Etats-Unis. Avant le Congrès, des facilités leur seront offertes pour visiter la ville de New York, sous la conduite de quelques mathématiciens. Il est probable que la ville abritera à ce moment-là une exposition internationale. Si le désir en est exprimé, des excursions à Washington, à Niagara Falls et à d'autres lieux seront organisées.

Participation au Congrès

L'adhésion au Congrès sera ouverte à chacun, qu'il puisse ou non être personnellement présent. Pour les membres ordinaires du Congrès, la cotisation est de $ 10.00; ces personnes recevront les Comptes-rendus. Les membres des familles et ceux qui ne participent pas aux délibérations scientifiques peuvent devenir membres associés avec une cotisation de $ 5.00; ils ne présenteront pas de mémoires et ne recevront pas les Comptes-rendus, mais auront droit à la plupart des autres privilèges de la participation.

Appui Financier

En plus des contributions de Harvard University, de Massachusetts Institute of Technology et d'autres institutions du voisinage, de généreuses subventions pour le Congrès ont été souscrites par la Carnegie Corporation, l'Institute for Advanced Study, le National Research Council, et la Rockefeller Foundation.

Renseignements

Les personnes désireuses d'obtenir des informations peuvent donner leur nom au Bureau de la Société et elles recevront de temps en temps des renseignements concernant le programme et les divers arrangements.

Prière d'adresser la correspondance à:

American Mathematical Society
531 West 116th Street
New York, New York, U. S. A.

décembre, 1938.

(Signé)
Le Comité d'Organisation

Familles de Perron et problème de Dirichlet.

Par M. BRELOT à Bordeaux.

1. Parmi les solutions du problème classique de DIRICHLET vient au premier rang peut-être la méthode de M. PERRON[1]), obtenue de manière voisine et indépendante, presque en même temps, par M. REMAK[2]) et dont l'originalité suscita divers travaux. Elle fut simplifiée par MM. T. RADÓ—F. RIESZ[3]), reprise aussi par M. CARATHÉODORY[4]), étendue récemment par M. GUIDO FUBINI[5]) à des fonctions plus générales que les fonctions harmoniques. D'autre part, M. WIENER[6]) considérant les deux enveloppes issues des deux familles analogues de fonctions sousharmoniques et surharmoniques les identifia dans le cas d'une distribution-frontière f continue, avec sa solution généralisée du problème de DIRICHLET, et entreprit leur étude pour f discontinue, en liaison avec un travail antérieur[7]).

---

1) O. PERRON, Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, *Math. Zeitschrift*, **18** (1923), pp. 42—54.

2) R. REMAK, Über potentialkonvexe Funktionen, *Math. Zeitschrift*, **20** (1924), pp. 126—130.

3) T. RADÓ—F. RIESZ, Über die erste Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, *Math. Zeitschrift*, **22** (1925), pp. 41-44. M. F. RIESZ a bien voulu me signaler une variante due à H. WHITNEY, Note on Perron's Solution of the Dirichlet Problem, *Proceedings of the National Academy of Sciences U. S. A*, **18** (1932), pp. 68—70.

4) C. CARATHÉODORY, On Dirichlet's Problem, *American Journal of Math.*, **59** (1937), pp. 709—731.

5) G. FUBINI, Sopra una nuova classe di problemi al contorno, *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, 61 (1939), pp. 304—313.

6) N. WIENER, Note on a Paper of O. Perron, *Journal of Math. and Phys., Massachusetts Institute of Technology*, **4** (1925), pp. 21—32.

7) N. WIENER, The Dirichlet Problem, *Journal of Math. and Phys., Massachusetts Institute of Technology*, **3** (1924), pp. 127—146.

Je vais reprendre ici toute cette question. D'abord à partir de quelques notions très élémentaires et en me limitant au cas original de f bornée quelconque, je retrouverai autrement l'harmonicité des enveloppes et plus simplement leur identité pour f continue, après quoi le théorème fondamental de M. WIENER à la base de sa solution généralisée n'est plus qu'une propriété de l'enveloppe commune. Cela n'ira pas sans une étude de ces enveloppes comme fonctionnelles et sera suivi d'une introduction de la notion, d'usage essentiel plus loin, des points irréguliers.

Après cet exposé synthétique élémentaire qui ne comportera que peu de résultats nouveaux, j'utiliserai pour aller plus avant, dans un second chapitre, grâce à l'intégrale de LEBESGUE – STIELTJES, les développements récents de la théorie du potentiel dont ne disposait pas M. WIENER. Je pourrai, en liaison avec ceux-ci, étudier en toute généralité les enveloppes relatives à f quelconque, et, en caractérisant les cas de coïncidence, préciser définitivement l'extension maxima du problème de DIRICHLET esquissée par M. WIENER, qui avait été malencontreusement arrêté par un exemple inexact. Dans l'expression des résultats apparaîtra essentiellement la distribution de masses du balayage polaire qui sera d'ailleurs retrouvée par représentation (classique selon M. F. RIESZ) d'une fonctionnelle linéaire par une intégrale. La difficulté est au fond d'élucider le cas d'une distribution-frontière semi-continue. Je me suis basé pour cela sur l'existence (dans un domaine borné) d'une fonction harmonique >0 tendant vers $+\infty$ aux points-frontière irréguliers: ce qui résulte immédiatement de la propriété (KELLOGG—EVANS) de l'ensemble des points irréguliers d'être de capacité nulle et, d'autre part, de l'existence (EVANS) d'une charge >0 sur tout ensemble borné fermé de capacité nulle assurant sur lui le potentiel $+\infty$. Il y aurait donc grand intérêt soit à procéder plus directement, soit à établir au moins ce théorème d'existence de EVANS d'une manière directe et beaucoup plus simple que la méthode originale qui suppose un stade avancé de la théorie du potentiel.

Dans tout cela je me limiterai aux ensembles *ouverts bornés*, ce qui permet de traiter presque sans différence les cas des espaces à $n \geqq 2$ dimensions. Pour le langage je me placerai dans le cas du plan; mais il y a *extension immédiate aux espaces supérieurs.*

Enfin je me dois de remercier vivement M. DIEUDONNÉ dont j'ai utilisé la compétence particulière en matière d'intégration et qui, ayant bien voulu lire ma rédaction, m'a fait diverses critiques dont j'ai profité ici.

I. Résultats fondamentaux élémentaires.

2. *Notions préliminaires.* Une fonction $u(M)$ continue dans un ensemble ouvert Ω y est dite *harmonique* si en chaque point M, on a *pour r assez petit:*

$$u(M) = \mathfrak{M}_M^r u$$

moyenne de u sur la circonférence de centre M et rayon r, ou ce qui est équivalent

$$u(M) = \mathfrak{A}_M^r u$$

moyenne dans le cercle.

D'où: impossibilité d'un extremum en un point dans le voisinage duquel $u \neq$ Constante; si Ω est borné, égalité de la borne supérieure (ou inférieure) de u avec celle, d'ailleurs atteinte, de la plus grande limite (ou plus petite limite) de u à la frontière; identité de deux fonctions harmoniques prenant des valeurs limites déterminées finies et égales à la frontière.

D'après une formule de Green, un critère suffisant d'harmonicité est l'existence de dérivées secondes continues et la nullité du laplacien ordinaire. D'après cela l'intégrale de Poisson pour toute fonction f sommable de l'arc sur la circonférence est harmonique à l'intérieur; elle prend d'ailleurs en tout point P de continuité de f la valeur de $f(P)$ (finie ou non) (c. à. d. $u(M) \to f(P)$ quand M intérieur $\to P$).

Si u est harmonique dans Ω, elle est identique à l'intégrale de Poisson dans tout cercle complètement intérieur avec mêmes valeurs périphériques; d'où l'existence de dérivées continues, l'analyticité, et aussi la propriété générale des deux moyennes pour tout cercle complètement intérieur, propriété dont dérivent aussitôt par exemple, des théorèmes sur l'harmonicité des limites de suites et l'égale continuité des familles bornées.

3. La fonction $u(M)$ *continue* dans Ω y est dite *sousharmonique* si en chaque point M on a pour r assez petit: $u(M) \leq \mathfrak{M}_M^r u$ ou ce qui est équivalent $u(M) \leq \mathfrak{A}_M^r u$.

D'où: impossibilité d'un maximum en un point dans le voisinage duquel $u \neq$ Constante. Si Ω est bornée, égalité de la borne supérieure avec celle, atteinte, de la p. g. l. à la frontière; en particulier si à la frontière p g. l. $u \leqq 0$, alors $u \leqq 0$; et si v continue dans la fermeture de Ω et harmonique dans Ω majore à la frontière les p. g. l. de u, elle majore u dans Ω. En appliquant cela aux cercles contenus dans Ω, on étend, grâce à l'intégrale de Poisson, l'inégalité de définition pour la circonférence (ou l'aire) de tout cercle complètement intérieur.

Soulignons qu'un critère suffisant de sousharmonicité est qu'il existe des dérivées secondes continues avec laplacien ordinaire $\geqq 0$ et les propriétés suivantes qui serviront de *lemmes essentiels :*

1. Si on remplace dans un cercle complètement intérieur u par l'intégrale de Poisson avec mêmes valeurs périphériques, on obtient une fonction sousharmonique dans Ω.

Car l'intégrale de Poisson majore u et la nouvelle fonction, continue, satisfait même aux points de la circonférence au critère local de sousharmonicité.

2. L'enveloppe supérieure (égale à la borne supérieure en chaque point) d'une famille quelconque de fonctions continues sousharmoniques, si elle est finie et continue, est sousharmonique.

L'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions harmoniques et bornées inférieurement dans leur ensemble dans un domaine, si elle est finie en un point, est partout finie, continue, sousharmonique.

L'existence de la borne inférieure et de la limitation supérieure en un point entraine une même limitation supérieure dans tout domaine ω complètement intérieur (application bien connue des inégalités de Harnack tirées de l'intégrale de Poisson). Dans ω les fonctions sont donc bornées dans leur ensemble, par suite *également continues* et l'enveloppe, bornée et semi-continue inférieurement (d'après la continuité des fonctions de la famille) est alors aussi semi-continue supérieurement. Elle est donc continue et sousharmonique.

L'opposée d'une fonction sousharmonique est dite *surharmonique.* Propriétés et critères immédiats.

4. *Dans tout ce chapitre* on ne considèrera sur la frontière F de *l'ensemble ouvert borné* Ω que des distributions, *fonctions de point* données *bornées.*

Theorème de Perron. *Soit la fonction f bornée sur la frontière F de Ω borné. La famille $\mathfrak{F}_i$ des fonctions continues sous-*

harmoniques dans Ω et dont la plus grande limite en tout point-frontière est au plus égale à f admet une enveloppe supérieure harmonique.

En effet la famille $\mathfrak{F}_i$ n'est pas vide car elle contient les constantes $\leqq \underline{B}_f$ (borne inférieure de f). D'autre part, toute fonction de $\mathfrak{F}_i$ est au plus égale à $\overline{B}_f$ (borne supérieure de f). Donc l'enveloppe supérieure $S(M)$ est bornée:

$$\underline{B}_f \leqq S(M) \leqq \overline{B}_f.$$

Associons à chaque fonction de $\mathfrak{F}_i$, son enveloppe supérieure avec une même constante $k \leqq \underline{B}_f$. Les nouvelles fonctions obtenues appartiennent à $\mathfrak{F}_i$ et admettent la même enveloppe supérieure. Remplaçons chacune dans un petit cercle γ de centre P par son intégrale de Poisson de mêmes valeurs périphériques. On obtient ainsi une famille de fonctions encore dans $\mathfrak{F}_i$, majorant k, majorées par $\overline{B}_f$, toujours de même enveloppe et harmoniques dans γ. Or, son enveloppe est dans γ continue sousharmonique. Donc aussi $S(M)$.

Pour achever remarquons d'abord que sur tout ensemble fermé E de Ω, on peut approcher $S(M)$ à ε arbitraire près par une fonction de $\mathfrak{F}_i$. A chaque point P de E associons en effet une fonction de $\mathfrak{F}_i$ majorant $S(P) - \frac{\varepsilon}{2}$ en P donc majorant $S(M) - \varepsilon$ dans un cercle γ_P assez petit de centre P. Couvrons E par un nombre fini de ces cercles. L'enveloppe supérieure des fonctions associées appartient à $\mathfrak{F}_i$ et répond à la question.

Soit alors un cercle γ fermé de Ω (centre O, rayon r), puis u de $\mathfrak{F}_i$ approchant $S(M)$ à ε près sur γ (ou seulement sur sa circonférence). Remplaçons dans γ, u par son intégrale de Poisson. On obtient v de $\mathfrak{F}_i$ et

$$v(O) = \mathfrak{M}_O^r\, v.$$

D'où $S(O) \geqq v(O) \geqq \mathfrak{M}_O^r\, S - \varepsilon$ et comme ε est arbitraire, $S(O) \geqq \mathfrak{M}_O^r\, S$. O et r sont arbitraires. Donc S déjà sousharmonique est harmonique.

5. *Hypofonction et hyperfonction pour Ω, f.* A côté de la famille $\mathfrak{F}_i$, considérons celle $\mathfrak{F}_s$ des fonctions continues *surharmoniques* dans Ω et dont la plus petite limite en tout point-frontière est $\geqq f$. Elle admet une *enveloppe inférieure* harmonique, qui majore $S(M)$.

Cela résulte d'un raisonnement analogue ou de la considération de la famille initiale relative à $(-f)$ et du fait que les fonctions de $\mathfrak{F}_s$ majorent celles de $\mathfrak{F}_i$ (comme on le voit par différence).

Ces enveloppes relatives à $\mathfrak{F}_i$ et $\mathfrak{F}_s$ seront appelées *hypofonction* et *hyperfonction pour Ω, f.* On les notera $\underline{H}_f^\Omega(M)$, $\overline{H}_f^\Omega(M)$, en supprimant le signe Ω lorsque Ω est fixé.

Propriétés pour Ω fixé:

$$\overline{H}_f = -\underline{H}_{(-f)},$$

$$\underline{B}_f \leqq \underline{H}_f \leqq \overline{H}_f \leqq \overline{B}_f,$$

Si $k =$ Constante, $\begin{cases} \underline{H}_k = \overline{H}_k = k, \\ \underline{H}_{f+k} = \underline{H}_f + k, \quad \overline{H}_{f+k} = \overline{H}_f + k. \end{cases}$

Si $\lambda =$ Constante, $\begin{cases} \lambda > 0: \ \underline{H}_{\lambda f} = \lambda \underline{H}_f, \quad \overline{H}_{\lambda f} = \lambda \overline{H}_f, \\ \lambda < 0: \ \underline{H}_{\lambda f} = \lambda \overline{H}_f, \quad \overline{H}_{\lambda f} = \lambda \underline{H}_f. \end{cases}$

Si $f \leqq g$, $\quad \underline{H}_f \leqq \underline{H}_g, \quad \overline{H}_f \leqq \overline{H}_g.$

Puis $\quad \underline{H}_f + \underline{H}_g \leqq \underline{H}_{f+g} \leqq \overline{H}_{f+g} \leqq \overline{H}_f + \overline{H}_g.$

d'où

$$\underline{B}_{f-g} \leqq \underline{H}_{f-g} \leqq \begin{Bmatrix} \underline{H}_f - \underline{H}_g \\ \overline{H}_f - \overline{H}_g \end{Bmatrix} \leqq \overline{H}_{f-g} \leqq \overline{B}_{f-g};$$

en particulier

$$\begin{rcases} |\underline{H}_f - \underline{H}_g| \\ |\overline{H}_f - \overline{H}_g| \end{rcases} \leqq \overline{B}_{|f-g|}$$

d'où résulte qu'en prenant dans le champ des f bornées, $\overline{B}_{|f-g|}$ comme distance, $\underline{H}_f(M)$ et $\overline{H}_f(M)$ sont des fonctionnelles de f également (en M dans Ω) et uniformément continues.

Enfin $\underline{H}_f$ est l'enveloppe supérieure des $\underline{H}_\varphi$ pour $\varphi \leqq f$ *et semi-continue supérieurement;* et $\overline{H}_f$ l'enveloppe inférieure des $\overline{H}_\psi$ pour $\psi \geqq f$ et semi-continue inférieurement.

Car si u appartient à $\mathfrak{F}_i$ par exemple, ses p. g. l. à la frontière définissent une fonction dont l'enveloppe supérieure avec $\underline{B}_f$ est une fonction bornée $\varphi \leqq f$ et semi-continue supérieurement; et $u \leqq \underline{H}_\varphi \leqq \underline{H}_f$.

Remarque. Dans les inégalités qui précèdent on peut chercher à distinguer l'égalité ou l'inégalité propres. Par exemple si f est semi-continue inférieurement et n'atteint son minimum qu'en un point O de F, $\underline{H}_f > \underline{B}_f$ dans Ω.

Prenons en effet M_0 dans Ω puis $r>0$ moindre que $\overline{OM_0}$. Soit $\varphi(M)$ égale à $\underline{B}_f$ pour $\overline{OM}\leqq r$, égale à $\underline{B}_f+k(\overline{OM}-r)$ pour $\overline{OM}>r$. On disposera de $k>0$ pour que sur F, $\varphi\leqq f$. Comme φ est sousharmonique $\underline{H}_f(M)\geqq\varphi(M)$ dans Ω et en particulier en M_0 d'où $\underline{H}_f(M_0)>\underline{B}_f$.

L'oscillation harmonique pour Ω, f. On appellera ainsi la différence $O_f^\Omega(M)=\overline{H}_f^\Omega(M)-\underline{H}_f^\Omega(M)$ (ou O_f pour Ω fixé) de propriétés immédiates:

$$O_{-f}=O_f,\quad 0\leqq O_f\leqq\overline{B}_f-\underline{B}_f,$$
$$O_K=0,\quad O_{f+K}=O_f,\quad O_{\lambda f}=|\lambda|O_f,$$
$$O_{f+g}\leqq O_f+O_g,\quad O_{\lambda f+\mu g}\leqq|\lambda|O_f+|\mu|O_g.$$

6. *Distribution résolutive et fonction de Wiener.* Lorsque $O_f^\Omega(M)\equiv 0$,[8]) f sera dite ***résolutive*** et la classe de ces fonctions pour Ω sera notée C_Ω. La valeur commune de $\underline{H}_f^\Omega=\overline{H}_f^\Omega$ sera dite *fonction de Wiener* et notée H_f^Ω (par abréviation H_f).

Propriétés immédiates:

1. C_Ω contient toute constante k et $H_k=k$; et dans C_Ω qui n'est donc pas vide,

$$\underline{B}_f\leqq H_f(M)\leqq\overline{B}_f.$$

2. Si C_Ω contient f et g, elle en contient toute combinaison linéaire à coefficients constants et H_f est dans C_Ω une *fonctionnelle linéaire* croissante de f, c. à. d. que

$$H_{\lambda f+\mu g}=\lambda H_f+\mu H_g\quad(\lambda,\mu\ \text{constantes})$$

et

$$H_f\leqq H_g\quad\text{si}\quad f\leqq g.$$

3. Si f_n de C_Ω converge uniformément vers f finie, f appartient à C_Ω.

Théorème de Wiener. *C_Ω comprend les fonctions continues. Autrement dit, pour f continue sur F, l'hypofonction et l'hyperfonction pour Ω, f coïncident.*

Il suffit de voir qu'il existe une fonction continue sur F approchant f à ε arbitraire près et appartenant à C_Ω.

Or si φ continue dans $\Omega+F$ est sousharmonique dans Ω, φ sur F appartient à C_Ω: car $\underline{H}_\varphi(M)$ majorant $\varphi(M)$ dans Ω,

---

[8]) Remarquer que si O_f^Ω est nul en *un* point dans *chaque* domaine de décomposition de Ω, O_f^Ω est partout nul dans Ω.

a en tout point-frontière sa p. p. l. majorant φ et appartient donc à $\mathfrak{F}$, pour φ, ce qui exige $\underline{H}_\varphi = \overline{H}_\varphi$.

Il suffira donc de voir, étant donné f continue, qu'on peut trouver φ_1 et φ_2 continues dans $\Omega+F$, sousharmoniques dans Ω, telles que $\varphi_1-\varphi_2$ sur F approche f à ε près[9]) : car φ_1 et φ_2 appartenant à C_Ω il en sera de même de $\varphi_1-\varphi_2$.

On commencera par faire un prolongement continu de f partout ce qui est bien connu (LEBESGUE—URYSOHN)[10]). Puis on approchera le prolongement continu à ε près, dans un cercle Γ où Ω est complètement intérieur, par une différence de deux fonctions continues sousharmoniques: par exemple en l'approchant par un polynôme, aisément décomposable ensuite en différence de deux polynômes sousharmoniques dans Γ.[11])

7. *Etude avec Ω variable.* Après ces études de $\underline{H}_f^\Omega$, $\overline{H}_f^\Omega$, H_f^Ω comme fonctionnelles de f, il y a lieu de les étudier comme *fonctionnelles de Ω*, f étant la fonction définie sur F par les valeurs d'une certaine fonction Φ dans le plan. Voici seulement un théorème qui n'est qu'une transposition avec quelque extension, du théorème fondamental de WIENER à la base de son extension du problème classique de DIRICHLET.

Théorème. *Etant donné Ω et Φ continue dans $\Omega+F$, pour l'ensemble ouvert ω variable contenu dans Ω, $H_\Phi^\Omega(M)-H_\Phi^\omega(M)$ tend vers* 0 *avec la distance maxima à F des points de $\Omega-\omega$, et cela, uniformément pour M sur tout ensemble fermé E de Ω.*

---

9) On reprend là comme BOULIGAND une idée au fond de POINCARÉ.

10) Du théorème très général de URYSOHN (1925) on n'a besoin que du cas particulier de LEBESGUE (1907) dont voici une démonstration au moins peu connue: Pour faire le prolongement continu de f continue sur F fermé quelconque, il suffit de définir $\Phi(M)$ égale à une valeur comprise entre les bornes des valeurs de f aux points de F à distance δ_M minima de M, puis de remplacer $\Phi(M)$ par sa moyenne dans l'aire du cercle de centre M et rayon δ_M.

11) On peut se passer de l'approximation par un polynome en faisant deux médiations spatiales successives à rayon assez petit, ce qui fournit dans Γ une fonction Φ_1 arbitrairement voisine et possédant des dérivées secondes continues et un laplacien ordinaire continu $\Delta\Phi_1$. Les potentiels logarithmiques des couches dans Γ de densités $\frac{1}{2\pi}(\Delta\Phi_1)^-$ et $-\frac{1}{2\pi}(\Delta\Phi_1)^+$ sont continues sousharmoniques et leur différence vaut Φ_1 à une fonction harmonique près.

Etant donné $\varepsilon > 0$ prenons u et v de $\mathfrak{F}_i$ et $\mathfrak{F}_s$ pour Ω et Φ, tels que sur E

$$u \geqq H_\Phi^\Omega - \varepsilon, \quad v \leqq H_\Phi^\Omega + \varepsilon$$

donc

$$v - u \leqq 2\varepsilon.$$

On peut ensuite trouver δ tel que sur Ω et à distance de F au plus égale à δ, on ait $u - \varepsilon \leqq \Phi \leqq v + \varepsilon$.

Donc si ω est tel que la distance maxima à F des points de $\Omega - \omega$ est $\leqq \delta$, tout point-frontière de ω intérieur à Ω sera distant de F d'au plus δ et l'inégalité précédente y aura lieu. D'où dans ω, et par suite sur E si δ est pris assez petit

$$u(M) - \varepsilon \leqq H_\Phi^\omega(M) \leqq v(M) + \varepsilon$$

tandis que

$$u \leqq H_\Phi^\Omega \leqq v$$

donc sur E

$$|H_\Phi^\Omega(M) - H_\Phi^\omega(M)| \leqq v - u + \varepsilon \leqq 3\varepsilon.$$

Cas particulier: Si ω_n dans Ω, tend vers Ω en croissant (sens large), $H_\Phi^{\omega_n}(M) \to H_\Phi^\Omega(M)$ uniformément sur tout ensemble fermé de Ω.

Remarque. Si Φ est sousharmonique dans Ω: $H_\Phi^\omega \leqq H_\Phi^\Omega$.

8. *Etude à la frontière*[12]) *de* $\underline{H}_f^\Omega$, $\overline{H}_f^\Omega$, H_f^Ω.

Lemme (Lebesgue—Bouligand). *S'il existe sur l'intersection de Ω et d'un voisinage du point-frontière M_0 une fonction harmonique ou surharmonique > 0, s'annulant en M_0, il existe dans tout Ω une fonction harmonique > 0 s'annulant en M_0 et de p. p. l. > 0 en tout autre point-frontière.*

Supposons donc que γ_0 étant un domaine circulaire de centre M_0, il existe dans l'intersection $\gamma_0 \cap \Omega$, $h(M)$ surharmonique > 0 s'annulant en M_0. Il suffira de montrer que $H_{\overline{M_0 M}}$ qui majore $\overline{M_0 M}$ sousharmonique, s'annule en M_0.

Soit γ un domaine circulaire concentrique plus petit, de rayon ϱ et circonférence γ'. Si γ' rencontre Ω, soit sur γ' un enensemble e fermé contenu dans Ω et dont la mesure angulaire sur γ' diffère de celle de $\gamma' \cap \Omega$ de moins de $2\pi \frac{\varrho}{D}$, D étant le maximum de $\overline{M_0 M}$ sur F. Soit K la borne inférieure > 0 de

[12]) Etude essentiellement inspirée des travaux anciens de Lebesgue.

h sur e. Introduisons l'intégrale de POISSON $I(M)$ pour γ, formée avec la valeur D sur $(\gamma' \cap \Omega) - e$ et 0 ailleurs. Au centre

$$0 \leqq I(M_0) \leqq \varrho.$$

Soit alors u quelconque de $\mathfrak{F}_i$ pour Ω et $\overline{M_0 M}$; $u \leqq D$. Etudions-la dans $\gamma \cap \Omega$ de frontière α. Aux points de α sur F:

$$\text{p. g. l. } u \leqq \varrho.$$

Si γ' ne rencontre pas Ω, α appartient à F; donc dans Ω:

$$u \leqq \varrho$$

et

$$H_{\overline{M_0 M}} \leqq \varrho.$$

Si γ' rencontre Ω, la fonction sousharmonique dans $\gamma \cap \Omega$

$$u(M) - \varrho - \frac{D}{K} h(M) - I(M)$$

admet en tout point-frontière, qu'il appartienne à F, e ou $\gamma' - e$, une p. g. l. $\leqq 0$. Elle est donc $\leqq 0$.

Donc dans $\gamma \cap \Omega$,

$$H_{\overline{M_0 M}}(M) \leqq \varrho + \frac{D}{K} h(M) + I(M)$$

d'où

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ H_{\overline{M_0 M}}(M) \leqq \varrho + I(M_0) \leqq 2\varrho$$

et comme ϱ est arbitraire > 0

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ H_{\overline{M_0 M}} \leqq 0$$

donc

$$H_{\overline{M_0 M}}(M) \to 0 \quad \text{quand} \quad M \to M_0.$$

D é f i n i t i o n. Un point-frontière O d'un ensemble ouvert quelconque ω sera dit *régulier* pour ω s'il existe sur l'intersection de ω et d'un voisinage de O une fonction harmonique (ou ce qui est équivalent surharmonique) > 0 s'annulant en O. Sinon irrégulier.

T h é o r è m e. *M_0 de F étant régulier pour Ω, si f est semi-continue supérieurement en M_0:*

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ \overline{H}_f^{\Omega}(M) \leqq f(M_0)$$

et de même, ce qui est équivalent, si f est semi-continue inférieurement en M_0,

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. p. l.}}\ \underline{H}_f^{\Omega}(M) \geqq f(M_0).$$

Soit v harmonique dans Ω, s'annulant en M_0, de p. p. l. > 0 aux autres points-frontière. Etant donné $\varepsilon > 0$, soit $\varrho > 0$ tel que $\overline{M_0 M} < \varrho$ entraine $f(M) < f(M_0) + \varepsilon$ et K le minimum de v pour $\overline{M_0 M} \geqq \varrho$.

La fonction harmonique $f(M_0) + \varepsilon + \frac{v}{K}[\overline{B}_f - f(M_0)]$ admet en tout point-frontière une p. p. l. $\geqq f$ donc fait partie de $\mathfrak{F}_s$ pour f.

Ainsi :

$$\overline{H}_f \leqq f(M_0) + \varepsilon + \frac{v(M)}{K}[\overline{B}_f - f(M_0)],$$

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ \overline{H}_f \leqq f(M_0) + \varepsilon$$

et puisque ε est arbitraire,

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ \overline{H}_f \leqq f(M_0).$$

Corollaire. *Si f est continue en M_0 régulier, $\underline{H}_f(M)$ et $\overline{H}_f(M)$ tendent vers $f(M_0)$ quand $M \to M_0$, donc aussi H_f s'il existe.*

Critère: pour que M_0 soit régulier, il faut et suffit que pour *une* fonction f semi-continue inférieurement atteignant son minimum en M_0 seulement, $\underline{H}_f(M) \to f(M_0)$ quand $M \to M_0$.

Les suites régulières. Une suite de points M_n de ω ouvert tendant vers un point-frontière M_0 sera dite *régulière* pour ω, s'il existe sur l'intersection de ω et d'un voisinage de M_0 une fonction harmonique $v > 0$ telle que $v(M_n) \to 0$. Sinon irrégulière.

Il y a extension immédiate des énoncés qui précèdent en faisant tendre M vers M_0 sur la suite M_n. Pour que M_0 soit régulier il faut et suffit que toutes les suites $M_n \to M_0$ soient régulières.

9. *Le problème de Dirichlet.* Le problème classique consiste, étant donnée f continue sur la frontière F de Ω borné, à trouver une fonction harmonique dans Ω, prenant en chaque point-frontière une valeur limite déterminée égale à f.

Il ne peut y avoir deux solutions distinctes ; s'il y en a une, elle appartient à $\mathfrak{F}_i$ et $\mathfrak{F}_s$ et vaut donc H_f^{Ω}.

Pour que, Ω étant donné, il y ait une solution *quelle que soit f continue,* il faut et suffit que tous les points-frontière soient réguliers pour Ω.

Dans le cas général avec f continue, on avait appelé solution généralisée (ou de WIENER) notre fonction de WIENER.

Elle prend la valeur f en tout point-frontière régulier et tend vers $f(M_0)$ sur toute suite régulière $M_n \to M_0$.

II. Extensions et compléments.

10. *Rappel de quelques notions.* Une fonction $u(M)$ dans ω ouvert y est dite *sousharmonique au sens le plus général* si:

1° $u(M)$ est en chaque point finie ou vaut $-\infty$ et est semi-continue supérieurement,

2° $u(M)$ est sommable sur tout ensemble borné fermé de ω et est en chaque point M au plus égale à la moyenne dans tout domaine circulaire de centre M et rayon assez petit.

Comme dans le cas de u continue, mêmes conséquences pour l'impossibilité de maximum, pour la borne supérieure et la propriété $u \leqq 0$ si p. g. l. $u \leqq 0$ à la frontière de ω *borné.*

Soit ω_0 borné complètement intérieur, de frontière F_0 à points tous réguliers (comme c'est le cas pour le cercle et le carré); soit sur F_0, φ_n continue, décroissante de limite u. Dans ω_0, $H^{\omega_0}_{\varphi_n}$ majore u, décroît; sa limite $\bar{u}_{\omega_0}$ indépendante de φ_n est harmonique, majore u et son prolongement par u est sousharmonique dans tout ω. Si ω_0 est un cercle, on voit que u est sommable sur la circonférence et que $\bar{u}_{\omega_0}$ est l'intégrale de POISSON correspondante, ce qui entraine $u(M_0) \leqq \mathfrak{M}^r_{M_0} u$ (donc $u(M_0) \leqq \mathfrak{A}^r_{M_0} u$). L'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions sousharmoniques, si elle est en chaque point $\neq +\infty$ et semi-continue supérieurement est sousharmonique.

Propriétés immédiates des fonctions *surharmoniques* opposées aux sousharmoniques.

On dit qu'un ensemble borélien borné E est de *capacité nulle* si toute charge >0 (distribuée selon une fonction $\geqq 0$ additive d'ensemble borélien) donne un potentiel non borné supérieurement. Soulignons le résultat de G. C. EVANS[13]), que si E est fermé, *il existe une charge finie* >0 *assurant un potentiel égal à* $+\infty$ *sur* E.

Enfin sur la frontière de Ω borné, l'*ensemble des points irréguliers* est de capacité nulle (KELLOGG—EVANS) et même est la réunion dénombrable d'ensembles fermés de capacité nulle[14]). On en déduit [14]), d'après le résultat de EVANS, *l'existence d'une*

---

[13]) G. C. EVANS, Potentials and Positively Infinite Singularities of Harmonic Functions, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **43** (1936), pp. 419—424. Résultat valable dans l'espace à $n \geqq 2$ dimensions.

[14]) *Voir* M. BRELOT, Problème de Dirichlet et majorantes harmoniques, *Bulletin des sciences math.*, **63** (1939), pp. 79—96 et 115—128.

fonction harmonique >0 *dans* Ω, *tendant vers* $+\infty$ *en tout point-frontière irrégulier*

Je rappelle [14]) pour éclairer le sujet, que l'ensemble des points irréguliers pour Ω est la somme des ensembles (d'ailleurs disjoints) des points irréguliers pour les divers domaines composants.

11. *Extension du Théorème de Perron.*

Théorème. *Soit sur la frontière* F *de* Ω *ouvert borné, une fonction* f *égale en chaque point à un nombre fini, à* $+\infty$ *ou à* $-\infty$. *On considère la famille* $\mathfrak{G}_i$ *des fonctions sousharmoniques générales dans* Ω, *de* p. g. l. $\leqq f$ *à la frontière. Si* $\mathfrak{G}_i$ *est non vide, son enveloppe supérieure* $T(M)$ *vaut dans chaque domaine composant,* $+\infty$ *ou une fonction harmonique; il y a alors, dans la famille, des fonctions continues et leur enveloppe supérieure est la même.*

Soit en effet le point P de Ω. $T(P) \neq -\infty$ car si on prend u de $\mathfrak{G}_i$ et qu'on la remplace dans un cercle de centre P par son intégrale de POISSON, on obtient une nouvelle fonction de $\mathfrak{G}_i$, finie en P.

Supposons $T(P)$ fini. Alors en reprenant le raisonnement de n° **4** et remplaçant k par une fonction $v(M)$ de $\mathfrak{G}_i$ harmonique au voisinage de P, on voit que $T(M)$ est continue sousharmonique au voisinage de P. Si maintenant $T(P)=+\infty$, T vaut $+\infty$ au voisinage. C'est ce qu'on voit en introduisant par exemple une suite de fonctions de $\mathfrak{G}_i$, harmoniques et bornées inférieurement dans leur ensemble dans un cercle de centre P mais tendant en P vers $+\infty$.

En conclusion si $T(P)$ est finie, elle est dans tout le domaine ω de décomposition contenant P, continue sousharmonique et on voit l'harmonicité comme au n° **4,** en utilisant des fonctions de $\mathfrak{G}_i$ harmoniques au voisinage des points considérés. Si $T(P)=+\infty$, T vaut $+\infty$ dans tout ω.

Voyons enfin que si u appartient à $\mathfrak{G}_i$, il existe dans $\mathfrak{G}_i$ une fonction continue qui majore u. Grâce à un réseau, on peut former une suite de domaines carrés Q_n n'empiétant pas, complètement intérieurs à Ω, dont la somme des fermetures est Ω et tels que le côté et la distance à F de Q_n tendent vers 0 avec $\frac{1}{n}$. En remplaçant dans chaque Q_n, u par $\bar{u}_{Q_n}$, on obtient une fonction de $\mathfrak{G}_i$ qui ne peut avoir de discontinuités que sur les côtés des carrés. On recommence l'opération avec un autre réseau orienté différemment et il ne reste plus qu'un ensemble dénombrable de points de discontinuité. Une nouvelle opération convenable les fait disparaître et résoud la question.

R e m a r q u e. On a un théorème analogue avec la famille $\mathfrak{G}_s$ des fonctions surharmoniques de p. p. l. $\geqq f$ sur F. Mais si $\mathfrak{G}_i$ et $\mathfrak{G}_s$ sont simultanément non vides, *toute fonction de $\mathfrak{G}_s$ ne majore pas nécessairement toute fonction de $\mathfrak{G}_i$*. Il suffit de voir que dans le cercle de rayon 1 diminué de son centre O avec $f=0$ sur la circonférence et $f(O)=+\infty$ (ou $-\infty$), $K\log\frac{1}{\overline{OM}}$ appartient à $\mathfrak{G}_i$ et $\mathfrak{G}_s$ quel que soit $K>0$.

12. *Hypofonction, hyperfonction, distribution résolutive et fonction de Wiener générales.* Pour éviter l'inconvénient précédent on va restreindre les familles. Il sera plus clair d'étudier d'abord chaque domaine composant.

Supposons Ω domaine. Soit $\mathfrak{G}_i'$ la famille partielle (de $\mathfrak{G}_i$) des fonctions dont chacune est *bornée supérieurement.* En raisonnant comme plus haut on voit que *si $\mathfrak{G}_i'$ est non vide l'enveloppe supérieure $T'(M)$ est $+\infty$ ou une fonction harmonique; il y a alors dans $\mathfrak{G}_i'$ des fonctions continues et leur enveloppe est la même.*

On définira l'*hypofonction* $\underline{H}_f^\Omega(M)$ en posant:

$$\underline{H}_f^\Omega(M)=-\infty \qquad \text{si } \mathfrak{G}_i' \text{ est vide}$$
$$\underline{H}_f^\Omega(M)=T'(M) \qquad \text{si } \mathfrak{G}_i' \text{ est non vide.}$$

Introduction analogue de $\mathfrak{G}_s'$ et de l'hyperfonction $\overline{H}_f^\Omega$. *Constatons que: $\underline{H}_f^\Omega\leqq\overline{H}_f^\Omega$.*

Le seul cas non immédiat est celui où $\mathfrak{G}_i'$ et $\mathfrak{G}_s'$ sont simultanément non vides. Soient alors u et v de $\mathfrak{G}_i'$ et $\mathfrak{G}_s'$; $u-v$ est sousharmonique et en tout point frontière P sa p. g. l. est $\leqq 0$, dans les 3 cas: $f(P)$ fini, $f(P)=\pm\infty$; donc $u-v\leqq 0$ dans Ω.

Si Ω est un ensemble ouvert borné quelconque, l'hypofonction et l'hyperfonction, notées encore $\underline{H}_f^\Omega$, $\overline{H}_f^\Omega$ seront par définition égales dans chaque domaine composant ω_k à $\underline{H}_f^{\omega_k}$, $\overline{H}_f^{\omega_k}$ où f est prise sur la seule frontière de ω_k.

On remarquera que de toute fonction sousharmonique dans Ω, de p. g. l. $\leqq f$ à la frontière et bornée supérieurement dans chaque domaine composant, on en déduit par simple addition d'une constante dans chaque domaine, une autre fonction analogue, mais bornée supérieurement dans Ω. C'est ainsi que si $\mathfrak{G}_i'$ désigne encore la famille partielle de $\mathfrak{G}_i$ des fonctions chacune bornée supérieurement, $\mathfrak{G}_i''$ celle des fonctions dont chacune est bornée supérieurement dans chaque domaine composant, ces familles sont simultanément vides ou non, et si elles sont non vides, elles ont la même enveloppe supérieure qui est $\underline{H}_f$.

Si $\underline{H}_f^\Omega$ et $\overline{H}_f^\Omega$ sont partout *finies* et égales, f sera dite *résolutive* et la valeur commune, harmonique, notée H_f^Ω de l'hypofonction et de l'hyperfonction sera dite *fonction de Wiener* pour Ω, f.

On pourra avec quelques conventions et restrictions généraliser les propriétés indiquées au chapitre I pour ces fonctionnelles. En particulier $\underline{H}_f^\Omega = -\overline{H}_{-f}^\Omega$ et on se dispensera des énoncés pour l'hyperfonction corrélatifs de ceux pour l'hypofonction.

13. *On supposera désormais* pour simplifier un peu, que Ω *est un domaine.* Approfondissons la composition de $\mathfrak{G}_i'$.

Voici d'abord comme lemme une proposition, d'ailleurs valable, et j'en souligne l'intérêt, pour Ω borné quelconque.

L e m m e. *Si f est bornée supérieurement et, en M_0 régulier, semi-continue supérieurement, alors*

$$\text{p. g. l.}_{M \to M_0} \overline{H}_f^\Omega(M) \leqq f(M_0)$$

donc aussi

$$\text{p. g. l.}_{M \to M_0} \underline{H}_f^\Omega(M) \leqq f(M_0).$$

Si $f(M_0)$ est fini, on reprendra la démonstration du théorème du n° **8**; si $f(M_0) = -\infty$ on fera un raisonnement analogue.

T h é o r è m e. *Si $\mathfrak{G}_i'$ est non vide, elle comprend des fonctions harmoniques et leur enveloppe supérieure est encore $\underline{H}_f^\Omega$.*[15])

Soit u de $\mathfrak{G}_i'$ et φ la fonction de ses p. g. l. à la frontière; $\varphi \leqq f$ et $\underline{H}_\varphi^\Omega$, bornée supérieurement comme φ, est harmonique et de p. g. l. $\leqq \varphi$ en tout point-frontière régulier.

Si v est une fonction harmonique > 0 dans Ω, tendant vers $+\infty$ en tout point-frontière irrégulier et $\lambda =$ Constante > 0, $\underline{H}_\varphi^\Omega - \lambda v$ est harmonique et appartient à $\mathfrak{G}_i'$. Soit P fixé dans Ω.

---

[15]) Ici (voir à ce propos la référence de la note [14])) va intervenir le théorème d'existence d'Evans souligné dans l'introduction. Mais ce qui est essentiel pour le lemme 2 du n° **14** dont dérive le résultat final, c'est seulement, dans le théorème suivant du n° **13**, le fait que u sousharmonique borné supérieurement, de p. g. l. $\leqq f$ aux points réguliers est $\leqq \underline{H}_f$ et sa démonstration s'appuie sur le théorème d'Evans qui joue là son rôle le plus important.

Si $\underline{H}_f^\Omega(P)$ est fini supposons u tel que $u(P) > \underline{H}_f^\Omega(P) - \varepsilon$. Alors $\underline{H}_\varphi^\Omega(P) > \underline{H}_f^\Omega(P) - \varepsilon$ et si λ est assez petit

$$\underline{H}_\varphi^\Omega(P) - \lambda v(P) > \underline{H}_f^\Omega(P) - 2\varepsilon.$$

Si $\underline{H}_f^\Omega(P) = +\infty$ on disposera de u, puis de λ pour que $\underline{H}_\varphi^\Omega(P) - \lambda v(P)$ soit arbitrairement grand.

Théorème. *$\underline{H}_f^\Omega$ ne dépend pas des valeurs de f aux points irréguliers. Si $\underline{H}_f^\Omega$ est $\neq -\infty$ il existe des fonctions sousharmoniques dans Ω, générales ou seulement continues ou même seulement harmoniques et dont chacune est bornée supérieurement et de* p. g. l. *$\leqq f$ aux points-frontière réguliers; et $\underline{H}_f^\Omega$ est l'enveloppe supérieure de chacune de ces trois familles. Si $\underline{H}_f^\Omega = -\infty$, il n'existe pas de fonctions de ces natures.*

Supposons $\underline{H}_f^\Omega \neq -\infty$, c. à d. non vide. Les trois familles considérées sont non vides et leurs enveloppes supérieures majorent $\underline{H}_f^\Omega$ et aussi tout $\underline{H}_{f_1}^\Omega$, où f_1 coïncide avec f aux points réguliers. Or si u est fonction d'une de ces familles et v la même fonction harmonique que précédemment $u - \lambda v\,(\lambda > 0)$ est sousharmonique, de p. g. l. à la frontière au plus égale à f ou f_1. D'après cela $\underline{H}_{f_1}^\Omega \neq -\infty$, $u \leqq \underline{H}_f^\Omega$, $u \leqq \underline{H}_{f_1}^\Omega$. De sorte que les enveloppes considérées coïncident avec $\underline{H}_{f_1}^\Omega$ et $\underline{H}_f^\Omega$ qui sont donc égales.

Si maintenant $\underline{H}_f^\Omega = -\infty$, il en est de même de $\underline{H}_{f_1}^\Omega$, puisque de $\underline{H}_{f_1}^\Omega \neq -\infty$ résulterait d'après ce qui précéde $\underline{H}_f^\Omega \neq -\infty$. Il n'y a pas de fonction des natures indiquées sinon pour l'une d'elles la p. g. l. à la frontière serait du type f_1 avec $\underline{H}_{f_1}^\Omega \neq -\infty$.

14. *Critères et représentation intégrale des fonctionnelles* (Ω domaine).

Lemme 1. *$\underline{H}_f^\Omega$ est l'enveloppe supérieure des $\underline{H}_\varphi^\Omega$ où φ est bornée supérieurement, semi-continue supérieurement et $\leqq f$. On peut même trouver une suite croissante φ_n de tels φ telle que $\underline{H}_{\varphi_n}^\Omega$ tende en croissant vers $\underline{H}_f^\Omega$.*

La première partie est immédiate. Quant à la seconde, si $\underline{H}_f^\Omega$ est finie, on choisira dans les φ, ψ_n tel que

$$\underline{H}_f^\Omega(M_0) - \underline{H}_{\psi_n}^\Omega(M_0) < \varepsilon_n \to 0 \quad (M_0 \text{ fixé dans } \Omega);$$

on prendra φ_n égale à l'enveloppe supérieure sur F de $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$; alors $\underline{H}_{\varphi_n}^\Omega(M_0) \to \underline{H}_f^\Omega(M_0)$ et la limite de $\underline{H}_{\varphi_n}^\Omega$, majorée par $\underline{H}_f^\Omega$, harmonique comme cette fonction, lui est égale dans tout Ω.

Donc $\underline{H}_{\varphi_n}^{\Omega}(M) \to \underline{H}_f^{\Omega}$. Démonstration immédiate ou analogue si $\underline{H}_f^{\Omega} = \pm\infty$.

Lemme 2. *Si f est bornée supérieurement et semi-continue supérieurement, $\underline{H}_f^{\Omega}$ est la borne inférieure des H_θ^{Ω} pour θ bornée, continue, $\geqq f$ et la limite de $H_{\theta_n}^{\Omega}$ pour θ_n bornée, continue, décroissante, de limite f; et si $\underline{H}_f^{\Omega} \neq -\infty$, f est résolutive.*

D'abord on voit que l'enveloppe inférieure des H_θ^{Ω} et la limite de $H_{\theta_n}^{\Omega}$ coïncident, car quels que soient θ et ε fixés, on a, pour n assez grand, $\theta_n \leqq \theta + \varepsilon$ d'où $H_{\theta_n}^{\Omega} \leqq H_\theta^{\Omega} + \varepsilon$. Soit $\lambda(M)$ cette fonction limite, bornée supérieurement, qui est soit $-\infty$ soit harmonique. $\lambda \geqq \overline{H}_f^{\Omega}$.

Si $\lambda = -\infty$, $\overline{H}_f^{\Omega} = \underline{H}_f^{\Omega} = -\infty$.

Si λ est harmonique, comme en tout point-frontière régulier M_0, $\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ H_{\theta_n}^{\Omega} \leqq \theta_n(M_0)$, on aura $\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ \lambda(M) \leqq \theta_n(M_0)$ puis $\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ \lambda(M) \leqq f(M_0)$ et d'après le dernier théorème du n° **13**: $\lambda \leqq \underline{H}_f^{\Omega}$. D'où $\lambda = \underline{H}_f^{\Omega} = \overline{H}_f^{\Omega}$.

15. On connait la théorie fondée par F. Riesz de la *représentation des fonctionnelles linéaires par des intégrales de* Lebesgue—Stieltjes. Selon des résultats généraux, il est immédiat que, *dans le champ au moins des fonctions f bornées continues,* $H_f^{\Omega}(M)$ peut s'écrire $\int_F f(P)\, d\mu^M(P)$ où pour M fixé, μ^M est une fonction *unique* $\geqq 0$ additive d'ensemble borélien sur F.

On remarquera que l'on connait déjà cette fonction d'ensemble μ^M: c'est celle qui représente la distribution de masses sur F obtenue par balayage de Ω pourvue de la masse 1 en M et dont je ne rappellerai pas ici toutes les propriétés. Les diverses théories du balayage conduisent en effet avec cette signification de μ^M à la représentation par $\int_F f\, d\mu^M$ (selon Wiener—de la Vallée Poussin) de la solution de Wiener relative à Ω et f continue.

La connaissance de ce μ^M entraine, comme on sait, la définition générale pour les ensembles de F, d'une mesure extérieure, d'une mesure intérieure, d'une mesurabilité (μ^M).

On sait alors, pour $f \geqq 0$ et mesurable (μ^M) sur F, définir $\int_F f\, d\mu^M$ fini ou non. Pour f quelconque sur F, mesurable (μ^M), on dira qu'elle est *sommable* (μ^M), si, grâce à la décomposition classique $f = f^+ - f^-$, $\int_F f^+\, d\mu^M$ et $\int_F f^-\, d\mu^M$ sont finis, et *sommable*

(μ^M) *au sens large* si l'une au moins de ces quantités est finie; et on posera dans ces cas

$$\int_F f d\mu^M = \int_F f^+ d\mu^M - \int_F f^- d\mu^M.$$

Enfin on sait, et c'est presque immédiat, que au moins pour un ensemble e ouvert ou fermé sur F, $\mu^M(e)$ est fonction harmonique de M dans Ω: la fonction égale à 1 sur e, à 0 ailleurs sur F étant semi-continue est la limite d'une suite monotone de fonctions θ_n continues et $\int_F \theta_n d\mu^M$ qui tend vers $\mu^M(e)$ tend aussi, puisque monotone et harmonique, vers une fonction harmonique. Mais alors la mesure extérieure, dérivée du (μ^M) initial, d'un ensemble quelconque de F est, considérée comme fonction de M, l'enveloppe inférieure de fonctions harmoniques comprises entre 0 et 1 donc est continue surharmonique. De même la mesure intérieure est continue sousharmonique et d'ailleurs au plus égale à la précédente. La coïncidence en un point entraine la coïncidence partout dans Ω, donc l'harmonicité par rapport à M de la mesure de l'ensemble considéré. *Ainsi la mesurabilité* (μ^M) *et la sommabilité* (large ou non) (μ^M) *sont indépendantes de* M *dans le domaine* Ω, de sorte qu'on dira simplement „mesurable (μ)" et „sommable (μ)". On n'a voulu faire appel, pour arriver à ce résultat, qu'à des notions du chapitre I mais nous reviendrons sur l'interprétation et les propriétés des mesures (extérieure et intérieure) précédentes.

16. Reprenons d'abord le lemme 2 et le cas de f bornée supérieurement et semi-continue supérieurement. Si θ_n bornée continue décroissante tend vers f,

$$\underline{H}_f^\Omega(M) = \lim H_{\theta_n}^\Omega(M)$$

et

$$H_{\theta_n}^\Omega(M) = \int_F \theta_n d\mu^M \to \int_F f d\mu^M.$$

Ainsi $\underline{H}_f^\Omega = \int_F f d\mu^M$; la condition $\underline{H}_f^\Omega \neq -\infty$ s'exprime par la sommabilité (μ) de f et entraine que f soit résolutive, avec $H_f^\Omega(M) = \int_F f d\mu^M$.

Théorème. *Quelle que soit* f *fixée, il existe sur* F *une fonction* $\psi \leq f$, *mesurable* (μ), *sommable* (μ) *au sens large, telle que*

$$\underline{H}_f^\Omega(M) = \int_F \psi \, d\mu^M$$

quel que soit M de Ω.

C'est évident si $\underline{H}_f^\Omega = -\infty$ en prenant $\psi = -\infty$.

Supposons $\underline{H}_f^\Omega \neq -\infty$. Il existe d'après le lemme 1 une suite croissante $\varphi_n \leqq f$ de fonctions, chacune bornée supérieurement et semi-continue supérieurement, telle que $\underline{H}_{\varphi_n}^\Omega(M)$ soit $\neq -\infty$ et, d'ailleurs valant $H_{\varphi_n}^\Omega = \int_F \varphi_n \, d\mu^M$, tende vers $\underline{H}_f^\Omega$.

Si ψ est la limite de φ_n, elle est sommable (μ) au sens large et $\int_F \varphi_n d\mu^M \to \int_F \psi d\mu^M$ d'où l'énoncé, le ψ mis en évidence étant d'ailleurs au plus de la seconde classe de Baire.

Théorème. *Quelle que soit $\alpha(M) \leqq f(M)$ sur F, mesurable (μ) et sommable (μ) au sens large, $\int_F \alpha d\mu^M \leqq \underline{H}_f^\Omega(M)$.*

C'est évident si $\int_F \alpha d\mu^M = -\infty$. Sinon il existe d'après la théorie de l'intégration, une suite croissante de fonctions $\varphi_n \leqq \alpha$, dont chacune est bornée supérieurement, semi-continue supérieurement, et qui est telle que $\int_F \varphi_n d\mu^M \neq -\infty$ tende vers $\int_F \alpha d\mu^M$. Comme $\int_F \varphi_n d\mu^M = H_{\varphi_n}^\Omega \leqq \underline{H}_f^\Omega$, on conclut aussitôt.

Corollaires. 1. *Pour que $\underline{H}_f^\Omega \neq -\infty$ (c. à d. $\mathfrak{G}_i'$ non vide) il faut et suffit que f majore une fonction φ mesurable (μ) et sommable (μ).*

Supposons $\underline{H}_f^\Omega \neq -\infty$. Alors le ψ de l'avant-dernier théorème, limité au besoin supérieurement par 0 (c. à d. remplacé par $-\psi^-$) répond à la question. Plus directement il existe une fonction de $\mathfrak{G}_i'$ et sa p. g. l. à la frontière répond à la question (elle est d'ailleurs bornée supérieurement et semi-continue supérieurement).

La condition est suffisante car $\int_F \varphi d\mu^M$ étant fini, $\underline{H}_f^\Omega$ qui le majore est $\neq -\infty$.

2. *Si $\underline{H}_f^\Omega$ est fini, la fonction $\psi \leqq f$ de la représentation intégrale de $\underline{H}_f^\Omega$ est unique à une altération près sur un ensemble de mesure (μ) nulle.*

Soient en effet ψ_1, ψ_2 répondant à la question

$$\int_F \psi_1 d\mu^M = \int_F \psi_2 d\mu^M = \underline{H}_f^\Omega \text{ fini.}$$

L'enveloppe supérieure Ψ de ψ_1 et ψ_2 a une intégrale qui majore les précédentes, mais qui d'après le dernier théorème est majorée par $\underline{H}_f^\Omega$. Donc ψ_1, ψ_2 majorés par Ψ et de même intégrale finie, n'en diffèrent que sur un ensemble de mesure (μ) nulle et il en est de même entre eux.

Théorème. *Pour que f soit résolutive il faut et suffit que f soit mesurable (μ) et sommable (μ) et alors*

$$H_f^\Omega(M) = \int_F f d\mu^M.$$

Si $\underline{H}_f^\Omega = \overline{H}_f^\Omega$ fini, il existe deux fonctions $\psi_1 \leqq f$ et $\psi_2 \geqq f$ mesurables (μ) et sommables (μ) telles que

$$\int_F \psi_1 d\mu^M = \int_F \psi_2 d\mu^M.$$

Elles doivent coïncider presque partout (μ); donc f intermédiaire est mesurable (μ) et sommable (μ). Réciproquement cette condition entraine d'après le théorème qui précède

$$\int_F f d\mu^M \leqq \underline{H}_f^\Omega$$

et de même

$$\int_F f d\mu^M \geqq \overline{H}_f^\Omega$$

d'où

$$\underline{H}_f^\Omega = \overline{H}_f^\Omega \text{ fini } = H_f^\Omega = \int_F f d\mu^M.$$

Cas particulier. Si f est bornée et borélienne, elle est résolutive[16]).

Remarques. 1. Si $\underline{H}_f^\Omega$ et $\overline{H}_f^\Omega$ sont finis, ils ne sont égaux que si f est mesurable (μ).

2. Si f est mesurable (μ), pour que $\underline{H}_f^\Omega$ (ou $\overline{H}_f^\Omega$) soit fini, il faut et suffit que f^- (ou f^+) soit sommable (μ).

Mesure harmonique. Soit sur F un ensemble E quelconque, de fonction caractéristique Φ_E (égale à 1 sur E, à 0 ailleurs). On verra aisément que les mesures extérieure et intérieure de E déduites de (μ^M), valent $\overline{H}_{\Phi_E}^\Omega(M)$ et $\underline{H}_{\Phi_E}^\Omega(M)$. On les appellera mesure harmonique ou poids, respectivement extérieur ou intérieur, de E relativement à Ω. Si E est mesurable (μ), elles sont confondues

[16]) L'exemple contraire qu'avait cru donner M. Wiener *(loc. cit.* [6]), p. 29) est inexact, comme on peut le voir facilement de manière directe.

et valent $H^{\Omega}_{\Phi_E}(M)$, dit aussi poids ou mesure harmonique de E relativement à Ω. Cela contient bien des définitions et propriétés données à ce sujet[17]) dans des cas plus ou moins généraux et adaptés à notre hypothèse de Ω borné qu'il serait d'ailleurs aisé d'élargir. Soulignons seulement que, sur F, les ensembles (boréliens ou non) de capacité nulle (c. à d. dont tout sous-ensemble fermé est de capacité nulle au sens bien classique) sont de mesure harmonique *intérieure* nulle.

(Reçu le 25 mai 1939)

---

[17]) *Voir* outre Wiener (loc. cit.): R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen* (Leipzig, 1936); A. J. Maria, The Potential of a Positive Mass and The Weight Function of Wiener, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.*, **20** (1934), pp. 485-489; J. Sire, Sur le problème de Dirichlet, la fonction potentielle et l'ensemble des points irréguliers, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **197** (1933), pp. 294-296.

Sur le théorème de Jordan.

Par FRÉDÉRIC RIESZ à Szeged.

Introduction.

Le théorème de JORDAN affirme que *toute ligne continue et fermée sans point double,* brièvement toute courbe de JORDAN, *décompose le plan en deux domaines différents.* La démonstration de ce théorème que nous allons ajouter dans la présente note aux nombreuses démonstrations connues, fondée sur l'idée de l'ordre (ou indice) par rapport à la courbe des points n'appartenant pas à cette dernière, emprunte plusieurs détails à des démonstrations antérieures et ne fait entrer en substance que deux idées nouvelles. La première, d'ailleurs familière en topologie combinatoire, c'est de ne distinguer *a priori* que deux possibilités et cela en classifiant les points selon la *parité* de leur ordre sans s'occuper de la valeur exacte de ce dernier. La seconde idée c'est de réduire l'un des deux cas à l'autre à l'aide d'une *inversion.*

Notre méthode s'applique aussi au problème plus général de la décomposition du plan par un ensemble fermé d'ailleurs quelconque et en particulier, par une ligne continue admettant des points multiples. Je n'ai pas réussi à décider si les résultats que j'obtiens dans cet ordre d'idées sont nouveaux ou non. En tout cas je les développe ici pour illustrer la portée de notre méthode.

1. Démonstration du théorème de Jordan.

Rappelons d'abord les faits les plus simples concernant l'ordre d'un point par rapport à une ligne continue fermée. Étant donnée une ligne continue quelconque l, fermée ou non, allant du point A au point B, avec ou sans point double, et un point P

n'appartenant pas à la ligne l, on sait que la variation de l'argument du vecteur PM, quand M parcourt la ligne l, est une quantité finie et bien déterminée. Cette variation, évidemment additive par rapport à une décomposition de la ligne l en des arcs partiels, se calcule par exemple en partageant la ligne l en des arcs $M_{i-1} M_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $M_0 = A$, $M_n = B$) de sorte que leurs diamètres soient inférieurs à la distance entre P et l, puis en ajoutant les angles $M_{i-1} P M_i$ aigus et affectés du signe qui leur convient. Lorsque $A = B$, cette somme est évidemment égale à $2m\pi$ où m est entier, positif, négatif ou zéro, et c'est cet entier m qu'on appelle l'ordre du point P par rapport à la ligne fermée l. Cet ordre ne change pas quand P varie d'une manière continue sans rencontrer la ligne l; il varie justement d'une unité lorsque P traverse un segment de ligne droite, faisant partie de l, et cela sans rencontrer l'arc complémentaire. On en déduit presque immédiatement le cas particulier du théorème de JORDAN, relatif aux lignes polygonales fermées sans point double, le domaine extérieur étant formé par les points d'ordre 0 et l'intérieur par ceux d'ordre ± 1 selon le sens de parcours. Enfin, dans le cas général, on a $m = 0$ pour tous les points P suffisamment éloignés, entre autres toujours quand la ligne entière l est vue de P sous un angle inférieur à π ou ce qui revient au même, lorsque l et P peuvent être séparés par une droite.

Cela étant, supposons que l soit une courbe de JORDAN, c'est-à-dire une ligne continue fermée sans point double. Pour démontrer le théorème de JORDAN, on commence par faire voir qu'*il existe des points d'ordre zéro ainsi que des points d'ordre unité par rapport à la ligne l et que de cette sorte la ligne sépare le plan en deux domaines distincts au moins.* Tous les points suffisamment éloignés étant d'ordre zéro, il ne s'agira que de trouver des points d'ordre unité. A cet effet, nous n'avons qu'à répéter un raisonnement dû en substance à M. HADAMARD et que nous rappelons sous la forme très simple due à M. E. SCHMIDT[1]). Soit P un point séparé de la ligne l par une droite d et soient a, b, c trois demi-droites issues de P et rencontrant la ligne l, leurs premiers points de rencontre étant désignés respectivement par

[1]) E. SCHMIDT, Über den Jordanschen Kurvensatz, *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften,* 1923, phys.-math. Klasse, pp. 318—329, en particulier § 2.

A_1, B_1, C_1 et leurs points de rencontre avec la droite d par A, B, C: on suppose les notations choisies de sorte que les points A, B, C se suivent dans l'ordre indiqué. Soit en outre B_2 le dernier point de rencontre de la demi-droite b avec l'arc $A_1B_1C_1$ de l et soit B' un point choisi sur la même demi-droite au delà de B_2 et cela de sorte que le segment B_2B' ne rencontre pas l'arc complémentaire C_1A_1. Alors, un tel point B' est d'ordre zéro par rapport à la ligne fermée $l_1 = A_1B_1C_1CAA_1$, formée de l'arc $A_1B_1C_1$ et des segments C_1C, CA et AA_1; en effet, en continuant de suivre la demi-droite b au delà de B', on passe à l'infini sans rencontrer la ligne l_1. De plus, le point B' est d'ordre unité par rapport à la ligne fermée $l_2 = A_1ACC_1A_1$, composée des mêmes segments de droite que l_1, mais parcourus dans le sens inverse, et de l'arc complémentaire C_1A_1 de l. En effet, en parcourant d'abord le segment PB_1, puis la partie B_1B_2 de l'arc $A_1B_1C_1$ et enfin le segment de droite B_2B', on passe du point P, évidemment d'ordre zéro par rapport à l_2, au point B' et cela en ne rencontrant l_2 qu'au point B où l'on traverse le segment AC, ce qui change l'ordre d'une unité. En résumé, le point B' est d'ordre zéro par rapport à l_1 et d'ordre unité par rapport à l_2; il s'ensuit par addition et comme les chemins C_1CAA_1 et A_1ACC_1 se détruisent que le point B' est d'ordre unité par rapport à la ligne l.

Cela étant, pour faire voir que la ligne l sépare le plan précisément en deux domaines différents, nous allons montrer que *deux points d'ordre pair par rapport à l appartiennent toujours au même domaine et qu'il en est de même de deux points quelconques d'ordre impair.* D'abord, quant au premier cas, il est manifeste qu'il suffit de prouver que de tout point P d'ordre pair on peut passer à l'infini sans rencontrer la ligne l. A cet effet, soit 2ε la distance entre le point P et la ligne l et supposons qu'on ait choisi la quantité positive δ de sorte que $\delta < \varepsilon$ et que de plus, pour tout couple de points A, B sur l tels que $\overline{AB} < 2\delta$, le diamètre de l'un des arcs AB de l soit inférieur à ε.[2]) Cela

[2]) Voici une démonstration simple du fait bien connu qu'un tel choix est toujours possible. En considérant la circonférence $|z| = 1$ comme l'image continu et biunivoque de la courbe l, il vient qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut attacher un $\eta > 0$ de sorte que, pour tout couple de points M, N sur la ligne l dont la distance des images M', N' est inférieure à η, on ait $\overline{MN} < \varepsilon$. D'autre part, à la quantité η on peut faire correspondre un $\delta > 0$ de façon que l'hy-

étant, couvrons le plan par un réseau de triangles équilatéraux, de côté δ, et envisageons le domaine formé par ceux des triangles qui ont des points en commun avec la ligne l, soit à l'intérieur soit sur leur périphérie[3]). Soit $p = A_1 A_2 \dots A_n A_1$ le contour extérieur de ce domaine, polygone simple fermé aux sommets A_i; d'une façon précise, nous avons marqué par A_i les noeuds de réseau appartenant au contour p et numérotés dans l'ordre dans lequel ils se suivent sur ce contour. Chaque côté $A_i A_{i+1}$ appartient à un des triangles envisagés adjacent à ce côté et ayant un point au moins en commun avec la ligne l. Soit B_i un tel point. Envisageons les périphéries des triangles $A_i A_{i+1} B_i$ ainsi que les lignes fermées $B_i A_{i+1} B_{i+1} B_i$, ces dernières étant composées des segments $B_i A_{i+1}$, $A_{i+1} B_{i+1}$ et d'un des arcs $B_{i+1} B_i$ de la ligne l, choisi de sorte que son diamètre reste inférieur à ε. Un tel choix est possible, la distance $\overline{B_i B_{i+1}}$ étant au plus égale à $\overline{B_i A_{i+1}} + \overline{A_{i+1} B_{i+1}} < 2\delta$. Or, on voit immédiatement que l'axe de symétrie du segment PB_i sépare le point P du triangle $A_i A_{i+1} B_i$ ainsi que de la ligne fermée $A_{i+1} B_{i+1} B_i$ et que, par conséquent, le point P est d'ordre zéro par rapport à toutes ces lignes fermées. Or, en parcourant ces $2n$ lignes et en supprimant les segments $A_i B_i$ et $A_{i+1} B_i$ que l'on a parcourus dans les deux sens, il ne reste que deux parcours fermés, savoir le contour p et la ligne $B_n B_{n-1} \dots B_1 B_n$ composée des arcs $B_{i+1} B_i$ de la ligne l. Il s'ensuit que le point P est de même ordre par rapport au polygone p qu'à la ligne fermée $B_1 B_2 \dots B_n B_1$. Or, la parité de l'ordre de P par rapport à cette dernière ne change pas quand on remplace l'un ou l'autre des arcs $B_i B_{i+1}$ par son complémentaire; en effet, un tel changement revient à ajouter un parcours complet des deux arcs, c'est-à-dire de la ligne entière l, parcours fait dans un sens convenable, et le point P étant supposé d'être d'ordre pair par rapport à la ligne l, l'ordre ne sera changé que par un nombre pair. Par conséquent, on ne restreint pas la généralité en supposant que tous les arcs

---

pothèse $\overline{MN} < 2\delta$ entraîne que $\overline{M'N'} < \eta$. Alors, si A, B sont des points sur l avec $\overline{AB} < 2\delta$, et que par conséquent $\overline{A'B'} < \eta$, on a aussi $\overline{M'N'} < \eta$ pour tous les points M', N' appartenant au plus petit des arcs $A'B'$, donc $\overline{MN} < \varepsilon$ pour les points de l'arc correspondant AB de la courbe l, ce qu'il fallait prouver.

[3]) *Cf.* pour l'ordre d'idées qui suit, J. Pál, Zur Topologie der Ebene, *ces Acta*, 1 (1923), pp. 226—239, en particulier pp. 230—231.

B_iB_{i+1} sont parcourus dans le même sens et que, de cette sorte, l'ensemble des parcours est équivalent à un nombre fini de parcours de la ligne entière l. Donc le point P est d'ordre pair par rapport à la ligne fermée $B_1B_2 \ldots B_nB_1$ et alors aussi par rapport au polygone p. Or, par rapport à ce dernier, il n'y a de points d'ordre pair que ceux d'ordre zéro, situés à l'extérieur du polygone, c'est-à-dire que P est extérieur au polygone et par conséquent, on en peut passer à l'infini par un chemin continu extérieur à p, donc ne rencontrant pas la courbe l. Nous avons donc démontré que tous les points P d'ordre *pair* par rapport à la ligne l appartiennent au même domaine, savoir à celui qui s'étend à l'infini.

Le cas des points d'ordre *impair* se réduit à celui de tout à l'heure en faisant appel au fait suivant. Faisons subir le plan à l'inversion $z' = {}^1/_z$ et supposons que l'origine n'appartienne pas à la ligne l; soit l' la transformée de l tandis que les points P et Q, n'appartenant pas à la ligne l, soient transportés respectivement en P' et Q'. Je dis que la différence des ordres de P et de Q par rapport à l reste inaltérée, c'est-à-dire que cette différence ne change pas quand on remplace P, Q et l respectivement par P', Q' et l'. Il nous suffira d'ailleurs de considérer le cas particulier où le point Q coïncide avec l'origine et de faire voir que dans ce cas, l'ordre de P' par rapport à l' est fourni par la différence des ordres respectifs de P et de l'origine par rapport à l.

Désignons par w l'affixe du point P, l'affixe du point P' étant alors ${}^1/_w$. De plus, soit z_1z_2 un arc de la courbe l choisi de sorte que deux quelconques de ses points soient vus de l'origine et de P sous des angles inférieurs à ${}^\pi/2$ et qu'il en soit de même pour l'arc transformé et le point P'. Or, le rapport anharmonique étant invariant par l'inversion, $(z_1 w z_2 0) = \left(\frac{1}{z_1}\,\frac{1}{w}\,\frac{1}{z_2}\,\infty\right)$, son argument devra rester inaltéré mod 2π. C'est-à-dire que la différence des angles aigus sous lesquels on voit z_1z_2 du point P et de l'origine ne pourra différer de l'angle aigu sous lequel on voit ${}^1/_{z_1}$ et ${}^1/_{z_2}$ de P' que par un multiple entier de 2π et comme tous ces angles sont supposés aigus, les deux différences s'égalent au sens précis. Ce fait une fois démontré, pour en passer à notre assertion concernant la ligne fermée l, on n'aura qu'à partager cette ligne en des arcs du type envisagé et la démonstration du fait allégué s'achèvera d'une manière évidente.

Appliquons notre résultat au cas où l'origine et P sont tous les deux d'ordre impair par rapport à l. Alors par ce que nous venons de voir, le point P' sera d'ordre pair par rapport à la ligne l', elle-même une courbe de JORDAN et par conséquent, grâce à ce que nous avons montré pour les points d'ordre pair, on pourra cheminer de P' à l'infini sans rencontrer l'. En refaisant l'inversion, on obtiendra donc un chemin continu passant de P à l'origine sans rencontrer la ligne l. C'est-à-dire que tous les points d'ordre impair appartiennent au même domaine déterminé par la ligne l, tout comme ceux d'ordre pair.

Le théorème de JORDAN est donc démontré.

2. Décomposition du plan par un ensemble fermé et en particulier par une ligne continue quelconque.

Passons à un ordre d'idées plus général en envisageant la décomposition du plan par un ensemble e borné et fermé, d'ailleurs arbitraire. L'ensemble e détermine un nombre fini ou une infinité dénombrable de domaines contigus. Soient P et Q deux points appartenant à l'un quelconque de ces domaines et soit c un chemin continu allant de P à Q tout en restant dans le domaine considéré. Soit ε la distance entre ce chemin et l'ensemble e. Considérons une ligne polygonale fermée $p = A_1A_2 \ldots A_nA_1$ dont les sommets appartiennent à l'ensemble e et dont les côtés A_iA_{i+1} $(A_{n+1} = A_1)$ sont inférieurs à ε. Alors nous sommes sûrs que le chemin c ne rencontre pas la ligne p; il s'ensuit que les points P et Q sont du même ordre par rapport à la ligne p. C'est-à-dire qu'une condition nécessaire pour que P et Q appartiennent au même domaine, consiste en ce que les deux points soient du même ordre par rapport à toute ligne polygonale fermée p inscrite à l'ensemble e et dont les côtés sont suffisamment petits; bien entendu, l'ordre peut changer avec la ligne p. Je dis que cette condition est aussi suffisante; de plus, au lieu d'exiger que les ordres soient égaux, on n'a qu'à supposer que ces ordres soient de la même parité.

Pour démontrer cet énoncé, envisageons d'abord un point P dont l'ordre s'annule par rapport à toutes les lignes polygonales inscrites dont les côtés sont suffisemment petits. De tels points existent assurément: tels sont entre autres tous les points séparés par une droite de l'ensemble entier e. Soit $2\varepsilon_1$ la distance entre P et l'ensemble e; dès lors en partant comme plus haut d'un réseau de triangles équilatéraux de côté $\delta < \varepsilon_1$, envisageons ceux des triangles qui ont des points en commun avec l'ensemble e. Ces triangles forment un ou plusieurs domaines polygonaux; soient $p_1, p_2, \ldots, p_m$ les contours extérieurs de ces domaines. Considérons, pour fixer les idées, le contour $p_1 = A_1 A_2 \ldots A_n A_1$ où nous avons marqué par A_i les noeuds de notre réseau appartenant au contour p_1 et numérotés dans l'ordre dans lequel ils se suivent sur ce contour. Le triangle adjacent au côté $A_i A_{i+1}$ $(A_{n+1} = A_1)$ et intérieur à p_1 a au moins un point B_i en commun avec l'ensemble e. Alors, l'ordre du point P étant zéro par rapport aux triangles $A_i A_{i+1} B_i$ et $A_{i+1} B_{i+1} B_i$, il vient que l'ordre du point P par rapport au contour p_1 est le même que par rapport à la ligne polygonale $B_1 B_2 \ldots B_n B_1$ inscrite à l'ensemble e; donc, par l'hypothèse faite, cet ordre s'annule. Il en est de même de l'ordre de P par rapport aux contours $p_2, \ldots, p_m$. C'est-à-dire que le point P est extérieur à tous ces polygones et par cette raison, P peut être joint à l'infini par un chemin continu ne pénétrant à l'intérieur d'aucun des polygones p_i, donc sans point commun avec l'ensemble e.

Le cas de deux points quelconques P et Q satisfaisant à notre condition se réduit au cas que nous venons d'envisager, tout comme pour les courbes de Jordan, en faisant subir toute la figure à une inversion de centre Q.

En résumé, nous venons de démontrer qu'*une condition nécessaire et suffisante pour que les points P et Q ne soient pas séparés par l'ensemble borné et fermé e, consiste en ce que les ordres de ces points par rapport aux lignes polygonales fermées inscrites à l'ensemble e, de côtés suffisemment petits, soient de la même parité* (cette parité dépendant d'ailleurs, en général, du choix de la ligne polygonale).

Observons que l'hypothèse que l'ensemble e soit borné, peut être aisément supprimée.

Considérons le cas particulier où e n'est que l'ensemble des points, simples et multiples, d'une ligne continue l,

$$x = x(t),\ y = y(t) \qquad (a \leqq t \leqq b).$$

De la condition que nous venons d'énoncer nous allons déduire une autre relative à la ligne l et embrassant, entre autres, le fait qu'une courbe de JORDAN ne décompose le plan qu'en deux domaines au plus ainsi que le théorème qu'un arc simple de JORDAN ne le découpe pas de tout.

Pour énoncer cette condition, convenons d'appeler *lacet* tout arc de l correspondant à un intervalle $t_1 \leqq t \leqq t_2$ pour lequel $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$, c'est-à-dire que les extrémités de l'arc coïncident. Alors, *pour que les points P et Q ne soient pas séparés par la ligne l, il faut et il suffit que l'ordre de ces points soit de la même parité par rapport à tout lacet de la ligne l* (la parité dépendant d'ailleurs, en général, du choix particulier du lacet).

La nécéssité de la condition est évidente. Pour montrer qu'elle est suffisante, nous commençons par établir un lemme préliminaire. *Etant donnée une quantité $\varepsilon > 0$, je dis que l'on y peut attacher une quantité δ de sorte que pour tout couple A, B de points appartenant à la ligne l et dont la distance est inférieure à δ, il existe sur la ligne un point C tel que l'un des arcs AC et l'un des arcs BC au moins admettent des diamètres inférieurs à ε.* En effet, dans l'hypothèse contraire on pourrait choisir deux suites $\{t_i\}$ et $\{t'_i\}$ de valeurs du paramètre, tendant vers des limites t^* et t^{**} et telles que la distance des points A_i, B_i qui correspondent respectivement à t_i et t'_i, tendrait vers zéro, tandis que la propriété alléguée dans notre lemme ne serait pas réalisée pour les points A_i et B_i. Alors aux valeurs t^* et t^{**} du paramètre il correspondrait, sur la ligne l, le même point C, limite commune des A_i et des B_i, et les arcs A_iC, B_iC, correspondant aux intervalles t_it^*, t'_it^{**} dont la longueur tend vers zéro, devraient, par des raisons de continuité, admettre des diamètres convergeant également vers zéro, contrairement à l'hypothèse faite.

Cela étant, envisageons deux points P, Q tels que leurs ordres soient de la même parité pour tout lacet faisant partie de la ligne l et supposons que leurs distances à la ligne l soient supérieures à 2ε. Soit δ la quantité correspondant par notre lemme à la quantité ε. Je dis que l'ordre des points P, Q est de la même parité par rapport à toute ligne polygonale fermée $p = A_1A_2 \ldots A_nA_1$ inscrite à la ligne l et dont les côtés sont inférieurs à δ et que par conséquent, d'après le théorème général que nous venons de démontrer, les deux points ne sont pas séparés par la ligne l. En effet, d'après notre lemme, on peut choisir les valeurs t_i, t'_i, t''_i et t'''_i du paramètre t de sorte que, sur la ligne l, le point A_i corresponde à t_i et aussi à t'_i et que de plus, à t''_i et t'''_i il corresponde un point C_i tel que les arcs A_iC_i et C_iA_{i+1}, correspondant aux intervalles $t'_it''_i$ et t'''_it_{i+1}, admettent des diamètres inférieurs à ε. Il s'ensuit que les points P et Q sont d'ordre zéro par rapport aux lignes fermées $A_iA_{i+1}C_iA_i$, composées du segment A_iA_{i+1} et des arcs $A_{i+1}C_i$ et C_iA_i que nous venons d'envisager et que, par conséquent, pour montrer que les ordres des points P, Q par rapport à la ligne polygonale p sont de la même parité, nous n'avons qu'à prouver qu'il en est ainsi par rapport à la ligne fermée $A_1C_1A_2C_2\ldots A_nC_nA_1$, composée des arcs A_iC_i et C_iA_{i+1}. Or, grâce à l'hypothèse faite, rien ne change quand on intercale encore les lacets A_iA_i et C_iC_i qui correspondent aux intervalles $t_it'_i$ et $t''_it'''_i$; en effet, on n'ajoute ainsi, aux ordres considérés, que des nombres de la même parité. Or, les arcs desquels se compose la ligne l_1 ainsi obtenue, correspondent à des intervalles du paramètre formant un circuit complet et il s'ensuit d'une manière évidente que les points P et Q (de même que tout autre point n'appartenant pas à la ligne l) sont d'ordre zéro par rapport à la ligne l_1 et que de cette sorte, leurs ordres par rapport à p sont de la même parité, ce qu'il fallait démontrer.

Voici enfin un corollaire immédiat. *Si deux points ne sont séparés par aucun des lacets d'une ligne continue, ils ne le sont point par la ligne entière.*

(Reçu le 25 janvier 1938)

Über Gitterpunkte des mehrdimensionalen Raumes.

Von ENDRE VÁZSONYI in Budapest.

Wir verbinden den Gitterpunkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des n-dimensionalen Raumes mit den Gitterpunkten $(x_1+1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1, x_2+1, \ldots, x_n), \ldots, (x_1, x_2, \ldots, x_n+1)$ durch je eine Kante. Wenn wir dies für alle Gitterpunkte durchführen, erhalten wir den gewöhnlichen Gittergraphen des n-dimensionalen Raumes; dies ist ein unendlicher Graph, in dessen Knotenpunkten sich je $2n$ Kanten treffen. Herr D. KÖNIG stellte die folgenden beiden Probleme[1]):

I. *Hat der Gittergraph des n-dimensionalen Raumes eine vom Unendlichen ins Unendliche laufende Hamiltonlinie?*

Das Problem befragt, ob es eine beiderseits unendliche Folge von Gitterpunkten

$$\ldots, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \ldots$$

gibt, in der jeder Gitterpunkt einmal und nur einmal vorkommt und die Punkte P_i, P_{i+1} für jedes i benachbarte Punkte sind. (Unter benachbarten Punkten verstehen wir die beiden Endpunkte einer Kante des Graphen.)

II. *Hat der Gittergraph des n-dimensionalen Raumes eine vom Unendlichen ins Unendliche laufende Eulerlinie?*

D. h. gibt es eine beiderseits unendliche Folge

$$\ldots, k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \ldots$$

von Kanten, in der jede Kante des Graphen einmal und nur einmal vorkommt und jede Kante k_i einen Endpunkt von k_{i-1} mit einem Endpunkt von k_{i+1} verbindet?

In seinem zitierten Werk gibt KÖNIG eine Hamiltonlinie und eine Eulerlinie für $n=2$ an und erwähnt, daß für $n=3$ diese

---

1) D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936), S. 32.

Linien von T. GRÜNWALD bestimmt wurden. Wir bestimmen diese Linien für beliebiges n. In § 1 behandeln wir die Hamiltonlinie, in § 2 die Eulerlinie und in § 3 ein drittes verwandtes Problem.

§ 1.

Wir wollen eine Hamiltonlinie des n-dimensionalen Gittergraphen mit Hilfe einer Hamiltonlinie des $n-1$-dimensionalen Gittergraphen bestimmen. Die Methode zeigen wir zuerst für den Fall $n=3$. Es sei also

$$\ldots, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \ldots$$

eine Hamiltonlinie des ebenen Gittergraphen (Fig. 1). Dann ist also jeder Gitterpunkt (x_1, x_2) mit einem P_h identisch; h ist hier eine Funktion $h=h_2(x_1, x_2)$ von x_1 und x_2. Jetzt bilden wir die Gitterpunkte des dreidimensionalen Raumes ein-eindeutig auf die Gitterpunkte der (u, v)-Ebene mit Hilfe der Gleichungen

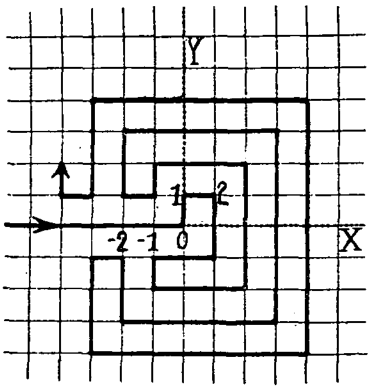


Fig. 1.

$$u=h_2(x_1, x_2), \quad v=x_3$$

ab. (Diese Abbildung bedeutet eigentlich die Abwicklung des Zylindermantels der Fig. 2 in die (u, v)-Ebene.) Punkte, die benachbarten Gitterpunkten der (u, v)-Ebene entsprechen, sind auch im Raume benachbart, denn

a) den Punkten (u, v) und $(u, v+1)$ entsprechen bzw. die benachbarten Punkte (x_1, x_2, x_3) und (x_1, x_2, x_3+1), wo x_1, x_2, x_3 aus $h_2(x_1, x_2)=u$, $x_3=v$ zu bestimmen sind;

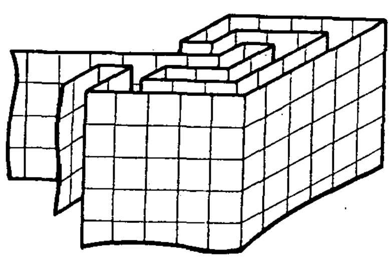


Fig. 2.

b) die den Punkten (u, v) und $(u+1, v)$ entsprechenden Punkte (x_1, x_2, x_3) und (x_1', x_2', x_3) mit $x_3=v$ sind ebenfalls benachbart, denn die Punkte $(x_1, x_2, 0)$ und $(x_1', x_2', 0)$ sind wegen

$$h_2(x_1', x_2')=u+1=h_2(x_1, x_2)+1$$

offenbar benachbart.

Daraus folgt, daß die Linie, welche der Hamiltonlinie des Gittergraphen der (u, v)-Ebene entspricht, eine Hamiltonlinie des dreidimensionalen Gittergraphen ist.

Wenn wir nun die eben gewonnene Hamiltonlinie des dreidimensionalen Gittergraphen durch eine Funktion $h_3(x_1, x_2, x_3)$ charakterisieren (im gleichen Sinne, wie oben für die Ebene), so besteht

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = h_2(h_2(x_1, x_2), x_3).$$

Vollkommen analog ist der Übergang von dem $n-1$-dimensionalen Raum auf den n-dimensionalen. Wenn wir annehmen, daß es eine Hamiltonlinie im $n-1$-dimensionalen Raume gibt, dann können wir ähnlich wie oben die Funktion $h_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ einführen. (Diese $n-1$-stellige Funktion nimmt also jeden ganzzahligen Wert einmal und nur einmal an.) Die Gitterpunkte des n-dimensionalen Raumes bilden wir ein-eindeutig auf die Gitterpunkte der (u, v)-Ebene mit Hilfe der Gleichungen

$$u = h_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \quad v = x_n$$

ab. Das Urbild einer Hamiltonlinie des Gittergraphen der (u, v)-Ebene ist dann eine Hamiltonlinie des n-dimensionalen Gittergraphen. Für die entsprechende Funktion $h_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ erhalten wir

$$h_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = h_2(h_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n).$$

A n m e r k u n g. Auf ähnliche Weise läßt sich auch der folgende Satz beweisen:

Der Gittergraph des n-dimensionalen Raumes hat eine aus dem Punkt $O = (0, 0, \ldots, 0)$ ausgehende einseitig unendliche Hamiltonlinie.

Der Gittergraph der Ebene besitzt nämlich eine aus dem Punkt O ausgehende Hamiltonlinie (Fig. 3). Es sei diese Hamiltonlinie

$$P_0, P_1, P_2, \ldots,$$

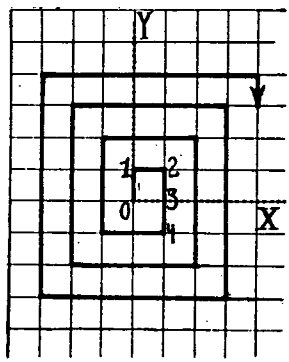


Fig. 3.

dann ist also jeder Gitterpunkt (x_1, x_2) mit einem $P_{h'}$ identisch; h' ist hier eine nichtnegative ganzzahlige Funktion $h' = h_2'(x_1, x_2)$. Wie oben, lassen sich die Gitterpunkte des dreidimensionalen Raumes ein-

eindeutig auf die Gitterpunkte der (u, v)-Halbebene $u \geqq 0$ abbilden, mit Hilfe der Gleichungen

$$u = h_2'(x_1, x_2), \quad v = x_3;$$

dabei entsprechen benachbarten Punkten der (u, v)-Ebene auch im Raume benachbarte Punkte. Nun hat der Gittergraph der (u, v)-Halbebene $u \geqq 0$ eine aus dem Punkt O ausgehende Hamiltonlinie (Fig. 4); wenn wir diese Hamiltonlinie auf den dreidimensionalen Raum abbilden, erhalten wir eine aus dem Punkt O ausgehende Hamiltonlinie des dreidimensionalen Gittergraphen.

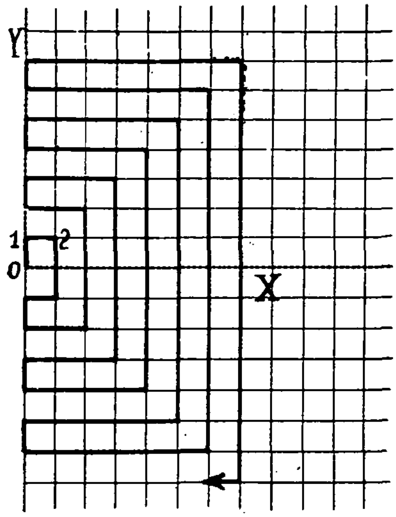


Fig. 4.

Der Übergang auf n Dimensionen geschieht auch hier, wie oben.

§ 2.

Wie in § 1, bestimmen wir eine Eulerlinie des dreidimensionalen Gittergraphen mit Hilfe einer Eulerlinie des zweidimensionalen Gittergraphen.

Es sei also

$$\ldots, k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \ldots$$

eine Eulerlinie des ebenen Gittergraphen (Fig. 5); dann ist also jede Kante $[(x_1, x_2), (x_1', x_2')]$ — wo entweder $x_1' = x_1$ und $x_2' = x_2 + 1$, oder $x_1' = x_1 + 1$ und $x_2' = x_2$ ist — mit einem k_E identisch; E ist hier eine Funktion

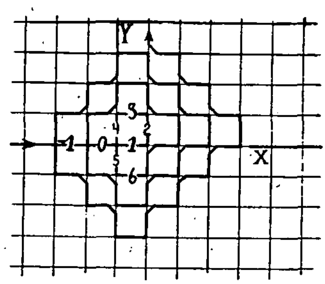


Fig. 5.

$$E = E_2[(x_1, x_2), (x_1', x_2')]$$

von x_1, x_2, x_1' und x_2'. Wir ordnen ferner dem gemeinsamen Gitterpunkte der Kanten k_l und k_{l+1} die Zahl l zu. Da die Eulerlinie durch einen jeden Gitterpunkt zweimal durchgeht, werden jedem Gitterpunkt (x_1, x_2) zwei Zahlen zugeordnet; die kleinere dieser Zahlen nennen wir $e_2(x_1, x_2)$.

Wir bilden nun die Kanten des dreidimensionalen Gittergraphen ein-eindeutig auf einen Graphen $\mathfrak{G}'$ der (u, v)-Ebene ab. Und zwar

a) der Kante $[(x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x_3)]$ (wobei entweder $x'_1 = x_1$ und $x'_2 = x_2 + 1$, oder $x'_1 = x_1 + 1$ und $x'_2 = x_2$) ordnen wir jene Kante $[(u_1, v_1), (u_2, v_2)]$ zu, für welche

$$u_1 = E_2[(x_1, x_2), (x'_1, x'_2)] - 1, \quad u_2 = E_2[(x_1, x_2), (x'_1, x'_2)], \quad v_1 = v_2 = x_3;$$

b) der Kante $(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3 + 1)$ ordnen wir jene Kante $[(u_1, v_1), (u_2, v_2)]$ zu, für welche

$$u_1 = u_2 = e_2(x_1, x_2), \quad v_1 = x_3, \quad v_2 = x_3 + 1.$$

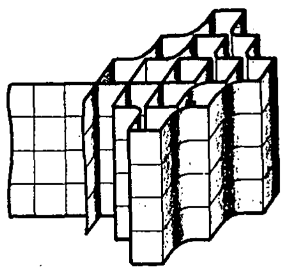


Fig. 6.

Diese Abbildung bedeutet eigentlich die Abwicklung des Zylindermantels Fig. 6 in die (u, v)-Ebene. Aus dem Gittergraphen $\mathfrak{G}$ der (u, v)-Ebene wird dieser Graph $\mathfrak{G}'$ erhalten, indem man alle Kanten, die auf gewissen, mit der v-Achse parallelen Geraden liegen, wegläßt (Fig. 7). Es ist daher klar, daß dieser Graph (topologisch) wieder ein ebener Gittergraph ist und deshalb eine Eulerlinie besitzt. Mit Rücksicht darauf, daß benachbarten Kanten des Graphen $\mathfrak{G}'$ der (u, v)-Ebene auch im

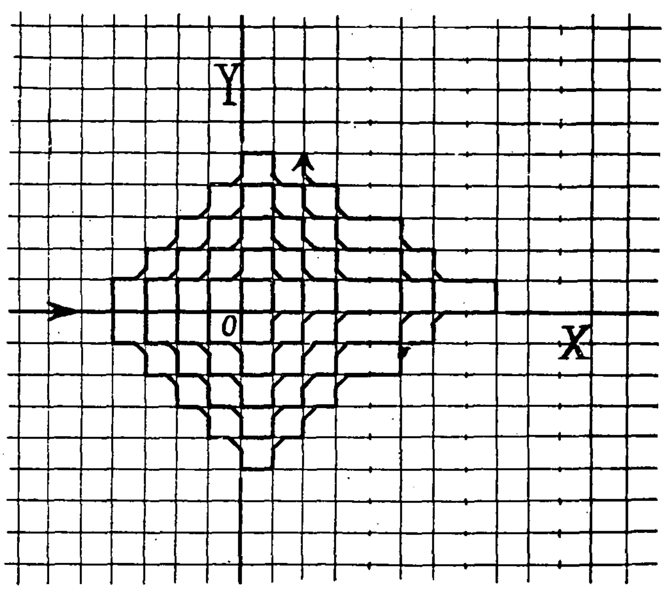


Fig. 7.

Raume benachbarte Kanten entsprechen, ist es ohne weiteres klar, daß die inverse Abbildung einer Eulerlinie des Graphen $\mathfrak{G}'$ eine der gesuchten räumlichen Eulerlinien liefert.

Genau auf dieselbe Weise wird eine Eulerlinie im n-dimensionalen Raume bestimmt, wenn eine Eulerlinie des $n-1$-dimensionalen Gittergraphen bekannt ist. Wir numerieren, genau wie früher, die Kanten des $n-1$-dimensionalen Gittergraphen und bezeichnen die Ordnungszahl der Kante, die durch die Nachbarpunkte $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ und $(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')$ bestimmt wird, durch $E_{n-1}[(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), (x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')]$. Wir ordnen ferner dem gemeinsamen Gitterpunkte der l-ten und $l+1$-ten Kante die Zahl l zu. Auf diese Weise werden jedem Gitterpunkt $n-1$ Zahlen zugeordnet, da die Eulerlinie durch jeden Gitterpunkt genau $n-1$-mal durchgeht; wir bezeichnen die kleinste dieser $n-1$ Zahlen mit $e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. (Die Funktion $e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ nimmt offenbar nicht alle ganzzahlige Werte an.) Nun bilden wir die Kanten des n-dimensionalen Gittergraphen ein-eindeutig auf einen Graphen der (u, v)-Ebene ab. Wir ordnen nämlich

a) der Kante $[(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n), (x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', x_n)]$ (wo $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ und $(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', x_n)$ benachbarte Gitterpunkte des n-dimensionalen Raumes, daher auch $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ und $(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')$ benachbarte Gitterpunkte des $n-1$-dimensionalen Raumes sind) die Kante $[(u_1, v_1), (u_2, v_2)]$ mit

$$u_1 = E_{n-1}[(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), (x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')] - 1,$$
$$u_2 = E_{n-1}[(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), (x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')], \quad v_1 = v_2 = x_n;$$

b) der Kante $[(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n), (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n+1)]$ die Kante $[(u_1, v_1), (u_2, v_2)]$ mit

$$u_1 = u_2 = e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \quad v_1 = x_n, \quad v_2 = x_n + 1$$

zu.

Auf diese Weise erhalten wir einen Graphen, welcher aus jenen Kanten des Gittergraphen der (u, v)-Ebene besteht, die nicht auf solchen Geraden $u = c$ liegen, wo c ein von der Funktion $e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ ausgelassener Wert ist. In der Tat,

a) die Kanten $(u_1, x_n), (u_2, x_n)$ mit

$$u_1 = E_{n-1}[(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), (x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')] - 1,$$
$$u_2 = E_{n-1}[(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), (x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')]$$

sind sämtliche zur u-Achse parallele Kanten des ebenen Gittergraphen;

b) die Kanten $(u, x_n), (u, x_n + 1)$ mit

$$u = e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

machen die zur v-Achse parallele Gittergeraden aus, mit Ausnahme der oben genannten Geraden $u = c$.

Wir haben somit den n-dimensionalen Gittergraphen auf einen Graphen der (u, v)-Ebene abgebildet, der selbst ein zweidimensionaler Gittergraph ist, also notwendigerweise eine Eulerlinie besitzt. Die inverse Abbildung führt diese Linie in eine Eulerlinie des n-dimensionalen Gittergraphen über.

§ 3.

KÜRSCHÁK hat bewiesen, daß die Gitterpunkte der Ebene durch eine nach beiden Seiten unendliche Folge von Rösselsprüngen durchlaufen werden können und zwar so, daß ein jeder Gitterpunkt in der Folge einmal und nur einmal vorkommt[2]).

In diesem Paragraphen wird ein neuer Beweis des Kürschákschen Satzes gegeben, der zugleich eine Verallgemeinerung für den n-dimensionalen Fall liefert.

Es seien $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Q = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ zwei Gitterpunkte des n-dimensionalen Raumes. Wir sagen, P und Q seien in Bezug auf Rösselsprung benachbart (oder auch: PQ bilde einen Rösselsprung), falls für ein gewisses Zahlenpaar (i, j) $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$

$$x'_i = x_i \pm 1,$$
$$x'_j = x_j \pm 2$$

und für $k \neq i$, $k \neq j$, $k = 1, 2, \ldots, n$

$$x'_k = x_k$$

ausfällt. Nun gilt der Satz:

Die Gitterpunkte des n-dimensionalen Raumes lassen sich durch eine nach beiden Seiten unendliche Folge von Rösselsprüngen durchlaufen und zwar so, daß in der Folge jeder Gitterpunkt einmal und nur einmal vorkommt.

Zuerst beweisen wir den Satz für $n = 2$, d. h. wir geben einen neuen Beweis des Kürschákschen Satzes.

---

[2]) J. KÜRSCHÁK, Lóugrás a végtelen sakktáblán, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **33** (1926), S. 117—119.

Wir bilden die Gitterpunkte (x_1, x_2) der Ebene ein-eindeutig auf die Gitterpunkte (y_1, y_2, y_3) mit $0 \leqq y_3 \leqq 2$ des Raumes durch die Gleichungen

$$x_1 = 2y_1 + y_2 + 2y_3,$$
$$x_2 = y_1 + 2y_2 - y_3$$

ab. Jedem Gitterpunkt des Raumes entspricht ein und nur ein Gitterpunkt der Ebene; aber auch umgekehrt, jedem Gitterpunkt (x_1, x_2) der Ebene entspricht ein und nur ein Punkt (y_1, y_2, y_3)

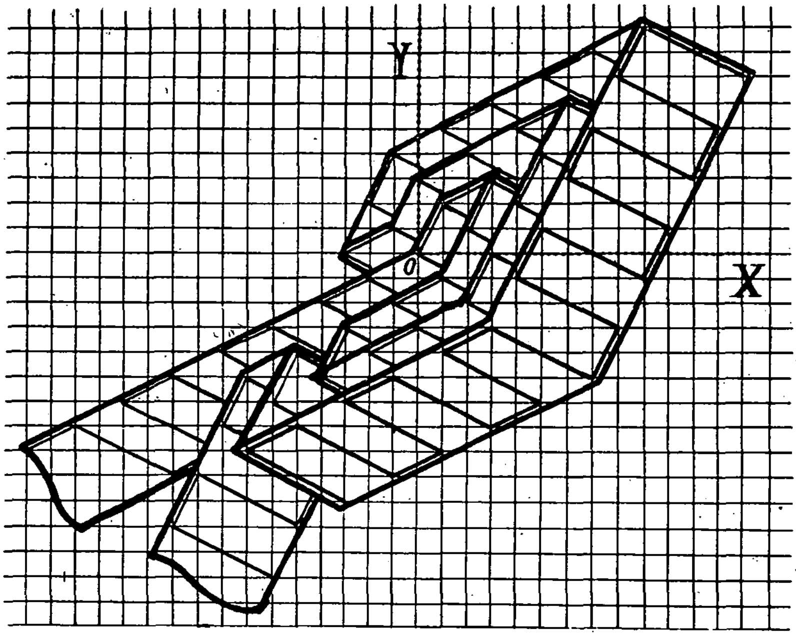


Fig. 8.

des Raumgitters mit $y_3 = 0$, 1 oder 2. In der Tat ist zunächst y_3 aus der Kongruenz

$$x_1 + x_2 \equiv y_3 \pmod 3$$

eindeutig bestimmt; ferner sind y_1, y_2 aus den Gleichungen

$$2y_1 + y_2 = x_1 - 2y_3,$$
$$y_1 + 2y_2 = x_2 + y_3$$

zu bestimmen; es ist klar, daß y_1 und y_2 stets ganzzahlig ausfallen.

Es ist leicht einzusehen, daß die Bildpunkte von benachbarten Gitterpunkten des Raumes in Bezug auf Rösselsprung benachbarte Punkte der Ebene sind. In der Tat,

a) erhöht man y_1 durch 1, so wird x_1 um 2, x_2 um 1 größer;

b) erhöht man y_2 durch 1, so wird x_1 um 1, x_2 um 2 größer;

c) erhöht man endlich y_3 durch 1, so wird x_1 um 2 größer, x_2 um 1 kleiner.

Wenn also der durch $0 \leqq y_3 \leqq 2$ bestimmte Teilgraph des räumlichen Gittergraphen eine Hamiltonlinie besitzt, so erhält man

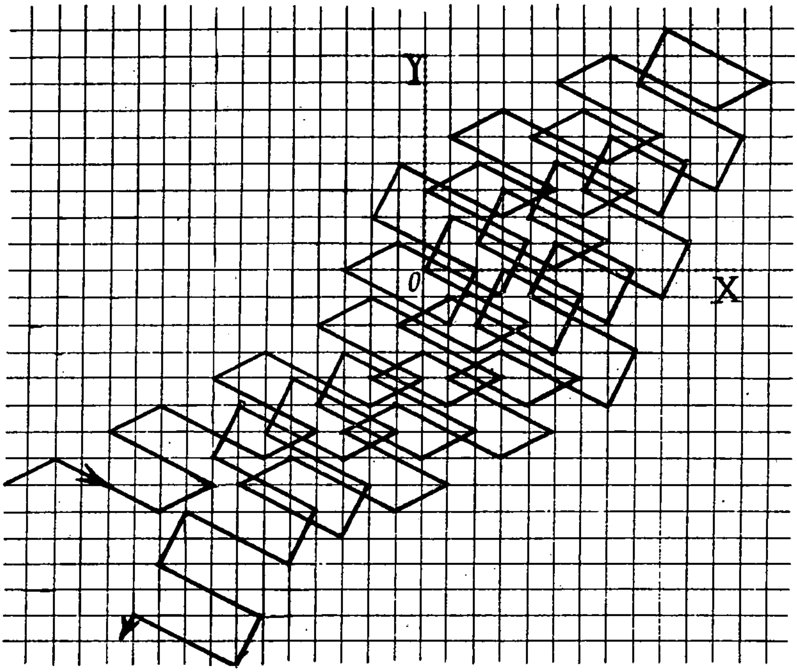


Fig. 9.

daraus durch die inverse Abbildung die gesuchte Rösselsprungsfolge. Nun ergibt sich aber durch eine kleine Abänderung des im § 1 gegebenen Beweises, daß auch dieser Teilgraph eine Hamiltonlinie besitzt. (Im Beweis ist die Abbildung auf die durch die Ungleichung $0 \leqq v \leqq 2$ bestimmten Punkte der (u, v)-Ebene durchzuführen.)

Fig. 8 ist in zwei verschiedenen Weisen zu deuten: als räumliche Figur zeigt sie die Hamiltonlinie, welche die auf dem durch die fetteren Linien begrenzten Band liegenden Gitterpunkte

(y_1, y_2, y_3) $(0 \leqq y_3 \leqq 2)$ enthält. Wenn man hingegen die fetteren Linien wegläßt und die Figur als zweidimensional betrachtet (vgl. Fig. 9), so erhält man die gesuchte Rösselsprungsfolge.

Somit ist unser Satz für $n = 2$ bewiesen.

Der Übergang auf n Dimensionen geschieht durch vollständige Induktion. Wir setzen voraus, daß der Satz für $n-1$ gilt. Die Anzahl der Rösselsprünge, durch welche man den Punkt $P = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ des n-dimensionalen Gitters aus dem Anfangspunkte O erreicht, positiv oder negativ genommen, je nachdem P in der betrachteten Rösselsprungsfolge nach oder vor O steht, bezeichnen wir mit $R_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Wir bilden die Gitterpunkte des n-dimensionalen Raumes mit Hilfe der Gleichungen

$$u = R_{n-1}(x_1 - 2x_n, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}), \quad v = x_n$$

ein-eindeutig auf die Gitterpunkte der (u, v)-Ebene ab. Wir behaupten, daß die Bilder von Nachbarpunkten des ebenen Gitters in Bezug auf Rösselsprung benachbarte Punkte des n-dimensionalen Raumes sind. In der Tat,

a) den Punkten (u, v), $(u, v+1)$ entsprechen bzw. die Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ mit

$$u = R_{n-1}(x_1 - 2x_n, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}) = R_{n-1}(x'_1 - 2x'_n, x'_2, x'_3, \ldots, x'_{n-1}),$$
$$v = x_n, \quad v + 1 = x'_n,$$

so daß

$$x_1 - 2x_n = x'_1 - 2x'_n, \; x_2 = x'_2, \; x_3 = x'_2, \ldots, x_{n-1} = x'_{n-1}, \; x_n = x'_n - 1,$$

d. h.

$$x_1 = x'_1 - 2, \; x_2 = x'_2, \; x_3 = x'_3, \ldots, x_{n-1} = x'_{n-1}, \; x_n = x'_n - 1;$$

b) den Punkten (u, v), $(u+1, v)$ entsprechen bzw. die Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ mit

$$u = R_{n-1}(x_1 - 2x_n, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}),$$
$$u + 1 = R_{n-1}(x'_1 - 2x'_n, x'_2, x'_3, \ldots, x'_{n-1}),$$
$$v = x_n = x'_n,$$

so daß die Punkte $(x_1 - 2x_n, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1})$ und $(x'_1 - 2x_n, x'_2, x'_3, \ldots, x'_{n-1})$ in Bezug auf Rösselsprung benachbart sind; daher gilt dasselbe für die Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}, x_n)$. Also gilt unsere Behauptung in beiden Fällen.

Durch die inverse Abbildung erhält man also aus einer vom Unendlichen ins Unendliche laufenden Hamiltonlinie des zweidimensionalen Gittergraphen die gesuchte Rösselsprungsfolge im n-dimensionalen Raume.

Definieren wir die Funktion $R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für die soeben konstruierte Rösselsprungsfolge in ähnlicher Weise wie oben R_{n-1}, so ist offenbar

$$R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h_2(R_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n),$$

wobei h_2 die im § 1 eingeführte Funktion ist.

Anmerkung. KÜRSCHÁK hat auch bewiesen, daß die Gitterpunkte der Ebene durch eine aus dem Punkte O ausgehende einseitig unendliche Folge von Rösselsprüngen durchlaufen werden können[3]). Auch dieser Satz läßt sich verallgemeinern:

Die Gitterpunkte des n-dimensionalen Raumes lassen sich durch eine aus dem Punkt O ausgehende einseitig unendliche Folge von Rösselsprüngen durchlaufen.

(Eingegangen am 21. März 1936.)

---

[3]) J. KÜRSCHÁK, Rösselsprung auf dem unendlichen Schachbrette, *diese Acta,* 4 (1928—29), S. 12—13.

On the Spectral Theorem of Selfadjoint Operators.

By BÉLA LENGYEL in Troy, New York.

Introduction.

The spectral theorem of bounded selfadjoint operators has been proved by a great number of authors. Considerably fewer methods of proof are known for the spectral theorem in the general *non-bounded* case. These proofs, given by von NEUMANN[1]), F. RIESZ[2]), RIESZ and LORCH[3]) and STONE[4]) reduce the problem, in some way or other, to the bounded case. This reduction is carried out by a CAYLEY transformation, or by the aid of the resolvent of the operator. Recently KOOPMAN and DOOB[5]) showed that the problem of spectral resolution is essentially a problem of representation of a class of complex functions by STIELTJES integrals. They showed that, if f is any given element of the HILBERT space and R_z is the resolvent of a selfadjoint operator H, then there exists a bounded, real and monotone-increasing function $\varrho(\lambda)$ such that

$$(R_z f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z}.$$

[1]) J. VON NEUMANN, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperationen, *Math. Annalen*, **102** (1930), pp. 49—131.

[2]) F. RIESZ, Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *these Acta*, **5** (1931), pp. 23—54.

[3]) F. RIESZ and E. R. LORCH, The Integral Representation of Unbounded Self-Adjoint Transformations in Hilbert Space, *Transactions of the American Math. Society*, **39** (1936), pp. 331—340.

[4]) M. H. STONE, *Linear Transformations in Hilbert Space* (American Math. Society Colloquium Publications, Vol. XV, New York, 1932).

[5]) B. O. KOOPMAN and J. L. DOOB, On Analytic Functions with Positive Imaginary Parts, *Bulletin of the American Math. Society*, **40** (1934), pp. 601—605.

Once this is proved the standard form of the spectral resolution can be obtained quite easily.

In the present paper we shall develop a method that leads to the result of KOOPMAN and DOOB. However, we shall not merely prove the existence of a function $\varrho(\lambda)$ with the required properties, but we shall explicitly determine $\varrho(\lambda)$ in terms of the resolvent. Our proof is a generalization of the proof of HELLINGER[6]), who proved the spectral theorem for bounded selfadjoint operators in terms of quadratic forms of infinitely many variables. Hellinger's proof was based on the power series development of the resolvent; i. e. the series

$$(R_z f, f) = -\left\{ \frac{(f,f)}{z} + \frac{(Hf,f)}{z^2} + \frac{(H^2 f, f)}{z^3} + \ldots \right\},$$

which is always convergent if $|z|$ is greater then the bound of H. This method seemed to be restricted to bounded operators[7]), since in general there exists no such power series in the unbounded case. Fortunately, however, in order to obtain the desired result we do not need the whole power series; we need certain analytic properties of the resolvent only. As a matter of fact $-|f|^2/z$, the first term of the series, always exists and, if f is in the domain of H then the difference between $(R_z f, f)$ and $-|f|^2/z$ can be easily estimated. It is possible to carry through the calculations of HELLINGER by using this first term of the series. Those elements of the HILBERT space which are not in the domain of H can be drawn into the discussion by making use of the continuity of $(R_z f, f)$ in f for any fixed z.

I. The Spectral Problem[8]).

Let H be a selfadjoint operator of the HILBERT space $\mathfrak{H}$ and let f and g denote elements of $\mathfrak{H}$. The well-known problem of spectral resolution is to prove that for every selfadjoint operator

---

[6]) E. HELLINGER, Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen, *Journal für reine und angewandte Math.*, **136** (1909), pp. 210—271.

[7]) Cf. [4]), pp. 183—184.

[8]) For definitions of the fundamental concepts and for proofs of the statements of this section cf. [4]), esp. chapters I, II and IV. The terminology and the notation of STONE is used throughout this paper.

H there exists a family of projection operators $E(\lambda)$, $-\infty \leqq \lambda \leqq +\infty$, with the following properties:

a) $E(\lambda)E(\mu)=E(\mu)E(\lambda)=E(\lambda)$ if $\lambda \leqq \mu$,

b) $E(\lambda+0)=E(\lambda)$; i. e. $E(\lambda)$ is continuous to the right,

c) $E(\lambda)\to 0$ if $\lambda\to-\infty$ and $E(\lambda)\to I$ if $\lambda\to+\infty$, where 0 and I denote the zero and the identity operators respectively,

d) f is in the domain of H if and only if

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d|E(\lambda)f|^2 < +\infty,$$

e) The equation

$$(Hf, g)=\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(E(\lambda)f, g) \tag{1}$$

holds for every g in $\mathfrak{H}$ and every f in the domain of H.

A family of projections satisfying the conditions *a)*, *b)* and *c)*, independent of H, is called a resolution of the identity. If conditions *d)* and *e)* are also satisfied, we say that the resolution of the identity belongs to H.

The resolvent of the operator H is defined as the inverse of $H-zI$,

$$R_z=(H-zI)^{-1},$$

where $z=x+iy$ is a complex number. It can be shown that if $y\neq 0$ the resolvent always exists and is a bounded linear operator with the following properties:

For every fixed f and g $(R_z f, g)$ is an analytic function of z in both halfplanes $y>0$ and $y<0$. Furthermore, if $y\neq 0$ and $y'\neq 0$,

$$R_z - R_{z'} = (z-z')\, R_z R_{z'} \tag{2}$$

i. e.

$$(R_z f, g)-(R_{z'} f, g)=(z-z')(R_z R_{z'} f, g)$$

for every f and g.

$R_z f$ is always in the domain of H. By the fundamental property of the selfadjoint operator H we have $(R_z f, HR_z f)=(HR_z f, R_z f)$. Hence, since

$$HR_z = I+zR_z, \tag{3}$$

$$(R_z f, f+zR_z f)=(f+zR_z f, R_z f),$$

or

$$(R_z f, f) - (f, R_z f) = (zR_z f, R_z f) + (R_z f, zR_z f) \tag{4}$$

$$\operatorname{Im}\,(R_z f, f) = |R_z f|^2 \operatorname{Im} z. \tag{5}$$

From this it follows that $\operatorname{Im}(R_z f, f)$ is positive in the upper and negative in the lower half-plane. Moreover $|\operatorname{Im}\,(R_z f, f)| \leqq |(R_z f, f)| \leqq \leqq |R_z f|\,|f|$; thus by (5)

$$|R_z f| \leqq |f|/y \tag{6}$$

and

$$|(R_z f, g)| \leqq |R_z f|\,|g| \leqq |f|\,|g|/y \tag{7}$$

for $y > 0$. From (5) and (6) follows

$$\operatorname{Im}(R_z f, f) \leqq |f|^2/y. \tag{8}$$

It is well-known that, if $E(\lambda)$ is a resolution of the identity belonging to the selfadjoint operator H, then

$$(R_z f, g) = \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{d(E(\lambda) f, g)}{\lambda - z}. \tag{9}$$

Conversely, if the family of projections $E(\lambda)$ is a resolution of the identity which satisfies (9), then it also satisfies the conditions *d)* and *e)* on page 3; in other words $E(\lambda)$ belongs to H.[9]) We can therefore shift our attention from the original problem to the problem of finding a resolution of the identity connected with the resolvent of H by equation (9). Furthermore, in order to establish the spectral theorem it is sufficient to prove that for every selfadjoint operator H and every given pair of elements f and g there exists a function of bounded variation $\varrho(\lambda; f, g)$, bilinear in f and g, such that

$$(R_z f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda; f, g)}{\lambda - z}. \tag{10}$$

Furthermore $|\varrho(\lambda; f, g)| \leqq |f|\,|g|$ and $\varrho(\lambda; f, g) \to 0$ if $\lambda \to -\infty$.

This function can be made continuous to the right; i. e. $\varrho(\lambda; f, g) = \varrho(\lambda + 0; f, g)$. It follows that for every λ there exists a bounded linear operator $E(\lambda)$, such that $\varrho(\lambda; f, g) = (E(\lambda) f, g)$. Making use of (2) one can show that $E(\lambda)$ satisfies the conditions *a)* and *c)*, whereas *b)* is an immediate consequence of the conti-

---

[9]) For a detailed discussion cf. [4]), esp. chapter V, pp. 173—176.

nuity of ϱ to the right. Thus $E(\lambda)$ is a resolution of the identity and we have a representation of the form (9).

Moreover, it is sufficient to establish the existence of a representation of the form (10) for the special case $f=g$; i. e. to show that for every f there exists a function of bounded variation $\varrho(\lambda)=\varrho(\lambda; f, f)$ such that

$$(11) \qquad (R_z f, f)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda-z}$$

holds for every z; furthermore $0 \leqq \varrho(\lambda; f, f) \leqq |f|^2$ and $\varrho(\lambda; f, f) \to 0$ if $\lambda \to -\infty$. For, on account of the bilinearity of $(R_z f, g)$ we can easily verify the following equation:

$$4(R_z f, g)=(R_z(f+g), f+g)-(R_z(f-g), f-g)+ \\ +i[(R_z(f+ig), f+ig)-(R_z(f-ig), f-ig)].$$

Therefore, by simple addition we obtain

$$(R_z f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_1(\lambda)}{\lambda-z},$$

where $\varrho_1(\lambda)=\varrho(\lambda; f, g)$ is the sum of four ϱ's with the homogeneous arguments $f \pm g$ and $f \pm ig$ respectively. Evidently $\varrho(\lambda; f, g) \to 0$ for all f and g if $\lambda \to -\infty$. However, if there exists a function $\varrho(\lambda; f, g)$ for which (10) is satisfied and $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \varrho(\lambda)=0$ then, according to a lemma of STIELTJES there exists only one such function[10]. $(R_z f, g)$ is bilinear in f and g, hence so is $\varrho(\lambda; f, g)$ on account of its uniqueness. Since $\varrho(\lambda; f, f) \geqq 0$ for all f and λ we can apply Schwarz's lemma

$$|\varrho(\lambda; f, g)| \leqq \varrho(\lambda; f, f)^{1/2} \varrho(\lambda; g, g)^{1/2} \leqq |f||g|.$$

Thus the spectral theorem is proved if we can show that for every f in $\mathfrak{H}$, $(R_z f, f)$ is representable in the form (10) and $\varrho(\lambda; f, f)$ satisfies the conditions described above. This will be done in section II.

II. Proof of the Representation Theorem.

One of the earliest proofs of the spectral theorem is due to HELLINGER. It is of particularly great value because it does not only establish the existence of a spectral resolution, but actually

[10]) Cf. [4]), pp. 163—164.

determines the resolution of the identity belonging to a given selfadjoint operator. In the abstract formulation Hellinger's result reads:

$$(E(\mu)f, f)+(E(\mu-0)f, f)-[(E(\nu)f, f)+(E(\nu-0)f, f)]=$$

(12)
$$=\lim_{y\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_{\nu}^{\mu}\operatorname{Im}(R_{x+iy}f, f)\,dx,$$

where $E(\lambda)$ is the resolution of the identity which belongs to the operator H, therefore

(13)
$$(R_z f, f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(E(\lambda)f, f)}{\lambda-z}$$

holds for every non-real z. We shall prove here, that if H is a selfadjoint operator and f is any element of $\mathfrak{H}$, then

$$\lim_{y\to 0}\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\operatorname{Im}(R_{x+iy}f, f)\,dx=\varrho(\lambda)$$

defines a monotone-increasing function of λ, $-\infty\leqq\lambda\leqq+\infty$, with the property

$$\varrho(\lambda)=\frac{1}{2}[\varrho(\lambda+0)+\varrho(\lambda-0)]$$

and

(14)
$$(R_z f, f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda-z}.$$

The rest of the proof is indicated in the previous section. The forthcoming calculations have an almost entirely function-theoretical character. All necessary information about HILBERT space is given in the following lemma:

Let f be an element in the domain of H and $y\neq 0$, then

$$(R_z f, f)=-\frac{|f|^2}{z}+\psi(z)$$

where $\psi(z)$ is analytic for $y>0$ and $|z\psi(z)|<K/y$. The constant K is determined by f.

The validity of this lemma follows from (5) immediately.

In fact

$$(R_z f, f) + \frac{|f|^2}{z} = \frac{(R_z Hf, f)}{z}.$$

We set $\psi(z) = (R_z Hf, f)/z$ and obtain from (6)

$$|z\psi(z)| = |(R_z Hf, f)| \leqq \frac{|Hf|\,|f|}{y} = \frac{K}{y}.$$

Theorem. *If f is an element of $\mathfrak{H}$ and R_z the resolvent of a selfadjoint operator then*

1. *the function*

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \operatorname{Im}\,(R_{x+iy} f, f)\, dx$$

exists for every x, $-\infty \leqq x \leqq +\infty$ and every $y > 0$; it is a real, monotone-increasing function of x, $\sigma(x, y) \geqq 0$;

2. $\varrho(x) = \lim\limits_{y \to 0} \sigma(x, y)$ *exists for all x;*

3. $$(R_z f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda - z}.$$

We can evidently restrict our attention to elements with $|f| = 1$. Let f be such an element in the domain of H. In order to simplify the notation we write $w(z) = (R_z f, f)$. According to the lemma $w(z) + 1/z = \psi(z)$. Since $\psi(z)$ is analytic for $y > 0$, $\int_G \psi(z)\, dz = 0$ if G is any closed curve in the upper half-plane. Let G be the straight line connecting $-M + iy$ with $M + iy$ and the arc of a circle around the origin from $M + iy$ to $-M + iy$. Let $\tan \varepsilon = y/M$ and $R^2 = M^2 + y^2$. If M tends to infinity, the integral on the arc tends to 0, since by the lemma

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \psi(Re^{i\vartheta})\, Rie^{i\vartheta}\, d\vartheta \right| \leqq \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} K \frac{d\vartheta}{y} = \frac{K}{R} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} =$$

$$= \frac{K}{R} \log \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\tan\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{K}{R} \log \left[\tan \frac{\varepsilon}{2}\right]^{-2} =$$

$$= \frac{2K}{R} \log \frac{2\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{2K}{R} \log \frac{2}{\sin\varepsilon} = \frac{2K}{R} \log \frac{2R}{y}.$$

This tends to 0 for every fixed y if $R \to \infty$.

Thus

$$(16) \qquad \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{+M} \left(w(z) + \frac{1}{z}\right) dx = 0$$

for every $y > 0$. Separating the imaginary part of the integral and noting that $\lim\limits_{M\to\infty} \int\limits_{-M}^{+M} \operatorname{Im} \frac{1}{z}\, dx = -\pi$ we obtain

$$(17) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} w(z)\, dx = \pi$$

for every $y > 0$. The integral in (17) is absolutely convergent since $\operatorname{Im} w(z) \geqq 0$. Hence $\sigma(x, y)$ exists for every $y > 0$ and is a real monotone-increasing function of x as stated in the theorem.

In order to remove the restriction that f is in the domain of H we make use of the continuity of $(R_z f, f)$ in f and of the fact that the domain of H is everywhere dense in $\mathfrak{H}$. It is clear that for every given f, $\varepsilon > 0$ and $M > 0$, we can choose an element f' in the domain of H such that

$$\left| |f|^2 - |f'|^2 \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

and

$$|(R_z f, f) - (R_z f', f')| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

for every $y \geqq y_0 > 0$ and every x. Hence

$$\left| \int_{-M}^{+M} \operatorname{Im} ((R_z f, f) - (R_z f', f'))\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

therefore

$$\int_{-M}^{+M} \operatorname{Im} (R_z f, f)\, dx < \pi |f'|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \pi |f|^2 + \varepsilon$$

for every $\varepsilon > 0$. Thereby the first statement of the theorem is proved.

We introduce the integrated functions:[11])

[11]) At this point we use an argument very similar to that employed by R. Nevanlinna, Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae,* (A) **18** (1922), pp. 1—53.

(18) $$w_1(z) = \int_{z_0}^{z} w(z)\,dz$$

and

(19) $$w_2(z) = \int_{z_0}^{z} w_1(z)\,dz,$$

where both y and y_0 are positive and the path of integration is in the upper half-plane. w_1 and w_2 are analytic functions of z in the half-plane $y > 0$. Furthermore

(20) $$w_1(z) = \int_{x_0}^{x} w(x+iy_0)\,dx + i\int_{y_0}^{y} w(x+iy)\,dy;$$

hence by (6)

(21) $$|w_1(z)| \leq |f|^2 \left(\frac{|x-x_0|}{y_0} + \left|\log\frac{y}{y_0}\right|\right).$$

Thus, if y tends to 0, $w_1(z)$ tends to infinity of order not higher than $\log y$. The integrated function $w_2(z)$ is continuous for $y=0$ since $\int_{y_0}^{0} \log y\,dy$ is finite. The imaginary part of (20) gives

(22) $$v_1(x+iy) = \int_{x_0}^{x} v\,dx + \int_{y_0}^{y} u\,dy$$

which relation together with (17) shows that, for every fixed $y > 0$, v_1 is *uniformly* bounded in x. Moreover

(23) $$\frac{\partial v_1(x+iy)}{\partial x} = v(x+iy);$$

similarly

(24) $$\frac{\partial v_2(x+iy)}{\partial x} = v_1(x+iy),$$

hence

(25) $$\frac{\partial^2 v_2(x+iy)}{\partial x^2} = v(x+iy) > 0$$

for every $y > 0$. Thus the function $v_2(x+iy)$ is a *convex* function of x for every fixed $y > 0$. A well-known argument shows that its limit for $y=0$, $v_2(x) = \lim\limits_{y=0} v_2(x+iy)$, is also convex; but a convex function has derivatives to the right as well as to the left; they can differ from each other on a countable set only. Consequently $\frac{dv_2(x)}{dx}$ exists for almost every x, more precisely for every x with the possible exception of a countable set, — it is a monotone non-decreasing function of x. On account of the convexity of v_2 we have for every $h > 0$

$$\frac{v_2(x+iy)-v_2(x-h+iy)}{h} \leq v_1(x+iy) \leq \frac{v_1(x+h+iy)-v_2(x+iy)}{h}$$

valid for every positive y. If h is fixed and y tends to 0, the limits on the right and on the left exist since v_2 continuous for $y=0$. Hence

$$\frac{v_2(x)-v_2(x-h)}{h} \leq \liminf_{y=0} v_1(x+iy) \leq$$
$$\leq \limsup_{y=0} v_1(x+iy) \leq \frac{v_2(x+h)-v_2(x)}{h}.$$

Now, if h tends to 0, then both difference-quotients tend to the same limit for all values of x where the derivatives of $v_2(x)$ to the right and to the left coincide; i. e. everywhere with the possible exception of a countable set. Everywhere except on this set $v_2'(x) = \lim_{y=0} v_1(x+iy) = v_1(x)$ exists and is a monotone non-decreasing function of x. Evidently $v_1(x-0)$ and $v_1(x+0)$ exist for every x; wherever they coincide $v_1(x)$ also exists. At every point of discontinuity we can assign to v_1 an arbitrary value between $v_1(x-0)$ and $v_1(x+0)$. The function $v_1(x)$ so extended is defined for every x; it is a monotone increasing (non-decreasing) function with a variation not exceeding $\pi|f|^2$. This follows from (17) since

$$|v_1(x_1+iy)-v_1(x_2+iy)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} v(\lambda+iy)\,d\lambda\right| \leq |f|^2\pi,$$

therefore $|v_1(x_1)-v_1(x_2)| \leq |f|^2\pi.$

Now we turn to the integral representation of $w(z)=(R_zf,f)$. According to Poisson's theorem

$$w(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(\lambda+i\eta)\,d\lambda}{\lambda+i\eta-z} + C \tag{26}$$

where C is a real constant and $\eta > 0$. The integral is absolutely convergent for all $y > \eta > 0$ since

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{v(\lambda+i\eta)\,d\lambda}{\lambda+i\eta-z}\right| < \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{y-\eta}\int_a^b v(\lambda+i\eta)\,d\lambda.$$

It follows from (5) that $C=0$ since the integral tends to 0 if y tends to ∞. It is evident that both integrals

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(\lambda+i\eta)\,d\lambda}{\lambda+i\eta-z} \text{ and } \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{v(\lambda+i\eta)\,d\lambda}{\lambda-z}$$

tend to the same limit if η tends to 0, since their difference does not exceed

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta v(\lambda+i\eta)}{|\lambda-z|\,|\lambda+i\eta-z|}\,d\lambda \leqq \frac{\eta}{y(y-\eta)}K,$$

K being a constant. Hence by (26)

$$w(z)=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(\lambda+i\eta)}{\lambda-z}\,d\lambda. \tag{27}$$

Integration by parts gives

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(\lambda+i\eta)\,d\lambda}{\lambda-z}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_1(\lambda+i\eta)\,d\lambda}{(\lambda-z)^2} \tag{28}$$

for every $\eta>0$, since $v_1(\lambda+i\eta)$ is bounded for every fixed η.

The definition of v_2 gives

$$v_2(\lambda+i\eta)=\int_{y_0}^{\eta} u_1(x_0+i\eta)\,d\eta+\int_{x_0}^{\lambda} v_1(x+i\eta)\,dx,$$

hence for every fixed $\eta>0$

$$|v_2(\lambda+i\eta)|\leqq C_1+C_2|\lambda-x_0|,$$

where C_1 and C_2 do not depend on λ. This inequality justifies a repeated partial integration of (28) with the result

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_2(\lambda+i\eta)}{(\lambda-z)^3}\,d\lambda. \tag{29}$$

If η tends to 0 this integral tends to

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_2(\lambda)\,d\lambda}{(\lambda-z)^3}. \tag{30}$$

In fact, from the equation $v_2(\lambda+i\eta)-v_2(\lambda)=\int\limits_0^\eta u_1(\lambda+iy)\,dy$ and from (21) we obtain the inequality

$$|v_2(\lambda+i\eta)-v_2(\lambda)|\leqq|f|^2\eta\left\{\frac{|\lambda-x_0|}{y_0}+\left|\log\frac{\eta}{y_0}-1\right|\right\}.$$

Hence the difference between the two integrals in (29) and (30) does not exceed

$$\frac{2}{\pi}|f|^2\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda-z)^3}\left\{\frac{|\lambda-x_0|}{y_0}+\left|\log\frac{\eta}{y_0}-1\right|\right\}d\lambda,$$

which tends to 0 with η.

It has been proved thus far that

$$w(z)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_2(\lambda)\,d\lambda}{(\lambda-z)^3}. \tag{31}$$

We can now revert the partial integration since $v_2(\lambda)$ has a derivative for every λ with the possible exception of a countable set which does not contribute to the integral; thus

$$w(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_1(\lambda)\,d\lambda}{(\lambda-z)^2} \tag{32}$$

and also

$$w(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dv_1(\lambda)}{\lambda-z}. \tag{33}$$

With this last equation at our disposal we can prove the existence of $\varrho(\lambda)$ for every λ. The imaginary part of (33) gives

$$v(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(\lambda-x)^2+y^2}\,dv_1(\lambda). \tag{34}$$

This integral is bounded and $v_1(\lambda)$ is a function of bounded variation. Hence we can integrate with respect to x and revert the order of integration:

$$\int\limits_{-\infty}^{x}v(x+iy)\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\lambda-x}{y}\right)dv_1(\lambda),$$

which becomes after integration by parts

$$(35)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(\lambda-x)^2+y^2}\,v_1(\lambda)\,d\lambda - v_1(-\infty).$$

The integral in (35) is a Poisson integral; it represents a harmonic function in the upper half-plane. It follows from the well-known theory of Poisson integrals that if y tends to 0 this harmonic function tends to $v_1(x)$ at every point of continuity of $v_1(x)$ and to $\frac{1}{2}\{v_1(x+0)+v_1(x-0)\}$ at every point of discontinuity. Hence $\pi\varrho(x)=\lim\limits_{y\to 0}\int_{-\infty}^{x} v(x+iy)\,dx$ exists for *every* x; it is equal to $v_1(x)-v_1(-\infty)$ and $\frac{1}{2}\{v_1(x+0)+v_1(x-0)\}-v_1(-\infty)$ respectively. $\varrho(x)$ is evidently a monotone-increasing (non-decreasing) function of x. This proves the first and the second statement of the theorem. We can now replace v_1 by $\pi\varrho$ in (33) and obtain

$$w(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varrho(\lambda)}{\lambda-z}.$$

(Received August 19, 1937.)

Über die Primzahlen der arithmetischen Progression. (II.)

Von PAUL TURÁN in Budapest.

Im folgenden sei immer $s=\sigma+ti$, $L(s,\chi)$ eine beliebige Dirichletsche L-Reihe, welche für $\sigma>1$ bekanntlich durch $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$ definiert ist; $\varphi(k)$ die Eulersche Funktion, $\Lambda(n)$ das Dirichletsche Symbol. Die zu behandelnde Progression sei $kx+l\,(x=0,1,\ldots)$, wo $(k,l)=1$; es bedeute $P(k,l)$ die kleinste Primzahl dargestellt von $kx+l$. Es ist $L(s,\chi)\neq 0$ für $\sigma>1$; die unbewiesene Piltzsche Vermutung[1]) behauptet, daß $L(s,\chi)\neq 0$ für $\sigma>\frac{1}{2}$.

S. CHOWLA[2]) bemerkte, daß unter Annahme der Piltzschen Vermutung gilt

$$P(k,l)<c_1\varphi(k)^{2+\varepsilon}, \tag{1}$$

wo $\varepsilon>0$, beliebig klein und $c_1=c_1(\varepsilon)$ ist. In meinem ersten Aufsatze[3]) bewies ich, daß unter derselben Vermutung

$$P(k,l)<c_2\varphi(k)\log^{2+\varepsilon}\varphi(k) \tag{2}$$

für fast alle Progressionen mod k, d. h. für jedes beliebig kleine ε existiert ein $c_2=c_2(\varepsilon)$ so, daß

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\substack{l\\ 1\leq l<k,\ (k,l)=1\\ P(k,l)<c_2\varphi(k)\log^{2+\varepsilon}\varphi(k)}}1=1.$$

1) A. PILTZ, *Über die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen etc.* (Habilitationschrift Jena, 1884.)

2) S. CHOWLA, On the Least Prime in the Arithmetical Progression, *Journal Indian Math. Society,* (2) 1 (1934), p. 1—3.

3) P. TURÁN, Über die Primzahlen der arithmetischen Progression, *diese Acta,* 8 (1936—37), p. 226—235.

Zur Orientierung bemerke ich, daß aus dem Primzahlsatze offenbar

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{l \\ (l,\,k)=1,\ 1\leqq l\leqq k-1 \\ P(k,\,l)<\varphi(k)\log^{1-\varepsilon}\varphi(k)}} 1 = 0$$

folgt; es ist also fast immer $P(k, l) < c_2(\varepsilon)\varphi(k)\log^{2+\varepsilon}\varphi(k)$ und $P(k, l) > \varphi(k)\log^{1-\varepsilon}\varphi(k)$.

Im folgenden will ich kurz zeigen, daß man mit einer schwächeren Voraussetzung auskommt. Es genügt nur über die „kleinen" Wurzeln der L-Funktionen etwas vorauszusetzen; so erhellt sich besonders, daß die „kleinen" Primzahlen der arithmetischen Progression nur von den „kleinen" Wurzeln der L-Funktionen abhängen. Diesen Schluß ziehen wir aus dem folgenden Satz.

Satz. *Es sei vorausgesetzt, daß die Piltzsche Vermutung in folgender schwächerer Form wahr ist: Es existieren zwei positiven Weltkonstanten δ mit $0 < \delta \leqq \frac{1}{2}$ und α, so daß in das Parallelogramm $1-\delta < \sigma \leqq 2$, $|t| \leqq \alpha$ keine der L-Funktionen verschwinden. Dann ist*

$$P(k, l) < c_3\varphi(k)^{c_4},$$

wo c_3 eine absolute Konstante bedeutet und c_4 nur von α und δ abhängt, jedoch mit $c_4 > \frac{1}{\delta}$.

Bemerkung: c_4 nimmt monoton ab, wenn α monoton zunimmt; wenn $\alpha\to\infty$, kann man c_4 als $\frac{1}{\delta}+\varepsilon$ wählen mit beliebig kleinem positiven ε.

Beweis. Einfachkeitshalber nehmen wir $\delta = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 5$ an und beweisen den Satz mit $c_4 = 8$; im allgemeinen Falle ist der Beweis ähnlich.

Es ist für $\sigma > 1$

$$(3) \qquad \sum_{\substack{n \\ n\equiv l \bmod k}} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \frac{1}{\bar{\chi}(l)} \frac{L'}{L}(s, \chi) \equiv f(s).$$

Es sei $\frac{1}{2} + \varphi(k)^8 = x$, $\omega = [2\log\varphi(k)]$; dann ist bekanntlich wegen (3)

$$(4) \qquad \sum_{\substack{n \\ n<x}} \Lambda(n) \frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{n}}{(\omega-1)!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma=1+\frac{1}{\log x}} \frac{x^s}{s^\omega} f(s)\, ds.$$

Es sei

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{4 \\ \sigma=1+\frac{1}{\log x}}}^{\infty} \frac{x^s}{s^\omega} f(s)\, ds.$$

Auf $\sigma = 1 + \dfrac{1}{\log x}$ ist

$$|f(s)| < \sum_{\substack{n \\ n\equiv l \bmod k}} \frac{\log n}{n^{1+\frac{1}{\log x}}} < 2 + \frac{1}{k^{1+\frac{1}{\log x}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log k\nu}{\nu^{1+\frac{1}{\log x}}} < a_1$$

wo a_1 und später $a_2, \ldots$ von k, l, s unabhängig sind. Dann ist also

$$|I_1| < a_2 x \int_4^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{\omega}{2}}} < a_2 x \int_4^\infty \frac{2t}{(1+t^2)^{\frac{\omega}{2}}} dt <$$
$$< \frac{a_3 x}{\omega \,.\, 17^{\frac{\omega}{2}}} < a_4 \varphi(k)^{8-\log 17} < a_4 \varphi(k)^6.$$

Es ist also

$$\left| \sum_{\substack{n \\ n\equiv l \bmod k}} \Lambda(n) \frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{n}}{(\omega-1)!} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{-4 \\ \sigma=1+\frac{1}{\log x}}}^{4} \frac{x^s}{s^\omega} f(s)\, ds \right| < a_4 \varphi(k)^6.$$

Wir wenden den Cauchyschen Integralsatz auf das Parallelogramm $\left(\dfrac{3}{4} \pm 4i,\ 1 + \dfrac{1}{\log x} \pm 4i\right)$ und die Funktion $\dfrac{x^s}{s^\omega} f(s)$ an. Das Integrand ist hier nach der Voraussetzung regulär, ausgenommen den Punkt $s = 1$, wo ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\dfrac{1}{\varphi(k)}$ liegt. Da das Integrand auf der reellen Achse reel ist, gilt

$$\left| \sum_{\substack{n \\ n<x \\ n\equiv l \bmod k}} \frac{\Lambda(n)\log^{\omega-1}\frac{x}{n}}{(\omega-1)!} - \varphi(k)^7 \right| <$$

$$(6) \qquad < a_5\varphi(k)^6 + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\substack{\frac{3}{4} \\ t=4}}^{1+\frac{1}{\log x}} \frac{x^\sigma |f(s)|}{(\sigma^2+16)^{\log\varphi(k)}} d\sigma +$$

$$+\frac{1}{\pi} \int\limits_{\substack{0 \\ \sigma=\frac{3}{4}}}^{4} \frac{x^{\frac{3}{4}} |f(s)|}{\left(\frac{9}{16}+t^2\right)^{\log\varphi(k)}} dt \equiv a_5\varphi(k)^6 + I_2 + I_3.$$

Nun gilt aber, wenn $L(s,\chi)\neq 0$ für $\sigma>\frac{1}{2}$, $|t|\leqq 5$ nach Titchmarch[4]) für die Strecken $\sigma=\frac{3}{4}$, $|t|\leqq 4$ bzw. $t=4$, $\frac{3}{4}\leqq\sigma\leqq 2$

$$(7) \qquad \left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right| < a_6 \log\varphi(k),$$

also auch

$$|f(s)| < a_7 \log\varphi(k).$$

Dann ist aber

$$(8a) \quad I_3 < a_8 x^{\frac{3}{4}} \left(\frac{16}{9}\right)^{\log\varphi(k)} \log\varphi(k) < a_9\varphi(k)^{6+\log\frac{16}{9}} \log\varphi(k) < a_{10}\varphi(k)^{67},$$

ferner

$$(8b) \qquad I_2 < a_{11} \frac{x\log\varphi(k)}{16^{\log\varphi(k)}} < a_{12}\varphi(k)^6,$$

also nach (8a), (8b) und (6)

$$(9) \qquad \left| \sum_{\substack{n \\ n\leqq\varphi(k)^8 \\ n\equiv l \bmod k}} \Lambda(n) \frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{n}}{(\omega-1)!} - \varphi(k)^7 \right| < a_{13}\varphi(k)^{67}.$$

---

[4]) E. C. Titchmarch, A Divisor Problem, *Rendiconti Palermo*, **54** (1930), p. 414—429. Die Behauptung (7) steht hier nicht explicite; es läßt sich aber leicht aus Lemma VII und Lemma V entnehmen.

Wir müssen den Beitrag der Primzahlpotenzen p^α mit $\alpha > 1$ abschätzen. Da für $1 \leqq n \leqq \varphi(k)^4$

$$\frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{n}}{(\omega-1)!} < a_{14}\left(\frac{e\log\frac{x}{n}}{\omega}\right)^{\omega} < a_{15}(4e)^{2\log\varphi(k)} < a_{16}\varphi(k)^{4.8}$$

gilt, so ist

$$\text{(10a)} \quad \sum_{\substack{p,\alpha \\ p^\alpha \equiv l \bmod k \\ p^\alpha < \varphi(k)^4,\ \alpha > 1}} \log p \frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{p^\alpha}}{(\omega-1)!} < $$

$$< a_{17}\varphi(k)^{4.8}\log\varphi(k) \sum_{\substack{d,r \\ d^r < \varphi(k)^4,\ r>1}} 1 < a_{18}\varphi(k)^{6.9}.$$

Da ferner für $\varphi(k)^4 \leqq n < \varphi(k)^6$

$$\frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{n}}{(\omega-1)!} < a_{18}\left(\frac{e\log\frac{x}{n}}{\omega}\right)^{\omega} < a_{19}(2e)^{2\log\varphi(k)} < a_{19}\varphi(k)^{3.4},$$

so ist

$$\text{(10b)} \quad \sum_{\substack{p,\alpha \\ p^\alpha \equiv l \bmod k,\ \alpha > 1 \\ \varphi(k)^4 \leqq p^\alpha < \varphi(k)^6}} \log p \frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{p^\alpha}}{(\omega-1)!} < $$

$$< a_{20}\varphi(k)^{3.4}\log\varphi(k) \sum_{\substack{d,r \\ d^r < \varphi(k)^6 \\ r>1}} 1 < a_{21}\varphi(k)^{6.5}.$$

Endlich gilt für $\varphi(k)^6 \leqq n \leqq \varphi(k)^8$

$$\frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{n}}{(\omega-1)!} < a_{22}\left(\frac{e\log\frac{x}{n}}{\omega}\right)^{\omega} < a_{22}e^{2\log\varphi(k)} = a_{22}\varphi(k)^2$$

also

$$\text{(10c)} \quad \sum_{\substack{p,\ \alpha>1 \\ p^\alpha \equiv l \bmod k \\ \varphi(k)^6 \leqq p^\alpha \leqq \varphi(k)^8}} \log p \frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{p^\alpha}}{(\omega-1)!} < $$

$$< a_{23}\varphi(k)^2\log\varphi(k) \sum_{\substack{d,\ r>1 \\ d^r \leqq \varphi(k)^8}} 1 < a_{24}\varphi(k)^{6.1}.$$

Aus (9), (10a), (10b) und (10c) folgt schließlich

$$\left| \sum_{\substack{p \\ p \equiv l \bmod k \\ p \leqq \varphi(k)^8}} \log p \frac{\log^{\omega-1} \frac{x}{p}}{(\omega-1)!} - \varphi(k)^7 \right| < c_{25} \varphi(k)^{6.9},$$

also für $k > a_{26}$

$$\sum_{\substack{p \\ p \equiv l \bmod k \\ p \leqq \varphi(k)^8}} \log p \frac{\log^{\omega-1} \frac{x}{p}}{(\omega-1)!} > 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

Weitere Ergebnisse in dieser Richtung gibt eine von HOHEISEL stammende Methode; auf deren Behandlung hoffen wir in der Kürze zurückzukehren.

(Eingegangen am 23. November 1938.)

Bibliographie.

Theodor Peters, Euklid Elemente Buch X, nach Heibergs Text übertragen, 118 S., Berlin, Pan-Verlagsgesellschaft m. b. H., 1936.

Die vorliegende Bearbeitung des X. Buches von EUKLID ist vollständig neu. Der Übersetzer vermied grundsätzlich jede zu weit gehende Symbolik und hat so die Form des ursprünglichen griechischen Textes treu bewahrt. Für formelhafte und häufig wiederkehrende Wendungen wird jedoch die Zeichensprache verwendet. Soweit die Inhalte sich decken, benutzt der Übersetzer auch moderne Begriffsbildungen. Eine algebraische Interpretation wird aber nicht gegeben, weil es nach Meinung des Übersetzers unmöglich ist, eine adäquate und formschöne algebraische Interpretation zu finden.

Das Buch enthält zum Schluß noch wertvolle Anmerkungen und zwar: A. Literatur; B. Bemerkungen zum Inhalt des X. Buches und zur vorliegenden Übertragung; C. Zusammenstellung der einleitenden Sätze; Übersicht über die zum Aufbau des Ganzen wichtigen notwendigen Schlußarten und Schlüsse; D. Vergleichende Übersicht teils auseinander folgender, teils einander entsprechender Sätze und Satzgruppen; E. Schlüsse aus Buch V; F. Anmerkungen zu den einzelnen Sätzen.

St. Lipka.

Rolf Nevanlinna. Eindeutige analytische Funktionen (Grundlehren der math Wissenschaften, Band XLVI), VIII + 353 S., Berlin, J. Springer, 1936.

Eine eindeutige analytische Funktion $w(z)$ vermittelt eine Abbildung eines schlichten Gebietes der z-Ebene auf ein schlichtes oder mehrfach überdecktes Gebiet der w-Ebene, die in jedem inneren Punkt, höchstens mit Ausnahme abzählbar vieler, die sich nur gegen den Rand häufen können, konform ist. Da dies auch umgekehrt gilt, ist es einleuchtend, daß gerade die Größen, die sich bei einer solchen Abbildung *invariant* verhalten, eine vorragende Rolle in der Theorie der analytischen Funktionen spielen. Diese Tatsache ist für den Verfasser des vorliegenden Werkes, den berühmten Vertreter der finnischen Schule, wegleitend gewesen. Schon im ersten Paragraphen begegnet der Leser den Invarianten der linearen Transformation, von denen aus Verfasser auf elementarem Wege zum Begriff des ***harmonischen Maßes*** eines Kreisbogens gelangt. Durch die Hauptsätze der konformen Abbildung und der Uniformisierung wird dieser Begriff auf beliebige, auch mehrfach zusammenhängende Gebiete und auf beliebige Randpunktmengen übertragen. Er ist für die ganze Darstellung von entscheidender Bedeutung. Zunächst stellt Verfasser ein allgemeines „Prinzip der Vergrößerung des harmonischen Masses" auf, das kurz besagt, daß durch eine eindeutige, aber mehrwertige Abbildung das harmonische Maß sich vergrößert. Dieses Prinzip wird an die Spitze einer Reihe wohlbekannter Sätze aus der Funktionentheorie gestellt, deren innerer Zusammenhang auf diese Weise dargelegt wird, ein Vorzug, der völlig den Umstand aufwägt, daß einzelne von diesen Sätzen durch spezielle Methoden einfacher erhalten werden könnten. Als Beispiele seien der Zweikonstantensatz und der Grenzwertssatz von LINDELÖF erwähnt. In demselben Sinne wird auch das Prinzip von LINDELÖF gedeutet, das Verfasser durch Anwendung einer nichteuklidischen Maßbestimmung in ein sogenanntes „Prinzip vom hyperbolischen Maß" überträgt. Als einfachster Fall dieses Prinzips ist das Schwarzsche Lemma zu erwähnen, weitere Folgerungen sind die Sätze von LANDAU und SCHOTTKY. Die harmonischen bzw. hyperbolischen Maße sind im allgemeinen nicht elementar durch die euklidischen Bestimmungsstücke (Länge, Winkel, usw.) ausdrückbar, es ist daher eine wichtige Aufgabe wenigstens Schranken anzugeben, den die Maßzahlen des einen Systems bei gegebenen Maßzahlen des anderen unterliegen müssen. Um das harmonische Maß abzuschätzen, macht Verfasser insbesondere von der Carlemanschen Methode der Gebietserweiterung Gebrauch, die in enger Beziehung zu der in der Potentialtheorie wohlbekannten Ausfegungsmethode steht. Dieselbe Methode wird auch zum Beweis der Verzerrungssätze von KOEBE und AHLFORS angewendet. Über das Problem von CARLEMAN-MILLOUX und die Methoden von NEVANLINNA und BEURLING zur Lösung desselben wird ausführlich berichtet. Ein besonderes Interesse verdienen die Punktmengen vom harmonischen Maß Null bzw. die von der Kapazität Null, oder wie Verfasser sagt, vom ***absoluten*** harmonischen Maß Null. Verfasser versucht auch diese Punktmengen durch die Hausdorffsche Metrik zu charakterisieren; dieses Problem wird für die linearen Mengen vom Cantorschen Typus vollständig gelöst. Als Beispiel für die Anwendung der harmonischen Nullmengen mag das erweiterte Maximumsprinzip von PHRAGMÉN-LINDELÖF genannt werden.

Die zweite Hälfte des Buches von NEVANLINNA ist der Theorie der meromorphen Funktionen und der Wertverteilungslehre gewidmet. Mit dieser Theorie hat sich ja Verfasser in seiner früheren Arbeit in Collection Borel, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Paris, 1929) eingehend beschäftigt, das vorliegende Werk setzt aber jene nicht voraus, auch ist die Darstellung in mehreren Punkten vereinfacht und durch neue Resultate der Forschung vervollständigt worden. Die potentialtheoretischen Methoden und Maßbestimmungen kommen auch hier häufig zur Anwendung; wir erwähnen z. B. den Satz über die Randwerte einer beschränktartigen Funktion und den Ahlfors-Frostmanschen Satz über die defekten Werte. Es ist dem Verfasser gelungen, die relativ schwer zugänglichen Sätze dieser Theorie in übersichtlicher Form darzustellen, und das Lesen wird oft durch heuristische Betrachtungen erleichtert. Dies gilt z. B. vom zweiten Hauptsatz, für welchen Verfasser zwei Beweise gibt, von denen einer (der F. Nevanlinnasche) auf einer nichteuklidischen Maßbestimmung beruht. In den letzten Kapiteln kehrt Verfasser gewissermassen die Probleme um, er geht von einer gegebenen, einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche aus und sucht aus ihrer *Verzweigtheit* Schlüsse betreffs der Abbildungsfunktion zu ziehen. Diese Funktion bildet die Fläche auf ein schlichtes Gebiet ab, das — von leicht angebbaren Fällen abgesehen — entweder die punktierte Ebene (parabolischer Fall) oder der Einheitskreis (hyperbolischer Fall) ist. Das Problem der Trennung dieser beiden Fälle (das Typusproblem) wird eingehend behandelt. Die wohlgeschriebene und inhaltsreiche Arbeit schließt mit der Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen, die besonders die topologische Seite der Wertverteilungslehre hervorhebt. Es sei bemerkt, daß AHLFORS seine Untersuchungen später durch differentialgeometrische Methoden weiter verfolgt hat *(Acta Societatis Scientiarum Fennicae,* 1937), so daß man jetzt den wesentlichen Inhalt des zweiten Hauptsatzes in der Nevanlinnaschen Theorie aus dem klassischen Satz von GAUSS-BONNET erhalten kann.

Otto Frostman.

B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, erster Teil (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band XXXIII), zweite verbesserte Auflage, X + 272 S., Berlin, J. Springer, 1937.

Mit der Neubearbeitung dieses ersten Bandes ist es dem Verfasser gelungen, das Buch wieder ganz auf die Höhe der Zeit zu bringen. Von den zahlreichen kleineren und größeren Umordnungen und Ergänzungen, die in dieser neuen Auflage gegenüber der ersten vorgenommen wurden, erwähnen wir, daß die Eulersche Resultantentheorie, sowie die Theorie der linearen Gleichungen aus dem zweiten Bande in den ersten übernommen sind, daß ein Paragraph über Partialbruchzerlegung hinzugefügt ist, daß die Lehre der Differentiation und die Interpolationsrechnung weiter ausgebaut sind, daß die Lehre der Faktorzerlegung elementar begründet wird, usw. Mit diesen Änderungen ist es gelungen, aus dem ersten Bande ein für Anfänger brauchbares Elementarbuch der Algebra (mit der Ausnahme der Determinantentheorie) zu machen. Der Hauptunterschied zwischen den beiden Auflagen besteht aber darin, daß jetzt die Grundlagen der Bewertungstheorie ausführlicher behandelt werden, und, daß die Ausführungen über geordnete und wohlgeordnete Mengen, sowie diejenigen Teile der Körpertheorie, die auf dem Auswahlpostulat und dem Wohlordnungssatz beruhten, wegfallen. Der Aufbau der Körpertheorie ist so geändert, daß er dem „finiten" Standpunkt besser entspricht.

Béla v. Sz. Nagy.

Tibor Radó, Subharmonic Functions (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, fünfter Band, Heft 1), V + 56 S., Berlin, J. Springer, 1937.

Subharmonic functions are functions of two or more variables, continuous or upper semi-continuous, related to the harmonic functions in a similar fashion as convex functions are to the linear ones. The idea of such functions seems to have appeared first in connection with the sweeping-out method of POINCARÉ. Later on, the same idea has played also an important part in investigations of HARTOGS, PERRON, F. and R. NEVANLINNA, myself, and others on Potential Theory and Theory of Functions. Some 15 years ago, I have started to develop a systematic theory, a first outline of which is to be found in the second volume of these *Acta*. Among the many mathematicians who contributed to our theory, a prominent part is due to the author of the above report, Professor RADÓ, of Ohio State University, formerly at the University of Szeged. He was the first to apply a smoothing process, by way of integral means, to subharmonic functions of a more or less general type, so as to pass to approximating functions of a more particular type, to be dealt with by the classical methods of Potential Theory. Later on, in joint work with BECKENBACH, they established the relations linking subharmonic functions with minimal surfaces and surfaces of negative curvature. May I mention also his paper on harmonic majorants, in the current volume of our *Acta*. As to his present report, all I have to say is that it represents much more than a report; in fact, it is an up to date treatise, concise but nevertheless with many details, to be read by everyone who wishes to penetrate into our theory.

F. Riesz.

Stanislaw Saks, Theory of Integral, 2nd revised edition (Monografje Matematyczne, Tom VII), English by L. C. YOUNG, with two additional notes by STEFAN BANACH, VII + 347 pages, Warszawa—Lwów, 1937.

This english edition of SAKS' excellent monography differs in many respects from the french one. The material is considerably augmented by the insertion of many results atteined in these last years. Also the arrangement of the chapters and paragraphs is different from that of the french edition. The present edition starts with two chapters on integrals in abstract spaces (integral of RADON-NICODYM and that of CARATHÉODORY). A chapter follows on functions of bounded variation and on the LEBESGUE-STIELTJES integral. A chapter deals with the derivation of additive functions of a set (containing a large amount of new material, particularly the theorems of WARD). Then there follow chapters on the area of a surface $z = F(x, y)$, on major and minor functions (including PERRON and PERRON-STIELTJES integrals), on functions of generalised bounded variation, on DENJOY integrals and on derivatives of functions of one or two variables (containing some general results on the contingent of sets in the plane and in the space).

Two notes of BANACH are added, one presenting the theory of HAAR's measure, another the theory of the DANIELL integral, both in a slightly modified form.

Béla de Sz. Nagy.

Paul Luckey, Nomographie, praktische Anleitung zum Entwerfen graphischer Rechentafeln mit durchgeführten Beispielen aus Wissenschaft und Technik (Math.-Phys. Bibliothek, Reihe I, 59/60), dritte verbesserte Auflage, 107 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

Neuauflage der bekannten praktischen Anleitung zum Entwerfen graphischer Rechentafeln mit erweitertem Schriftenverzeichnis. Sie kann infolge ihres durchwegs elementaren Charakters, mit ihren vielen durchgeführten Beispielen, 57 Abbildungen und gezeichneten Rechentafeln noch immer als beste Einführung in die, dem Ingenieur unentbehrlichen Nomographie empfohlen werden.

T. v. Stachó.

Eberhard Hopf, Ergodentheorie (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, fünfter Band, Heft 2), V + 83 S., Berlin, J. Springer, 1937.

Die Theorie vom Verlauf der Bewegungen mechanischer Systeme, d. h. der Lösungen von Systemen von Differentialgleichungen, allgemeiner der „Stromlinien" stationärer „Strömungen" im großen, hat innerhalb der letzten zehn Jahre durch das Eindringen maßtheoretischer Gesichtspunkte eine Reihe neuer Impulse erfahren. Wir begrüßen diese erste systematische Darstellung der neuen Ergebnisse, die man in erster Reihe G. D. BIRKHOFF, CARLEMAN, KOOPMAN, VON NEUMANN und dem Verfasser verdankt.

Das erste Kapitel stellt die notwendigsten Hilfsmittel aus der allgemeinen Maß- und Integrationstheorie zusammen. Maßtheoretische Gesichtspunkte nehmen in der ganzen Darstellung den Vorrang vor den topologischen ein, da, wie der Verfasser betont, Ergodentheorie Statistik ist und Statistik Maßtheorie. Das zweite Kapitel enthält eine sehr schöne Darstellung der Hilfsmittel aus der Spektralanalyse der Funktionen und der unitären Operatorenscharen des Hilbertschen Raumes.

Ein Kapitel behandelt die Statistik bei Abbildungen und Strömungen. Ist $P \rightarrow P_t$ eine maßtreue Strömung im Raume Ω (die in gewissem Sinne meßbar von t abhängt), so besagt der statistische Ergodensatz, daß es zu jeder Funktion $f(P) \in L^2(\Omega)$ eine invariante Funktion $f^*(P) \in L^2(\Omega)$ (d. h.

$f^*(P_t) = f^*(P)$ fast überall) gibt, so daß

$$\lim_{b-a\to\infty} \int\limits_{\Omega} \left| \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(P_t)\,dt - f^*(P) \right|^2 dm = 0.$$

Bei endlichem $m(\Omega)$ heißt die Strömung ergodisch, wenn jede invariante Funktion fast überall konstant ist. Es werden interessante Beispiele ausgeführt. Dann werden Bedingungen dafür aufgestellt, daß eine Strömung vom Mischungstypus sei, d. h., daß im Laufe der Zeit vollständige Vermischung im Phasenraum eintritt.

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der „individuellen Ergodentheorie", deren Grundlage der Satz von BIRKHOFF bildet. In verallgemeinerter Form lautet dieser Satz folgendermaßen. Ist $P \to P_t$ eine maßtreue Strömung in Ω und enthält Ω keine wandernde Menge, gehören ferner $f(P)$ und $g(P)$ zu $L(\Omega)$, $g(P) > 0$, so existiert fast überall in Ω das Zeitmittel von $f(P)$ längs der Stromlinien, d. h.

$$\lim_{T\to\infty} \left(\int\limits_0^T f(P_t)\,dt \Big/ \int\limits_0^T g(P_t)\,dt \right).$$

Eine Menge A positiven Maßes heißt dabei wandernd, wenn für ein t $m(A_t \, . \, A) = 0$ ist. Ein analoger Satz gilt für die Potenzen einer einzigen maßtreuen Abbildung.

Es folgen dann Anwendungen auf das Gesetz der großen Zahlen, der Wienersche Satz über das Spektrum der „random functions" und ein Beispiel für eine Abbildung vom Mischungstypus bei unendlichem $m(\Omega)$.

Das letzte Kapitel ist eine Wiedergabe der Untersuchungen des Verfassers über die geodätischen Strömmungen auf vollständigen Flächen konstanter negativer Krümmung und endlicher Oberfläche. Das Hauptergebnis besteht darin, daß jede solche Strömung ergodisch ist.

Béla v. Sz. Nagy.

Hans Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, erster Band (Hamburger Math. Einzelschriften, 21. Heft), VI + 151 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

Die großen Fortschritte, die in den letzten Zeiten in allen Gebieten der abstrakten Algebra erzielt wurden, haben das Erscheinen auch eines die neuesten Resultate und Gesichtspunkte darstellenden Lehrbuches der Gruppentheorie wohl berechtigt. Das vorliegende Buch entspricht ausgezeichnet dieser Aufgabe. Eine Reihe älterer Sätze erhalten hier vereinfachte Beweise und zahlreiche neuere Resultate finden hier ihre erste lehrbuchartige Zusammenfassung. Glücklich gewählte Aufgaben steigern noch den Wert des Buches.

Kapitel I erklärt die Grundbegriffe der Gruppentheorie und illustriert sie am Beispiele der endlichen Drehgruppen. Kapitel II betrachtet Gruppen mit Operatoren, die Homomorphie- und Isomorphiesätze, den Jordan-Hölder-Schreierschen Satz, die Darstellung einer Gruppe durch Permutationen, Kommutatorgruppen und -formen, sowie die mit der Gruppentheorie in Verbindung stehenden Begriffsbildungen in der Algebra. Kapitel III untersucht die direkten Produkte und die Struktur Abelscher Gruppen und stellt die Schreiersche Erweiterungstheorie und einen Artinschen Satz über Zerfällungsgruppen dar. Kapitel IV betrachtet p-Sylowgruppen und p-Gruppen (letzte nach einer Arbeit von P. HALL). Kapitel V beschäftigt sich endlich mit den monomialen Darstellungen, mit der Verlagerung in eine Untergruppe (nach ARTIN), sowie mit einer Reihe interessanter Sätze von FROBENIUS, BURNSIDE, GRÜN, IYANAGA und vom Verfasser.

Béla v. Sz. Nagy.

C. Boehm und E. Rose, Beiträge und Deckungsrücklagen in der Lebensversicherung (Versicherungsmathematische Aufgabensammlung, herausgegeben vom Deutschen Aktuarverein, Heft 1), XI + 75 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

C. Boehm und P. Lorenz, Umwandlung von Lebensversicherungen (Versicherungsmathematische Aufgabensammlung, herausgegeben vom Deutschen Aktuarverein, Heft 2), in Zusammenarbeit mit J. STANISZEWSKI, XIV + 52 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

In dieser Aufgabensammlung sind die mathematischen Fragen der Praxis der Lebensversicherung behandelt, und zwar in weitgehender Berücksichtigung der täglichen Erfordernisse des Versicherungstechnikers. Zweck und Verwendung der beiden Hefte wird durch die einleitenden Worte des ersten Heftes beleuchtet: „Der Praktiker wird aus den Aufgaben die allgemeinen Grundlagen der Versicherungsmathematik erarbeiten können, der Theoretiker die für die Praxis notwendigen Besonderheiten." Aus diesem Gesichtspunkte, sowie als Sammlung versicherungsmathematischer Aufgaben, füllt das Werk eine Lücke aus.

Im ersten Heft werden in 75 Aufgaben Versicherungsangebote, Gesamtleistung des Versicherungsnehmers, Nettoleistung des Versicherers, Berechnung der ausreichenden Prämie, Berechnung der Nettodeckungsrücklage, die gezillmerte Deckungsrücklage und endlich verschiedene wichtige Versicherungsformen behandelt.

Das zweite Heft enthält 42 Aufgaben, welche sich mit Änderungen der Versicherungssumme, der Beitragszahlungsweise, der Versicherungsdauer, der Versicherungsform, der Währung oder der Zusatzversicherungen beschäftigen, ferner mit Wiederbelebungen, Tilgung eines Darlehens oder einer Vorauszahlung und zum Schlusse mit Umwandlungsfragen für Rentenversicherungen.

In beiden Heften wurden für die Sterblichkeit die Aggregattafeln des Deutschen Reichs, Männer 1924/26, und der Zinsfuß $3^1/_2\%$ zugrunde gelegt.

Stephan Vincze.

Wilhelm Blaschke, Über eine geometrische Frage von Euklid bis heute, nach Vorträgen in Leiden, Amsterdam und Groningen im Januar 1938 (Hamburger math. Einzelschriften, 23. Heft), 20 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1938.

Ausgehend von der Frage der Starrheit eines Vielfaches, wird die entsprechende — allgemeinere — Frage bei Eiflächen behandelt, die zuerst von H. WEYL aufgeworfen wurde. Es handelt sich dabei um die beiden folgenden Sätze: Existenz einer Eifläche zu vorgeschriebenem positiv gekrümmtem *Bogenelement; Eindeutigkeit einer solchen Fläche.* Der Verfasser gibt einen neuen Beweis des Eindeutigkeitssatzes der vor dem von COHN-VOSSEN den Vorzug hat, ohne Regularitätsannahmen über die Eifläche auszukommen. Dann wird der vom Verfasser und HERGLOTZ herrührende Beweisansatz des Eindeutigkeitssatzes besprochen. Sein Grundgedanke ist der folgende: Man verwirkliche die Fläche zunächst in einem RIEMANN-Raum. Durch eine geeignete Minimumforderung gehe man von diesem Raum sodann zum Raum Euklids über. Damit ist die Frage auf Lösung eines Variationsproblems zurückgeführt.

Es darf angenommen werden, daß diese Schrift, die auf eine reiche Literatur Bezug nimmt, ein guter Fingerzeig zur Lösung des schwierigen Problems sein wird.

O. Varga.

Über die Unabhängigkeit der Bedingungsgleichungen zwischen den Koeffizienten unitärer Substitutionen.

Von GUSTAV RADOS in Budapest.

Seinem verehrten Freunde Leopold Fejér
zu seinem 60. Geburtstage gewidmet.

Zwischen den Koeffizienten einer unitären Substitution

$$y = a_{g1}x_1 + a_{g2}x_2 + \ldots + a_{gn}x_n$$
$$(g = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen bekanntlich die $\frac{n(n+1)}{2}$ verschiedenen Bedingungsgleichungen

$$\text{(B)} \qquad a_{g1}\bar{a}_{h1} + a_{g2}\bar{a}_{h2} + \ldots + a_{gn}\bar{a}_{hn} = \delta_{gh}$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n;\ g \leqq h)$$

in denen

$$\bar{a}_{gh}$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

den konjugierten Wert von a_{gh} bedeutet und für das Kroneckersche Symbol δ_{gh} Null oder Eins zu setzen ist, je nachdem $g \neq h$ oder $g = h$ ist.

Die Bestimmung aller unitären Substitutionen erheischt demnach die Auflösung des Systems von Gleichungen (B), das n^2 Unbekannte, nämlich die Koeffizienten a_{gh} enthält und aus $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen besteht. Die Anzahl der Unbekannten übertrifft demnach die der Gleichungen um

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ehe man an die Auflösung eines Gleichungsystems herantritt, sind zwei Fragen zu klären: 1. widersprechen sich nicht etwa die Gleichungen des Systems; 2. wie groß ist die Anzahl der voneinander unabhängigen Gleichungen des Systems?

Auf die Frage 1 ist die Antwort verneinend. Ist doch

$$a_{gh} = \delta_{gh}$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

eine Lösung des Systems (B).

Die Erledigung der Frage 2 erfordert eine eingehende Untersuchung, als deren Resultat sich der folgende Satz ergibt:

Die Bedingungsgleichungen zwischen den Koeffizienten einer unitären Substitution sind voneinander unabhängig.

Erst der Nachweis dieses Satzes rechtfertigt die Behauptung, daß die Gruppe der n-dimensionalen unitären Transformationen im Lie's Sinne $\frac{n(n-1)}{2}$-gliedrig ist.

Die im System (B) vorkommenden Unbekannten a_{gh} sind komplexe Zahlen. Es sei

$$a_{gh} = a'_{gh} + a''_{gh} i \qquad (i = \sqrt{-1})$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n),$$

alsdann sind die Gleichungen von (B) ausführlich hingesetzt:

$$(a'_{g1} + a''_{g1} i)(a'_{h1} - a''_{h1} i) + \ldots + (a'_{gn} + a''_{gn} i)(a'_{hn} - a''_{hn} i) = \delta_{gh}$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n).$$

Darunter gibt es n solche, in denen $g = h$ ist, es sind dies

$$(\Phi_1) \qquad \varphi_g \equiv a'^2_{g1} + a''^2_{g1} + \ldots + a'^2_{gn} + a''^2_{gn} = 1$$
$$(g = 1, 2, \ldots, n)$$

und $\frac{n(n-1)}{2}$ solche, in denen $g \neq h$ ist; diese zerfallen in die nachfolgenden $n(n-1)$ Gleichungen:

$$(\Phi_2) \qquad \varphi'_{gh} \equiv a'_{g1} a'_{h1} + a''_{g1} a''_{h1} + \ldots + a'_{gn} a'_{hn} + a''_{gn} a''_{hn} = 0$$
$$(\Phi_3) \qquad \varphi''_{gh} \equiv a'_{h1} a''_{g1} - a'_{g1} a''_{h1} + \ldots + a'_{hn} a''_{gn} - a'_{gn} a''_{hn} = 0$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n; \quad g \lessgtr h).$$

Das durch Zusammenfassen der Gleichungen (Φ_1), (Φ_2), (Φ_3) entstehende System sei durch (Φ) bezeichnet; es enthält

$$n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

Gleichungen und die $2n^2$ Unbekannten:

$$a'_{gh},\ a''_{gh}$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, n).$$

Das Gleichungsystem (Φ) ist offenbar mit dem System (B) äquivalent. Sind demnach die Gleichungen von (B) voneinander abhängig, so sind es auch diejenigen von (Φ). Kann man daher den Nachweis für die Unabhängigkeit der Gleichungen von (Φ) führen, so ist damit auch die Unabhängigkeit der Gleichungen von (B) erwiesen. Die Gleichungen von (Φ) sind sicherlich voneinander unabhängig, wenn die aus den Spalten der der Funktionalmatrix

$$M = \left\| \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n;\ \varphi'_{12}, \varphi'_{13}, \ldots, \varphi'_{n-1,n};\ \varphi''_{12}, \varphi''_{13}, \ldots, \varphi''_{n-1,n})}{\partial(a'_{11}, a''_{11}, a'_{12}, a''_{12}, \ldots \ldots \ldots \ldots, a'_{nn}, a''_{nn})} \right\|$$

gebildeten Determinanten von Grade n^2 nicht sämmtlich verschwinden. Die Anzahl dieser Determinanten ist

$$\binom{2n^2}{n^2} = \frac{2n^2(2n^2-1)\ldots(n^2+1)}{1 \,.\, 2 \ldots n^2}.$$

Es wäre schwierig das Verschwinden oder Nichtverschwinden jeder einzelnen dieser Determinanten nachzuweisen; da jedoch die Elemente dieser Determinanten und mithin auch sie selbst reelle Zahlen sind, genügt es zu beweisen, daß ihre Quadratsumme von Null verschieden ist. Diese Quadratsumme D ergibt sich zufolge des verallgemeinerten Multiplikationssatzes der Determinanten von CAUCHY—BINET als eine Determinante von Grade n^2, deren Elemente die inneren Produkte der Zeilen von M sind. Die Auswertung von D führt zu dem Resultat

$$D = 2^{n(n+1)} \neq 0$$

so daß damit die Unabhängigkeit der Bedingungsgleichungen erwiesen ist.

Durch die Einführung zweckentsprechender Bezeichnungen kann die Berechnung von D übersichtlich gestaltet werden. Wir führen die nachfolgenden $2n+1$ Vektoren von je $2n$ Koordinaten ein:

$$A'_g = (a'_{g1}, a''_{g1}, a'_{g2}, a''_{g2}, \ldots, a'_{gn}, a''_{gn})$$
$$(g = 1, 2, \ldots, n)$$
$$A''_h = (-a''_{h1}, a'_{h1}, -a''_{h2}, a'_{h2}, \ldots, -a''_{nh}, a'_{nh})$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n)$$
$$O = (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0)$$

Zwischen diesen bestehen die folgenden Relationen:

$$(e_1)\quad \begin{cases} (A'_g, O) = a'_{g1}.0 + a''_{g1}.0 + \ldots + a'_{gn}.0 + a''_{gn}.0 = 0 \\ \qquad (g = 1, 2, \ldots, n) \\ (A''_{g1}, O) = -a''_{h1}.0 + a'_{h1}.0 + \ldots - a''_{hn}.0 + a'_{hn}.0 = 0 \\ \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

$$(e_2)\quad \begin{cases} (A'_g, A''_g) = a'^2_{g1} + a''^2_{g1} + \ldots + a'^2_{gn} + a''^2_{gn} = \varphi_g = 1 \\ \qquad (g = 1, 2, \ldots, n) \\ (A''_h, A''_h) = a'^2_{h1} + a''^2_{h1} + \ldots + a'^2_{hn} + a''^2_{hn} = \varphi_h = 1 \\ \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

$$(e_3)\quad (A'_g, A''_g) = -a'_{g1}a''_{g1} + a'_{g1}a''_{g1} - \ldots - a'_{gn}a''_{gn} + a'_{gn}a''_{gn} = 0 \qquad (g = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(e_4)\quad (A'_g, A'_h) = a'_{g1}a'_{h1} + a''_{g1}a''_{h1} + \ldots + a'_{gn}a'_{hn} + a''_{gn}a''_{hn} = \varphi'_{gh} = 0 \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(e_5)\quad (A''_g, A''_h) = a''_{g1}a''_{h1} + a'_{g1}a'_{h1} + \ldots + a''_{gn}a''_{hn} + a'_{gn}a'_{hn} = \varphi'_{gh} = 0 \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(e_6)\quad (A'_g, A''_h) = -a'_{g1}a''_{h1} + a''_{g1}a'_{h1} - \ldots - a'_{gn}a''_{hn} + a''_{gn}a'_{hn} = \varphi''_{gh} = 0 \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Quadratsumme der aus den Spalten der Matrix M sich ergebenden Determinanten von Grade n^2 kann in Anbetracht der Relationen (e_1), (e_2), (e_3), (e_4), (e_5), (e_6) auf die folgende Form gebracht werden:

$$D = \left|\begin{matrix} 4 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 4 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 4 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} (n) \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n(n-1) \end{matrix}$$

Der Wert derselben ist

$$D = 4^n\, 2^{n(n-1)} = 2^{n(n+1)},$$

daher von Null verschieden und somit ist der Satz von der Unabhängigkeit der Bedingungsgleichungen (B) bewiesen.

Die reellen orthogonalen Substitutionen sind bekanntlich unitär (die nicht-reellen sind es nicht), so daß die unitären Substitutionen als Verallgemeinerung der orthogonalen betrachtet werden. Bemerkenswert ist nun die Tatsache, daß die im komplexen Gebiet

n-dimensionalen unitären Substitutionen ihrem Wesen nach $2n$-dimensionale reelle orthogonale Substitutionen sind. Ist nämlich

$$\text{(U)} \quad y'_g + y''_g i = (a'_{g1} + a''_{g1} i)(x'_1 + x''_1 i) + \ldots + (a'_{gn} + a''_{gn} i)(x'_n + x''_n i)$$
$$(g = 1, 2, \ldots, n)$$

die unitäre Substitution, so zerfällt diese in die nachfolgende $2n$-dimensionale reelle Substitution:

$$\text{(O)} \quad \begin{aligned} y'_g &= a'_{g1} x'_1 - a''_{g1} x''_1 + a'_{g2} x'_2 - a''_{g2} x''_2 + \ldots + a'_{gn} x'_n - a''_{gn} x''_n \\ y''_g &= a''_{g1} x'_1 + a'_{g1} x''_1 + a''_{g2} x'_2 + a'_{g2} x''_2 + \ldots + a''_{gn} x'_n + a'_{gn} x''_n, \end{aligned}$$
$$(g = 1, 2, \ldots, n)$$

deren Koeffizientensystem durch die Vektoren

$$-A''_1,\ A'_1,\ -A''_2,\ A'_2,\ \ldots,\ -A''_n,\ A'_n$$

gegeben sind. Infolge der Relationen (e_2) sind

$$(A'_g, A'_g) = (A''_g, A''_g) = 1$$

und ferner nach (e_3), (e_4), (e_5), (e_6) sind

$$(A'_g, A''_g) = (A'_g, A'_h) = (A''_g, A''_h) = (A'_g, A''_h) = 0 \quad (g \neq h).$$

Es sind somit alle Bedingungen erfüllt, die notwendig und hinreichend dafür sind, daß (O) eine orthogonale Substitution sei.

Budapest, den 14. Oktober 1939.

(Eingegangen am 11. November 1939)

Über zusammengesetzte relativ Galoissche Zahlkörper.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

Es seien $G_1(k)$ und $G_2(k)$ relativ Galoissche Zahlkörper über den algebraischen Zahlkörper k. Der zusammengesetzte Körper $G(k)=G_1G_2(k)$ besitze die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$, die Körper $G_1(k)$ bzw. $G_2(k)$ sollen zu den Untergruppen $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ gehören. Die Untergruppen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ sind invariante und relativ prime Untergruppen.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal im Körper k, welches die rationale Primzahl p teilt. Die Grade bzw. Ordnungen der Primideale von $\mathfrak{p}$ im Körper $G_1(k)$ bzw. im Körper $G_2(k)$ seien f_1, g_1 bzw. f_2, g_2. Jedes Primideal $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ im Körper $G(k)$ hat denselben Grad F und dieselbe Ordnung G. Bekanntlich ist

$$G=\frac{g_1g_2}{\Delta}, \tag{1}$$

wo Δ einen Teiler von (g_1, g_2) bildet.

Wir werden den folgenden Satz beweisen. *Es ist*

$$F=\frac{f_1f_2}{(f_1,f_2)}\Delta', \tag{2}$$

wo Δ' einen Teiler von Δ, also auch von (g_1, g_2) bildet.

Wenn (g_1, g_2) relativ prim gegen p ist, so folgt der Satz aus einer wichtigen Abhandlung von ÖYSTEIN ORE[1]).

1. Die Zerlegungsgruppe bzw. Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ sollen durch $\mathfrak{H}$ bzw. $\overline{\mathfrak{H}}$ bezeichnet werden, ihre Ordnungen sind FG

[1]) ÖYSTEIN ORE, Über zusammengesetzte algebraische Körper, *Acta Math.*, **49** (1926), S. 379—396. Unser Satz ist noch in gewisser Richtung ausdehnbar.

bzw. G. Es seien die Ordnungen der Untergruppen

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}),\ \mathfrak{B} = (\mathfrak{G}_2, \mathfrak{H})$$

h_1 bzw. h_2 und die Ordnungen der Untergruppen

$$\bar{\mathfrak{H}}_1 = (\mathfrak{G}_1, \bar{\mathfrak{H}}),\ \bar{\mathfrak{H}}_2 = (\mathfrak{G}_2, \bar{\mathfrak{H}})$$

a_1 bzw. a_2. Es ist bekanntlich

$$(3) \qquad G = g_1 a_1 = g_2 a_2, \quad F = \frac{f_1 h_1}{a_1} = \frac{f_2 h_2}{a_2}.$$

Bilden wir die Komplexe $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}$. Die Untergruppe $\bar{\mathfrak{H}}$ ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$, folglich sind $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}$ Gruppen. Ihre Ordnungen sind nach FROBENIUS gleich

$$(4) \qquad \frac{h_1 G}{a_1} = h_1 g_1 \text{ bzw. } \frac{h_2 G}{a_2} = h_2 g_2.$$

Die Gruppe $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}$ ist sogar eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$, weil $\mathfrak{A}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$ bildet, folglich ist der Komplex

$$(5) \qquad \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}} \,.\, \mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}$$

eine Gruppe. Bestimmen wir die Ordnung d des Durchschnitts von $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}$ und $\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}$. Vorerst enthält der Durchschnitt die Gruppe $\bar{\mathfrak{H}}$, es wird daher

$$(6) \qquad d \equiv 0 \pmod G, \quad d = \frac{g_1 g_2}{\Delta} u, \qquad u \text{ rational ganz.}$$

Andererseits enthält die Gruppe $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}} \,.\, \mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}$ die Untergruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ von der Ordnung $h_1 h_2$. Daraus folgen

$$(7) \quad \frac{h_1 g_1 h_2 g_2}{d} \equiv 0 \pmod{h_1 h_2}, \quad \frac{g_1 g_2}{d} = v, \qquad v \text{ rational ganz.}$$

Infolgedessen wird

$$\frac{g_1 g_2 \Delta}{g_1 g_2 u} = v, \qquad uv = \Delta,$$

also ergibt sich

$$(8) \qquad d = \frac{g_1 g_2}{\Delta} u, \qquad \Delta \equiv 0 \pmod u.$$

Die Gruppen $\dfrac{\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}}{\bar{\mathfrak{H}}}$, $\dfrac{\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}}{\bar{\mathfrak{H}}}$ sind demnach solche Untergruppen der zyklischen Gruppe $\dfrac{\mathfrak{H}}{\bar{\mathfrak{H}}}$, deren Durchschnitt von der Ordnung u

ist und so bekommt man

$$\left(\frac{h_1 g_1}{G}, \frac{h_2 g_2}{G}\right) = \left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}\right) = u. \tag{9}$$

Nun sind

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} T, \quad F = \frac{f_1 h_1}{a_1} = \frac{f_2 h_2}{a_2},$$

woraus

$$\frac{h_1}{a_1} = \frac{f_2}{(f_1, f_2)} T, \quad \frac{h_2}{a_2} = \frac{f_1}{(f_1, f_2)} T, \quad T = u$$

und der angekündigte Satz

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} \Delta', \qquad \Delta' \text{ ein Teiler von } \Delta \tag{2}$$

folgen.

Aus (2) bekommt man nachstehende Relationen.

I. *Es ist*

$$f_1 f_2 g_1 g_2 \equiv 0 \pmod{FG}; \tag{10}$$ [2])

es gilt sogar noch

$$\frac{f_1 f_2 g_1 g_2}{(f_1, f_2)} \equiv 0 \pmod{FG}. \tag{10*}$$

II. *Wenn* $(g_1, g_2) = 1$ *ausfällt, so gelten die Relationen*

$$G = g_1 g_2, \quad F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

Dies folgt auch aus einer schönen Abhandlung von MIKAO MORIYA[3]), welche Ansätze von HERBRAND verfolgt und allgemeine Körper behandelt.

2. Die Resultate von MIKAO MORIYA liefern für relativ Galoissche Komponenten folgende Sätze.

III. *Werden noch die Bezeichnungen*

$$g_i = p^{m_i} g_i^{(0)}, \quad (p, g_i^{(0)}) = 1 \ (i = 1, 2), \quad G = p^M G^{(0)}, \quad (p, G^{(0)}) = 1$$

eingeführt, so ist

$$M \leqq m_1 + m_2.$$

---

[2]) M. BAUER, Über zusammengesetzte Zahlkörper, *Math. Annalen*, **77** (1916), S. 357—361.

[3]) MIKAO MORIYA, Über einen Satz von Herbrand, *Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University*, **4** (1936), S. 182—194. Vgl. noch [4]) und Nr. 3 dieser Arbeit.

IV. *Ist* $M = m_1 + m_2$ (was sicher eintritt, wenn eine der Zahlen g_1, g_2 relativ prim gegen p ausfällt), *so wird*

$$G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})}.$$

V. *Ist* $G = g_1 g_2$ (was sicher eintritt, wenn $(g_1, g_2) = 1$ ausfällt), *so wird*

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

Der Satz III folgt schon aus den Ergebnissen von H. Weber (vgl. [2]).

Die Sätze IV und V überholen gewisse ältere Resultate[4]).

Nun habe ich neuerdings gefunden, daß die in der Arbeit [4]) verwendete Methode zum Beweise der Sätze IV und V ausreicht. Nur muß man die bekannten Eigenschaften der Verzweigungsgruppe (welche in [4]) gar nicht explizit auftritt) ausnützen. Andererseits ist die folgende Bemerkung von Bedeutung:

Wenn die Gruppe $\mathfrak{Q}$ von der Ordnung q die relativ primen Untergruppen $\mathfrak{Q}_1$ bzw. $\mathfrak{Q}_2$, deren Ordnungen q_1 bzw. q_2 sind, enthält und $q = q_1 q_2$ ausfällt, dann wird

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{Q}_1.$$

Wir werden z. B. den Beweis von V andeuten. Die Gruppe $\mathfrak{A}$ enthält $\bar{\mathfrak{H}}_1$, die Gruppe $\mathfrak{B}$ enthält $\bar{\mathfrak{H}}_2$, dieselben sind relativ prim. Aus $G = g_1 g_2$ folgen $G = a_1 a_2$ und $\bar{\mathfrak{H}} = \bar{\mathfrak{H}}_1 \bar{\mathfrak{H}}_2 = \bar{\mathfrak{H}}_2 \bar{\mathfrak{H}}_1$, wo $\bar{\mathfrak{H}}$ nicht notwendig eine zyklische Gruppe ist. Die Gruppen

$$\frac{\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}_2}{\bar{\bar{\mathfrak{H}}}}, \quad \frac{\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}_1}{\bar{\bar{\mathfrak{H}}}}$$

sind relativ prime Untergruppen der zyklischen Gruppe $\dfrac{\bar{\mathfrak{H}}}{\bar{\bar{\mathfrak{H}}}}$, es werden daher

$$(12) \qquad \left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}\right) = 1, \quad F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}, \quad \text{qu. e. d.}$$

Es ist zu bemerken, daß der Komplex $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}_2 . \mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}_1$ nicht notwendig eine Gruppe bildet.

3. Wir haben den Beweis des Satzes V angedeutet. Der Satz folgt übrigens auch aus (2). *Nun werden wir beweisen, daß Satz* IV

[4]) M. Bauer, Über relativ Galoissche Zahlkörper, *Math. Annalen,* **83** (1921), S. 70—73.

in jedem Falle richtig ist. Es gilt also immer (unabhängig von M)

$$G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})}.$$

Es war

$$\overline{\mathfrak{H}}_1 = (\mathfrak{G}_1, \overline{\mathfrak{H}}), \ \overline{\mathfrak{H}}_2 = (\mathfrak{G}_2, \overline{\mathfrak{H}}).$$

Die Komplexe

$$\overline{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{V}, \ \overline{\mathfrak{H}}_2 \mathfrak{V}, \tag{13}$$

wo $\mathfrak{V}$ die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{P}$ bezeichnet, sind wieder Gruppen und zwar invariante Untergruppen von $\overline{\mathfrak{H}}$, ihre Ordnungen sind nach den Eigenschaften der Verzweigungsgruppe[5]) gleich

$$\frac{a_1 p^M}{p^{M-m_1}} = a_1 p^{m_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_2 p^M}{p^{M-m_2}} = a_2 p^{m_2}.$$

Der Komplex $\overline{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{V} . \overline{\mathfrak{H}}_2 \mathfrak{V}$ bildet auch eine Gruppe. Bestimmen wir die Ordnung des Durchschnitts

$$(\overline{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{V}, \ \overline{\mathfrak{H}}_2 \mathfrak{V}). \tag{14}$$

Der Durchschnitt enthält $\mathfrak{V}$, es ist daher

$$d = p^M u, \qquad u \text{ rational ganz.} \tag{15}$$

Andererseits enthält der Komplex die Gruppe $\overline{\mathfrak{H}}_1 \overline{\mathfrak{H}}_2$, woraus

$$\frac{a_1 p^{m_1} a_2 p^{m_2}}{d} = a_1 a_2 v, \ \frac{p^{m_1+m_2}}{d} = v, \quad v \text{ rational ganz} \tag{16}$$

folgen. Aus (15) und (16) bekommt man

$$\frac{p^{m_1+m_2}}{p^M u} = v, \ \ uv = \frac{p^{m_1+m_2}}{p^M},$$

es ist also u eine Potenz von p, daraus folgt nach den bekannten Eigenschaften der Verzweigungsgruppe, daß

$$u = 1, \ \ d = p^M \tag{17}$$

sind. Die Gruppen

$$\frac{\overline{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{V}}{\mathfrak{V}}, \ \frac{\overline{\mathfrak{H}}_2 \mathfrak{V}}{\mathfrak{V}}$$

sind relativ prime Untergruppen der zyklischen Gruppe $\frac{\overline{\mathfrak{H}}}{\mathfrak{V}}$. Es ist also

$$\left(\frac{a_1 p^{m_1}}{p^M}, \frac{a_2 p^{m_2}}{p^M}\right) = 1. \tag{18}$$

---

[5]) Die Ordnung von $\frac{\overline{\mathfrak{H}}}{\mathfrak{V}}$ ist relativ prim gegen p, die Ordnung von $\mathfrak{V}$ ist eine Potenz von p.

Nun sind

$$G = g_i a_i,\ p^M G^{(0)} = p^{m_i} g_i^{(0)} a_i, \qquad (i = 1, 2),$$

daraus folgen

$$a_i = p^{M-m_i} a_i' \quad (i = 1, 2); \quad (a_1', a_2') = 1$$

und man bekommt

(19) $$G^{(0)} = a_1' g_1^{(0)} = a_2' g_2^{(0)},$$

woraus die Relation

$$G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})}$$

folgt, QU. E. D.

Der Satz ist in gewisser Richtung noch ausdehnbar.

(Eingegangen am 17. September 1939.)

Über die Zusammensetzung algebraischer Zahlkörper.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

Herrn Prof. Dr. Leopold Fejér zum 60. Geburtstag am 9. Februar 1940 gewidmet.

Es seien $K_1(k)$ und $K_2(k)$ algebraische Zahlkörper über k. Das Primideal $\mathfrak{P}$ des zusammengesetzten Körpers $K_1K_2(k)$ sei ein Teiler von $\mathfrak{P}_1$ bzw. $\mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{p}$, welche Primideale der Körper $K_1(k)$ bzw. $K_2(k)$ bzw. k sind; dieselben sind eindeutig bestimmt. Es sollen die Relationen

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_1^{g_1}\ldots,\quad \mathfrak{p}=\mathfrak{P}_2^{g_2}\ldots,\quad \mathfrak{P}_2=\mathfrak{P}^{g}\ldots$$

gelten, daher sind g_1, g_2 und $G=gg_2$ die Ordnungen der Primideale $\mathfrak{P}_1$ bzw. $\mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{P}$ in $K_1(k)$ bzw. $K_2(k)$ bzw. $K_1K_2(k)$; die Grade der Primideale sollen durch f_1 bzw. f_2 bzw. $F=ff_2$ bezeichnet werden, f bedeutet also den Grad und g die Ordnung von $\mathfrak{P}$ über den Körper $K_2(k)$. Die rationale Primzahl p sei durch $\mathfrak{p}$ teilbar, ferner seien

$$(1)\qquad \begin{gathered} g_i=p^{m_i}g_i^{(0)},\ g=p^m g^{(0)},\ G=p^M G^{(0)}=p^{m+m_2}G^{(0)},\ G^{(0)}=g^{(0)}g_2^{(0)},\\ (g_i^{(0)},p)=(g^{(0)},p)=(G^{(0)},p)=1 \qquad (i=1,2). \end{gathered}$$

Wir werden in dieser Arbeit Sätze über die Zahlen F, G, $G^{(0)}$ beweisen, welche die Resultate von MIKAO MORIYA[1]) als spezielle Fälle enthalten. Unsere Verhandlungen stehen noch mit einer wichtigen Abhandlung von ÖYSTEIN ORE[2]) in gewissem Zusammenhange.

---

1) MIKAO MORIYA, Über einen Satz von Herbrand, *Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University*, **4** (1936), S. 182—194.

2) ÖYSTEIN ORE, Über zusammengesetzte algebraische Körper, *Acta Math.*, **49** (1926), S. 379—396.

1. Wir erweitern den zusammengesetzten Körper $K_1K_2(k)$ zu einem Galoisschen Körper $G(K_1K_2(k))$, dessen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist und in welchem das Primideal $\mathfrak{P}^*$ ein Teiler von $\mathfrak{P}$ ist. Es sollen die Körper $K_1(k)$ bzw. $K_2(k)$ zu den Untergruppen $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ gehören. Das Primideal $\mathfrak{P}^*$ besitze $\mathfrak{Z}$ bzw. $\mathfrak{T}$ bzw. $\mathfrak{V}$ als Zerlegungsgruppe bzw. Trägheitsgruppe bzw. Verzweigungsgruppe. Die früher genannten Zahlen ergeben sich als Indexe gewisser Untergruppen. Aus der Theorie des Galoisschen Körpers folgen die Beziehungen[3])

$$
(2)\qquad \left.\begin{aligned} p^{m_i} &= (\mathfrak{V} : \mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_i) \\ g_i &= (\mathfrak{T} : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_i) \\ f_i g_i &= (\mathfrak{Z} : \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_i) \end{aligned}\right\} (i = 1, 2),
$$

$$
\begin{aligned} p^m &= (\mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2), & p^M &= (\mathfrak{V} : \mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2), \\ g &= (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2), & G &= (\mathfrak{T} : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2), \\ fg &= (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2), & FG &= (\mathfrak{Z} : \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2). \end{aligned}
$$

Vorerst werden wir zeigen, daß

$$
(3)\qquad m \leqq m_1, \qquad g \leqq g_1
$$

ausfallen; ist z. B. $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper, dann wird sogar

$$
(3^*)\qquad g_1 \equiv 0 \pmod{g}.
$$

Betrachten wir die Komplexe

$$
(\mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_1)(\mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_2) \text{ bzw. } (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2).
$$

Die Sätze von FROBENIUS ergeben

$$
\begin{aligned} (\mathfrak{V} : \mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_1) &\geqq (\mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2), \\ (\mathfrak{T} : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1) &\geqq (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2), \end{aligned}
$$

daher ist (3) richtig. Wenn $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper ist, wird $\mathfrak{G}_1$ eine invariante Untergruppe, somit ist $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{T}$, der Komplex $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)$ bildet eine Gruppe und so folgt (3*).

Werden noch die Bezeichnungen

$$
(4)\qquad (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_i : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2) = a_i, \quad (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_i : \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2) = h_i,
$$
$$
a_2 = g, \; h_2 = fg \qquad (i = 1, 2)
$$

---

[3]) Bei unseren Rechnungen ist es zweckmäßig die oft angewendeten Symbole einzuführen: $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ bezeichne den Durchschnitt der Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; enthält die Gruppe $\mathfrak{H}$ die Untergruppe $\mathfrak{K}$, so bedeute $(\mathfrak{H} : \mathfrak{K})$ den Index von $\mathfrak{K}$ bezüglich $\mathfrak{H}$.

eingeführt, dann bekommt man die wichtigen Zusammenhänge:

$$G = g_i a_i,\ F = f_i \frac{h_i}{a_i} \quad (i = 1, 2;\ a_i,\ \frac{h_i}{a_i} \text{ rational ganz}). \tag{5}$$

Es seien noch x bzw. y bzw. z die Ordnungen der Gruppen $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2)$ bzw. $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2)$ bzw. $(\mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2)$. Die Zahl x ist durch y, die Zahl y durch z teilbar.

2. Wir werden die folgenden Sätze beweisen.

I. *Es gelten die Relationen:*

$$\begin{aligned} G &= \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)} t,\ t \leqq (g_1, g_2), && t \textit{ rational ganz}, \\ F &= \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} U,\ U \leqq \frac{(g_1, g_2)}{t}, && U \textit{ rational ganz}. \end{aligned} \tag{6}$$

I*. *Ist z. B. der Körper $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper, dann wird:*

$$G = \frac{g_1 g_2}{\Delta},\ F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} \Delta', \tag{6*}$$

wo Δ' ein Teiler von Δ, ferner Δ ein Teiler von (g_1, g_2) ist.

Die Formel von G folgt aus (3), (3*) und (5).

Betrachten wir die Komplexe $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T}$ bzw. $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}$. Da $\mathfrak{T}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{Z}$ bildet, sind diese Komplexe Gruppen. Ist noch $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper, so ist der Komplex

$$(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T} \cdot (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}$$

eine Gruppe, weil $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{Z}$ bildet. Aus demselben Grunde wird der Komplex $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1) \cdot (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)$ auch eine Gruppe. Die Ordnung der Gruppe $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_i)\mathfrak{T}$ ist gleich

$$\text{Ordnung von } (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_i) \text{ mal } (\mathfrak{T} : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_i) = h_i x g_i \quad (i = 1, 2).$$

Bestimmen wir die Ordnung d des Durchschnitts von $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T}$ und $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}$. Da der Durchschnitt die Gruppe $\mathfrak{T}$ enthält, so wird

$$d = Gyu, \qquad u \text{ rational ganz}. \tag{7}$$

Es ist daher

$$d = \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)} tyu; \tag{8}$$

wenn z. B. $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper ist, bekommt man

$$d = \frac{g_1 g_2}{\Delta} yu. \tag{8*}$$

Andererseits enthält der Komplex $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T} \, . \, (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}$ den Komplex $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1) \, . \, (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)$, woraus

$$\frac{h_1 x g_1 h_2 x g_2}{d} = h_1 x h_2 v, \quad v \text{ rational, nicht notwendig ganz, } v \geqq 1$$

und

$$\frac{g_1 g_2}{d} = \frac{v}{x}, \quad v \geqq 1, \quad v \text{ rational} \tag{9}$$

ausfallen. Wenn $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper ist, wird

$$\frac{g_1 g_2}{d} = \frac{v}{x}, \qquad v \text{ rational ganz.} \tag{9*}$$

Man bekommt

$$\frac{g_1 g_2 (g_1, g_2)}{g_1 g_2 t y u} = \frac{v}{x}, \quad \frac{ytuv}{x} = (g_1, g_2), \tag{10}$$

bzw.

$$\frac{g_1 g_2 \Delta}{g_1 g_2 y u} = \frac{v}{x}, \quad \frac{yuv}{x} = \Delta. \tag{10*}$$

Die Gruppen

$$\frac{(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}, \quad \frac{(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$$

sind solche Untergruppen der zyklischen Gruppe $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{T}}$, deren Durchschnitt die Ordnung u besitzt. Da die fraglichen Untergruppen ihrerseits die Ordnungen

$$\frac{h_1 x g_1}{Gy} = \frac{h_1}{a_1} \frac{x}{y} \text{ bzw. } \frac{h_2 x g_2}{Gy} = \frac{h_2}{a_2} \frac{x}{y}$$

besitzen, folgen

$$\left(\frac{h_1 x}{a_1 y}, \frac{h_2 x}{a_2 y}\right) = u, \quad u = \frac{x}{y} U, \quad U \text{ rational ganz,}$$

$$\left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}\right) = U, \quad U = \frac{y}{x} u. \tag{11}$$

Daraus ergibt sich bekannterweise

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} U.$$

Es wird noch nach (10)

$$Uv = \frac{(g_1, g_2)}{t}, \quad U \leqq \frac{(g_1, g_2)}{t},$$

bzw. nach (10*)

$$U v = \Delta, \quad U = \Delta', \quad \Delta' \text{ ein Teiler von } \Delta, \quad \text{QU. E. D.}$$

3. Wir werden folgende Sätze beweisen.

II. *Es gilt die Formel:*

$$(12) \quad G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})} r, \quad r \textbf{ rational ganz, } (r, p) = 1, \; r \leqq p^{m_1+m_2-M}.$$

II*. *Ist z. B. $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper, dann ist:*

$$(12^*) \qquad G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})}.$$

Bilden wir die Komplexe $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{V}$ bzw. $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{V}$. Beide sind Gruppen, weil $\mathfrak{V}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{T}$ bildet; ihre Ordnungen sind

$$\frac{a_1 y p^M z}{p^{M-m_1} z} = a_1 y p^{m_1} \text{ bzw. } \frac{a_2 y p^M z}{p^{M-m_2} z} = a_2 y p^{m_2}.$$

Ist $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper, dann bilden die Komplexe

$$(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{V} \,.\, (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{V}, \quad (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1) \,.\, (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)$$

Gruppen, weil $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{T}$ ist. Bestimmen wir die Ordnung d des Durchschnitts von $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{V}$ und $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{V}$ Der Durchschnitt enthält $\mathfrak{V}$, es ist daher

$$(13) \qquad d = p^M z u, \qquad u \text{ rational ganz.}$$

Andererseits enthält der größere Komplex den Komplex $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)\,.\,(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)$, es wird daher

$$\frac{a_1 y p^{m_1} a_2 y p^{m_2}}{d} = a_1 a_2 y v, \quad v \geqq 1, \quad v \text{ rational, nicht notwendig ganz.}$$

Daraus folgen

$$(14) \qquad \frac{p^{m_1+m_2}}{d} y = v, \quad v \geqq 1, \quad v \text{ rational}$$

bzw., wenn $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper ist,

$$(14^*) \qquad \frac{p^{m_1+m_2}}{d} y = v, \quad v \text{ rational ganz.}$$

Man bekommt

$$(15) \quad \frac{p^{m_1+m_2} y}{p^M z u} = v, \quad u v = \frac{y}{z} p^{m_1+m_2-M}, \quad v \geqq 1, \quad v \text{ rational}$$

bzw., wenn $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper ist,

$$(15^*) \qquad u v = \frac{y}{z} p^{m_1+m_2-M}, \quad v \text{ rational ganz.}$$

Die Gruppen

$$\frac{(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}}, \quad \frac{(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}}$$

sind solche Untergruppen der zyklischen Gruppe $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{V}}$, deren Durchschnitt die Ordnung u besitzt. Es ist daher

$$\left(\frac{a_1 y p^{m_1}}{p^M z}, \frac{a_2 y p^{m_2}}{p^M z}\right) = u, \quad u = \frac{y}{z} r, \quad r \text{ rational ganz,}$$

weil

$$G = g_i a_i, \quad a_i = p^{M-m_i} a_i', \quad (a_i', p) = 1, \quad G^{(0)} = g_i^{(0)} a_i' \quad (i = 1, 2)$$

ausfallen. Es sind noch

(16) $$(a_1', a_2') = r$$

und

(17) $$r v = p^{m_1 + m_2 - M}, \quad v \geqq 1, \quad v \text{ rational.}$$

Ist $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper, so wird v rational ganz und

(17*) $$r = 1.$$

Daraus ergeben sich bekannterweise die Sätze II und II*.

(Eingegangen am 27. Oktober 1939)

On Orthocentric Simplexes.

By E. EGERVÁRY in Budapest.

Offered to his master, Prof. L. Fejér.

A simplex $[P_1P_2 \ldots P_{n+1}]$ of the n-dimensional space is said to be orthocentric if its heights, i. e. the perpendiculars from its vertices P_ν to the opposite faces $[P_1P_2 \ldots P_{\nu-1}P_{\nu+1} \ldots P_{n+1}]$ are concurrent, their meeting point P_0 being called the orthocentre of the simplex.

For some purposes it is more convenient to consider the set of $n+2$ points $P_0P_1 \ldots P_{n+1}$ as a whole, called an orthocentric set of $n+2$ points in n-dimensional space, each point of the set being the orthocentre of the simplex formed by the others.

Orthocentric simplexes and sets of points had been investigated by MEHMKE, RICHMOND, LOB[1]).

The first object of the present paper is to establish the following characteristic property of orthocentric sets of points (§. 1):

If the set $P_0P_1 \ldots P_{n+1}$ of $n+2$ points in the n-dimensional space is orthocentric, then and only then can the mutual distances $\overline{P_iP_j}$ be expressed by $n+2$ symmetric parameters λ_i in the form:

$$(1) \qquad \overline{P_iP_j}^2 = \lambda_i + \lambda_j \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n+1;\ i \neq j)$$

the parameters λ_i being restricted only by the relations[2])

$$(2) \qquad \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{n+1}} = 0, \qquad \lambda_i + \lambda_j > 0 \text{ for } i \neq j.$$

[1]) R. MEHMKE, Ausdehnung einiger elementarer Sätze über das ebene Dreieck auf Räume von beliebig viel Dimensionen, *Archiv für Math. und Phys.*, **70** (1884), pp. 210—218; H. W. RICHMOND, On extensions of the property of the orthocentre, *Quarterly Journal*, **32** (1901), pp. 251—255; H. LOB, The Orthocentric Simplex in Space of Three and Higher Dimensions, *Math. Gazette*, **19** (1935), p. 102—108.

[2]) The equations (1) and (2) are in connexion to a problem proposed by

This result includes obviously the determination of an orthocentric simplex in n dimensions by means of $n+1$ symmetric, independent[3]) parameters.

The n-dimensional measure V of the orthocentric simplex $[P_1 P_2 \ldots P_{n+1}]$ will be shown to be given by

$$(3) \qquad n!\,V = \left\{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n+1}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{-\prod\limits_{\nu=0}^{n+1}\lambda_\nu}}{\lambda_0}$$

and from this result it follows immediately that if the masses $\frac{1}{\lambda_\nu}$ are placed resp. at the points P_ν, $(\nu=0, 1, \ldots, n+1)$, then each point is the barycentre of the masses placed at the others. According to (2) there is one and only one of negative value amongst the parameters λ_i, consequently an orthocentric set of points contains always one and only one point, which is interior[4]) to the simplex formed by the others.

In §. 2, we are going to establish the following connexion between orthocentric point-systems and orthogonal matrices:

The $n+1$ points $P_i(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \ldots, \varepsilon_{i,n+1})$, $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ in the n-dimensional space, whose homogenous cartesian coordinates

---

W. H. Laverty, *Mathematical Questions with Solutions from the Educational Times*, **7** (1867), pp. 99—102; see also *The Collected Math. Papers* of A. Cayley, Vol. VII (Cambridge. 1894), pp. 578—581. For $n=3$ the equation (2) has been established by O. Dziobek, Über eine Erweiterung des Gauss'-schen Pentagramma mirificium auf ein beliebiges sphärisches Dreieck, *Archiv für Math. und Phys.* (2) **16** (1898) pp. 320—326.

3) For the case $n=3$ see the author's paper, A magasságponttal biró tetraéderről, *Math. és Fiz. Lapok*, **45** (1938), pp. 18—35. The parameters λ_i are closely related to the problem of determinig an n-dimensional simplex of maximal volume, the volumes of its faces being given. The maximal simplex must be orthocentric, and the multipliers which enter in the discussion of the problem, are identical to the parameters λ_i introduced above. See C. W. Borchardt, Über die Aufgabe des Maximum, welche der Bestimmung des Tetraeders von grösstem Volumen bei gegebenem Flächeninhalt der Seitenflächen für mehr als drei Dimensionen entspricht, *Math. Abhandlungen der Akademie Berlin*, 1866, pp. 121—155; *Gesammelte Werke*, (Berlin, 1888), pp. 201—232 and L. Kronecker, Zur algebraischen Theorie der quadratischen Formen, *Monatsberichte der Akademie Berlin*, 1872, pp. 490—504; *Gesammelte Werke*, Bd. I. (Leipzig, 1895), pp. 283—301.

4) In the limiting case, when two of the parameters e. g. λ_1 and λ_2 vanish, the points P_1 and P_2 coincide, and there is no interior point.

ε_{ij} are the elements of an orthogonal matrix, form together with the origin an orthocentric set of $n+2$ points. And conversely, if the "interior" point of an orthocentric set will be placed at the origin, then an orthogonal matrix ε_{ij} can be found, by means of which the coordinates of the other points are expressed in the form:

$$(3) \qquad x_{ij} = \varrho \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{i,\,n+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

The parameters λ_i defined in §. 1 are now given by

$$(4) \qquad \lambda_0 = -\varrho^2;\ \lambda_i = \frac{\varrho^2}{\varepsilon_{i,\,n+1}^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

while the other elements ε_{ij} determine the position of the set relative to the axes.

An immediate consequence of this result is the following theorem: A necessary and sufficient condition that a set of points should be orthocentric is that it should be possible to arrange masses at the points in such a manner as to form a system, the principal inertial quadric of which is a hypersphere.

As an extension of the notion of the FEUERBACH circle it has been shown by the authors mentioned above that α) the middle-points of the "edges", β) the orthocentres and barycentres of the "faces" are situated on a hypersphere. In §. 3, we propose to establish the existence of the following set of $n-1$ hyperspheres of FEUERBACH (the first and last of which was discovered by RICHMOND, resp. MEHMKE):

The orthocentres[5]*) and the barycentres of all the $k-1$-dimensional simplexes of an orthocentric simplex of n dimensions (specified by the parameters $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$) belong to a hypersphere S_{k-1} of radius*

$$(4) \qquad \frac{1}{2k}\sqrt{(n+1-2k)^2\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

The middle points C_{k-1} of these hyperspheres S_{k-1} are lying on the "Euler line" which joins the orthocentre P_0 and the barycentre G of the simplex, and divide the distance $\overline{GP_0}$ at the ratio:

$$(4') \qquad \frac{\overline{GC_{k-1}}}{\overline{P_0C_{k-1}}} = \frac{n+1-2k}{n+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

[5]) The orthocentre of an edge ($k=2$) is obviously the orthogonal projection of the orthocentre of the simplex on this edge. In the case $k=1$ we get from (4) the radius of the circumscribed sphere.

§. 1.

If the simplex $[P_1 \dots P_{n+1}]$ in the n-dimensional space is orthocentric and its orthocentre is P_0, then by definition:

$\overline{P_0P_i} \perp$ hyperplane $\overline{P_1P_2 \dots P_{i-1}P_{i+1} \dots P_{n+1}}$ $\quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$
therefore

$$\overline{P_0P_i} \perp \overline{P_kP_l} \perp \overline{P_0P_j} \quad (i, j \neq k, l)$$

and

$$\overline{P_kP_l} \perp \text{ plane } \overline{P_0P_iP_j}.$$

Hence $\overline{P_iP_j} \perp \overline{P_kP_l}$, i. e. the set of $n+2$ points $P_0P_1 \dots P_{n+1}$ is an orthocentric set of points, each point P_i of the set being the orthocentre of the simplex $[P_0P_1 \dots P_{i-1}P_{i+1} \dots P_{n+1}]$ formed by the others.

Denoting $\overline{P_iP_j} = \varrho_{ij}$, we have[6]) from $\overline{P_iP_j} \perp \overline{P_kP_l}$

$$\left.\begin{array}{ll} (5) & \varrho_{ik}^2 + \varrho_{jl}^2 = \varrho_{il}^2 + \varrho_{jk}^2 \\ \text{or} & \\ (6) & \varrho_{ij}^2 + \varrho_{ik}^2 - \varrho_{jk}^2 = \varrho_{ij}^2 + \varrho_{il}^2 - \varrho_{jl}^2 \end{array}\right\} (i, j, k, l = 0, 1, \dots, n+1).$$

It is obvious by (6), that $\varrho_{ij}^2 + \varrho_{ik}^2 - \varrho_{jk}^2$ is independent of j and k, consequently the quantities

$$(7) \qquad \lambda_i = \varrho_{ij}\varrho_{ik} \cos P_j\widehat{P_i}P_k = \frac{\varrho_{ij}^2 + \varrho_{ik}^2 - \varrho_{jk}^2}{2}$$

may be introduced, as symmetric parameters.

The expression of the distances $\overline{P_iP_j}$ in terms of the λ_i is then

$$(1) \qquad \overline{P_iP_j}^2 = \varrho_{ij}^2 = \lambda_i + \lambda_j.$$

Applying the well-known formula of the measure of a $k-1$-dimensional simplex,

$$(3') \quad -(-2)^{k-1}(k-1)!^2\, V[P_{\nu_1}, P_{\nu_2}, \dots, P_{\nu_k}]^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \varrho_{\nu_1\nu_2}^2 & \dots & \varrho_{\nu_1\nu_k}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varrho_{\nu_k\nu_1}^2 & \varrho_{\nu_k\nu_2}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \lambda_{\nu_1}+\lambda_{\nu_2} & \dots & \lambda_{\nu_1}+\lambda_{\nu_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_{\nu_k}+\lambda_{\nu_1} & \lambda_{\nu_k}+\lambda_{\nu_2} & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

we get immediately that the measure of the $k-1$-dimensional simplex $[P_{\nu_1}P_{\nu_2} \dots P_{\nu_k}]$ (which is obviously orthocentric as well

[6]) A necessary and sufficient condition that the diagonals $\overline{P_iP_j}$ and $\overline{P_kP_l}$ of a quadrangle $P_iP_kP_jP_l$ should be orthogonal, is that its sides satisfy the equation (5).

as $[P_1 \dots P_{n+1}]$) is given by

$$(k-1)!^2\, V_{k-1}[P_{\nu_1} \dots P_{\nu_k}]^2 = \lambda_{\nu_1}\lambda_{\nu_2}\dots\lambda_{\nu_k}\left(\frac{1}{\lambda_{\nu_1}}+\frac{1}{\lambda_{\nu_2}}+\dots+\frac{1}{\lambda_{\nu_k}}\right).$$

$P_0, P_1, \dots, P_{n+1}$ are points of a space of n dimensions, therefore $V_{n+2}=0$, consequently

$$\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}+\dots+\frac{1}{\lambda_{n+1}}=0. \tag{2}$$

This relation (2) together with (1) shows clearly that amongst the parameters λ_i there is always exactly one which is negative, the others being positive. And vice versa, every set of real values $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$, which satisfies (2) and where only one λ_i is negative, determines a real orthocentric point system.

Suppose $\lambda_0<0$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}>0$, then denoting $-\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n+1}$ by Λ^2, we have

$$n!\,V^{(i)} = n!\,V[P_0P_1\dots P_{i-1}P_{i+1}\dots P_{n+1}] = \frac{\Lambda}{\lambda_i}$$

and

$$V^{(i)} : V^{(j)} = \frac{1}{\lambda_i} : \frac{1}{\lambda_j} \tag{8}$$

which relation shows clearly, that the barycentric coordinates of P_i relative to the fundamental simplex $[P_0P_1\dots P_{i-1}P_{i+1}\dots P_{n+1}]$ are

$$\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_{i-1}}, \frac{1}{\lambda_{i+1}}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n+1}}.$$

§. 2.

Consider the set of $n+1$ points P_i in the n-dimensional space whose rectangular coordinates are given by

$$(9)\quad \begin{array}{ll} (P_1) & x_{11} : x_{12} : \dots : x_{1n} : 1 = \varepsilon_{11} : \varepsilon_{12} : \dots : \varepsilon_{1,n+1} \\ (P_2) & x_{21} : x_{22} : \dots : x_{2n} : 1 = \varepsilon_{21} : \varepsilon_{22} : \dots : \varepsilon_{2,n+1} \\ \dots & \dots \\ (P_{n+1}) & x_{n+1,1} : x_{n+1,2} : \dots : x_{n+1,n} : 1 = \varepsilon_{n+1,1} : \varepsilon_{n+1,2} : \dots : \varepsilon_{n+1,n+1} \end{array}$$

and suppose that the matrix $\|\varepsilon_{ij}\|$ is orthogonal, i. e.

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \varepsilon_{i\nu}\varepsilon_{j\nu} = 0;\ \sum_{\nu=1}^{n+1} \varepsilon_{i\nu}^2 = 1 \qquad (i,j=1,2,\dots,n+1;\ i \neq j).$$

We shall prove that these points $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ and the origin:

$$(P_0)\quad x_{01} : x_{02} : \dots : x_{0n} : 1 = 0 : 0 : \dots : 1 \tag{9'}$$

form an orthocentric set.

Starting from the values of x_{ij} given in (9), (9'), we have

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_{i\nu} x_{j\nu} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_{i\nu}\varepsilon_{j\nu}}{\varepsilon_{i,n+1}\varepsilon_{j,n+1}} = -1 \quad (i \neq j;\ i,j = 1, 2, \ldots, n+1)$$

or

$$(10) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - x_{k\nu})(x_{j\nu} - x_{l\nu}) = 0 \quad (i, j, k, l = 0, 1, 2, \ldots, n+1)$$

consequently $\overline{P_i P_k} \perp \overline{P_j P_l}$ and the orthocentric property of the set $P_0 P_1 \ldots P_{n+1}$ is thus proved.

We may express the distances $\overline{P_i P_j}$ by means of the ε_{ij}:

$$\left.\begin{aligned} \overline{P_0 P_j}^2 &= \sum_{\nu=1}^{n} x_{j\nu}^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon_{j\nu}}{\varepsilon_{j,n+1}}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon_{j,n+1}^2} - 1 \\ \overline{P_i P_j}^2 &= \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - x_{j\nu})^2 = \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon_{i\nu}}{\varepsilon_{i,n+1}} - \frac{\varepsilon_{j\nu}}{\varepsilon_{j\,n+1}}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon_{i,n+1}^2} + \frac{1}{\varepsilon_{j,n+1}^2} \end{aligned}\right\} (i, j = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Comparing these expressions with those in §. 2, we see immediately that, if the unity of length is conveniently chosen, the parameters

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$$

can be identified with the quantities

$$-1, \frac{1}{\varepsilon_{1,n+1}^2}, \ldots, \frac{1}{\varepsilon_{n+1,n+1}^2}.$$

The conditions of orthogonality

$$\sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_{i,n+1}^2 x_{i\nu} = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_{i,n+1}\varepsilon_{i\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

show moreover, that the origin P_0, viz. the point corresponding to the negative parameter is an interior point of the simplex formed by the others.

By what precedes, it is seen at once that the coordinates of any orthocentric set of points can be expressed by means of an orthogonal matrix. Suppose indeed, that an orthocentric set of $n+2$ points $P_0 P_1 \ldots P_{n+1}$ in the n-dimensional space be specified by the parameters

$$\lambda_0 < 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1} > 0$$

and determine an orthogonal matrix $\|\varepsilon_{ij}\|$ such that the elements of its last column satisfy the conditions

$$\varepsilon_{1,n+1}^2 = -\frac{\lambda_0}{\lambda_1};\ \varepsilon_{2,n+1}^2 = -\frac{\lambda_0}{\lambda_2};\ \ldots;\ \varepsilon_{n+1,n+1}^2 = -\frac{\lambda_0}{\lambda_{n+1}},$$

the other elements being arbitrary.

Then, taking P_0 as origin, the coordinates of the points of the orthocentric set are

$$x_{0\nu} = 0;\ x_{i\nu} = \sqrt{-\lambda_0}\,\frac{\varepsilon_{i\nu}}{\varepsilon_{i,n+1}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

the position of the set relative to the axes being determined by the arbitrary elements of the matrix $\|\varepsilon_{ij}\|$.

§. 3.

If a set of points $P_1, P_2, \ldots, P_r$ is determined by their mutual distances $\overline{P_iP_j} = \varrho_{ij}$, and if at the points P_i masses α_i, resp. β_i are placed, then the distance of the barycentres $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ and $B(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ of these two systems of masses is given by[7])

$$\overline{AB}^2 = -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \varrho_{ij}^2(\alpha_i - \beta_i)(\alpha_j - \beta_j)$$

provided that

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i = 1.$$

If the points $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ are the vertices of an orthocentric simplex in n dimensions, then substituting $\varrho_{ij}^2 = \lambda_i + \lambda_j$, we get immediately the following expression for the distance of two points A and B, whose barycentric coordinates relative to the orthocentric simplex $[P_1 \ldots P_{n+1}]$ are α_i, resp. β_i

$$(11) \qquad \overline{AB}^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(\alpha_i - \beta_i)^2;\ \Sigma\alpha_i = \Sigma\beta_i = 1.$$

In order to find the analogues of the FEUERBACH circle we are going to investigate, by means of the formula (11), whether there is a point on the line joining the barycentre G and the orthocentre P_0 of the simplex $[P_1 \ldots P_{n+1}]$ which is equidistant from the barycentres of all the $k-1$-dimensional simplexes contained in $[P_1 \ldots P_{n+1}]$.

7) See e. g. E. CESÀRO—G. KOWALEWSKY, *Vorlesungen über natürliche Geometrie* (Leipzig, 1901), pp. 297—298.

The barycentric coordinates of G, resp. P_0 being $1, 1, \ldots, 1$, resp. $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_{n+1}}$, the barycentric coordinates of the points C of the line joining them are

$$(12) \qquad \alpha_\nu = 1 + \frac{\gamma}{\lambda_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n+1), \; \alpha = \Sigma \alpha_\nu = n + 1 - \frac{\gamma}{\lambda_0}$$

where γ denotes a variable parameter.

The barycentric coordinates of the barycentre G_{k-1} of the $k-1$-dimensional simplex $[P_1 P_2 \ldots P_k]$ may be obviously taken to be:

$$(13) \qquad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = \frac{1}{k}; \; \beta_{k+1} = \ldots = \beta_{n+1} = 0.$$

Hence

$$\overline{CG_{k-1}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\alpha}{k} - \left(1 + \frac{\gamma}{\lambda_i}\right)\right]^2 \lambda_i + \sum_{j=k+1}^{n+1} \left(1 + \frac{\gamma}{\lambda_j}\right)^2 \lambda_j}{\alpha^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha}{k} \left[\left(\frac{\alpha}{k} - 2\right) \lambda_i - 2\gamma\right] + \sum_{\nu=1}^{n+1} \left(1 + \frac{\gamma}{\lambda_\nu}\right)^2 \lambda_\nu}{\alpha^2}.$$

This expression will be independent of the choice of the vertices $P_1, P_2, \ldots, P_k$, if $\alpha = 2k$ and $\gamma_{k-1} = (n + 1 - 2k)\lambda_0$. Thus we have the result:

The point $C_{k-1} = \frac{G + \gamma_{k-1} P_0}{1 + \gamma_{k-1}}$ which divides the distance $\overline{GP_0}$ at the ratio

$$(4') \qquad \frac{\overline{GC_{k-1}}}{\overline{P_0 C_{k-1}}} = \frac{n + 1 - 2k}{n + 1}$$

is equidistant from the barycentres of all the $k-1$-dimensional simplexes contained in $[P_1 \ldots P_{n+1}]$. The common value of the distance will be found to be determined by

$$4k^2 \overline{C_{k-1} G_{k-1}}^2 = (n + 1 - 2k)^2 \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1}.$$

Let us now calculate the distance of the point given by (4′) from the orthocentre O_{k-1} of the $k-1$-dimensional simplex $[P_1 \ldots P_k]$. The barycentric coordinates of O_{k-1} are obviously

$$(13') \qquad \beta_1 = \frac{L}{\lambda_1}; \; \beta_1 = \frac{L}{\lambda_2}; \ldots; \; \beta_k = \frac{L}{\lambda_k}; \quad \beta_{k+1} = \ldots = \beta_{n+1} = 0;$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_k}.$$

Hence

$$\overline{CO_{k-1}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left[\alpha\frac{L}{\lambda_i} - \left(1+\frac{\gamma}{\lambda_i}\right)\right]^2 \lambda_i + \sum_{j=k+1}^{n+1}\left(1+\frac{\gamma}{\lambda_j}\right)^2 \lambda_j}{\alpha^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k}\alpha^2\frac{L^2}{\lambda_i} - 2k\alpha L - \sum_{i=1}^{k}\frac{2\alpha\gamma L}{\lambda_i} + \sum_{\nu=1}^{n+1}\left(1+\frac{\gamma}{\lambda_\nu}\right)^2 \lambda_\nu}{\alpha^2}.$$

With regard to (13′) this expression will be independent of the choice of the vertices $P_1, P_2, \ldots, P_k$, if again $\alpha = 2k$ and $\gamma_{k-1} = (n+1-2k)\lambda_0$, and the common value of the distance $\overline{C_{k-1}O_{k-1}}$ will be found to be equal to $\overline{C_{k-1}G_{k-1}}$. Hence we have the theorem:

The point $C_{k-1} = \dfrac{G + \gamma_{k-1}P_0}{1+\gamma_{k-1}}$, which divides the distance of the barycentre G and the orthocentre P_0 at the ratio $\overline{GC_{k-1}} : \overline{P_0C_{k-1}} = (n+1-2k) : (n+1)$, is equidistant from the barycentres and orthocentres of all the $k-1$-dimensional simplexes of $[P_1 \ldots P_{n+1}]$, the common value of the distance being given by

$$4k^2\,\overline{C_{k-1}G_{k-1}}^2 = 4k^2\,\overline{C_{k-1}O_{k-1}}^2 = (n+1-2k)^2\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

(Received May 1, 1939)

On the Possibility of Definition by Recursion.

By LÁSZLÓ KALMÁR in Szeged.

To Professor Leopold Fejér on his sixtieth birthday February 9, 1940.

In the axiomatic treatment of arithmetic, based on the PEANO axioms[1]), the special arithmetical functions are usually introduced by recursive definitions, the only function occurring in the axioms as a primitive idea being the successor function a'.[2]) For instance, the functions $a+b$, $a \cdot b$, a^b are successively defined by the recursion equations

$$\text{(1)} \qquad a+0=a, \quad a+b'=(a+b)';$$

$$\text{(2)} \qquad a \cdot 0=0, \quad a \cdot b'=a \cdot b+a;$$

$$\text{(3)} \qquad a^0=0', \quad a^{b'}=a^b \cdot a.$$

The existence of a function satisfying given recursion equations, which is far from being an immediate consequence of the PEANO axioms[3]), is usually supported by the following heuristic argument.

[1]) G. PEANO, Sul concetto di numero, *Revista di mat.*, 1 (1891), pp. 87—102 and 256—267. The primitive ideas of the PEANO axiomatic system are: "0," "natural number" and "$'$." The axioms are: (*i*) 0 is a natural number; (*ii*) if a is a natural number, a' is a natural number too; (*iii*) $a'=b'$ implies $a=b$; (*iv*) $a'\neq 0$; (*v*) any hereditary property possessed by 0 is possessed by each natural number. (According to RUSSELL, a property is called hereditary, if, whenever it belongs to a natural number a, it also belongs to a'.) A proof based on (*v*) is called a "proof by induction" (with respect to a).

[2]) After addition has been defined, it can be proved that $a'=a+1$ (1 denoting the natural number $0'$).

[3]) This is shown by the fact that the existence of such a function does not hold in general if axiom (*iii*) or (*iv*) is omitted. Indeed, the finite models

It follows by induction that, for each n, there is a function defined up to n and satisfying up to n the given recursion equations. Indeed, the first of them defines such a function for $n=0$ (thus "up to 0"); and if a function of this kind is defined up to n, the second of the recursion equations allows its definition to be extended, together with its required property, up to n'.

Obviously, this argument is based implicitely on the order relation "$\leqq$," for the phrase "up to n" has plainly to be interpreted as "for all $m \leqq n$." Now, "$m \leqq n$" is usually defined as "there is a natural number k such that $m+k=n$" and "$m+k$" is defined by the recursion equations (1). Hence a vitious circle arises. To avoid it, we have to choose between the following methods.

(a) We adjoin the equations (1), together with the primitive idea "+," to the PEANO axioms. This way is, of course, the easiest one, and, if the logic taken as basis of the axiomatic system[4]) is not wide enough to express the idea "there is a function with a given property," it is also the only practicable one[5]). But if we suppose, as we shall do here, that our logic is expressive enough, this method is not satisfactory, for it introduces new axioms which could be avoided.

(a) $0'=1,\ 1'=2,\ 2'=3,\ 3'=1,\ 0\neq1,\ 0\neq2,\ 0\neq3,\ 1\neq2,\ 1\neq3,\ 2\neq3$ and (b) $0'=1,\ 1'=2,\ 2'=0,\ 0\neq1,\ 1\neq2$ satisfy the axioms (i), (ii), (iv), (v) and (i), (ii), (iii), (v) respectively; nevertheless, equations (3) cannot be satisfied in these models, for they would successively imply

$$2^0=1,\ 2^1=1.2=2,\ 2^2=2.2=1,\ 2^3=1.2=2,\ 2^1=2.2=1$$

in (a), and

$$2^0=1,\ 2^1=1.2=2,\ 2^2=2.2=1,\ 2^0=1.2=2$$

in (b), both in contradiction to $1\neq2$. — On the other hand, the *unicity* of the function satisfying given recursion equations is an immediate consequence of axiom (v).

[4]) It is unnecessary to explain that an axiomatic system is not fully determined unless besides the primitive ideas and axioms the logic taken as basis is given. In case of the PEANO axioms, this logic is generally supposed to include the usual properties of the equality. The extent of the logic taken as basis has a great influence on that of the axiomatic theory; e. g. the PEANO axioms are sufficient for the theory of real numbers or for that of natural numbers only, according to the logic taken as basis.

[5]) If we adjoin also the equations (2) to the axioms, further recursive definitions become superfluous, supposing our logic allows us to express the idea "the only natural number of a given property," or, at least, the idea

(*b*) We define "$m \leqq n$" without using functions defined by recursion. This method is due to DEDEKIND[6]); he succeeded, by defining "$m \leqq n$" as "n possesses all hereditary properties possessed by m," in completing the above heuristic argument to an exact proof. However, Dedekind's definition is logically more complicated[7]) and technically less convenient for the proof of the properties of the order relation[8]) than the "usual" definition stated above.

(*c*) We prove the existence theorem in question by another method, without using the order relation. For the particular recursion equations (1) this can be done, as I have shown[9]), by induction with respect to the "parameter" a. This method can be applied to the equations (2) too, but not to arbitrary recursion equations. However, after addition has been introduced, we can define the order relation by the above "usual" definition and then proceed in proving the general existence theorem by Dedekind's method.

This way has the disadvantage of using two entirely different devices to prove the same fact, one in a particular case and then another to settle the general theorem. A method which is free from this disadvantage has been recently given by LORENZEN[10]). He proves the existence theorem at once for arbitrary recursive

---

"there is a natural number of a given property." Indeed, any recursive definition can be replaced by an explicit one in the first case and, in the second case, by a "contextual" definition giving a meaning to any assertion which contains the function to be defined; see K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **38** (1931), pp. 173—198, esp. Satz VII; D. HILBERT und P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, I (Berlin, 1934), pp. 412—421 and 457—460.

[6]) R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen*, 5th edition (Braunschweig, 1923), pp. 23—35; *Gesammelte mathematische Werke*, vol. 3 (Braunschweig, 1932), pp. 361—372.

[7]) Indeed, it contains a quantifier ("all") referring to the domain of the *properties of natural numbers*, whereas the "usual" definition contains a quantifier ("there is") referring to the domain of the *natural numbers* only.

[8]) The properties of "$\leqq$" needed in Dedekind's proof are: (1) $n \leqq 0$ implies $n = 0$; (2) $n \leqq m'$ implies $n \leqq m$ or $n = m'$; (3) $n \leqq n$; (4) $n' \leqq n$ does not hold; (5) $0 \leqq n$; (6) $n' \leqq m$ implies $n \leqq m$; (7) $n \leqq m$ implies $n' \leqq m'$.

[9]) See E. LANDAU, Grundlagen der Analysis (Leipzig, 1930), pp. 4—5.

[10]) P. LORENZEN, Die Definition durch vollständige Induktion, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **47** (1939), pp. 356—358.

definitions[11]) without using the order relation, but operating with multivalent functions.

In this note, I shall give one more proof, avoiding the order relation like LORENZEN, but also the idea of a multivalent function which is plainly more complicated than that of a univalent function[12]). Instead of it, I use the idea of a function defined only for *some* natural numbers[13]), occurring also in the heuristic argument referred to. Thus we obtain a proof which approaches that argument closer than the former ones and so it seems more natural than any of them.

For simplicity, I shall confine myself to "primitive" recursion equations of the form

$$\varphi(0) = \alpha, \quad \varphi(n') = \beta(n, \varphi(n)); \tag{4}$$

here α and β may depend (as already defined functions) also on parameters, in which case the function $\varphi(n)$ to define depends on these parameters too; obviously, (1), (2) and (3) are particular cases of (4). However, the same method can be applied to more general types of arithmetic recursion[14]) as well as to the set-theoretic generalisation of the problem treated by LORENZEN.

---

[11]) Moreover, LORENZEN does not restrict the problem to functions of natural numbers with natural numbers as values but treats the problem in a general, set-theoretic form.

[12]) Indeed, a multivalent (arithmetical) function is, as pointed out by LORENZEN, a function of natural numbers whose values are *classes* of natural numbers.

[13]) Instead of saying, a function is not defined for a given argument, we could say, its value is ∞ or any other symbol different from the natural numbers. If we confine ourselves to functions whose values are different from 0, we can use 0 as such a symbol. The general case can be reduced to this case (and so the introduction of a new symbol can be avoided) by replacing the recursion (4) by

$$\psi(0) = \alpha', \quad \psi(n') = (\beta(n, \delta(\psi(n))))' \tag{4'}$$

where $\delta(n)$ is defined as 0 for $n = 0$ and, for $n \neq 0$, as the natural number whose successor is n (the existence and unicity of this number $\delta(n)$ can be readily proved by axioms (ν) and ($i\nu$)). After having proved the existence of a function ψ satisfying (4'), we set $\varphi(n) = \delta(\psi(n))$ and obtain a function φ satisfying (4).

[14]) See for instance R. PÉTER, Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, *Math. Annalen*, **110** (1934), pp. 612—632;

We call a function ψ defined for some natural numbers a *partial solution of* (4), if

(α) so far as $\psi(0)$ defined, $\psi(0)=\alpha$;

(β) so far as $\psi(n')$ defined, $\psi(n)$ is defined too and
$$\psi(n')=\beta(n, \psi(n)).$$

There are partial solutions of (4), e. g. the function ψ defined nowhere.

We assert

(A) *To each n, there is a partial solution* ψ *of* (4) *for which* $\psi(n)$ *is defined.*

(B) *If* ψ_1 *and* ψ_2 *are partial solutions of* (4), *and if* $\psi_1(n)$ *and* $\psi_2(n)$ *are both defined, then* $\psi_1(n)=\psi_2(n)$.

We prove both assertions by induction. As to (A), the function with
$$\psi(0)=\alpha,$$
$$\psi(n) \text{ undefined for } n\neq 0$$
is a partial solution[15]) with $\psi(0)$ defined. Suppose χ is a partial solution for which $\chi(m)$ is defined; we have to construct a partial solution ω with $\omega(m')$ defined. If $\chi(m')$ is defined, we simply take χ as ω; if not, let[16])
$$\omega(n)=\chi(n) \text{ for } n\neq m',$$
$$\omega(m')=\beta(m, \chi(m)).$$
Obviously ω fulfils (α) because χ did so and[17]) $0\neq m'$. To prove (β) for ω, suppose $\omega(n')$ is defined, i. e. either $n'\neq m'$ and $\chi(n')$ defined, or $n'=m'$. In the first case, $\chi(n)$ is defined too, thus $n\neq m'$ for $\chi(m')$ is undefined; hence $\omega(n)=\chi(n)$ is defined and $\omega(n')=\chi(n')=\beta(n, \chi(n))=\beta(n, \omega(n))$ by (β). In the second case, i. e. if[18]) $n=m$, the same is true, for[19]) $m\neq m'$, thus $\omega(m)=\chi(m)$ is defined and $\omega(m')=\beta(m, \chi(m))=\beta(m, \omega(m))$.

As to (B), so far as $\psi_1(0)$ and $\psi_2(0)$ are both defined, we have $\psi_1(0)=\alpha=\psi_2(0)$ by (α). Suppose (B) holds for n, and

Konstruktion nichtrekursiver Funktionen, *Math. Annalen*, **111** (1935), pp. 42–60; Über die mehrfache Rekursion, *Math. Annalen*, **113** (1936), pp. 489—527.

15) To prove this we have to use $n'\neq 0$, i. e. axiom (*iv*).

16) $\omega(n)=\chi(n)$ means: $\omega(n)$ is undefined if $\chi(n)$ is undefined; and defined to have the value $\chi(n)$ if $\chi(n)$ is defined.

17) Here we use axiom (*iv*) again.

18) Here we use axiom (*iii*).

19) $m\neq m'$ can be easily proved using axioms (*iii*), (*iv*) and (*v*).

$\psi_1(n')$ and $\psi_2(n')$ are both defined; then also $\psi_1(n)$ and $\psi_2(n)$ are defined, thus $\psi_1(n) = \psi_2(n)$ by hypothesis, and

$$\psi_1(n') = \beta(n, \psi_1(n)) = \beta(n, \psi_2(n)) = \psi_2(n')$$

by (β).[20]

Now let $\varphi(n)$ the common value of the $\psi(n)$ where ψ is any partial solution of (4) defined for n. By (A) and (B), φ is defined everywhere; we prove it satisfies (4).

Indeed, let ψ a partial solution for which $\psi(0)$ is defined; then we have by (α)

$$\varphi(0) = \psi(0) = \alpha.$$

Further, let χ a partial solution with $\chi(n')$ defined; then $\chi(n)$ is defined too; we have $\varphi(n) = \chi(n)$ and

$$\varphi(n') = \chi(n') = \beta(n, \chi(n)) = \beta(n, \varphi(n))$$

by (β), which concludes the proof.

(Received October 30, 1939.)

[20]) Note axioms *(iii)* and *(iv)* are not needed to prove (B).

Contribution to Recursive Number Theory.

By RÓZSA PÉTER in Budapest.

To Professor Leopold Fejér, on his sixtieth birthday, with much gratitude.

1. According to a program due te SKOLEM[1]), number theory has to be developed without the use of bound variables (i. e. without the use of expressions such as "for all x . . ." and "there is an x for which . . ."), in basing it on definitions by recursion as well as on proofs by induction. A further restriction would be to confine ourselves to the simplest form of recursion, to the so-called primitive recursion scheme

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(0)=a \\ \varphi(n')=\alpha(n, \varphi(n)); \end{cases}$$

here $\alpha(n, m)$ is a function defined already, n' denotes the successor of n in the sequence of integers; φ and α may depend on parameters too. The functions obtained from 0 and n' by substitutions and recursions of the form (1) are called *primitively recursive functions.* As I have shown in two previous papers[2]), several methods of definition, more general than (1) and playing a part in number theory[3]), can be reduced to (1).

[1]) Skolem's investigations date from 1919; see TH. SKOLEM, Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise, *Videnskapsselskapets Skrifter* (Kristiania), I. Mat.-Naturv. Kl., 1923, No 6, pp. 1—38.

[2]) RÓZSA PÉTER (POLITZER), *a)* Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, *Math. Annalen,* **110** (1934), pp. 612—632; *b)* Über die mehrfache Rekursion, *Math. Annalen,* **113** (1936), pp. 489—527.

[3]) Such methods of definition are (a) the "course-of-values recursion," defining the value of the function for the argument n' by means of several of its preceding values (possibly by means of the whole course of its values

The analogous problem for the *induction,* i.e. that of the reduction of more general proof methods to the simplest scheme of induction:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\begin{array}{c} A(0) \\ A(a) \to A(a') \end{array}}{A(a)}$$

(where $A(a)$ stands for a proposition, variable with. a, and "$\to$" for "implies"), has been treated in a recent paper of SKOLEM[4]). Here SKOLEM has shown that the schemes occurring in the work of HILBERT and BERNAYS[5]) as formalizations of some methods of proof used in number theory can be reduced to the scheme (I)[6]), using certain functions defined by recursions. These recursions are all of the form (1), except a single recursion of the form

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \psi(0, b, a) = b \\ \psi(c', b, a) = \varphi(\psi(c, b, a'), a). \end{cases}$$

---

for the arguments less than n'), e. g. the famous formula of Euler's for the sum $\sigma(n)$ of the divisors of n:

$$\begin{cases} \sigma(0) = 0 \\ \sigma(n') = \sum\limits_{3i^2+i<2n'} (-1)^{i-1}\sigma\left(n' - \dfrac{3i^2+i}{2}\right) + \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{3i^2-i<2n'} (-1)^{i-1}\sigma\left(n' - \dfrac{3i^2-i}{2}\right) + \varrho(n'), \end{cases}$$

where $\varrho(n') = (-1)^{i-1} n$ if $n' = \dfrac{3i^2+i}{2}$ or $n' = \dfrac{3i^2-i}{2}$ for some i and $\varrho(n') = 0$ otherwise; (b) the "nested recursion," in which the parameters, instead of being kept constant, are substituted by expressions containing functions already defined (e.g. (2) and (3)) or even, in addition, the function to be defined, e.g.

$$\begin{cases} \varphi(0, a) = \alpha(a) \\ \varphi(n', a) = \beta(n, a, \varphi(n, \gamma(n, a, \varphi(n, a)))); \end{cases}$$

(c) the "manifold recursion," i.e. the recursion with respect to more variables simultanously (not to be reduced to primitive recursions in general) in the particular case in which no nesting of expressions, containing the function to be defined, occurs.

[4]) TH. SKOLEM, Eine Bemerkung über die Induktionsschemata in der rekursiven Zahlentheorie, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **48** (1939), pp. 268—276.

[5]) D. HILBERT und P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1. (Berlin, 1934), pp. 343 and 345.

[6]) This reduction had been carried out in the work of HILBERT and BERNAYS (see the preceding footnote) too, but by means of bound variables.

In the same paper, SKOLEM expressed his doubt of the possibility of such a reduction when confining the recursions to primitive ones.

However, (2) is a particular case of the "nested recursion" which I have proved [loc. cit. [2]), *a*)] not to exceed the class of primitively recursive functions. Yet my proof can not be used directly to dispel Skolem's doubt, for I started by assuming that there is a well determined function satisfying the non-primitive recursion equations in question[7]), e.g. (2) or, to take a more general example,

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi(n, a) = \alpha(a) \\ \varphi(n', a) = \beta(n, a, \varphi(n, \gamma(n, a))) \end{cases}$$

(α, β, γ primitively recursive functions).

Then I proved that the same function can be obtained from 0 and n' also by substitutions and primitive recursions.

Nevertheless, my proof can be modified, in each case mentioned in the footnote [3]), by first defining a function by combination of primitive recursions and substitutions and then proving that this function satisfies the given more complicated recursion equations (e.g. (2) or (3)). The proofs modified thus do not use any hypothesis going beyond the range of the "primitively recursive number theory," carrying out Skolem's program in the restricted sense; thus, they form a sort of proof-theoretical strengthening of the original proofs.

2. I shall develop such a strengthened proof in the case of scheme (3). For this scheme, I only remarked[8]) that it can be reduced to (1) in a much easier method than the general nested recursion scheme; but since (3) is a particular case of the latter, I did not give this easier method in details. Now, I shall develop it in its strengthened form in the above sense.

I shall need the function $a \dot{-} n$, denoting $a - n$ for $a \geqq n$ and

---

[7]) The usual existence proofs of functions satisfying given (primitive or non-primitive) recursion equations require bound (function) variables, see e.g. L. KALMÁR, On the Possibility of Definition by Recursion, *these Acta*, **9** (1939), pp. 227—232. According to Skolem's program, we may take primitive recursion equations as axioms; but to prove the existence of a function satisfying given non-primitive recursion equations, the only way is to construct an expression by means of substitutions, starting from functions defined by primitive recursion equations, and to prove that it satisfies them.

[8]) See loc. cit. [2]) *a*), p. 626, footnote.

0 for $a<n$, [see loc. cit. [2]), a)] shown to be primitively recursive by the definitions

$$\begin{cases} \delta(0)=0 \\ \delta(n')=n \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} a \dot{-} 0=a \\ a \dot{-} n'=\delta(a-n). \end{cases}$$

I shall refer, in footnotes, to the properties of this function and those of the relation $a \leqq b$ (defined as $a \dot{-} b=0$) which are needed in the proof; they can be readily proved by means of scheme (I).

Using the function γ occuring in (3), I define a function $\mu(m, n, a)$ by means of the recursion

$$(4) \qquad \begin{cases} \mu(0, n, a)=a \\ \mu(m', n, a)=\gamma(n \dot{-} m', \mu(m, n, a)) \end{cases}$$

of the form (1). I prove by means of scheme (I) that

$$(5) \qquad i \leqq n \rightarrow \mu(i', n', a)=\mu(i, n, \gamma(n, a)).$$

First, this holds if $i=0$, for we have[9]) by (4)

$$\mu(0', n', a)=\gamma(n' \dot{-} 0', \mu(0, n', a))=\gamma(n, a)=\mu(0, n, \gamma(n, a)).$$

Further, I prove that

$$(i \leqq n \rightarrow \mu(i', n', a)=\mu(i, n, \gamma(n, a))) \rightarrow$$
$$\rightarrow (i' \leqq n \rightarrow \mu(i'', n', a)=\mu(i', n, \gamma(n, a)))$$

which can be readily transformed into

$$(6) \qquad (i' \leqq n \,\&\, (i \leqq n \rightarrow \mu(i', n', a)=\mu(i, n, \gamma(n, a)))) \rightarrow$$
$$\rightarrow \mu(i'', n', a)=\mu(i', n, \gamma(n, a))$$

(of course, "&" means "and").

By (4) we have[9])

$$\mu(i'', n', a)=\gamma(n' \dot{-} i'', \mu(i', n', a))=\gamma(n \dot{-} i', \mu(i', n', a)),$$

whence[10])

$$(7) \qquad (i' \leqq n \,\&\, (i \leqq n \rightarrow \mu(i', n', a)=\mu(i, n, \gamma(n, a)))) \rightarrow$$
$$\rightarrow \mu(i'', n', a)=\gamma(n \dot{-} i', \mu(i, n, \gamma(n, a)));$$

as, by (4),

$$\gamma(n \dot{-} i', \mu(i, n, \gamma(n, a)))=\mu(i', n, \gamma(n, a)),$$

(7) proves (6) and, by scheme (I), also (5).

---

[9]) $n' \dot{-} k'=n \dot{-} k$.

[10]) $k' \leqq n \rightarrow k \leqq n$.

Now, using the functions α and β occurring in (3), I define a function $\psi(m, n, a)$ by the recursion

$$(8)\qquad \begin{cases} \psi(0, n, a) = \alpha(\mu(n, n, a)) \\ \psi(m', n, a) = \beta(m, \mu(n \dot{-} m', n, a), \psi(m, n, a)), \end{cases}$$

which is also an instance of (1). I prove that

$$(9)\qquad m \leqq n \rightarrow \psi(m, n', a) = \psi(m, n, \gamma(n, a)).$$

First, this holds for $m = 0$; indeed, by (8),

$$\psi(0, n', a) = \alpha(\mu(n', n', a)),$$

whereas (5) gives[11]) for $i = n$

$$\mu(n', n', a) = \mu(n, n, \gamma(n, a))$$

which leads, using (8), to

$$\psi(0, n', a) = \alpha(\mu(n, n, \gamma(n, a))) = \psi(0, n, \gamma(n, a)).$$

Further, I prove that

$$(m \leqq n \rightarrow \psi(m, n', a) = \psi(m, n, \gamma(n, a))) \rightarrow$$
$$\rightarrow (m' \leqq n \rightarrow \psi(m', n', a) = \psi(m', n, \gamma(n, a))).$$

The latter relation can be readily transformed into

$$(10)\qquad \begin{aligned} &(m' \leqq n \,\&\, (m \leqq n \rightarrow \psi(m, n', a) = \psi(m, n, \gamma(n, a)))) \rightarrow \\ &\qquad \rightarrow \psi(m', n', a) = \psi(m', n, \gamma(n, a)). \end{aligned}$$

Now, (8) gives[9])

$$\begin{aligned} \psi(m', n', a) &= \beta(m, \mu(n' \dot{-} m', n', a), \psi(m, n', a)) = \\ &= \beta(m, \mu(n \dot{-} m, n', a), \psi(m, n', a)); \end{aligned}$$

on the other hand, (5) gives[12])[13]) for $m' \leqq n$ by the substitution $i = n \dot{-} m'$

$$\mu(n \dot{-} m, n', a) = \mu((n \dot{-} m')', n', a) = \mu(n \dot{-} m', n, \gamma(n, a))$$

which proves

$$\psi(m', n', a) = \beta(m, \mu(n \dot{-} m', n, \gamma(n, a)), \psi(m, n', a))$$

for $m' \leqq n$. Thus we have[10])

$$(11)\qquad \begin{aligned} &(m' \leqq n \,\&\, (m \leqq n \rightarrow \psi(m, n', a) = \psi(m, n, \gamma(n, a)))) \rightarrow \\ &\quad \rightarrow \psi(m', n', a) = \beta(m, \mu(n \dot{-} m', n, \gamma(n, a)), \psi(m, n, \gamma(n, a))); \end{aligned}$$

on the other hand, by (8),

$$\beta(m, \mu(n \dot{-} m', n, \gamma(n, a)), \psi(m, n, \gamma(n, a))) = \psi(m', n, \gamma(n, a)),$$

therefore, (11) proves (10) and, by scheme (I), also (9).

---

11) $n \leqq n$.

12) $n \dot{-} k \leqq n$.

13) $m' \leqq n \rightarrow n \dot{-} m = (n \dot{-} m')'$.

(9) gives for[11] $m = n$

(12) $$\psi(n, n', a) = \psi(n, n, \gamma(n, a)).$$

Finally, I assert that the function

(13) $$\varphi(n, a) = \psi(n, n, a)$$

satisfies the equations (3).

Indeed, we have by (13), (8) and (4)

$$\varphi(0, a) = \psi(0, 0, a) = \alpha(\mu(0, 0, a)) = \alpha(a);$$

further by (13) and (8),

$$\varphi(n', a) = \psi(n', n', a) = \beta(n, \mu(n' \dot{-} n', n', a), \psi(n, n', a))$$

and here we have[14] by (4)

$$\mu(n' \dot{-} n', n', a) = \mu(0, n', a) = a,$$

thus, using (12) and (13),

$$\varphi(n', a) = \beta(n, a, \psi(n, n, \gamma(n, a))) = \beta(n, a, \varphi(n, \gamma(n, a))),$$

which proves our assertion. Obviously $\mu(m, n, a)$ and $\psi(m, n, a)$ are primitively recursive functions and hence $\varphi(n, a)$, obtained from $\psi(m, n, a)$ by substitution, is also a primitively recursive function, as stated above.

3. The function defined by (2) was used by SKOLEM in the proof of the reducibility of the scheme

(II) $$\frac{\begin{array}{l} A(b, 0) \\ A(\varphi(b, a), a) \to A(b, a') \end{array}}{A(b, a)}$$

to scheme (I). Definition (2) being an instance of scheme (3), Skolem's proof can be carried out also in the case of confining the recursions to primitive ones.

This fact can also be shown directly, without the roundabout way through functions defined by non-primitive recursions, by a slight modification of Skolem's proof; see my review on Skolem's paper (loc. cit. [4])), forthcoming in *The Journal of Symbolic Logic.*

(Received November 23, 1939.)

[14]) $k \dot{-} k = 0.$

On Upper Semi-Continuous Collections.

By TIBOR RADÓ and J. W. T. YOUNGS in Columbus, Ohio.

Introduction.

During the course of the years 1924 to 1927, R. L. MOORE, P. ALEXANDROFF and B. DE KERÉKJÁRTÓ appear to have independently introduced the notion of an upper semi-continuous collection[1]). Apart from the fundamental ideas, however, their work does not overlap: the space, the terminology and the application is different in each case. Nevertheless, on account of the obvious importance of the concepts introduced by them, it is of interest to observe that their definitions, though worded in entirely different fashions, become equivalent if applied in a certain conveniently chosen abstract space.

This equivalence is rather obvious, but the purpose of this note is to establish it in a way which is not suggested immediately by their work. Indeed, we shall show that the definitions proposed represent in a sense the unique answer to a certain simple and fundamental question, and hence are necessarily equivalent. In other words our purpose is more than to show the identical character of the definitions, we shall show that for *a priori* reasons there is a sort of compulsion about the matter.

For convenience and clarity we shall start with the definitions to be used.

---

[1]) R. L. MOORE, Concerning Upper Semi-Continuous Collections of Continua which do not Separate a Given Continuum, *Proceedings National Academy of Sciences,* **10** (1924), pp. 356—360; PAUL ALEXANDROFF, Über stetige Abbildungen kompakter Räume, *Math. Annalen,* **96** (1926), pp. 555—571; B. DE KERÉKJÁRTÓ, Involutions et surfaces continues, *these Acta,* **3** (1927), pp. 49—67. Cf. also B. DE KERÉKJÁRTÓ, On Parametric Representations of Continuous Surfaces, *Proceedings National Academy of Sciences,* **10** (1924), pp. 267–271.

I. Preliminary notions.

1.1. *Partitions.* Let S be any set and suppose the elements are denoted generically by $a, b, c, \ldots$ etc.

By a *partition* $\mathfrak{P}$ of S we mean a collection of mutually exclusive subsets α, of S, filling up S. In other words, no element is in two sets of the collection $\mathfrak{P}$, but every element is in some set of $\mathfrak{P}$. A subset of S which is in the collection $\mathfrak{P}$ is known as a *compartment* of $\mathfrak{P}$.

1.2. *Equivalence.* Every partition gives rise to the following binary relationship: $a \sim b(\mathfrak{P})$ meaning that a and b are elements of the same compartment of $\mathfrak{P}$. This binary relationship will be called an *equivalence* $E(\mathfrak{P})$ since it satisfies the familiar postulates for an equivalence: $(E_1)\, a \sim b(\mathfrak{P})$ or a non-$\sim b(\mathfrak{P})$. $(E_2)\, a \sim a(\mathfrak{P})$. $(E_3)\, a \sim b(\mathfrak{P})$ implies $b \sim a(\mathfrak{P})$. $(E_4)\, a \sim b(\mathfrak{P})$ and $b \sim c(\mathfrak{P})$ imply $a \sim c(\mathfrak{P})$.

Conversely, if we are given an equivalence there is a unique partition $\mathfrak{P}$ of S which generates it.

1.3. *The set Σ.* Every partition $\mathfrak{P}$ also gives rise to a set Σ whose elements are the compartments of $\mathfrak{P}$. Each compartment plays a dual rôle. It is a subset of S and is also an element of Σ. We shall use the notation α when we consider a compartment as a subset of S and reserve the notation $[\alpha]$ to denote that the same compartment is considered as an element of Σ.

1.4. *The transformation T.* Finally every partition gives rise to a transformation from S to Σ, a transformation which associates with an element a of S that element $[\alpha]$ of Σ which as a set α contains a. Symbolically,

$$[\alpha] = T(a) \text{ means } a \in \alpha.$$

In terms of the transformation T we see that $a \sim b(\mathfrak{P})$ means $T(a) = T(b)$.

1.5. *L^* spaces*[2]. An L^* space is a limit space (i. e., a space in which convergent sequences and their limits are defined) satisfying the following conditions

[2]) Conditions L_1 and L_2 are those of Fréchet, Sur quelques points du Calcul fonctionnel, *Rendiconti Circolo Mat. di Palermo*, **22** (1906), pp. 1—74. Condition L_3 is from P. Alexandroff and P. Urysohn, Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D), *Comptes rendus Paris*, **177** (1923), pp. 1274—1276. See also C. Kuratowski, *Topologie I*, (Warszawa, 1933), chapter II.

L_1. $a, a, a, \ldots \to a$.

L_2. If $a_n \to a$ then any subsequence $a_{n_j} \to a$.

L_3. If $a_n \not\to a$, then there is a subsequence $\{a_{n_j}\}$ such that no subsequence of this subsequence converges to a. (The symbol $\not\to$ means that a_n does not converge to a.)

We shall ultimately be interested only in *compact* L^* spaces, that is in L^* spaces having the property that *any sequence has a convergent subsequence.* In other words a compact L^* space is a limit space satisfying L_1, L_2, and

L_3'. If $a_n \not\to a$, then there is a subsequence $a_{n_j} \to b \neq a$.

Given a set S by the topologization of S we shall mean the assigning of convergent sequences and limits in S so that the resulting limit space is a compact L^* space.

1.6. *Compatibility.* Let us return for a moment to the equivalence mentioned in 1.2. If $\mathfrak{P}$ is a partition of a compact L^* space S, we shall say that the equivalence $E(\mathfrak{P})$ is *compatible with the topology of* S if and only if $a_n \to a$, $b_n \to b$, $a_n \sim b_n(\mathfrak{P})$ for $n = 1, 2, \ldots$, imply $a \sim b(\mathfrak{P})$.

II. The theorems.

Referring to the work of Moore, Alexandroff and Kerékjártó mentioned in the introduction, the ideas which seem to be common to all three are the space S, the partition $\mathfrak{P}$, and the set Σ which each topologizes in his own way, and later verifies that the transformation T is continuous if and only if $\mathfrak{P}$ is properly restricted.

Looking at the common features of their work from an abstract point of view, the real issue at the center of things appears to suggest itself in the form of the following question:

Given S_1, a compact L^* space, and S_2, an untopologized set of elements, and a single valued transformation $a_2 = T(a_1)$ from S_1 to S_2, in how many ways can S_2 be topologized so that T is continuous?

Upon answering this question things become excessively simple, and, pleasingly enough, the answer is both direct and complete: the topologization is unique[3]).

[3]) Instead of the direct proof we shall give, we might have used a result of F. Hausdorf, *Mengenlehre,* (3rd edition, Berlin, 1935), p. 194. If S_1 and S_2 are metric spaces then T is continuous if and only if the complete model in S_1 of a closed set in S_2 is closed. The remarks also apply to *compact* L^* spaces and in addition the image of a closed set is closed, so that closed sets and therefore limits are determined *a priori* in S_2 by T and the topology of S_1.

First of all, an immediate example shows that if S_1 is merely required to be an L^* space, then the topologization of S_2 compatible with continuity on the part of T need not be unique. On the x-axis, let S_1 be the unit interval $0 < x \leqq 1$ and let the topologization of S_1 be taken from the x-axis itself. That is, the usual meaning of convergence and limit holds. Let S_2 be the same set of elements and let $a_2 = T(a_1)$ mean $a_2 = a_1$. We assert that S_2 can be topologized in a non-denumerable number of ways, and in each instance T is continuous. Let k be a fixed number $0 < k \leqq 1$. Take the usual meaning of convergence and limit for all sequences of elements of S_2 except for those which would, when considered as sequences of points on the x-axis, converge to the limit 0. To each such sequence assign the limit k. It is clear that S_2 is now a compact L^* space and T is continuous.

2. 1. *Uniqueness of topologization.* The above example indicates the importance of compactness on the part of S_1 if one is to hope for uniqueness. Stated in terms of S and Σ the general statement is as follows.

Theorem. *If S is a compact L^* space, and Σ can be topologized at all so that T is continuous, then the topologization of Σ is univocally determined, namely, $[\alpha_n] \to [\alpha]$ implies $\overline{\lim}\, \alpha_n \subset \alpha$; and conversely, $\overline{\lim}\, \alpha_n \subset \alpha$ implies $[\alpha_n] \to [\alpha]$.*[4]

Proof. If $a_n \in \alpha_n$ for $n = 1, 2, \ldots$ and $a_{n_j} \to a$, then $T(a_{n_j}) \to T(a)$ since T is continuous. But $T(a_{n_j}) = [\alpha_{n_j}] \to [\alpha]$ by L_2 on Σ. Therefore $[\alpha] = T(a)$ since the limit is unique, and so $a \in \alpha$.

Conversely, if $\overline{\lim}\, \alpha_n \subset \alpha$ but $[\alpha_n] \not\to [\alpha]$ then it is no restriction to suppose, using L_3 on Σ, that no subsequence of $\{[\alpha_n]\}$ converges to $[\alpha]$. But $\overline{\lim}\, \alpha_n \subset \alpha$ implies, since S is compact, that there exists $a_n \in \alpha_n$ for $n = 1, 2, \ldots$ such that a subsequence $a_{n_j} \to a \in \alpha$. Since T is continuous, $T(a_{n_j}) \to T(a)$, which means $[\alpha_{n_j}] \to [\alpha]$.

The reader will have observed that the sets of the partition $\mathfrak{P}$ are entirely unrestricted, and that the statement of the theorem might have been made much stronger since we have used only

[4]) *Cf.* C. Kuratowski, Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts, *Fundamenta Math.*, 11 (1928), pp. 169—185, especially p. 171, where the topologization is stated in exactly this form. However, Kuratowski does not state the fact that this is the *only* way to topologize. Remark: $a \in \overline{\lim}\, \alpha_n$ if and only if there exists $a_n \in \alpha_n$ for $n = 1, 2, \ldots$, and $a_{n_j} \to a$.

compactness on the part of S, and L_2 and L_3 on Σ, but have nowhere assumed that L_3 holds (which means we do not need compactness on Σ).

2. 2. *Existence of topologization.* The theorem of the preceding section is a uniqueness theorem. It points out that if the topologization is possible then the method must be precisely as given above. The question which naturally follows is *under what conditions is the topologization possible?*

MOORE, ALEXANDROFF and KERÉKJÁRTÓ each has his own condition which guarantees the possibility of topologization compatible with the continuity of T. Since the conditions are necessary and sufficient they are necessarily equivalent, and 1. 2 shows that the same is true of the different methods of topologization.

In the terminology of this note we have at our disposal an immediate necessary and sufficient condition which may be stated as follows.

Theorem. *Σ can be topologized so that T is continuous if and only if the equivalence $E(\mathfrak{P})$ is compatible* (see 1. 6) *with the topology of S.*

Proof. Take $a_n \to a$ and $b_n \to b$, such that $a_n \sim b_n(\mathfrak{P})$; i. e., $T(a_n) = T(b_n)$ for $n = 1, 2, \ldots$. Since the transformation is continuous $T(a_n) \to T(a)$, and $T(b_n) \to T(b)$. Hence $T(a) = T(b)$ which means that $a \sim b(\mathfrak{P})$. In other words $E(\mathfrak{P})$ is compatible with the topology of S.

This proves the necessity of the condition. The sufficiency follows directly and is left to the reader.

1. 3 *Upper semi-continuity.* In concluding this note we wish to state the definition of upper semi-continuous collection essentially as introduced by MOORE. A partition $\mathfrak{P}$ is said to be upper semi-continuous if $a_n \to a \in \alpha$, a_n, $b_n \in \alpha_n$ for $n = 1, 2, \ldots$ and $b_{n_j} \to b$ imply that $b \in \alpha$. As a result of the above remarks this is equivalent, of course, to the statement that $E(\mathfrak{P})$ is compatible with the topology of S. The direct proof of this statement is left to the reader.

(Received July 10, 1939.)

Über Potenzreihen mit monotoner Koeffizientenfolge.

Von S. SIDON in Budapest.

Potenzreihen, deren Koeffizienten eine k-fach monotone Nullfolge bilden ($k>0$ und ganz), sind Gegenstand mehrerer in letzterer Zeit erschienenen Arbeiten des Herrn L. FEJÉR[1]). Da eine solche Potenzreihe die Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \sigma_n^{k-1}(z), \qquad p_n > 0 \text{ für } n=0,1,2,\ldots$$

zuläßt, wobei $\sigma_n^l(z)$ das n-te arithmetische Mittel l-ter Ordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ bezeichnet, kann ein Teil der dort behandelten Fragestellungen (Wurzelfreiheit einer Potenzreihe oder einer ihrer Derivierten in einem Gebiete, der sogenannte Kakeyasche Problemkreis) prinzipiell durch das folgende, dem Wesen nach von KEMPNER[2]) herrührende Lemma erledigt werden.

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegebene komplexe Zahlen, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ die entsprechenden Punkte der Gaußschen Zahlenebene mit dem Nullpunkt O. Die Gleichung

$$\sum_{l=1}^{n} p_l a_l = 0 \tag{1}$$

in den Unbekannten p_l hat dann und nur dann eine von der trivialen verschiedene positive Lösung (d. h. eine Lösung mit $p_l \geqq 0$

---

1) Siehe die in gewisser Hinsicht zusammenfassende Darstellung: L. FEJÉR, Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, *diese Acta,* **8** (1936), S. 89—115.

2) A. J. KEMPNER, Über die Separation komplexer Wurzeln algebraischer Gleichungen, *Math. Annalen,* **85** (1922), S. 49—59.

für $l = 1, 2, \ldots, n$; $p_1 + p_2 + \ldots + p_n > 0$), *wenn die Halbstrahlen* $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ *nicht im Innern einer und derselben Halbebene liegen*[3]. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat (1) auch solche positive Lösungen, für welche nur drei von den p_l von Null verschieden sind.

Ich zeige an zwei Beispielen die praktische Anwendbarkeit der soeben dargelegten Methode.

1. Der wohlbekannte Eneström—Kakeyasche Satz: *Ist* $c_l > c_{l+1}$ *für* $l = 0, 1, \ldots, n-1$, $c_n \geqq 0$, *so gilt*

$$\sum_{l=0}^{n} c_l z^l \neq 0$$

im Kreise $|z| < 1$, ist eine Folge[4] der Tatsache, daß dort

$$\Re\big((1-z)\,\sigma_l^0(z)\big) = \Re(1 - z^{l+1}) \geqq 0.$$

Zugleich ergibt sich, daß *die Nullstellen der Polynome der nämlichen Klasse die Menge derjenigen Werte z ausfüllen, für welche die Ungleichungen*

$$\Re\big((1-z^l)\,e^{i\alpha}\big) > 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, n+1,$$

für kein reelles α *gleichzeitig erfüllt sind.*

2. Das folgende Resultat stammt von Herrn FEJÉR[5]: *Ist* $c_1, c_2, \ldots$ *eine vierfach monotone Nullfolge, so ist die durch die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *definierte Funktion im Kreise* $|z| < 1$ *schlicht.* Ich zeige nun, daß *hier die Monotonitätsbedingung für die Koeffizienten sich nicht durch die der zweifachen Monotonität ersetzen läßt*[6]. In der Tat hat das Polynom

$$(2) \qquad P(z) = \sum_{l=1}^{n} p_l \sigma_l^1(z), \qquad p_l \geqq 0 \text{ für } l = 1, 2, \ldots, n,$$

---

[3]) Die geometrische Bedeutung der positiven Lösbarkeit von (1) liegt darin, daß der Nullpunkt in dem von $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bestimmten kleinsten konvexen Bereich liegt.

[4]) Herr PAUL TURÁN teilte mir mit, daß ihm der obige Beweis des Eneström—Kakeyaschen Satzes, in dem nur der erste, ganz triviale Teil des Kempnerschen Lemmas zur Anwendung gelangt, schon vor einigen Jahren bekannt war. Hier ergibt er sich naturgemäß.

[5]) L. FEJÉR, loc. cit. [1]), S. 90 (Satz II); vgl. auch S. 92.

[6]) Das erste Beispiel einer, nach einem von dem hier angewandten verschiedenen Verfahren konstruierten, für $|z| < 1$ nicht schlichten Potenzreihe, deren Koeffizienten eine konvexe Nullfolge bilden, rührt von Herrn G. SZEGŐ her (mitgeteilt August 1936 in einem Briefe an Herrn L. FEJÉR).

als Potenzreihe betrachtet, eine konvexe Koeffizientenfolge. Es lassen sich Werte z mit $|z| < 1$ angeben, z. B. $z = (1-\delta)e^{\frac{i\pi}{6}}$, wenn $\delta > 0$ und hinreichend klein ist, für welche die Bedingung der positiven Lösbarkeit der Gleichung

$$P'(z) = \sum_{l=1}^{n} p_l (\sigma_l^1(z))' = 0$$

bezüglich der p_l erfüllt ist. Wird nämlich

$$(l+1)(1-z)^3(\sigma_l^1(z))' = l(1-z^{l+2}) - (l+2)(z-z^{l+1}) = \tau_l(z)$$

gesetzt, so gilt, wie man leicht nachrechnet,

$$\tau_2(e^{\frac{i\pi}{6}}) = (3-2\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})\,i,$$

$$\tau_4(e^{\frac{i\pi}{6}}) = 8-6\sqrt{3},$$

$$\tau_{15}(e^{\frac{i\pi}{6}}) = \left(\frac{13}{2}-\sqrt{3}\right) + \left(\frac{17}{2}\sqrt{3}-16\right)i$$

und die entsprechenden Halbstrahlen liegen nicht in einer Halbebene. Daraus folgt die Existenz von Polynomen (2), deren Derivierte im Kreise $|z| < 1$ nicht wurzelfrei ist.

(Eingegangen am 5. Juni 1937; umgearbeitet am 18. August 1939.)

Ein Problem über mehrere ebene Bereiche.

Von G. SZEKERES in Shanghai.

Herr G. GRÜNWALD vermutete den folgenden Satz:

Es seien in der Ebene k Bereiche gegeben, deren Projektion auf eine beliebige Gerade eine die Zahl d nicht übertreffende Gesamtlänge hat[1]). *Dann ist die Summe der Flächeninhalte der Bereiche nicht größer als* $\frac{\pi}{4} d^2$.

Wir wollen für diesen Satz einen elementaren Beweis bringen.

Zuerst beweisen wir den folgenden

Hilfssatz. *Es sei in der Ebene ein konvexes n-Eck mit den Seiten* $a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ *gegeben. Es sei ferner* h_i *der Abstand der Seite* a_i *von der zu ihr parallelen Stützgeraden und es sei endlich* J *der Inhalt des n-Ecks. Dann gelten die Ungleichungen*

$$\frac{1}{6} \sum a_i h_i \leqq J \leqq \frac{1}{4} \sum_i a_i h_i .$$

Das Gleichheitszeichen gilt in der ersten Ungleichung nur für die Dreiecke, in der zweiten Ungleichung nur für die Polygone, die einen Mittelpunkt haben.

Dieser Hilfssatz wurde schon (in etwas anderer Form) von RADEMACHER[2]) und ESTERMANN[3]) bewiesen. Sie betrachteten den Vektorenbereich W eines beliebigen konvexen Bereiches und bewiesen für dessen Flächeninhalt $J(W)$ mit Hilfe des Brunn—Min-

[1]) Mehrfach projizierte Geradenstücke werden dabei nur einfach gerechnet.

[2]) H. RADEMACHER, Über den Vektorenbereich eines konvexen ebenen Bereiches, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **34** (1925), S. 64—79.

[3]) TH. ESTERMANN, Zwei neue Beweise eines Satzes von Blaschke und Rademacher, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **36** (1927), S. 197—200; Über den Vektorenbereich eines konvexen Körpers, *Math. Zeitschrift*, **28** (1928), S. 471—475.

kowskischen Satzes die Ungleichungen

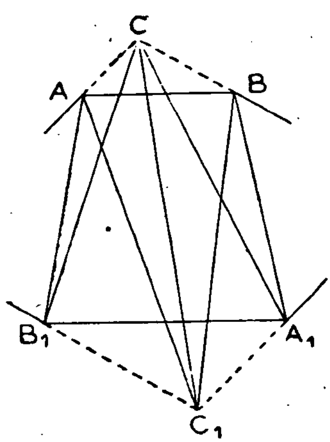
$$\frac{1}{6} J(W) \leqq J \leqq \frac{1}{4} J(W),$$

wo J den Flächeninhalt des gegebenen Bereiches bezeichnet. Es ist leicht einzusehen, daß bei einem ebenen Polygon $J(W)$ gleich $\sum_i a_i h_i$ ist, so daß die beiden Sätze identisch sind. In unserer Form läßt sich aber der Satz ohne Benutzung des Brunn—Minkowskischen Satzes beweisen. Die erste Hälfte dieser Ungleichungen werden wir später nicht gebrauchen, doch geben wir auch hierfür einen einfachen Beweis.

Es sei s_i der Abstand des Schwerpunktes des Polygons von der Seite a_i. Nach einem Satze von MINKOWSKI[4]) gilt die Ungleichung $s_i \geqq \frac{1}{3} h_i$. Gleichheit gilt nur im Falle eines Dreiecks. Verbinden wir den Schwerpunkt mit den Ecken des Polygons und summieren wir die Inhalte der so entstandenen Dreiecke, so erhalten wir unmittelbar die Ungleichung

$$J = \frac{1}{2} \Sigma a_i s_i \geqq \frac{1}{6} \Sigma a_i h_i.$$

Der folgende einfache Beweis der zweiten Ungleichung stammt von Herrn D. LÁZÁR. Wir beweisen die Ungleichung zuerst für solche Polygone, die aus lauter parallelen Seitenpaaren bestehen. Das einfachste unter solchen Polygonen ist das Parallelogramm. Für dieses gilt offenbar die Gleichung $J = \frac{1}{4} \Sigma a_i h_i$. Wir wenden nun vollständige Induktion in Bezug auf die Anzahl der Seitenpaaren an. Wir lassen in einem $2n$-Eck das parallele Seitenpaar AB und A_1B_1 weg und bringen die mit ihnen benachbarten Seiten zum Schnitt. Die Schnittpunkte seien C und C_1. So bekommen wir ein $(2n-2)$-Eck, dessen Inhalt mit J_1



[4]) Siehe z. B. bei ESTERMANN, *Math. Zeitschrift*, a. a. O., Hilfssatz 3, wo der Satz elementar bewiesen wird.

und die entsprechende Summe $\Sigma a_i h_i$ mit Σ_1 bezeichnet seien. (Siehe Figur.) Infolge der Induktionsannahme hat man

(1) $$J_1 \leqq \frac{1}{4}\Sigma_1.$$

Wenn die Summe $\Sigma a_i h_i$ des ursprünglichen Bereiches mit Σ bezeichnet wird, dann gilt, wie wir zeigen wollen, die Ungleichung

(2) $$J_1 - J \geqq \frac{1}{4}(\Sigma_1 - \Sigma).$$

Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind einander ähnlich. Es sei $AB = a$, $A_1B_1 = \varrho a$, es sei ferner m die zu AB gehörige Höhe von ABC. Dann hat man offenbar die Gleichung

$$J_1 - J = \frac{am}{2} + \frac{\varrho^2 am}{2} = \frac{am}{2}(1+\varrho^2).$$

Bezeichnen wir den Abstand der Parallelen AB und A_1B_1 mit h, den Abstand der Parallelen AC und A_1C_1 mit h_1 und den Abstand der Parallelen BC und B_1C_1 mit h_2, so haben wir:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 - \Sigma &= \overline{B_1C_1}.h_2 + \overline{A_1C_1}.h_1 + \overline{AC}.h_1 + \overline{CB}.h_2 - \overline{AB}.h - \overline{A_1B_1}.h = \\ &= 2(J(B_1C_1A_1C) + J(BCAC_1)) - \overline{AB}.h - \overline{A_1B_1}.h = \\ &= \varrho a(m+h+\varrho m) + a(m+h+\varrho m) - ah - \varrho ah = am(1+\varrho)^2.\end{aligned}$$

Da aber offenbar

(3) $$\frac{am}{2}(1+\varrho^2) \geqq \frac{1}{4}am(1+\varrho)^2$$

ist, so gilt wirklich (2). Aus (1) und (2) erhalten wir endlich

(4) $$J \leqq \frac{1}{4}\Sigma.$$

Derselbe Beweis gilt auch für ein beliebiges Polygon, wenn man, falls die Seite AB kein paralleles Paar hat, $\varrho = 0$ setzt. Da in (3) offenbar nur dann Gleichheit besteht, wenn ϱ gleich 1 ist, so folgt, daß in (4) das Gleichheitszeichen nur im Falle der Polygone mit Mittelpunkt gültig ist.

Zurückkehrend zu unserm eigentlichen Problem, bemerken wir zuerst, daß es genügt, den Satz für den Fall lauter konvexer Bereiche zu beweisen. Denn nehmen wir statt eines jeden Bereiches den kleinsten ihn enthaltenden konvexen Bereich (und, wenn zwei dieser konvexen Hüllen gemeinsame Punkte haben, nehmen wir ihre gemeinsame konvexe Hülle, usw., bis wir nur paarweise punktfremde konvexe Bereiche erhalten), dann ist die Projektion der neuen konvexen Bereiche in eine jede Richtung genau dieselbe, wie diejenige der gegebenen Bereiche; andererseits wird der Gesamtflächeninhalt nicht verkleinert. Wenn also der Satz für konvexe Bereiche gilt, dann gilt er auch für die gegebenen Bereiche.

Es seien also k (abgeschlossene) konvexe Bereiche gegeben, die paarweise punktfremd sind, und deren Projektion auf jede Gerade eine die Zahl d nicht übertreffende Gesamtlänge hat. Es ist zu beweisen, daß ihr Gesamtflächeninhalt nicht größer als $\frac{\pi}{4} d^2$ ist. Wir wollen zum Beweis eine vollständige Induktion anwenden.

Für $k=1$ ist der Satz leicht einzusehen. Bekanntlich ist das arithmetische Mittel der Länge der Projektionen eines konvexen Bereichs gleich $\frac{U}{\pi}$, wo U den Umfang des Bereiches bedeutet. Da dieses Mittel höchstens gleich d sein kann, so hat man $\frac{d^2\pi}{4} \geqq \frac{U^2}{4\pi}$. Nach der isoperimetrischen Ungleichung ist aber stets $J \leqq \frac{U^2}{4\pi}$, so daß die behauptete Ungleichung wirklich statthat. — Etwas umständlicher läßt sich dieser Fall auch elementar, ohne den Begriff der mittleren Projektion beweisen.

Ist $k>1$, so unterwerfen wir sämtliche Bereiche folgender Vergrößerung: Den Abstand h der Stützpunkte zweier parallelen Stützgeraden nennen wir einen Durchmesser des Bereiches. Wir verlängern nun jeden Durchmesser h (in jedem Bereiche) in beiden Richtungen durch die Länge λh. Die Endpunkte der verlängerten Durchmesser bilden wieder konvexe Kurven, wir betrachten die Inneren dieser Kurven. Dieses Verfahren, das jeden Bereich durch einen größeren ersetzt, nennen wir die λ-Vergrößerung der Bereiche. Ist λ genügend klein (was wir annehmen wollen), so sind auch die vergrößerten Bereiche paarweise punktfremd.

Es sei d_i die Länge der Projektion des i-ten Bereiches auf eine Gerade G, dann ist die Länge d_i' der Projektion des λ-vergrößerten Bereiches auf dieselbe Gerade gleich $d_i(1+2\lambda)$, die λ-Vergrößerung verschiebt nämlich die Tangenten an den Endpunkten der Durchmesser offenbar parallel mit sich selbst.

Es sei nun d_G die Gesamtlänge der Gesamtprojektion auf die Gerade G. Diese Gesamtprojektion besteht aus mehreren isolierten Stücken. Bei der λ-Vergrößerung kann die Länge eines solchen Stückes höchstens auf ihre $(1+2\lambda)$-fache wachsen, da die Vergrößerung eines Stückes die Vergrößerung der größten ihm beitragenden Einzelprojektion nicht übertreffen kann. Also kann auch die Länge d'_G der Gesamtprojektion der λ-vergrößerten Bereiche $d_G(1+2\lambda)$ nicht übertreffen:

$$d'_G \leqq (1+2\lambda)\, d_G. \tag{5}$$

Es bedeute nun J' den Gesamtflächeninhalt der λ-vergrößerten Bereiche. Wir behaupten, daß die folgende Ungleichung gilt:

$$J' \geqq J(1+2\lambda)^2. \tag{6}$$

Betrachten wir zuerst ein Polygon, das lauter parallele Seitenpaare hat. Fassen wir das Seitenpaar AB, CD, von den Längen a und b, ins Auge. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß die Vektoren AB und CD gleichgerichtet sind. Der Durchmesser AD vergrößert sich zu $A'D'$, der Durchmesser BC zu $B'C'$. Die Länge von $A'B'$ ist gleich $a+\lambda(a+b)=a'$, diejenige von $C'D'$ ist gleich $b+\lambda(a+b)=b'$. Die zu diesem Seitenpaar gehörige Zunahme des Flächeninhalts ist also gleich

$$J(ABB'A')+J(CDD'C')=\frac{a+a'}{2}\lambda h+\frac{b+b'}{2}\lambda h,$$

wenn man den Abstand zwischen AB und CD mit h bezeichnet. Dieser Ausdruck ist aber nach dem Vorigen gleich $\lambda(\lambda+1)h(a+b)$. Man erhält also für die Zunahme des Flächeninhalts eines λ-vergrößerten konvexen Polygons den Wert

$$\lambda(\lambda+1)\,\Sigma h_i(a_i+b_i),$$

wo die Summe auf alle parallelen Seitenpaaren zu erstrecken ist. Da aber nach dem Hilfssatz für den ursprünglichen Flächeninhalt J des Polygons die Ungleichung $\Sigma h_i(a_i+b_i)\geqq 4J$ gilt, so hat man für den vergrößerten Flächeninhalt J' die Ungleichung

$$J'\geqq J+\lambda(\lambda+1)4J=J(1+2\lambda)^2.$$

Der Beweis gilt, wie man es leicht einsieht, auch im Falle allgemeinerer Polygone (dieser Fall kann ja als Grenzfall des betrachteten angesehen werden, wenn man zuläßt, daß in den parallelen Seitenpaaren eine Seite auch von der Länge 0 sein darf).

Daß die Ungleichung (6) auch für einen beliebigen abgeschlossenen konvexen Bereich gilt, kann man mittels Approximation durch Polygone einsehen.

Nun wählen wir λ so groß, daß zwei von den k gegebenen Bereichen sich berühren. Wir wollen nun diese sich berührende Bereiche durch ihre konvexe Hülle ersetzen. Es kann dann vorkommen, daß diese konvexe Hülle auch mit anderen der gegebenen Bereiche gemeinsame Punkte hat, dann wollen wir die gemeinsame konvexe Hülle aller dieser Bereiche nehmen; und so fahren wir fort, bis (nach höchstens k Schritten) das Verfahren ein Ende nimmt. Dann haben wir statt den k gegebenen Bereichen weniger konvexe Bereiche vor uns, für die also, nach der Induktionsvoraussetzung, der Satz gilt. Da aber dieser Ersetzungsprozess alle Projektionen ungeändert läßt und da er den Gesamtflächeninhalt offenbar nur vergrößern kann, so gilt der Satz notwendig auch für die ursprünglichen Bereiche.

(Eingegangen am 5. Oktober 1938; umgearbeitet am 12. August 1939.)

Über ein geometrisches Extremalproblem.

Von BÉLA V. SZ. NAGY in Szeged.

1. Herr SZEKERES hat in der vorstehenden Arbeit einen Beweis für einen schon von Herrn G. GRÜNWALD vermuteten Satz mitgeteilt[1]). Seine Methode beruht auf der Anwendung eines speziellen Vergrößerungsprozesses für konvexe Figuren. Wir wollen hier einen anderen Beweis skizzieren, der gleichzeitig mit demjenigen von Herrn SZEKERES gefunden wurde. Dieser Beweis stützt sich auf einen Verjüngungsprozeß, der schon von Herrn F. RIESZ (zur Behandlung eines anderen Problems) benützt wurde[2]) und auf dessen Anwendbarkeit auf das Grünwaldsche Problem er uns freundlicherweise aufmerksam machte.

Wir beweisen den Satz zugleich in der folgenden verschärften Form:

Satz. *Es sei in der Ebene eine aus endlich vielen Kontinuen bestehende Menge M gegeben, $|M|$ sei ihr (zweidimensionales) Maß. M_α sei die (orthogonale) Projektion von M auf eine Gerade der Richtung α, $|M_\alpha|$ bezeichne das (lineare) Maß von M_α. Es sei ferner $\mathfrak{A}(|M_\alpha|)$ das arithmetische Integralmittel von $|M_\alpha|$ gebildet über $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$, es sei endlich $m = \min\limits_{\alpha} |M_\alpha|$. Dann gilt die Ungleichung*

$$|M| \leqq \frac{\pi}{4} \{[\mathfrak{A}(|M_\alpha|)]^2 - [\mathfrak{A}(|M_\alpha|) - m]^2\} = \frac{\pi}{4} [2\mathfrak{A}(|M_\alpha|) m - m^2],$$

in der die Gleichheit nur dann besteht, wenn M eine rennbahnförmige Menge[3]) ist.

---

[1]) G. SZEKERES, Ein Problem über mehrere ebene Bereiche, *diese Acta,* **9** (1939), S. 247—252.

[2]) F. RIESZ, Sur une inégalité intégrale, *Journal of the London Math. Society,* **5** (1930), S. 162—168.

[3]) D. h. die Menge derjenigen Punkte, deren Abstand von einer Strecke (oder von einem Punkte) $\leqq r$ ist (r gegeben, > 0).

Wir gebrauchen den folgenden

Hilfssatz. *Es sei S eine aus endlich vielen Bogen bestehende Teilmenge einer konvexen Kurve. S_α sei die Projektion von S auf eine Gerade der Richtung α. Wenn $|S|$ das Bogenmaß von S und $|S_\alpha|$ das lineare Maß von S_α bezeichnen, dann gilt die Ungleichung*

$$|S| \leqq \pi \mathfrak{A}(|S_\alpha|),$$

in der die Gleichheit nur dann besteht, wenn S die ganze Kurve ist.

Da S auf einer konvexen Kurve liegt, kann ein Punkt von S_α das Bild von höchstens zwei verschiedenen Punkten von S sein[4]). S'_α sei die Menge derjenigen Punkte von S_α, die das Bild zweier verschiedener Punkte von S sind, $|S'_\alpha|$ sei ihr Maß. Besteht S nur aus Geradenstücken, so kann man die Beziehung

$$(1) \qquad |S| = \frac{\pi}{2}[\mathfrak{A}(|S_\alpha|) + \mathfrak{A}(|S'_\alpha|)]$$

leicht rechtfertigen. Durch Polygonapproximation kann man dann (1) für beliebiges S einsehen. Ist S die ganze konvexe Kurve, so ist offenbar $\mathfrak{A}(|S_\alpha|) = \mathfrak{A}(|S'_\alpha|)$. Ist aber S nicht die ganze Kurve, so gibt es immer ein Intervall $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, so daß für diese α S'_α eine echte Teilmenge von S_α ist; folglich ist $\mathfrak{A}(|S'_\alpha|) < \mathfrak{A}(|S_\alpha|)$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Im Beweis des Satzes darf man offenbar annehmen, daß M aus *konvexen* Figuren besteht, ihre Anzahl sei k.

C sei die kleinste konvexe Kurve, die M einschließt; $C(t)$ sei ihre im Abstand t verlaufende innere Parallelkurve. $S(t)$ sei der gemeinsame Teil von $C(t)$ und M, $M(t)$ sei die Menge derjenigen Punkte von M, die nicht außerhalb $C(t)$ liegen.

Es folgt aus dem Hilfssatze, daß

$$(2) \qquad |S(t)| \leqq \pi \mathfrak{A}(|S_\alpha(t)|)$$

gilt. Man hat also um so mehr die Ungleichung

$$(3) \qquad |S(t)| \leqq \pi \mathfrak{A}(|M_\alpha(t)|).$$

Lassen wir t von 0 an wachsen, so werden einige der konvexen Figuren immer mehr verjüngt, für einen Wert $t = t_0$ wird endlich eine Figur (oder zugleich mehrere Figuren) auf einen

---

4) Enthält S auch Geradenstücke, so gilt dies allerdings nur dann, wenn die Richtung α auf kein Geradenstück orthogonal ist. In der Bildung von Integralmitteln können wir aber diese (höchstens abzählbar unendlich viele) Richtungen α außer Acht lassen.

Punkt, oder auf eine Strecke zusammenschrumpfen. Für $0 \leqq t \leqq t_0$ hat man offenbar

$$(4) \qquad |M_\alpha(t)| \leqq |M_\alpha| - 2t.$$

Ferner gilt die Beziehung

$$(5) \qquad -\frac{d|M(t)|}{dt} = |S(t)|.$$

Durch Integration folgt dann aus (3)—(5) die Ungleichung

$$(6) \qquad |M| - |M(t_0)| \leqq \pi[\mathfrak{A}(|M_\alpha|)\, t_0 - t_0^2].$$

Ist $k = 1$, so ist t_0 gleich dem Radius r des größten eingeschriebenen Kreises und $|M(t_0)|$ ist gleich 0. (6) liefert also für $k = 1$ den Satz sogar in noch schärferer Form, da $r \leqq \frac{m}{2}$ ist[5]). Da in (2) und (3) in diesem Falle das Gleichheitszeichen besteht, gilt in (6) die Gleichheit dann, wenn sie in (4) für alle t statthat. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn M rennbahnförmig ist.

Nehmen wir nun an, daß der Satz für Mengen, die aus weniger als k_0 ($k_0 \geqq 2$) konvexen Figuren bestehen, schon bewiesen ist. Dann gilt er auch dann, wenn einer solchen Menge noch Punkte und Strecken hinzugefügt werden. Besteht M aus k_0 nichtausgearteten Figuren, so ist $M(t_0)$ eine Menge dieser Art. Es gilt also (infolge der Induktionsannahme) die Ungleichung

$$(7) \qquad |M(t_0)| \leqq \frac{\pi}{4}[2\mathfrak{A}(|M_\alpha(t_0)|)\, m(t_0) - m^2(t_0)]$$

mit $m(t_0) = \min\limits_{\alpha} |M_\alpha(t_0)|$. Aus (4), (6) (wo jetzt das Ungleichheitszeichen gilt) und (7) folgt dann

$$|M| < \frac{\pi}{4}[2\mathfrak{A}(|M_\alpha|)(m(t_0) + 2t_0) - (m(t_0) + 2t_0)^2]$$

und hieraus, wegen $m(t_0) + 2t_0 \leqq m$ (vgl. (4)), die Gültigkeit des Satzes auch für M.

2. Der Teil des Beweises, wo man aus der Gültigkeit des Satzes für $k < k_0$ auf seine Gültigkeit für $k = k_0$ schließt, könnte auch mit der Vergrößerungsmethode des Herrn SZEKERES geführt

---

[5]) Da für eine konvexe Figur M der Umfang L gleich $\pi\mathfrak{A}(|M_\alpha|)$ ist, so haben wir die von BONNESEN stammende Ungleichung $|M| \leqq rL - \pi r^2$ erhalten. vgl. T. BONNESEN und W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper* (Berlin, 1934; in folgendem als „BF" zitiert), S. 82, 112—113.

werden. Wir wollen hier zeigen, daß man mit einer Verallgemeinerung der Vergrößerungsmethode für den n-dimensionalen Raum R_n den folgenden Satz beweisen kann.

Satz. *Es sei M eine aus endlich vielen Kontinuen bestehende Menge in R_n ($n \geqq 2$). M_ω sei die Projektion von M auf eine Gerade der Richtung ω, $|M_\omega|$ sei ihr lineares Maß und $\mathfrak{A}(|M_\omega|)$ sei das arithmetische Integralmittel von $|M_\omega|$ über alle Richtungen ω in R_n. Dann besteht für das (n-dimensionale) Maß $|M|$ von M die Ungleichung*

$$|M| \leqq \frac{\varkappa_n}{2^n}[\mathfrak{A}(|M_\omega|)]^n,$$

wo $\varkappa_n$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bedeutet. Die Gleichheit gilt nur dann, wenn M eine (n-dimensionale) Kugel ist.

Beim Beweis kann man wiederum annehmen, daß M aus *konvexen* Körpern besteht, ihre Anzahl sei k.

Für $k=1$ ist der Satz bekannt[6]).

Es sei der Satz für $k<k_0$ ($k_0 \geqq 2$) schon bewiesen, und betrachten wir nun den Fall $k=k_0$. Wir dürfen offenbar annehmen, daß diese k_0 konvexen Körper alle nichtausgeartet sind. Wir gebrauchen für sie die vektorielle Schreibweise $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_{k_0}$ (der Anfangspunkt 0 sei beliebig, aber fest gewählt)[7]).

Es sei $\mathfrak{K}_i'$ das Spiegelbild von $\mathfrak{K}_i$ in Bezug auf 0. $\mathfrak{K}_i^* = \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_i + \mathfrak{K}_i')$ ist dann der Zentralsymmetrisierte von $\mathfrak{K}_i$. Für die Volumina gilt die Ungleichung[8])

(8) $$V(\mathfrak{K}_i^*) \geqq V(\mathfrak{K}_i) \qquad (i=1, 2, \ldots, k_0).$$

Ist $\lambda \geqq 0$, so bedeute $\mathfrak{K}_i(\lambda)$ die Linearkomposition $\mathfrak{K}_i + 2\lambda\mathfrak{K}_i^*$. $\mathfrak{R}_i(t) = (1+2\lambda)^{-1}\mathfrak{K}_i(\lambda)$ ist dann eine lineare Schar mit dem Scharparameter $t=(1+2\lambda)^{-1}$, und man hat $\mathfrak{R}_i(0)=\mathfrak{K}_i^*$, $\mathfrak{R}_i(1)=\mathfrak{K}_i$. Nach dem Brunn-Minkowskischen Satz[9]) gilt die Beziehung

$$\sqrt[n]{V(\mathfrak{R}_i(t))} \geqq (1-t)\sqrt[n]{V(\mathfrak{K}_i^*)} + t\sqrt[n]{V(\mathfrak{K}_i)},$$

also, wegen (8),

$$V(\mathfrak{R}_i(t)) \geqq V(\mathfrak{K}_i).$$

---

[6]) Er stammt von P. Urysohn, vgl. BF, S. 109.

[7]) Für die vektorielle Schreibweise, sowie für die Bildung von Linearkompositionen konvexer Körper verweisen wir auf BF.

[8]) Vgl. BF, S. 73.

[9]) Vgl. BF, S. 88.

Hieraus folgt endlich die Ungleichung

(9) $$V(\mathfrak{K}_i(\lambda)) \geqq (1+2\lambda)^n \, V(\mathfrak{K}_i).$$

Es sei λ_0 der kleinste Wert von λ, für den bereits zwei Körper einander berühren. Für die vergrößerte Menge $M(\lambda_0)$ gilt schon der Satz (gleicher Schluß, wie bei Herrn SZEKERES):

$$|M(\lambda_0)| \leqq \frac{\varkappa_n}{2^n} [\mathfrak{A}(|M_\omega(\lambda_0)|)]^n,$$

oder, durch $(1+2\lambda_0)^n$ dividiert,

$$(1+2\lambda_0)^{-n} |M(\lambda_0)| \leqq \frac{\varkappa_n}{2^n} [\mathfrak{A}((1+2\lambda_0)^{-1} |M_\omega(\lambda_0)|)]^n.$$

Die linke Seite ist hier $\geqq |M|$ (nach (9)). Die rechte Seite ist aber $< \frac{\varkappa_n}{2^n} [\mathfrak{A}(|M_\omega|)]^n$, da $|M_\omega(\lambda_0)| \leqq (1+2\lambda_0)\, |M_\omega|$ ist (gleicher Schluß, wie bei Herrn SZEKERES) und da es Richtungsbereiche gibt, für die $|M_\omega(\lambda_0)|$ diese Höchstgrenze *nicht* erreicht. Damit ist die Gültigkeit des Satzes auch für M gezeigt.

(Eingegangen am 20. August 1939.)

Sur le problème traité par MM. Szekeres et B. de Sz. Nagy.

Par J. FAVARD à Grenoble.

1. Nous allons montrer dans ce travail que les propriétés des corps convexes, auxquelles se réfèrent les mémoires précédents de MM. SZEKERES et B. DE SZ. NAGY[1]), peuvent être présentées sous une forme un peu plus synthétique, les ramenant à une des inégalités isopérimétriques classiques pour un corps que nous allons construire.

La méthode employée a, semble-t'il, l'avantage d'indiquer une voie où des généralisations possibles, relatives aux moyennes des aires des ombres de plusieurs corps convexes (et non plus aux largeurs), doivent être cherchées. — On m'excusera de ne rien présenter de plus précis sur ce dernier sujet: la date et le lieu indiqués à la fin expliquent suffisamment, je crois, cette carence.

2. Prenons, dans l'espace à trois dimensions par exemple, n corps convexes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de volumes $V_1, V_2, \ldots, V_n$; soit B_i^d la largeur du corps C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dans la direction de projection d.

Désignons maintenant par $C_{i,j}$ $(i \neq j)$ l'enveloppante convexe des deux corps C_i et C_j, par $C_{i,j,k}$ l'enveloppante convexe des trois corps C_i, C_j, C_k $(i \neq j \neq k)$ et ainsi de suite; soient $B_{i,j}^d, B_{i,j,k}^d, \ldots$, les largeurs de ces corps dans la direction d. A partir d'une origine fixe O, construisons les domaines vectoriels $C_i^V, C_{i,j}^V, \ldots$ des corps $C_i, C_{i,j}, \ldots$; puis, en prenant pour centre O, les corps:

(1) $$\sum C_i^V,\ \sum' C_i^V + \sum'' C_{i,j}^V, \ldots, C_{1,2,\ldots,n}^V$$

1) G. SZEKERES, Ein Problem über mehrere ebene Bereiche, *ces Acta*, 9 (1940), pp. 247—252; B. VON SZ. NAGY, Über ein geometrisches Extremalproblem, *ces Acta*, 9 (1940), pp. 253—257.

où, dans chacune des sommations ci-dessus, chaque indice figure une fois et une seule, et où toutes les sommations possibles sont à effectuer[2]).

La partie commune de tous les corps précédents est un nouveau corps convexe Γ, centré en O, de volume V; nous allons montrer que:

(2) $$V \geqq 8 \sum_1^n V_i.$$

3. Procédons par récurrence; le résultat est en effet connu pour un seul corps convexe, car il s'agit alors d'une propriété du corps vectoriel; nous le supposons donc vrai pour $(n-1)$ corps.

Suivant M. Szekeres, considérons le corps:

$$C_i^\lambda = C_i + \lambda C_i^V$$

de largeur $B_i^d(1+2\lambda)$ dans la direction d, et dont le corps vectoriel construit à partir de l'origine est: $C_i^V(1+2\lambda)$.

Construisons aussi les corps vectoriels des enveloppantes convexes des corps C_i^λ, deux à deux, trois à trois, etc. ...; puis considérons les sommes analogues à (1) et la partie commune Γ^λ à tous ces corps.

Lorsque nous passons des corps $C_{i,j}, \ldots$ aux enveloppantes des corps $(C_i^\lambda, C_j^\lambda), \ldots$, nous multiplions leurs largeurs $B_{i,j}^d, \ldots$ dans une direction d, par une quantité non supérieure à $(1+2\lambda)$; il s'ensuit donc que le corps Γ^λ est à l'intérieur du corps $\Gamma(1+2\lambda)$ et que, quant à son volume V^λ, on a:

(3) $$V^\lambda \leqq V(1+2\lambda)^3.$$

4. Lorsque λ est tel que deux corps C_i^λ, au moins, viennent en contact, l'hypothèse de récurrence donne, en remarquant que le volume d'une enveloppante n'est pas inférieur à la somme des volumes des corps enveloppés:

(4) $$V^\lambda \geqq 8 \sum_1^n V_i^\lambda$$

où V_i^λ désigne le volume du corps C_i^λ.

Or, les inégalités classiques de Minkowski donnent immédiatement:

(5) $$V_i^\lambda \geqq V_i(1+2\lambda)^3.$$

---

[2]) Ainsi, dans le cas de trois corps C_1, C_2, C_3, nous considérons les corps: $C_1^V + C_2^V + C_3^V$; $C_1^V + C_{2,3}^V$; $C_2^V + C_{3,1}^V$; $C_3^V + C_{1,2}^V$; $C_{1,2,3}^V$.

La comparaison des inégalités (3) à (5) donne:

$$V(1+2\lambda)^3 \geqq V^\lambda \geqq 8(1+2\lambda)^3 \sum_1^n V_i.$$

L'inégalité (2) en découle immédiatement.

5. Pour terminer, il nous suffit de remarquer que la largeur du corps Γ dans une direction d, ne dépasse jamais le double de la somme des segments de projection des corps C_i dans la direction d.

Si l'on écrit alors l'inégalité isopérimétrique entre le volume et la moyenne des largeurs du corps Γ, on obtient l'inégalité qui fait l'objet des travaux précédents. On a aussi sans peine la forme améliorée et on éclaircit facilement le cas d'égalité.

AUX ARMÉES
Octobre 1939.

(Reçu le 20 novembre 1939)

Bibliographie.

Ernst Lindelöf, Einführung in die höhere Analysis zum Selbststudium und für studierende der ersten Semester, deutsch von EGON ULLRICH, IX + 526 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

Verfasser war — heißt es im Vorwort — bei der Ausarbeitung dieses Lehrbuchs bestrebt, einen stetigen Übergang von den Schulstudien zu den Universitätsstudien zu vermitteln. Daß er trotz dieser Zielsetzung im ersten Kapitel von Definitionen allgemeiner Begriffe (Funktionsbegriff, Stetigkeit, Maxima und Minima, Umkehrfunktion) ausgeht und die elementaren Funktionen erst nachher kurz behandelt werden: findet seinen Grund wahrscheinlich in einer ausführlichen Behandlung dieser Funktionen in den finnländischen Mittelschulen. Vom mitteleuropäischen Gesichtspunkte aus wäre es nach Ansicht des Referenten zu jenem Zweck wünschenswert, eine direkte Behandlung der elementaren Funktionen vorwegzunehmen, wodurch der Leser fast alles *durchleben* könnte, worum es sich später in der allgemeinen Theorie handelt. Das kann sehr gut vorgenommen werden, wie es Referent aus eigener Erfahrung weiß.

Auf eine strenge Theorie der reellen Zahlen wird in diesem ersten Kapitel verzichtet, erst am Schluß der Darstellung, im achten Kapitel wird der reelle Zahlbereich streng aufgebaut, und der Beweis einiger früher vorgenommenen Sätze (z. B. der des Satzes von BOLZANO—WEIERSTRASS) nachgetragen. Dieses Vorgehen entspricht auch nach unserer Ansicht den pädagogischen Forderungen.

Das zweite Kapitel behandelt das abgekürzte Rechnen und die Fehlerabschätzung beim Rechnen mit Näherungswerten in musterhafter Weise.

Im dritten Kapitel wird ein Teil der Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche musterhaft dargestellt. Neben der Seite und Diagonale des Quadrats würde hier als zweites Beispiel für inkommensurable Strecken die Seite des regelmäßigen Zehnecks und der Umkreisradius sehr gut Platz finden.

Im vierten Kapitel folgen abstrakte Untersuchungen über die Grenzwerte von Funktionen und Zahlenfolgen, sowie über unendliche Reihen. Auch diesen allgemeinen Betrachtungen hätte Referent interessante und wichtige *Beispiele* vorangeschickt, wobei die nötigen Begriffe vom Leser miterworben werden. Ähnliches gilt für das fünfte Kapitel, in welchem die Differentiationsregel der Funktionen einer Veränderlichen hergeleitet, der Lagrangesche Mittelwertsatz bewiesen und einige Anwendungen dieses Satzes gegeben werden. Die Unterdrückung der Taylorschen Formel und ihrer Anwendungen könnte dem Leser im Laufe späterer Studien Schwierigkeiten bereiten.

Im sechsten Kapitel sind die Begriffe Länge, Flächeninhalt und Volumen logisch aufgebaut. Musterhaft ist die Darstellung der Lehre vom

Flächeninhalt ebener Polygone (ergänzt im Anhang II) auf Grund des Begriffes der *Zerlegungsgleichheit,* sowie die Lehre vom Polyedervolumen (ergänzt im Anhang III). Durch einige Inhalts- und Volumenbestimmungen wird die Integralrechnung vorbereitet, die den Gegenstand des siebenten Kapitels bildet. Dem Rahmen einer Einführung gemäß beschränkt sich die Darstellung auf stetige Funktionen einer Veränderlichen.

Das achte Kapitel enthält — wie schon erwähnt — den strengen Aufbau des reellen Zahlbereichs, im Anschluß an DEDEKIND. Endlich werden im neunten Kapitel die komplexen Zahlen eingefürt, die Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades musterhaft dargelegt, und auch der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen (nach ARGAND—CAUCHY).

Trotz unserer kritischen Bemerkungen, können wir den Studierenden der Anfangssemester dieses schöne Buch als zuversichtlichen Führer warm empfehlen.

P. v. Szász.

Friedrich Schilling, Pseudosphärische, hyperbolisch-sphärische und elliptisch-sphärische Geometrie, VIII + 240 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

Das vorliegende Werk will neue und behagliche Wege zum Aufbau der nichteuklidischen Ebenen schaffen.

Der erste Teil behandelt die Geometrie auf der Pseudosphäre

$$X=\varrho\cos\varphi,\quad Y=\varrho\sin\varphi,\quad Z=\varrho\log\frac{r+\sqrt{r^2-\varrho^2}}{r}-\sqrt{r^2-\varrho^2}=f(\varrho).$$

Außer den ∞^2 reellen Punkte der Fläche ($\varrho\leqq r$) werden auch die ∞^2 Punkte der Fläche betrachtet, für die $\varrho>r$ ist. Die Abbildung der Pseudosphäre auf die euklidische Ebene mit hyperbolischer Maßbestimmung macht den Vergleich der pseudosphärischen Geometrie mit der Bolyaischen Geometrie der Ebene sehr anschaulich.

Im zweiten Teile wird die Geometrie auf der Kugel $X^2+Y^2+Z^2+$ $+r^2=0$ mit imaginärem Halbmesser untersucht. Von den ∞^4 Punkten dieser imaginären Kugel werden ∞^2 Punkte ausgewählt, für welche X, Y und iZ (<0) reell sind. Diese Punkte bilden den „Z-imaginären Kugelteil". Die ∞^2 Punkte der imaginären Kugel, für welche iX, iY und Z (<0) reell sind, bildet den „(X,Y)-imaginären Kugelteil". Beide Punktsysteme lassen sich reell abbilden und zwar auf die eine Schale eines zweischaligen gleichseitigen Rotationshyperboloids bzw. auf die eine Hälfte eines einschaligen gleichseitigen Rotationshyperboloids. Durch eine Zentralprojektion dieser Hyperboloide auf eine zur Drehachse senkrechte geeignete Ebene erhält man in der Ebene eine hyperbolische Maßbestimmung. Der Z-imaginäre Kugelteil läßt sich in die Pseudosphäre verbiegen.

Der dritte Teil enthält die elliptisch-sphärische Geometrie auf der reellen Halbkugel mit der Gleichung $X^2+Y^2+Z^2-r^2=0$ ($Z\geqq 0$). Durch Zentralprojektion dieser Halbkugel auf die Tangentialebene $Z=r$ erhält man in der Ebene eine elliptische Maßbestimmung.

Bei der Behandlung dieser Geometrien werden die verschiedenen Bewegungen, die geodetischen Linien, die geodetischen Kreise, die geodetischen Dreiecke und ihre Trigonometrie, der Umfang und der Inhalt der geodetischen Kreise und der Inhalt der geodetischen Dreiecke elementar und eingehend untersucht.

Wir hoffen mit dem Verfasser, daß dieses elementare Werk für die Bolyai-Lobatschefskijsche und für die Riemannsche Geometrie viele Freunde gewinnen wird.

Gy. (J.). v. Sz. Nagy.

Alfred Tarski, Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik, X + 166 S., Wien, J. Springer, 1937.

Verfasser wendet sich an einen Leser ohne besondere mathematische Bildung; es werden ja Stellen, die z. B. Vertrautheit mit den Gleichungen zweiten Grades voraussetzen, als beim ersten Studium zu übergehend mit Sternen bezeichnet. Sein Zweck ist, den Leser zwar nicht mit der Handhabung des symbolischen Kalküls oder mit tiefen beweistheoretischen Untersuchungen, so doch mit den grundlegenden Begriffsbildungen der mathematischen Logik und der Metamathematik vertraut zu machen; darunter auch mit solchen Feinheiten, wie z. B. Unterscheidung eines Gedankendinges von seiner Bezeichnung. Verfasser erreicht diesen Zweck in ausgezeichneter Weise, trotz dem geringen Maß an geforderten Vorkenntnissen; zu lesen, wie, ist auch für den Fachmann ein interessantes Erlebnis.

L. Kalmár.

Th. Skolem, Diophantische Gleichungen (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, fünfter Band, Heft 4), IV + 130 S., Berlin, J. Springer, 1938.

Die Lehre der Diophantischen Gleichungen hat in den letzten Zeiten wesentliche Fortschritte erreicht. Man kann also die zusammenfassende Darstellung dieser Lehre von Th. Skolem mit Freude begrüßen. Während der T. Nagellsche Bericht: „L'analyse indéterminée de degré supérieur" (*Mémorial des Sciences Math.*, Fasc. XXXIX) nur die Diophantischen Gleichungen höheren Grades behandelt, stellt der Bericht von Th. Skolem die wesentlichen Fortschritten auch in der Theorie der linearen, multilinearen und quadratischen Diophantischen Gleichungen dar.

Es gibt sehr viele Untersuchungen über spezielle Diophantische Gleichungen. Dieser Bericht geht aber auf solche kaum ein, sondern faßt nur die allgemeinen Methoden zusammen. Der Bericht von Th. Skolem ist leicht lesbar, interessant, sogar anziehend und bietet eine klare Übersicht der Ergebnisse. Er zählt nicht nur die Sätze auf, sondern gibt oder deutet auch ihre Beweisführungen an.

Der Bericht gliedert sich in 5 Kapitel: I. Lineare Gleichungen. II. Gleichungen, die in einigen Unbekannten linear sind. III. Quadratische Gleichungen. IV. Multiplikative Gleichungen. V. Rationale Punkte auf algebraischen Kurven. VI. Punkte mit ganzzahligen Koordinaten auf algebraischen Gebilden, insbesondere ebenen Kurven.

Der Bericht schließt mit einem Literaturverzeichnis vom 8 Seiten. Es fehlen aber daraus und somit auch aus dem Berichte einige allgemeine Untersuchungen über Diophantische Gliechungen. Er enthält z. B. keine Arbeit von M. NOETHER, F. ENRIQUES und P. FATOU. Diese kleine Lücke des übrigens vorzüglichen Berichtes ist umsomehr bedauernswert, weil der Verfasser sie leicht hätte ausfüllen können, wenn der § 45 des Encyklopädieartikels von L. BERZOLARI: „Arithmetische Irrationalitäten, von denen die Transformationen algebraischer Kurven abhängen. Die Arithmetik auf den algebraischen Kurven." *(Encyklopädeie d. Math. Wiss.,* Bd. III, 2_2 B, S. 1947—1951) ihm bekannt gewesen wäre. Zur Ergänzung der dort befindlichen Literatur möchte ich nur die folgenden Arbeiten anführen: F. ENRIQUES, *Math. Annalen,* **49,** S. 1—23; **51,** S. 134—153 (nicht nur die Seite 148), und **52,** S. 449—456; J. PTÁSZYCKI, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung,* **18,** S. 1—3; JULIUS v. SZ. NAGY, *Math. und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn,* **30,** S. 339—340.

Diese kleine Lücke verringert kaum die vielen Verdienste des Berichtes. Wir können das Buch von TH. SKOLEM jedem, der sich für die Diophantischen Gleichungen interessiert, wärmstens empfehlen.

Gy. (J.) v. Sz. Nagy.

INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS

CAMBRIDGE, MASSACHUSETTS, U. S. A.

December 20, 1939.

The Organizing Committee announces with regret that the International Congress of Mathematicians which was scheduled to be held in Cambridge, Massachusetts, in September 1940, is postponed until a more favorable time. Due notice will be given of any arrangements to hold the Congress at a later date.

R. G. D. RICHARDSON,
Secretary.

„KULTURA" BUDAPEST, OFFERS

ACTA MATHEMATICA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE, Budapest

Mostly reprinted. Vols. 1—18. 1950—1967,
with HUNGARICA ACTA MATHEMATICA, Vol. 1, 1949,
and Supplement to vol. 5.

clothbound US $ 323.—; paperbound, resp. in original issues US $ 285.—

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM, Szeged

Mostly reprinted. Vols. 1—28, 1922—1967.

clothbound US $ 464.—; paperbound, resp. in original issues US $ 406.—

PUBLICATIONES MATHEMATICAE, Debrecen

Partly reprinted. Vols. 1—14, 1949—1967

clothbound US $ 210.—; paperbound, resp. in original issues US $ 182.—

ANNALES UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTIENSIS DE R. EÖTVÖS NOMINATAE,

Sectio Mathematica
Mostly reprinted. Vols. 1—9, 1958—1966, including memorial vol. 3/4, devoted to L. Fejér

clothbound US $ 90.—; paperbound US $ 72.—

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
(A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei)

Partly reprinted, published mostly in congress languages
Old Series: Vols. 1—3, 1952—1954 (all published)
New Series: Vols. 1—9, 1956—1964 (all published)

clothbound US $ 134.—; paperbound, resp. in original issues US $ 110.—

STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA, Budapest

Vols. 1—2, 1966—1967

clothbound US $ 28.—; in original issues US $ 24.—

60

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK, Budapest

Mostly reprinted (available in October, 1968). Vols. 1—50, 1892—1943, all published, with General Index

clothbound US $ 850.—, paperbound, resp. in original issues US $ 750.—

Prepublication price, valid until June 30, 1968:
clothbound US $ 800.—, paperbound, resp. in original issues US $ 700.—

Published by the L. Eötvös Mathematical and Physical Association in Hungarian, since 1920 contains also ample summaries in German language.
Mathematical editors: G. Rados (1892—1913), L. Fejér (1914—1932), D. König (1933—1943).

MATEMATIKAI LAPOK, Budapest

Partly reprinted. Vols. 1—18, 1949/50—1967

clothbound US $ 196.—, paperbound, resp. in original issues US $ 160.—

Mathematical quarterly, published by the Bolyai Mathematical Society in Hungarian, with summaries in congress languages.

SOVIET MATHEMATICAL REPRINTS

TRUDY SEMINARA PO VEKTORNOMU I TENZORNOMU ANALIZU

Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis. Mémoires du Séminaire pour l'Analyse vectorielle et tensorielle. Moscow-Leningrad, 1933—1966

clothbound US $ 240.—

Vols. 1—4 are published chiefly in Western languages. Vol. 4. contains the proceedings of the 1st International Conference for Tensor Differential Geometry, held in Moscow, 1934. Editors: Professor V. F. Kagan and P. K. Razhevskij

Single volumes of all above periodicals are available. Subscriptions to forthcoming volumes may be also entered.

„KULTURA"

Hungarian Trading Company for Books and Newpapers, Back issues Department,

BUDAPEST 62, P. O. B. 149, Hungary

Orders and inquiries should be sent to above address, directly, or through any international scientific bookseller.

EGYETEMI KÖNYVTÁR
FOLYÓIRATOK
SZEGED