ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS VII.

1934-1935

SZEGED

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA

LITTERARUM AC SCIENTIARUM

REGIAE UNIVERSITATIS HUNGARICAE FRANCISCO-JOSEPHINAE

SECTIO

SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

REDIGUNT

B. DE KERÉKJÁRTÓ — F. RIESZ.

TOMUS VII.

1934—1935.

SZEGED.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM ÉS
A ROTHERMERE-ALAP TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA:
AZ EGYETEM BARÁTAINAK EGYESÜLETE.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK

SZERKESZTIK:

KERÉKJÁRTÓ BÉLA — RIESZ FRIGYES.

VII. KÖTET.

1934—1935.

A kiadásért felelős:
Szőkefalvi-Nagy Béla
Eredeti kiadásról készült változatlan utánnyomás

Külföldi terjesztés:
KULTURA KÖNYV- ÉS HÍRLAP
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT
BUDAPEST 62,
P. O. B. 149
This book is a reproduction of the original, published
in Budapest

General Distributors:
KULTURA Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,
Hungary
Printed in Hungary, 1968

68-2041-Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat

INDEX — TARTALOM.

Tomus VII. — 1934/35. — VII. Kötet.

	Pag.
BOHR, H., Kopenhagen. Über einen Satz von J. Pál.	129—135
ERDÖS, P., und SZEKERES, G., Budapest. Über die Anzahl der Abelschen Gruppen gegebener Ordnung und über ein verwandtes zahlentheoretisches Problem.	95—102
GRÜNWALD, G., Szeged. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome.	207—221
HAJÓS, G., Budapest. Zum Mengerschen Graphensatz.	44— 47
JORDAN, CH., Budapest. Le théorème de probabilité de Poincaré, généralisé au cas de plusieurs variables indépendantes. .	103—111
KALMÁR, L., Szeged. Über einen Löwenheimschen Satz.	112—121
—— Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls. . . .	222—243
von KERÉKJÁRTÓ, B., Szeged. Ergänzung zu meinem Aufsatz: Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen.	58— 59
—— Über reguläre Abbildungen von Flächen auf sich.	65— 75
—— Über die regulären Abbildungen des Torus.	76— 84
de —— Démonstration nouvelle d'un théorème de Klein et Poincaré.	160—162
—— Sur l'indice des transformations analytiques.	163—172
von —— Bemerkung über reguläre Abbildungen von Flächen. . . .	206
LIPKA, ST., Szeged. Über die Descartessche Zeichenregel.	177—185
LORCH, E. R., Szeged. Functions of Self-Adjoint Transformations in Hilbert Space.	136—146
LÖWIG, H., Prag. Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl.	1— 33
von SZ. NAGY, J., Szeged. Über die Ovaloidschalen der Flächen vom Maximalindex.	244—248
NIELSEN, J., Kopenhagen. Einige Sätze über topologische Flächenabbildungen.	200—205
RIESZ, F., Szeged. Zur Theorie des Hilbertschen Raumes.	34— 38
—— Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert.	147—159
RÉDEI, L., Mezőtúr. Ein kombinatorischer Satz.	39— 43
SCHÖNBERGER, T., Rákoshegy. Ein Beweis des Petersenschen Graphensatzes.	51— 57
SIDON, S., Budapest. Bemerkungen über Fourier- und Potenzreihen.	85— 94
—— Eine Bemerkung über die Mittelwerte der Potenzreihen.	173—174
—— Über die Fourier-Konstanten der Funktionen der Klasse L_p für $p > 1$.	175—176

Pag.

SKOLEM, TH., Bergen. Ein Satz über Zählausdrücke. . . . . . . 193—199

SZEKERES, G., und ERDŐS, P., Budapest. Über die Anzahl der Abelschen Gruppen gegebener Ordnung und über ein verwandtes zahlentheoretisches Problem. . . . . 95—102

SZÜCS, A., Budapest. Sur les équations définissant une matrice en fonction algébrique d'une autre. . . . . 48— 50

BIBLIOGRAPHIE.

R. L. MOORE, Foundations of Point Set Theory. — GEORG CANTOR, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. — ERICH KAMKE, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. — HARALD BOHR, Fastperiodische Funktionen. — LUDWIG BIEBERBACH, Einleitung in die höhere Geometrie. — W. BREIDENBACH, Die Dreiteilung des Winkels. 60— 64

STACHÓ TIBOR, Felsőbb mennyiségtan [TIBOR STACHÓ, Mathématiques supérieures]. — R. ROTHE, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure I, IV. Aufl. — R. ROTHE, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure IV. 2. — TIBOR RADÓ, On the Problem of Plateau. — A. KOLMOGOROFF, Grundbegriffe der Wahrscheinlichtkeitsrechnung. — A. KHINTCHINE, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — C. C. MAC DUFFEE, The Theory of Matrices. — KAZIMIERZ BARTEL, Kotierte Projektionen. — W. SIERPIŃSKI, Hypothèse du continu. . . . . 122—128

WOYCIECHOWSKY JÓZSEF, Sipos Pál élete és matematikai munkássága [JOSEF V. WOYCIECHOWSKY, Paul Sipos]. — VERESS PÁL, Valós függvények [PAUL VERESS, Fonctions réelles]. — JOSEPH FELS RITT, Differential Equations from the Algebraic Standpoint. — STANISLAW SAKS, Théorie de l'intégrale. — ERNST STEINITZ, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. — DAVID HILBERT, Gesammelte Abhandlungen II. — F. BÜCKING, Das bizentrische Viereck. — LUDWIG BIEBERBACH, Vorlesungen über Algebra, II. Aufl. . . . . 186—192

FELIX KLEIN, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion. — CASIMIR KURATOWSKI, Topologie I. — KAZIMIERZ BARTEL, Malerische Perspektive I. — GILBERT AMES BLISS, Algebraic Functions. — H. SEIFERT und W. THRELFALL, Lehrbuch der Topologie. — D. HILBERT und P. BERNAYS, Grundlagen der Mathematik I. — A. HEYTING, Mathematische Grundlagenforschung: Intuitionismus, Beweistheorie. . . . . 249—256

Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl.

Von HEINRICH LÖWIG in Prag.

In dieser Abhandlung soll gezeigt werden, daß viele Sätze, welche man bisher nur für den Hilbertschen Raum bewiesen hat, auch für beliebige euklidische Räume, d. h. lineare metrische Räume, in denen ein inneres Produkt definiert ist, gelten, oder — mit andern Worten — daß die Voraussetzung der Separabilität des Raumes, die man beim Beweise dieser Sätze bisher zu machen pflegte, unwesentlich ist. Im ersten Paragraphen mögen zunächst einige Vorbemerkungen über allgemeine komplexe lineare metrische Räume vorausgeschickt werden. Im zweiten Pragraphen werden sodann Sätze über den komplexen Hilbertschen Raum angeführt, welche man auf beliebige komplexe euklidische Räume übertragen kann, ohne dabei den Wohlordnungssatz zu benützen. In § 3 werden schließlich noch einige Sätze über komplexe euklidische Räume unter Benützung des Wohlordnungssatzes abgeleitet.

§ 1. Vorbemerkungen über allgemeine komplexe lineare metrische Räume.

Eine Menge $\mathfrak{R}$ von Elementen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ heiße ein *komplexer linearer Raum,* wenn in ihr eine Addition $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$ und eine Multiplikation $a\mathfrak{x}$ mit einer komplexen Zahl a definiert sind und wenn diese beiden Rechenoperationen den Gesetzen der affinen Vektoralgebra genügen. (Elemente linearer Räume wollen wir im folgenden stets mit kleinen deutschen Buchstaben, komplexe Zahlen mit kleinen lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnen.)

Ist außerdem jedem Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ eine nicht negative reelle Zahl $|\mathfrak{x}|$ (absoluter Betrag des Elements $\mathfrak{x}$) derart zugeordnet, daß die Bedingungen

$$|\mathfrak{x}| > 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \neq 0 \tag{1}$$

(das Zeichen 0 soll auch das Nullelement von $\mathfrak{R}$ bedeuten)

$$|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}| \leq |\mathfrak{x}| + |\mathfrak{y}| \tag{2}$$

und

$$|a\mathfrak{x}| = |a| \cdot |\mathfrak{x}| \tag{3}$$

(a beliebig komplex) erfüllt sind, dann wollen wir $\mathfrak{R}$ einen *komplexen linearen metrischen Raum* nennen.

Definition 1. *Die Teilmenge $\mathfrak{M}$ des komplexen linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ heiße isomorph mit der Teilmenge $\mathfrak{N}$ des komplexen linearen metrischen Raumes $\mathfrak{S}$, wenn zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von der Beschaffenheit hergestellt werden kann, daß in dem Falle, daß die endlich vielen Elemente $\mathfrak{x}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ von $\mathfrak{M}$ beziehentlich den Elementen $\mathfrak{y}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ von $\mathfrak{N}$ zugeordnet sind, für beliebige komplexe Zahlen a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ die Gleichung*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \mathfrak{x}_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \mathfrak{y}_k \right| \tag{4}$$

besteht.

(Die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{R}$ von der Form $\sum_{k=1}^{n} a_k \mathfrak{x}_k$ mit $\mathfrak{x}_k \in \mathfrak{M}$ wollen wir in Anlehnung an HAUSDORFF **2**, S. 295 — siehe Literaturverzeichnis am Schlusse — die „lineare Hülle“ der Menge $\mathfrak{M}$ nennen. — Das Wort „isomorph“ wird hier in einem andern Sinne gebraucht als bei BANACH **1**, S. 180. Was hier isomorph heißt, nennt BANACH „äquivalent“.)

Definition 2. *Ist $\mathfrak{x}_0$ irgendein Element des komplexen linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ und ε eine beliebige positive reelle Zahl, dann heiße die Menge der Elemente $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$, welche der Ungleichung*

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| < \varepsilon \tag{5}$$

genügen, eine starke Umgebung der Stelle $\mathfrak{x}_0$.

Daher heißt $\mathfrak{x}_0$ starke Häufungsstelle einer Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$, wenn jede starke Umgebung von $\mathfrak{x}_0$ mindestens ein von $\mathfrak{x}_0$ verschiedenes Element von $\mathfrak{M}$ enthält. Die Menge $\mathfrak{M}$ heißt starkabgeschlossen, wenn sie alle ihre starken Häufungspunkte enthält.

Eine Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von Elementen von $\mathfrak{R}$ heißt stark konvergent gegen das Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$, in Zeichen

(6) $$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x},$$

wenn jede starke Umgebung von $\mathfrak{x}$ von einer gewissen Stelle angefangen alle Glieder der Folge $\mathfrak{x}_n$ enthält; das bedeutet aber:

(7) $$\lim_{n \to \infty} |\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}| = 0.$$

Offenbar ist eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ dann und nur dann starkabgeschlossen, wenn aus $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{M}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$ stets $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ folgt. Die Menge der starken Häufungsstellen der linearen Hülle einer Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ heiße — wieder in Anlehnung an HAUSDORFF **2**, S. 295 — die starkabgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{M}$.

Definition 3. *Eine Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von Elementen von $\mathfrak{R}$ heiße eine starke Fundamentalfolge, wenn*

(8) $$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} |\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_n| = 0$$

ist.

Definition 4. *Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ heiße starkvollständig, wenn es zu jeder starken Fundamentalfolge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von $\mathfrak{M}$ ein Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{M}$ mit*

(6) $$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$$

gibt.

Aus der Starkvollständigkeit folgt die Starkabgeschlossenheit, aber nicht umgekehrt; ferner ist mit einer starkvollständigen Menge offenbar auch jede isomorphe Menge starkvollständig, während einer nur starkabgeschlossenen Menge diese Eigenschaft nicht zukommen muß. Ist die starkabgeschlossene lineare Hülle $\mathfrak{P}$ einer Menge $\mathfrak{M}$ starkvollständig, dann wollen wir $\mathfrak{P}$ auch die *starkvollständige lineare Hülle* von $\mathfrak{M}$ nennen. Andernfalls wollen wir sagen, daß die starkvollständige lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}$ nicht existiert. Offenbar gilt der

Satz 1. *Sind zwei Teilmengen komplexer linearer metrischer Räume isomorph, dann sind auch ihre starkvollständigen linearen Hüllen isomorph, falls sie existieren.*

Denn bei der in Definition 1 erwähnten Zuordnung entspricht jeder starken Fundamentalfolge der linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ eine starke Fundamentalfolge der linearen Hülle von $\mathfrak{N}$ und umgekehrt.

Es folgt weiter, daß *diese Zuordnung auf genau eine Weise zu einer entsprechenden Zuordnung zwischen den starkvollständigen linearen Hüllen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ erweitert werden kann.*

Ist ein komplexer linearer metrischer Raum selbst starkvollständig, dann fallen die Begriffe der Starkabgeschlossenheit und der Starkvollständigkeit einer Teilmenge zusammen; daher ist auch die starkabgeschlossene lineare Hülle einer Teilmenge von selbst starkvollständig.

Jeden komplexen linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}$, welcher nicht starkvollständig ist, kann man zu einem starkvollständigen komplexen linearen metrischen Raum erweitern; d. h. man kann einen starkvollständigen komplexen linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}^*$ angeben, welcher eine mit $\mathfrak{R}$ isomorphe lineare Mannigfaltigkeit enthält. Man betrachte als die Elemente von $\mathfrak{R}^*$ die Gesamtheiten äquivalenter starker Fundamentalfolgen von $\mathfrak{R}$. (Zwei starke Fundamentalfolgen $\mathfrak{x}_n^{(1)}$ und $\mathfrak{x}_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sollen äquivalent heißen, wenn $\lim\limits_{n \to \infty} |\mathfrak{x}_n^{(1)} - \mathfrak{x}_n^{(2)}| = 0$ ist.) Enthalten zwei Elemente $\mathfrak{x}^*$ und $\mathfrak{y}^*$ von $\mathfrak{R}^*$ die starken Fundamentalfolgen $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\mathfrak{y}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von $\mathfrak{R}$, dann seien $\mathfrak{x}^* + \mathfrak{y}^*$ und $a\mathfrak{x}^*$ die Gesamtheiten derjenigen starken Fundamentalfolgen von $\mathfrak{R}$, welche mit $\mathfrak{x}_n + \mathfrak{y}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ bzw. mit $a\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ äquivalent sind, und es sei

$$(9) \qquad |\mathfrak{x}^*| = \lim_{n \to \infty} |\mathfrak{x}_n|.$$

Man kann sich leicht überlegen, daß diese Definitionen alle eingangs gemachten Voraussetzungen über komplexe lineare metrische Räume erfüllen und daß der so definierte komplexe lineare metrische Raum wirklich starkvollständig ist. Diejenigen Elemente von $\mathfrak{R}^*$, welche aus starken Fundamentalfolgen von $\mathfrak{R}$ bestehen, welche in $\mathfrak{R}$ auch stark konvergieren, bilden eine lineare Mannigfaltigkeit, welche mit $\mathfrak{R}$ isomorph ist, und $\mathfrak{R}^*$ ist die starkvollständige lineare Hülle dieser linearen Mannigfaltigkeit. Ersetzt man jedes der genannten Elemente $\mathfrak{x}^*$ von $\mathfrak{R}^*$ durch das Element von $\mathfrak{R}$, gegen welches die starken Fundamentalfolgen von $\mathfrak{R}$, deren Gesamtheit $\mathfrak{x}^*$ ist, konvergieren, dann wird $\mathfrak{R}$ selbst eine lineare Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{R}^*$ und daher $\mathfrak{R}^*$ eine Erweiterung von $\mathfrak{R}$; wir wollen diese Erweiterung die *kleinste starkvollständige Erweiterung* von $\mathfrak{R}$ nennen.

Ist jedem Element $\mathfrak{x}$ eines komplexen linearen Raumes $\mathfrak{R}$

ein Element $A\mathfrak{x}$ eines komplexen linearen Raumes $\mathfrak{S}$ zugeordnet und gelten dabei für beliebige $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Gleichungen

(10) $$A(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = A\mathfrak{x} + A\mathfrak{y}$$

und

(11) $$A(a\mathfrak{x}) = a(A\mathfrak{x}),$$

dann heiße diese Zuordnung A eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}$ *in* $\mathfrak{S}$; wenn dabei $A\mathfrak{x}$ wirklich ganz $\mathfrak{S}$ durchläuft, eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}$ *auf* $\mathfrak{S}$. Sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ komplexe lineare *metrische* Räume und ist die Menge der Zahlen $|A\mathfrak{x}|$ mit $|\mathfrak{x}| \leqq 1$ beschränkt, dann heiße die lineare Abbildung A beschränkt und die obere Grenze von $|A\mathfrak{x}|$ für $|\mathfrak{x}| \leqq 1$ werde mit $|A|$ (absoluter Betrag der linearen Abbildung A) bezeichnet. Durch diese Festsetzung wird die Menge der beschränkten linearen Abbildungen von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{S}$ selbst zu einem komplexen linearen metrischen Raume. Ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$, dann heiße A auch ein *linearer Operator* in $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{S}$ der komplexe lineare metrische Raum der komplexen Zahlen, dann heiße A ein *lineares Funktional* in $\mathfrak{R}$.

Definition 5. *Es seien L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ endlich viele beschränkte lineare Funktionale in $\mathfrak{R}$ und ε eine beliebige positive reelle Zahl. Ferner sei $\mathfrak{x}_0$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$. Dann heiße die Gesamtheit der Stellen $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$, welche den Ungleichungen*

(12) $$|L_k(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, eine schwache Umgebung der Stelle $\mathfrak{x}_0$.

(Diese Definition ist eine Verallgemeinerung der von J. v. NEUMANN **6,** S. 379 gegebenen Definition. Man kann sich leicht überzeugen, daß dieser Umgebungsbegriff im allgemeinen Falle ebenso wie in dem von J. v. NEUMANN behandelten Spezialfalle den vier Hausdorffschen Umgebungsaxiomen genügt.)

Daher heißt $\mathfrak{x}_0$ *schwache Häufungsstelle* einer Menge $\mathfrak{M}$, wenn jede schwache Umgebung von $\mathfrak{x}_0$ mindestens ein von $\mathfrak{x}_0$ verschiedenes Element von $\mathfrak{M}$ enthält. Eine Menge $\mathfrak{M}$ heißt *schwachabgeschlossen,* wenn sie alle ihre schwachen Häufungsstellen enthält. Eine Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ heißt *schwach konvergent* gegen das Element $\mathfrak{x}$, in Zeichen

(13) $$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x},$$

wenn jede schwache Umgebung von $\mathfrak{x}$ von einer gewissen Stelle angefangen alle Glieder der Folge $\mathfrak{x}_n$ enthält. Wie man sich leicht überlegt, gilt der

Satz 2. *Für das Bestehen der Gleichung*

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x} \tag{13}$$

ist notwendig und hinreichend, daß für jedes beschränkte lineare Funktional L in $\mathfrak{R}$ die Gleichung

$$\lim_{n \to \infty} L\mathfrak{x}_n = L\mathfrak{x} \tag{14}$$

gelte.

Wie J. v. NEUMANN **6,** S. 380, 381 zeigt, muß ein schwaches Häufungselement einer Menge nicht schwaches Grenzelement einer Teilfolge der Menge sein.

Wir müssen nun einen Satz aus der Theorie der linearen metrischen Räume (S. z. B. HAUSDORFF **2,** S. 306) benützen, der folgendermaßen lautet:

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Teilmenge eines komplexen linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{x}_0$ ein Element von $\mathfrak{R}$, welches nicht der starkabgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ angehört. Dann gibt es stets mindestens ein beschränktes lineares Funktional L in $\mathfrak{R}$ von der Beschaffenheit, daß für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ $L\mathfrak{x} = 0$ ist, während $L\mathfrak{x}_0 \neq 0$ ist.*

Dieser Satz wird in den meisten Abhandlungen nur für *reelle* lineare metrische Räume ausgesprochen und bewiesen. Aus der Giltigkeit des Satzes für *reelle* lineare metrische Räume folgt aber leicht auch seine Giltigkeit für *komplexe* lineare metrische Räume. Man kann ja jeden komplexen linearen metrischen Raum auch als einen reellen linearen metrischen Raum betrachten; daher gibt es unter den Voraussetzungen des Satzes 3 ein *reelles* beschränktes lineares Funktional R (die Gleichung $R(a\mathfrak{x}) = a(R\mathfrak{x})$ gilt jetzt nur für *reelles* a) von der Beschaffenheit, daß $R\mathfrak{x} = 0$ ist, wenn $\mathfrak{x}$ in der komplexen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ enthalten ist, während $R\mathfrak{x}_0 \neq 0$ ist. Nun setze man

$$L\mathfrak{x} = R\mathfrak{x} - iR(i\mathfrak{x}).$$

Dann ist L ein lineares Funktional von der in Satz 3 geforderten Beschaffenheit.

Aus Satz 3 folgt sofort der

Satz 4. *Jede schwache Häufungsstelle einer Menge $\mathfrak{M}$ gehört der starkabgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ an.*

Gehört nämlich $\mathfrak{x}_0$ nicht der starkabgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ an, dann sei L ein beschränktes lineares Funktional in $\mathfrak{R}$ mit $L\mathfrak{x} = 0$ für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ und $L\mathfrak{x}_0 \neq 0$. Dann ist für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$

$$|L(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)| = |L\mathfrak{x}_0| \neq 0;$$

die Ungleichung

$$|L(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)| < \varepsilon$$

kann daher nicht für jede positive reelle Zahl ε durch ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ erfüllt werden.

Ein Spezialfall des Satzes 4 ist der

S a t z 5. *Ist*

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}, \tag{13}$$

dann gehört $\mathfrak{x}$ der starkabgeschlossenen linearen Hülle der Menge der Elemente $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ an.

Dieser spezielle Satz wird auch von BANACH **1**, S. 134 ausgesprochen. Sein Beweis folgt hier einfach aus der Bemerkung, daß beim Bestehen der Gleichung (13) $\mathfrak{x}$ schwache Häufungsstelle der Menge der Elemente ist, welche in der Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ vorkommen, wenn diese Menge nicht nur endlich viele von $\mathfrak{x}$ verschiedene Elemente enthält.

Aus Satz 4 folgt ferner der

S a t z 6. *Jede starkabgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit ist auch schwachabgeschlossen.*

Wir wollen daher von nun an eine starkabgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit schlechthin als *abgeschlossen* bezeichnen. Ebenso dürfen wir statt „starkabgeschlossene lineare Hülle" kurz „abgeschlossene lineare Hülle" sagen. Satz 6 stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes dar, den E. SCHMIDT **10** für den Hilbertschen Raum bewiesen hat. (Vergleiche auch J. v. NEUMANN **6**, S. 396.)

D e f i n i t i o n 6. *Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ heiße* s c h w a c h - v o l l s t ä n d i g, *wenn sie in der kleinsten starkvollständigen Erweiterung von $\mathfrak{R}$ schwachabgeschlossen ist.*

(A n m e r k u n g. Die Worte „schwachabgeschlossen" und „schwachvollständig" werden sonst vielfach in der Literatur in einem anderen Sinne gebraucht. Wir kommen weiter unten nochmals darauf zurück.)

Jede schwachvollständige Menge ist schwachabgeschlossen, während das Umgekehrte nicht gelten muß. Mit einer schwachvollständigen Menge ist auch jede isomorphe Menge schwachvollständig, während einer schwachabgeschlossenen Menge diese Eigenschaft nicht zukommen muß. Aus Definition 6 folgt ferner unmittelbar, daß jede starkvollständige lineare Mannigfaltigkeit auch schwachvollständig ist. Wir wollen daher von nun an eine starkvollständige lineare Mannigfaltigkeit schlechthin als „vollständig“ bezeichnen. Ebenso wollen wir die Worte „starkvollständige lineare Hülle“ und „kleinste starkvollständige Erweiterung“ durch die Worte „vollständige lineare Hülle“ und „kleinste vollständige Erweiterung“ ersetzen. — In einem vollständigen komplexen linearen metrischen Raume sind die Begriffe Schwachabgeschlossenheit und Schwachvollständigkeit einer Teilmenge und ebenso die Begriffe Abgeschlossenheit und Vollständigkeit einer linearen Mannigfaltigkeit identisch.

Definition 7. *Eine Folge* $\mathfrak{x}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *von Elementen von* $\mathfrak{R}$ *heiße eine* schwache Fundamentalfolge, *wenn für jedes beschränkte lineare Funktional* L *in* $\mathfrak{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} L\mathfrak{x}_n$ *existiert.*

Jede schwache Fundamentalfolge ist beschränkt. Für reelle lineare metrische Räume ist dieser Satz bekannt; aus seiner Giltigkeit für reelle lineare metrische Räume folgt aber auch die Giltigkeit für komplexe lineare metrische Räume: man braucht nur statt der Werte der beschränkten linearen Funktionale $L\mathfrak{x}$ deren reelle Teile zu betrachten.

Es kann vorkommen, daß eine schwache Fundamentalfolge eines *vollständigen* komplexen linearen metrischen Raumes nicht schwach konvergiert. Es sei $\mathfrak{R}$ die Menge der *Nullfolgen* $\mathfrak{x}=(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ mit $|\mathfrak{x}| = \sup\limits_{n=1,2,3,\ldots} |x_n|$. Dieser komplexe lineare metrische Raum ist vollständig; trotzdem bilden seine Elemente $\mathfrak{x}_1=(1,0,0,\ldots)$, $\mathfrak{x}_2=(1,1,0,0,\ldots)$, $\mathfrak{x}_3=(1,1,1,0,0,\ldots)$, ... eine schwache Fundamentalfolge, welche nicht schwach konvergiert. Während man einen komplexen linearen metrischen Raum stets so erweitern kann, daß jede *starke* Fundamentalfolge stark konvergiert, gilt von den *schwachen* Fundamentalfolgen das Entsprechende nicht. Es gilt vielmehr der

Satz 7. *Ist* $\mathfrak{x}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *eine schwache Fundamentalfolge eines vollständigen komplexen linearen metrischen Raumes* $\mathfrak{R}$, *welche nicht schwach konvergiert, dann ist es auch unmöglich,* $\mathfrak{R}$ *so* *zu erweitern, daß diese schwache Fundamentalfolge schwach konvergent wird.*

(Man kann daher $\mathfrak{R}$ auch nicht zu einem komplexen linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}^*$ erweitern, der mit seinem bikonjugierten Raum übereinstimmt.)

Der Beweis des Satzes 7 ergibt sich unmittelbar aus Satz 5.

S. MAZUR **4** nennt einen (reellen) linearen metrischen Raum schwachvollständig, wenn in ihm jede schwache Fundamentalfolge schwach konvergiert. Unser Satz 7 sagt aus, daß ein komplexer linearer metrischer Raum, der zwar vollständig, aber nicht im Mazurschen Sinne schwachvollständig ist, nicht zu einem im Mazurschen Sinne schwachvollständigen komplexen linearen metrischen Raume erweitert werden kann.

§ 2. Sätze über komplexe euklidische Räume, die ohne Benützung des Wohlordnungssatzes bewiesen werden können.

Definition 8. *Eine skalare Funktion* $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ *zweier veränderlicher Elemente eines komplexen linearen Raumes heiße eine hermiteische bilineare Funktion, wenn die Gleichungen*

$$f(\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}) = f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}) + f(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}), \tag{14}$$

$$f(a\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = a f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{15}$$

und

$$f(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \overline{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} \tag{16}$$

($\bar{a}$ bedeutet die zu a konjugierte komplexe Zahl) *allgemein gelten.*

Ist $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eine hermiteische bilineare Funktion, dann ist, wie Gleichung (16) lehrt, $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ stets eine *reelle* Zahl.

Satz 8. *Ist die zu einer hermiteischen bilinearen Funktion* $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ *in einem komplexen linearen Raume* $\mathfrak{R}$ *gehörige hermiteische quadratische Form (oder kurz hermiteische Form)* $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ *positiv definit — d. h. ist stets* $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) > 0$ *für* $\mathfrak{x} \neq 0$ *— dann gelten für beliebige Elemente* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{y}$ *von* $\mathfrak{R}$ *die Ungleichungen*

$$|f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|^2 \leqq f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})\, f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) \tag{17}$$

und

$$\sqrt{f(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}, \mathfrak{x}+\mathfrak{y})} \leqq \sqrt{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})} + \sqrt{f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})}. \tag{18}$$

Beim Beweise der Ungleichungen (17) und (18) hat man nur die Nichtnegativdefinitheit der quadratischen Form $f(\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y}, \lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y})$ in den beiden reellen Veränderlichen λ und μ zu beachten.

Die Ungleichung (18) sagt weiter aus: ist die hermiteische bilineare Funktion $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ in einem komplexen linearen Raume $\mathfrak{R}$ so beschaffen, daß die hermiteische Form $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ positiv definit ist, dann kann man $\mathfrak{R}$ dadurch zu einem komplexen linearen *metrischen* Raume machen, daß man $|\mathfrak{x}| = \sqrt{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})}$ setzt. (Daß dann auch die Gleichung (3) erfüllt ist, folgt aus den Gleichungen (15) und (16).)

Definition 9. *Ein komplexer linearer metrischer Raum, der auf die eben angegebene Weise definiert werden kann, heiße ein komplexer euklidischer Raum. Die Funktion $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ heiße dabei das innere Produkt der beiden Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ und werde kurz mit $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ bezeichnet.*

Spezielle komplexe euklidische Räume sind der n-dimensionale komplexe euklidische Raum (n eine natürliche Zahl) und der komplexe Hilbertsche Raum. Nach der Definition des inneren Produktes besteht allgemein die Gleichung

$$(19) \qquad (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = |\mathfrak{x}|^2.$$

Ferner folgt aus Ungleichung (17) die Ungleichung

$$(20) \qquad |(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})| \leqq |\mathfrak{x}| \cdot |\mathfrak{y}|,$$

welche man die *Schwarzsche Ungleichung* zu nennen pflegt.

Satz 9. *Ist ein komplexer linearer metrischer Raum $\mathfrak{R}$ euklidisch, dann ist auch seine kleinste vollständige Erweiterung $\mathfrak{R}^*$ euklidisch.*

Ist nämlich $\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{y}^* \in \mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{R}$, $\mathfrak{y}_n \in \mathfrak{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}^*$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{y}_n = \mathfrak{y}^*$, dann braucht man, um die Richtigkeit des Satzes 9 einzusehen, nur in $\mathfrak{R}^*$ das innere Produkt durch die Gleichung

$$(\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*) = \lim_{n\to\infty} (\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n)$$

zu definieren.

Satz 10. *Zwei Teilmengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ komplexer euklidischer Räume sind dann und nur dann isomorph* (Definition 1), *wenn zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von der Beschaffenheit hergestellt werden kann, daß in dem Falle, daß den Elementen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ von $\mathfrak{M}$ die Elemente $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ von $\mathfrak{N}$ zugeordnet sind, stets die Gleichung*

$$(21) \qquad (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$$

besteht.

Daß die angeführte Bedingung notwendig ist, folgt aus der Identität

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \left|\frac{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}}{2}\right|^2 - \left|\frac{\mathfrak{x}-\mathfrak{y}}{2}\right|^2 + i\left|\frac{\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}}{2}\right|^2 - i\left|\frac{\mathfrak{x}-i\mathfrak{y}}{2}\right|^2;$$

daß sie auch hinreichend ist, folgt daraus, daß man aus den Gleichungen (21) mit Hilfe von (19) das Bestehen jeder Gleichung von der Form (4) beweisen kann.

Satz 11. *Zu jedem beschränkten linearen Funktional L eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ gibt es ein* (und daher auch nur ein) *erzeugendes Element, d. h. ein Element* $\mathfrak{u}$ *von $\mathfrak{R}$ von der Beschaffenheit, daß für jedes Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$*

$$(22) \qquad L\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$$

ist.

Daß Satz 11 für endlichdimensionale komplexe euklidische Räume und für den komplexen Hilbertschen Raum gilt, ist bekannt. (S. z. B. F. Riesz **9,** S. 28.) Um nun den Satz auch für beliebige vollständige komplexe euklidische Räume zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß aus der Giltigkeit des Satzes für endlichdimensionale komplexe euklidische Räume und für den komplexen Hilbertschen Raum speziell folgender Satz folgt:

Satz 12. *Ist L ein beschränktes lineares Funktional in einem endlichdimensionalen komplexen euklidischen Raume oder im komplexen Hilbertschen Raume, dann gibt es stets ein Element* $\mathfrak{u}$ *des betreffenden Raumes mit $|\mathfrak{u}| = |L|$ und $L\mathfrak{u} = |\mathfrak{u}|^2$.*

Weiter beweisen wir den folgenden

Satz 13. *Gibt es zu einem beschränkten linearen Funktional L in einem komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ ein Element* $\mathfrak{u}$ *von $\mathfrak{R}$ mit $|\mathfrak{u}| = |L|$ und $L\mathfrak{u} = |\mathfrak{u}|^2$, dann ist identisch*

$$(22) \qquad L\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u}).$$

Es sei zunächst $(\mathfrak{x}, \mathfrak{u}) = 0$ und $\mathfrak{x} \neq 0$. Dann ist für jede komplexe Zahl λ

$$|L(\mathfrak{u} + \lambda\mathfrak{x})| \leqq |L| \,.\, |\mathfrak{u} + \lambda\mathfrak{x}|$$

und daher

$$\left||L|^2 + \lambda(L\mathfrak{x})\right|^2 \leqq |L|^2 (|L|^2 + |\lambda|^2 |\mathfrak{x}|^2).$$

Nun setze man insbesondere $\lambda = \frac{\overline{(L\mathfrak{x})}}{|\mathfrak{x}|^2}$. Dann folgt

$$\left(|L|^2+\frac{|L\mathfrak{x}|^2}{|\mathfrak{x}|^2}\right)^2 \leqq |L|^2\left(|L|^2+\frac{|L\mathfrak{x}|^2}{|\mathfrak{x}|^2}\right)$$

oder

$$|L\mathfrak{x}|^2(|L|^2|\mathfrak{x}|^2+|L\mathfrak{x}|^2)\leqq 0,$$

also $L\mathfrak{x}=0$. Damit ist die Gleichung (22) für den Fall bewiesen, daß $(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})=0$ ist. Ist jetzt $\mathfrak{x}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$, dann ist

$$(|\mathfrak{u}|^2\mathfrak{x}-(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})\mathfrak{u}, \mathfrak{u})=0,$$

daher nach dem eben Bewiesenen

$$L(|\mathfrak{u}|^2\mathfrak{x}-(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})\mathfrak{u})=0,$$

oder

$$|\mathfrak{u}|^2L\mathfrak{x}-(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})L\mathfrak{u}=0,$$

oder weil $L\mathfrak{u}=|\mathfrak{u}|^2$ ist,

$$L\mathfrak{x}=(\mathfrak{x}, \mathfrak{u}), \tag{22}$$

wie gezeigt werden sollte.

Andererseits kann Satz 12 auf beliebige *vollständige* komplexe euklidische Räume übertragen werden. Es sei L ein beschränktes lineares Funktional in einem vollständigen komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$. Dann gibt es eine Folge von Elementen $\mathfrak{x}_n$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$ von $\mathfrak{R}$ mit $|\mathfrak{x}_n|=1$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ und $\lim_{n\to\infty} L\mathfrak{x}_n=|L|$. Hierauf sei $\mathfrak{M}$ die abgeschlossene lineare Hülle der Elemente $\mathfrak{x}_n$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$. Dann ist die obere Grenze von $|L\mathfrak{x}|$ für $\mathfrak{x}\in\mathfrak{M}$ und $|\mathfrak{x}|\leqq 1$ genau gleich $|L|$. Andererseits ist aber $\mathfrak{M}$ entweder ein endlichdimensionaler komplexer euklidischer Raum oder ein komplexer Hilbertscher Raum. Daher gibt es nach Satz 12 ein Element $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{M}$ mit $|\mathfrak{u}|=|L|$ und $L\mathfrak{u}=|\mathfrak{u}|^2$. Damit ist aber die zu Beginn dieses Absatzes angeführte Verallgemeinerung des Satzes 12 als richtig nachgewiesen. Aus dieser Verallgemeinerung des Satzes 12 und aus Satz 13 ergibt sich jetzt sofort der zu beweisende Satz 11.

D e f i n i t i o n 10. *Eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ eines komplexen euklidischen Raumes heiße r e g u l ä r, wenn man jedes Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf $\mathfrak{M}$ in eine Tangentialkomponente $\mathfrak{t}$ und eine Normalkomponente $\mathfrak{n}$ zerlegen kann, d. h. wenn man zu jedem Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ zwei ebensolche Elemente $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ angeben kann, so daß*

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{t}+\mathfrak{n} \tag{23}$$

ist, $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{M}$ angehört und $\mathfrak{n}$ zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist.

Zwei Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eines komplexen euklidischen Raumes werden hier orthogonal genannt, wenn $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ ist; dann ist wegen (16) auch $(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = 0$. Es ist klar, daß für eine bestimmte lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ eine Zerlegung eines Elements $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ von der hier betrachteten Art stets höchstens auf *eine* Weise möglich ist.

Satz 14. *Für die Regularität einer linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ ist notwendig, aber nicht hinreichend, daß $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}$ abgeschlossen sei.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}$ regulär, $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$. Dann sei

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{t} + \mathfrak{n} \tag{23}$$

die in Definition 10 angeführte Zerlegung von $\mathfrak{x}$. Aus der Gleichung $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$ kann man auf bekannte Weise schließen, daß auch

$$\lim_{n \to \infty} (\mathfrak{x}_n, \mathfrak{n}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{n})$$

ist. Weil aber nach der Definition von $\mathfrak{n}$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ $(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{n}) = 0$ ist, muß auch $(\mathfrak{x}, \mathfrak{n}) = 0$ sein. Das ergibt aber zusammen mit (23) die Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{t}$, d. h. daß $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{M}$ angehört. Somit ist $\mathfrak{M}$ abgeschlossen; damit ist die erste Behauptung des Satzes 14 bewiesen.

Es sei andererseits $\mathfrak{R}$ die Menge aller Zahlenfolgen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \dots)$ von der Eigenschaft, daß von einer gewissen Stelle angefangen $x_k = \frac{\lambda}{k}$ (λ fest) ist; ist außerdem $(y_1, y_2, \dots) = \mathfrak{y}$, dann sei

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3, \dots) \tag{24}$$

$$a\mathfrak{x} = (ax_1,\ ax_2,\ ax_3, \dots) \tag{25}$$

und

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k. \tag{26}$$

In dieser Menge, die mit den Definitionen (24), (25) und (26) offenbar ein komplexer euklidischer Raum ist, sei $\mathfrak{M}$ die lineare Mannigfaltigkeit derjenigen Elemente $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, für welche $x_2 = x_4 = x_6 = \dots = 0$ ist. (Für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ müssen also insbesondere von einer gewissen Stelle angefangen alle $x_n = 0$ sein.) Diese lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ist offenbar in $\mathfrak{R}$ abgeschlossen; sie ist aber nicht regulär, weil das Element $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ von $\mathfrak{R}$ nicht in der Form (23) dargestellt werden kann.

Satz 15. *Für die Regularität einer linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ ist hinreichend, aber nicht notwendig, daß $\mathfrak{M}$ vollständig sei.*

Beweis. Es werde zunächst angenommen, daß $\mathfrak{M}$ vollständig sei. Dann sei $\mathfrak{x}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$. Ist nun $\mathfrak{y}$ ein in $\mathfrak{M}$ veränderliches Element, dann stellt $(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$ ein beschränktes lineares Funktional in $\mathfrak{M}$ dar. Weil aber $\mathfrak{M}$ ein vollständiger komplexer euklidischer Raum ist, gibt es nach Satz 11 ein Element $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{M}$, so daß für $\mathfrak{y} \in \mathfrak{M}$

$$(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = (\mathfrak{y}, \mathfrak{t}) \tag{22a}$$

ist. Die Gleichung (22a) sagt aber aus, daß das durch die Gleichung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{t} + \mathfrak{n} \tag{23}$$

definierte Element $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{R}$ zu allen Elementen $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist. Damit ist die Regularität von $\mathfrak{M}$ bewiesen.

Es sei andererseits $\mathfrak{R}$ die Menge aller Zahlenfolgen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ von der Eigenschaft, daß von einer gewissen Stelle angefangen $x_n = 0$ ist; ist $(y_1, y_2, \ldots) = \mathfrak{y}$, dann seien die Elemente $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ und $a\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ und die Zahl $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ wieder durch die Gleichungen (24), (25) und (26) erklärt. In dem so definierten komplexen euklidischen Raume sei wieder $\mathfrak{M}$ die Menge aller Elemente $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ mit $x_2 = x_4 = x_6 = \ldots = 0$. Dann ist $\mathfrak{M}$ zwar regulär, aber nicht vollständig.

Es gilt also für lineare Mannigfaltigkeiten komplexer euklidischer Räume $\mathfrak{R}$ das logische Schema

Vollständigkeit $\longrightarrow$ Regularität $\longrightarrow$ Abgeschlossenheit.

Wenn $\mathfrak{R}$ vollständig ist, sind alle drei Eigenschaften miteinander äquivalent.

Sämtliche Ausführungen des § 1 gelten natürlich auch speziell für komplexe euklidische Räume. Man beachte aber, daß in diesem Paragraphen weder vom Satz 3 noch von einem derjenigen Sätze Gebrauch gemacht wurde, welche in § 1 aus dem Satze 3 hergeleitet wurden; denn man kann ja in diesem Paragraphen die Worte „abgeschlossen" und „vollständig", wo sie bisher vorgekommen sind, überall durch die Worte „starkabgeschlossen" und „starkvollständig" ersetzen. Zum allgemeinen Beweise des Satzes 3 für reelle lineare metrische Räume muß bekanntlich der Wohlordnungssatz herangezogen werden. Aus den bisherigen Ausführungen dieses Paragraphen ergibt sich aber für den Fall eines komplexen euklidischen Raumes ein Beweis des Satzes 3, der ohne Benützung des Wohlordnungssatzes auskommt.

Es sei also $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge eines komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{x}_0$ ein Element von $\mathfrak{R}$, welches nicht der starkabgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ angehört. Dann gehört $\mathfrak{x}_0$ — als Element der kleinsten starkvollständigen Erweiterung $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{R}$ betrachtet — auch nicht der (in $\mathfrak{R}^*$ existierenden) starkvollständigen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ an. Nach Satz 15 gibt es nun zwei Elemente $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{R}^*$ von der Eigenschaft, daß

$$\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{t} + \mathfrak{n}$$

ist, $\mathfrak{t}$ der starkvollständigen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ angehört und $\mathfrak{n}$ zu allen Elementen der starkvollständigen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist. Dabei muß also $\mathfrak{n} \neq 0$ und daher auch $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}) = |\mathfrak{n}|^2 \neq 0$ sein. Ist daher $\mathfrak{x}$ ein veränderliches Element von $\mathfrak{R}$, dann stellt der Ausdruck $(\mathfrak{x}, \mathfrak{n})$ ein lineares Funktional in $\mathfrak{R}$ dar, welches den Forderungen des Satzes 3 genügt.

In den eben vorangegangenen Ausführungen ist auch folgender Satz enthalten:

S a t z 16. *Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$, deren abgeschlossene lineare Hülle nicht mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt, dann gibt es stets mindestens ein vom Nullelement verschiedenes Element von $\mathfrak{R}$, welches zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist.*

Für unvollständige komplexe euklidische Räume muß dieser Satz nicht gelten. Es sei $\mathfrak{R}$ der komplexe euklidische Raum, welcher im zweiten Teile des Beweises des Satzes 15 betrachtet wurde, und $\mathfrak{M}$ die Menge aller Elemente $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ von $\mathfrak{R}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} = 0$. Dann ist $\mathfrak{M}$ eine in $\mathfrak{R}$ abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit, die nicht mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt. Trotzdem gibt es kein vom Nullelement verschiedenes Element von $\mathfrak{R}$, welches zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist.

Dagegen gilt die Umkehrung des Satzes 16:

„*Gibt es zu einer Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ ein vom Nullelement verschiedenes Element $\mathfrak{x}_0$ von $\mathfrak{R}$,* *welches zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist, dann fällt die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ nicht mit $\mathfrak{R}$ zusammen.“* für beliebige (vollständige oder nicht vollständige) komplexe euklidische Räume. Unter den hier gemachten Voraussetzungen kann nämlich offenbar das Element $\mathfrak{x}_0$ selbst der abgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ nicht angehören.

Wir haben in § 1 ein Beispiel für die Möglichkeit angegeben, daß eine schwache Fundamentalfolge eines vollständigen komplexen linearen metrischen Raumes nicht schwach konvergiert. Ein solcher Fall kann in einem vollständigen komplexen *euklidischen* Raume nicht eintreten, sondern es gilt der

Satz 17. *In einem vollständigen komplexen euklidischen Raume ist jede schwache Fundamentalfolge schwach konvergent.*

Jeder vollständige komplexe euklidische Raum ist also auch im Sinne von Mazur 4 schwachvollständig.

Beweis. Es sei $\mathfrak{x}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ eine schwache Fundamentalfolge des vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$. Nach Definition 7 existiert also für beliebiges $\mathfrak{y}\in\mathfrak{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y})$. Dasselbe gilt daher auch von $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_n)$. Der letztere Ausdruck ist aber ein lineares Funktional in $\mathfrak{y}$, welches wegen der Beschränktheit der Folge $\mathfrak{x}_n$ selbst beschränkt ist. Also gibt es nach Satz 11 ein Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ von der Beschaffenheit, daß für alle $\mathfrak{y}$

$$\lim_{n\to\infty}(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_n) = (\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$$

oder

$$\lim_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{27}$$

ist. Aus (27) folgt aber wegen der Sätze 11 und 2 die Gleichung

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}. \tag{13}$$

Damit ist Satz 17 bewiesen.

Aus Satz 17 folgt der allgemeinere

Satz 18. *Ist eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines* (vollständigen oder nicht vollständigen) *komplexen euklidischen Raumes schwachvollständig, dann gibt es zu jeder schwachen Fundamentalfolge $\mathfrak{x}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ von $\mathfrak{M}$ ein Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{M}$ mit*

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}. \tag{13}$$

Der Beweis dieses Satzes, der ein Gegenstück zur Definition 4 darstellt, ergibt sich unmittelbar aus Definition 6 und aus Satz 17. Aus Satz 17 folgt ferner, daß *man einen komplexen euklidischen Raum, in dem nicht jede schwache Fundamentalfolge schwach konvergiert, zu einem komplexen euklidischen Raume erweitern kann, in dem jede schwache Fundamentalfolge schwach konvergiert.* (Vergleiche dagegen Satz 7!)

Satz 19. *Dafür, daß eine Folge* $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *von Elementen eines komplexen euklidischen Raumes* $\mathfrak{R}$ *eine schwache Fundamentalfolge sei, ist notwendig und hinreichend, daß erstens die Grenzwerte* $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *alle existieren und zweitens die Folge der Zahlen* $|\mathfrak{x}_n|$ *beschränkt sei.*

Daß die beiden hier angeführten Bedingungen für die Eigenschaft der Folge $\mathfrak{x}_n$, schwache Fundamentalfolge zu sein, notwendig sind, ist fast unmittelbar klar. Beim Beweise, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{R}$ vollständig ist; es ist nämlich offenbar die Folge $\mathfrak{x}_n$ dann und nur dann in $\mathfrak{R}$ schwache Fundamentalfolge, wenn sie in der kleinsten vollständigen Erweiterung von $\mathfrak{R}$ schwache Fundamentalfolge ist. Wir wollen also annehmen, es sei $\mathfrak{R}$ vollständig. Nun folgt aus der Existenz der Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, daß auch $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y})$ stets existiert, wenn $\mathfrak{y}$ der linearen Hülle der Elemente $\mathfrak{x}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ angehört. Es sei jetzt $\mathfrak{y}$ ein Element der *abgeschlossenen* linearen Hülle der Elemente $\mathfrak{x}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ und g eine positive obere Schranke für die absoluten Beträge dieser Elemente. Dann kann man für jede positive Zahl ε ein Element $\mathfrak{y}^*$ der einfachen linearen Hülle der Elemente $\mathfrak{x}_k$ finden, so daß

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}^*| < \frac{\varepsilon}{4g}$$

ist. Sind andererseits die natürlichen Zahlen m und n größer als eine geeignet gewählte Zahl, dann ist wegen der bereits festgestellten Konvergenz von $(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}^*)$ für $n \to \infty$

$$|(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}^*) - (\mathfrak{x}_m, \mathfrak{y}^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher

$$|(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}) - (\mathfrak{x}_m, \mathfrak{y})| = |[(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}^*) - (\mathfrak{x}_m, \mathfrak{y}^*)] + (\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_m, \mathfrak{y} - \mathfrak{y}^*)| \leqq$$
$$\leqq |(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}^*) - (\mathfrak{x}_m, \mathfrak{y}^*)| + (|\mathfrak{x}_n| + |\mathfrak{x}_m|)\,|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}^*| < \frac{\varepsilon}{2} + 2g\,\frac{\varepsilon}{4g} = \varepsilon.$$

Also existiert $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y})$ auch stets, wenn $\mathfrak{y}$ der abgeschlossenen linearen Hülle der Elemente $\mathfrak{x}_k$ $(k=1,2,3,\ldots)$ angehört. Ist endlich $\mathfrak{y}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$, dann gibt es wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ und nach Satz 15 zwei Elemente $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{R}$, so daß die Gleichung

$$\mathfrak{y}=\mathfrak{t}+\mathfrak{n}$$

besteht, $\mathfrak{t}$ der genannten abgeschlossenen linearen Hülle angehört und $\mathfrak{n}$ zu allen ihren Elementen orthogonal ist. Dann ist aber für $n=1,2,3,\ldots$

$$(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y})=(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{t}).$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, daß $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y})$ für beliebiges $\mathfrak{y}\in\mathfrak{R}$ existiert. Zusammen mit Satz 11 bedeutet das die Richtigkeit der Behauptung, daß die Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ eine schwache Fundamentalfolge ist.

Satz 20. *Sind $\mathfrak{x}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ und $\mathfrak{x}$ Elemente eines komplexen euklidischen Raumes, dann ist für das Bestehen der Gleichung*

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\mathfrak{x}_n=\mathfrak{x} \tag{13}$$

notwendig und hinreichend, daß erstens die Gleichungen

$$\lim_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k)=(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_k)\qquad(k=1,2,3,\ldots) \tag{28}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x})=(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \tag{29}$$

bestehen und zweitens die Folge der Zahlen $|\mathfrak{x}_n|$ beschränkt sei.

Daß die angeführten Bedingungen notwendig sind, ist wieder unmittelbar klar. Beim Beweise, daß sie auch hinreichend sind, kann man sich wieder auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{R}$ vollständig ist. Dann folgt aus den Gleichungen (28), aus der Beschränktheit der Folge $|\mathfrak{x}_n|$ und aus den Sätzen 19 und 17, daß diese Folge $\mathfrak{x}_n$ jedenfalls schwach konvergiert. Es werde $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty}\mathfrak{x}_n=\mathfrak{x}^*$ gesetzt. Dann folgt aus (28) $(\mathfrak{x}^*-\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_k)=0$ und daher durch nochmaligen Grenzübergang

$$(\mathfrak{x}^*-\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*)=0.$$

Andererseits folgt aus (29)

$$(\mathfrak{x}^*-\mathfrak{x}, \mathfrak{x})=0.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen erhält man die zu beweisende Gleichung $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}$.

Satz 21. *Jede beschränkte unendliche Menge $\mathfrak{M}$ eines komplexen euklidischen Raumes enthält mindestens eine schwache Fundamentalfolge.*

Beweis. Man greife aus $\mathfrak{M}$ zunächst irgendeine Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ heraus. Dann sind die Zahlenfolgen $(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ alle beschränkt. Daher kann man unter Anwendung des Diagonalverfahrens (vgl. z. B. F. RIESZ **8**, S. 57) aus der Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ein Teilfolge $\mathfrak{x}_{n_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$ von der Eigenschaft herausgreifen, daß die Grenzwerte $\lim\limits_{\alpha \to \infty} (\mathfrak{x}_{n_\alpha}, \mathfrak{x}_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ alle existieren. Dann existieren insbesondere alle Grenzwerte $\lim\limits_{\alpha \to \infty} (\mathfrak{x}_{n_\alpha}, \mathfrak{x}_{n_\beta})$ $(\beta = 1, 2, 3, \ldots)$. Da andererseits die $\mathfrak{x}_{n_\alpha}$ Elemente der *beschränkten* Menge $\mathfrak{M}$ sind, bilden sie nach Satz 19 eine schwache Fundamentalfolge. Damit ist Satz 21 bewiesen.

MAZUR **4** nennt eine unendliche Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen eines (reellen) linearen metrischen Raumes *schwachkompakt*, wenn jede aus $\mathfrak{M}$ herausgegriffene Folge mindestens eine schwache Fundamentalfolge enthält. Mit dieser Benennung kann man daher Satz 21 auch so aussprechen: *in einem komplexen euklidischen Raume ist jede beschränkte unendliche Menge schwachkompakt.*

Satz 22. *$f(\mathfrak{x})$ sei eine reelle Zahl, welche Funktion des Elementes $\mathfrak{x}$ eines komplexen euklidischen Raumes ist, welches in einer beschränkten und in bezug auf die schwache Konvergenz perfekten Menge $\mathfrak{M}$ veränderlich ist. Ist dann $f(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{M}$ überall in bezug auf die schwache Konvergenz stetig, dann besitzt $f(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{M}$ eine endliche obere Grenze g und es gibt auch mindestens eine Stelle von $\mathfrak{M}$, an welcher $f(\mathfrak{x})$ den Wert g wirklich annimmt.*

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des von HILBERT **3**, S. 200 ausgesprochenen Satzes. Daß die Menge $\mathfrak{M}$ in bezug auf die schwache Konvergenz perfekt ist, soll bedeuten, daß jede schwache Fundamentalfolge von $\mathfrak{M}$ gegen ein Element von $\mathfrak{M}$ schwach konvergiert und daß andererseits jedes Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{M}$ Grenzelement einer schwach konvergenten Teilfolge von $\mathfrak{x}$ verschiedener Elemente von $\mathfrak{M}$ ist. Daß $f(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{M}$ überall in bezug auf die schwache Konvergenz stetig ist, soll bedeuten, daß aus $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\operatorname{Lim}\limits_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$ (nach Voraussetzung gilt also $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$) stets $\lim\limits_{n \to \infty} f(\mathfrak{x}_n) = f(\mathfrak{x})$ folgt.

B e w e i s d e s S a t z e s 22. Es sei g die endliche oder unendliche obere Grenze von $f(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{M}$. Dann gibt es also eine Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ mit $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{M}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathfrak{x}_n) = g$. Diese Folge ist beschränkt, weil die Menge $\mathfrak{M}$ beschränkt ist. Es gibt daher nach Satz 21 eine Teilfolge $\mathfrak{x}_{n_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$ dieser Folge, welche schwache Fundamentalfolge ist. Diese Teilfolge konvergiert aber nach der über $\mathfrak{M}$ gemachten Voraussetzung schwach gegen ein bestimmtes Element $\mathfrak{x}_0$ von $\mathfrak{M}$. Wegen der über $f(\mathfrak{x})$ gemachten Voraussetzung muß daher g endlich und $f(\mathfrak{x}_0) = g$ sein.

Aus Satz 21 folgt speziell (siehe Satz 17) daß *jede beschränkte unendliche Menge eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes mindestens eine schwach konvergente Teilfolge enthält.* Es gilt daher erst recht der Satz: *jede beschränkte unendliche Menge eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes besitzt mindestens eine schwache Häufungsstelle.*

D e f i n i t i o n 11. *Ein linearer Operator B in einem komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ heiße zu dem linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ a d j u n g i e r t, wenn für beliebige Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}$*

$$(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, B\mathfrak{y}) \tag{30}$$

ist.

Zu einem linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ kann es offenbar höchstens einen adjungierten linearen Operator geben. Diesen zu A adjungierten linearen Operator wollen wir, wenn er existiert, stets mit A^* bezeichnen. Wie man auf dieselbe Art wie im endlichdimensionalen komplexen euklidischen Raume und im komplexen Hilbertschen Raume leicht schließen kann, folgt aus der Beschränktheit von A die Beschränktheit von A^* und die Gleichung

$$|A^*| = |A|. \tag{31}$$

D e f i n i t i o n 12. *Ein linearer Operator A in $\mathfrak{R}$ heiße s e l b s t a d j u n g i e r t, wenn A^* existiert und mit A identisch ist.*

S a t z 23. *Ist $\mathfrak{R}$ vollständig, dann existiert zu jedem beschränkten linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ der adjungierte lineare Operator.*

B e w e i s. Wenn A beschränkt ist, dann ist $(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ein beschränktes lineares Funktional in $\mathfrak{x}$. Es gibt daher nach Satz 11 zu jedem $\mathfrak{y}$ genau ein Element $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{R}$, so daß für alle $\mathfrak{x}$ $(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$ ist. Dieses Element $\mathfrak{u}$ ist aber offenbar eine lineare Funktion von $\mathfrak{y}$.

Definition 13. *Ein linearer Operator E in $\mathfrak{R}$ heiße ein* **Einzeloperator**, *wenn er selbstadjungiert ist und der Gleichung*

$$E^2 = E \tag{32}$$

genügt.

Ist $\mathfrak{M}$ die lineare Mannigfaltigkeit aller Elemente von $\mathfrak{R}$ von der Form $E\mathfrak{y}$, dann ist $\mathfrak{M}$ regulär und in Gleichung (23) ist $\mathfrak{t} = E\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{n} = \mathfrak{x} - E\mathfrak{x}$ zu setzen. Da somit stets $|E\mathfrak{x}| \leqq |\mathfrak{x}|$ ist, ist jeder Einzeloperator beschränkt. Umgekehrt gibt es zu jeder regulären linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ genau einen Einzeloperator, der mit $\mathfrak{M}$ in der hier auseinandergesetzten Beziehung steht. Sämtliche von J. v. NEUMANN **5**, S. 74 bis 78 über Einzeloperatoren (dort „Projektionsoperatoren") abgeleiteten Sätze lassen sich auf beliebige komplexe euklidische Räume übertragen; gewisse dieser Sätze sind allerdings nur unter der Voraussetzung der Vollständigkeit des Raumes richtig. Ein spezieller Einzeloperator ist die Identität (der Einheitsoperator, die Einheit); diese wollen wir ebenso wie J. v. NEUMANN **5** mit 1 bezeichnen.

Definition 14. *Ein Einzeloperator $E(\lambda)$ in $\mathfrak{R}$, der von einer reellen Veränderlichen λ abhängt, heiße eine* **Zerlegung der Einheit**, *wenn erstens für $\lambda < \mu$ und beliebiges $\mathfrak{x}$ stets*

$$(E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \leqq (E(\mu)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \tag{33}$$

ist und zweitens für beliebiges $\mathfrak{x}$

$$\lim_{\lambda \to \infty} (E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \tag{34}$$

und

$$\lim_{\lambda \to -\infty} (E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0 \tag{35}$$

ist.

Definition 15. *Ist ein Polynom $P(\lambda)$ durch die Gleichung*

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k \tag{36}$$

erklärt und A ein linearer Operator in einem komplexen linearen Raume $\mathfrak{R}$, dann soll unter $P(A)$ der lineare Operator in $\mathfrak{R}$ verstanden werden, welcher durch die Gleichung

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k \tag{37}$$
$$(A^0 = 1, \; A^k = A^{k-1} A)$$

definiert ist.

Satz 24. *Genügt ein selbstadjungierter linearer Operator A in einem komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ für beliebige $\mathfrak{x}$ vom absoluten Betrage Eins der Ungleichung*

$$(38) \qquad a \leqq (A\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \leqq b$$

($(A\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ muß reell sein) *und genügt das Polynom $P(\lambda)$ mit reellen Koeffizienten für $a \leqq \lambda \leqq b$ der Ungleichung $P(\lambda) \geqq 0$, dann ist für beliebiges $\mathfrak{x}$*

$$(P(A)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \geqq 0.$$

Dieser Satz kann allgemein ebenso bewiesen werden, wie ihn F. Riesz **9**, S. 32 und 33 für den speziellen Fall des komplexen Hilbertschen Raumes bewiesen hat. Aus dem Umstande, daß dieser Satz für beliebige komplexe euklidische Räume gilt, ergibt sich nun ohne weiteres, daß man nach Angabe eines beschränkten selbstadjungierten linearen Operators A in einem *vollständigen* komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ jeder für $a \leqq \lambda \leqq b$ definierten reellen Funktion $f(\lambda)$, welche in diesem Intervalle beschränkt ist und Grenzfunktion einer monoton nicht abnehmenden Folge von Polynomen ist, auf die von F. Riesz **8** und **9** auseinandergesetzte Weise eindeutig einen selbstadjungierten linearen Operator $f(A)$ in $\mathfrak{R}$ zuordnen kann; dasselbe gilt dann auch von der Differenz zweier Funktionen der betrachteten Art.

Von nun an soll in diesem Paragraphen unter $\mathfrak{R}$ stets ein *vollständiger* komplexer euklidischer Raum verstanden werden. Es soll nun die bisherige Definition des linearen Operatores in $\mathfrak{R}$ durch folgende allgemeinere Definition ersetzt werden:

Definition 16. *Unter einem linearen Operator in $\mathfrak{R}$ verstehe man eine lineare Abbildung von einer in $\mathfrak{R}$ überall dichten linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$ in dem Raum $\mathfrak{R}$.*

Die Ausdrucksweise „$\mathfrak{S}$ ist in $\mathfrak{R}$ überall dicht" soll dasselbe bedeuten wie „die abgeschlossene lineare Hülle (es würde hier genügen zu sagen: die abgeschlossene Hülle) von $\mathfrak{S}$ fällt mit $\mathfrak{R}$ zusammen".

Ist A ein linearer Operator in $\mathfrak{R}$ und ist die lineare Mannigfaltigkeit derjenigen $\mathfrak{y}$, für welche $(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ein *beschränktes* lineares Funktional in $\mathfrak{x}$ ist, in $\mathfrak{R}$ ebenfalls überall dicht, dann wollen wir für diese $\mathfrak{y}$ den zu A *adjungierten* linearen Operator A^* definieren und unter $A^*\mathfrak{y}$ dasjenige (nach Satz 11 existierende und eindeutig bestimmte) Element $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{R}$ verstehen, welches für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ der Gleichung

$$(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$$

genügt. Auch ein linerarer Operator A in diesem allgemeineren Sinne soll *selbstadjungiert* heißen, wenn A^* existiert und gleich A ist. — Ein linearer Operator A soll mit einem überall sinnvollen linearen Operator B *vertauschbar* heißen, wenn für jedes $\mathfrak{x}$, für welches $A\mathfrak{x}$ Sinn hat (d. h. $\mathfrak{x}$ der in Definition 16 genannten linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$ angehört) auch $A(B\mathfrak{x})$ Sinn hat und gleich $B(A\mathfrak{x})$ ist.

Satz 25. (Zerlegungssatz von F. RIESZ.) *Zu jedem selbstadjungierten linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ gibt es einen und nur einen Einzeloperator E_0 in $\mathfrak{R}$ von folgenden Eigenschaften:*

1. *E_0 ist mit A und mit allen mit A vertauschbaren beschränkten, überall sinnvollen Operatoren in $\mathfrak{R}$ vertauschbar.*

2. *Es ist für alle $\mathfrak{x}$, für welche $A\mathfrak{x}$ Sinn hat,*

$$(E_0 A\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \leqq 0 \tag{39}$$

und

$$([1 - E_0] A\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \geqq 0. \tag{40}$$

3. *Aus $A\mathfrak{x} = 0$ folgt $E_0\mathfrak{x} = 0$.*

Der Beweis dieses Satzes kann allgemein ebenso geführt werden, wie ihn F. RIESZ **9**, S. 31 bis 44 für den Spezialfall des komplexen Hilbertschen Raumes geführt hat.

Satz 26. *Es sei $E(\lambda)$ eine Zerlegung der Einheit.* (Definition 14.) *Wenn das Integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$$

endlich ist, so gibt es immer genau ein $\mathfrak{x}^*$, so daß für alle $\mathfrak{y}$

$$(\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{41}$$

ist. (Das Integral rechts ist absolut konvergent.) *Wir definieren für diese $\mathfrak{x}$ eine Funktion $A\mathfrak{x}$ und zwar durch $A\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^*$* ($\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}$ sind Elemente von $\mathfrak{R}$.)

Dann ist A ein selbstadjungierter linearer Operator in $\mathfrak{R}$ und jeder selbstadjungierte lineare Operator in $\mathfrak{R}$ kann mit Hilfe einer Zerlegung der Einheit auf diese Weise erzeugt werden. Durch die Zusatzforderung, es solle stets

$$\lim_{\mu \to \lambda - 0} (E(\mu)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$$

sein, ist diese Zerlegung der Einheit auch eindeutig bestimmt.

Dieser Satz kann allgemein ebenso bewiesen werden, wie ihn J. v. Neumann **5** und F. Riesz **9** für den speziellen Fall des komplexen Hilbertschen Raumes bewiesen haben. Genügt die Zerlegung der Einheit $E(\lambda)$ der zuletzt genannten Forderung, dann ist $E(\lambda)$ der nach Satz 25 bestimmte Einzeloperator E_0, welcher zu dem selbstadjungierten linearen Operator $A-\lambda.1$ gehört.

Ist $E(\lambda)$ eine Zerlegung der Einheit, dann gibt es Einzeloperatoren $G(\lambda)$, so daß stets

$$(42) \qquad (G(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \lim_{\mu\to\lambda+0}(E(\mu)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) - \lim_{\mu\to\lambda-0}(E(\mu)\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$$

ist. Die Menge der Stellen λ, für welche $G(\lambda) \neq 0$ ist, heiße das *Punktspektrum* und die genannten Stellen λ selbst die *Punkteigenwerte* des zugehörigen selbstadjungierten linearen Operators A. Das Punktspektrum eines selbstadjungierten linearen Operators A in einem beliebigen vollständigen komplexen euklidischen Raume *muß nicht abzählbar sein.*

Definition 17. *Ein linearer Operator A in einem komplexen euklidischen Raume heiße vollstetig, wenn die Gleichung*

$$(13) \qquad \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$$

stets

$$\lim_{n\to\infty} A\mathfrak{x}_n = A\mathfrak{x}$$

nach sich zieht.

(In der Literatur kommen auch andere Definitionen der Vollstetigkeit eines linearen Operators in einem linearen metrischen Raume vor; diese sind aber im Falle eines euklidischen Raumes unserer Definition 17 äquivalent.)

Satz 27. *Ein selbstadjungierter linearer Operator A in $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann vollstetig, wenn*

1. *A kein Streckenspektrum besitzt, d. h. aus $G(\lambda)\mathfrak{x} = 0$ für alle λ $\mathfrak{x} = 0$ folgt;*

2. *die Menge der Punkteigenwerte entweder endlich ist oder zwar unendlich ist, aber nur die einzige Häufungsstelle Null besitzt* (in diesem Falle muß diese Menge daher abzählbar sein) *und*

3. *die linearen Mannigfaltigkeiten, welche zu den Einzeloperatoren $G(\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ gehören, endliche Dimensionszahlen besitzen.*

Auch dieser Satz kann allgemein ebenso bewiesen werden wie für den Hilbertschen Raum. (Hilbert **3,** S. 201 bis 203.) Aus den Sätzen 26 und 27 folgt, daß es zu einem vollstetigen selbstadjungierten linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ stets eine endliche oder unendliche Folge von Elementen $\mathfrak{e}_k$ von $\mathfrak{R}$ und eine zugehörige Folge reeller Zahlen λ_k gibt, welche folgenden Gleichungen genügen:

$$(\mathfrak{e}_k, \mathfrak{e}_l) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l, \\ 1 & \text{für } k = l, \end{cases} \tag{43}$$

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0 \qquad \text{(wenn eine unendliche Folge vorliegt),} \tag{44}$$

$$A\mathfrak{x} = \sum_k \lambda_k (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_k)\, \mathfrak{e}_k. \tag{45}$$

Auch die von J. v. NEUMANN **5,** S. 115 und 116 und **6,** S. 410 bis 412 ausgesprochenen Sätze über die Spektralzerlegung sogenannter *normaler* Operatoren gelten für beliebige vollständige komplexe euklidische Räume. Die in den genannten Abhandlungen geführten Beweise lassen sich nämlich fast ohne Änderung des Wortlautes auf unseren allgemeinen Fall übertragen.

§ 3 Beweis weiterer Sätze über komplexe euklidische Räume unter Anwendung des Wohlordungssatzes.

Einen vollständigen komplexen euklidischen Raum $\mathfrak{R}$ kann man auf folgende Weise definieren. Man verstehe unter den Elementen von $\mathfrak{R}$ die komplexwertigen Funktionen $\varphi(u)$, deren Argument u die Elemente irgendeiner Menge $\mathfrak{N}$ durchläuft; dabei soll jedoch $\varphi(u)$ nur für höchstens abzählbar viele solche Elemente von Null verschieden sein, und wenn u_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Elemente von $\mathfrak{N}$ von der Beschaffenheit sind, daß für $u \neq u_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $\varphi(u) = 0$ ist, dann soll außerdem die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(u_n)|^2$ konvergieren. Die Summe zweier solcher Funktionen und das Produkt einer solchen Funktion mit einer komplexen Zahl sind dann wieder von derselben Beschaffenheit. Wir wollen daher die Summe zweier Elemente von $\mathfrak{R}$ und das Produkt eines Elementes von $\mathfrak{R}$ mit einer komplexen Zahl durch die Festsetzung definieren, daß diese Operationen mit den Werten der betreffenden Funktionen $\varphi(u)$ ausgeführt werden sollen. Sind ferner $\mathfrak{x} = \{\varphi(u)\}$ und $\mathfrak{y} = \{\psi(u)\}$ zwei Elemente von $\mathfrak{R}$ und ist für $u \neq u_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $\varphi(u) = 0$ und $\psi(u) = 0$, dann soll das innere Produkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der beiden Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ durch die Gleichung

$$(46)\qquad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(u_n)\,\overline{\psi(u_n)}$$

definiert werden; es ist nämlich leicht einzusehen, daß die auf der rechten Seite von (46) stehende unendliche Reihe absolut konvergiert. Man kann unschwer erkennen, daß durch die vorstehenden Festsetzungen wirklich ein komplexer euklidischer Raum definiert ist. Ebenso kann man erkennen, daß dieser komplexe euklidische Raum auch vollständig ist; man muß nur beachten, daß einerseits die Vereinigungsmenge abzählbar vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist und daß andererseits der komplexe Hilbertsche Raum vollständig ist. Die Elemente von $\mathfrak{R}$ von der Eigenschaft, daß an einer einzigen Stelle u_0 $\varphi(u) = 1$ und sonst $\varphi(u) = 0$ ist, bilden ein System paarweise orthogonaler Elemente vom absoluten Betrage Eins. Ist daher die Menge $\mathfrak{N}$ weder endlich noch abzählbar, dann ist $\mathfrak{R}$ sicher weder ein endlichdimensionaler komplexer euklidischer Raum noch ein komplexer Hilbertscher Raum. — Komplexe euklidische Räume $\mathfrak{R}$, die äquivalenten Mengen $\mathfrak{N}$ entsprechen, sind offenbar isomorph. — Den Fall, daß $\mathfrak{N}$ die Menge der reellen Zahlen ist, behandelt J. v. NEUMANN **7**, S. 37 und 38.

Definition 18. *Ist $\aleph$ eine beliebige Kardinalzahl, dann soll ein vollständiger komplexer euklidischer Raum $\mathfrak{R}_\aleph$ folgendermaßen definiert werden: man setze irgendeine Menge $\mathfrak{N}$ von der Mächtigkeit $\aleph$ fest und ordne hierauf dieser Menge auf die eben beschriebene Art einen vollständigen komplexen euklidischen Raum zu. Dieser vollständige komplexe euklidische Raum soll $\mathfrak{R}_\aleph$ heißen.*

$\mathfrak{R}_\aleph$ ist speziell ein endlichdimensionaler komplexer euklidischer Raum, wenn $\aleph$ eine endliche Kardinalzahl, und der komplexe Hilbertsche Raum, wenn $\aleph$ die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen ist.

Definition 19. *Unter einem vollständigen normierten Orthogonalsystem von Elementen eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ verstehe man eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{R}$ von folgenden Eigenschaften:*

1. *es ist stets* $|\mathfrak{e}| = 1$;
2. *für* $\mathfrak{e}_1 \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}_2 \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}_1 \neq \mathfrak{e}_2$ *ist* $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2) = 0$ *und*
3. *es gibt kein vom Nullelement verschiedenes Element von $\mathfrak{R}$, welches zu allen $\mathfrak{e}$ orthogonal ist.*

In einem $\mathfrak{R}_\aleph$ bilden die bereits betrachteten Funktionen $\varphi(u)$, welche für ein Element von $\mathfrak{R}$ gleich Eins und sonst gleich Null sind, ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem.

Satz 28. *In jedem vollständigen komplexen euklidischen Raume gibt es mindestens ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem.*

Beweis. Man ordne jeder Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ als ausgezeichnetes Element ein Element $\mathfrak{x}(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ unter folgender einschränkender Bedingung zu: wenn es Elemente von $\mathfrak{M}$ gibt, welche den absoluten Betrag Eins haben und zu allen Elementen der Komplementärmenge von $\mathfrak{M}$ orthogonal sind, dann soll $\mathfrak{x}(\mathfrak{M})$ ein solches Element sein; andernfalls darf $\mathfrak{x}(\mathfrak{M})$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{M}$ sein. Es gibt dann genau eine Wohlordnung von $\mathfrak{R}$ von der Eigenschaft, daß jedes Element $\mathfrak{x}$ das ausgezeichnete Element der Komplementärmenge des durch $\mathfrak{x}$ bestimmten Abschnittes ist. Ist in dieser Wohlordnung $\mathfrak{x}_0$ das erste Element, welches nicht die Eigenschaft hat, den absoluten Betrag Eins zu besitzen und zu allen seinen Vorgängern orthogonal zu sein, dann ist der durch $\mathfrak{x}_0$ bestimmte Abschnitt offenbar ein wohlgeordnetes vollständiges normiertes Orthogonalsystem von $\mathfrak{R}$.

Satz 29. *Ein vollständiger komplexer euklidischer Raum ist die vollständige lineare Hülle jedes seiner vollständigen normierten Orthogonalsysteme.*

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Satze 16.

Satz 30. *Besitzen zwei vollständige komplexe euklidische Räume vollständige normierte Orthogonalsysteme von gleicher Mächtigkeit, dann sind sie isomorph.*

Beweis. Nach Satz 10 sind diese beiden vollständigen normierten Orthogonalsysteme isomorph, nach den Sätzen 1 und 29 daher auch die Räume selbst.

Ein Spezialfall des Satzes 30 ist der

Satz 31. *Hat ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes die Mächtigkeit $\aleph$, dann ist dieser Raum $\mathfrak{R}_\aleph$ isomorph.*

Aus der zu Satz 1 gemachten Bemerkung ergibt sich auch, wie man in diesem Falle eine unitäre Abbildung zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_\aleph$, d. h. eine eineindeutige lineare Abbildung zwischen diesen beiden Räumen, welche die absoluten Beträge ungeändert läßt, herstellen kann. Man stelle zunächst eine eineindeutige Zuordnung zwischen dem vollständigen normierten Orthogonalsystem von $\mathfrak{R}$ und der früher betrachteten Menge $\mathfrak{N}$ her. Dasjenige Element des vollständigen normierten Orthogonalsystems von $\mathfrak{R}$, welches dabei dem Element u von $\mathfrak{N}$ zugeordnet ist, möge $\mathfrak{e}(u)$ heissen. Dasjenige Element von $\mathfrak{R}_{\aleph}$, dessen zugehörige Funktion $\varphi(u)$ an der Stelle $u=u_0$ gleich Eins und sonst gleich Null ist, möge $\mathfrak{f}(u_0)$ heißen. Nun ist durch die Festsetzung, daß dem Element $\mathfrak{e}(u)$ von $\mathfrak{R}$ das Element $\mathfrak{f}(u)$ von $\mathfrak{R}_{\aleph}$ zugeordnet sein soll, eine unitäre Abbildung zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_{\aleph}$ eindeutig bestimmt. Man hat nämlich jeder Linearkombination endlich vieler $\mathfrak{e}(u)$ die entsprechende Linearkombination der $\mathfrak{f}(u)$ zuzuordnen. Ist aber $\mathfrak{x}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$, dann ist $\mathfrak{x}$ starkes Grenzelement einer Folge von Linearkombinationen endlich vieler $\mathfrak{e}(u)$; die entsprechenden Linearkombinationen der $\mathfrak{f}(u)$ bilden dann eine starke Fundamentalfolge, welche wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}_{\aleph}$ gegen ein Element $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}_{\aleph}$ stark konvergiert; dieses Element $\mathfrak{y}$ ist davon unabhängig, welche gegen $\mathfrak{x}$ stark konvergente Folge von Linearkombinationen endlich vieler $\mathfrak{e}(u)$ man gewählt hat: dieses Element $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}_{\aleph}$ muß dem Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ zugeordnet werden.

Ist $\varphi(u)$ die Funktion, durch welche das Element $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}_{\aleph}$ definiert ist, und ist für $u \neq u_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ $\varphi(u)=0$, dann ist offenbar

$$(47) \qquad \mathfrak{y}=\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(u_n)\, \mathfrak{f}(u_n),$$

wo das Summenzeichen im Sinne der starken Konvergenz zu verstehen ist. Daher ist diesem $\mathfrak{y}$ das Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ zugeordnet, welches durch die Gleichung

$$(48) \qquad \mathfrak{x}=\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(u_n)\, \mathfrak{e}(u_n)$$

gegeben ist. Andererseits hat man offenbar

$$(49) \qquad (\mathfrak{y}, \mathfrak{f}(u))=\varphi(u),$$

daher ist auch

$$(50) \qquad (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}(u))=\varphi(u)$$

und man erhält auf Grund von (48) den

S a t z 32. *Ist $\mathfrak{M}$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{x}$ ein* *beliebiges Element von* $\mathfrak{R}$, *dann sind von den Zahlen* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})$ *mit* $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$ *höchstens abzählbar viele von Null verschieden. Ist weiter* $\mathfrak{e}_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *und* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}) = 0$ *für* $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, *dann ist*

$$\mathfrak{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n, \tag{51}$$

wobei das Summenzeichen im Sinne der starken Konvergenz zu verstehen ist.

Diesen Satz kann man übrigens auch unabhängig von den früheren Überlegungen nur unter Benützung des Satzes 28 (und der Definition des vollständigen komplexen euklidischen Raumes) beweisen. Sind nämlich $\mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, \ldots, p)$ endlich viele Elemente von $\mathfrak{M}$, dann ist

$$\sum_{n=1}^{p} |(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)|^2 + \left| \mathfrak{x} - \sum_{n=1}^{p} (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n \right|^2 = |\mathfrak{x}|^2 \tag{52}$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{p} |(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)|^2 \leqq |\mathfrak{x}|^2. \tag{53}$$

Aus (53) folgt, daß von den Zahlen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})$ mit $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$ höchstens abzählbar viele von Null verschieden sein können. Ist weiter $\mathfrak{e}_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}) = 0$ für $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, dann ist wegen (53) die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)|^2$ konvergent und es bilden daher die Elemente $\sum_{n=1}^{p} (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ eine starke Fundamentalfolge; diese muß daher wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ stark konvergieren. Wird ihr Grenzelement mit $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n$ bezeichnet, dann ist $\mathfrak{x} - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n$ zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal; also muß

$$\mathfrak{x} - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n = 0$$

sein, d. h. die in Satz 32 behauptete Gleichung (51) besteht.

Aus diesem so unabhängig von den früheren Überlegungen bewiesenen Satze 32 ergibt sich auch ein neuer Beweis des Satzes 11. Es sei L ein beschränktes lineares Funktional in $\mathfrak{R}$ und es seien wieder $\mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, \ldots, p)$ endlich viele Elemente des vollständigen normierten Orthogonalsystems $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$. Dann ist

$$L\sum_{n=1}^{p}(\overline{L\mathfrak{e}_n})\,\mathfrak{e}_n=\sum_{n=1}^{p}|L\mathfrak{e}_n|^2$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{p}|L\mathfrak{e}_n|^2\leqq|L|\left|\sum_{n=1}^{p}(\overline{L\mathfrak{e}_n})\,\mathfrak{e}_n\right|=|L|\sqrt{\sum_{n=1}^{p}|L\mathfrak{e}_n|^2},$$

also

$$\sum_{n=1}^{p}|L\mathfrak{e}_n|^2\leqq|L|^2. \tag{54}$$

Somit sind von den Zahlen $L\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{e}\in\mathfrak{M}$ höchstens abzählbar viele von Null verschieden; ist $\mathfrak{e}_n\in\mathfrak{M}$ für $n=1,2,3,\ldots$ und für $\mathfrak{e}\in\mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}\neq\mathfrak{e}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ $L\mathfrak{e}=0$, dann ist die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|L\mathfrak{e}_n|^2$ konvergent und daher die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{L\mathfrak{e}_n})\,\mathfrak{e}_n$ stark konvergent. Man setze

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{L\mathfrak{e}_n})\,\mathfrak{e}_n=\mathfrak{u}. \tag{55}$$

Ist jetzt $\mathfrak{x}$ irgendein Element von $\mathfrak{R}$, dann kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß für $\mathfrak{e}\in\mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}\neq\mathfrak{e}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ $(\mathfrak{x},\mathfrak{e})=0$ und daher

$$\mathfrak{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{x},\mathfrak{e}_n)\,\mathfrak{e}_n \tag{51}$$

ist. Dann ist aber

$$L\mathfrak{x}=L\sum_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{x},\mathfrak{e}_n)\,\mathfrak{e}_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{x},\mathfrak{e}_n)\,L\mathfrak{e}_n;$$

es ist aber nach (51) und (55) auch

$$(\mathfrak{x},\mathfrak{u})=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{x},\mathfrak{e}_n)\,L\mathfrak{e}_n.$$

Also ist

$$L\mathfrak{x}=(\mathfrak{x},\mathfrak{u}), \tag{22}$$

wie in Satz 11 behauptet wird. (Der in § 2 gegebene Beweis des Satzes 11 hat gegenüber diesem Beweise den Vorzug, daß er ohne Benützung des Wohlordnungssatzes auskommt.)

Wir haben in Satz 31 festgestellt, daß jeder vollständige komplexe euklidische Raum $\mathfrak{R}$ einem $\mathfrak{R}_{\aleph}$ isomorph ist. Ich behaupte nun, daß *jedes* $\mathfrak{R}$ *auch nur einem* $\mathfrak{R}_\aleph$ *isomorph ist.* Um das zu beweisen, genügt es offenbar, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 33. *Zwei verschiedene vollständige normierte Orthogonalsysteme eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes* $\mathfrak{R}$ *haben stets die gleiche Mächtigkeit.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{M}^{(1)}$ und $\mathfrak{M}^{(2)}$ zwei vollständige normierte Orthogonalsysteme von $\mathfrak{R}$. Ist $e^{(1)}$ ein Element von $\mathfrak{M}^{(1)}$, dann sind von den Zahlen $(e^{(1)}, e^{(2)})$ mit $e^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$ höchstens abzählbar viele von Null verschieden; ist $e_n^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und ist für $e^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$, $e^{(2)} \neq e_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $(e^{(1)}, e^{(2)}) = 0$, dann ist (vergleiche (51))

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(e^{(1)}, e_n^{(2)})|^2 = 1. \tag{56}$$

Aus (56) folgt, daß bei festem $e^{(1)} \in \mathfrak{M}^{(1)}$ von den Zahlen $(e^{(1)}, e^{(2)})$ mit $e^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$ mindestens eine von Null verschieden ist. Man kann nun in ganz entsprechender Weise schließen, daß auch bei festem $e^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$ von den Zahlen $(e^{(1)}, e^{(2)})$ mit $e^{(1)} \in \mathfrak{M}^{(1)}$ mindestens eine von Null verschieden ist. Jedes Element $e^{(2)}$ von $\mathfrak{M}^{(2)}$ kommt daher mindestens in einer der oben betrachteten Folgen $e_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, welche den Elementen $e^{(1)}$ von $\mathfrak{M}^{(1)}$ zugeordnet sind, wirklich vor. Also ist $\mathfrak{M}^{(2)}$ die Vereinigungsmenge einer mit $\mathfrak{M}^{(1)}$ äquivalenten Gesamtheit abzählbarer Mengen. Sind also $\aleph^{(1)}$ und $\aleph^{(2)}$ die Mächtigkeiten von $\mathfrak{M}^{(1)}$ und $\mathfrak{M}^{(2)}$ und ist $\aleph_0$ die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen, dann ist

$$\aleph^{(2)} \leqq \aleph_0 \aleph^{(1)}. \tag{57}$$

Man kann nun annehmen, daß die Mengen $\mathfrak{M}^{(1)}$ und $\mathfrak{M}^{(2)}$ unendlich sind, weil für den entgegengesetzten Fall Satz 33 als bekannt angesehen werden kann. Für jede *unendliche* Kardinalzahl $\aleph$ ist aber

$$\aleph_0 \aleph = \aleph. \tag{58}$$

(S. z. B. F. Hausdorff, *Mengenlehre,* 1. Auflage (Leipzig, 1914), S. 127 oder 2. Auflage (Leipzig, 1927), S. 71.) Also folgt aus der Ungleichung (57)

$$\aleph^{(2)} \leqq \aleph^{(1)}. \tag{59}$$

Da man ebenso die Ungleichung $\aleph^{(1)} \leqq \aleph^{(2)}$ beweisen kann, ergibt sich die Gleichung

$$\aleph^{(2)} = \aleph^{(1)}. \tag{60}$$

Damit ist Satz 33 bewiesen. Aus Satz 33 folgt insbesondere auch, daß *die komplexen euklidischen Räume* $\mathfrak{R}_{\aleph^{(1)}}$ *und* $\mathfrak{R}_{\aleph^{(2)}}$ *mit* $\aleph^{(1)} \neq \aleph^{(2)}$ *sicher nicht isomorph sind.*

Definition 20. *Ist* $\mathfrak{R}$ *ein vollständiger komplexer euklidischer Raum und* $\mathfrak{M}$ *ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem von* $\mathfrak{R}$, *dann heiße die Mächtigkeit von* $\mathfrak{M}$ *die Dimensionszahl von* $\mathfrak{R}$.

Der vollständige komplexe euklidische Raum $\mathfrak{R}_{\aleph}$ hat demnach die Dimensionszahl $\aleph$.

Definition 21. *Unter der Dimensionszahl eines beliebigen komplexen euklidischen Raumes verstehe man die Dimensionszahl seiner kleinsten vollständigen Erweiterung.*

Im Sinne dieser Definition 21 ist das Wort Dimensionszahl in der Überschrift dieser Arbeit zu verstehen.

Anmerkung. In analoger Weise, wie wir hier Satz 33 bewiesen haben, kann man auch beweisen, daß *je zwei Basen* $\mathfrak{B}^{(1)}$ *und* $\mathfrak{B}^{(2)}$ *eines komplexen linearen Raumes* $\mathfrak{R}$ *stets die gleiche Mächtigkeit haben.*

Unter einer *Basis* eines komplexen linearen Raumes $\mathfrak{R}$ soll dabei mit Hausdorff **2**, S. 395 eine Menge von Elementen von $\mathfrak{R}$ verstanden werden, von denen endlich viele stets linear unabhängig sind und deren lineare Hülle mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt.

In den Linearkombinationen endlich vieler Elemente von $\mathfrak{B}^{(2)}$, als welche man die Elemente von $\mathfrak{B}^{(1)}$ darstellen kann, muß nämlich jedes Element von $\mathfrak{B}^{(2)}$ mindestens einmal wirklich vorkommen; aus der gegenteiligen Annahme würde nämlich ein Widerspruch gegen die Voraussetzung folgen, daß endlich viele Elemente von $\mathfrak{B}^{(2)}$ stets linear unabhängig sind. Also ist $\mathfrak{B}^{(2)}$ die Vereinigungsmenge einer $\mathfrak{B}^{(1)}$ äquivalenten Gesamtheit endlicher Mengen. Man kann nun entsprechend weiter schließen wie beim Beweise des Satzes 33.

Literaturverzeichnis.

1. St. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Warschau, 1932).

2. F. Hausdorff, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **167** (1932), S. 294—311.

3. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 4. Mitteilung, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse,* 1906, S. 157—227.

4. S. Mazur, Über die Nullstellen linearer Operationen, *Studia Mathematica*, **2** (1930), S. 11—20.

5. J. v. Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Mathematische Annalen*, **102** (1930), S. 49—131.

6. J. v. Neumann, Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, *Mathematische Annalen*, **102** (1930), S. 370—427.

7. J. v. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin, 1932).

8. F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913).

9. F. Riesz, Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *diese Acta*, **5** (1930), S. 23—54.

10. E. Schmidt, Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **25** (1908), S. 53—77.

(Eingegangen am 24. Februar 1934.)

Zur Theorie des Hilbertschen Raumes.

Von FRIEDRICH RIESZ in Szeged.

1. Die folgenden anspruchslosen Bemerkungen betreffen die beiden wohlbekannten, für die Theorie des reellen oder komplexen Hilbertschen Raumes grundlegenden Sätze, die ich auch in einer früheren Arbeit der Behandlung an die Spitze stellte.[1])

Satz **A.** *Ist eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$ des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ nicht überall dicht in $\mathfrak{H}$, so gibt es ein Element g aus $\mathfrak{H}$ mit $|g|=1$, das zu allen Elementen aus $\mathfrak{L}$ orthogonal ist.*

Satz **B.** *Für jede lineare Funktion $l(f)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes „erzeugendes" Element g, so daß*

$$l(f)=(f,g).$$

Dabei ist unter einer linearen Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{H}$ eine Teilmenge zu verstehen, die mit f für jede komplexe Zahl c auch cf und mit f und g auch $f+g$ enthält. Eine in $\mathfrak{H}$ definierte (skalare) Funktion[2]) $l(f)$ heißt linear, wenn sie den Gleichungen $l(cf)=cl(f)$, $l(f+g)=l(f)+l(g)$ genügt und auf der Einheitskugel $|f|=1$ beschränkt ist.

Gewöhnlich stützt man den Beweis dieser beiden Sätze auf die Separabilität, d. i. auf das Vorhandensein einer abzählbaren, überall dichten Teilmenge des Hilbertschen Raumes; von dieser Teilmenge geht man auf bekannte Weise, durch die sogenannte Orthogonalisierung, zu einem vollständigen Orthogonalsystem und

---

[1]) Vgl., auch für die zugrunde liegenden Definitionen und Bezeichnungen, meine Arbeit: Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *diese Acta*, **5** (1930), S. 23—54.

[2]) Der Fall, wo $l(f)$ nur in einer in $\mathfrak{H}$ überall dichten linearen Mannigfaltigkeit definiert ist, braucht nicht besonders erörtert zu werden, da eine solche Funktion infolge der Linearitätsvoraussetzungen sich unmittelbar in eine in $\mathfrak{H}$ durchwegs definierte lineare Funktion erweitern läßt.

damit zur Darstellung des Raumes durch abzählbar viele Koordinaten über.[3])

Über Satz **A** habe ich in meiner angeführten Arbeit nebenbei bemerkt, daß dieser Satz auch ohne die Voraussetzung der Separabilität bewiesen werden kann, daß also der Satz von der durch dieses Postulat geforderten Dimensionsabgrenzung *nach oben* unabhängig ist. Ich dachte hiebei an die sich unmittelbar darbietende Übertragung einer von B. Levi für das Dirichletsche Prinzip schon in 1906 verwendeten Schlußweise.[4]) Aus Anfragen von verschiedenen Seiten ersehe ich, daß diese Schlußweise oder wenigstens ihre Verwendbarkeit für den Hilbertschen Raum nicht allgemein bekannt ist, so daß es gerechtfertigt erscheint, den Beweis in einer dem Wortlaute von Satz **A** entsprechenden Fassung und in teilweise vereinfachter Form hier durchzuführen.

Die unmittelbare Anregung zu diesen Zeilen verdanke ich der voranstehenden Arbeit,[5]) in welcher unter andern gezeigt wird, daß auch Satz **B** ohne Dimensionsabgrenzung nach oben richtig ist. Die Beweismethode besteht in einer Zurückführung des allgemeinen Falles auf den Hilbertschen. Ich werde hier zeigen — was mir seinerzeit entgangen ist — wie Satz **B** aus Satz **A** sozusagen unmittelbar folgt. Schließlich werde ich für Satz **B** auch einen direkten Beweis mitteilen. Dieser Beweis unterscheidet sich von jenem in der voranstehenden Arbeit (Sätze 12 und 13) dadurch, daß die ausschlaggebende Tatsache, daß nämlich die lineare Funktion $l(f)$ ihren Maximalwert auf der Einheitskugel $|f| = 1$ wirklich erreicht, aus einer elementaren Identität unmittelbar hervorgeht,

---

3) Vgl. z. B. M. H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Space*, (New-York, 1932), S. 22 und 62.

4) B. Levi, Sul principio di Dirichlet, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **22** (1906), S. 293–360, insbes. § 7. Vgl. auch H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig und Berlin, 1913), S. 101.

5) H. Löwig, Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl, *diese Acta*, **7** (1934), S. 1—33.

[Zusatz während der Korrektur. Vgl. auch die vor kurzem erschienene Arbeit: K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, *Math. Annalen*, **109** (1934), S. 465—487, insbes. S. 476—477, wo ein Korollar zu Satz **B**, über den Zusammenhang von beschränkten Bilinearformen und beschränkten Operatoren, ebenfalls ohne Orthogonalisierung, durch einen Gedankengang begründet wird, mit dem die hier unter **3** folgende Begründung von Satz B Berührungspunkte aufweist.]

die übrigens auch schon früher für den Beweis von Satz **A** verwendet wird und deren Inhalt, geometrisch gedeutet, im wohlbekannten Übereinstimmen der Quadratsumme der Diagonalen eines Parallelogramms mit jener der Seiten besteht.

2. Beweis von Satz A. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\mathfrak{L}$ abgeschlossen; laut Voraussetzung gibt es dann ein Element h aus $\mathfrak{H}$, das in $\mathfrak{L}$ nicht enthalten ist, für welches also die untere Grenze d der Werte

$$|h-f|=(h-f,\,h-f)^{1/2},$$

gebildet für sämtliche f aus $\mathfrak{L}$, von Null verschieden ist. Wir zeigen *a)* das Vorhandensein eines Elements f^* aus $\mathfrak{L}$, für welches genau

$$(1)\qquad |h-f^*|=d$$

ausfällt und *b)* die Orthogonalitätsbeziehung

$$(2)\qquad (h-f^*,f)=0$$

für alle f aus $\mathfrak{L}$. Damit wird dann auch Satz **A** bewiesen sein, indem nämlich das Element

$$g=\frac{1}{d}(h-f^*)$$

das geforderte leistet.

Um *a)* zu zeigen, sei $\{f_n\}$ eine Extremalfolge aus $\mathfrak{L}$, d. i. es sei

$$(3)\qquad |h-f_n|\to d.$$

Wir schließen hieraus, daß

$$(4)\qquad |f_n-f_m|\to 0$$

und damit das Vorhandensein eines Elementes f^* aus $\mathfrak{L}$, für welches $f_n\to f^*$, d. i.

$$(5)\qquad |f^*-f_n|\to 0$$

ist. Die Beziehung (1) folgt dann in wohlbekannter Weise aus (3) und (5) auf Grund der Dreiecksungleichung

$$|h-f^*|\leq|h-f_n|+|f^*-f_n|.$$

Um *a)* zu zeigen, haben wir also die Richtigkeit von (4) zu beweisen. Zu diesem Zwecke verwenden wir die für je zwei Elemente von $\mathfrak{H}$ geltende Identität

$$(6)\qquad |u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2-|u+v|^2.$$

Wir setzen darin $u=h-f_m$, $v=h-f_n$, also $u+v=2\left(h-\frac{f_m+f_n}{2}\right)$

und bemerken, daß auch $\frac{f_m+f_n}{2}$ in $\mathfrak{L}$ enthalten ist, daß also

$$\left|h-\frac{f_m+f_n}{2}\right| \geqq d$$

ausfällt. Wir erhalten

$$|f_m-f_n|^2 \leqq 2|h-f_m|^2+2|h-f_n|^2-4d^2 \to 2d^2+2d^2-4d^2=0$$

für $m, n \to \infty$ und damit die Beziehung (4).

Die Behauptung *b)*, d. i. die Beziehung (2), trivial für $f=0$, ergibt sich sonst in bekannter Weise aus der Ungleichung

$$-\bar{\lambda}(h-f^*, f)-\lambda(f, h-f^*)+\lambda\bar{\lambda}(f, f)=$$
$$=|h-f^*-\lambda f|^2-|h-f^*|^2 \geqq 0,$$

indem man darin für λ und $\bar{\lambda}$ die ebenfalls konjugierten Werte

$$\frac{(h-f^*, f)}{(f, f)}, \quad \frac{(f, h-f^*)}{(f, f)}$$

einsetzt.

3. Übergang von Satz A auf Satz B. Die Gesamtheit der Nullstellen von $l(f)$, d. i. jener Elemente f, für welche $l(f)=0$ ausfällt, bildet eine abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$. Abgesehen vom trivialen Fall, wo $l(f)$ identisch verschwindet, füllt $\mathfrak{L}$ den Raum $\mathfrak{H}$ nicht aus und es gibt daher nach Satz **A** ein Element g_0 mit $|g_0|=1$, das zu allen Elementen aus $\mathfrak{L}$ orthogonal ist. Setzt man $g=\overline{l(g_0)}\,g_0$, so ist somit

$$(7) \qquad l(f)=(f, g)$$

sowohl für $f=g_0$, wie auch für alle Elemente f aus $\mathfrak{L}$. Ist nun f_1 ein beliebiges Element aus $\mathfrak{H}$, so setze man $f_0=f_1-\mu g_0$ mit

$$\mu=\frac{l(f_1)}{l(g_0)},$$

so daß also $l(f_0)=0$ wird. Dann ist $f_1=f_0+\mu g_0$ dargestellt als lineare Verbindung der beiden Elemente f_0 aus $\mathfrak{L}$ und g_0; da nun für $f=f_0$ und $f=g_0$ die Beziehung (7) besteht und da beide Seiten von (7) in bezug auf f distributiv sind, so gilt (7) auch für $f=f_1$.

Damit ist Satz **B** bewiesen.

4. Direkter Beweis von Satz B. Laut Voraussetzung ist die Funktion $l(f)$ auf der Einheitskugel $|f|=1$ beschränkt; sei M die obere Grenze von $|l(f)|$. Wir zeigen *a)* daß diese obere Grenze wirklich erreicht wird, nämlich daß es ein Element f^*

gibt mit $|f^*|=1$, $l(f^*)=M$; *b)* daß $g=Mf^*$ das durch den Satz geforderte leistet.

Um *a)* zu zeigen, sei $\{f_n\}$ eine Folge von Elementen mit $|f_n|=1$, $|l(f_n)|\to M$. Wir können sogar annehmen, die Werte $l(f_n)$ seien reell und nichtnegativ und es gelte somit $l(f_n)\to M$; man hat hiezu nur jedes f_n mit einem geeigneten Zahlenfaktor vom Betrag 1 zu multiplizieren. Setzen wir dann in Formel (6) $u=f_m$, $v=f_n$ und bemerken wir noch, daß allgemein $|l(f)|\leqq M|f|$, also auch

$$l(f_m)+l(f_n)=l(f_m+f_n)\leqq M|f_m+f_n|$$

ist, so erhalten wir

$$|f_m-f_n|^2=4-|f_m+f_n|^2\leqq 4-\frac{1}{M^2}[l(f_m)+l(f_n)]^2\to 4-\frac{1}{M^2}4M^2=0$$

und damit die Existenz eines Elementes f^* mit

$$|f^*-f_n|\to 0,$$

also auch

$$|f^*|=1,\ l(f^*)=M.$$

Die Behauptung *b)*, daß nämlich $l(f)$ durch die Formel (7) mit $g=Mf^*$ dargestellt wird, ist nun zunächst für $f=f^*$ klar. Ferner ist f^* orthogonal zu sämtlichen Nullstellen f von $l(f)$. Denn für diese f ist

$$M^2=[l(f^*)]^2=[l(f^*-\lambda f)]^2\leqq M^2|f^*-\lambda f|^2=$$
$$=M^2\left(1-\lambda(f,f^*)-\bar\lambda(f^*,f)+\lambda\bar\lambda(f,f)\right),$$

also

$$-\bar\lambda(f^*,f)-\lambda(f,f^*)+\lambda\bar\lambda(f,f)\geqq 0;$$

daraus folgt durch die schon benutzte Schlußweise, nämlich durch Einsetzen von

$$\lambda=\frac{(f^*,f)}{(f,f)},\quad \bar\lambda=\frac{(f,f^*)}{(f,f)},$$

die Ungleichung $-|(f,f^*)|^2\geqq 0$ und damit $(f,f^*)=0$.

Formel (7) gilt also sowohl für $f=f^*$, wie auch für sämtliche Nullstellen f_0 von $l(f)$. Daraus schließen wir ihre allgemeine Gültigkeit ebenso, wie vorhin beim Übergang von Satz **A** auf Satz **B**, nämlich auf Grund der Zerlegung $f=f_0+\mu f^*$ mit $l(f_0)=0$.

(Eingegangen am 30. April 1934)

Ein kombinatorischer Satz.[1])

Von L. Rédei in Mezőtúr.

Für jedes Paar a_i, a_k $(i \neq k)$ der Elemente einer endlichen Menge $M = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(n \geqq 2)$ sei eine der Relationen $a_i \to a_k$ und $a_k \to a_i$ vorgeschrieben, so daß $a_i \to a_k$ und $a_k \to a_i$ einander ausschließen (das Zeichen „$\to$" braucht aber nicht transitiv zu sein, d. h. aus $x \to y$, $y \to z$ folgt nicht notwendig $x \to z$).

Die Permutation $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nenne ich *geordnet,* wenn $a'_i \to a'_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ stattfindet. Dann gilt der Satz:

I. *Die Anzahl der geordneten Permutationen ist eine ungerade Zahl.*[2]) [3])

---

1) Der Inhalt dieser Arbeit (insbesondere Satz III) wurde in einer anderen Einstellung als Hilfssatz schon in der in ungarischer Sprache erschienenen Arbeit des Verfassers: A másodfokú valós számtest osztályszámáról s alapegységéről (Über die Klassenzahl und Fundamentaleinheit des reellen quadratischen Zahlkörpers), *Mat. és természettud. értesitő,* 48 (1932), S. 648—682 veröffentlicht.

2) Ich gebe hier einige Äquivalente zu der in I gelösten Aufgabe an: **a)** Aus je zwei der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sei ein „Paar" x, y gebildet, so daß x, y nach Belieben in der natürlichen Reihenfolge oder in Inversion stehen mögen. Die Permutationen der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind zu bilden, bei denen je zwei benachbarte Elemente ein „Paar" bilden. **b)** Die Glieder einer Gesellschaft wollen sich in eine gerade Reihe stellen. Von je zwei Teilnehmern der Gesellschaft hatte aber einer und nur einer den anderen beleidigt, darum will keiner, daß ein solcher *unmittelbar* vor ihm stehe, der ihn beleidigt hatte. **c)** Gegebene positive Primzahlen der Gestalt $4k+3$ sind aneinanderzureihen, so daß jedes Glied (bis zum vorletzten) ein quadratischer Rest des (unmittelbar) folgenden sei. **d)** Man nimmt den zu den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gehörigen vollen Graph, d. h. die Gesamtheit der Strecken $A_i A_k$ und gibt jeder Strecke nach Belieben eine bestimmte Richtung. Man fragt um Permutationen A'_i der A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, bei welchen auch die Linie $A'_1 A'_2 \ldots A'_n$

Allgemeiner[4]) gilt:

II. *Die Anzahl der geordneten k-gliedrigen Variationen* ($k = 2, 3, \ldots, n$) *ist kongruent* $\binom{n}{k}$ (mod 2); *es gibt stets wenigstens* $\binom{n}{k}$ *solche Variationen.*

Dabei ist *geordnet* in ähnlichem Sinne zu deuten, wie bei Permutationen.

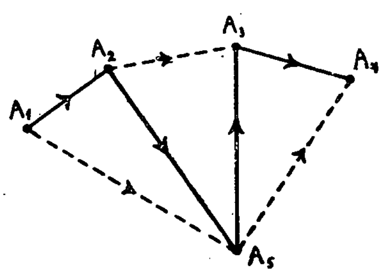
Modifiziert man die vorigen Feststellungen so, daß entweder $x \to y$ und zugleich $y \to x$, oder weder $x \to y$ noch $y \to x$ bestehen, falls wenigstens eines der Elemente x, y zu einer bestimmten Teilmenge M_0 von M gehört, für die Glieder von $M - M_0$[5]) sollen aber die ursprünglichen Bedingungen bestehen (insbesondere hat also $M - M_0$ wenigstens zwei Elemente), so gilt auch die folgende Verallgemeinerung von **I**:

III. *Die Anzahl der geordneten Permutationen ist gerade oder*

---

gerichtet ist, d. h. die Einfahrt dieser Linie von A_1' nach A_n' stets gemäß den Streckenrichtungen geschieht.

[3]) Es gibt also stets wenigstens eine geordnete Permutation. Dies haben, nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn P. VERESS, er und unabhängig von ihm Herr D. KÖNIG, der Fassung **d)** in [2]) anschließend folgendermaßen bewiesen: Die Existenz ist trivial in den Fällen $n = 2, 3$. Ist sie z. B. auch für $n = 4$ bestätigt, so gibt es durch die vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 eine Linie der vorgeschriebener Art; diese ist nach geeigneter Bezeichung $A_1 A_2 A_3 A_4$. Ist nun $A_1 A_5$ von A_5 nach A_1 gerichtet, so kann A_5 der Linie $A_1 \ldots A_4$ als erster Punkt angeschlossen werden; ist $A_4 A_5$ nach A_5 gerichtet, so ist die gewünschte, alle fünf Punkte verbindende Linie $A_1 \ldots A_4 A_5$. Es braucht also nur noch der Fall untersucht zu werden, in dem keine der vorigen beiden Annahmen zutrifft, d. h. $A_1 A_5$ *nach* A_5, und $A_4 A_5$ *von* A_5 nach A_4 gerichtet ist. In diesem Falle muß aber in der Vektorenfolge $A_1 A_5$, $A_2 A_5, \ldots, A_4 A_5$ mindestens einmal ein Richtungswechsel stattfinden, es muß also einen letzten Vektor, z. B. $A_2 A_5$, geben, der noch *nach* A_5 gerichtet ist. Dann ist $A_3 A_5$ von A_5 nach A_3 gerichtet, und somit ist in diesem Beispiel $A_1 A_2 A_5 A_3 A_4$ eine Linie der vorgeschriebener Art. Der Beweisgang ist allgemeingültig.



[4]) Die Frage nach dieser Verallgemeinerung rührt von Herrn T. GRÜNWALD her.

[5]) $M - M_0$ ist die Komplementärmenge von M_0 in bezug auf M.

ungerade, je nachdem M_0 nicht leer oder leer ist, wenn nur diejenigen Permutationen betrachtet werden, deren erstes und letztes Element zu $M-M_0$ gehören.[6])

Es folgt **II** sogleich aus **I**, wenn man letzteres für jede k-gliedrige Kombination von M anwendet und dann addiert.

Es genügt also nur noch **III** zu beweisen.

Dazu definiere ich $a_{ik}=1$ oder 0, je nachdem $a_i \to a_k$ besteht oder nicht. Ich setze überdies $(i)=0$ oder 1, je nachdem a_i zu M_0 oder zu $M-M_0$ gehört. Dann ist

(1) $$a_{ik}+a_{ki}\equiv (i)\,(k)\ (\mathrm{mod}\ 2) \qquad (i \neq k).$$[7])

Die Anzahl in **III** lautet ersichtlich

(2) $$h=\sum (1)\,(n)\,a_{12}\,a_{23}\,a_{34}\ldots a_{n-1,\,n}\,,$$

wobei auf der rechten Seite die Summe auf sämtliche Permutationen von $1, 2, \ldots, n$ auszudehnen ist. (Ist M_0 leer, so bleibt $(1)\,(n)$ weg.)

$\{n\}$ soll die Menge $(1, 2, \ldots, n)$ bedeuten; $e, e_1, e_2, \ldots$ seien Teilmengen von $\{n\}$; die leere Menge sei **O**. Für $e \subset \{n\}$ sei $e'=\{n\}-e$ die Komplementärmenge von e in bezug auf $\{n\}$. Ich bezeichne mit $e(D)$ denjenigen Hauptminor einer Determinante D der Ordnung n, bei welchen e die Menge der Indizes der Zeilen (und Spalten) ist, die zur Bildung des Minors angewendet sind;

---

6) Läßt man die letzte Forderung weg, so gilt keine Aussage von ähnlicher Allgemeinheit. — Auch **III** gestattet ähnliche Fassungen, wie **I** in der Fußnote 2). — Ich halte zwar die Verallgemeinerung **III** von **I** von weniger Bedeutung, doch habe ich sie aufgenommen, da ich nicht einmal **I** auf einem kürzeren Wege beweisen kann.

7) Sind die a_i verschiedene ungerade positive Primzahlen, von denen die von der Gestalt $4m+1$ die Menge M_0 bilden, d. h. $(i)=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{-1}{a_i}\right)\right)$, und ist $a_{ik}=1$ oder 0, je nachdem a_i quadratischer Rest von a_k ist oder nicht, d. h. $a_{ik}=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{a_i}{a_k}\right)\right)$, so sind nach dem quadratischen Reziprozitätssatze die Voraussetzungen von **III**, d. h. (1) befriedigt; (1) ist dann nämlich nichts anderes, als eine andere Ausdrucksweise des quadratischen Reziprozitätssatzes für die Primzahlen a_i, a_k. In **III** handelt es sich in diesem Falle um gewisse Aneinanderreihen von Primzahlen (der Spezialfall, wo M_0 leer ist, ist in der Fußnote 2) unter **c)** ausführlich erklärt) und die entsprechende Behauptung ist offenbar nicht minder allgemein, als **III** selbst. D. h. in **III** handelt es sich im wesentlichen um eine Relation in Legedre-Symbolen (vgl. (2)).

es ist $\mathbf{O}(D)=1$ zu verstehen. Ein beliebiges Glied $\pm a_{1b}a_{2c}\ldots$ der Determinante $|a_{ik}|$ und die Permutation $(b, c, \ldots)$ von $1, 2, \ldots, n$ nennen wir einander zugeordnet.

Es bezeichne A die Determinante $|a_{ik}|$ (i den Reihenindex), und A_k die Determinante, die entsteht, wenn in A die k-te Spalte durch $(k)(1), (k)(2), \ldots, (k)(n)$ ersetzt wird.

Ich setze

$$S_k = \sum_{1\in e} e(A_k) \,.\, e'(A_k), \tag{3}$$

wobei e diejenigen Teilmengen von $\{n\}$ durchläuft, die 1 enthalten.

Ich zeige zuerst, daß

$$h \equiv \sum_{k=1}^{n} S_k \pmod 2. \tag{4}$$

Ein beliebiges Glied g des entwickelten S_k ist nämlich vom Vorzeichen abgesehen ein Glied von A_k; als solches ist es zu einer Permutation $c_1 c_2 \ldots c_r$ der Elemente $1, 2, \ldots, n$ zugeordnet, wobei $c_1, c_2, \ldots, c_r$ Zyklen ohne gemeinsame Elemente sind (auch die eventuellen eingliedrigen Zyklen sind sämtlich aufzunehmen). Ist $r=1$, so kommt g unter den Gliedern von S_k nur einmal (nämlich für $e=\{n\}$) vor und somit liefern diese g in (4) vom Vorzeichen abgesehen die Glieder von (2). Es genügt also noch zu beweisen, daß die Summe der Glieder von S_k mit $r>1$ kongruent 0 (mod 2) ist. Ich nehme an, wie gestattet, daß c_1 das Element 1 enthält. Ist also $r>1$, so seien $c_u, c_v, \ldots$ einige der Zyklen $c_2, c_3, \ldots, c_r$ und es bedeute e_0 die Vereinigungsmenge der Elemente von $c_1, c_u, c_v, \ldots$ Der zu $e=e_0$ gehörige Summand von S_k enthält das ausgewählte Glied g multipliziert mit ± 1, und ein anderes e kommt nicht in Betracht. Somit kommt $\pm g$ in S_k genau 2^{r-1}-mal vor ($c_1, c_u, c_v, \ldots$ besteht nämlich möglicherweise aus c_1 allein), was eine gerade Zahl ist, und so erweist sich (4) als richtig.

Ich betrachte die Determinante $\bar{A}=|\bar{a}_{ik}|$, wobei

$$\bar{a}_{ik} = a_{ik} + (i)(k).$$

Leicht ersichtlich ist

$$\bar{A} = A + \sum_{k=1}^{n} A_k. \tag{5}$$

Andererseits ist nach (1) $\bar{a}_{ik} \equiv a_{ki} \pmod 2$, wenn $i \neq k$, während $\bar{a}_{ii} = (i)$. Vertauscht man also Zeilen und Spalten in $\bar{A}$, so weicht die erhaltene Determinante von A nur darin ab, daß die Hauptdiagonale $0, 0, \ldots, 0$ durch $(1), (2), \ldots, (n)$ ersetzt ist; entwickelt man dann nach den Elementen der Hauptdiagonale, so ergibt sich wegen (5)

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{n} A_k \equiv \sum_{e \neq \{n\}} e(A) \prod_{x \in e'} (x) \qquad (\text{mod } 2),$$

wobei x im Produkt die Elemente von e' durchläuft.

Es bedeute $\sum_k^* e(A_k)$ die Summe von $e(A_k)$ über die k mit $k \in e$, es bedeute aber die Null, wenn $e = \mathbf{O}$. Dann ist nach (4) und (3)

$$(7) \qquad h \equiv \sum_{1 \in e} \Big(e'(A) \sum_k^* e(A_k) + e(A) \sum_k^* e'(A_k)\Big) \qquad (\text{mod } 2)$$

(es ist nämlich z. B. $e'(A_k) = e'(A)$, wenn k nicht in e' ist). Da aber e und e' zusammen alle Teilmengen von $\{n\}$ durchlaufen, ist

$$(8) \qquad h \equiv \sum_e e'(A) \sum_k^* e(A_k) \qquad (\text{mod } 2).$$

Wendet man (6) statt A auf $e(A)$ an, so folgt

$$(9) \qquad \sum_k^* e(A_k) \equiv \sum_{e_1 \subset e}{}' e_1(A) \prod_{x \in e - e_1} (x) \qquad (\text{mod } 2),$$

wobei der Strich neben dem Summenzeichen bedeutet, daß $e_1 = e$ fortzulassen ist (offenbar ist (9) auch im Falle $e = \mathbf{O}$ richtig, da dann die linke Seite verschwindet, und die rechtseitige Summe leer ist).

Berücksichtigt man (9) in (8), so hat man

$$(10) \qquad h \equiv \sum_e \sum_{e_1 \subset e}{}' e'(A) \, . \, e_1(A) \prod_{x \in e - e_1} (x) \qquad (\text{mod } 2).$$

Alle Systeme e, e_1, die zu einem bestimmten $e - e_1 \neq \{n\}$ führen, lassen sich in Paare zusammenfassen, und zwar ist e, e_1 mit e_1', e' zu paaren (es ist auch $e' \subset e_1'$ und $e' \neq e_1'$, ferner $e \neq e_1'$, endlich $e_1' - e' = e - e_1$); die zugehörigen Glieder in (10) sind gleich und somit bleibt nur das dem Fall $e - e_1 = \{n\}$ gehörige Glied übrig. Dann muß $e = \{n\}$, $e_1 = \mathbf{O}$ sein, woraus $h \equiv (1)(2) \ldots (n)$ (mod 2), d. h. **III** folgt.

(Eingegangen am 31. März 1933.)

Zum Mengerschen Graphensatz.

Von GEORG HAJÓS in Budapest.

1. MENGER[1]) hat einen Satz über Graphen ausgesprochen. Beweise dieses Satzes haben MENGER[2]) selbst und KÖNIG[3]) gegeben. Wir werden im folgenden einen neuen Beweis desselben Satzes geben.

Bezüglich der Benennungen halten wir uns zur Arbeit von KÖNIG,[3]) wir ergänzen sie aber noch mit den folgenden Festsetzungen:

Wir betrachten nur endliche Graphen, lassen aber auch solche Knotenpunkte zu, in welche keine Kanten führen.

Zwei Wege, die aus einem Punkt ausgehen, oder zwei Punkte verbinden, heißen *fremd,* wenn sie außer den gemeinsamen Endpunkten keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Die *Summe* zweier Graphen wird durch jene Punkte und Kanten gebildet, welche mindestens in einem vorkommen; das *Produkt* zweier Graphen durch jene, welche in beiden vorkommen.

Ein *Grenzpunkt* des Teilgraphen G' von G ist ein solcher Knotenpunkt, der zu G' gehört, von dem aber in G auch eine solche Kante ausgeht, welche nicht zu G' gehört. Die Anzahl solcher Punkte von G' nennen wir die *Grenzpunktzahl* von G' bezüglich G und bezeichnen sie mit $G'(G)$.

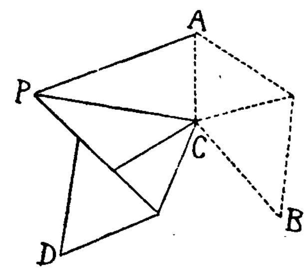
---

1) K. MENGER, Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fundamenta Mathematicae,* **10** (1927), S. 96—115.

2) K. MENGER, *Kurventheorie,* Leipzig (1932), S. 221—228.

3) D. KÖNIG, Über trennende Knotenpunkte in Graphen, *diese Acta,* **6** (1933), S. 155—179.

Wir führen noch einen Begriff ein, der im folgenden die Hauptrolle spielt. Betrachten wir in der nebenstehenden Figur die Knotenpunktmenge (A, B, C, D), so gibt es einen Teilgraphen (mit gestrichelten Kanten in der Figur), der P nicht enthält und aus der Punktmenge (A, B, C, D) drei Punkte (nämlich A, B, C) enthält, aber nur zwei Grenzpunkte hat (nämlich A und C). Betrachten wir aber die Punktmenge (A, C, D), so gibt es keinen ähnlichen Teilgraphen. Die Punkte dieser Menge liegen also sozusagen von P aus betrachtet in verschiedenen Richtungen, sie sind bezüglich P von einander separiert. Wir setzen fest:



Eine Knotenpunktmenge von G nennen wir bezüglich des Knotenpunktes P s e p a r i e r t, wenn jeder den Punkt P nicht enthaltende Teilgraph G' von G höchstens $G'(G)$ Punkte aus dieser Knotenpunktmenge enthält.

2. Es sei eine Knotenpunktmenge K von G gegeben, die aus k Punkten besteht und P sei ein Knotenpunkt, der nicht zu K gehört.

H i l f s s a t z. *Ist K bezüglich P separiert, so gibt es k fremde Wege in G, die P mit je einem Punkt von K verbinden.*

Wir nehmen an, daß unser Hilfssatz für Graphen mit einer kleineren Kantenzahl, als G, richtig ist (I); wenn wir daraus die Richtigkeit unserer Behauptung für G folgern können, so ist der Hilfssatz bewiesen, da er für Graphen mit einer einzigen Kante evident ist.

Es sei K eine aus k Punkten bestehende, bezüglich P separierte Knotenpunktmenge von G (II). Kein Punkt von K ist nur mit Punkten von K benachbart, sonst würde dieser Punkt samt seinen Kanten und deren Endpunkten einen mit II unverträglichen Graphen bilden. Wenn jeder Punkt von K mit P benachbart ist, so ist unser Hilfssatz evident. Wir dürfen also annehmen, daß es in K einen Punkt A gibt, welcher mit dem von P verschiedenen und nicht zu K gehörenden Punkt B benachbart ist. Die Menge aller Kanten AB bezeichnen wir mit (AB).

Durch Weglassen von (AB) aus G erhalten wir den Graphen G_1; durch Weglassen von A samt seinen Kanten erhalten wir G_2.

Durch Weglassen von A aus K erhalten wir die Knotenpunktmenge K'.

Wir behaupten, daß *entweder* K *in* G_1, *oder* $B+K'$ *in* G_2 *bezüglich* P *separiert ist.* Daraus folgt gemäß I, daß in G nach diesen und auch nach K fremde Wege von P führen (im zweiten Falle schließen wir an den Weg PB eine Kante BA an).

Nehmen wir das Gegenteil unserer Behauptung an. G_1 besitzt dann einen P nicht enthaltenden Teilgraphen G_1', welcher k_1 Punkte von K enthält, wobei $k_1 > G_1'(G_1)$. G_1' kann B nicht enthalten, sonst wäre $G_1'+(AB)$ in Widerspruch zu II. G_1' enthält aber A und alle seine Kanten außer (AB), sonst wäre G_1' in Widerspruch zu II. Es ist also $G_1'(G) = G_1'(G_1)+1$; da aber $G_1'(G_1) < k_1$ und wegen II $G_1'(G) \geqq k_1$ ist, so ist $G_1'(G) = k_1$.

Ähnlicherweise besitzt G_2 einen Teilgraphen G_2', welcher k_2 Punkte von $B+K'$ enthält, P aber nicht und es ist $k_2 > G_2'(G_2)$. G_2' enthält mindestens einen zu A benachbarten Punkt, sonst wäre G_2' in Widerspruch zu II. Wenn wir A und jene Kanten, die A mit Punkten von G_2' verbinden, zu G_2' anschließen, erhalten wir einen Graphen G_2''. G_2' enthält B, sonst enthielte G_2' k_2 Punkte von K, also wäre G_2'' in Widerspruch zu II. G_2' enthält aber nicht alle zu A benachbarten Punkte, da dann G_2'' in Widerspruch zu II wäre. G_2'' enthält also (AB) und A ist einer seiner Grenzpunkte in G, ferner enthält G_2'' k_2 Punkte von K; daher ist gemäß II $G_2''(G) \geqq k_2$. Da andererseits $G_2''(G) = G_2'(G_2)+1$ und $G_2'(G_2) < k_2$ ist, so ist $G_2''(G) = k_2$.

Dies alles zusammenfassend: G_1' enthält k_1 Punkte, G_2'' enthält k_2 Punkte von K und ihre Grenzpunktzahlen bezüglich G sind ebenfalls k_1 resp. k_2. A ist ein Grenzpunkt von beiden, G_2'' enthält (AB), G_1' alle andere Kanten von A.

Es sei $G_1'+G_2'' = G'$ und $G_1' . G_2'' = H$ (H ist eventuell leer); H enthalte h Punkte von K, G' enthält also k_1+k_2-h Punkte. Wir erhalten $G'(G)$, indem wir $G_1'(G)+G_2''(G)$, also k_1+k_2 durch $H(G)$ und durch die Anzahl derjenigen gemeinsamen Grenzpunkte von G_1' und G_2'' vermindern, welche keine Grenzpunkte von G' bezüglich G sind. (Es gibt mindestens einen solchen Punkt, nämlich A.) Wegen II ist $H(G) \geqq h$. Folglich ist $G'(G) < k_1+k_2-h$, G' ist also in Widerspruch zu II. Damit haben wir unseren Hilfssatz bewiesen.

3. Es seien P und Q zwei Punkte von G. Der Mengersche Satz behauptet:

Wenn P und Q nicht durch weniger als k Punkte getrennt werden können, so gibt es k fremde PQ Wege in G.

Es sei K eine trennende Punktmenge, die aus k Punkten besteht. Es sei G_1 die Summe der von P nach K und G_2 der von Q nach K führenden Wege. G_1 und G_2 haben keine gemeinsamen Punkte außer K, sonst gäbe es einen zu K fremden Weg PQ. Es genügt also zu beweisen, daß k fremde Wege in G_1 von P nach K führen.

Dies folgt aber aus unserem Hilfssatz, da K in G_1 bezüglich P separiert ist. Sonst hätte nämlich G_1 einen Teilgraphen G_1', welcher aus K mehr als $G_1'(G_1)$ Punkte enthielte. Wenn wir also in K die in G_1' enthaltenen Punkte mit den Grenzpunkten von G_1' bezüglich G_1 ersetzten, erhielten wir weniger als k Punkte, die P von Q trennen würden, gegen unsere Annahme.

Damit haben wir den *Mengerschen Satz,* oder wie Menger ihn nennt den *n-Kettensatz* bewiesen, der auch folgenderweise ausgesprochen werden kann:

Wenn die Knotenpunktmengen H und I des Graphen G durch nicht weniger als k Punkte getrennt werden können, so gibt es k fremde HI-Wege in G.

(Eingegangen am 20. November 1933.)

Sur les équations définissant une matrice en fonction algébrique d'une autre.

Par ADOLPHE SZÜCS à Budapest.

FROBENIUS a démontré[1]) que, A étant une matrice quadratique à déterminant non nul, il est possible de trouver un polynome $X(u)$ à coefficients numériques, vérifiant l'équation

$$X^2 = A \tag{1}$$

quand on remplace dans le polynome $X(u)$ la variable u par la matrice A.

L'équation (1) a été généralisée. Pour les renseignements historiques et bibliographiques, nous renvoyons au livre de M. MAC DUFFEE,[2]) et nous nous bornerons à signaler que M. WILLIAM E. ROTH[3]) a résolu sous certaines conditions l'équation

$$P(X) = A, \tag{2}$$

$P(X)$ étant un polynome quelconque à coefficients numériques. Là encore, il faut entendre par solution un polynome en A. Évidemment on peut toujours supposer que le degré de ce polynome est inférieur à celui de l'équation caractéristique de la matrice.

Nous nous proposons de faire un nouveau pas et d'examiner l'équation

$$F(X, A) = 0 \tag{3}$$

où $F(x, u)$ est un polynome ordinaire quelconque. Le problème consiste à trouver un polynome $X(u)$ tel qu'on ait

$$F(X(A), A) = 0.$$

---

1) G. FROBENIUS, Über die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen, *Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1896, p. 7—16.

2) C. C. MAC DUFFEE, *The Theory of Matrices* (Berlin, 1933), p. 94—97.

3) W. E. ROTH, A Solution of the Matric Equation $P(X) = A$, *Transactions of the American Mathematical Society*, **30** (1928), p. 579—596.

Voici le résultat:

Soient $a, b, \dots$ les racines simples et $a', b', \dots$ les racines multiples de l'équation caractéristique $f(u)=0$ de la matrice A. Si chacune des équations

$$F(x, a)=0,\ F(x, b)=0, \dots \tag{4}$$

admet au moins une racine, et chacune des équations

$$F(x, a')=0,\ F(x, b')=0, \dots \tag{5}$$

au moins une racine simple, alors l'équation

$$F(X, A)=0$$

peut être vérifiée par un polynome en A.

Supposons en effet qu'un tel polynome $X(A)$ existe. Alors $F(X(A), A)=0$, donc — d'après un résultat connu — $F(X(u), u)$ est divisible par le polynome caractéristique $f(u)$. Inversement, si $F(X(u), u)$ est divisible par $f(u)$, le polynome $X(u)$ représente une solution du problème.

Or, si

$$f(u)\equiv(u-a)\,(u-b)\dots(u-a')^{\alpha}\,(u-b')^{\beta}\dots \quad (\alpha>1,\ \beta>1, \dots)$$

la divisibilité de $F(X(u), u)$ par $f(u)$ exige d'abord

$$F(X(a), a)=0,\quad F(X(b), b)=0, \dots \tag{6}$$

$$F(X(a'), a')=0,\ F(X(b'), b')=0, \dots \tag{7}$$

Soient donc $a_1, b_1, \dots;\ a_1', b_1', \dots$ racines des équations (4) et (5) et posons

$$X(a)=a_1,\quad X(b)=b_1, \dots$$
$$X(a')=a_1',\ X(b')=b_1', \dots$$

Il faut avoir encore, dans le cas des racines multiples,

$$\begin{aligned} &\frac{d^k}{da'^k}F(X(a'), a')=0, \qquad (k=1, 2 \dots \alpha-1)\\ &\frac{d^l}{db'^l}F(X(b'), b')=0, \qquad (l=1, 2 \dots \beta-1)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{8}$$

ou, en développant par exemple la première de ces conditions,

$$X'\ (a')F_x(a_1', a')+F_u(a_1', a')=0$$
$$X''(a')F_x(a_1', a')+\ \dots\ =0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

donc $X'(a'), X''(a'), \dots$ se déterminent sans ambiguïté si a_1', $b_1', \dots$ sont racines simples de (5) ce que nous supposons.

En définitive, on connaîtra les valeurs de $X(u)$ aux points $a, b, \ldots; a', b', \ldots$ et ses dérivées en a' jusqu'à l'ordre $\alpha-1$, en b' jusqu'à l'ordre $\beta-1$, etc. Le nombre de ces données est égal au degré n du polynome caractéristique. Par l'interpolation d'Hermite, on peut déterminer un polynome $X(u)$ de degré n prenant avec ses dérivées les valeurs prescrites en $a, b, \ldots;$ $a', b', \ldots$ Le probléme est donc résolu.

La solution n'est pas unique, car le choix des racines des équations (4) et (5) est, dans une certaine mesure, arbitraire. Soit m le degré de $F(x, u)$ en x. Le nombre maximum des solutions est atteint si l'équation caractéristique ainsi que les équations (4) et (5) n'ont que des racines simples. Ce nombre maximum est m^n.

Revenons au cas examiné par FROBENIUS ($X^2 = A$). La condition suffisante que nous avons trouvée revient à exiger qu'on ait $2x \neq 0$ chaque fois qu'on remplace x par la racine carrée d'une racine multiple de l'équation caractéristique, c'est-à-dire que l'équation caractéristique n'admette pas zéro comme racine multiple. Quand le déterminant de la matrice A n'est pas nul, cette condition est évidemment vérifiée.

(Reçu le 19 mai 1934.)

Ein Beweis des Petersenschen Graphensatzes.*)

Von Tibor Schönberger in Rákoshegy.

In einem Graphen können dreierlei Kanten vorkommen: 1) *gewöhnliche Kanten*, die zwei verschiedene Knotenpunkte miteinander verbinden, 2) *Schlingen*, d. h. Kanten, die von einem Knotenpunkte ausgehend, wieder in denselben zurückkehren, 3) Kreise, die keinen Knotenpunkt enthalten. Eine solche Kante wird im folgenden *Reif* genannt.

Die Zahl der Kanten, die in einem Knotenpunkte des Graphen zusammenlaufen, heißt der *Grad des Knotenpunktes*. Die Schlinge wird hier für zwei Kanten gerechnet.

Ein Graph heißt *regulär*, wenn jeder seiner Knotenpunkte den gleichen Grad besitzt. Dieser Grad wird der *Grad des Graphen* genannt.

Eine *Brücke* ist eine gewöhnliche Kante des Graphen, deren beide Endpunkte im Graphen miteinander nur durch einen einzigen Weg verbunden sind: durch die Kante selbst. Eine Brücke kann demnach kein Teil eines im Graphen enthaltenen Kreises sein. Wenn aber eine gewöhnliche Kante keine Brücke ist, dann ist sie immer ein Teil eines solchen Kreises.

Ein *Blatt* ist ein Teil des Graphen, der mit dem übrigen Teile desselben nur durch eine Brücke zusammenhängt, selbst aber keine Brücke enthält.

Ein regulärer Graph dritten Grades wird *einfach* genannt, wenn er zusammenhängend ist und keine Brücke enthält. Besteht ein Graph bloß aus einem Reife, so wird er nicht als einfacher Graph betrachtet. Wenn der Graph außer dem Reife auch noch

*) Diese Arbeit wurde am 16. Nov. 1931. der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

einen anderen Teil hat, dann ist er nicht zusammenhängend. Gibt es eine Schlinge in einem regulären Graphen dritten Grades, so gibt es auch eine Brücke in demselben, da die Schlinge mit dem übrigen Teile des Graphen durch eine Brücke zusammenhängt. Ein einfacher Graph kann also weder einen Reif, noch eine Schlinge enthalten, so daß jede seiner Kanten eine gewöhnliche Kante ist.

Die *Ordnung* eines Graphen bedeutet die Zahl seiner Knotenpunkte.

Ein regulärer Graph heißt *primitiv*, wenn er sich nicht in zwei reguläre Graphen derselben Ordnung, aber niedrigeren Grades zerlegen läßt. SYLVESTER hat durch ein Beispiel (Fig. 1) gezeigt, daß es einen regulären, primitiven Graphen dritten Grades gibt. Wie es ersichtlich ist, enthält dieser Graph drei Blätter. Petersens Satz sagt aus, daß ein regulärer, primitiver Graph dritten Grades wenigstens drei Blätter enthält.

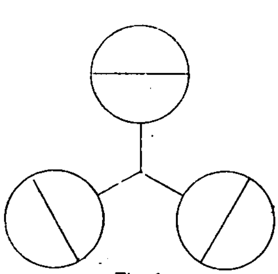


Fig. 1.

Den von PETERSEN stammenden langen und schwierigen Beweis dieses Satzes[1]) haben BRAHANA,[2]) ERRERA[3]) und FRINK[4]) vereinfacht. Der nachstehende Beweis hängt gewissermaßen mit der Frinkschen Arbeit zusammen und enthält auch Teile, die aus dieser übernommen wurden.[5])

Es sei x'_1 ein stetiges Linienstück einer Kante eines regulären Graphen dritten Grades, und beide, voneinander verschiedene End-

---

[1]) J. PETERSEN, Die Theorie der regulären Graphs, *Acta Mathematica*, 15 (1891), S. 193—220.

[2]) H. R. BRAHANA, A Proof of Petersen's Theorem, *Annals of Mathematics* (2), **19** (1917), S. 59—63.

[3]) A. ERRERA, *Du coloriage des cartes et de quelques questions d'analysis situs*, thèse (Bruxelles, 1921), S. 16—20.

[4]) O. FRINK JR., A Proof of Petersen's Theorem, *Annals of Mathematics* (2), **27** (1926), S. 491—493.

[5]) Die übernommenen Teile sind: der Satz I, doch nicht der Beweis, ferner Satz III, samt dem Beweise. Für den Satz I gebe ich einen neuen Beweis, da der von FRINK gegebene nicht befriedigend ist.

Petersens Satz habe ich unabhängig vom Frinkschen Aufsatze bewiesen, ebenfalls auf Grund des Satzes I, den ich selbständig gefunden, aber in einer etwas abweichenden Form: ohne die Bedingung des Zusammenhanges des Graphen ausgesprochen habe.

punkte von x_1' seien innere Punkte der Kante, also keine Knotenpunkte. Es sei ferner x_1'' ein anderes, dieselben Eigenschaften besitzendes Linienstück des Graphen. x_1' und x_1'' können entweder *in zwei verschiedenen Kanten, oder in einer und derselben Kante* enthalten sein. Mit Rücksicht auf den letzteren Fall verlangen wir, daß x_1' und x_1'' weder innere Punkte, noch Endpunkte gemeinsam haben sollen.

Legen wir die beiden stetigen Linienstücke aufeinander, so daß sie sich vollständig decken sollen und *vereinigen* wir sie zu einem einzigen stetigen Linienstücke. Dann vereinigen sich x_1' und x_1'' zu einer Kante x, die zwei verschiedene, durch die Vereinigung entstandene Knotenpunkte dritten Grades miteinander verbindet, also eine gewöhnliche Kante ist (Fig. 2). Das Verfahren der Vereinigung wird im folgenden die *Verschmelzung* und x_1', bzw. x_1'' eine *Verschmelzende* der Kante x genannt. Jede Verschmelzung erzeugt zwei neue Knotenpunkte, vermehrt also die Ordnung des Graphen um zwei.

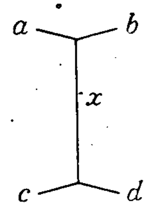


Fig. 2.

Das Verfahren der Verschmelzung läßt sich auch umkehren, indem wir eine gewöhnliche Kante x (Fig. 2) eines regulären Graphen dritten Grades als eine solche betrachten, die durch Verschmelzung entstanden ist und sie in die beiden Verschmelzenden zerlegen. Dieses Verfahren wird im folgenden die *Zerspaltung* der Kante x genannt. Die Zerspaltung läßt sich auf zweierlei Arten durchführen. Im ersten Falle spaltet sich x in die Verschmelzenden x_1' und x_1'' (Fig. 3),[6]) die a mit c, bzw. b mit d, im zweiten Falle in die Verschmelzenden x_2' und x_2'' (Fig. 4), die a mit d, bzw. b mit c verbinden. Jede Zerspaltung schafft zwei vorhandene Knotenpunkte ab, vermindert also die Ordnung des Graphen um zwei.

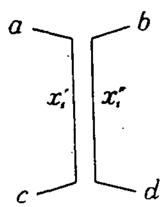


Fig. 3.

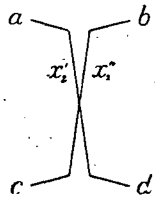


Fig. 4.

S a t z I. *In jedem einfachen Graphen von höherer als zweiter Ordnung kann man eine beliebige Kante so zerspalten, daß der entstehende neue Graph ebenfalls einfach sei.*

---

[6]) Die Bruchpunkte der in Fig. 3, 4, 5 und 7 dargestellen Linien bezeichnen die Endpunkte der Verschmelzenden, sind also *keine* Knotenpunkte.

Es sei G ein einfacher Graph von höherer als zweiter Ordnung und x eine beliebige Kante desselben. Die zweierlei Zerspaltungen von x ergeben zwei verschiedene reguläre Graphen dritten Grades: G_1 und G_2. Es seien x_1' und x_1'' die in G_1, x_2' und x_2'' die in G_2 enthaltenen Verschmelzenden. Nehmen wir G_1 für nicht einfach an. Dann gilt folgender

Hilfssatz. *G_1 hat keinen solchen Kreis, der beide Verschmelzenden enthält.*

Da G_1 nicht einfach ist, sind zwei Fälle möglich: I. G_1 ist nicht zusammenhängend, II. es gibt eine Brücke in G_1.

Im Falle I besteht G_1 wenigstens aus zwei, miteinander nicht zusammenhängenden, abgesonderten Teilgraphen. G_1 hat aber keinen solchen, abgesonderten Teilgraphen, der keine der beiden Verschmelzenden enthält. Gäbe es nämlich einen solchen Teilgraphen in G_1, so würde sich dieser Teilgraph, wenn wir G durch Verschmelzung von x wiederherstellen würden, nicht ändern und auch in G ein abgesonderter Teilgraph bleiben, was unmöglich ist, da G zusammenhängend ist. G_1 besteht also gerade aus zwei, miteinander nicht zusammenhängenden Teilgraphen, die je eine Verschmelzende enthalten. Die beiden Teilgraphen sind miteinander in G_1 durch keinen Weg verbunden, dasselbe gilt also auch für die beiden Verschmelzenden. Hätte aber G_1 einen Kreis, der beide Verschmelzenden enthält, so gäbe es in G_1 einen Weg, der beide Verschmelzenden miteinander verbindet, was unmöglich ist. G_1 hat also im Falle I keinen solchen Kreis.

Im Falle II enthält G_1 wenigstens zwei Blätter.[7]) G_1 hat aber kein solches Blatt, das keine der beiden Verschmelzenden enthält. Gäbe es nämlich ein solches Blatt in G_1, so würde sich, wenn wir G durch Verschmelzung von x wiederherstellen würden, dieses Blatt nicht ändern und auch in G ein Blatt bleiben, was unmöglich ist, weil G kein Blatt enthält. G_1 hat also gerade zwei Blätter, die je eine Verschmelzende enthalten. Die beiden Blätter sind miteinander in G_1 nur durch einen solchen Weg verbunden, der eine Brücke enthält, dasselbe gilt also auch für die beiden Verschmelzenden. Hätte aber G_1 einen solchen Kreis, der beide Verschmelzenden enthält, so wären die beiden Verschmelzenden miteinander in G_1 durch einen solchen Weg verbunden, der keine Brücke enthält, was unmöglich ist. G_1 hat also auch im Falle II

[7]) Errera, a. a. O., S. 13.

keinen solchen Kreis, so daß der Hilfssatz in beiden Fällen richtig ist.

Wird G_2, statt G_1, für nicht einfach angenommen, so gilt der Hilfssatz offenbar auch für denselben.

Wir haben festgestellt, daß, wenn es in G_1 eine Brücke gibt, die beiden Verschmelzenden in zwei verschiedenen Blättern liegen. Da ein Blatt keine Brücke enthält, kann keine der beiden Verschmelzenden ein Teil einer Brücke sein. Wenn also die x_1', bzw. x_1'' enthaltende Kante eine gewöhnliche Kante ist, dann ist sie ein Teil eines, im Graphen enthaltenen Kreises. Wenn sie keine gewöhnliche Kante ist, dann kann sie nur entweder eine Schlinge, oder ein Reif sein, so daß x_1', bzw. x_1'' in jedem Falle in einem Kreise enthalten ist. G_1 hat also einen Kreis K_1', der x_1' und einen Kreis K_1'', der x_1'' enthält. Aber x_1' und x_1'' liegen im Falle I in zwei, miteinander nicht zusammenhängenden Teilgraphen, im Falle II in zwei verschiedenen Blättern, die keinen gemeinsamen Teil haben, darum haben auch K_1' und K_1'' keinen gemeinsamen Teil (Fig. 5).

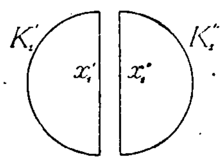


Fig. 5.

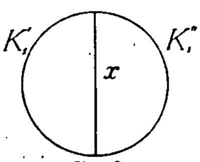


Fig. 6.

Stellen wir x durch Verschmelzung wieder her. Hiedurch haben wir je ein stetiges Linienstück von K_1' und K_1'' miteinander verschmolzen und x ist zu einem gemeinsamen Teile der beiden Kreise geworden (Fig. 6).

Zerspalten wir nun x auf die andere Weise: es entsteht G_2. x spaltet sich in die Verschmelzenden x_2' und x_2'' und die Kreise K_1' und K_1'' vereinigen sich zum Kreise K_2, der beide Verschmelzenden enthält (Fig. 7).

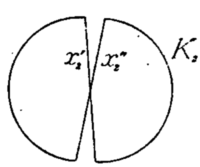


Fig. 7.

Wäre G_2 nicht einfach, dann hätte er laut des Hilfssatzes keinen solchen Kreis, der beide Verschmelzenden enthält. Da aber K_2 beide Verschmelzenden enthält, so ist G_2 einfach, was zu beweisen war.

B e m e r k u n g. Läßt sich ein regulärer Graph dritten Grades in einen Graphen ersten und in einen Graphen zweiten Grades zerlegen und färben wir die Kanten des Graphen ersten Grades rot und die des Graphen zweiten Grades blau, so laufen in jedem Knotenpunkte des Graphen dritten Grades eine rote und zwei blaue Kanten zusammen. Unter einer Färbung des Graphen werden wir im folgenden stets eine auf diese Weise durchgeführte Färbung der Kanten verstehen.

Satz II. *Jeder einfache Graph läßt sich so färben, daß zwei beliebige Kanten desselben blau seien.*

Nehmen wir an, der Satz wäre falsch. Es sei G ein Graph niedrigster Ordnung, für den der Satz nicht gilt und x und y zwei beliebige Kanten desselben. Für einen Graphen zweiter Ordnung ist der Satz offenbar giltig, daher ist G von höherer als zweiter Ordnung.

Zerspalten wir die von einem Knotenpunkte von x ausgehende Kante z dem Satze I gemäß. Dann setzt sich x wenigstens in einer der beiden Verschmelzenden von z fort und wird ein Teil einer Kante x_1. Hinsichtlich der Kante y sind drei Fälle möglich: I. sie hat keinen gemeinsamen Knotenpunkt mit z, bleibt also unverändert, II. sie hat wenigstens einen gemeinsamen Knotenpunkt mit z, dann wird sie ein Teil einer Kante y_1, oder III. sie wird ein Teil der Kante x_1.

Für den, nach der Zerspaltung entstehenden neuen Graphen ist der Satz II schon giltig. Färben wir daher diesen Graphen so, daß zwei seiner Kanten: x_1 und — den eben erwähnten drei Fällen entsprechend — I. y, II. y_1, III. eine beliebige Kante blau seien.

Stellen wir z durch Verschmelzung wieder her. Es ist wenigstens eine ihrer beiden Verschmelzenden in x_1 enthalten, also blau. Ist die andere auch blau, so färben wir z rot, ist sie rot, so färben wir z blau. Die übrigen Kanten sollen ihre Farben behalten. Hiedurch haben wir G gefärbt, so daß x und y blau geworden sind, im Gegensatz zur Annahme.

Satz III. *Jeder reguläre Graph dritten Grades, der weniger als drei Blätter enthält, läßt sich färben.*

Es genügt, den Satz für zusammenhängende Graphen zu beweisen, da, wenn er für solche gilt, so gilt er offenbar auch für nicht-zusammenhängende.

Ein einfacher Graph läßt sich, wie es aus dem Satze II hervorgeht, färben. Es ist nicht möglich, daß der Graph nur ein Blatt enthalte.[8]) Enthält er zwei Blätter, so verbinden wir je einen inneren

[8]) Errera, a. a. O., S. 13.

Punkt derselben durch eine neue Kante: es entsteht ein einfacher Graph.[9]) Färben wir diesen Graphen so, daß zwei, von der neuen verschiedene Kanten desselben, die in einem Knotenpunkte der neuen Kante zusammenlaufen, blau seien. Dann wird die neue Kante rot sein. Lassen wir die neue Kante weg, so bekommen wir eine Färbung des ursprünglichen Graphen.

Hiedurch haben wir den folgenden Satz Petersens bewiesen:

Ein regulärer, primitiver Graph dritten Grades enthält wenigstens drei Blätter.

Zum Schluß spreche ich Herrn Professor Dénes König meinen aufrichtigen Dank aus, für seine gefälligen Ratschläge während der Abfassung dieser Arbeit.

(Eingegangen am 24. Mai 1934.)

---

[9]) Errera, a. a. O., S. 14.

Ergänzung zu meinem Aufsatz: Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen[1]).

Von B. von Kerékjártó in Szeged.

In § 1, 4. 11, auf S. 243 Zeile 5 von unten ist der folgende Satz hineinzufügen: „Daraus folgt, daß γ_1 mit c_1 identisch ist." — Dafür ist Fußnote [6]) zu streichen.

§ 1, **5,** zweiter Absatz. Aus der daselbst bewiesenen Eigenschaft der Schar (γ) ergibt sich unmittelbar der folgende Satz: *Zu jedem Kreis c um A und zu jeder positiven Zahl* ε *läßt sich* $\eta > 0$ *so bestimmen, daß wenn der Abstand der konzentrischen Kreise c und* c_1 *kleiner als* η *ist, der Abstand der ihnen entsprechenden invarianten Kurven* γ *und* γ_1 *kleiner als* ε *ist;* es gibt also je einen Punkt P von γ und P_1 von γ_1, deren Abstand kleiner als ε ist. Das drücken wir mit den Worten aus, daß *die Schar* (γ) *von der Schar* (c) *stetig abhängt.* — Für die Betrachtungen von **6** und **7** wird nur diese Eigenschaft der Schar (γ) benutzt.

Demgemäß sollen der dritte Absatz von § 1, **5** (S. 246, Z. 12—8 von unten) und in 5. 1 die Zeilen 11—12 auf S. 247 gestrichen werden, da das Überalldichtliegen der Schar (γ) erst durch die Betrachtungen von **6** und **7** sichergestellt wird.

*

In meinem Beweis des Satzes, laut dessen eine indikatrixerhaltende periodische Abbildung der Kreisscheibe mit einer Rotation homöomorph ist, kommt ebenfalls nur die oben genannte stetige Abhängigkeit der Schar der invarianten Kurven von der konzentrischen Kreisschar zu Verwendung (s. meine *Vorlesungen über Topologie,* S. 223—224). Auf S. 224, Z. 1—2 sollen die Worte „die die Kreisscheibe überall dicht bedecken" gestrichen

[1]) *diese Acta,* **6** (1934), S. 235—262.

werden; diese Annahme über die Schar wird im Verlauf des Beweises gar nicht benutzt. — Diese einfache Bemerkung hätte die umständliche Beweisführung des Herrn SAMUEL EILENBERG: *„Sur les transformations périodiques de la surface de sphère“*[2]) ersparen können.

*

An dieser Stelle erwähne ich, daß mein Beweis für die Homöomorphie einer Flächenschar mit einer konzentrischen Kugelschar unvollständig ist[3]). In einer nächsten Veröffentlichung werde ich die notwendigen Ergänzungen mitteilen.

Szeged, 10. April 1934.

(Eingegangen am 12. April 1934.)

---

[2]) *Fundamenta Mathematicae,* **22** (1934), S. 28–41.
[3]) *diese Acta,* **2** (1925), S. 162–166.

Bibliographie.

R. L. Moore, Foundations of Point Set Theory (American Math. Society Colloquium Publications, volume XIII), VII + 486 pages, New York, American Mathematical Society, 1932.

The treatment is based on a set of axioms; the undefined notions are point and region; other special notions are defined in terms of these. Seven chapters are devoted to the problem of determining all possible consequences of different groups of the axioms. Some of the axioms have a familiar shape: Axiom 0. Every region is a point set. —. The following Axiom 1 looks somewhat more complicated: There exists a sequence G_1, G_2, G_3,... such that (1) for each n, G_n is a collection of regions covering S, (2) for each n, G_{n+1} is a subcollection of G_n, (3) if R is any region whatsoever, X is a point of R and Y is a point of R either identical with X or not, then there exists a natural number m such that if g is any region belonging to the collection G_m and containing X then $\bar{g}$ is a subset of $(R-Y)+X$, (4) if M_1, M_2, M_3,... is a sequence of closed point sets such that, for each n, M_n contains M_{n+1} and, for each n, there exists a region g_n of the collection G_n such that M_n is a subset of $\bar{g}_n$, then there is at least one point common to all the point sets of the sequence M_1, M_2, M_3,... — Axiom 2. If P is a point of a region R there exists a non-degenerate connected domain containing P and lying wholly in R. — Axiom 3. If O ist a point, $S-O$ is connected. — Axiom 4. If J is a simple closed curve, $S-J$ is the sum of two mutually separated connected point sets such that J is the boundary of each of them. (There shall not be any trouble of proving the Jordan theorem; it has became an axiom!) — Axiom 5. If A is a point of a region R and B is a point distinct from A there exists, in R, a simple closed curve separating A from B (cf. also Axioms 5_1 und 5_2 on p. 412). — Axiom 6. No compact continuum separates two non-compact point sets from each other. — Axiom 7. The set of all points is completely separable. — Axiom 8. Space is not compact. (Axiom 8'. Space is compact.)

As a matter of fact, any axiomatic treatment (moreover any mathematical theory) is dealing with problems of the kind whether a certain proposition can or cannot be deduced from certain assumptions. One is accustomed to take the assumptions very simple and the conclusions as complicated as ever possible; but the opposite point of view is also justified. This is a matter of taste just as well what we call simple or complicated. One who has worked for years with this system of axioms will find the above axiom 1 surely more simple than for instance this: two points determine a straight line.

Many propositions of the ordinary analysis situs of plane or space are involved in the treatment; they are — together with their proof — deformed in order to fit into the axiomatic treatment.

Certain groups of the axioms have not been fully investigated in view of their possible consequences. This circumstance certainly will give rise for future researches.

B. de K.

Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, mit erläuternden Anmerkungen sowie Ergänzungen aus dem Briefwechsel CANTOR—DEDEKIND herausgegeben von ERNST ZERMELO, nebst einem Lebenslauf Cantors von ADOLF FRAENKEL, VII + 486 S., Berlin, J. Springer, 1932.

Kaum hat ein einziger Forscher die Mathematik um so vielen Ideen und Methoden bereichert, wie CANTOR. Daß sein riesiges Werk, die Mengenlehre, durch die Antinomien erschüttert und ihre Neubegründung auch noch heute nicht zu vollem Abschluß geführt wurde, vermindert keinesfalls seinen Verdienst. Im Gegenteil, dieser Umstand hat genauere Untersuchungen der Grundlagen der Mathematik angeregt, Untersuchungen, die sowieso einmal durchgeführt werden mußten. Man begrüßt daher mit Freude die Erscheinung von Cantors gesammelten Werken.

Die Arbeiten sind nach ihren Stoffgebieten in vier Abschnitte eingeteilt: I. Zahlentheorie und Algebra, II. Funktionentheorie, III. Mengenlehre und IV. Philosophie und Geschichte der Mathematik. Innerhalb der einzelnen Abschnitte sind die Arbeiten zeitlich geordnet. Die ganze Anordnung entspricht so ungefähr der chronologischen Entwicklung, da CANTOR seine Untersuchungen mit der Zahlentheorie begonnen, dann mit der reellen Funktionentheorie fortgesetzt, wobei er im Aufbau der reellen Zahlen und in der Theorie der trigonometrischen Reihen Klassisches geschaffen hat; von hier aus wurde er zu mengentheoretischen Problemen geführt, die ihn zum Errichten seines Hauptwerkes bewegt haben; endlich sind seine philosophische Untersuchungen dadurch entstanden, daß er in der Mengenlehre neue Gesichtspunkte beim Problem des Unendlichen gefunden hat.

Den einzelnen Arbeiten folgen erläuternde und kritische Anmerkungen von ZERMELO, aus denen auch der Zusammenhang mit anderen Arbeiten klar hervortritt. Als Anhang folgen einige Stücke aus dem Briefwechsel zwischen CANTOR und DEDEKIND; man erkennt aus diesen den klaren Blick Cantors in der Frage der Antinomien und auch, wie er das Problem der Wohlordnung zu lösen versucht hat; auch findet man hier einen bisher nicht veröffentlichten Beweis Dedekinds für den Äquivalenzsatz.

Der Band enthält auch eine Schilderung des Lebens und der Persönlichkeit Cantors aus der Feder Fraenkels. Man liest diese in fesselndem Stil geschriebene Zeilen mit großem Interesse besonders heute, wo ebenfalls oft neue Schöpfungen immer wieder um ihre Anerkennung und „Bürgerrecht“ in der Wissenschaft kämpfen müssen.

L. Kalmár.

Erich Kamke, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, IX + 182 S., Leipzig, S. Hirzel, 1932.

Dies treffliche Büchlein kann nur nach einem geschichtlichen Rückblick voll gewürdigt werden.

Nach den grundlegenden Untersuchungen von R. V. MISES stand fest, daß die Wahrscheinlichkeit nur als *Häufigkeitsgrenzwert* innerhalb einer merkmalbehafteten *unendlichen* Ereignisfolge streng definiert werden kann. War auch damit die auf „endlich viele gleichwahrscheinliche" Fälle sich stützende — zirkelhafte und enge — klassische Definition endgültig beseitigt, so sah sich v. MISES zur Ableitung der Multiplikationssätze immer noch genötigt, die Erhaltung der Häufigkeitsgrenzwerte bei „jeder reinen Stellenauswahl" innerhalb der ursprünglichen Folge zu fordern. Dieses Axiom der Regellosigkeit schloß die mathematischen Folgen a limine aus und war nicht haltbar.

Ablehnend mußte man sich auch gegenüber einem weniger exklusiven Axiomensystem von K. DÖRGE verhalten — in Ermangelung eines Widerspruchslosigkeitsbeweises. So zeigte v. Mises's 1931 erschienenes Lehrbuch fast das alte, vom Verfasser in 1919 entworfene Bild der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Tatsächlich hat sich aber inzwischen die Lage wesentlich geändert. Erstens hat A. COPELAND in einer erst von KAMKE beachteten Arbeit (*American Journal of Math.*, **50**, 1928) die Existenz einer scharf definierten Klasse von Wahrscheinlichkeitsfolgen bewiesen und innerhalb solchen die Newtonsche Formel streng abgeleitet. Zweitens stellte E. TORNIER (*Journal für Math.*, **160**, **163**, 1929—30) eine groß angelegte axiomatische Untersuchung über unendliche Systeme von Wahrscheinlichkeitsfolgen an.

E. Kamkes Verdienst war eine lehrbuchmäßige Darstellung der so erworbenen Grundlagen und eine derentsprechende Gestaltung der ganzen Theorie zu geben. Sein Buch bringt *als erstes* eine strenge Theorie des Bernoullischen Problemkreises bei endlichen *und* unendlichen arithmetischen Verteilungen: mit den Grundgesetzen beginnend den Satz von BERNOULLI, die Newtonsche Formel und deren asymptotisches Verhalten, das Gesetz der großen Zahlen in der Tschebyscheffschen Fassung und den Fundamentalsatz.

Mannigfache Beispiele behandeln im Lichte der neuen Theorie kritisch und klar klassische Glücksspielaufgaben, Zermelosche Spielerstärkenskale, Mendelsches Vererbungsgesetz, Iteration und Lexissche Dispersionstheorie. Das Petersburger und das Tschebyscheffsche Problem finden erst in diesem Buche endgültige Klärung. Die 17 Aufgaben sind — mit Ausnahme des Göttinger Krawattenproblems — auch geschickt gewählt. Die Darstellung ist allerdings abstrakt und bündig, erfordert somit ein nicht geringes Maß an mathematischer Intelligenz. Längere Beispiele und die hiezu nötigen feineren Betrachtungen unterbrechen manchmal den Gang der Entwicklung.

Wir wünschen dem Buche die wohlverdiente wärmste Aufnahme.

T. v. Stachó.

Harald Bohr, Fastperiodische Funktionen (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, erster Band, Heft 5), IV + 96 S., Berlin, J. Springer, 1932.

The book originates from lectures delivered by its author from 1930—31 at American universities. The difficult choice between an encyclopedic exposition of the whole domain without detailed proofs and a detailed exposition of a part of the theory has been decided in favour of the second alternative. Accordingly the volume contains only the theory of continuous almost periodic functions of a single variable. Two appendices, one dealing with the various generalisations, the other with analytical almost periodic functions, give an impression of other parts of the theory.

In the brief interval of only 10 years since the appearance of the first of Bohr's fundamental papers in *Acta mathematica* the theory of almost periodic functions has, through the work of many authors, undergone a rapid development. In particular the proofs of the main theorems of BOHR have been simplified very much and entirely new proofs have been found.

The present exposition has profited much from these simplifications. It begins with an exposition of the essential features af the theory of FOURIER series for continuous functions with period 2π, culminating in the proof (by means of Fejér's summation) of the WEIERSTRASS approximation theorem according to which these and only these functions can be uniformly approximated by finite trigonometrical sums $\Sigma a_n e^{inx}$.

Then follows the theory of almost periodic functions. There is no need to repeat here the definition of an almost periodic function; it will be sufficient to say, that its success lies precisely in the fact that these and only these functions can be uniformly approximated by finite trigonometrical sums $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ where now the λ_n are arbitrary real numbers. The proof of this result follows essentially the lines of the proof of the WEIERSTRASS theorem; it depends on a theory of FOURIER series for almost periodic functions. In the proof of the uniqueness theorem for these series (equivalent to the fundamental theorem in Bohr's original exposition) we meet the essential difficulty of the theory which has no analogue in the theory of periodic functions. The proof given is the elegant one due to DE LA VALLÉE-POUSSIN. The proof of the approximation theorem follows then by Bochner's generalisation of the FEJÉR summation.

As an example, the author considers the theorem that a FOURIER series whose exponents are linearly independent is always absolutely convergent and represents the function. The proof given is due to FEKETE and had not been published before.

The exposition is kept quite elementary and the book should be excellent for seminar purposes.

B. Jessen.

Ludwig Bieberbach, Einleitung in die höhere Geometrie (Teubners math. Leitfäden, Band 39), VIII + 128 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1933.

Der Band gibt im Anschluß an die beiden „Leitfäden" der analytischen und projektiven Geometrie einige Betrachtungen von verschiedenen Gebieten der höheren Geometrie.

Ein verhältnismäßig umfangreiches erstes Kapitel wird dem axiomatischen Aufbau der projektiven Geometrie gewidmet. Das vom Verfasser betonte Prinzip: „ein Axiomensystem der projektiven Geometrie soll sich selbst dual sein", muß als in vollem Maße motiviert angesehen werden; das in diesem Buch angenommene Axiomensystem, welches übrigens sehr einfach ist, genügt dieser Forderung. Der Aufbau der projektiven Geometrie geschieht auf die übliche Weise, mit Einführung der Punktrechnung. Die geläufigen Fragen der Axiomatisierung: Widerspruchslosigkeit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit werden erörtert. Zum Schluß wird der Ausbau der gewöhnlichen projektiven Geometrie mit den Hinweis auf einen wichtigen Satz von PONTRJAGIN erledigt; leider sind die von BIEBERBACH zu diesem Zweck für bekannte Begriffe angegebenen Definitionen zum Teil unzutreffend (Zusammenhang, vollständiges Häufungselement).

Im zweiten Kapitel wird das Hessesche Übertragungsprinzip auf verschiedene Probleme angewendet; es wird auch auf seine Beziehung zur Nomographie hingewiesen. — Das dritte Kapitel enthält eine Betrachtung der Liniengeometrie; im vierten und fünften werden die Kreisgeometrien von MÖBIUS, LIE und LAGUERRE dargestellt. Das sechste Kapitel behandelt die projektive Maßbestimmung und im Anschluß daran die nichteuklidische Geometrien. „Diese Kapitel sind sämtlich von der Idee einer Isomorphie verschiedener geometrischer Gebiete beherrscht" (nach dem Vorwort). Diese Isomorphien beruhen teils auf bekannten Übertragungsprinzipien, teils auf zufälligen. Ein wichtiges Übertragungsprinzip: die Beziehung einer Geometrie zur Geometrie ihrer Gruppe, was in Cartan's Werken eine vornehme Rolle spielt und wunderbare Perspektiven eröffnet, ist hier ganz außer Acht geblieben. Überhaupt ist der gruppentheoretische Standpunkt etwas in den Hintergrund geraten.

Das, was das Buch gibt, wird dem Leserkreis, für den es bestimmt ist, eine interessante und nützliche Lektüre bieten.

B. v. K.

W. Breidenbach, Die Dreiteilung des Winkels (Math.-Phys. Bibliothek, Reihe I, Bd. 78), IV + 38 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1933.

Die Dreiteilung eines Winkels wird hier elementar behandelt. Die Unmöglichkeit der Dreiteilung des Winkels 120° mittels Zirkels und Lineals wird aus dem — vom Verfasser *nicht bewiesenen* — Satze gefolgert: Hat eine Gleichung dritten Grades mit rationalen Koeffizienten eine konstruierbare Wurzel, so hat sie auch mindestens eine rationale Wurzel. Es werden verschiedene Methoden für die Lösung der Aufgabe besprochen: *a)* Einschiebung; *b)* Lösung mittels spezieller Kurven: Konchoiden, Trisektrix, gleichseitige Hyperbel, Parabel, kubische Parabel; *c)* Lösung mittels Dreiteilungsinstrumenten; *d)* Näherungsmethoden.

Sz. Nagy.

Über reguläre Abbildungen von Flächen auf sich.

Von B. von Kerékjártó in Szeged.

Sei F eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht $p > 1$. Unter einer *regulären Abbildung* von F auf sich verstehen wir eine solche topologische Abbildung von F auf sich, die in jedem Punkt von F regulär ist[1]).

Bezeichnen wir mit $\bar{F}$ die universelle Überlagerungsfläche von F. Auf das Innere Φ des Einheitskreises, das wir mit einer hyperbolischen Metrik versehen als das konforme Abbild der hyperbolischen Ebene darstellen, bilden wir $\bar{F}$ topologisch derart ab, daß der Gruppe der Decktransformationen[2]) von $\bar{F}$ eine Gruppe Γ von Bewegungen der hyperbolischen Ebene Φ entspricht. Zwei Punkte von Φ nennen wir *äquivalent*, wenn sie durch Bewegungen aus Γ ineinander übergeführt werden. Jedem Punkt P von F entspricht in Φ ein System hinsichtlich Γ äquivalenter Punkte $(\bar{P})$; wir nennen P den *Spurpunkt* der Punkte $\bar{P}$, und bezeichnen die Punkte $\bar{P}$ als über dem Punkt P liegende Punkte von Φ. Unter

---

[1]) Wegen der Definition der Regularität einer Abbildung, und anderer Anwendungen dieses Begriffes, s. die folgenden Arbeiten des Verfassers: Sur le caractère topologique des représentations conformes, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris,* **198** (1934), pp. 317—320; Sur la régularité des transformations d'un groupe continu simplement transitif, *ebenda,* pp. 1114—1116; Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene, *diese Acta,* **6** (1934), S. 226—234; Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen, *ebenda,* S. 235—262; Ergänzung dazu, *ebenda,* **7** (1934) S. 58; Sur le groupe des transformations topologiques du plan, *Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa,* (2) **3** (1934), pp. 393—400.

[2]) vgl. H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig und Berlin, 1913), S. 50; B. v. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie* (Berlin, 1923), S. 162, 177.

dem Abstand von zwei Punkten P und Q der Fläche F verstehen wir den hyperbolischen Abstand der Punktsysteme $(\bar{P})$ und $(\bar{Q})$.

Eine topologische Abbildung T von F auf sich *induziert* topologische Abbildungen τ von Φ auf sich von der folgenden Eigenschaft: irgendein Punkt $\bar{P}$ von Φ, dessen Spur P ist, geht bei τ in einen solchen Punkt $\bar{P}' = \tau(\bar{P})$ über, dessen Spur das bei T entstehende Bild $P' = T(P)$ des Punktes P ist. Wenn wir einem Punkt $\bar{P}_0$ des Systems $(\bar{P})$ einen beliebigen Punkt $\bar{P}_0'$ des Systems $(\bar{P}')$ zuordnen, wird dadurch eine durch T induzierte Abbildung τ von Φ auf sich eindeutig bestimmt. Alle anderen durch T induzierten Abbildungen τ' entstehen aus dieser durch rechtsseitige und auch durch linksseitige Multiplikation mit den Elementen von Γ. Wir beweisen den folgenden

Satz 1. *Die durch eine reguläre Abbildung der Fläche F induzierten Abbildungen τ sind regulär in der hyperbolischen Ebene Φ.*

Bezeichnen wir mit 2ε eine positive Zahl, die kleiner ist als der Abstand von je zwei bei Γ äquivalenten Punkten von Φ. Der Zahl ε entspricht laut der Regularität von T eine Zahl $\delta > 0$ von der folgenden Art: zwei beliebige Punkte P und Q von F, deren Abstand kleiner als δ ist, gehen bei jeder Potenz T^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$ von T in zwei von einander um weniger als ε entfernte Punkte $T^n(P)$ und $T^n(Q)$ über. Seien $\bar{P}$ und $\bar{Q}$ zwei beliebige Punkte von Φ, deren Abstand kleiner als δ ist; ihre Spurpunkte P und Q haben ebenfalls einen Abstand $< \delta$; für jedes n ist also der Abstand von $T^n(P)$ und $T^n(Q)$ kleiner als ε. Sei τ eine durch T induzierte Abbildung von Φ auf sich. Wäre für eine bestimmte Zahl n der Abstand der Punkte $\tau^n(\bar{P})$ und $\tau^n(\bar{Q})$ größer als ε, so gäbe es einen mit $\tau^n(\bar{Q})$ äquivalenten Punkt $\tau^n(\bar{\bar{Q}})$, dessen Abstand von $\tau^n(\bar{P})$ kleiner als ε ist, da nämlich der Abstand des Punktes $\tau^n(\bar{P})$ vom System der mit $\tau^n(\bar{Q})$ äquivalenten Punkte kleiner als ε ist. Lassen wir einen veränderlichen Punkt $\bar{R}$ die Strecke $\bar{Q}\bar{P}$ stetig umlaufen; der Bildpunkt $\tau^n(\bar{R})$ umläuft einen stetigen Bogen von $\tau^n(\bar{Q})$ bis $\tau^n(\bar{P})$. Für jeden Punkt $\bar{R}$ der Strecke $\bar{P}\bar{Q}$ ist entweder der Abstand der Punkte $\tau^n(\bar{R})$ und $\tau^n(\bar{P})$ kleiner als ε, oder es gibt einen mit $\tau^n(\bar{R})$ äquivalenten Punkt $\tau^n(\bar{\bar{R}})$, dessen Abstand von $\tau^n(\bar{P})$ kleiner als ε ist. Es gibt also mindestens einen Punkt $\bar{R}$ auf der Strecke $\bar{Q}\bar{P}$, für welchen $\tau^n(\bar{R})$ und ein mit ihm äquivalenter Punkt $\tau^n(\bar{\bar{R}})$ beide um nicht mehr als ε von $\tau^n(\bar{P})$ entfernt sind. Das widerspricht der Annahme, daß je zwei äquivalente Punkte von Φ um mehr als 2ε von einander entfernt sind.

Der analoge Satz gilt auch für den Fall $p = 1$; in diesem Falle bilden wir die universelle Überlagerungsfläche auf die euklidische Ebene ab, so daß der Gruppe der Decktransformationen eine von zwei Translationen erzeugte diskontinuierliche Gruppe entspricht.

Satz 2. *Wenn eine reguläre Abbildung T einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p \geqq 1$ auf sich einen Fixpunkt besitzt, so ist sie periodisch.*

Wir dürfen annehmen, daß die Abbildung T die Indikatrix erhält; im entgegengesetzten Fall würden wir die Abbildung T^2 betrachten. Sei P ein Fixpunkt der Abbildung T, sei $(\bar{P})$ das System der über P liegenden Punkte von Φ, und $\bar{P}_0$ ein beliebiger Punkt des Systems $(\bar{P})$. Wir betrachten diejenige durch T induzierte Abbildung τ von Φ, die $\bar{P}_0$ invariant läßt. Bilden wir das Innere des Einheitskreises topologisch auf eine einmal punktierte Kugelfläche ab, so entspricht der Abbildung τ eine indikatrixerhaltende topologische Abbildung der geschlossenen Kugelfläche auf sich, mit höchstens einem singulären Punkt, und mit einem (dem Punkte $\bar{P}_0$ entsprechenden) regulären Fixpunkt. Diese Abbildung der Kugel ist einer Drehung homöomorph, laut meines Satzes über die topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen[3]). Auch die Abbildung τ ist also einer Drehung des Kreisinnern um einen Winkel $2\pi\alpha$ homöomorph. Wäre α irrational, so würden die bei den Potenzen von τ entstehenden Bilder eines mit $\bar{P}_0$ äquivalenten Punktes $\bar{P}$ eine in sich dichte Menge bilden; da aber diese Bildpunkte $\tau^n(\bar{P})$ zufolge der Invarianz von $\bar{P}_0$ sämtlich mit $\bar{P}_0$ äquivalent sind, bilden sie eine isolierte Punktmenge. Daraus folgt, daß α rational, und also τ periodisch ist.

Für $p = 1$ ist τ eine reguläre Abbildung der euklidischen Ebene auf sich mit einem Fixpunkt, also einer Drehung homöomorph, deren Periodizität mittels der obigen Methode bewiesen wird.

---

[3]) siehe die unter [1]) zitierte Arbeit des Verfassers: Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen, insbesondere S. 250—252.

Unter einer *zur Klasse der Identität gehörigen* topologischen Abbildung der Fläche F auf sich verstehen wir eine solche, die durch eine stetige Deformation auf der Fläche in die Identität übergeführt werden kann. Über solche Abbildungen gilt der folgende

Fixpunktsatz von BIRKHOFF[4]): *Eine zur Klasse der Identität gehörige topologische Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p>1$ auf sich selbst besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

Eine zur Klasse der Identität gehörige topologische Abbildung transformiert jede gerichtete einfache geschlossene Kurve von F, insbesondere also auch jeden Rückkehrschnitt eines kanonischen Schnittsystems von F in eine homotope[5]) Kurve. Die Umkehrung davon bildet den Inhalt des folgenden, von R. BAER bewiesenen Satzes[6]): *Eine topologische Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p>1$ auf sich selbst, die jeden Rückkehrschnitt eines kanonischen Schnittsystems homotop transformiert, gehört zur Klasse der Identität.* Auf Grund dieses Satzes folgt aus dem Birkhoffschen Fixpunktsatz, daß eine topologische Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p>1$ auf sich, die jeden Rückkehrschnitt eines kanonischen Schnittsystems homotop transformiert, wenigstens einen Fixpunkt besitzt. Aus der *Fixpunktformel von* ALEXANDER ergibt sich sogar direkt, daß die Summe der Indizes der Fixpunkte gleich $2-2p$ ist[7]).

Nach dem Satz 2 folgt daraus, daß eine reguläre Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p>1$ auf sich, die jeden Rückkehrschnitt eines kanonischen Schnitt-

[4]) G. D. BIRKHOFF, Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom, *Transactions American Math. Society,* **18** (1917), pp. 199—300, insbesondere p. 291.

[5]) Zwei gerichtete einfache geschlossene Kurven heißen *homotop* auf F, wenn sie auf F stetig ineinander deformiert werden können; vgl. B. VON KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie,* S. 124.

[6]) R. BAER, Isotopie von Kurven auf orientierbaren geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen, *Journal für die reine und angewandte Math.,* **159** (1928), S. 101—116, siehe insbesondere Satz 3 auf S. 115.

[7]) J. W. ALEXANDER, Invariant Points of a Surface Transformation of Given Class, *Transactions American Math. Society,* **25** (1923), pp. 173—184. Siehe ferner J. NIELSEN, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, *Acta Math.,* **50** (1927), S. 189—358; siehe insbesondere §§ 42—43 auf S. 310—322.

systems homotop transformiert, periodisch ist. Dieses Resultat würde für die weitere Betrachtung genügen; es ergibt sich aber gleich die folgende, auch für sich interessante Verschärfung davon:

Satz 3. *Eine reguläre Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich selbst, die jeden Rückkehrschnitt eines kanonischen Schnittsystems homotop transformiert, kann nur die Identität sein.*

Die analoge Behauptung betreffend *konforme* Abbildungen bildet den Inhalt eines bekannten Satzes von HURWITZ[8]); über *periodische* Abbildungen wurde der analoge Satz von BROUWER bewiesen[9]).

Der Satz 3 ist auf Grund unserer vorigen Ergebnisse eine unmittelbare Folgerung aus der folgenden Behauptung: *Eine von der Identität verschiedene, indikatrixerhaltende periodische Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p \geqq 1$ auf sich, die mindestens einen Fixpunkt besitzt, transformiert keinen Rückkehrschnitt homotop.* — Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Betrachtung der durch die Abbildung auf der hyperbolischen (bzw. auf der euklidischen) Ebene induzierten Abbildungen. Sei P ein Fixpunkt von F, sei $\bar{P}$ ein über P liegender Punkt der hyperbolischen Ebene Φ; wir betrachten diejenige durch T induzierte Abbildung τ von Φ, die $\bar{P}$ invariant läßt. Da T periodisch, also regulär ist, so folgt aus dem Satz 1 die Regularität, und wegen der Existenz eines Fixpunktes $\bar{P}$ die Periodizität von τ. Wäre irgend ein durch P gehender Rückkehrschnitt c von F durch T homotop transformiert, so wäre der Endpunkt desjenigen über c liegenden Bogens $\bar{c}$, dessen Anfangspunkt in $\bar{P}$ liegt, ein von $\bar{P}$ verschiedener Fixpunkt der Abbildung τ. Da τ in Φ mehr als einen Fixpunkt besitzt, so ist τ,

---

8) A. HURWITZ, Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, *Math. Annalen*, **41** (1893), S. 403—442, insbesondere S. 428.

9) L. E. J. BROUWER, Über die topologischen Schwierigkeiten des Kontinuitätsbeweises der Existenztheoreme eindeutig umkehrbarer polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen*, 1912, S. 603—606, s. insbesondere Fußnote 3) auf S. 605; L. E. J. BROUWER, Über eineindeutige stetige Transformationen von Flächen in sich (6. Mitteilung), *Proceedings Royal Academy Amsterdam*, **21** (1918), S. 707—710.

und also auch T die Identität. — Somit ist die obige Behauptung, und auch der Satz 3 bewiesen.

Aus dem Satz 3 ergibt sich gleich der folgende Satz, welcher bei der Untersuchung der Gruppen von regulären Abbildungen eine wesentliche Rolle spielt:

S a t z 4. *Eine Gruppe von regulären Abbildungen einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich kann keine „infinitesimalen“ Abbildungen enthalten*[10].

Nun beweisen wir den folgenden

S a t z 5. *Eine reguläre Abbildung T einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p \geqq 1$ besitzt eine Potenz, die zur Klasse der Identität gehört; für $p > 1$ ist also die Abbildung T periodisch.*

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$ die Rückkehrschnitte eines kanonischen Schnittsystems von F. Bezeichne 2ε (wie oben) eine solche positive Zahl, die kleiner ist, als der Abstand von je zwei äquivalenten Punkten von Φ. Sind dann c und c' zwei beliebige solche Wege in Φ vom Durchmesser $< \varepsilon$, daß der Anfangs-, bzw. der Endpunkt von c' mit denjenigen von c gemeinsam ist, so ist die Spur des geschlossenen Weges $c + c'$ auf F homotop 0. Sei δ eine der Zahl ε laut der Regularität von T entsprechende positive Zahl. Zerlegen wir a_1 durch endlich viele Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_k$ in Bögen $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_kP_1$ vom Durchmesser $< \delta$. Sei τ eine durch T induzierte Abbildung von Φ auf sich. Betrachten wir einen über dem Rückkehrschnitt a_1 liegenden Bogen $\bar{a}_1$ in Φ, und das Bild $\tau^n(\bar{a}_1)$ von $\bar{a}_1$ bei der Abbildung τ^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Dem Bogen $P_\nu P_{\nu+1}$ von a_1 entspricht ein Bogen von $\bar{a}_1$ vom Durchmesser $< \delta$, welcher bei τ^n in einen Bogen vom Durchmesser $< \varepsilon$ übergeht. Das Bild $\tau^n(\bar{a}_1)$ wird also aus k Bögen vom Durchmesser $< \varepsilon$ zusammengesetzt. Betrachten wir für jedes n einen mit $\tau^n(\bar{a}_1)$ äquivalenten Bogen $\tau^n(\bar{\bar{a}}_1)$, dessen Anfangspunkt in einem beliebig aber fest gewählten Fundamentalpolygon π von Φ liegt; die Endpunkte von allen solchen Bögen liegen im Abstand $< k\varepsilon$ von π. Es gibt eine endliche Anzahl mit π äquivalenter Polygone, die sämtliche von π um weniger als $k\varepsilon$ entfernte Punkte von Φ enthalten. Es gibt also wenigstens zwei solche Exponenten

[10]) Wegen des analogen Satzes über konforme Abbildungen vgl. H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, S. 159 und 163.

i und j $(i > j)$, für welche die Endpunkte der Bögen $\tau^i(\overline{\overline{a}}_1)$ und $\tau^j(\overline{\overline{a}}_1)$ im selben mit π äquivalenten Polygon π', während ihre Anfangspunkte im Polygon π selbst liegen. Die Spuren der Bögen $\tau^i(\overline{\overline{a}}_1)$ und $\tau^j(\overline{\overline{a}}_1)$, das sind die Kurven $T^i(a_1)$ und $T^j(a_1)$, sind also homotop auf F. Diese gehen bei T^{-j} in die Kurven $T^{i-j}(a_1)$ und a_1 über, die also ebenfalls homotop auf F sind. Setzen wir $i-j=m_1$; seien $m_1, \ldots, m_p$, $n_1, \ldots, n_p$ solche positive ganze Zahlen, daß $T^{m_\nu}(a_\nu)$ und a_ν homotop sind, ebenso $T^{n_\nu}(b_\nu)$ und b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$. Bezeichnen wir mit N eine gemeinsame Vielfache der Zahlen $m_1, \ldots, m_p$, $n_1, \ldots, n_p$. Bei T^N geht jeder Rückkehrschnitt a_ν und b_ν in eine ihm homotope einfache geschlossene Kurve über. T^N ist also eine zur Klasse der Identität gehörige reguläre Abbildung der Fläche auf sich, die für den Fall $p > 1$ nach Satz 3 nur die Identität sein kann. Somit ist Satz 5 bewiesen.

Der analoge Satz für berandete Flächen läßt sich auf die folgende Weise herleiten. Sei F_1 eine von r einfachen geschlossenen Kurven berandete orientierbare Fläche vom Geschlecht p. Sei T_1 eine reguläre Abbildung von F_1 auf sich, d. h. eine topologische Abbildung von F_1 auf sich, die in jedem Punkte von F_1 (die Randpunkte mitberechnet) regulär ist. — Wir bilden F_1 stetig auf eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht p derart ab, daß die Randkurven von F_1 in die Punkte $R_1, R_2, \ldots, R_r$ von F übergehen, und die Abbildung außer dieser Punkte umkehrbar eindeutig sei. Dadurch entspricht der Abbildung T_1 von F_1 auf sich eine topologische Abbildung T von F auf sich, die in jedem Punkt von F regulär ist. — Bei T_1 gehen die Randkurven von F_1 ineinander über; es gibt also eine Potenz T_1^n von T_1, die jede der Randkurven auf sich selbst abbildet. Die Abbildung T^n hat also wenigstens r Fixpunkte auf F, nämlich die Punkte $R_1, \ldots, R_r$. Ist $p=0$ und $r>2$, so ist T^n (oder T^{2n}) eine indikatrixerhaltende reguläre Abbildung der Kugel auf sich mit mehr als zwei Fixpunkten, also die Identität[11]). Wenn $p \geqq 1$ und $r \geqq 1$, so ist T^n periodisch, laut des obigen Satzes 2. — Dieses Resultat fassen wir mit dem Satz 5 zusammen, im folgenden

S a t z 6. *Eine reguläre Abbildung einer geschlossenen oder von r einfachen geschlossenen Kurven berandeten orientierbaren Fläche vom Geschlecht p auf sich selbst ist periodisch, ausgenommen*

[11]) siehe die unter [3]) zitierte Arbeit, S. 250 (Satz I).

die vier folgenden Fälle: $p = 0$, $r = 0, 1, 2$ *und* $p = 1$, $r = 0$; *das sind: die Kugel, die Kreisfläche, der Kreisring und der Torus.*

Eine obere Schranke für die Perioden bildet für $p > 1$ die Zahl $N = 10(p-1)$, laut der Hurwitzschen Formel[12]). Für $p = 1$, $r \geqq 1$ ist die größere der Zahlen r und 6 die größte Periode, wie es aus der Aufzählung der periodischen Transformationen des Torus erhellt[13]). Für $p = 0$, $r > 2$ ist $N = r$ die größte Periode, wie man leicht einsieht.

Aus dem *Involutionssatz von* BROUWER[14]) ergibt sich, daß jede periodische Abbildung einer geschlossenen oder berandeten orientierbaren Fläche auf sich einer konformen Abbildung homöomorph ist. Andererseits ist nach dem *Klein—Poincaréschen Satze* jede konforme Abbildung einer geschlossenen oder berandeten orientierbaren Fläche auf sich periodisch, abgesehen von den im Satz 6 aufgezählten vier Ausnahmefällen, denen 7 hinsichtlich konformer Abbildung verschiedene Flächentypen entsprechen[15]).

Die Regularität der konformen Abbildungen kann man folgendermaßen direkt nachweisen. Die konformen linearen Abbildungen der Kugelfläche sind regulär, bis auf höchstens zwei singuläre Punkte, wie man unmittelbar erkennt. Es folgt gleich, daß die linearen Abbildungen des Kreisinnern auf sich in der hyperbolischen Metrik ebenfalls regulär sind. Wenn man die hyperbolische Metrik der Überlagerungsfläche auf die Grundfläche überträgt, so erscheinen in dieser Metrik die konformen Abbildungen der Grundfläche auf sich, da sie lineare Abbildungen der hyperbolischen Ebene Φ auf sich induzieren, ebenfalls als regulär. Für den Fall des Torus erinnern wir an die Aufzählung der konformen Abbildungen, woraus ersichtlich ist, daß sie in derjenigen Metrik, welche

---

12) A. HURWITZ, Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen auf sich zulassen, *Math. Annalen,* **32** (1888), S. 290—308, insbesondere S. 292—294.

13) L. E. J. BROUWER, Aufzählung der periodischen Transformationen des Torus, *Proceedings Royal Academy Amsterdam,* **21** (1919), S. 1352—1356, und B. v. KERÉKJÁRTÓ, A torus periodikus transformációiról (in ungarischer Sprache), *Mat. és Természettud. Értesitő (Math. Naturw. Berichte der ungarischen Akademie der Wissenschaften),* **39** (1921), S. 213—219.

14) L. E. J. BROUWER, Über topologische Involutionen, *Proceedings Royal Academy Amsterdam,* **21** (1919), S. 1143—1145; vgl auch B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie,* S. 227—229.

15) siehe H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche,* S. 163.

der euklidischen Metrik der Überlagerungsfläche entspricht, ebenfalls regulär sind. Aus der Definition der Regularität folgt ihre Unabhängigkeit von der speziellen (beschränkten) Metrik unmittelbar.

Regularität ist eine gemeinsame Eigenschaft der konformen Abbildungen der Flächen vom Geschlecht 0 und derjenigen von positivem Geschlecht (für $p = 0$ kann die Abbildung 1 oder 2 singuläre Punkte haben). Regularität, so wie Konformität, schließt nicht die aperiodischen Abbildungen aus.

Wir haben erkannt, daß *die konformen Abbildungen der geschlossenen und der berandeten orientierbaren Flächen durch die Bedingung der Regularität topologisch charakterisiert werden.*

Der einzige Fall, auf welchen die obige Betrachtung nicht anwendbar ist, ist eine reguläre Abbildung des Torus, die samt Potenzen fixpunktfrei ist.

*

Sei F eine berandete orientierbare Fläche vom Geschlecht p, mit r (>0) Randkurven; wenn $p = 0$, so setzen wir voraus, daß $r > 2$ ist. Betrachten wir eine Gruppe G von regulären Abbildungen von F auf sich; wir werden die Endlichkeit der Gruppe G beweisen. In diesem Resultat erhalten wir die für reguläre Abbildungen bezügliche Verallgemeinerung des die konformen Abbildungen betreffenden analogen Satzes von KLEIN und POINCARÉ[16]). Aus der Definition der Konformität folgt nämlich unmittelbar, daß die konformen Abbildungen einer Fläche auf sich eine Gruppe bilden.

Wir beweisen zunächst den folgenden

Hilfssatz: *Eine Gruppe g von indikatrixerhaltenden periodischen Abbildungen der Kreislinie auf sich, deren Perioden eine feste Zahl N nicht übertreffen, ist endlich (und also zyklisch).*

Seien σ_1 und τ_1 zwei beliebige Abbildungen der Gruppe g; bezeichnen wir mit n, bzw. m ihre Perioden. Seien $\sigma = \sigma_1^{\nu}$ und $\tau = \tau_1^{\mu}$ solche Potenzen von σ_1 und τ_1, die den primitiven Drehungen, d. h. den im positiven Sinne genommenen Drehungen um $\frac{2\pi}{n}$ und $\frac{2\pi}{m}$ homöomorph sind. Sei A ein beliebiger Punkt der Kreislinie, $\sigma(A)$ und $\tau(A)$ seine Bilder bei σ und τ. Wenn der

[16]) H. WEYL, l. c, S. 165.

Punkt $\sigma(A)$ auf dem durch die Punkte A und $\tau(A)$ bestimmten, den Punkt $\tau^2(A)$ nicht enhaltenden und von A nach $\tau(A)$ positiv gerichteten Bogen liegt, in Zeichen: $A \subset \sigma(A) \subset \tau(A)$, so besteht auch für jeden anderen Punkt B der Kreislinie die Beziehung: $B \subset \sigma(B) \subset \tau(B)$. Im entgegengesetzten Fall wäre nämlich für einen Punkt P des Bogens AB: $\sigma(P) = \tau(P)$, also hätte die zur Gruppe g gehörige Abbildung $\sigma\tau^{-1}$ in P einen Fixpunkt; da $\sigma\tau^{-1}$ periodisch ist, folgt daraus $\sigma \equiv \tau$, gegen unsere Annahme. Setzen wir $B = \sigma(A)$, so folgt $\sigma(A) \subset \sigma^2(A) \subset \sigma\tau(A)$[17]; aus $A \subset \sigma(A) \subset \tau(A)$ folgt durch Anwendung von τ : $\tau(A) \subset \sigma\tau(A) \subset \tau^2(A)$; also $A \subset \sigma^2(A) \subset \tau^2(A)$. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens ergibt sich für jede Zahl $k \leqq m : A \subset \sigma^k(A) \subset \tau^k(A)$; für $k = m$ folgt daraus, daß die Periode n von σ größer ist, als die Periode m von τ.

Daraus folgt unmittelbar, daß es zu jeder Zahl $n \leqq N$ höchstens eine primitive Drehung von der Periode n in der Gruppe g gibt, so daß die Gruppe g nur endlich viele primitive Drehungen enthält. Da nun jedes Element von g sich als Potenz einer primitiven Drehung von g mit einem nicht-negativen Exponenten $< N$ darstellen läßt, folgt daraus die Endlichkeit der Gruppe g.

Sei nun G eine Gruppe von indikatrixerhaltenden regulären Abbildungen der Fläche F auf sich. Seien $c_1, c_2, \ldots, c_r$ die Randkurven von F. Diejenigen Abbildungen von G, die c_1 in sich überführen, bilden eine Untergruppe G_1, welche eine Gruppe g_1 von indikatrixerhaltenden Abbildungen der Kurve c_1 auf sich erzeugt. Die Abbildungen von G_1 sind periodisch, laut des Satzes 6; ihre Perioden sind unterhalb einer festen Zahl N. Aus dem obigen Hilfssatz ergibt sich also die Endlichkeit der Gruppe g_1. Zwei Abbildungen von G_1, die dieselbe Abbildung von c_1 erzeugen, sind identisch auf der ganzen Fläche F, da eine indikatrixerhaltende reguläre Abbildung lauter isolierte Fixpunkte besitzt. Also bilden diejenigen Abbildungen von G, die c_1 in sich überführen, eine (der Gruppe g_1 einstufig isomorphe) *endliche* Untergruppe G_1 von G. Die Abbildungen von G, die c_1 in die Randkurve c_k $(k = 2, 3, \ldots, r)$ überführen, entstehen aus einer solchen Abbildung durch Multiplikation mit den Elementen von G_1, so daß ihre Anzahl ebenfalls endlich ist.

---

[17]) Mit $\sigma\tau$ bezeichnen wir die Abbildung, die entsteht, wenn wir zuerst σ und nachher τ ausführen.

Wenn die Gruppe auch indikatrixumkehrende Abbildungen enthält, so sei S eine solche und sei G die Untergruppe der indikatrixerhaltenden Abbildungen; die gesamte Gruppe ist dann $G+SG$, deren Endlichkeit aus der von G folgt. Somit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 7. *Eine Gruppe von regulären Abbildungen einer von $r\,(>0)$ einfachen geschlossenen Kurven berandeten orientierbaren Fläche vom Geschlecht p auf sich selbst ist endlich, ausgenommen die Fälle $p=0$, $r=1, 2$.*[18])

Laut des Involutionssatzes von BROUWER folgt daraus, daß die Gruppe einer Gruppe von konformen Abbildungen homöomorph ist.

*

Die hier nicht behandelten Fälle: 1. reguläre Abbildungen des Torus auf sich, die samt Potenzen fixpunktfrei sind, 2. Gruppen von regulären Abbildungen einer geschlossenen orientierbaren Fläche auf sich — deren Untersuchung auch andere Methoden erfordert — sollen für eine nächste Mitteilung vorbehalten werden.

(Eingegangen am 21. Juni 1934.)

---

18) Eine topologische Analyse des die konformen Abbildungen betreffenden analogen Satzes für den Fall $p=0$ wurde von T. RADÓ gegeben: Über die konformen Abbildungen schlichter Gebiete, *diese Acta*, 2 (1924), S. 47—60.

Über die regulären Abbildungen des Torus.

Von B. VON KERÉKJÁRTÓ in Szeged.

In der vorangehenden Arbeit[1]) habe ich bewiesen, daß jede indikatrixerhaltende reguläre Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p>1$ auf sich periodisch und also einer konformen Abbildung homöomorph ist. Der Satz und sein Beweis bleiben auch für den Fall $p=1$ gültig, wenn die Abbildung oder eine Potenz derselben einen Fixpunkt hat. Der noch übrigbleibende Fall wird durch den folgenden Satz erledigt, der in der vorliegenden Arbeit bewiesen wird:

Eine indikatrixerhaltende reguläre Abbildung der Torusfläche auf sich, die samt Potenzen fixpunktfrei ist, ist einer Verschiebung des Torus in sich homöomorph und läßt sich in geeignet gewählten Koordinaten x, y durch die folgenden Formeln ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x+\alpha \\ y' &= y+\beta \end{aligned}\right\} \pmod 1 \qquad \left\{\begin{aligned} 0 &\leq x < 1 \\ 0 &\leq y < 1, \end{aligned}\right.$$

wobei entweder α irrational und β rational ist, oder aber α, β und 1 rational unabhängig sind.

Durch diesen Satz wird zugleich ein Problem von BIRKHOFF[2]) betreffend die Charakterisierung der fixpunktfreien Abbildungen des Torus durch zwei Rotationszahlen, für den Fall von regulären Abbildungen gelöst.

Sei T eine reguläre Abbildung der Torusfläche F auf sich. Zu jeder positiven Zahl ε läßt sich eine positive Zahl δ derart angeben, daß für zwei beliebige von einander um weniger als δ

---

1) B. VON KERÉKJÁRTÓ, Über reguläre Abbildungen von Flächen auf sich, *diese Acta*, **7** (1934), S. 65—75.

2) G. D. BIRKHOFF, Surface Transformations and Their Dynamical Applications, *Acta Math.*, **43** (1920), pp. 1—119; siehe insbesondere p. 106.

entfernte Punkte A und B, und für jede Zahl $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ der Abstand der bei T^n entstehenden Bildpunkte $A^n = T^n(A)$ und $B^n = T^n(B)$ kleiner als ε ist. (Mit T^n bezeichnen wir wie üblich die n-te Potenz von T.) Die obere Grenze der Zahlen δ, für welche die obige Regularitätsbedingung in bezug auf die Zahl ε erfüllt ist, bezeichnen wir mit $\varphi(\varepsilon)$. Zufolge Definition ist $\varphi(\varepsilon) \leqq \varepsilon$.

Wir setzen voraus, daß sämtliche Abbildungen $T^n (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ fixpunktfrei sind. Ein beliebiger Punkt P geht bei den Potenzen T^n in lauter verschiedene Punkte P^n über; wir bezeichnen mit $\{P^n\}$ die Menge der sukzessiven Bilder $P^n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Die Menge $\{P^n\}$ hat mindestens einen Häufungspunkt Q. Ich zeige, daß *die Ableitungen der Mengen* $\{Q^n\}$ *und* $\{P^n\}$ *identisch sind,* und *die Menge* $\{P^n\}$ *in sich dicht ist.* Da Q ein Häufungspunkt von $\{P^n\}$ ist, so ist auch jeder Punkt der Menge $\{Q^n\}$ ein Häufungspunkt von $\{P^n\}$; die Ableitung von $\{Q^n\}$ gehört also zur Ableitung von $\{P^n\}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig; es gibt zwei verschiedene Exponenten n und n', für welche die Abstände (P^n, Q) und $(P^{n'}, Q)$ beide kleiner als $\varphi(\varepsilon)$ sind; wenden wir die Abbildung T^{-n} an, so ergibt sich, daß $(P, Q^{-n}) < \varepsilon$, und $(P^{n'-n}, Q^{-n}) < \varepsilon$, also auch $(P, P^{n'-n}) < 2\varepsilon$. Da ε beliebig klein ist, folgt daraus, daß P Häufungspunkt der Mengen $\{P^n\}$ und $\{Q^n\}$ ist. Daraus ergibt sich unmittelbar die obige Behauptung.

Aus diesem Resultat folgt, daß entweder für keinen Punkt P, oder aber für jeden Punkt P die Menge $\{P^n\}$ auf dem Torus überall dicht liegt. Diese beiden Fälle werden wir einzeln behandeln.

Erster Fall. *Die Menge* $\{P^n\}$ *der sukzessiven Bilder eines Punktes* P *ist nicht überall dicht auf dem Torus.* Es gibt dann mindestens einen Punkt A, der weder zur Menge $\{P^n\}$ noch zu ihrer Ableitung gehört. Sei 2ε eine positive Zahl, die kleiner ist als der Abstand des Punktes P von der Ableitung von $\{A^n\}$, und bedeute δ eine positive Zahl, die kleiner als $\varphi(\varepsilon)$ ist. Wir nehmen um P die Kreisfläche vom Radius δ; wir bezeichnen diese mit V und ihre Bilder mit V^n. Die Umgebung um A vom Radius δ kann keinen Punkt der Mengen V^n enthalten; wäre R^n ein Punkt von V^n im Abstand $< \delta$ von A, so hätten wir $(A^{-n}, R) < \varepsilon$; da ferner R zu V gehört, so ist $(R, P) < \delta < \varepsilon$, also $(A^{-n}, P) < 2\varepsilon$; das widerspricht der Wahl von ε. Die Umgebung um P^n vom Radius $\varphi(\delta)$ gehört zu V^n; wenn nämlich für einen Punkt Q: $(Q, P^n) < \varphi(\delta)$, so ist $(Q^{-n}, P) < \delta$, so daß Q^{-n} zu V und folglich Q zu V^n gehört. — Da jede der Mengen V^n je eine Kreisfläche vom festen Radius $\varphi(\delta)$ enthält, gibt es höchstens endlich viele unter den Mengen V^n paarweise ohne gemeinsamen Punkt; die Vereinigungsmenge ΣV^n besteht also aus einer *endlichen* Anzahl von Gebieten; die Ableitung von ΣV^n ist eine abgeschlossene Menge M, die also endlich viele Komponenten besitzt. Offenbar ist die Menge M invariant bei der Abbildung T.

Wir bezeichnen mit g dasjenige von M bestimmte Gebiet, welches den Punkt A enthält. Da $\{A^n\}$ in sich dicht ist, gibt es einen Exponenten $m \geqq 1$, für welchen A^m hinreichend nahe bei A, also im Gebiet g liegt; bedeute m den kleinsten Exponenten dieser Art. Die von M bestimmten Gebiete gehen bei T in einander über; daraus folgt, daß g bei T^m in sich selbst übergeht. Da g ein Restgebiet der aus endlich vielen Komponenten bestehenden Menge M ist, so hat der Rand von g nur eine endliche Anzahl k von Komponenten. — Das Geschlecht von g könnte 1 oder 0 sein. Wäre es aber gleich 1, so bilden wir g auf eine k-mal punktierte Torusfläche topologisch ab; dadurch entspricht der Abbildung T^m, die in g und auf seinem Rand regulär ist, eine auf der geschlossenen Torusfläche reguläre Abbildung T_1, bei welcher die den Randkomponenten von g entsprechenden k Punkte in einander übergehen; bei einer Potenz T_1^μ geht jeder dieser Punkte in sich über. Aus dem Satz 2 meiner vorangehenden Arbeit[3]) folgt, daß T_1^μ und also auch T_1 periodisch ist. Dementsprechend wäre auch T^m periodisch in g, in Widerspruch zu unserer Annahme, nämlich daß die Potenzen von T fixpunktfrei sind. Das Geschlecht von g muß also gleich 0 sein. — Wir bilden g auf eine k-mal punktierte Kugelfläche topologisch ab; der Abbildung T^m von g auf sich entspricht eine reguläre Abbildung T_1 der geschlossenen Kugelfläche auf sich; T_1 ist einer elliptischen linearen Abbildung homöomorph[4]). Da T^m in g fixpunktfrei ist, so gehören die beiden Fixpunkte von T_1 auf der Kugel zu denjenigen Punkten, die den Randkomponenten von g entsprechen; ihre Anzahl ist also $k \geqq 2$. Wäre aber $k > 2$, so wäre die Abbildung T_1 periodisch; die k Punkte der Kugel, die den Randkom-

---

[3]) l. c. [1]).

[4]) B. VON KERÉKJÁRTÓ, Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen, *diese Acta*, **6** (1934), S. 235—262; Satz I auf S. 250.

ponenten von g entsprechen, sind nämlich invariant bei einer Potenz von T_1; falls $k > 2$, würde diese Potenz mehr als zwei Fixpunkte besitzen, so daß sie die Identität, und also T_1 selbst periodisch wäre; wie bereits oben bemerkt, widerspricht das unseren Voraussetzungen. Somit wurde gezeigt, daß g genau zwei Randkomponenten besitzt.

Die Abbildung T_1 der Kugel, die der Abbildung T^m von g entspricht, ist einer aperiodischen elliptischen Abbildung homöomorph; wir bezeichnen mit $m\alpha$ die zugehörige Rotationszahl, die notwendig irrational ist. Nehmen wir eine invariante Kurve der Abbildung T_1, sei c_0 die ihr entsprechende Kurve in g. Die bei $T^0, T^1, T^2, \ldots, T^{m-1}$ entstehenden Bilder $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ sind paarweise fremd (also homotop); sie zerlegen den Torus in m Gebiete, deren jedes einem ebenen Kreisring homöomorph ist. In jedem dieser Gebiete ist T^m einer aperiodischen elliptischen Abbildung homöomorph. Betrachten wir die entsprechenden bei T^m invarianten Kurven; ihre Gesamtheit bildet eine reguläre[5]) Kurvenschar (c) auf der Torusfläche, die bei T invariant ist.

Den Kurven der Schar (c) ordnen wir Koordinaten $y\,(0 \leqq y < 1)$ auf die folgende Weise zu. Sei c_s eine solche unter den Bildkurven c_i von c_0, die durch die anderen Bildkurven c_i nicht von c_0 getrennt wird; dasjenige durch c_0 und c_s bestimmte Gebiet, welches keine weitere von den Bildkurven c_i enthält, nennen wir das Zwischengebiet von (c_0, c_s). Den Kurven der Schar (c), die im Zwischengebiet von (c_0, c_s) liegen, ordnen wir die Koordinatenwerte $0 \leqq y \leqq \frac{1}{m}$ zu, so daß $y = 0$ der Kurve c_0, und $y = \frac{1}{m}$ der Kurve c_s entspreche. Den Kurven der Schar (c), die im Zwischengebiet von (c_s, c_{2s}) liegen, ordnen wir die Werte $\frac{1}{m} \leqq y \leqq \frac{2}{m}$ zu, auf die Weise, daß das bei T^s entstehende Bild der mit der Koordinate $y\left(\leqq \frac{1}{m}\right)$ versehenen Kurve c den Koordinatenwert $y + \frac{1}{m}$ bekomme; usf. Wenn $\frac{l}{m}$ die Koordinate der

[5]) Wegen dieses Begriffs s. B. VON KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie* (Berlin, 1923), S. 241 u. ff. und S. 249; vgl. auch die unter [4]) zitierte Arbeit, S. 249 (Nr. 7).

Kurve $c_l = T(c_0)$ bedeutet (wobei l eine der Zahlen $0, 1, \ldots, m-1$ ist), so wird die durch T in der Schar (c) erzeugte Abbildung durch die Formel $y' = y + \frac{l}{m}$ (mod 1) ausgedrückt.

Auf jeder Kurve der Schar (c) bestimmen wir Koordinaten $x (0 \leqq x < 1)$ auf die folgende Weise. Einem beliebigen Punkt P von c_0 ordnen wir den Wert $x = 0$, und den Punkten P^n, die aus P bei den Potenzen von T entstehen, die Werte $x = n\alpha$ (mod 1) zu. Dadurch wird je eine auf den Kurven $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ überall dicht liegende Punktmenge mit x-Koordinaten versehen; auf jeder dieser Kurven ergänzen wir die Koordinatenbestimmung stetig für alle Punkte der Kurve. Seien $O = P, O_1, O_2, \ldots, O_{m-1}$ diejenigen Punkte dieser Kurven, die dabei die Koordinate $x = 0$ bekommen haben. Wir verbinden die Punkte O und O_s im Zwischengebiet (c_0, c_s) durch einen einfachen Bogen b, der mit jeder zwischen c_0 und c_s liegenden Kurve der Schar (c) genau einen gemeinsamen Punkt hat[6]). Den Punkten des Bogens b lassen wir den Wert $x = 0$, und den Punkten des bei T^n entstehenden Bildes von b den Wert $x = n\alpha$ (mod 1) entsprechen (für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Dadurch wird auf jeder Kurve c je eine überall dicht liegende Menge von Punkten mit Koordinaten x versehen; wir erweitern diese Koordinatenbestimmung stetig für sämtliche Punkte der betreffenden Kurven.

Auf diese Weise erhalten wir ein Koordinatensystem (x, y), durch welches die Punkte der Torusfläche eineindeutig und stetig dargestellt werden. In diesem Koordinatensystem wird die Abbildung T durch die folgenden Formeln ausgedrückt:

$$T: \left\{ \begin{aligned} x' &= x + \alpha \\ y' &= y + \beta \end{aligned} \right\} \text{(mod 1)} \quad \left(\alpha \text{ irrational}; \ \beta = \frac{l}{m} \text{ rational} \right).$$

Zweiter Fall. *Die Menge $\{P^n\}$ der sukzessiven Bilder eines Punktes P ist überall dicht auf dem Torus.*

Wir beweisen zunächst die folgende Behauptung: *Wenn eine Potenz T^n von T irgend einen Punkt A um weniger als $\varphi(\varepsilon/3)$ verlegt, so gehört T^n zur ε-Umgebung der Identität* (das soll bedeuten, daß T^n jeden Punkt B um einen Abstand $\leqq \varepsilon$ verlegt; wir werden auch kurz sagen, daß T^n eine *ε-Abbildung* ist). Sei

6) Wegen der Möglichkeit dieser Konstruktion vgl. l. c. 5).

nämlich B ein beliebiger Punkt von F; da $\{A^n\}$ auf F überall dicht liegt, gibt es einen Exponenten r, für welchen $(A^r, B) < \varphi(\varepsilon/3)$; für jedes n ist dann $(A^{r+n}, B^n) < \varepsilon/3$. Sei n ein solcher Exponent, für den $(A, A^n) < \varphi(\varepsilon/3)$, es folgt also $(A^r, A^{r+n}) < \varepsilon/3$. Daraus ergibt sich $(B, B^n) \leqq (B, A^r) + (A^r, A^{r+n}) + (A^{r+n}, B^n) < \varepsilon$.

Wir definieren jetzt eine *kontinuierliche Gruppe*, indem wir die Gruppe $\{T^n\}$ durch ihre Grenztransformationen erweitern. Zu diesem Zweck wählen wir einen beliebigen Punkt O von F als Anfangspunkt und lassen ihm die Identität I entsprechen. Zu jedem Punkt P der Fläche F ordnen wir eine topologische Abbildung S_P von F auf sich, die den Punkt O in P überführt; wenn $P = O^n$, so bedeutet S_P die Abbildung T^n. Da die Menge $\{O^n\}$ auf F überall dicht liegt, gibt es zu einem beliebigen Punkt P eine solche Folge von Exponenten $n_1, n_2, \ldots$, für welche die Punkte $O^{n_1}, O^{n_2}, \ldots$ gegen P konvergieren.

Die Folge der Abbildungen $T^{n_1}, T^{n_2}, \ldots$ konvergiert gleichmäßig gegen eine topologische Abbildung S_P von F auf sich, die O in P überführt. Um diese Behauptung zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß, für einen beliebigen Punkt A, die Folge $A^{n_1}, A^{n_2}, \ldots$ gegen einen Punkt A' konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig; da die Punktfolge $O^{n_1}, O^{n_2}, \ldots$ gegen P konvergiert, gibt es einen Index k von der Art, daß für jeden Index $r > k$ der Punkt O^{n_r} im Abstand $< \frac{1}{2}\varphi(\varepsilon/3)$ vom Punkt P liegt. Für je zwei Zahlen $r > k$ und $s > k$ haben die Punkte O^{n_r} und O^{n_s} einen Abstand $< \varphi(\varepsilon/3)$, so daß die Abbildung $T^{n_s - n_r}$, die O^{n_r} in O^{n_s} überführt, zur ε-Umgebung der Identität gehört. Insbesondere haben also die Punkte A^{n_r} und $A^{n_s} = T^{n_s - n_r}(A^{n_r})$ einen Abstand $< \varepsilon$, und das gilt für zwei beliebige Zahlen n_r und n_s der Folge, deren Indizes r und s größer als k sind. Nach dem Cauchyschen Konvergenzprinzip folgt daraus, daß die Folge $A^{n_1}, A^{n_2}, \ldots$ gegen einen Punkt A' konvergiert. — In der Ungleichheit $(A^{n_r}, A^{n_s}) < \varepsilon$ halten wir r fest und lassen s unbegrenzt zunehmen, so ergibt sich $(A^{n_r}, A') \leqq \varepsilon$ Somit wurde gezeigt, daß S_P eindeutig ist, und die Folge $T^{n_1}, T^{n_2}, \ldots$ gleichmäßig gegen S_P konvergiert. — Um die Stetigkeit von S_P nachzuweisen, bezeichnen wir mit $A_1, A_2, \ldots$ eine beliebige gegen A konvergierende Punktfolge, und setzen $A' = S_P(A)$, $A'_\nu = S_P(A_\nu)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig; wenn ν hinreichend groß ist, so ist $(A_\nu, A) < \varphi(\varepsilon)$, also für jedes n_k: $(A_\nu^{n_k}, A^{n_k}) < \varepsilon$ und folglich $(A'_\nu, A') \leqq \varepsilon$. — Für je zwei verschiedene Punkte A und B sind die Punkte $A' = S_P(A)$ und $B' = S_P(B)$ verschieden; sei nämlich $\varepsilon > 0$ kleiner als der Abstand (A, B); der Abstand (A', B') ist dann nicht kleiner als $\varphi(\varepsilon)$; sonst gäbe es einen Index n_k, für den (A^{n_k}, B^{n_k}) ebenfalls kleiner als $\varphi(\varepsilon)$ wäre; es müßte dann der Abstand der Punkte $A = T^{-n_k}(A^{n_k})$ und $B = T^{-n_k}(B^{n_k})$ kleiner als ε sein, gegen Annahme. — Die obige Behauptung wurde somit bewiesen.

Auch die auf diese Weise erklärten Abbildungen S_P haben die Eigenschaft, daß *jede Abbildung S_P, die einen beliebigen Punkt um weniger als $\varphi(\varepsilon/3)$ verlegt, eine ε-Abbildung ist;* der Beweis ergibt sich unmittelbar auf Grund der analogen Eigenschaft der Abbildungen T^n. Darin ist insbesondere enthalten, daß *keine von der Identität verschiedene Abbildung S_P einen Fixpunkt besitzt.*

Wir wollen zeigen, daß *die Abbildungen S_P auf der Torusfläche eine einfach transitive kontinuierliche Gruppe G bilden.*

Sei S_P eine Abbildung, die durch die Exponentenfolge $n_1, n_2, \ldots$ definiert wurde; die *Inverse* von S_P wird durch die Exponentenfolge $-n_1, -n_2, \ldots$ definiert. Sei nämlich $\bar{P}$ derjenige Punkt, welcher bei S_P in den Punkt O übergeht; die Folge $\bar{P}^{n_1}, \bar{P}^{n_2}, \ldots$ konvergiert gegen O. Wenn $\varepsilon > 0$ beliebig, und $(\bar{P}^{n_k}, O) < \varphi(\varepsilon)$, so ist $(\bar{P}, O^{-n_k}) < \varepsilon$, also konvergiert die Folge $O^{-n_1}, O^{-n_2}, \ldots$ gegen $\bar{P}$.

Ebenso ergibt sich, daß das *Produkt* der Abbildungen S_P und S_Q, die bzw. durch die Exponentenfolgen $n_1, n_2, \ldots$ und $m_1, m_2, \ldots$ definiert werden, die durch die Exponentenfolge $n_1 + m_1$, $n_2 + m_2, \ldots$ definierte Abbildung S_R ist. — Daraus folgt auch gleich, daß die Gruppe der Abbildungen S_P *kommutativ* ist.

Die Stetigkeit der Gruppe G ergibt sich folgendermaßen. Unter dem Abstand (S_P, S_Q) der Abbildungen S_P und S_Q verstehen wir den maximalen Abstand der Punkte $S_P(A)$ und $S_Q(A)$, wo A einen veränderlichen Punkt von F bedeutet. Es bestehen die Beziehungen: $(S_P, S_Q) = (S_P^{-1} S_Q, I) = (S_Q^{-1} S_P, I)$; zufolge der Kommutativität von G auch $(S_P, S_Q) = (S_P S_Q^{-1}, I) = (S_Q S_P^{-1}, I)$. — Die Abbildung S_P hängt von P stetig ab; wenn nämlich $(Q, P) < \varphi(\varepsilon/3)$, so ist $S_Q^{-1} S_P$ eine ε-Abbildung, also $(S_P, S_Q) \leqq \varepsilon$. — Die Inverse von S_P und das Produkt von S_P und S_Q ändern sich stetig mit P, bzw. mit P und Q. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig; wenn P_1 und Q_1 zwei solche Punkte sind, daß $(P, P_1) < \varphi(\varepsilon/3)$ und $(Q, Q_1) < \varphi(\varepsilon/3)$, so sind $S_{P_1}^{-1} S_P$ und $S_{Q_1}^{-1} S_Q$ ε-Abbildungen. Daraus folgt: $(S_P^{-1}, S_{P_1}^{-1}) = (S_{P_1} S_P^{-1}, I) \leqq \varepsilon$; und $(S_P S_Q, S_{P_1} S_{Q_1}) = ((S_{P_1} S_{Q_1})^{-1} (S_P S_Q), I)$; zufolge der Kommutativität ist aber $(S_{P_1} S_{Q_1})^{-1} (S_P S_Q) = (S_{P_1}^{-1} S_P)(S_{Q_1}^{-1} S_Q)$ und als Produkt von zwei ε-Abbildungen hat diese von der Identität den Abstand $\leqq 2\varepsilon$. — Die obige Behauptung betreffend die Gruppe G ist also bewiesen.

In einer früheren Arbeit[7]) habe ich die möglichen topologischen Typen der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen bestimmt; aus ihrer Aufzählung ergibt sich, daß G als eine einfach transitive kontinuierliche Gruppe auf dem Torus mit der Gruppe der Verschiebungen des Torus homöomorph ist und in geeignet gewählten Koordinaten (x, y) und Parametern (ξ, η) durch die folgenden Formeln dargestellt werden kann:

$$G: \left\{ \begin{matrix} x' = x + \xi \\ y' = y + \eta \end{matrix} \right\} \pmod 1 \quad \left\{ \begin{matrix} 0 \leqq x < 1;\ 0 \leqq \xi < 1; \\ 0 \leqq y < 1;\ 0 \leqq \eta < 1. \end{matrix} \right.$$

Die gegebene Abbildung T, als eine zur Gruppe G gehörige Abbildung, läßt sich also durch die Formeln ausdrücken:

$$T: \left\{ \begin{matrix} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{matrix} \right\} \pmod 1.$$

Aus der Voraussetzung, daß die Menge der sukzessiven Bilder eines Punktes auf der Torusfläche überall dicht liegt, folgt, daß die Zahlen 1, α, β rational unabhängig sind.

Der zu Anfang dieser Arbeit aufgestellte Satz wurde somit bewiesen. Dieser und der Satz 6 der vorangehenden Arbeit ergeben zusammen das folgende Resultat:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine indikatrixerhaltende topologische Abbildung einer geschlossenen oder berandeten orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p \geqq 1$ auf sich einer konformen Abbildung homöomorph sei, ist die, daß die Abbildung in jedem Punkte der Fläche regulär sei.

Bemerkung. Die oben im „zweiten Fall" gegebenen Betrachtungen können unmittelbar auf kompakte Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension angewandt werden. Sei F eine kompakte h-dimensionale Mannigfaltigkeit und T eine reguläre Abbildung

[7]) B. von Kerékjártó, Geometrische Theorie der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen, *Abhandlungen Math. Seminar Hamburg*, **8** (1930), S. 107—114.

von F auf sich. Wenn die Menge $\{P^n\}$ der sukzessiven Bilder eines Punktes P in einem Gebiet von F überall dicht liegt, bezeichnen wir mit g das größte Gebiet dieser Art, und konstruieren aus den Abbildungen T^n und ihren Grenztransformationen eine kontinuierliche Gruppe G, die in der von den Häufungspunkten von g gebildeten Menge einfach transitiv ist. Aus der Homogenität des Parameterraumes von G folgt, daß g keinen Randpunkt in F haben kann, und also g mit F identisch ist. Da ferner die Gruppe G kommutativ und kompakt ist, so folgt aus einem Satz von NEWMAN[8]), daß F die h-dimensionale Ringmannigfaltigkeit, d. h. das topologische Produkt von h Kreislinien ist, und G die Gruppe der Verschiebungen dieser Mannigfaltigkeit in sich, die in geeignet gewählten Koordinaten x_i und Parametern ξ_i durch die Formeln dargestellt werden kann: $x_i' = x_i + \xi_i \pmod 1$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$. Die Abbildung T ist dann durch die Formeln $x_i' = x_i + \alpha_i \pmod 1$ darstellbar, wo $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ rational unabhängige Zahlen sind. — Dieses Resultat ergibt die Mitteln zur Untersuchung der regulären Abbildungen von kompakten Mannigfaltigkeiten, worauf ich in einer anderen Mitteilung eingehen werde.

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit bildet einen Teil meiner an der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 8. Oktober 1934 gehaltenen Antrittsvorlesung.

(Eingegangen am 9. Oktober 1934.)

[8]) M. H. A. NEWMAN, On Abelian Continuous Groups, *Proceedings Cambridge Philosophical Society*, **27** (1931), pp. 387—390. Siehe ferner L. PONTRJAGIN, The Theory of Topological Commutative Groups, *Annals of Math.*, **35** (1934), pp. 361—388, wo das Problem der Strukturbestimmung von kommutativen Gruppen in seiner allgemeinsten Form gelöst wird.

Bemerkungen über Fourier- und Potenzreihen.

Von S. SIDON in Budapest.

Trigonometrische Reihen mit Lücken sind Gegenstand mehrerer in letzterer Zeit erschienenen Arbeiten. Mit Hilfe eines zum ersten Male von Herrn F. RIESZ angewandten Produktes[1]) bewies ich[2])

Satz 1. *Erfüllt die unendliche Folge positiver ganzer Zahlen* $n_1 \dots n_k \dots$[3]) *die Bedingung A*:

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > g > 1 \qquad (g \text{ von } k \text{ unabhängig}),$$

so muß, wenn $\sum_{k+1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b \sin n_k x)$ *die Fourier-Reihe*[4]) *einer einseitig beschränkten Funktion ist,* $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$ *konvergieren.*

Später bewies ich[5]) den

---

1) F. RIESZ. Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung, *Math. Zeitschrift,* **2** (1918), S. 312—315.

2) S. SIDON, Ein Satz über die absolute Konvergenz von Fourierreihen, in denen sehr viele Glieder fehlen, *Math. Annalen,* **96** (1927), S. 418—419 und Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken, *Math. Annalen,* **97** (1927), S. 675—676.

3) Mit $n_1, \dots, n_k, \dots$ bezeichnen wir hier immer Folgen positiver ganzer Zahlen und zwar ist für jedes k $n_{k+1} > n_k$.

4) Fourier-Reihe bedeutet hier immer: Fourier-Reihe einer im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktion.

5) S. SIDON, Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen, *Journal für die reine und angewandte Math.,* **163** (1930), S. 251—252 und Ein Satz über Fouriersche Reihen mit Lücken, *Math. Zeitschrift,* **34** (1932), S. 481—484. Den Zitaten der letzteren Arbeit füge ich hinzu: A. ZYGMUND, On the Convergence of Lacunary Trigonometric Series, *Fundamenta Math,* **16** (1930), S. 90—107, wo der 2 enthaltende Satz bewiesen wird: *Ist Bedingung B erfüllt und* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$ *in einer Menge von positivem Maße nach einem die Toeplitzschen Bedingungen erfüllenden linearen Verfahren summierbar, so konvergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$.

Satz 2. *Erfüllt die Folge $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ die Bedingung B:*[6]) *In der Folge* $n_{11} = 2n_1$, $n_{12} = n_1 + n_2$, $n'_{12} = n_2 - n_1, \ldots, n_{ii} = 2n_i, \ldots, n_{ik} = n_i + n_k$, $n'_{ik} = n_k - n_i, \ldots$ *bleibt die Anzahl der gleichen Glieder unter einer von i und k unabhängigen Schranke G, so muß, wenn* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$ *eine Fourier-Reihe ist,* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$ *konvergieren.*

Letzterer Satz hat sich als Folge des Bestehens der Ungleichung

$$\text{(I)} \qquad \int_0^{2\pi} |T_k(x)|\, dx > C \left[\int_0^{2\pi} T_k^2(x)\, dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

mit von $T_k(x)$ unabhängigem $C > 0$[7]) für jedes trigonometrische Polynom $T_k(x) = \sum_{i=1}^{k} (a_i \cos n_i x + b_i \sin n_i x)$ ergeben. Bedingung B ist für das Bestehen von (I) hinreichend, aber nicht notwendig.[8]) Die durch das Bestehen von (I) definierte Eigenschaft einer Indexfolge nennen wir die Eigenschaft I[9]).

In engem Zusammenhange mit den soeben zitierten Sätzen stehen diejenigen über die zu einer Lückenbedingung genügenden Indexfolge gehörigen Fourier-Koeffizienten. Wieder durch Anwendung des F. Rieszschen Produktes erhielt ich[10]) den

Satz 3. *Sind $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ und $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_k, \ldots$ zwei reelle Nullfolgen, so gibt es, wenn $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ die Bedingung A erfüllt, eine Fourier-Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *mit* $a_{n_k} = \varepsilon_k$, $b_{n_k} = \varepsilon'_k$.

Herr Banach bewies[11]) den

Satz 4. *Besitzt $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ die Eigenschaft* I, *so existiert, wenn*

---

[6]) Bedingung B enthält die oben mit A bezeichnete als Spezialfall.

[7]) C, C' werden hier auch weiter diese Bedeutung haben.

[8]) Siehe Teil 2 dieser Note.

[9]) und zwar sagen wir, die nämliche Indexfolge besitze die Eigenschaft I mit der Konstante C, wenn letztere die Konstante der zur Folge gehörigen Ungleichung I ist.

[10]) S. Sidon, Einige Sätze und Fragestellungen über Fourier-Koeffizienten, *Math. Zeitschrift*, **34** (1932), S. 477—480. Eingesendet am 1. August 1928.

[11]) S. Banach, Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen, *Studia math.*, **2** (1930), S. 207—220.

$\sum (\varepsilon_k^2+\varepsilon_k'^2)$ *konvergiert, eine stetige Funktion,*[12] *für deren Fourier-Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ $\quad a_{n_k}=\varepsilon_k,\ b_{n_k}=\varepsilon_k'$ *gilt.*[13]

Dieser Satz, dessen Richtigkeit zu entscheiden, ich loc. cit.[10] als Problem gestellt habe, wurde von mir unabhängig wiedergefunden und mit einer von der in der Banachschen Arbeit angewandten verschiedenen Methode bewiesen.[14]

Folgende Zeilen enthalten einige einfache ergänzende Bemerkungen zu den oben angeführten Resultaten. Am Ende dieser Note befasse ich mich auch mit der Gesamtheit der Fourier-Konstanten stetiger Funktionen.

1.

Paley und Zygmund bewiesen[15]: Ist $\Sigma(a_n^2+b_n^2)$ konvergent, so lassen sich die Faktoren $\varepsilon_n=\pm 1$ derart bestimmen, daß für beliebiges $\delta>0$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\varepsilon_n(\log n)^{-\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

---

[12]) Stetige Funktion bedeutet hier immer eine für $0 \leqq x < 2\pi$ überall stetige Funktion.

[13]) Bei Banach ist Satz 4, den er als Korollar eines für allgemeine Orthogonalsysteme gültigen Satzes erhält, nur für den Fall des Erfülltseins der Bedingung A ausgesprochen, im Beweise aber nur I berücksichtigt.

[14]) S. Sidon, Ein Satz über trigonometrische Polynome und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen, *Math. Annalen,* **106** (1932), S. 536—539: Der erste Teil des dort für Satz gegebenen Beweises läßt sich kürzen: Durch Kombination der mit $\max\left|\sum_{i=1}^{k}(a_i c_{n_i}+b_i d_{n_i})\right| > C\left[\sum_{i=1}^{k}(a_i^2+b_i^2)\right]^{\frac{1}{2}}$ — wo a_i und b_i beliebige reelle Konstanten, c_n und d_n die Fourier-Konstanten der Funktionen bedeuten, die dem Betrage nach kleiner als 1 bleiben — äquivalenten Ungleichung I mit dem dort angewandten geometrischen Lemma folgt sofort die Existenz einer Folge gleichmäßig beschränkter Funktionen $f_1(x),\ldots,$ $f_k(x),\ldots,$ in deren Fourier-Reihe $f_k(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(c_{nk}\cos nx + d_{nk}\sin nx)$ $\; c_{n_i k}=\varepsilon_i,$ $d_{n_i k}=\varepsilon_i'$ für $i\leqq k$ ist. Dieser Teil des Beweises, sowie die Auswahl einer schwachkonvergenten Folge aus der Folge der $f_k(x)$ mit der beschränkten Grenzfunktion $f(x)\sim\Sigma(c_n \cos nx + d_n \sin nx)$, wo $c_{n_i}=\varepsilon_i,\ d_{n_i}=\varepsilon_i'$ ist, läßt sich unmittelbar auf allgemeine Orthogonalsysteme übertragen.

[15]) R. E. A. C. Paley and A. Zygmund, On Some Series of Fonctions, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **26** (1930), S. 337—357, insb. Theorem VII.

die Fourier-Reihe einer stetigen Funktion sei. Hieraus folgt unmittelbar: Hat $n_1, \dots, n_k, \dots$ die Eigenschaft, daß wenn $\sum_{k=0}^{\infty}(A_k \cos n_k x + B_k \sin n_k x)$ die Fourier-Reihe einer stetigen Funktion ist, $\sum_{k=1}^{\infty}(|A_k|+|B_k|)$ konvergiert, so muß $\sum_{k=1}^{\infty}(\log n_k)^{-(1+\delta)}$ für jedes $\delta > 0$ konvergieren, dies ist auch die notwendige Bedingung dafür, daß die zu den Indizes $n_1, \dots, n_k, \dots$ gehörigen Fourier-Konstanten einer im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktion außer der Konvergenz gegen 0 keiner anderen Beschränkung unterworfen seien.

2.

Daß Bedingung B die Eigenschaft I zur Folge hat, hat sich aus

$$\frac{\left[\int_0^{2\pi}|T_k(x)|\,dx\right]^2}{\int_0^{2\pi}T_k^2(x)\,dx} > \frac{\left[\int_0^{2\pi}T_k^2(x)\,dx\right]^2}{\int_0^{2\pi}T_k^4(x)\,dx}$$

ergeben. Nun ist aber

$$\frac{\left[\int_0^{2\pi}T_k^2(x)\,dx\right]^2}{\int_0^{2\pi}T_k^4(x)\,dx} > \frac{\frac{1}{2}\left[\int_{|z|=1}|P_k^2(z)|\,d(\arg z)\right]^2}{\int_{|z|=1}|P_k^4(z)\,d(\arg z)|}$$

wo das rationale Polynom $P_k(z)$ durch $\Re[P_k(z)] = T_k(\arg z)$ für $|z| = 1$ definiert ist. Für das Bestehen von I ist also schon hinreichend, daß in der Folge $n_{11} = 2n_1$, $n_{12} = n_1 + n_2, \dots, n_{ik} = n_i + n_k, \dots$ die Anzahl der gleichen Glieder unter einer von i und k unabhängigen Schranke bleibe; auch die Vereinigung endlich vieler solcher n_k-Folgen besitzt die Eigenschaft I. Diese Verallgemeinerung der Bedingung B bezeichnen wir mit B'.[16])

3.

Einer Arbeit von PALEY[17]) läßt sich die Tatsache entnehmen,

[16]) B' ist tatsächlich wesentlich allgemeiner, als B; z. B. wenn $n_1, \dots, n_k, \dots$ der Bedingung A genügt, erfüllt die Folge der $\sum_{i=1}^{l} n_{k_i}$, wo l unter einer festen Schranke bleibt, die Bedingung B', aber nicht B.

[17]) R. E. A. C. PALEY, A Note on Power Series, *Journal of the London Math. Society*, 7 (1932), S. 122—130.

daß für jede Folge $n_1, \ldots, n_i, \ldots$ von der Eigenschaft I

$$\max\left|\sum_{i=1}^{k} a_{n_i}\alpha_i\right| > C'\left(\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i^2|\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist, wo C' nur von der Konstante von I abhängt, α_i beliebige komplexe Konstanten bedeuten und die a_n die Koeffizienten der Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ durchlaufen, die für $|z| \leqq 1$ stetig und dem Betrage nach kleiner, als 1 sind.[18]) Es gilt also der Satz 4 verschärfende

Satz 4'. *Hat $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ die Eigenschaft* I *und ist* $\sum_{k=1}^{\infty}|\varepsilon_k^2|$ *konvergent, so gibt es eine für* $|z| = 1$ *stetige Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *mit* $a_{n_k} = \varepsilon_k$.

Ich erwähne hier, daß wenn die Indexfolge $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ die Bedingung A erfüllt und $\sum_{k=1}^{\infty}|\varepsilon_k^2|$ konvergiert, sich die Existenz einer für $|z| \leqq 1$ gleichmäßig konvergenten Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_{n_k} = \varepsilon_k$ beweisen läßt.[19]) Hieraus folgt, daß der Carlemansche

---

[18]) Es folgt auch aus dem Bestehen von

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i'\cos n_i x + \alpha_i''\sin n_i x)\right| dx > C\left[\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i'^2 + \alpha_i''^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

für eine gewisse reelle Konstantenfolge α_i', α_i''

$$\max\left|\sum_{i=1}^{k} a_{n_i}(\alpha_i' + i\,\alpha_i'')\right| > C\left[\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i'^2 + \alpha_i''^2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

[19]) Dieselbe ergibt sich durch Komposition der nach Satz 4' existierenden für $|z| \leqq 1$ stetigen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_{n_i} = \varepsilon_i p$ mit dem F. Rieszschen Kerne $\sum_{r=0}^{l-1}\prod_{k=0}^{\infty}(1 + p^{-1}\cos n_{kl+r}x)$, wo $p > 1$ und fest ist, l den Ungleichungen $q^l > 3$, $1 + \frac{1}{q^l - 1} < q$ genügt $\left(q \text{ bedeutet hierbei } \overline{\lim}\ \frac{n_{k+1}}{n_k}\right)$. Für die Partialsummen $s_k(x)$ des letzteren gilt: $\int_0^{2\pi}|s_k(x)|\,dx = O(1)$.

Satz über den Konvergenzexponenten der Fourier-Konstanten der stetigen Funktionen sowie dessen von Herrn GRONWALL und von mir herrührende Verschärfungen[20]) schon für die Klasse der für $|z| \leqq 1$ gleichmäßig konvergenten Potenzreihen gelten, was auf das Verhältnis zwischen gleichmäßiger und absoluter Konvergenz der Potenzreihen neues Licht wirft.[21]) Es gilt auch der folgende algebraische

Satz 5. *Ist $\Sigma |\varepsilon_i^2| = 1$ und besitzt die Folge der n_i die Eigenschaft* I, *so gibt es ein Polynom $\sum_{l=0}^{n_k} a_l z^l$ mit $a_{n_i} = \varepsilon_i$ für $i \leqq k$, welches für $|z| \leqq 1$ die Ungleichung $\left| \sum_{l=0}^{n_k} a_l z^l \right| < C$ erfüllt.*

Beim Beweise dieses Satzes benötige ich den

Hilfssatz. *Erfüllt jedes komplexe Polynom $P_k(z) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i z^{n_i}$ die Ungleichung*

$$\int_{|z|=1} |P_k(z)|\, d\varphi > C' \Big[\int_{|z|=1} |P_k(z)|^2 d\varphi \Big]^{\frac{1}{2}},$$

(wo $\varphi = \arg z$), so besitzt die Folge der n_i die Eigenschaft I *mit einer nur von C' abhängigen Konstante.*[22])

Beweis des Hilfssatzes. Es ist, wenn die a_i die Koeffizienten der Potenzreihen durchlaufen, die für $|z| < 1$ dem

---

[20]) T. CARLEMAN, Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion, *Acta math.*, **41** (1918), S. 377—384; T. H. GRONWALL, On the Fourier Coefficients of a Continuous Function, *Bulletin of the American Math Society*, **27** (1921), S. 320—321 und meine in [5]) an erster Stelle zitierte Arbeit.

[21]) Siehe z. B. E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* (Berlin, 1929), S. 68—69.

[22]) Dieses Lemma, das den ersten Teil von **2** als Spezialfall enthält, ergibt sich hier als Korollar der Tatsache: Aus

$$\int_{|z|=1} \left| \sum_{i=1}^{k} a_i z^{n_i} \right| d\varphi > C \left[\sum_{i=1}^{k} |a_i^2| \right]^{\frac{1}{2}},$$

für eine gewisse unendliche Konstantenfolge n_i, folgt

$$\int_{|z|=1} \left| \Re\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i z^{n_i} \Big) \right| dz \text{ und } \int_{|z|=1} \left| \Im\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i z^{n_i} \Big) \right| dz > C' \Big(\sum_{i=1}^{k} |v_i^2| \Big)^{\frac{1}{2}},$$

wo C' nur von C abhängt.

Betrage nach kleiner als 1 sind,

$$C'\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i^2|\right)^{\frac{1}{2}}<2\int\limits_{|z|=1}\left|\Re\left(\sum_{i=1}^{k}a_i z^{4^{n_i}-1}\right)\right|d\varphi<C''\max\left|\sum_{i=1}^{k}a_i a_{4^{n_i}-1}\right|<$$
$$<C''\max\left|\sum_{k}a_i a_{4^{n_i}}\right|<$$
$$<C'''\int\limits_{|z|=1}\left|\Re\left(\sum_{i=1}a_i z^{n_i}\right)\right|d\varphi$$

(C'', C''' hängt nur von C' ab), woraus die Behauptung folgt.

Beweis des Satzes 5. Es bezeichne $P_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ eine Potenzreihe mit $a_{n_i}=\varepsilon_i$ für $i\leq k$, für welche im Einheitskreise $|P_k(z)|<C$ gilt. Aus dem soeben bewiesenen Hilfssatze[23]) folgt auch die Existenz einer Potenzreihe $g_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ mit $b_{n_k-n_i}=\varepsilon_i$ für $i\leq k$, welche für $|z|<1$ ebenfalls die Ungleichung $|g_k(z)|<C$ erfüllt. Bezeichnet $S_i(z)$, $T_i(z)$ das i-te arithmetische Mittel von $f_k(z)$, bzw. $g_k(z)$, so ist $S_{n_k}(z)+z^{n_k}T_{n_k}\left(\frac{1}{z}\right)$ ein Polynom von der gewünschten Beschaffenheit.

4.

Erfüllt die Indexfolge $n_1,\ldots,n_k,\ldots$ die Bedingung B', so gilt außer I auch

$$\left[\int_0^{2\pi}T_k^2(x)\,dx\right]^2>C\int_0^{2\pi}T_k^4(x)\,dx,$$

wodurch die Frage nahegelegt wird, ob nicht schon die Folge der Exponenten von $T_k^2(x)$, also $2n_1$, n_1+n_2, $n_2-n_1,\ldots,2n_i,\ldots,$ n_i+n_k, $n_k-n_i\,(k>i),\ldots$ die Eigenschaft I besitzt. Hierauf beziehen sich folgende Bemerkungen.

a) Sind die Glieder der Folge $2n_1$, $n_1+n_2,\ldots,n_i+n_k,\ldots,(i\leq k)$ alle von einander verschieden und ist $k'<qk$, wo k' durch $n_{k'}<2n_k<n_{k'+1}$ definiert, $q<\frac{5}{4}$ und von k unabhängig ist, so gilt, wenn $N_1>N_2>\ldots>N_i>\ldots$ die der Größe nach geordneten

[23]) wenn derselbe auf die endliche Folge $n_k-n_1,\ldots,n_k-n_i,\ldots,0$ angewendet wird,

Glieder der Folge $n_i + n_k$ bedeuten,

$$\int\limits_{|z|=1} \left| \sum_{i=1}^{K} z^{N_i} \right| dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{|z|=1} \left| \left(\sum_{j=1}^{k} z^{n_j} \right)^2 + \sum_{j=1}^{k} z^{2n_j} + 2 \sum_{l>k,\ n_j+n_l \leqq N_K} z^{n_j+n_l} \right| dz > CK^{\frac{1}{2}},$$ [24])

wo k durch $2n_k < N_K < 2n_{k+1}$ bestimmt ist. Nach dem in **3** bewiesenen Hilfssatze folgt also auch

$$\int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{i=1}^{K} \cos N_i x \right| dx \text{ und } \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{i=1}^{K} \sin N_i x \right| dx > C K^{\frac{1}{2}}.$$

β) Erfüllt die Folge der n_k die Bedingung B mit $G = 1$, so gilt, wenn $N_1, \ldots, N_i, \ldots, N_K$ die Glieder der endlichen Folge $0, 2n_1, n_1 + n_2, n_2 - n_1, \ldots, 2n_j, \ldots, n_j + n_l, n_l - n_j, \ldots, 2n_k$, wo $l > j$, j und $l < k$, bezeichnen, für jedes trigonometrische Polynom

$$T_K(x) = \sum_{i=1}^{K} (A_i \cos N_i x + B_i \sin N_i x)$$

die Darstellung

$$T_K(x) = \sum_{l=1}^{k+1} \left[\sum_{j=1}^{k} (a_{jl} \cos n_j x + b_{jl} \sin n_j x) \right]^2,$$

wo die Konstanten a und b im Allgemeinen komplex sind. Sind sie reell (also ist $T_K(x)$ jedenfalls positiv), so ergibt sich sehr leicht die Ungleichung

$$2 \left[\int\limits_0^{2\pi} T_K(x) \right]^2 > \int\limits_0^{2\pi} T_K^2(x)\, dx.$$

Gilt eine analoge Ungleichung nicht auch im allgemeinen Falle? Ich halte das, besonders, wenn $T_K(x)$ positiv ist, für wahrscheinlich.

5.

Sind die α_i und β_i beliebige reelle Konstanten und durchlaufen die a_i und b_i die Fourier-Konstanten der stetigen Funktionen die dem Betrage nach kleiner als 1 bleiben, so ist[25])

---

[24]) Aus dieser Tatsache folgt der in **3** angeführte Carlemansche Satz, der somit auf die einfachste Weise bewiesen ist.

[25]) Siehe meine Note: Ein Satz über die Fouriersche Reihen stetiger Funktionen, *Math. Zeitschrift*, 34 (1932), S. 485—486 und Paley, loc. cit. [17]).

$$\max \sum_{i=0}^{n} (|a_i\alpha_i| + |b_i\beta_i|) > C\left[\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i^2 + \beta_i^2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus ergibt sich durch Kombination mit dem loc. cit. [14]) angewandten geometrischen Lemma

Satz 6. *Der kleinste konvexe Bereich der Punkte mit den Koordinaten* $\varepsilon_0 a_0, \varepsilon_1 a_1, \varepsilon_1' b_1 \ldots \varepsilon_k a_k, \varepsilon_k' b_k \ldots \varepsilon_n a_n, \varepsilon_n' b_n$, *wo* ε_k *und* $\varepsilon_k' = \pm 1$, *enthält eine* $2n+1$ *dimensionale Kugel vom Radius* C,[26]) *deren Mittelpunkt der Anfangspunkt ist.*

Gilt dieser Satz auch für $n = \infty$?[27]) Aus der bejahenden Beantwortung dieser Fragestellung,[28]) deren Beweis ich in einer baldigen Mitteilung zu geben hoffe, folgt: Der kleinste konvexe Bereich der Punkte mit den Koordinaten $\varepsilon_0 A_0, \ldots, \varepsilon_n A_n, \varepsilon_n' B_n, \ldots$ wo ε_n und $\varepsilon_n' = \pm 1$ und die A_n, B_n die Fourier-Konstanten der stetigen Funktionen durchlaufen, ist der ganze Hilbertsche Raum.

Der aus Satz 6 durch Ersetzung der n-ten Partialsummen der Fourier-Reihen der gleichmäßig beschränkten stetigen Funktionen durch die in den Einheitswurzeln $\left(\text{d. h. an den Stellen } x = \frac{2k\pi}{2n+1},\ 0 \leq k \leq 2n\right)$ gleichmäßig beschränkten trigonometrischen Polynome n-ter Ordnung entstehende ebenfalls richtige[29]) Satz läßt sich geometrisch so formulieren: Ist der Mittelpunkt eines Würfels $2n+1$-ter Dimension von der Kantenlänge $(2n+1)^{-\frac{1}{2}}$ Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, auf welches bezogen die Kanten des Würfels die Koeffizienten der orthogonalen Substitution

$$y_0 = (2n+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2n} x_k,$$

$$y_i = 2\,(2n+2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2n} \cos \frac{2ik\pi}{2n+1} x_k,$$

$$y_i' = 2\,(2n+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2n} \sin \frac{2ik\pi}{2n+1} x_k$$

---

[26]) C bedeutet jetzt eine von n unabhängige Konstante.

[27]) Hierbei ist unter dem kleinsten konvexen Bereich einer Punktmenge des Hilbertschen Raumes die Gesamtheit der Schwerpunkte aller aus *endlich vielen* Punkten der Menge bestehenden Kombinationen zu verstehen.

[28]) Es genügt die Frage für die Klasse der beschränkten Funktionen zu erledigen. Bei festem k bilden dann die Schwerpunkte k-ter Ordnung der in Rede stehenden Menge eine perfekte Menge des Hilbertschen Raumes.

[29]) Gilt auch für die gleichmäßig beschränkten Polynome n-ter Ordnung.

für $1 \leqq i \leqq n$ als Richtungskosinusse haben, so enthält der kleinste konvexe Bereich der Gesamtheit der zu den Punkten des Würfels gehörigen Koordinatenparallelepipeda eine $2n+1$ dimensionale Kugel vom Radius C. Kann hier der Übergang auf den kleinsten konvexen Bereich unterbleiben, so folgt hieraus, daß die Fourier-Konstanten der stetigen Funktionen außer der Konvergenz ihrer Quadratsumme keiner quantitativen Beschränkung unterworfen sind.[30])

(Eingegangen am 30. Juli 1934.)

[30]) loc. cit. [10]) Fragestellung. Berichtigung hiezu, *Math. Zeitschrift,* **35** (1932), S. 624.

Über die Anzahl der Abelschen Gruppen gegebener Ordnung und über ein verwandtes zahlentheoretisches Problem.

Von P. Erdős und G. Szekeres in Budapest.

Einleitung.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet das Problem des asymptotischen Verhaltens der Anzahl der verschiedenen (d. h. nicht isomorphen) Abelschen Gruppen n-ter Ordnung für große n. Wir bezeichnen diese Anzahl durch $f(n)$ und werden in § 1 beweisen, daß

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} f(k) = An + O(\sqrt{n}),^{1)}$$

wobei

$$A = \zeta(2)\,\zeta(3)\,\zeta(4)\ldots$$

($\zeta(s)$ ist die Riemannsche Zetafunktion). Der Wert von A liegt zwischen 2 und 2,5. Aus (1) folgt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) \to A \quad \text{für} \quad n \to \infty;$$

dies besagt, *daß es im Durchschnitt A verschiedene Abelsche Gruppen n-ter Ordnung gibt.*

Durch die für (1) verwendete Methode werden wir in § 2 eine weitere zahlentheoretische Funktion asymptotisch abschätzen. Um den Grundgedanken dieser Methode, die übrigens völlig elementar ist, klar hervortreten zu lassen, werden wir denselben in einem allgemeinen Hilfssatz formulieren.

---

[1]) Die O-Relationen beziehen sich auf den Grenzübergang $n \to \infty$ und sind nicht notwendig gleichmäßig in den etwaigen Parametern.

Es sei $\psi(n)$ eine zahlentheoretische Funktion, welche abzuschätzen ist. Unsere Methode besteht darin, daß wir eine andere zahlentheoretische Funktion $\omega(n)$ nebst einer positiven ganzen Zahl i bestimmen, die mit $\psi(n)$ durch die Formel

$$\psi(n)=\sum_{l=1}^{n}\omega(l)\left[\sqrt[i]{\frac{n}{l}}\right] \tag{2}$$

verbunden ist.[2]) Dann schließen wir vom asymptotischen Verhalten der summatorischen Funktion $\chi(n)=\sum_{l=1}^{n}\omega(l)$ auf das Verhalten von $\psi(n)$.

Der wichtigste Fall des Überganges von $\chi(n)$ auf $\psi(n)$ wird durch den folgenden Hilfssatz ausgedrückt.

Gilt neben (2)

$$\chi(n)=\sum_{l=1}^{n}\omega(l)=O\left(\sqrt[i+1]{n}\right), \tag{3}$$

so gewinnt man

$$\psi(n)=C\sqrt[i]{n}+O\left(\sqrt[i+1]{n}\right),$$

wobei C die Konstante

$$C=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\omega(l)}{\sqrt[i]{l}} \tag{4}$$

bedeutet. (In den Anwendungen wird $\omega(n)$ durchwegs positiv sein; dann ist auch $C>0$.)

B e w e i s. Bekanntlich folgt aus (3), daß die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\omega(l)}{l^s}$$

für $s>\frac{1}{i+1}$ konvergent ist mit einem Restglied

---

[2]) Die leicht nachzuweisende Tatsache, daß es zu jedem $\psi(n)$ und i eine und nur eine solche Funktion $\omega(n)$ gibt, ferner, daß letztere durch die Formel

$$\omega(n)=\sum_{d^i\mid n}\mu(d)\left\{\psi\left(\frac{n}{d^i}\right)-\psi\left(\frac{n}{d^i}-1\right)\right\}$$

gegeben ist — wobei d diejenigen positiven ganzen Zahlen durchläuft, deren i-te Potenz in n aufgeht — ist für unsere Zwecke belanglos, da wir die Funktion $\omega(n)$ bei jeder Anwendung direkt bestimmen werden können.

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{\omega(l)}{l^s} = O\left(n^{\frac{1}{i+1}-s}\right).$$

Speziell konvergiert auch die Reihe (4) und es gilt

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\omega(l)}{\sqrt[i]{l}} = C + O\left(n^{\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}}\right).$$

Daher ist wegen (2) und (3)

$$\psi(n) = \sum_{l=1}^{n} \omega(l) \sqrt[i]{\frac{n}{l}} + \sum_{l=1}^{n} \omega(l) \left\{\left[\sqrt[i]{\frac{n}{l}}\right] - \sqrt[i]{\frac{n}{l}}\right\} =$$

$$= \sqrt[i]{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\omega(l)}{\sqrt[i]{l}} + O\left(\sum_{l=1}^{n} \omega(l)\right) =$$

$$= \sqrt[i]{n} \left\{C + O\left(n^{\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}}\right)\right\} + O\left(\sqrt[i+1]{n}\right) = C\sqrt[i]{n} + O\left(\sqrt[i+1]{n}\right),$$

wie behauptet.

§ 1. Anzahl der Abelschen Gruppen gegebener Ordnung.

In der Einleitung haben wir die Anzahl der verschiedenen Abelschen Gruppen n-ter Ordnung durch $f(n)$ bezeichnet. Zum Zwecke einer Abschätzung der summatorischen Funktion von $f(n)$ drücken wir nun $f(n)$ in einer anderen Form aus.

Es ist bekannt[3]), daß es so viele verschiedene Abelsche Gruppen n-ter Ordnung gibt, auf wie viele Arten sich n als Produkt von Primzahlpotenzen, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, darstellen läßt.

Es ist zweckmäßig die folgende Verallgemeinerung der zahlentheoretischen Funktion $f(n)$ zu betrachten:

Wir bezeichnen durch $f_i(k)$ diejenige Zahl, die angibt, auf wieviele Arten sich k, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, in ein Produkt von Primzahlpotenzen zerlegen läßt, falls nur solche Primzahlpotenzen in Betracht gezogen werden, deren Exponenten $\geqq i$ sind. Es ist klar, daß die zahlentheoretische Funktion $f_1(k)$ mit der früher definierten $f(k)$ identisch ist. Ferner ist, falls wir unter einem leeren Produkt 1 verstehen, $f_i(1) = 1$ für jedes i.

---

[3]) Vgl. z. B. A. Speiser, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, II. Auflage (Berlin, 1927), S. 51; oder H. Hasse, *Aufgabensammlung zur höheren Algebra* (Berlin und Leipzig, Sammlung Göschen, 1934), S. 95.

Vor allem wollen wir folgende Relation beweisen:
Es ist

$$f_i(k)=\sum_{d^i|k} f_{i+1}\left(\frac{k}{d^i}\right). \tag{5}$$

Wir beweisen die Richtigkeit dieser Formel zuerst für den Fall, daß $k=p^\alpha$ d. h. Potenz einer Primzahl ist. Zu diesem Zwecke zeigen wir, daß

$$f_i(p^\alpha)=f_{i+1}(p^\alpha)+f_i(p^{\alpha-i}). \tag{6}$$

In der Tat bedeutet $f_i(p^\alpha)$ der Definition gemäß die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} p^\alpha=p^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots}, \\ i\leqq\alpha_1\leqq\alpha_2\leqq\ldots \end{array}\right\}. \tag{7}$$

Diese Lösungen sind teilweise derart, daß $i+1\leqq\alpha_1\leqq\alpha_2\leqq\ldots$, teilweise aber derart, daß $i=\alpha_1\leqq\alpha_2\leqq\ldots$; die Anzahl der ersteren ist nach Definition $f_{i+1}(p^\alpha)$, die der letzteren $f_i(p^{\alpha-i})$, womit die Richtigkeit der Formel (6) bewiesen ist.

Um hieraus (5) für Primzahlpotenzen zu folgern, setzen wir voraus, daß die Behauptung für $p^{\alpha-i}$ gilt, d. h.

$$f_i(p^{\alpha-i})=f_{i+1}(p^{\alpha-i})+f_{i+1}(p^{\alpha-2i})+\ldots \tag{8}$$

Dann ist nach (6)

$$f_i(p^\alpha)=f_{i+1}(p^\alpha)+f_i(p^{\alpha-i})=f_{i+1}(p^\alpha)+f_{i+1}(p^{\alpha-i})+\ldots,$$

daher gilt die Formel (5) auch für p^α. Für $p^0=1, p, p^2, \ldots p^{i-1}$ ist aber (5) offenbar gültig. Damit haben wir (5) für Primzahlpotenzen bewiesen.

Zum vollständigen Beweis haben wir also noch zu zeigen, daß, wenn (5) für k und l gilt (wobei $(k, l)=1$), so gilt es auch für kl.

Aus der Definition folgt $f_i(kl)=f_i(k)f_i(l)$ für $(k, l)=1$. Setzen wir jetzt voraus, daß (5) für k und l gilt, dann ist

$$f_i(kl)=f_i(k)f_i(l)=\sum_{d^i|k} f_{i+1}\left(\frac{k}{d^i}\right)\sum_{e^i|l} f_{i+1}\left(\frac{l}{e^i}\right)=$$

$$=\sum_{d^i|k,\, e^i|l} f_{i+1}\left(\frac{k}{d^i}\right)f_{i+1}\left(\frac{l}{e^i}\right)=\sum_{d^i|k,\, e^i|l} f_{i+1}\left(\frac{kl}{d^i e^i}\right)=\sum_{g^i|kl} f_{i+1}\left(\frac{kl}{g^i}\right),$$

womit (5) allgemein bewiesen ist.

Wir summieren beide Seiten von (5) für $k=1, 2, \ldots, n$, und erhalten

$$(9) \qquad \sum_{k=1}^{n} f_i(k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d^i | k} f_{i+1}\left(\frac{k}{d^i}\right) = \sum_{l=1}^{n} f_{i+1}(l) \left[\sqrt[i]{\frac{n}{l}}\right].$$

Um unseren Hilfssatz anwenden zu können, müssen wir

$$\sum_{l=1}^{n} f_{i+1}(l) = O\left(\sqrt[i+1]{n}\right)$$

beweisen. Zu diesem Zwecke benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Die Reihe

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{f_{i+1}(l)}{\sqrt[i]{l}}$$

ist konvergent; ihre Summe ist

$$(10) \qquad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f_{i+1}(l)}{\sqrt[i]{l}} = \zeta\left(1+\frac{1}{i}\right)\zeta\left(1+\frac{2}{i}\right)\ldots$$

Hier bedeutet für $s > 1$

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$$

die Riemannsche ζ-Funktion.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß das unendliche Produkt A_i auf der rechten Seite von (10) konvergent ist. Für $i = 1$ ergibt sich dies wie folgt. Es ist

$$A_1 = \zeta(2)\zeta(3)\ldots = (1 + (\zeta(2) - 1))\,(1 + (\zeta(3) - 1))\ldots$$

und die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

ist konvergent, nämlich $= 1$. (Hieraus ergibt sich übrigens, daß $A_1 > 2$.) Wegen

$$\zeta\left(2+\frac{k}{i}\right) \leq \zeta\left(2+\left[\frac{k}{i}\right]\right)$$

wird aber das Produkt A_i — bis auf die ersten $i-1$ Faktoren — durch die i-te Potenz des Produktes A_1 majorisiert, also ist auch A_i konvergent.

Es ist bekannt, daß für $s > 1$

$$(11) \qquad \zeta(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right),$$

wo das unendliche Produkt sich auf alle Primzahlen erstreckt. Wir gewinnen daher

$$A_i = \zeta\left(\frac{i+1}{i}\right)\zeta\left(\frac{i+2}{i}\right)\cdots =$$

$$= \prod_p\left(1 + \frac{1}{p^{\frac{i+1}{i}}} + \frac{1}{p^{\frac{2(i+1)}{i}}} + \cdots\right)\prod_p\left(1 + \frac{1}{p^{\frac{i+2}{i}}} + \frac{1}{p^{\frac{2(i+2)}{i}}} + \cdots\right)\cdots$$

Sämtliche Glieder des Produktes sind >1 und das Produkt ist — wie wir es bewiesen haben — konvergent, die unendlichen Reihen mit positiven Gliedern in den einzelnen Faktoren ebenfalls; es ist daher erlaubt die Multiplikation gliedweise durchzuführen und die Teilprodukte beliebig zu ordnen.

Dann kommt das Glied $\frac{1}{n^{\frac{1}{i}}}$ so oft vor, als n sich in der Form

$$p_1^{\alpha_{11}(i+1)+\alpha_{12}(i+2)+\cdots}\, p_2^{\alpha_{21}(i+1)+\alpha_{22}(i+2)+\cdots}\cdots =$$

$$= p_1^{\overbrace{(i+1)+(i+1)+\cdots}^{\alpha_{11}}+\overbrace{(i+2)+(i+2)+\cdots}^{\alpha_{12}}+\cdots}\, p_2^{\overbrace{(i+1)+(i+1)+\cdots}^{\alpha_{21}}+\cdots}\cdots$$

darstellen läßt d. h. so oft, wie sich n in das Produkt von Primzahlpotenzen mit Exponenten $\geqq i+1$ zerlegen läßt, d. h. $f_{i+1}(n)$-mal. Damit haben wir (10) bewiesen.

Nun beweisen wir, daß

$$(12) \qquad s_i(n) = \sum_{k=1}^{n} f_i(k) = O\left(\sqrt[i]{n}\right).$$

Es ist nämlich nach (9) und (10), da $f_i(l) \geqq 0$

$$\sum_{k=1}^{n} f_i(k) \leqq \sum_{l=1}^{n} f_{i+1}(l)\sqrt[i]{\frac{n}{l}} = \sqrt[i]{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{f_{i+1}(l)}{\sqrt[i]{l}} \leqq A_i\sqrt[i]{n},$$

woraus (12) unmittelbar folgt.

Wegen (12) gilt auch

$$\sum_{k=1}^{n} f_{i+1}(k) = O\left(\sqrt[i+1]{n}\right),$$

also können wir den Hilfssatz aus der Einleitung anwenden. Wir erhalten

(13) $$s_i(n) = \sum_{k=1}^{n} f_i(k) = A_i \sqrt[i]{n} + O\left(\sqrt[i+1]{n}\right).$$

Für den Spezialfall $i = 1$ lautet unser Resultat

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = A_1 n + O\left(\sqrt{n}\right),$$

wie in der Einleitung angekündigt.

§ 2. Verteilung der Zahlen k mit $f_i(k) \neq 0$.

Es ist unmittelbar klar, daß $f_i(k)$ — die Anzahl der Zerlegungen der Zahl k als Produkt solcher Primzahlpotenzen, deren Exponenten $\geqq i$ sind — nur für solche Zahlen k von Null verschieden ist, in denen alle Primzahlen mit einem Exponenten $\geqq i$ vorkommen. Diese Zahlen werden wir der Kürze halber „Zahlen i-ter Art" nennen.

Nun wollen wir die Anzahl der Zahlen i-ter Art bis n asymptotisch auswerten. Bezeichnen wir ihre Anzahl mit $\psi_i(n)$. Offenbar ist $\psi_i(n) \leqq s_i(n)$, da $s_i(n) = \sum_{k=1}^{n} f_i(n)$ eine Summe nichtnegativer Zahlen ist, die $\psi_i(n)$ Glieder $\geqq 1$ besitzt. Daher ist nach (12)

(14) $$\psi_i(n) = O\left(\sqrt[i]{n}\right).$$

Wir werden genauer zeigen, daß *die asymptotische Formel*

$$\psi_i(n) = C_i \sqrt[i]{n} + O\left(\sqrt[i+1]{n}\right)$$

gilt, wobei C_i eine von i, nicht aber von n, abhängige positive Zahl ist.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Zahlen, deren Primfaktorendarstellung jede Primzahl mit einem Exponenten enthält, der größer als i aber kleiner als $2i$ ist, mit

(15) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

(etwa in zunehmender Reihenfolge). Ist $\chi_i(n)$ die Anzahl der Glieder $\leqq n$ der Folge (15), so ist $\chi_i(n) \leqq \psi_{i+1}(n)$, da die Folge (15) lauter Zahlen $i+1$-ter Art enthält. Daher ist nach (14)

(16) $$\chi_i(n) = O\left(\sqrt[i+1]{n}\right).$$

Nun läßt sich jede Zahl i-ter Art auf eine und nur eine Weise in zwei solche Faktoren zerlegen, deren erster eine i-te

Potenzzahl ist, der zweite hingegen der Folge (15) gehört. In der Tat, ist

$$k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \geqq i)$$

eine beliebige Zahl i-ter Art, so läßt sich jeder Exponent α_j eindeutig in der Form $\alpha_j = \beta_j i + \gamma_j$ mit $\beta_j \geqq 0$, $\gamma_j = 0$ oder $i < \gamma_j < 2i$, darstellen und dann ist offenbar

$$k = (p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r})^i \cdot p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_r^{\gamma_r}$$

die einzige Zerlegung der gewünschten Form. Natürlich ist auch umgekehrt das Produkt einer i-ten Potenzzahl mit einer Zahl (15) eine Zahl i-ter Art.

Daher ist

$$(17) \qquad \psi_i(n) = \sum_{m^i a_j \leqq n} 1 = \sum_{a_j \leqq n} \sum_{m \leqq \sqrt[i]{\frac{n}{a_j}}} 1 = \sum_{a_j \leqq n} \left[\sqrt[i]{\frac{n}{a_j}} \right],$$

wobei a_j die Glieder der Folge (15) durchläuft.

Infolge (16) und (17) können wir den Hilfssatz aus der Einleitung auf $\psi_i(n)$ anwenden; es ist dabei $\omega(n) = 1$ oder 0 zu setzen, je nachdem n der Folge (15) angehört oder nicht. Wir erhalten

$$\psi_i(n) = C_i \sqrt[i]{n} + O\left(\sqrt[i+1]{n}\right),$$

wobei

$$C_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[i]{a_j}} > 0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(Eingegangen am 6. Juni 1934.)

Le théorème de probabilité de Poincaré, généralisé au cas de plusieurs variables indépendantes.

Par CH. JORDAN à Budapest.

1. La définition de la Probabilité Mathématique est basée sur la théorie des ensembles.[1]) Résumons les notions de cette discipline. Nous désignerons un ensemble par une ou par plusieurs lettres par exemple: E, AB, $A\beta$, etc. Le nombre des éléments appartenant à un ensemble, supposé fini, sera noté par les mêmes lettres que l'ensemble correspondant, mais mise en parenthèse; exemples: (E), (AB), $(A\beta)$.

Le signe $=$ signifiera identité. $E=A$ veut dire que l'ensemble E est identique à l'ensemble A, c.-à-d. possède les mêmes éléments.

On définit, par le produit AB de deux ensembles A et B, l'ensemble formé par les éléments communs aux deux ensembles. Comme l'ensemble zéro est un ensemble qui n'a point d'éléments, l'égalité $AB=0$ signifie que l'ensemble AB, étant identique à l'ensemble zéro, n'a pas d'éléments: c.-à-d. que les ensembles A et B n'ont pas d'éléments communs. $AB=A$ signifie que les éléments communs aux ensembles A et B sont identiques aux éléments de l'ensemble A; c.-à-d. que tous les éléments de l'ensemble A appartiennent à l'ensemble B.

On définit par la somme $A+B$ de deux ensembles A et B l'ensemble formé par les éléments des deux ensembles réunis.

---

[1]) CH. JORDAN, *a) Statistique Mathématique* (Paris, 1927); *b)* A valószínűségszámítás alapfogalmai (Les fondements du Calcul des probabilités), *Mathematikai és Physikai Lapok*, 34 (1927), p. 101—136; *c)* Inversione della formula di Bernoulli relativa al problema delle prove ripetute a più variabili, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Roma*, 4 (1933), p. 505—513.

$A+B=C$ veut dire que chaque élément de l'ensemble A ou de l'ensemble B appartient aussi à l'ensemble C. De plus qu'un élément de C appartient ou à l'ensemble A ou à B, ou encore à ces deux ensembles.

2. *Classement dichotome.* Dans ce classement, l'ensemble E est partagé en deux classes A et α de manière qu'il n'y ait pas d'éléments communs aux deux ensembles A et α. Donc d'après ce qui précède on a

$$A+\alpha=E \quad \text{et} \quad A\alpha=0.$$

On peut partager l'ensemble E en deux classes de différentes manieres :

$$E=A_1+\alpha_1=A_2+\alpha_2=\ldots=A_n+\alpha_n$$

tout en ayant

$$A_1\alpha_1=0,\ A_2\alpha_2=0,\ldots,A_n\alpha_n=0.$$

Ces classements sont des classements dichotomes de premier ordre.

On peut définir la probabilité de deux ensembles A et B par une fraction dont le numérateur est égal au nombre des éléments du produit des deux ensembles et le dénominateur au nombre des éléments de la somme des deux ensembles :

$$P=\frac{(AB)}{(A+B)}.$$

Cette définition est un peu plus générale que celle employée ordinairement où l'on suppose que les éléments de l'ensemble B appartiennent tous à l'ensemble A c.-à-d. que l'on a

$$AB=B \quad \text{et} \quad A+B=A.$$

Dans ce cas on peut interpréter un problème de probabilité en définissant l'ensemble A de maniere que ces éléments soient : les cas, considérés comme également possibles; et les éléments de B: les cas favorables à un événement déterminé. La probabilité de l'événement sera alors $P=(B)/(A)$

On obtient un classement dichotome du second ordre lorsque l'on partage l'ensemble E simultanément en $A_1+\alpha_1$ et en $A_2+\alpha_2$; on obtient alors quatre classes :

$$E=A_1A_2+A_1\alpha_2+\alpha_1A_2+\alpha_1\alpha_2.$$

Cette décomposition peut être représentée par la multiplication symbolique :

$$(A_1+\alpha_1)\,(A_2+\alpha_2)=EE=E$$

en effet la partie commune aux ensembles E et E est E (De même on aurait $E^m = E$.)

D'une manière semblable on obtient un classement dichotome d'ordre n en partant de

$$(A_1 + \alpha_1)(A_2 + \alpha_2)\ldots(A_n + \alpha_n) = E$$

et en effectuant les multiplications. On a, comme il a était dit $A_i\alpha_i = 0$.

Dans la théorie des classes on a été amené à appeler classes positives celles dont le symbole ne contient que des lettres latines, et de nommer les autres classes négatives. On peut exprimer les classes négatives par les classes positives en résolvant des équations du premier degré; mais on arrive plus rapidement au résultat par le procédé *symbolique* suivant: on remplace les α_i par $E - A_i$, on effectue les multiplications, puis on remplace dans le résultat, conformément à ce qui précède, E^ν par E, et $E^\nu A_i$ par A_i. Par exemple

$$\alpha_1\alpha_2 = (E - A_1)(E - A_2) = E - A_1 - A_2 + A_1A_2$$

de cette équation symbolique on déduit

$$(\alpha_1\alpha_2) = (E) - (A_1) - (A_2) + (A_1A_2).$$

Comme il a était dit, ce résultat pourrait être vérifié à l'aide des équations

$$(A_1A_2) + (A_1\alpha_2) + (\alpha_1A_2) + (\alpha_1\alpha_2) = (E)$$

$$(A_1A_2) + (A_1\alpha_2) = (A_1)\,; \;\; (A_1A_2) + (\alpha_1A_2) = (A_2).$$

Dans un classement dichotome d'ordre n, la somme des classes dans lesquelles il y a m symboles positifs et $n - m$ négatifs est

$$(1) \qquad \sum A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}\ldots A_{i_m}\alpha_{i_{m+1}}\ldots\alpha_{i_n}\,;$$

dans cette somme, les indices $i_1, i_2, \ldots, i_m$ prennent les valeurs correspondant à toutes les combinaison m à m des nombres $1, 2, \ldots, n$ et $i_{m+1}, \ldots, i_n$ représente la combinaison complémentaire.

3. *Probabilité des épreuves répétées.* On peut interpréter la probabilité des épreuves répétées de la manière suivante: soit E l'ensemble des cas également possibles; de plus, soient A_i l'ensemble des cas favorables à l'événement $\mathcal{E}$ qui peuvent se présenter à l'épreuve i et α_i l'ensemble des cas défavorables à l'événement $\mathcal{E}$ à l'épreuve i.

On en conclut que la somme (1) représente l'ensemble des suites de n épreuves dans lesquelles il y a m épreuves favorables et $n-m$ épreuves défavorables.

Par suite la probabilité pour avoir m épreuves favorables et $n-m$ épreuves défavorables en n épreuves sera

$$P=\sum\frac{(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_m}\alpha_{i_{m+1}}\dots\alpha_{i_n})}{(E)}$$

où (E) est le nombre des suites possibles en n épreuves.

Cette formule est tout à fait générale. En employant la méthode symbolique précédente pour exprimer la somme qui figure dans la probabilité précédente par des sommes de classes positives, on trouve

$$A_{i_1}\dots A_{i_m}(E-A_{i_{m+1}})\dots(E-A_{i_n});$$

après avoir effectué les multiplications, on simplifie en écrivant

$$A_{i_1}\dots A_{i_m}E^{n-m}=A_{i_1}\dots A_{i_m}$$

ensuite

$$-\sum A_{i_1}\dots A_{i_m}\sum_{\nu=m+1}^{n}A_{i_\nu}=-\binom{m+1}{m}\sum A_{i_1}\dots A_{i_{m+1}}$$

en effet dans la somme du premier membre chaque terme arrive $\binom{m+1}{m}$ fois. On a encore

$$\sum A_{i_1}\dots A_{i_m}\sum A_{i_\nu}A_{i_{\nu+1}}=\binom{m+2}{m}\sum A_{i_1}\dots A_{i_{m+2}}$$

car dans la somme du premier membre chaque terme arrive $\binom{m+2}{m}$ fois. Finalement on trouve

$$\begin{aligned}P=&\sum\frac{(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_m})}{(E)}-\binom{m+1}{m}\sum\frac{(A_{i_1}\dots A_{i_{m+1}})}{(E)}+\dots+\\ &+(-1)^{\nu}\binom{m+\nu}{m}\sum\frac{(A_{i_1}\dots A_{i_{m+\nu}})}{(E)}+\dots+\\ &+(-1)^{n-m}\binom{n}{m}\frac{(A\,A_2\dots A_n)}{(E)}.\end{aligned}\tag{2}$$

La première somme est la probabilité pour qu'en n épreuves il y ait m cas favorables (les autres étant favorables ou non). La seconde somme est la probabilité pour que $m+1$ cas soient favorables (les autres quelconques), et ainsi de suite; le dernier terme est la probabilité pour que tous les n cas soient favorables.

Ce théoreme très général de probabilité des épreuves répétées embrasse les théorèmes de BERNOULLI, de POISSON et de POINCARÉ [loc. cit. [1]) *b)*, p. 118].

La formule (2) se simplifie considérablement lorsque la probabilité de l'événement $\mathfrak{A}$ à l'épreuve i est indépendante du résultat des épreuves antérieures. Alors elle est égale à la probabilité de $\mathfrak{A}$ lorsque la première épreuve était favorable, puis égale à cette probabilité lorsque les deux premières épreuves étaient favorables et ainsi de suite. C.-à-d.

$$\frac{(A_i)}{(E)}=\frac{(A_iA_1)}{(A_1)}=\frac{(A_iA_1A_2)}{(A_1A_2)}=\dots \tag{3}$$

Lorsque la formule (3) est vraie pour toutes les valeurs de i, on tire de cette formule successivement

$$(A_iA_1)=(A_i)\,(A_1)/(E)$$
$$(A_iA_1A_2)=(A_i)\,(A_1)\,(A_2)/(E)\,(E)$$

et ainsi de suite.[2])

A l'aide de ces valeurs la formule (2) devient

$$\begin{aligned} P=&\sum\frac{(A_{i_1})}{(E)}\cdot\frac{(A_{i_2})}{(E)}\cdots\frac{(A_{i_m})}{(E)}-\\ &-\binom{m+1}{m}\sum\frac{(A_{i_1})}{(E)}\cdots\frac{(A_{i_{m+1}})}{(E)}+\dots+\\ &+(-1)^{\nu}\binom{m+\nu}{m}\sum\frac{(A_{i_1})}{(E)}\cdots\frac{(A_{i_{m+\nu}})}{(E)}+\dots+\\ &+(-1)^{n-m}\binom{n}{m}\frac{(A_1)}{(E)}\cdots\frac{(A_n)}{(E)}.\end{aligned} \tag{4}$$

Cas particulier. Lorsque les probabilités

$$\frac{(A_i)}{(E)}$$

ont toutes la même valeur p, c.-à-d. indépendantes de i, la probabilité devient constante à chaque épreuve et la formule (4) devient identique à la formule de BERNOULLI

$$\begin{aligned} P=&\binom{n}{m}p^m-\binom{n}{m+1}\binom{m+1}{m}p^{m-1}+\binom{n}{m+2}\binom{m+2}{m}p^{m-2}-\dots\\ &\dots+(-1)^{n-m}\binom{n}{m}p^n=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}.\end{aligned} \tag{5}$$

---

[2]) La condition d'indépendance donnée par E. CZUBER, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Leipzig, 1924), Band I, p. 48, est insuffisante pour déduire les formules suivantes.

4. *Formule de Poincaré.* En posant dans (4) $m=0$ on obtient la probabilité pour que les n épreuves soient toutes défavorables. En retranchant cette probabilité de l'unité, on obtient la probabilité pour qu'en n épreuves au moins une épreuve soit favorable. C'est la formule de POINCARÉ

$$
(6) \qquad \begin{aligned} P = \sum \frac{(A_i)}{(E)} - \sum \frac{(A_{i_1} A_{i_2})}{(E)} + \sum \frac{(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3})}{(E)} - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \frac{(A_1 A_2 A_3 \dots A_n)}{(E)} . \end{aligned}
$$

Lorsqu'en plus la probabilité pour que l'événement soit favorable est la même à chaque épreuve $\frac{(A_i)}{(E)} = p$, la formule (3) se réduit à

$$
P = np - \binom{n}{2} p^2 + \binom{n}{3} p^3 - \dots + (-1)^{n+1} p^n = 1 - (1-p)^n .
$$

5. *Classement polytome.* Dans ces classement, l'ensemble E est partagé en plusieurs classes, sans éléments commun deux à deux:

$$
E = A_{i1} + A_{i2} + \dots + A_{im} \quad \text{avec} \quad A_{i\nu} A_{i\mu} = 0 \quad \text{pour} \quad \nu \neq \mu
$$

pour $i = 1, 2, \dots, m$.

Ce classement peut servir pour interpréter la probabilité des épreuves répétées à plusieurs variables indépendantes. Supposons par exemple qu'à chaque épreuve un des événements $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m$ puisse arriver et un seul. L'ensemble E est celui de tous les cas possibles. L'ensemble $A_{\nu i}$ est l'ensemble des cas favorables à l'arrivée de l'événement $\mathfrak{A}_\nu$ à l'épreuve i.

Nous allons supposer dans ce qui suit que la probabilité de l'événement $\mathfrak{A}_\nu$ est la même à chaque épreuve

$$
\frac{(A_{i\nu})}{(E)} = p_\nu
$$

alors la probabilité pour que chaque événement $\mathfrak{A}_\nu$ arrive r_ν fois en n épreuves $(\nu = 1, 2, \dots, m)$ est donnée par la formule de BERNOULLI à $m-1$ variables indépendantes:[3])

$$
(7) \qquad P = \frac{n!}{r_1! \, r_2! \dots r_m!} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_m^{r_m} .
$$

6. *Le théorème de Poincaré généralisé.* Nous allons généraliser la formule de POINCARÉ en déterminant la probabilité pour

---

[3]) CH. JORDAN, Problema della prove ripetute a piu variabili indipendenti, *Giornale dell'Istituto degli Attuari, Roma,* **4** (1933), p. 351–368.

que dans une suite de n épreuves tous les événements $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m$ se présentent au moins une fois, en supposant que la probabilité de l'arrivée de l'événement $\mathcal{A}_\nu$ est égale à p_ν à chaque épreuve.

Pour obtenir cette probabilité nous allons retrancher de l'unité la probabilité des suites dans lesquelles au moins un de ces événements ne se présente pas. Pour y arriver retranchons d'abord

$$(8)\qquad \sum_{\nu=1}^{m} (1-p_\nu)^n$$

c.-à-d. la somme des probabilités des suites dans lesquelles l'événement $\mathcal{A}_\nu$ ne se présente pas, (pour $\nu = 1, 2, 3, \ldots, m$).

Mais en procèdant de cette manière, nous avons retranché deux fois la probabilité correspondant aux suites dans lesquelles deux des événements ne se sont pas produits; il faut donc rajouter une fois la probabilité correspondant à ces suites, donc

$$(9)\qquad \sum (1-p_{\nu_1}-p_{\nu_2})^n$$

cette somme étant étendue à toutes les combinaisons des événements deux à deux.

En retranchant (8), on a rentranché $\binom{3}{1}$ fois la probabilité des suites dans lesquelles trois des événements ne se sont pas produits, puis en rajoutant (9), on a rajouté cette probabilité $\binom{3}{2}$ fois. Il faut donc retrancher encore une fois la probabilité

$$(10)\qquad \sum (1-p_{\nu_1}-p_{\nu_2}-p_{\nu_3})^n$$

et ainsi de suite.

Enfin la probabilité des suites dans lesquelles i des événement ne se produisent pas, est rajouté $(-1)^i$ fois. En effet cette probabilité ayant été ajoutée

$$-\binom{i}{1}+\binom{i}{2}-\binom{i}{3}+\ldots+(-1)^{i-1}\binom{i}{i-1}$$

fois, il faut l'ajouter encore $(-1)^i$ fois pour qu'elle soit en fin de compte retranchée une fois.

On obtient finalement la probabilité cherchée

$$(11)\qquad \begin{aligned} P = 1 &- \sum (1-p_{\nu_1})^n + \sum (1-p_{\nu_1}-p_{\nu_2})^n - \\ &- \sum (1-p_{\nu_1}-p_{\nu_2}-p_{\nu_3})^n + \ldots + \\ &+ (-1)^m \sum (1-p_{\nu_1}-p_{\nu_2}-\ldots-p_{\nu_m})^n. \end{aligned}$$

C'est le théorème de POINCARÉ, généralisé pour le cas des épreuves répétés à $m-1$ variables indépendantes, donnant la probabilité pour qu'en n épreuves chaque événement se produise au moins une fois, la probabilité p_ν de l'événement $\mathfrak{A}_\nu$ restant la même à chaque épreuve.

Cas particulier. Lorsque les probabilités p_ν sont toutes égales, on a $p_\nu = {}^1/_m$ car $p_1+p_2+\ldots+p_m = 1$; et il en résulte

$$P = 1 - \binom{m}{1}\left(1-\frac{1}{m}\right)^n + \binom{m}{2}\left(1-\frac{2}{m}\right)^n - \ldots + \\ + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}\left(1-\frac{m-1}{m}\right)^n$$

ou encore

$$P = \frac{1}{m^n}\sum_{x=1}^{m}(-1)^{m-x}\binom{m}{x}x^n.$$

Dans le Calcul des différences finies, on montre que la somme du second membre est égale à la différence m-ième de x^n pour $x=0$. De plus on y dénote

$$\left[\frac{\Delta^m x^n}{m!}\right]_{x=0} = \mathfrak{S}_n^m$$

où $\mathfrak{S}_n^m$ est nommé nombre de STIRLING de second expèce,[4]) on a donc

$$P = \frac{m!}{m^n}\mathfrak{S}_n^m. \tag{12}$$

On peut obtenir ce résultat en partant de la formule (7) en y posant $p_\nu = \dfrac{1}{m}$. On trouve

$$P = \frac{1}{m^n}\sum\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_m!}.$$

La somme du second membre doit être étendue à toutes les valeurs $r_i = 1, 2, 3, \ldots,$ telles que $r_1+r_2+\ldots+r_m = n$. Mais on sait que dans ce cas cette somme est égale à $m!\,\mathfrak{S}_n^m$. [Voir loc. cit. [4]), p. 268.] On obtient donc la formule (12).

Lorsqu'à chaque épreuve m événements différents peuvent se produire avec la même probabilité $\left(\dfrac{1}{m}\right)$, alors la probabilité

[4]) C. JORDAN, On Stirling's Numbers, *Tôhoku Mathematical Journal,* **37** (1933), p. 254—278.

pour qu'en n épreuves chaque événement se produise au moins une fois est donnée par

$$P = \frac{m!}{m^n} \mathfrak{S}_n^m .$$

De la même manière on déduit de (7) lorsque $p_\nu = 1/m$, la probabilité qu'en n épreuves des m événements, μ quelconques se produisent seulement; elle est égale à

$$P_\mu = \binom{m}{\mu} \frac{1}{m^n} \sum \frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_\mu!} = \binom{m}{\mu} \frac{\mu!}{m^n} \mathfrak{S}_n^\mu =$$
$$= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu+1)}{m^n} \mathfrak{S}_n^\mu .$$

La somme du premier membre étant étendue aux valeurs $r_i = 1, 2, 3, \ldots$ telle que $r_1 + r_2 + \ldots + r_\mu = n$

(Reçu le 4 séptembre 1934.)

Über einen Löwenheimschen Satz.

Von László Kalmár in Szeged.

Löwenheim[1]) hat eine Konstruktion angegeben, welche jedem Zählausdruck[2]) $\mathfrak{A}$ einen binären[3]) Zählausdruck $\mathfrak{B}$ zuordnet derart, daß $\mathfrak{A}$ *dann und nur dann allgemeingültig ist, falls* $\mathfrak{B}$ *es ist.* In den folgenden Zeilen wird diese Konstruktion durch eine einfachere ersetzt.

1. Es seien $F_1, F_2, \ldots, F_l$ die im gegebenen Zählausdruck $\mathfrak{A}$ figurierenden Funktionsvariable; F_λ soll r_λ Leerstellen besitzen[4]) $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$. Es sei $r = \mathrm{Max}(r_1, r_2, \ldots, r_l)$. Wählen wir l Funktionsvariable $G_1, G_2, \ldots, G_l$ mit einer und r Funktionsvariable $H_1, H_2, \ldots, H_r$ mit zwei Leerstellen, die voneinander und von $F_1, F_2, \ldots, F_l$ verschieden sind, ferner eine von den in $\mathfrak{A}$ vorkommenden gebundenen Variablen verschiedene Individuenvariable u.

Der gesuchte binäre Zählausdruck $\mathfrak{B}$ entsteht aus $\mathfrak{A}$, indem man für die Funktionszeichen $F_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{r_\lambda})$ die Formel

$$(1) \qquad (u)\big(H_1(x_1, u) \,\&\, H_2(x_2, u) \,\&\, \ldots \,\&\, H_{r_\lambda}(x_{r_\lambda}, u) \rightarrow G_\lambda(u)\big)$$

---

[1]) L. Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Annalen*, **76** (1915), S. 447—470, insb. § 4. Ich setze weder die Kenntnis dieser Arbeit, noch die der dort angewandten Schröderschen Symbolik voraus; statt den letzteren wende ich die Bezeichnungen des Werkes: D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin, 1928) an.

[2]) d. h. Formel des engeren Funktionenkalküls ohne freie Individuenvariable.

[3]) d. h. einen solchen, die ausschließlich Funktionsvariable mit einer und zwei Leerstellen enthält.

[4]) Durch eine einfache vorbereitende Konstruktion könnte man übrigens erreichen, daß $r_1 = r_2 = \ldots = r_l$; die obige Konstruktion würde aber dadurch nicht einfacher ausfallen.

einsetzt[5]) ($\lambda = 1, 2, \ldots, l$). Es ist klar, daß $\mathfrak{B}$ allgemeingültig ist, falls $\mathfrak{A}$ es ist; unsere Aufgabe ist, auch das *Umgekehrte* zu zeigen.

2. Setzen wir also voraus, daß $\mathfrak{B}$ allgemeingültig ist. Es sei $\mathfrak{J}$ ein beliebiger Individuenbereich, ferner $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l$ beliebige in $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktionen von bzw. $r_1, r_2, \ldots, r_l$ Argumenten. Es ist zu zeigen, daß die Aussage $\mathfrak{A}^*$, die aus $\mathfrak{A}$ durch Einsetzung dieser Funktionen für $F_1, F_2, \ldots, F_l$ entsteht, richtig ist.

Wir bezeichnen durch $\mathfrak{J}^r$ die Menge der geordneten r-tupel aus Elementen von $\mathfrak{J}$. Die Komponenten der Elemente von $\mathfrak{J}^r$ bezeichnen wir durch dieselben Buchstaben wie diese Elemente, aber mit oberen Indizes; z. B. sind die Komponenten von α der Reihe nach $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(r)}$.

Wir definieren in $\mathfrak{J}^r$ die logischen Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_l$ von einem Argument und $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_r$ von zwei Argumenten wie folgt: $\Psi_\lambda(\alpha)$ sei für $\alpha \in \mathfrak{J}^r$ gleichbedeutend mit $\Phi_\lambda(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(r_\lambda)})$; $\Omega_\varrho(\alpha, \beta)$ bedeutet für $\alpha, \beta \in \mathfrak{J}^r$, daß $\alpha^{(1)}$ mit $\beta^{(\varrho)}$ identisch ist ($\lambda = 1, 2, \ldots, l$; $\varrho = 1, 2, \ldots, r$).

Wegen Voraussetzung entsteht eine richtige Aussage $\mathfrak{B}^*$, falls in $\mathfrak{B}$ für $G_1, G_2, \ldots, G_l$, $H_1, H_2, \ldots, H_r$ der Reihe nach die Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_l$, $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_r$ eingesetzt und die Klammerzeichen über $\mathfrak{J}^r$ erstreckt werden. Aus der Teilformel (1) wird dann insbesondere

$$(2) \qquad (u)\big(\Omega_1(x_1, u) \,\&\, \Omega_2(x_2, u) \,\&\, \ldots \,\&\, \Omega_{r_\lambda}(x_{r_\lambda}, u) \rightarrow \Psi_\lambda(u)\big).$$

Die Aussage $\mathfrak{B}^*$ läßt sich aber auch mit sich über $\mathfrak{J}$ erstreckenden Klammerzeichen ausdrücken. Man braucht nur die

---

[5]) Statt dessen könnte man auch

$$(1') \qquad (Eu)\big(H_1(x_1, u) \,\&\, H_2(x_2, u) \,\&\, \ldots \,\&\, H_{r_\lambda}(x_{r_\lambda}, u) \,\&\, G_\lambda(u)\big)$$

für $F_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{r_\lambda})$ einsetzen. Ein formal ähnlicher Ansatz wird bei K. Gödel, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **40** (1933), S. 433—443, insb. Formel (20), S. 441, angewandt, um zu verhindern, daß ein gewisses Skolemsches Verfahren den binären Charakter eines Zählausdruckes zerstört. [Mit Hilfe dieses Gödelschen Kunstgriffes könnte man den Teil II meiner Arbeit: Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem, *diese Acta*, **5** (1930—32), S. 222—236, gewisse technische Vereinfachungen anbringen; vgl. Fußnote [19]) jener Arbeit, die durch die Gödelsche Bemerkung gegenstandlos wurde.] Den Gödelschen Ansatz könnte man ebenfalls zum Beweis des Löwenheimschen Satzes verwerten; die sich so ergebende Konstruktion wäre aber komplizierter, als die des Textes, da sie im allgemeinen mehr (nämlich $r_1 + r_2 + \ldots + r_l$ statt $r + l$) Hilfsfunktionen benützt und auch zum Beweis einer Ungleichung wie (4) weniger geeignet ist.

darin vorkommenden logischen Funktionen durch die Komponenten ihrer Argumente auszudrücken, ferner die Allzeichen (x) und die Seinzeichen (Ex) durch den entsprechenden Zeichen $(x^{(1)})(x^{(2)})\ldots(x^{(r)})$ bzw. $(Ex^{(1)})(Ex^{(2)})\ldots(Ex^{(r)})$ für die Komponenten zu ersetzen. Insbesondere geht dann (2) in die Aussagenfunktion

$$(3)\quad \begin{aligned}(u^{(1)})(u^{(2)})\ldots(u^{(r)})\bigl(\Delta(x_1^{(1)},u^{(1)})\,\&\,\Delta(x_2^{(1)},u^{(2)})\,\&\ldots\&\,\Delta(x_{r_\lambda}^{(1)},u^{(r_\lambda)})\rightarrow\\ \rightarrow\Phi_\lambda(u^{(1)},u^{(2)},\ldots,u^{(r_\lambda)})\bigr)\end{aligned}$$

über, wobei $\Delta(x, y)$ die Identitätsfunktion des Individuenbereiches $\mathfrak{J}$ bedeutet, d. h. die logische Funktion, die dann und nur dann richtig ist, falls für x und y ein und dasselbe Element von $\mathfrak{J}$ eingesetzt wird.

In dieser Schreibweise kommen außer $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)}$ nur solche Individuenvariable in $\mathfrak{B}^*$ als Argumente einer Funktion vor, die den oberen Index $^{(1)}$ tragen; die Klammerzeichen mit den übrigen Variablen können also wieder weggelassen werden. Ersetzt man noch die Aussagenfunktion (3) durch die offenbar gleichwertigen Funktionen $\Phi_\lambda(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{r_\lambda}^{(1)})$, so entsteht eine Aussage, die sich von $\mathfrak{A}^*$ nur in der Bezeichnung der (gebundenen) Individuenvariablen unterscheidet. Daher ist auch $\mathfrak{A}^*$ richtig, wie behauptet.

3. Ein Zählausdruck $\mathfrak{A}$ kann, ohne allgemeingültig zu sein, in *gewissen* Individuenbereichen identisch (d. h. für jede Einsetzung von logischen Funktionen für die Funktionsvariablen) richtig ausfallen. In diesem Falle fragt man, welche Individuenbereiche diese Beschaffenheit haben. Um dies zu entscheiden, genügt es bekanntlich[6]) die Mindestenzahl $\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}}$ der Elemente derjenigen Individuenbereiche zu bestimmen, in denen $\mathfrak{A}$ nicht mehr identisch richtig ist; dann ist $\mathfrak{A}$ dann und nur dann in einem Individuenbereich identisch richtig, falls derselbe eine Kardinalzahl kleiner als $\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}}$ besitzt.

Aus dem obigen Beweis ergibt sich nun die Ungleichung

$$(4)\qquad \mathfrak{m}_{\mathfrak{A}} \leqq \mathfrak{m}_{\mathfrak{B}} \leqq \mathfrak{m}_{\mathfrak{A}}^{r}.$$

Kennt man also $\mathfrak{m}_{\mathfrak{B}}$, *so kann man auch* $\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}}$ *bestimmen.* Ist $\mathfrak{m}_{\mathfrak{B}}$ endlich, so folgt dies daraus, daß man in endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob ein gegebener Zählausdruck in einem Individuen-

[6]) Siehe P. Bernays und M. Schönfinkel, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen,* **99** (1928), S. 342—372, insb. S. 344.

bereich mit einem gegebenen endlichen Anzahl von Elementen identisch richtig ist; ist aber $\mathfrak{m}_{\mathfrak{B}}$ unendlich, so ist nach dem bekannten Löwenheim—Skolemschen Satz[7]) $\mathfrak{m}_{\mathfrak{B}} = \aleph_0$, also, wegen (4), auch $\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}} = \aleph_0$.

4. Die obige Konstruktion besitzt, gegenüber der Löwenheimschen Konstruktion, auch die Beschaffenheit, *daß $\mathfrak{A}$ dann und nur dann erfüllbar ist, falls $\mathfrak{B}$ es ist.* Dies folgt aus der Bemerkung, daß unsere Konstruktion der Negation von $\mathfrak{A}$ die Negation von $\mathfrak{B}$ zuordnet.

(Eingegangen am 12. März 1934.)

Zusatz.[8])

Die oben — vom Standpunkt der *mengentheoretischen Prädikatenlogik*[9]) aus dargelegte — Beweisverfahren besitzt dem Löwenheimschen gegenüber auch den Vorzug, daß es sich fast unmittelbar der *axiomatischen Prädikatenlogik* anpassen läßt. So gewinnt man den folgenden *finiten* Beweis des Löwenheimschen Satzes, der mit wesentlich einfacheren Hilfsmitteln auskommt, als der von HERBRAND[10]) stammende finite Beweis dieses Satzes.[11])

---

[7]) L. LÖWENHEIM, a. a. O., Satz 2; TH. SKOLEM, Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, *Skrifter det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, Mat.-Naturv. Klasse,* 1929, No. 4, 49 S., insb. § 4.

[8]) In diesem Zusatz wird den Prädikatenlogik betreffenden Ideen des neulich erschienenen Werkes: D. HILBERT und P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik,* I (Berlin, 1934) Rechnung getragen. In Terminologie und Bezeichnungen schließen wir uns von nun an diesem Werk (zitiert: H.—B.) an; nur sollen $l, r, s, \lambda, \varrho$ (mit oder ohne Indizes), wie bisher, Ziffer bedeuten. p, q (auch mit beliebigen Indizes) sollen freie Individuenvariable (besonders für Festlegung von Nennformen), u (ebenfalls mit oder ohne Indizes) eine gebundene Individuenvariable bedeuten.

[9]) Vgl. H.—B., S. 125.

[10]) J. HERBRAND, Sur le problème fondamental de la logique mathématique, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydz. III,* **24** (1931), S. 12—56, insb. S. 34—39.

[11]) Aus dem folgenden Beweis der finiten Formulierung des Löwenheimschen Satzes kann man mit Hilfe des Gödelschen Vollständigkeitssatzes (K. GÖDEL, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.,* **37** (1930), S. 349—360, insb. Satz I, S. 350) wiederum zu einem Beweis des Löwenheimschen Satzes in der mengentheoretischen Formulierung gelangen; dieser Beweis wäre aber komplizierter, als der oben gegebene Beweis.

5. In der axiomatischen Prädikatenlogik wird die Rolle der Allgemeingültigkeit einer Formel durch die *Ableitbarkeit* derselben im Axiomensystem des Prädikatenkalkuls übernommen.[12]) Wir haben also zu beweisen, daß eine, keine freien Individuenvariable enthaltende, Formel $\mathfrak{A}$ des Prädikatenkalkuls dann und nur dann ableitbar ist, falls die aus $\mathfrak{A}$ durch die in **1** angegebene Konstruktion entstehende Formel $\mathfrak{B}$ es ist. Daß aus der Ableitbarkeit von $\mathfrak{A}$ die von $\mathfrak{B}$ folgt, ergibt sich ohne weiteres aus der Regel der Einsetzung für die Formel-Variablen. Um das Umgekehrte zu zeigen, benötigen wir die folgende Formeltransformation. Es sei $s > 1$ eine natürliche Zahl; wir ordnen jeder freien oder gebundenen Individuenvariablen s voneinander verschiedene freie bzw. gebundene Individuenvariable zu; auch je zwei Individuenvariable, die verschiedenen Individuenvariablen zugeordnet werden, sollen verschieden sein. Wir nennen die einer Individuenvariablen zugeordneten Variablen ihre *Komponenten* und bezeichnen sie mit angehängten oberen Indizes $^{(1)}, ^{(2)}, \ldots, ^{(s)}$. Dann verstehen wir unter die *s-Transformierte* einer Formel $\mathfrak{F}$ die Formel $\mathfrak{F}^{(s)}$, die wir erhalten, indem wir jede Individuenvariable sowohl in den Leerstellen der Funktionsvariablen, wie auch in den Klammerzeichen durch die Folge ihrer Komponenten ersetzen.[13]) (Die Funktionsvariable gehen dabei in gleichbezeichnete, aber durch die Anzahl der Leerstellen — die s-mal größer wird — unterschiedene[14]) Funktionsvariable über.)

6. Wir beweisen nun den

Hilfssatz. *Ist $\mathfrak{F}$ eine ableitbare Formel, so ist auch ihre s-Transformierte $\mathfrak{F}^{(s)}$ für jedes s ableitbar.*

Beweis Nach Definition der ableitbaren Formel genügt es die Behauptung zunächst für den Fall zu verifizieren, daß $\mathfrak{F}$ eine

---

[12]) Vgl. H.—B., S. 105—106. Unter „Formel" verstehen wir Formel des Prädikatenkalkuls, ev. mit Hinzunahme des Prädikatensymbols $\varDelta$ der Identität; Ableitbarkeit heißt, falls nicht anderes gesagt wird, Ableitbarkeit im Axiomensystem des Prädikatenkalkuls.

[13]) Z. B. wird aus $F(a, x, y)$ die Formel:

$$F(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(s)});$$

aus den Klammerzeichen (x) und (Ey) bzw. $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)})$ und $(Ey^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(s)})$. Letztere gelten als Abkürzungen für $(x^{(1)})(x^{(2)})\ldots(x^{(s)})$ und $(Ey^{(1)})(Ey^{(2)})\ldots(Ey^{(s)})$ und sollen durch diese ersetzt werden.

[14]) Vgl. H.—B., S. 89.

identische Formel des Aussagenkalkuls oder eine der beiden Ausgangsformeln

(a) $$(x)A(x) \rightarrow A(a),$$

(b) $$A(a) \rightarrow (Ex)A(x)$$

des Prädikatenkalkuls bezeichnet; dann, vorausgesetzt, daß die Behauptung für gewisse Formeln $\mathfrak{F}$ bereits bewiesen ist, zu zeigen, daß sie auch für die Formeln gilt, die aus jenen durch Einsetzung, oder durch Umbenennung[15]), oder durch Anwendung einer der Schemata

(*) $$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{P}\\ \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{Q}\end{array}}{\mathfrak{Q}},$$

(α) $$\frac{\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{Q}(a)}{\mathfrak{P} \rightarrow (x)\mathfrak{Q}(x)},$$

(β) $$\frac{\mathfrak{Q}(a) \rightarrow \mathfrak{P}}{(Ex)\mathfrak{Q}(x) \rightarrow \mathfrak{P}}$$

entstehen.[16])

Ist $\mathfrak{F}$ eine identische Formel des Aussagenkalkuls, so enthält $\mathfrak{F}$ keine Individuenvariable, also ist $\mathfrak{F}^{(s)}$ dieselbe Formel wie $\mathfrak{F}$. Bezeichnet $\mathfrak{F}$ die Formel (a), so ist $\mathfrak{F}^{(s)}$ die Formel

$$(x^{(1)})(x^{(2)})\ldots(x^{(s)})A(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}) \rightarrow A(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s)}),$$

die sich aus den, aus (a) durch Einsetzung und Umbenennung entstehenden, Formeln

$$(x^{(1)})(x^{(2)})\ldots(x^{(s)})A(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}) \rightarrow$$
$$\rightarrow (x^{(2)})(x^{(3)})\ldots(x^{(s)})A(a^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(s)}),$$
$$(x^{(2)})\ldots(x^{(s)})A(a^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}) \rightarrow (x^{(3)})\ldots(x^{(s)})A(a^{(1)}, a^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(s)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x^{(s)})A(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s-1)}, a^{(s)}) \rightarrow \quad A(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \ldots, a^{(s)})$$

durch Kettenschluß entsteht. Bezeichnet $\mathfrak{F}$ die Formel (b), so ist $\mathfrak{F}^{(s)}$ die Formel

$$A(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s)}) \rightarrow (Ex^{(1)})(Ex^{(2)})\ldots(Ex^{(s)})A(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}),$$

die man in analoger Weise aus (b) durch Einsetzungen, Umbenennungen und Kettenschluß gewinnt.

---

15) So nennen wir der Kürze halber die Umbenennung der gebundenen Variablen.

16) Für die genaue Festlegung der Bedingungen für die Anwendung der beiden letzten Schemata s. H.—B., S. 103 und 104.

Gilt die Behauptung bereits für eine Formel $\mathfrak{F}$, so gilt sie auch für die Formel $\mathfrak{G}$, falls diese aus $\mathfrak{F}$ durch Einsetzung oder Umbenennung entsteht. In der Tat entsteht dann $\mathfrak{G}^{(s)}$ offenbar durch Einsetzungen bzw. Umbenennungen aus $\mathfrak{F}^{(s)}$.

Gilt die Behauptung bereits für die Formeln $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}\rightarrow\mathfrak{Q}$, sind also $\mathfrak{P}^{(s)}$ und $(\mathfrak{P}\rightarrow\mathfrak{Q})^{(s)}$, d. h. $\mathfrak{P}^{(s)}\rightarrow\mathfrak{Q}^{(s)}$ ableitbar, so ist nach dem Schlußschema (*) auch $\mathfrak{Q}^{(s)}$ ableitbar, so daß die Behauptung auch für die Formel $\mathfrak{Q}$ gilt.

Gilt endlich die Behauptung des Hilfssatzes für die Formeln $\mathfrak{P}\rightarrow\mathfrak{Q}(a)$ bzw. $\mathfrak{Q}(a)\rightarrow\mathfrak{P}$, so gilt sie auch für $\mathfrak{P}\rightarrow(x)\mathfrak{Q}(x)$ bzw. $(Ex)\mathfrak{Q}(x)\rightarrow\mathfrak{P}$. In der Tat handelt es sich in diesem Fall um den deduktiven Übergang von einer Formel von der Form

$$\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s)})$$

zu

$$\mathfrak{B}\rightarrow(x^{(1)})(x^{(2)})\ldots(x^{(s)})\,\mathfrak{U}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)})$$

bzw. von

$$\mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s)})\rightarrow\mathfrak{B}$$

zu

$$(Ex^{(1)})(Ex^{(2)})\ldots(Ex^{(s)})\,\mathfrak{U}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)})\rightarrow\mathfrak{B},$$

die sich folgendermaßen ausführen läßt. Im ersten Fall gelangt man zunächst aus der Formel $\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s)})$ durch Einsetzung, Anwendung des Schemas (α) und Umbenennung zu $\mathfrak{B}\rightarrow(x^{(s)})\,\mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s-1)}, x^{(s)})$, daraus in gleicher Weise zu $\mathfrak{B}\rightarrow(x^{(s-1)})(x^{(s)})\;\mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s-2)}, x^{(s-1)}, x^{(s)})$ usf., endlich zu $\mathfrak{B}\rightarrow(x^{(1)})(x^{(2)})\ldots(x^{(s)})\,\mathfrak{U}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)})$. Im zweiten Fall verfährt man in analoger Weise, nur wendet man statt (α) das Schema (β) an.

7. Wir wenden nun den somit bewiesenen Hilfssatz auf die Formel $\mathfrak{B}$ mit $s=r$ an. Wir erhalten, vorausgesetzt, daß $\mathfrak{B}$ ableitbar ist, die Ableitbarkeit derjenigen Formel $\mathfrak{B}^{(r)}$, die aus $\mathfrak{A}^{(r)}$ durch Einsetzung von

$$\begin{aligned}(u^{(1)})(u^{(2)})\ldots(u^{(r)})\big(H_1(p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \ldots, p_1^{(r)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)})\,\&\\ \& H_2(p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots, p_2^{(r)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)})\,\&\ldots\&\\ \& H_{r_\lambda}(p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(2)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(r)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)})\rightarrow\\ \rightarrow G_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)})\big)\end{aligned}\tag{5}$$

für die Nennform $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \ldots, p_1^{(r)}, p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots, p_2^{(r)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(2)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(r)})$ $(\lambda=1, 2, \ldots, l)$ entsteht.

Erweitern wir nun das Axiomensystem des Prädikatenkalkuls durch das Prädikatensymbol $\Delta(x, y)$ nebst den Axiomen[17])

(J₁) $\Delta(a, a)$

(J₂) $\Delta(a, b) \to (A(a) \to A(b))$

und setzen wir in $\mathfrak{B}^{(r)}$ für $H_\varrho(p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(r)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(r)})$ die Formel $\Delta(p^{(1)}, q^{(\varrho)})$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ und für $G_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(r)})$ die Formel $F_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(r_\lambda)})$ ein[18]), so erhalten wir eine Formel, die man aus $\mathfrak{A}^{(r)}$ direkt durch Einsetzung von

$$(6) \quad (u^{(1)})(u^{(2)})\ldots(u^{(r)})\big(\Delta(p_1^{(1)}, u^{(1)}) \,\&\, \Delta(p_2^{(1)}, u^{(2)}) \,\&\ldots\&\, \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, u^{(r_\lambda)}) \to F_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r_\lambda)})\big)$$

für $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \ldots, p_1^{(r)}, p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots p_2^{(r)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(2)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(r)})$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ gewinnen kann.

8. Nun ist aber (6) im erweiterten Axiomensystem überführbar in $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})$. In der Tat gewinnt man die Formel

$$(u^{(1)})(u^{(2)})\ldots(u^{(r)})\big(\Delta(p_1^{(1)}, u^{(1)}) \,\&\, \Delta(p_2^{(1)}, u^{(2)}) \,\&\ldots\&\, \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, u^{(r_\lambda)}) \to F_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r_\lambda)})\big) \to F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})$$

aus der Formel

$$(u^{(1)})(u^{(2)})\ldots(u^{(r)})\big(\Delta(p_1^{(1)}, u_1^{(1)}) \,\&\, \Delta(p_1^{(1)}, u_2^{(2)}) \,\&\ldots\&\, \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, u^{(r_\lambda)}) \to F_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r_\lambda)})\big) \to \big(\Delta(p_1^{(1)}, p_1^{(1)}) \,\&\, \Delta(p_2^{(1)}, p_2^{(1)}) \,\&\ldots\&\, \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(1)}) \to F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})\big),$$

die aus der bereits (in **6**) als ableitbar erkannten r-Transformierten von (a) durch Einsetzungen und Umbenennungen entsteht, durch Vertauschung der Vorderglieder nebst Abtrennung des im erweiterten System offenbar ableitbaren Vordergliedes $\Delta(p_1^{(1)}, p_1^{(1)}) \,\&\, \Delta(p_2^{(1)}, p_2^{(1)}) \,\&\ldots\&\, \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(1)})$ mit Hilfe des Schlußschemas (*); zur Ableitung der Formel

---

[17]) Dies sind die Axiome der Identität, s. H.—B., S. 165. Wir gebrauchen das Zeichen $\Delta(p, q)$ statt $p = q$.

[18]) Hier wird statt einer Formel-Variable eine Formel eingesetzt, welche nicht sämtliche Argumente der fraglichen Formel-Variablen enthält. Dadurch können Formeln entstehen, die Bestandteile wie $(x)\mathfrak{F}$ oder $(Ex)\mathfrak{F}$ enthalten, wobei x in $\mathfrak{F}$ nicht vorkommt. Das Verbot solcher Formeln bzw. Einsetzungen könnte leicht durch triviale Modifikationen (Hinzufügung von Konjunktionsglieder wie $\Delta(x, x)$ oder $A(x) \vee \overline{A(x)}$) umgegangen werden.

$$(7)\quad F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)}) \to (u^{(1)})(u^{(2)})\ldots(u^{(r)})\big(\varDelta(p_1^{(1)}, u^{(1)}) \,\&\, \\ \&\, \varDelta(p_2^{(1)}, u^{(2)}) \,\&\ldots\&\, \varDelta(p_{r_\lambda}^{(1)}, u^{(r_\lambda)}) \to F_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r_\lambda)})\big)$$

verfährt man wie folgt. Aus (J_2) ergeben sich die Formeln

$$\varDelta(p_1^{(1)}, q^{(1)}) \to \big(F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)}) \to F_\lambda(q^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})\big),$$

$$\varDelta(p_2^{(1)}, q^{(2)}) \to \big(F_\lambda(q^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots p_{r_\lambda}^{(1)}) \to F_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, p_3^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})\big),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varDelta(p_{r_\lambda}^{(1)}, q^{(r_\lambda)}) \to \big(F_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(r_\lambda - 1)}, p_{r_\lambda}^{(1)}) \to F_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(r_\lambda - 1)}, q^{(r_\lambda)})\big)$$

durch Einsetzung; also (durch Einsetzung in die identische Formel

$$(A_1 \to (B_1 \to B_2)) \to \Big(\big(A_2 \to (B_2 \to B_3)\big) \to \ldots \Big(\big(A_{r_\lambda} \to (B_{r_{\lambda-1}} \to B_{r_\lambda})\big) \to \\ \to \big(A_1 \,\&\, A_2 \,\&\ldots\&\, A_{r_\lambda} \to (B_1 \to B_{r_\lambda})\big)\Big)\ldots\Big)$$

und r_λ-malige Anwendung des Schemas (*))

$$\varDelta(p_1^{(1)}, q^{(1)}) \,\&\, \varDelta(p_2^{(1)}, q^{(2)}) \,\&\ldots\&\, \varDelta(p_{r_\lambda}^{(1)}, q^{(r)}) \to \\ \to \big(F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)}) \to F_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(r_\lambda)})\big),$$

woraus sich (7) durch Vertauschung der Vorderglieder und dann r-malige Anwendung des Schemas (α) (nebst den nötigen Einsetzungen und Umbenennungen, vgl. **6**, letzter Absatz) ergibt.

9. Aus der Überführbarkeit von (6) in $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})$ ergibt sich, daß man ebenfalls zu einer ableitbaren Formel $\mathfrak{C}$ gelangt, falls man in $\mathfrak{A}^{(r)}$ für $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \ldots, p_1^{(r)}, p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots, p_2^{(r)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(2)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(r)})$ statt (6) die Formel $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})$ einsetzt.[19]) Die Formel $\mathfrak{C}$ unterscheidet sich also von $\mathfrak{A}$ nur dadurch, daß jede gebundene Variable in den Klammerzeichen durch die Folge ihrer Komponenten, in den Leerstellen der Funktionsvariablen hingegen durch ihre *erste* Komponente ersetzt wurde.

Um von der Formel $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$ zu gelangen, braucht man nur die Klammerzeichen, in denen eine Variable mit oberem Index $^{(2)}, ^{(3)}, \ldots,$ oder $^{(r)}$ steht (so daß das Wirkungsbereich der betreffenden Klammerzeichen die Klammervariable nicht enthält), wegzulassen und in den übrigbleibenden Variablen das obere Index $^{(1)}$

[19]) Vgl. H.—B., S. 150, fünfter Absatz. Die Behauptung ergibt sich durch Kombination der Eigenschaft 3 der Überführbarkeit (H.—B., S. 133) mit Regel η (H.—B., S. 136).

zu streichen. Die erste dieser Operationen ist gestattet, da die Formeln $(x)\mathfrak{F}$ und $(Ex)\mathfrak{F}$, falls x in $\mathfrak{F}$ nicht vorkommt, wie wir zeigen werden, in $\mathfrak{F}$ überführbar sind; die zweite Operation ist eine Umbenennung der gebundenen Variablen.

Wir haben nur noch die vier Formeln

(8′) $(x)A \rightarrow A,$

(8″) $A \rightarrow (x)A,$

(9′) $(Ex)A \rightarrow A,$

(9″) $A \rightarrow (Ex)A$

abzuleiten; unsere Überführbarkeitsbehauptung ergibt sich dann durch Einsetzung und Zusammenfassung der wechselseitigen Implikationen in Äquivalenzen. Nun gewinnt man (8′) und (9″) aus (a) bzw. (b) durch Einsetzung von A für $A(p)$, (8″) und (9′) durch Anwendung des Schemas (α) bzw. (β) auf die identische Formel $A \rightarrow A$.

Damit ist zunächst nur bewiesen, daß $\mathfrak{A}$ im durch die Identitätsaxiome (J_1) und (J_2) erweiterten Axiomensystem des Prädikatenkalkuls ableitbar ist. Da aber $\mathfrak{A}$ das Prädikatensymbol Δ nicht enthält, so lassen sich aus seiner Ableitung auch die Axiome (J_1) und (J_2) eliminieren[20]; daher ist $\mathfrak{A}$ eine ableitbare Formel des Prädikatenkalkuls, w. z. b. w.

(Hinzugefügt am 10. September 1934.)

---

[20]) H.—B., S. 382, Kursivtext.

Bibliographie.

Stachó Tibor, Felsőbb mennyiségtan, 623 oldal, Budapest, 1933.

[**Tibor Stachó, Mathématiques supérieures,** 623 pages, Budapest, 1933.]

C'est un ouvrage volumineux qui se propose de servir de guide aux élèves-officiers et élèves-ingénieurs pénétrant pour la première fois dans le domaine des mathématiques supérieures en vue des applications. La tâche n'est pas aisée car le champ à parcourir est très large. Traiter toutes les questions avec l'ampleur exigée par le sujet et sans rien céder sur la rigueur des démonstrations conduirait à écrire une encyclopédie que les élèves des hautes écoles d'application ne sauraient s'assimiler faute de temps, et aussi parce que leur goût les porte à ne retenir des abstractions que juste l'indispensable pour arriver au plus vite à la réalité concrète. Le mathématicien doit donc — s'il est consciencieux et s'il ne veut pas donner au lecteur le sentiment d'une fausse sécurité en voilant les difficultés — chercher à dégager des théories l'idée-mère et la mettre bien en lumière, quitte à rogner sur les détails des démonstrations.

Voilà ce que fait l'auteur. Sans pouvoir entrer dans l'examen de toutes les difficultés, il les signale au moins et, incitant à la réflexion, fait mieux comprendre la nature de l'outil mathématique. Peut-être présume-t-il quelquefois trop de la faculté de collaboration des étudiants auxquels il s'adresse, mais nous ne pouvons que le louer des efforts qu'il fait pour montrer l'enchaînement des idées et le véritable rôle des notions capitales. Il ne craint pas de recourir aux divers chapitres de la physique pour justifier l'introduction des notions et opérations nouvelles. Il a, en outre, un constant souci de rajeunir l'exposition des théories classiques et donne, à cet effet, aux notions et théorèmes une forme aussi générale que possible. À notre avis, l'auteur va trop loin dans son effort de s'affranchir des restrictions, par exemple lorsqu'il énonce le théorème fondamental de la représentation conforme pour les domaines ayant au moins deux points frontières. En parlant de l'aire des surfaces courbes, il souligne l'insuffisance de l'ancienne définition, mais ne précise pas assez en quoi la définition correcte lui est supérieure. Mais ce sont des détails qui ne diminuent pas son mérite.

Nous caractériserons le mieux la richesse des sujets traités en transcrivant ici la division de la Table des matières: Notions fondamentales (nombres irrationnels et limites, séries infinies, fonctions élémentaires, éléments de géométrie analytique). Dérivée, intégrale définie et indéfinie. Applications du calcul différentiel et intégral (allure des courbes planes, formule de TAYLOR, interpolation, séries de fonctions, différentiation et intégration numérique et graphique). Nombres et fonctions complexes (représentation conforme, intégrale de CAUCHY, séries de TAYLOR et de LAU-

..ENT, fonctions harmoniques). Résolution des équations (méthodes de la fausse position, de NEWTON, de l'itération, de RUFFINI-HORNER, de LILL; théorème de STURM). Algèbre vectorielle et applications (opérations fondamentales, déterminants, équations linéaires, transformations orthogonales). Éléments de géométrie projective et applications (rapport anharmonique, sections coniques, formes quadratiques et tenseurs, notions de nomographie). Fonctions à plusieurs variables (maxima et minima, intégrales multiples). Éléments d'analyse vectorielle et applications. Équations différentielles et aux dérivées partielles (méthode des approximations successives, équations linéaires à coefficients constants, conditions aux limites, séries de FOURIER). Calcul des probabilités (notions fondamentales d'après MM. MISES et KAMKE, formules asymptotiques, loi de GAUSS).

On voit par cette énumération la multitude des questions discutées. Le tableau serait incomplet si nous n'ajoutions pas que toutes les théories sont éclairées par des problèmes judicieusement choisis dont la solution est poussée jusqu'au calcul numérique avec les méthodes d'approximation les plus appropriées.

A. Szücs.

R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Teil I (Teubners math. Leitfäden, Band 21), IV. Auflage, VIII + 201 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1932.

Die vierte Auflage dieses trefflichen und viel benutzten Buches wurde durch einen kurzen Abschnitt über lineare Interpolation mit Fehlerabschätzung, durch zwei kurze Abschnitte über die Umkehrungen der konformen Abbildungen und durch einen Paragraphen über besondere (mittels der linearen und einiger weiteren speziellen Funktionen vermittelte) konforme Abbildungen ergänzt. Außerdem wurden mehrere Ergänzungen und Verbesserungen angebracht. Diese neue Auflage ist zur Einführung in die höhere Mathematik sehr geeignet.

Sz. Nagy.

R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Teil IV, 2. Heft (Teubners math. Leitfäden, Band 34), bearbeitet von O. DEGOSANG, III + 104 — 52 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1933.

Das vorliegende zweite Heft bezieht sich auf die drei letzten Abschnitte des Teils I der *Höheren Mathematik:* III. Funktionen von zwei und mehreren Veränderlichen, IV. Differentialgeometrie ebener Kurven, V. Komplexe Zahlen, Veränderliche und Funktionen. Das Heft enthält 159 Aufgaben. Zu jeder Aufgabe ist das Ergebnis und größtenteils auch eine Anleitung angegeben. Die Aufgaben sind mannigfaltig, sie sind im Allgemeinen nicht schablonenmäßig. Wir können diese Aufgabensammlung jedem Studierenden der Mathematik und Technik aufs wärmste empfehlen.

Sz. Nagy.

Tibor Radó, On the Problem of Plateau (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, zweiter Band, Heft 2), III + 109 pages, Berlin, J. Springer, 1933.

M. RADÓ a résumé dans un petit livre les renseignements utiles à tous ceux qui désirent se faire une idée exacte de l'état actuel du problème de PLATEAU. Il montre l'extrême variété des aspects du problème ou plutôt la multitude extrême des problèmes auxquels a donné lieu la question de trouver la surface minima passant par un contour donné. Comme les recherches classiques se trouvent exposées dans la *Théorie générale des Surfaces* de DARBOUX et les *Gesammelte Abhandlungen* de SCHWARZ, l'auteur s'efforçait surtout de retracer le développement de la théorie depuis l'apparition de la thèse de M. LEBESGUE (en 1902). Il précise avant tout les notions (surface, aire, convergence, etc.) à employer. (L'oeuvre de GEÖCZE à côté de celle de M. LEBESGUE, en qui il faut saluer l'initiateur de tous les progrès accomplis sur ce terrain dans les trente dernières années, trouve ici l'appréciation qu'elle mérite.) Il indique cinq sens différents qu'on donne au problème de PLATEAU (trouver pour l'équation aux dérivées partielles ou pour le système de telles équations dérivant de la condition de premier ordre du minimum de l'aire une solution exempte de certains genres de singularités et satisfaisant aux conditions aux limites) et formule avec précision le problème proprement dit de l'aire minima, ainsi que le problème simultané combinant le problème de PLATEAU avec ce dernier. Après avoir déblayé le terrain dans les trois premiers chapitres, il passe à la discussion du problème de PLATEAU sous sa forme non paramétrique (chapitre IV), puis sous sa forme paramétrique (chapitre V), enfin il présente dans le dernier chapitre consacré au problème simultané et aux généralisations les progrès les plus récents de la théorie auxquels il a pris lui-même une part importante. On lit avec plaisir cet exposé lumineux et bien ordonné qui ne manquera certainement pas de susciter de nouvelles recherches.

A. Szücs.

A. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, zweiter Band, Heft 3), V + 62 S., Berlin, J. Springer, 1933.

„Die *Ergebnisse der Mathematik* sollen so elastisch als möglich der Entwicklung unserer Wissenschaft zu folgen vermögen". Diese allgemeine Tendenz der Sammlung weit überbietend gibt das vorliegende Heft einen neuen, einfachen und lückenlosen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung bis zum Gesetz der großen Zahlen.

Der aus seinen tiefgehenden Arbeiten über Integrale, Maßtheorie und asymptotische Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannte russische Forscher erreicht dies durch eine — alle bisher behandelten Fälle umspannende — axiomatische Einordnung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in die abstrakte Maßtheorie.

Ein *Körper* F von Teilmengen einer Grundmenge E wird nämlich unendliches *Wahrscheinlichkeitsfeld* genannt, wenn F selbst E enthält und seine Elemente A mit einer solchen nichtnegativen additiven Mengenfunktion belegt werden, daß $P(E) = 1$, und für eine abnehmende Folge $A_n \to 0$ der Grenzwert $\lim P(A_n) = 0$ wird. Die Elemente von E werden *elementare,* jene von F *zufällige Ereignisse* genannt. Die Zahl $P(A)$ ist dann die *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses A. Bei endlichen Feldern entfällt natürlich die zuletzt angeführte Stetigkeitsbedingung; die unendlichen aber werden in ihre kleinsten Borelschen Oberkörper eindeutig erweitert. Der vielumstrittene Begriff der Wahrscheinlichkeit wird hiemit durch das Axiomensystem implizit definiert. Das Verhältnis zur Erfahrungswelt prüfend bekennt aber der Verfasser, daß er „in hohem Maße den Ausführungen von Herrn v. MISES folgt".

Innerhalb der Theorie der additiven Mengenfunktionen wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung natürlich durch Einführung des *Unabhängigkeitsbegriffes,* d. h. durch Postulieren der Multiplikationssätze umgrenzt. *Zufällige Größen* sind schließlich in Bezug auf $P(A)$ meßbare Abbildungen von E *in* die Menge aller reellen Zahlen. Ihre *Erwartungen* sind dann ihre nach $P(A)$ genommenen abstrakten Lebesgueschen Integrale, die bei stetigen Größen in die Stieltjesschen Integrale nach den Verteilungsfunktionen übergehen.

Dieser Überblick zeigt schon die große Allgemeinheit der Kolmogoroffschen Theorie. Als besondere neue, konkreten physikalischen Fragestellungen entsprungene Punkte seien hier noch die Verteilungen in unendlich-dimensionalen Räumen, sowie die in den Bayesschen Ideenkreis fallende Theorie der bedingten Wahrscheinlichkeiten und Erwartungen hervorgehoben.

Die abstrakte und knappe Darstellung setzt natürlich Sachkenntnis und speziell Maßtheorie voraus, was mit Rücksicht auf die allgemeine Bedeutung der Theorie sicherlich zu bedauern ist. Die Fachmänner aber werden die von Komplikationen freie klare und strenge Darstellung umso wärmer begrüßen.

T. v. Stachó.

A. Khintchine, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, zweiter Band, Heft 4), V + 77 S., Berlin, J. Springer, 1933.

Nachdem im 3. Heft dieses Bandes der Ergebnisse Herr KOLMOGOROFF die vielumstrittene Grundlagenfrage der Wahrscheinlichkeitsrechnung erledigt und die Theorie bis zum Gesetz der großen Zahlen lückenlos aufgebaut hat, führt uns das vorliegende Heft seines Landsmannes weiter, in das neubelebte Gebiet der asymptotischen Gesetze ein.

Die Darstellung beginnt mit einem eleganten Beweis des Laplace-Ljapounoffschen Grenzwertsatzes unter den (leicht modifizierten) Lindebergschen Bedingungen. Faßt man diesen Satz als Lösung des einfachsten linearen, unstetigen Diffusionsproblems auf, so wird man als Verallgemeinerung auf die von KOLMOGOROFF und DE FINETTI untersuchten stetigen zufälligen Prozesse geführt. Die Gauß-Laplacesche, bisher sogenannte Grenzverteilung gilt bei diesen selbst als Verteilung. Ähnlich zeigt sich, daß die im verallgemeinerten Poissonschen Grenzwertsatz auftretende Grenzverteilung als exakte Verteilung gewisser unstetigen zufälligen Prozesse betrachtet werden kann.

Eingehend werden nun Diffusions- oder Irrfahrtenprobleme: freie und bedingte, unstetige wie stetige behandelt. Die Verallgemeinerung dem Laplaceschen Satze gegenüber besteht bei diesen darin, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Lagenänderung nun von Anfangs- *und* Endlage abhängt. Zunächst wird der eindimensionale Fall erledigt. Unter den zweidimensionalen wird sowohl die von PETROWSKY zuerst allgemein behandelte elliptische als auch die parabolische oder einseitige Irrfahrt betrachtet. Die Besprechung der Verteilungen wird sodann mit einer neuen Diskussion der linearen, unstetigen Diffusion bei beschränktem Gesammtverlauf abgeschlossen. Das Schlußkapitel beschäftigt sich nämlich nur mit der Abschätzung der zufälligen Variablen des zuletzt erwähnten (unstetigen wie stetigen) Diffusionsproblems.

Die Verteilungen ergeben sich einheitlich als Lösungen von Differentialgleichungen. Sind diese partielle Gleichungen zweiter Ordnung — wie bereits beim Laplaceschen Problem — so werden sie, PETROWSKY folgend, einheitlich und elegant mit Hilfe der Perronschen Ober- und Unterfunktionen in den Beweisgang einbezogen.

Dieser Überblick zeigt die Bewußtheit, mit welcher Herr KHINTCHINE aus abgesondert stehenden Ergebnissen nur jene behandelt, die sachlich und methodisch zur Einheitlichkeit einer künftigen Theorie am meisten beizutragen scheinen. Andere Feinheiten der Darstellung können hier nur angedeutet werden. So zum Beispiel die Bereitschaft, Zusammenhänge unermüdlich aufzuweisen, Beweise erst kurz zu skizzieren, dann mit bewußtem Verzicht auf Allgemeinheit unter einschränkenden Voraussetzungen und formalen Vereinfachungen so zu führen, daß die Beweisidee möglichst klar hervortrete. Dies verleiht der musterhaften Monographie einen ungewohnten Reiz und anregende Kraft.

T. v. Stachó.

C. C. Mac Duffee, The Theory of Matrices (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, zweiter Band, Heft 5), V + 110 pages, Berlin, J. Springer, 1933.

Nombre de branches importantes des mathématiques sont nées de telle sorte que leurs éléments apparaissaient d'abord dans des disciplines éparses, et quand on a reconnu l'identité foncière sous la variété des revêtements, on a rassemblé, ajusté, complété ces éléments pour en former un corps de doctrine homogène. La théorie des matrices est arrivée à ce stade et le petit livre substantiel de M. MAC DUFFEE est bienvenu pour nous renseigner sur son état présent. L'auteur commence par les définitions premières, explique les notions fondamentales et résume jusqu'aux résultats des dernières investigations. Il a souci surtout de montrer les directions variées du développement de la théorie. Par l'abondance de ses références bibliographiques, il facilite aux lecteurs de remonter aux sources et d'étudier le détail des démonstrations.

Voici les titres des chapitres; ils caractérisent assez bien l'ordonnance et le choix des matières: I. Matrices, tableaux („arrays"), déterminants; II. Équation caractéristique; III. Matrices associées; IV. Équivalence; V. Congruence; VI. Similitude; VII. Composition des matrices; VIII. Équations aux matrices; IX. Fonctions de matrices; X. Matrices d'ordre infini.

A. Szücs.

Kazimierz Bartel, Kotierte Projektionen, deutsch von W. Haack, VI + 80 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1933.

Die vorliegende deutsche Ausgabe eines bereits in polnischer Sprache erschienenen Buches enthält eine ausführliche Darstellung der Methode der kotierten Projektionen. Die beiden ersten Kapitel behandeln die Darstellung des Punktes, der Geraden, der Ebene, der Raumkurven und der geradlinigen Flächen. Der Verfasser legt einen besonderen Wert auf instruktive Beispiele. Das dritte Kapitel ist eine Sammlung von praktischen Anwendungen, es behandelt z. B. die Abböschung eines horizontalen Weges mit Ausweichstelle. Diese Anwendungen zeigen deutlich, in welchem Maß das Darstellungsverfahren der kotierten Projektion beim Bau von Wasserstraßen, Chausseen, Eisenbahnen nützlich ist. Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit der Darstellung topographischer Flächen.

Die Ausführung der Zeichnungen, sowie die ganze Ausstattung des Buches ist sehr hübsch und sorgfältig. Das Buch ist besonders für den Topographen, den Geodäten, den Ingenieur von großem Nutzen.

St. Lipka.

W. Sierpiński, Hypothèse du continu (Monografje Matematyczne, Tom IV), V + 192 pages, Warszawa, Seminarjum Matematyczne, 1934.

Le problème du continu est des plus intéressants et des plus difficiles des mathématiques. Ce problème se rapporte à la question de savoir s'il existe ou non un nombre cardinal transfini plus grand que la puissance de l'ensemble formé des nombres naturels, mais plus petit que celle de l'ensemble des points du continu. Beaucoup de géomètres, à partir de Cantor, essayaient de résoudre ce problème. Mais leurs efforts restaient sans succès. Suivant le préssentiment de Cantor la réponse serait négative. Ce préssentiment forme l'objet de l'hypothèse du continu.

Il existe déjà une vaste littérature de théorèmes démontrés à l'aide de cette hypothèse. La plupart d'entre eux ont été publiés dans les *Fundamenta Mathematicae*. La livre de M. Sierpiński nous donne un résumé systématique de cette littérature. Nous y retrouvons presque tous les résultats déjà acquis, mais aussi quelques-uns de nouveau qui n'ont pas été publiés auparavant.

Le premier chapitre est consacré aux propositions équivalents à l'hypothèse. Par conséquant, les tentatives de les prouver ou les ébranler n'auront aucune chance de réussir que dans le cas où le problème du continu serait résolu.

La plus grande partie de l'ouvrage s'occupe des propositions de nature différente. Ce sont des conséquences tirées de l'hypothèse qui n'ont pas permis jusqu'à nos jours de conclure, à leur aide, à la vérité de l'hypothèse elle-même. En effet, l'auteur nous communique, dans un supplément, un résultat très récent (de Mars 1934) de M. LUSIN, qui démontre sans employer l'hypothèse une conséquence traitée dans le livre.

Beaucoup de théorèmes de ce dernier genre sont proposées au sujet des catégories de BAIRE et de la mesure de LEBESGUE. Une relation de dualité est aussi établie entre ces deux espèces de propositions. Cette dualité est fondée sur la conséquence suivante de l'hypothèse: Il existe une fonction $f(x)$ biunivoque défine dans l'ensemble E de tous les nombres réels, telle que $f(E) = E$ et qui transforme chaque ensemble de première catégorie en un ensemble de mesure nulle et réciproquement, sa fonction inverse transforme tout ensemble de mesure nulle en un ensemble de première catégorie.

Un excellent moyen de démontrer des énoncés sur la catégorie des ensembles est celle des conséquences de l'hypothèse du continu, d'après laquelle il existe un ensemble de LUSIN (c'est à dire: un ensemble linéaire qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble parfait non-dense) de la puissance du continu. Dans un chapitre à part il s'agit de théorèmes de ce genre.

Nous trouvons encore des chapitres plus courts sur les alephs inaccessibles, sur des ensembles effectifs et sur l'hypothèse du continu dite généralisée.

Tous ceux qui s'intéressent à la théorie des ensembles, mais surtout ceux qui se sont occupés du problème du continu accueilleront sans doute cet excellent ouvrage avec grand plaisir. Grâce à son objet intéressant, à sa clarté et à sa construction logique, il mérite bien les suffrages de tous.

G. Hajós.

Über einen Satz von J. Pál.

Von Harald Bohr in Kopenhagen.

In seiner Abhandlung: Sur des transformations de fonctions qui font converger leurs séries de Fourier (*Comptes rendus Paris*, **158** (1914), p. 101) hat J. Pál den folgenden sehr interessanten Satz bewiesen:

Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ stetige, reelle Funktion mit $f(0) = f(2\pi)$. Dann gibt es immer eine im Intervalle $0 \leqq u \leqq 2\pi$ stetige, monoton wachsende Funktion $g(u)$ mit $g(0) = 0$, $g(2\pi) = 2\pi$, derart, daß die Fourierreihe $\sum_0^\infty (a_n \cos nu + b_n \sin nu)$ der Funktion $h(u) = f(g(u))$ im ganzen Intervalle $(0, 2\pi)$ konvergiert, und zwar *gleichmäßig in jedem Teilintervall* $0 < \delta < u < 2\pi - \delta$.

Der Beweis von Pál beruhte auf dem folgenden bekannten Satz von Fejér[1]: Es sei $F(z) = F(x+iy)$ eine, im offenen Einheitskreise $|z| < 1$ analytische, im abgeschlossenen Kreise $|z| \leqq 1$ stetige Funktion, deren Potenzreihe für $|z| < 1$ mit $\sum_0^\infty a_n z^n$ bezeichnet wird. Ferner sei angenommen, daß die Funktion $w = F(z)$ den Kreis $|z| < 1$ auf ein schlichtes Gebiet der w-Ebene abbildet. Dann konvergiert die Potenzreihe auch auf dem Rande des Einheitskreises, und zwar gleichmäßig im ganzen abgeschlossenen Bereiche $|z| \leqq 1$.

Bemerkung: Für einen späteren Zweck erinnern wir daran, daß im Fejérschen Beweis die Annahme der Schlichtheit der Abbildung nur benutzt wird, um schließen zu können, daß das In-

[1]) L. Fejér, La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple, *Comptes rendus Paris*, **156** (1913), p. 46.

tegral $\iint\limits_{|z|<1} |F'(z)|^2 dx\,dy < \infty$ ist. Der Fejérsche Satz gilt also auch für jede in $|z|<1$ analytische, in $|z| \leqq 1$ stetige Funktion $F(z)$, für welche das Integral $\iint\limits_{|z|<1} |F'(z)|^2 dx\,dy$ einen endlichen Wert besitzt. Natürlich genügt es hierzu z. B. $\iint\limits_{\frac{1}{2}<|z|<1} |F'(z)|^2 dx\,dy < \infty$ zu wissen.

Der Pálsche Beweis verlief nun, kurz skizziert, folgendermaßen: Die Kurve $y=f(x)$, $0 \leqq x \leqq 2\pi$, wurde zu einer Jordankurve J erweitert, etwa in der in Fig. 1ª angegebenen Weise. Das

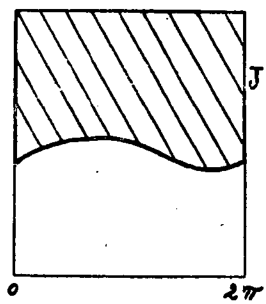


Fig. 1ª

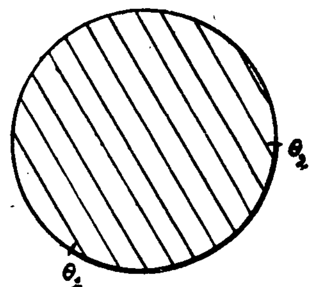


Fig. 1ᵇ

Innere dieser Jordankurve wurde danach konform auf den Einheitskreis $|\zeta|<1$ der $\zeta = re^{i\theta}$-Ebene abgebildet (Fig. 1ᵇ), etwa durch die Funktion $z = F(\zeta) = \sum\limits_0^\infty \alpha_n \zeta^n$. Hierbei geht die Randkurve J bekanntlich stetig in den Einheitskreis $|\zeta| = 1$ über, so daß die Funktion $F(\zeta)$ den Bedingungen des Fejérschen Satzes genügt. Nach diesem Satz konvergiert also die Potenzreihe $\sum\limits_0^\infty \alpha_n \zeta^n$ gleichmäßig für $|\zeta| \leqq 1$. Bei der Randabbildung möge der aus der ursprünglich gegebenen Kurve $y=f(x)$, $0 \leqq x \leqq 2\pi$, bestehende Teil von J in den abgeschlossenen Kreisbogen $r=1$, $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ übergehen. Schließlich wurde nun das Intervall $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ linear auf das (größere) Intervall $0 \leqq u \leqq 2\pi$, etwa durch die Funktion $\theta = c + du$, abgebildet, und die entsprechende Funktion $F(e^{i(c+du)}) = G(u)$, $0 \leqq u \leqq 2\pi$, gebildet. Es wurde nun nachgewiesen, daß durch diese lineare Transformation der unabhängigen Veränderlichen die gleichmäßige Konvergenz der zugehörigen Fourierreihe nicht „wesentlich" gestört wird, das heißt genau gesprochen, daß die Fourierreihe $\sum_0^\infty \gamma_n e^{inu}$ der komplexen Funktion $G(u)$ bei jedem $\delta>0$ für $\delta<u<2\pi-\delta$ gleichmäßig konvergiert. Trennen wir nun die Darstellung $z=x+if(x)=\sum_0^\infty \gamma_n e^{inu}=$ $=\sum_0^\infty (\gamma_n'+i\gamma_n'')(\cos nu+i\sin nu)$ in ihre reelle und rein imaginäre Komponente, also

$$x=\sum_0^\infty (\gamma_n'\cos nu-\gamma_n''\sin nu)=g(u)$$

$$f(x)=\sum_0^\infty (\gamma_n'\sin nu+\gamma_n''\cos nu)=h(u)=f(g(u)),$$

so haben wir offenbar in der monotonen Transformation $x=g(u)$ eine Transformation im Sinne des Pálschen Satzes.

Der Satz von PÁL hat den kleinen Schönheitsfehler, daß die Fourierreihe der transformierten Funktion $h(u)$ *nicht im ganzen Intervall* $0\leqq u\leqq 2\pi$ *gleichmäßig konvergiert, sondern nur in jedem Teilintervall* $0<\delta<u<2\pi-\delta$, und dies hängt auf das engste damit zusammen, daß bei der konformen Abbildung, welche ja der entscheidene Punkt beim Beweise war, Hilfslinien etwas zufälliger Natur verwendet werden mußten, um die gegebene Kurve $y=f(x)$, $0\leqq x\leqq 2\pi$ zu einer geschlossenen Jordankurve zu ergänzen.

Der Zweck der vorliegende Note ist nun zu zeigen, wie man durch eine kleine Abänderung des Pálschen Beweises diese kleine Unvollkommenheit in natürlicher Weise beseitigen kann, indem man, statt die gegebene Kurve $y=f(x)$, $0\leqq x\leqq 2\pi$ zu einer im Endlichen liegenden Jordankurve zu ergänzen, die Kurve einfach *periodisch fortsetzt* und danach das eine von den beiden unbeschränkten Gebieten, welche von der so entstandenen Kurve begrenzt werden, konform auf *eine Halbebene* abbildet.

Für diese Abbildung gilt der folgende, mit Hilfe des obigen Fejérschen Satzes sofort zu beweisende Hilfssatz, wobei wir der Bequemlichkeit halber die gegebene Funktion $y=f(x)$ als überall positiv annehmen können (sonst addiere man zu $f(x)$ eine geeignete positive Konstante):

Es sei $y=f(x)$, $-\infty<x<\infty$, eine positive, stetige periodische Funktion mit der Periode 2π. In der $z=x+iy$-Ebene betrachten wir den abgeschlossenen Bereich $-\infty<x<\infty$, $y\geqq f(x)$, der mit

G bezeichnet sei (Fig. 2[a]). Dieser Bereich werde auf die abgeschlossene Halbebene $v \geqq 0$ der $w = u + iv$-Ebene abgebildet (Fig. 2[b]), und zwar konform im Innern, und daher stetig auf dem Rande; weiter soll die Abbildung so normiert sein, daß die drei Rand-

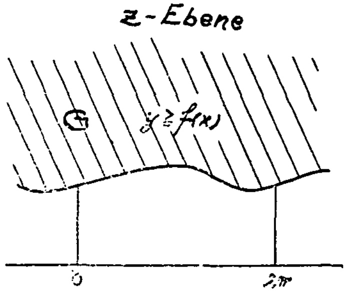


Fig. 2[a]

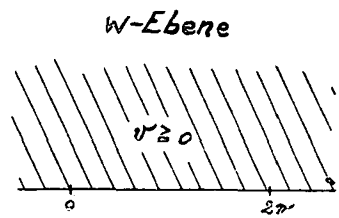


Fig. 2[b]

punkte $0 + if(0)$, $2\pi + if(2\pi)$, ∞ der z-Ebene in die drei Randpunkte 0, 2π, ∞ der w-Ebene übergehen. Dann wird die Abbildung durch eine Funktion der Form

$$z = w + \psi(w)$$

vermittelt, wo $\psi(w)$ periodisch mit der Periode 2π ist und eine Entwicklung der Form

$$\psi(w) = \sum_0^\infty \beta_n e^{inw}$$

zulässt, die gleichmäßig in der ganzen abgeschlossenen Halbebene $v \geqq 0$ konvergiert.

Bevor wir den einfachen Beweis dieses Satzes erbringen, bemerken wir, daß aus ihm der Pálsche Satz in der erwähnten verschärften Form unmittelbar gefolgert werden kann. Wir haben ja nur in der Darstellung

$$x + if(x) = u + \sum_0^\infty \beta_n e^{inu} = u + \sum_0^\infty (\beta_n' + i\beta_n'') e^{inu}$$

Reelles und Imaginäres zu trennen, also

$$x = u + \sum_0^\infty (\beta_n' \cos nu - \beta_n'' \sin nu) = g(u),$$

$$f(x) = \sum_0^\infty (\beta_n' \sin nu + \beta_n'' \cos nu) = h(u) = f(g(u))$$

zu setzen. Die monotone Transformation $x = g(u)$ liefert somit das Gewünschte.

Um schließlich den oben formulierten Hilfssatz zu beweisen, führen wir die genannte Abbildung von G auf die Halbebene $v \geqq 0$ in den folgenden Schritten aus.

Zuerst bilden wir die ganze Halbebene $y \geqq 0$ mit Hilfe der Funktion

$$s = e^{iz}$$

auf den unendlich-blättrigen Einheitskreis $|s| \leqq 1$ mit dem Windungspunkt $s = 0$ ab.

Hierbei geht die periodische Kurve $y = f(x)$ in die unendlich oft durchlaufene Jordankurve j (Fig. 3ᵃ)

$$s = e^{i(x+if(x))} = e^{-f(x)}\, e^{ix}$$

über, die übrigens von jedem von $s = 0$ ausgehenden Halbstrahl in genau einem Punkt getroffen wird.

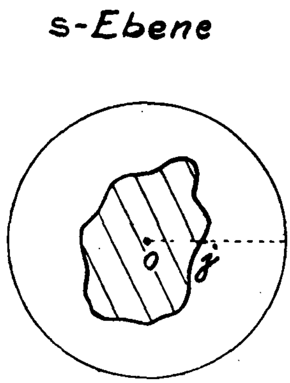


Fig. 3ᵃ

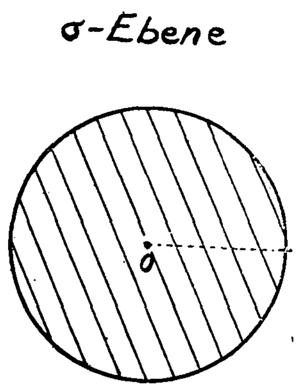


Fig. 3ᵇ

Danach wird der abgeschlossene schlichte Bereich, welcher von dieser Kurve j begrenzt wird, auf den Einheitskreis $|\sigma| \leqq 1$ der $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ Ebene abgebildet (Fig. 3ᵇ), wiederum konform im Inneren und stetig auf dem Rande, und zwar so, daß dem Punkte $s = 0$ der Punkt $\sigma = 0$ entspricht und der auf der positiven reellen Achse gelegene Punkt von j in den Punkt $\sigma = 1$ übergeht. Diese Abbildung möge durch.

$$s = \Omega(\sigma) = \sigma \,.\, \omega(\sigma) = \sigma \sum_{0}^{\infty} \delta_n \sigma^n$$

dargestellt sein. Hierbei ist, wegen der Schlichtheit der Abbildung, $\omega(\sigma) \neq 0$ für $|\sigma| \leqq 1$ und das Integral

$$\iint\limits_{|\sigma|<1} |\Omega'(\sigma)|^2 \, d\sigma_1 \, d\sigma_2$$

endlich.

Schließlich wird der nunmehr als unendlichblättrig aufgefaßte Einheitskreis $|\sigma| \leqq 1$ auf die Halbebene $v \geqq 0$ der w-Ebene durch die Funktion

$$\sigma = e^{iw}$$

abgebildet.

Durch Zusammensetzung der drei besprochenen Abbildungen

$$z = \frac{1}{i} \log s, \quad s = \Omega(\sigma), \quad \sigma = e^{iw}$$

erhalten wir offenbar die gewünschte Abbildung der Halbebene $v \geqq 0$ der w-Ebene auf den Bereich G der z-Ebene, da ja (nach passender Normierung von $\log s$) die Punkte $0, 2\pi, \infty$ in $if(0)$, $2\pi + if(2\pi)$, ∞ übergehen.

Die Funktion $z = \lambda(w)$, welche diese Abbildung liefert, wird somit durch

$$z = \frac{1}{i} \log \Omega(\sigma) = \frac{1}{i} \log \sigma + \frac{1}{i} \log \omega(\sigma), \quad \sigma = e^{iw}$$

gegeben.

Indem wir die für $|\sigma| < 1$ analytische, für $|\sigma| \leqq 1$ stetige Funktion $\frac{1}{i} \log \omega(\sigma)$ mit $L(\sigma)$ und ihre Potenzreihe mit $\sum\limits_0^\infty \beta_n \sigma^n$ bezeichnen, erhalten wir also schließlich

$$z = w + L(e^{iw}) = w + \psi(w) = w + \sum_0^\infty \beta_n e^{inw}.$$

Vorläufig wissen wir aber nur, daß die Entwicklung $\sum\limits_0^\infty \beta_n \sigma^n$ der Funktion $L(\sigma)$ im Inneren des Einheitskreises gilt; um den Beweis zu Ende zu führen, haben wir noch darzutun, daß die Potenzreihe im *abgeschlossenen* Kreise $|\sigma| \leqq 1$ gleichmäßig konvergiert. Hierzu genügt es nach der anfangs gemachten Bemerkung zum Fejérschen Satz zu zeigen, daß das Integral

$$\iint\limits_{\frac{1}{2} < |\sigma| < 1} |L'(\sigma)|^2 \, d\sigma_1 \, d\sigma_2 = \iint\limits_{\frac{1}{2} < |\sigma| < 1} \left| \frac{\omega'(\sigma)}{\omega(\sigma)} \right|^2 d\sigma_1 \, d\sigma_2 < \infty$$

ist.

Dies folgt aber sofort aus der Tatsache, daß

$$\iint\limits_{|\sigma| < 1} |\Omega'(\sigma)|^2 \, d\sigma_1 \, d\sigma_2 < \infty$$

ist. Bezeichnen wir nämlich Min $|\omega(\sigma)|$ für $|\sigma| \leqq 1$ mit m (>0), so folgt aus

$$\Omega'(\sigma) = \sigma \, . \, \omega'(\sigma) + \omega(\sigma)$$

für $\frac{1}{2} < |\sigma| < 1$

$$\left|\frac{\omega'(\sigma)}{\omega(\sigma)}\right| \leqq \frac{1}{|\sigma|} \left\{ \frac{|\Omega'(\sigma)|}{|\omega(\sigma)|} + 1 \right\} \leqq 2 \left\{ \frac{|\Omega'(\sigma)|}{m} + 1 \right\},$$

also

$$\left|\frac{\omega'(\sigma)}{\omega(\sigma)}\right|^2 \leqq 8 \left\{ \frac{|\Omega'(\sigma)|^2}{m^2} + 1 \right\}$$

und somit

$$\iint\limits_{\frac{1}{2} < |\sigma| < 1} \left|\frac{\omega'(\sigma)}{\omega(\sigma)}\right|^2 d\sigma_1 \, d\sigma_2 \leqq \frac{8}{m^2} \iint\limits_{|\sigma| < 1} |\Omega'(\sigma)|^2 \, d\sigma_1 \, d\sigma_2 + 8\pi < \infty.$$

(Eingegangen am 4. April 1935.)

Functions of Self-Adjoint Transformations in Hilbert Space.

By E. R. LORCH in Szeged*).

Introduction.

The theory of functions of general linear and more specially of self-adjoint operators in HILBERT space is by no means new. More than twenty years ago V. VOLTERRA developed the notion of an analytic function of an operator[1]). Subsequently, in order to establish the spectral resolution of a bounded self-adjoint operator, F. RIESZ introduced the theory of continuous and semi-continuous functions of such operators[1]). More recently J. NEUMANN and M. STONE treated the theory of a general function of a self-adjoint operator[2]). The latter authors operate with bilinear forms rather than the operators themselves; this means that numerical LEBESGUE—STIELTJES integration may be introduced but necessitates a subsequent reinterpretation of the results obtained in terms of transformations[3]).

It is known[4]) that the introduction of bilinear forms is not necessary but that the notions involved can be developed in the direction suggested by one's intuition, that is by dealing with the

*) Cutting Travelling Fellow, Columbia University, New York City.

1) See F. RIESZ, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913), p. 130, text and foot-note.

2) J. v. NEUMANN, Über Funktionen von Funktionaloperatoren, *Annals of Math.*, 32 (1931), pp. 191—226; M. H. STONE, *Linear Transformations in Hilbert Space* (New York, 1932), Chapt. VI.

3) We use the words transformation and operator interchangeably.

4) See *these Acta*, 6 (1934), p. 204. I take this occasion to state that the many suggestions of Prof. RIESZ have been extremely valuable during the preparation of this paper.

operators directly. The purpose of this paper is not so much to give the details of this development as to suggest that the intuitive approach is also the shortest. We establish a theory of measure and integration for operators which reflects faithfully the theory of LEBESGUE integration. Some interesting differences necessarily arise; we note for instance that in our theory the measure of a set virtually determines the set and that the measure of the sum of any two measurable sets is equal to the sum of their measures.

§ 1. Let A be a linear transformation defined over a linear manifold D_A dense in HILBERT space $\mathfrak{H}$. Consider the set of all pairs of elements $[g, g^*]$ such that $(Af, g) = (f, g^*)$ for all f in D_A. Here the symbol (φ, ψ) represents as usual the inner product of the elements φ and ψ. We construct a transformation A^* defined over the set D_{A^*} of all elements g above by means of the equation $A^*g = g^*$. A^* is known as the operator adjoint to A. If $D_A = D_{A^*}$ and if $Af = A^*f$ throughout D_A we say that A is a self-adjoint operator. It is well known that for any self-adjoint operator A there exists a family of projections[5]) $E(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, called the resolution of the identity of A, having properties a) $E(\lambda)E(\mu) = E(\mu)E(\lambda) = E(\lambda)$ for $\lambda \leqq \mu$; b) $E(\lambda)f \to 0$ or f as $\lambda \to -\infty$ or ∞; and c) for $\mu > \lambda$, $E(\mu)f \to E(\lambda)f$ as $\mu \to \lambda$. The transformation A is defined for the element f if and only if the Stieltjes integral $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2$ converges and then

$$\|Af\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2. \tag{1}$$

Furthermore

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)f. \tag{2}$$

The integral (2) is analoguous to a Stieltjes integral; its meaning may be clarified as follows: We subdivide the real axis into denumerably many intervals closed on the right Δ_i by means of the points $\ldots a_{-n} < \ldots < a_0 \ldots < a_n \ldots$ $(a_{-n} \to -\infty,\ a_n \to \infty)$; here Δ_i is the set $a_{i-1} < x \leqq a_i$. Let $E(\Delta_i) = E(a_i) - E(a_{i-1})$; let c_i be any point in Δ_i and f any element in $\mathfrak{H}$ for which (1) con-

[5]) A projection is a self-adjoint transformation E defined throughout $\mathfrak{H}$ such that $E^2 = E$.

verges. Form the sum $\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i E(\Delta_i) f$; as the maximum length of the Δ_i approaches zero the sum converges strongly to an element in $\mathfrak{H}$ which we denote by Af[6]).

We add a few remarks on self-adjoint transformations. We have stated that any operator of this type possesses a resolution of the identity. Conversely, any resolution (of the identity) gives rise to a self-adjoint operator. Furthermore, it may be verified in (1) that a self-adjoint operator is defined for all f in $\mathfrak{H}$ if and only if there exists a constant $C>0$ such that $E(C)=1$ (the identity operator) and $E(-C)=0$ (the zero operator). We then have $\|Af\| \leq C\|f\|$. Such transformations are called bounded. If no such constant exists, we shall often speak of the transformation as unbounded. Finally a self-adjoint transformation possesses the property of closure, that is, if f_n is a sequence of elements in $\mathfrak{H}$ for which Af_n exists and if $f_n \to f$, $Af_n \to g$ then Af is defined and $Af=g$. From this point forward, the unmodified term transformation will indicate self-adjoint transformation unless the contrary is indicated.

§ 2. In order to discuss the notion of a function of an operator A, we shall first study the relation with respect to the resolution $E(\lambda)$ of A of certain linear sets of points to closed linear manifolds in $\mathfrak{H}$. We introduce notation suitable to our purpose: If M_α denotes any closed linear manifold of a set of such manifolds, the expression $\sum_\alpha M_\alpha$ will indicate the smallest closed linear manifold containing all M_α. The expression $\prod_\alpha M_\alpha$ will as usual denote the intersection of all the M_α, that is, the largest closed linear manifold contained in all M_α. To every M_α we may associate a projection P_α whose range is M_α; that is, P_α transforms an arbitrary f in $\mathfrak{H}$ into its projection on M_α. If the P_α are commutative in pairs we shall say that the M_α are commutative. If a manifold M_1 contains a manifold M_2, $M_1 - M_2$ will denote the manifold of those elements in M_1 orthogonal to M_2. We now introduce

L e m m a 1: *Let M_n be a monotone decreasing sequence of*

6) We are repeating the argument presented by F. Riesz in a paper: Über die linearen Transformationen des komplexen Hilberschen Raumes, *these Acta,* 5 (1932), pp. 23—54, especially pp. 48—51.

manifolds, $M_n \supseteqq M_{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$ *and* P_n *be the corresponding projections. Let* $M = \prod_{\alpha=1}^{\infty} M_\alpha$ *and let* P *correspond to* M. *Then* $\|(P_n - P)f\| \to 0$ *for all* f *in* $\mathfrak{H}$. *Furthermore,* P *is commutative with* P_n *and with any bounded operator* S *commutative with* P_n.

It is elementary that the operators P_n converge to a limit which is a projection; let us denote it by P'. Then $M' \supseteqq M$ since $M_n \supseteqq M$ for all n. Let f belong to $M' - M$, the manifold whose definition has been given above. If $\|f\| = c > 0$, there exists an m such that f is not in M_n, $n \geqq m$. Let $\|P_n f\| = a$ where $a < c$. Then $\|P'f\| \leqq a < c$. This means that $c = 0$ and $M = M'$.

The statement as to permutability is immediate. M is contained in all M_n hence permutable with them. Furthermore from $SP_n = P_n S$ follows $SP = PS$ since S is bounded and hence continuous. We now state

Lemma 2: *Let* $\{M_\alpha\}$ *denote any set of commutative manifolds which contains the product of any two of its members. If* $M = \prod_\alpha M_\alpha$ *there exists a denumerable subset* $\{M_n\}$ *of* $\{M_\alpha\}$ *such that* $M = \prod_{n=1}^{\infty} M_n$. *We may choose the* M_n *so that* $M_n \supseteqq M_{n+1}$.

We may assume without restriction of generality that $M = 0$[7]. Let f be in $\mathfrak{H}$ and let us suppose that the lower bound of $\|P_\alpha f\| = c > 0$. We choose a sequence M_n such that $P_n f \to g$, $\|g\| = c$; we may and shall assume that $M_n \supseteqq M_{n+1}$. Now some M_α does not contain g. We use an argument very similar to that used in lemma 1 and see that the lower bound of $\|P_\alpha f\|$ must be zero.

Let now $f_1, f_2, \ldots$ denote a sequence of elements ewerywhere dense in $\mathfrak{H}$. We choose manifolds M_{ij} such that $\lim_{i=\infty} P_{ij} f_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Arranging the M_{ij} in some linear order, we let M_n correspond to the product of the first n of the M_{ij} and have the result stated in the lemma. We note that the result is not valid in non-separable spaces.

For the remainder of § 2, we fix our attention on a given resolution $E(\lambda)$. Let G be an open set on the real axis. Let γ be a half-closed interval $a < x \leqq b$ contained in G. We define $E(\gamma) = E(b) - E(a)$; we let $M(\gamma)$ denote the range of $E(\gamma)$. Finally we define

[7]) If $M \neq 0$, we replace M_α by $M_\alpha - M$; then $\prod_\alpha (M_\alpha - M) = 0$.

$M(G)=\sum_{\alpha} M(\gamma_\alpha)$ where the sum is to be carried out over all $\gamma_\alpha \subseteqq G$. We note that if $G_1 \supseteqq G_2$, $M(G_1) \supseteqq M(G_2)$. If G denotes an open interval, the projection $E(G)$ associated with $M(G)$ is commutative with any bounded operator commutative with $E(\lambda)$. For $E(G)$ is the limit of a monotone increasing sequence of projections of the type $E(\gamma)$. Similarly, if G is any open set, $E(G)$ is commutative with any bounded operator commutative with $E(\lambda)$.

Let $G=\sum_{\alpha} G_\alpha$ where all the sets are open; then $M(G)=\sum_{\alpha} M(G_\alpha)$. For since $G \supseteqq G_\alpha$, $M(G) \supseteqq \sum_{\alpha} M(G_\alpha)$. On the other hand every half-closed interval γ in G can be covered by a finite or denumerable number of such intervals belonging to the G_α, hence $M(G) \subseteqq \sum_{\alpha} M(G_\alpha)$. If $G=G_1 \cdot G_2$, then $M(G)=M(G_1) \cdot M(G_2)$. Clearly we have $M(G) \subseteqq M(G_1) \cdot M(G_2)$. In case G_1 and G_2 can each be expressed as the sum of a finite number of open intervals, the inequality may be erased. As every element in $M(G_1) \cdot M(G_2)$ may be approximated by elements in manifolds corresponding to open sets consisting of only a finite number of open intervals, each in G, we have $M(G) \supseteqq M(G_1) \cdot M(G_2)$.

Let G be an open set, $\overline{G}$ its complement on the real axis. Let $\{G_\alpha\}$ denote the set of open sets which contains $\overline{G}$. We note that $\{G_\alpha\}$ contains sets of the following type: We take the set G and suppress all but a finite number of open intervals; in the remaining set we replace each open interval by a closed one entirely interior to it. The complement of such a closed set then contains $\overline{G}$. This argument indicates that the manifolds $\prod_{\alpha} M(G_\alpha)$ and $M(G)$ are orthogonal[8]). We introduce

Definition 1: *Let H be an arbitrary set, and let $\{G_\alpha\}$ be the set of all open sets containing H. Then the manifold $\prod_{\alpha} M(G_\alpha)$ is called the exterior manifold-measure of H. If the exterior manifold-measure of H is orthogonal to the exterior manifold-measure of the complement of H we shall say that H is measurable and that its manifold-measure is $M(H)=\prod_{\alpha} M(G_\alpha)$.*

[8]) Since for every f in $\mathfrak{H}$ and any open set G we may construct a sequence of closed sets $F_n \subset G$, each closed set consisting of a finite number of closed intervals, such that the projection of f on $M(\overline{F}_n)$ converges to the projection of f on $\mathfrak{H}-M(G)$. Here the set $\overline{F}_n$ denotes the complement of F_n.

We note that all open sets are measurable (with respect to $E(\lambda)$ of course). This fact gives significance to

Theorem 1: *Let H_n be any sequence of measurable sets, $M(H_n)$ their manifold-measures. Then $H = \prod_{\alpha=1}^{\infty} H_\alpha$ is measurable and $M(H) = \prod_{\alpha=1}^{\infty} M(H_\alpha)$. Similarly, $H' = \sum_{\alpha=1}^{\infty} H_\alpha$ is measurable and $M(H') = \sum_{\alpha=1}^{\infty} M(H_\alpha)$.*

Applying lemma 2, we pick open sets $G_{m,n}$ such that $G_{m,n} \supseteqq H_n$ $(m = 1, 2, \ldots)$ and $M(H_n) = \prod_{\alpha=1}^{\infty} M(G_{\alpha,n})$. We note that the product of any finite number of the $G_{m,n}$ yields an open set which contains H. Using the earlier established fact that the measure of a product of a finite number of open sets is equal to the product of their measures, we see that the exterior measure $M_{ex}(H)$ of H satisfies the relation

$$M_{ex}(H) \subseteqq \prod_{\alpha,\beta=1}^{\infty} M(G_{\alpha,\beta}) = \prod_{\alpha=1}^{\infty} M(H_\alpha).$$

For the complement $\bar{H}$ of H, we know that $\bar{H} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} (\bar{H}_\alpha)$. Since $\bar{H}_n$ as well as H_n is measurable, we may choose open sets $G'_{m,n}$ such that $G'_{m,n} \supseteqq \bar{H}_n$ $(m = 1, 2, \ldots)$ and $M(\bar{H}_n) = \prod_{\alpha=1}^{\infty} M(G'_{\alpha,n})$. We note that the set $\sum_{\alpha=1}^{\infty} G'_{m_\alpha,\alpha}$ where m_α is an arbitrary integer is open and contains $\bar{H}$. Furthermore, the manifold-measure of this open set contains the manifold $\sum_{\alpha=1}^{\infty} M(\bar{H}_\alpha)$. But the intersection of all manifolds arising from open sets of this type is equal to $\sum_{\alpha=1}^{\infty} M(\bar{H}_\alpha)$ [9]; this states that

$$M_{ex}(\bar{H}) \subseteqq \sum_{\alpha=1}^{\infty} M(\bar{H}_\alpha).$$

[9] If we choose the integers m_n appropriately the projection of an arbitrary element f in $\mathfrak{H}$ on $M(G'_{m_n,n})$ will differ as little as we wish from its projection on $M(\bar{H}_n)$. Hence in turn, the projection of f on $\sum_{\alpha=1}^{\infty} M(G'_{m_\alpha,\alpha})$

Since $\prod_{\alpha=1}^{\infty} M(H_\alpha)$ is orthogonal to $\sum_{\alpha=1}^{\infty} M(\bar{H}_\alpha)$ the set H is measurable with manifold-measure $\prod_{\alpha=1}^{\infty} M(H_\alpha)$ [10]. The last statement of the theorem is established by considering complementary sets.

§ 3. We are ready to introduce the notion of the function of an operator A whose resolution is $E(\lambda)$. If $g(\lambda)$ is a real function the symbol $[g(\lambda) \leqq \mu]$ represents the set of points λ for which $g(\lambda) \leqq \mu$; for shortness, we denote it by H_μ. Let now $g(\lambda)$ be a real function defined and finite except on a set of zero measure with respect to $E(\lambda)$; let H_μ be measurable with respect to $E(\lambda)$, $-\infty < \mu < \infty$. Then the projections $E(H_\mu)$ constitute a resolution of the identity; for properties a), b) and c) in **§ 1** are satisfied. We say that $g(\lambda)$ is measurable with respect to $E(\lambda)$ and denote the transformation associated by means of (2) with the resolution $E(H_\mu)$ by the symbol $\int g(\lambda)\, dE(\lambda)$ or for short $g(A)$ [11]. Thus for us the equation $g(A) = \int g(\lambda) dE(\lambda)$ has but superficial significance. We note that $E(H_\mu)$ is commutative with any bounded transformation commutative with $E(\lambda)$. For as stated above, this is true of the operator $E(G)$ where G is any open set, hence by lemmas 2 and 1, for any measurable set H.

If $g(\lambda)$ is measurable, then it may be approximated uniformly except on a set of zero measure by measurable functions assuming only a finite or denumerable number of values having no finite

---

will differ little from its projection on $\sum_{\alpha=1}^{\infty} M(\bar{H}_\alpha)$. This last statement may be established by first considering the equation

$$\|f - P_1 P_2 f\| = \|f - P_1 f + P_1 f - P_1 P_2 f\| \leqq$$
$$\leqq \|f - P_1 f\| + \|P_1(f - P_2 f)\| \leqq \|f - P_1 f\| + \|f - P_2 f\|$$

where P_1 and P_2 are commutative projections; we next consider the case of a finite number of such projections; then by lemma 1, we treat the infinite case.

[10]) Since $M_{ex}(H) + M_{ex}(\bar{H}) = \mathfrak{H}$, the equations $M_{ex}(H) \subseteqq M_1$, $M_{ex}(\bar{H}) \subseteqq M_2$, $M_1 \bullet M_2 = 0$ imply $M(H) = M_1$.

[11]) The notion of functions of an operator is also discussed by F. Maeda in a paper which has just reached us as we go to press, viz., Theory of Vector Valued Set Functions, *Journal of Science of the Hiroshima University*, Series A, 4 (1934), pp. 57–91. This author assumes the existence for Borel sets of a theory of measure such as we have carried out in **§ 2**. Then he defines integration of Baire functions with respect to a resolution of the identity and derives some of the properties of these integrals.

limiting values. The resolution corresponding to a function assuming only a denumerable number of values is constant except for at most a denumerable set of points. It is well known that the corresponding transformation has a pure point spectrum and hence is of a rather simple character. If $g(\lambda)$ is an arbitrary measurable function and $g_n(\lambda)$ are measurable functions of the special type just mentioned and approximating uniformly to $g(\lambda)$, then $g_n(A)$ converges to $g(A)$. For the argument presented in **§ 1** states that $g_n(A)$ is defined for an element f in $\mathfrak{H}$ if and only if $g(A)$ is defined for f. (We assume here that $|g(\lambda)-g_n(\lambda)|<M$ almost everywhere.) Furthermore the element $g_n(A)f$ is precisely one of the elements appearing in the converging sequence of elements which may be used to define $g(A)f$.

If A and B are bounded and commutative, polynomials in A and B possess the same property. The same is true of the operators corresponding to the limits in a well determined sense of these polynomials. We need not here discuss the manner in which these limits are determined; it suffices to say that among these "limit" operators we find the resolutions $E(\lambda)$ and $F(\mu)$ of A and B respectively[12]). Conversely, if the resolutions of two bounded operators are commutative, the operators themselves are commutative. This arises from the fact that the uniformly bounded operators which approximate to A and B are commutative (see (2)). In case the operators A and B are not both bounded, an unmodified equation of the type $AB=BA$ has little meaning[13]). This prompts us to introduce

Definition 2: *Two self-adjoint operators A and B are said to be commutative if their respective resolutions $E(\lambda)$ and $F(\mu)$ are commutative, $-\infty<\lambda, \mu<\infty$* [14]).

We are now in a position to state the principal properties of the operator $g(A)$. We have

Theorem 2: *Let A be self-adjoint and possess the resolution $E(\lambda)$. Let $g(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ and $g_2(\lambda)$ be measurable with respect to $E(\lambda)$. Then*

---

[12]) See [6]).

[13]) Problems arising in the definition of permutability of unbounded operators will be discussed by the author in a forthcoming publication.

[14]) The definition was introduced by J. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin, 1932), p. 90, and M. H. Stone, loc. cit., p. 301.

a) *$g(A)$ has the right-hand bound*[15]) *M if and only if $g(\lambda) \leqq M$ except for a set of zero measure with respect to $E(\lambda)$. An analoguous statement may be made for left-hand bounds.*

b) *$g(A)$ is commutative with any operator commutative with A.*

c) *$g(A)$ is a projection if and only if $g(\lambda) = 0$ or 1 everywhere except on a set of zero measure with respect to $E(\lambda)$.*

d) $\int g_1(\lambda) dE(\lambda) + \int g_2(\lambda) dE(\lambda) = \int \{g_1(\lambda) + g_2(\lambda)\} dE(\lambda)$

which is to be interpreted that the operator on the right is significant for an element f if each of the operators on the left is defined for f and then the equality is valid.

e) $\left\{\int g_1(\lambda) dE(\lambda)\right\} \left\{\int g_2(\lambda) dE(\lambda)\right\} = \int g_1(\lambda) g_2(\lambda) dE(\lambda)$

which is to be interpreted that the operator on the right is significant for an element f if the product of the operators on the left is defined for f and then the equality is valid.

f) *If $h(\lambda)$ is measurable with respect to the resolution $F(\lambda)$ of $g(A)$ then $h\{g(\lambda)\}$ is measurable with respect to $E(\lambda)$ and*

$$\int h(\lambda) dF(\lambda) = \int h\{g(\lambda)\} dE(\lambda).$$

Properties a) and c) are immediate consequences of our definition of $g(A)$. To establish b) we note that if an operator B is commutative with A, the resolution of B is commutative with the resolution of A and hence also with the resolution of $g(A)$.

In consideration of d) we see that our statement is true for all functions $g_1(\lambda)$ and $g_2(\lambda)$ which assume only a finite number of values. Hence the statement is true for any bounded measurable functions. Let the functions be unrestricted and let H_n be the measurable set for which both $|g_1(\lambda)| \leqq n$ and $|g_2(\lambda)| \leqq n$. Let the operator B_1 correspond to $g_1(\lambda)$, B_2 correspond to $g_2(\lambda)$ and C correspond to $g_1(\lambda) + g_2(\lambda)$. Then $B_1 E(H_n)$ corresponds to a function equal to $g_1(\lambda)$ when $|g_1(\lambda)| \leqq n$ and $|g_2(\lambda)| \leqq n$ and to zero otherwise; an analoguous statement may be made for $B_2 E(H_n)$. By what we have established for bounded operators,

[15]) M is said to be a right-hand bound of the transformation A with resolution $E(\lambda)$ if $E(M) = 1$. Similarly, m is a left-hand bound if $E(m) = 0$. These statements may also be expressed with the use of bilinear forms, viz., $(Af, f) \leqq M \|f\|^2$ or $(Af, f) \geqq m \|f\|^2$.

$$B_1 E(H_n) + B_2 E(H_n) = CE(H_n)$$

since $CE(H_n)$ corresponds to the sum of the functions just described. Now let f be an element in the domain of definition of B_1 and B_2; then $E(H_n)f \to f$ and in addition the sequences

$$B_1 E(H_n)f = E(H_n)B_1 f, \qquad B_2 E(H_n)f = E(H_n)B_2 f$$

converge. Hence by the property of closure of a self-adjoint transformation mentioned in **§ 1** Cf is defined and $B_1 f + B_2 f = Cf$.

We note that e) is valid for two projection operators. Next, by d) it is valid for operators corresponding to measurable functions assuming only a finite number of values. Since any bounded measurable function may be approximated uniformly by functions of this simple type, e) is valid for bounded functions. Let the functions be unrestricted; let the operator C correspond to $g_1(\lambda) g_2(\lambda)$ and let B_1, B_2, and $E(H_n)$ have the meanings assigned to them above. We see that

$$\{B_1 E(H_n)\} \{B_2 E(H_n)\} = CE(H_n).$$

Let f be in the domain of B_2 and $B_2 f$ in that of B_1. Then

$$\{B_1 E(H_n)\} \{B_2 E(H_n)\} f = B_1 E(H_n) B_2 f = E(H_n) B_1 B_2 f.$$

This sequence of elements converges with $1/n$ hence property e) is established. We point out that the demonstration of the last two properties involves a method tantamount to an integration with respect to what might be called a resolution of the identity in two dimensions.

In order to establish f) we see first of all that the measure of an open interval with respect to $F(\lambda)$ is precisely the measure with respect to $E(\lambda)$ of the set of points for which $g(\lambda)$ takes values in this open interval; the statement allows of an immediate extension to arbitrary open sets. Now let Y be any set measurable with respect to $F(\lambda)$; let X be the set of all points λ such that $g(\lambda)$ is a point in Y. We note in passing that certain points in Y may have no correspondents in X. We shall prove that X is measurable with respect to $E(\lambda)$ and indeed that its measure with respect to $E(\lambda)$ is identical with the measure of Y with respect to $F(\lambda)$. The measure of Y with respect to $F(\lambda)$ may be expressed as the intersection of the measures of a denumerable number of sets each containing Y (by lemma 2). We denote the intersection of these open sets by Y_1 and note that $Y_1 \supseteq Y$. By the first statement of this paragraph we see that the measure of Y with respect to $F(\lambda)$ is equal to the intersection of the measures of a denumerable number of sets measurable with respect to $E(\lambda)$ each of them containing X. The intersection of these sets measurable with respect to $E(\lambda)$ is denoted by X_1; we have $X_1 \supseteqq X$. Either by considering the intersection of open sets containing the complement of Y or the sum of closed sets contained in Y, we obtain a set $Y_2 \subseteqq Y$ whose measure with respect to $F(\lambda)$ is identical with that of Y. The corresponding set X_2 is contained in X, $X_2 \subseteqq X$, and has a measure with respect to $E(\lambda)$ equal to that of Y with respect to $F(\lambda)$ hence equal to that of X_1. This means that X is measurable and that its measure with respect to $E(\lambda)$ is identical with the measure of Y with respect to $F(\lambda)$.

Now let $h(\lambda)$ be any function measurable with respect to $F(\lambda)$. We have just proved that the measure with respect to $F(\lambda)$ of the set $[h(\lambda) \leqq c]$ is identical with the measure with respect to $E(\lambda)$ of the set $[h\{g(\lambda)\} \leqq c]$. Hence

$$\int h(\lambda)dF(\lambda) = \int h\{g(\lambda)\}dE(\lambda).$$

We have for the sake of simplicity restricted ourselves to real functions of an operator. If we let $g(\lambda) = g_1(\lambda) + ig_2(\lambda)$ where $g_1(\lambda)$ and $g_2(\lambda)$ are real and measurable with respect to $E(\lambda)$, $g(A)$ represents a normal rather than a self-adjoint operator. The theory of such operators can be carried out along the lines developed above.

(Received February 21, 1935.)

Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert.

Par FRÉDÉRIC RIESZ à Szeged.

1. Soit donnée, dans l'espace complexe $\mathfrak{H}$ de HILBERT, une application A de l'espace sur lui-même, distributive, bornée et symmétrique au sens d'Hermite, c'est-à-dire telle que, avec les notations usuelles,

$$A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 A f_1 + c_2 A f_2, \quad |Af| \leqq M_A |f|, \quad (Af, g) = (f, Ag).$$

On sait qu'une telle application A, dite brièvement *transformation hermitienne,* donne naissance à une classe étendue de transformations du même type que l'on appelle fonctions de A. Telles sont tout d'abord les puissances $A^2, A^3, \ldots$ de A et plus généralement les polynomes

$$P(A) = c_0 E + c_1 A + \ldots + c_n A^n,$$

où E désigne l'identité et que l'on fait correspondre aux polynomes

$$P(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n$$

à coefficients réels d'une variable t. Outre ces polynomes, il y a encore d'autres transformations correspondant à des fonctions $F(t)$ d'un type plus général et auxquelles on arrive au moyen d'un prolongement de la correspondance entre $P(t)$ et $P(A)$ que nous venons d'envisager. Ce prolongement a été fait par divers procédés, modelés plus ou moins sur les méthodes de la théorie de l'intégration[1]). La voie qui s'adapte le mieux au sujet de la note

[1]) Cf. F. RIESZ, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913); Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *ces Acta,* **5** (1930), pp. 23—54; J. VON NEUMANN, Über Funktionen von Funktionaloperatoren, *Annals of Math.,* (2) **32** (1931), pp. 191—226; M. H. STONE, *Linear Transformations in Hilbert Space* (New York, 1932).

présente, c'est de fonder la définition des $F(A)$ sur la décomposition spectrale de la transformation A, décomposition qui remonte au mémoire classique de M. HILBERT de 1906. Rappelons que chaque transformation hermitienne A donne naissance à une famille de transformations hermitiennes E_λ, appelée aujourd'hui *décomposition de l'identité,* dépendant de la variable réelle λ et jouissant des propriétés suivantes: 1. $E_{\lambda_1}E_{\lambda_2}=E_{\lambda_2}E_{\lambda_1}=E_{\lambda_1}$, pour $\lambda_1\leqq\lambda_2$; 2. $E_{\lambda+0}=E_\lambda$ c'est-à-dire $E_{\lambda+\varepsilon}\to E_\lambda$ pour $\varepsilon>0$, $\varepsilon\to 0$[2]); 3. $E_\lambda=0$ pour $\lambda<m$ et $E_\lambda=E$ pour $\lambda\geqq M$ où m et M sont respectivement les deux bornes, inférieure et supérieure, de la forme hermitienne (Af,f), variée sous la condition $(f,f)=1$. Moyennant cette décomposition, la transformation A et ses puissances s'expriment par les formules

$$A^n=\int_{-\infty}^{+\infty}t^n\,dE_t$$

et par conséquent, on a aussi

$$P(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)\,dE_t, \tag{1}$$

où l'intégrale au second membre est une sorte d'intégrale de STIELTJES, formée d'une façon évidente, au lieu d'une fonction numérique, par rapport à la transformation variable E_t. D'ailleurs, l'équation (1) peut être remplacée par les équations équivalentes

$$(P(A)f,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)\,d(E_tf,f), \tag{2}$$

supposées remplies pour tout élément f de l'espace $\mathfrak{H}$ et dans lesquelles l'intégrale est formée par rapport à la fonction numérique monotone (E_tf,f). Cela étant, l'extension de la correspondance se fait en passant de l'intégrale de STIELTJES à celle que l'on connait sous le nom d'intégrale de STIELTJES—LEBESGUE. Soit $F(t)$ une fonction bornée intégrable en ce sens par rapport à toutes les fonctions (E_tf,f) considérées. Pour une telle fonction $F(t)$, l'intégrale

---

[2]) Au lieu de cette „continuité à droite“, on pourrait aussi supposer celle à gauche, comme je l'ai fait à plusieurs reprises, sans que je puisse actuellement me rendre compte des raisons.

$$F(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,dE_t \tag{3}$$ [3])

s'interprète aisément d'une manière analogue à celles formées par rapport à des fonctions monotones numériques; d'ailleurs, pour notre sujet actuel, il nous suffira d'observer que l'équation (3) et le système

$$(F(A)f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,d(E_t f, f) \tag{4}$$

sont éqivalents aussi dans ce cas général.

2. Dans ce qui suit nous allons essayer de *caractériser l'ensemble des transformations qui sont des fonctions, au sens indiqué, d'une transformation hermitienne donnée A.* Une condition *nécessaire et suffisante* a été établie par M. DE NEUMANN; elle consiste en ce que *la transformation B dont il s'agit soit permutable avec toutes les transformations hermitiennes permutables avec A*[4]). Dans la note présente, nous nous proposons d'établir cette condition d'une manière différente en nous faisant guider par l'idée qui ressort presque immédiatement des considérations suivantes. À coté des intégrales dans (3) et (4), qui sont des intégrales définies, on pourra considérer les intégrales indéfinies correspondantes, formées en remplaçant la limite d'intégration supérieure par la variable λ. Pour simplifier l'écriture, nous posons $F(A) = B$ et nous désignons par B_λ la transformation hermitienne définie par l'une ou l'autre des intégrales indéfinies que nous venons d'envisager, de sorte qu'on ait

$$(B_\lambda f, f) = \int_{-\infty}^{\lambda} F(t)\,d(E_t f, f).$$

On en conclut que le premier membre, considéré comme fonction

---

[3]) Quant à une définition directe de cette intégrale, *voir* notre mémoire [1]) pour le cas d'une fonction continue $F(t)$; le cas général vient d'être considéré par M. E. R. LORCH, Functions of Self-Adjoint Transformations in Hilbert Space, *ces Acta,* **7** (1935), pp. 136—146. Il convient d'observer que dans notre cas, en réalité, il ne s'agit que des intégrales formées sur l'intervalle fini (m, M).

[4]) On trouve cette condition, pas explicitement formulée, en combinant le théorème 6 du mémoire de M. DE NEUMANN cité plus haut [1]) avec le théorème 5 de son mémoire intitulé: Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, *Math. Annalen,* **102** (1930), pp. 370—427.

de λ, admet une dérivée égale à $F(\lambda)$ et cela presque partout par rapport à la fonction monotone $(E_\lambda f, f)$. Or au lieu de limiter l'intégration à l'intervalle $(-\infty, \lambda)$, on peut aussi conserver la limite d'intégration $+\infty$ et en récompense, remplacer E_t par E_λ pour tous les $t > \lambda$ ou ce qui revient au même, remplacer E_t par le produit $E_\lambda E_t = E_t E_\lambda$. Il s'ensuit immédiatement que

$$B_\lambda = E_\lambda B = B E_\lambda.$$

En résumé, *la fonction* $F(\lambda)$ *est la dérivée, presque partout dans le sens que nous venons d'indiquer, des fonctions*

$$(B_\lambda f, f) = (E_\lambda B f, f) = (B E_\lambda f, f) = (Bf, E_\lambda f)$$

par rapport aux fonctions monotones $(E_\lambda f, f)$.

Passons au problème inverse. Étant donnée une transformation hermitienne B, qu'il s'agisse de décider si B puisse être mise sous la forme $F(A)$ au moyen d'un choix convenable de la fonction $F(t)$. Alors l'idée qui se présente immédiatement, c'est de former la famille $B_\lambda = E_\lambda B$ et d'essayer de gagner $F(\lambda)$ en exécutant une sorte de différentiation de B_λ par rapport à E_λ. Or on essayera de faire cette différentiation par l'intermédiaire des formes $(B_\lambda f, f)$, en les dérivant par rapport à $(E_\lambda f, f)$; malheureusement, même en supposant que ces dérivées existent, rien ne nous assure, pour le moment, qu'elles ne dépendent pas du choix particulier de l'élément f. Donc le point essentiel du problème, c'est de *fixer les hypothèses sous lesquelles les dérivées en question coïncident,* dans un sens qu'il faudra encore préciser, *pour tous les éléments de l'espace* $\mathfrak{H}$.

C'est à ce point que se met à l'oeuvre l'hypothèse de M. DE NEUMANN.

3. On voit immédiatement que l'hypothèse en question, supposant que la transformation hermitienne B soit permutable avec toutes les transformations hermitiennes C permutables avec A, est une condition nécessaire pour que B puisse être mise sous la forme $F(A)$. Cela vient du fait que les E_λ qui correspondent à A sont des limites de polynomes de A et qu'il en est de même de toutes les fonctions de A,

$$F(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, dE_t$$

celles-ci ce composant des E_λ moyennant de combinaisons linéaires et de passages à la limite.

Il s'agira de voir que la condition est aussi suffisante. Supposons la condition remplie; en voici une première conséquence. Envisageons un élément quelconque f_0 et formons la plus petite variété linéaire fermée L comprenant f_0 et toutes ses images successives $A^n f_0$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui sont des transformés de f_0 par les divers polynomes de A ou des limites de tels éléments. De plus, désignons par la même lettre L la transformation qui vient en faisant correspondre à chaque élément f sa projection sur la variété L, c'est-à-dire l'élément Lf compris dans L et tel que

$$(Lf, f - Lf) = 0.$$

On sait qu'une telle „projection" correspondant à une variété linéaire (comme le sont aussi les E_λ) est une transformation hermitienne et que $L^2 = L$. Je dis que L est permutable avec A. En effet, il en est ainsi d'abord pour les éléments f de la variété L, puisque cette variété est invariante par rapport à A et que d'autre part la transformation L s'y réduit à l'identité. Considérons, en second lieu, la variété complémentaire CL de L, variété dont les éléments f sont caractérisés par l'équation $Lf = 0$ ou aussi par les équations

$$(f, f_0) = 0, \quad (f, A^n f_0) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où f_0 est l'élément particulier par lequel nous avons défini la variété L. Donc on a aussi

$$(Af, f_0) = (f, Af_0) = 0, \quad (Af, A^n f_0) = (f, A^{n+1} f_0) = 0,$$

c'est-à-dire que, avec f, Af appartient aussi à la variété CL. Par conséquent on a, pour les éléments f de CL, d'une part $ALf = A(Lf) = 0$ et d'autre part, $LAf = L(Af) = 0$, c'est-à-dire que $AL = LA$ pour CL. Enfin, tout élément de l'espace $\mathfrak{H}$ étant la somme d'un élément de L et d'un autre de CL, la permutabilité de L avec A est démontrée. Donc, d'après l'hypothèse faite, L doit être permutable avec B et en particulier, on a $Bf_0 = BLf_0 = LBf_0$, c'est-à-dire que le transformé de f_0 par B appartient à la variété L. Autrement dit et comme f_0 était arbitraire, le transformé Bf est, pour chaque élément f, limite d'une suite d'éléments $P_n(A)f$, formés moyennant une suite de polynomes $P_n(t)$ convenablement choisis. Bien entendu, le choix de ces polynomes dépend de l'élément f.

Ce n'est pas aux transformations A et B que nous aurons à appliquer le résultat que nous venons d'établir, mais à des transformations $[A, A]$ et $[B, B]$ qui leur correspondent dans un certain espace *redoublé* que nous allons introduire.[5]) Pour cet effet, considérons l'espace $\mathfrak{H}\mathfrak{H}$ formé par les couples $[f, g]$, f et g parcourant indépendemment l'espace $\mathfrak{H}$ et les opérations fondamentates étant définies par les conventions

$$[f_1, g_1]+[f_2, g_2]=[f_1+f_2, g_1+g_2]; \; c[f, g]=[cf, cg];$$
$$([f_1, g_1], [f_2, g_2])=(f_1, f_2)+(g_1, g_2)$$

Avec ces conventions, $\mathfrak{H}\mathfrak{H}$ sera également un espace de HILBERT et l'on voit immédiatement que l'expression générale d'une transformation hermitienne H du nouvel espace est donnée par la formule

$$H[f, g]=[H_{11}f+H_{12}g, \; H_{21}f+H_{22}g]$$

où les H_{ik} sont des transformations hermitiennes de l'espace $\mathfrak{H}$. En effet, pour le voir, on n'a qu'à décomposer $[f, g]$ en

$$[f, g]=[f, 0]+[0, g],$$

puis à décomposer de la même manière les éléments $H[f, 0]$ et $H[0, g]$ et à comparer les termes obtenus. La même décomposition met aussi en évidence la condition pour que la transformation H soit permutable avec une transformation H' du même type; c'est que les transformations H_{ik} soient permutables avec tous les composants H'_{ik} de H'. En particulier, envisageons les transformations $[A, A]$ et $[B, B]$, c'est-à-dire celles qui font correspondre à $[f, g]$ respectivement les couples $[Af, Ag]$ et $[Bf, Bg]$. Alors il vient de ce que nous venons de voir que l'hypothèse de M. DE NEUMANN étant supposée d'être remplie pour A et B, elle le sera aussi pour $[A, A]$ et $[B, B]$. Il s'ensuit que pour chaque couple d'éléments f et g, il existe des suites de polynomes $P_n(t)$ de sorte que l'on ait à la fois

$$P_n(A)f \to Bf, \quad P_n(A)g \to Bg.$$

C'est de ce fait que nous déduirons l'unité de la dérivée de $B_\lambda = E_\lambda B$ par rapport à E_λ.

4. La transformation hermitienne B étant supposée d'être permutable avec toutes les transformations hermitiennes permutables avec A, elle l'est en particulier avec A de même qu'avec les poly-

---

[5]) Le même artifice fut employé par M. DE NEUMANN dans un ordre d'idées plus général; *cf.* le mémoire [4]), pp. 394—396.

nomes $P(A)$ et leurs limites, parmi lesquelles les transformations E_λ. En posant $B_\lambda = E_\lambda B = BE_\lambda$ et en rappelant encore que $E_\lambda = E_\lambda^2 = E_\lambda E_\mu$ pour $\mu > \lambda$ et que, par conséquent, $(E_\mu - E_\lambda)^2 = = E_\mu - E_\lambda$, il vient que, pour $\mu > \lambda$,

$$(5) \quad |(B_\mu f, f) - (B_\lambda f, f)| = |(B(E_\mu - E_\lambda)f, (E_\mu - E_\lambda)f)| \leqq \\ \leqq M_B((E_\mu - E_\lambda)f, (E_\mu - E_\lambda)f) = M_B[(E_\mu f, f) - (E_\lambda f, f)]$$

où M_B désigne la borne supérieure de $|Bg|$ sous la condition $|g| \leqq 1$. C'est-à-dire que le rapport

$$\frac{\beta(\mu) - \beta(\lambda)}{\alpha(\mu) - \alpha(\lambda)}$$

des accroissements des fonctions

$$\alpha(\lambda) = (E_\lambda f, f) = |E_\lambda f|^2, \quad \beta(\lambda) = (B_\lambda f, f)$$

est borné. Il s'ensuit que $\beta(\lambda)$ admet presque partout une dérivée par rapport à la fonction monotone $\alpha(\lambda)$.

Il y a lieu ici de préciser le sens de ce dernier énoncé. Sans nous perdre dans des généralités, rappelons que $E_{\lambda+\varepsilon} \to E_\lambda$ et $B_{\lambda+\varepsilon} = E_{\lambda+\varepsilon} B \to E_\lambda B = B_\lambda$ pour $0 < \varepsilon \to 0$ et que, par conséquent, les fonctions $\alpha(\lambda)$ et $\beta(\lambda)$ sont continues à droite, tandis qu'à gauche, $E_{\lambda-\varepsilon}$ tendant vers une transformation déterminée $E_{\lambda-0}$, elles admettent des limites bien déterminées. Alors considérons $\beta(\lambda) = \beta(\lambda(\alpha))$ comme fonction de $\alpha = \alpha(\lambda)$ le long de l'intervalle qui s'étend de $\alpha(-\infty) = 0$ à $\alpha(+\infty) = (f, f)$ et cela en convenant de faire correspondre, aux points de discontinuité de $\alpha(\lambda)$, les intervalles allant de $\alpha(\lambda - 0)$ à $\alpha(\lambda)$ et de poser $\beta(\lambda(\alpha))$, par définition, linéaire dans ces intervalles et égale respectivement à $\beta(\lambda - 0)$ et $\beta(\lambda)$ aux deux extrémités. Cela étant, on définit la dérivée de $\beta(\lambda)$ par rapport à $\alpha(\lambda)$ en un point λ en l'égalant à la dérivée de la fonction $\beta(\lambda(\alpha))$ par rapport à α, prise au point α qui correspond au point λ considéré. Pour les points de discontinuité de $\alpha(\lambda)$, nous convenons qu'on puisse prendre pour α un point arbitraire situé à l'intérieur de l'intervalle correspondant, ce qui revient à considérer comme dérivée le rapport fini

$$\frac{\beta(\lambda) - \beta(\lambda - 0)}{\alpha(\lambda) - \alpha(\lambda - 0)}.$$

Dire que la dérivée de $\beta(\lambda)$ par rapport à $\alpha(\lambda)$ existe presque partout (par rapport à $\alpha(\lambda)$ et pas à λ), cela voudra dire que l'image des points d'exception λ sur l'axe des α, s'il en existe, n'est qu'un ensemble de mesure nulle ou ce qui revient au même, que la dérivée de la fonction $\beta(\lambda(\alpha))$ existe presque partout (bien entendu par rapport à α).

Avec ces conventions, l'existence presque partout de la dérivée de $(B_\lambda f, f)$ par rapport à $(E_\lambda f, f)$ est assurée par l'inégalité (5), grâce au théorème classique de M. LEBESGUE, affirmant la dérivabilité presque partout des fonctions à variation bornée.

Soit maintenant g un second élément de l'espace $\mathfrak{H}$ et posons

$$\gamma(\lambda) = (B_\lambda g, g), \quad \delta(\lambda) = (E_\lambda g, g);$$

nous aurons à comparer les dérivées de $\beta(\lambda)$ et $\gamma(\lambda)$, formées respectivement par rapport à $\alpha(\lambda)$ et à $\delta(\lambda)$. À cet effet, envisageons une suite de polynomes $P_n(t)$, de sorte que l'on ait à la fois

$$P_n(A)f \to Bf, \qquad P_n(A)g \to Bg,$$

comme nous en avons démontré l'existence au paragraphe précédent. En supprimant des termes si c'est nécessaire et en changeant le numérotage, on pourra aussi s'assurer de la convergence des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$$

où nous avons posé

$$f_n = Bf - P_n(A)f, \quad g_n = Bg - P_n(A)g.$$

Cela étant, évaluons la variation totale des fonctions

$$\varphi_n(\lambda) = \beta(\lambda) - (E_\lambda P_n(A)f, f) = (E_\lambda f_n, f).$$

Soient $\Delta_1 = (\lambda_1, \mu_1), \ldots, \Delta_l = (\lambda_l, \mu_l)$ des intervalles n'empiétant pas et désignons par les mêmes lettres les transformations $E_{\mu_1} - E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\mu_l} - E_{\lambda_l}$ qui y correspondent et par Δ_0 la différence $E - (\Delta_1 + \ldots + \Delta_l)$. Alors, eu égard encore aux équations $\Delta_i^2 = \Delta_i$ et $\Delta_i \Delta_k = 0$ pour $i \neq k$, on aura

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{l} |\varphi_n(\mu_i) - \varphi_n(\lambda_i)| &= \sum_{i=1}^{l} |(\Delta_i^2 f_n, f)| = \\
&= \sum_{i=1}^{l} |(\Delta_i f_n, \Delta_i f)| \leq \sum_{i=0}^{l} |\Delta_i f_n| \, |\Delta_i f| \leq \\
&\leq \left[\sum_{i=0}^{l} (\Delta_i f_n, \Delta_i f_n) \right]^{1/2} \left[\sum_{i=0}^{l} (\Delta_i f, \Delta_i f) \right]^{1/2} \\
&= \left[\sum_{i,k=0}^{l} (\Delta_i f_n, \Delta_k f_n) \right]^{1/2} \left[\sum_{i,k=0}^{l} (\Delta_i f, \Delta_k f) \right]^{1/2} = |f_n| \, |f|.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la variation totale de la fonction $\varphi_n(\lambda)$ ne dépasse pas la quantité

$$|f_n|\,|f| = |(B - P_n(A))f|\,|f|$$

c'est-à-dire que, grâce à l'hypothèse faite, les variations totales des fonctions $\varphi_n(\lambda)$ forment une série convergénte. Comme la variation totale est indépendante du choix de la variable, il en sera de même pour les fonctions $\varphi_n(\lambda(\alpha))$, formées d'une manière analogue à $\beta(\lambda(\alpha))$ et il s'ensuit, par un théorème de M. FUBINI, la convergence presque partout de la série formée des dérivées de ces fonctions et à plus forte raison, la convergence vers zéro, presque partout, de ces dérivées elles-mêmes. C'est-à-dire que les dérivées de $(E_\lambda P_n(A)f, f)$, prises par rapport à $(E_\lambda f, f)$, convergent, presque partout par rapport à cette dernière fonction, vers celles de $(B_\lambda f, f)$. Or la dérivée de

$$(E_\lambda P_n(A)f, f) = (P_n(A)E_\lambda f, f)$$

est égale à $P_n(\lambda)$, ce qui vient d'une manière connue de l'équation (2); il s'ensuit que les polynomes $P_n(\lambda)$ convergent vers la dérivée de la fonction $\beta(\lambda) = (B_\lambda f, f)$ et cela presque partout par rapport à $(E_\lambda f, f)$. Par les mêmes raisons, ces polynomes convergent aussi vers la dérivée de $(B_\lambda g, g)$ par rapport à $(E_\lambda g, g)$ et cela presque partout par rapport à cette dernière.

En résumé, *ces deux dérivées, celle de $(B_\lambda f, f)$ par rapport à $(B_\lambda f, f)$ et celle de $(B_\lambda g, g)$ par rapport à $(B_\lambda g, g)$ existent et coïncident sauf peut-être pour des valeurs de λ appartenant à la réunion de deux ensembles, l'un des ces ensembles étant de mesure nulle par rapport à $(E_\lambda f, f)$ et l'autre par rapport à $(E_\lambda g, g)$.*

C'est en profitant de cette coïncidence des dérivées que nous allons construire la fonction $F(\lambda)$ de sorte que l'on ait $F(A) = B$, c'est-à-dire que l'on ait

$$(Bf, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, d(E_t f, f),$$

et cela pour tous les f de l'espace $\mathfrak{H}$.

5. Dans les considérations du paragraphe précédent, f et g désignaient deux éléments arbitrairement choisis. Pour arriver à notre résultat final, il ne nous reste que de *fixer l'un des deux, soit g, une fois pour toutes et cela de sorte que „presque partout par rapport à $(E_\lambda g, g)$" implique presque partout par rapport à* *toutes les* $(E_\lambda f, f)$, *quel que soit* f *dans l'espace* $\mathfrak{H}$. En effet, supposons que l'on ait réussi à choisir g de cette façon-là et désignons par $F(\lambda)$ la dérivée de $(B_\lambda g, g)$ par rapport à $(E_\lambda g, g)$, en convenant encore de poser $F(\lambda)=0$ partout où la dérivée en question n'est pas déterminée, comme c'est la cas par exemple à l'extérieur de l'intervalle (m, M), m et M désignant, comme préalablement, les deux bornes des valeurs (Af, f) sous la condition $(f, f)=1$. C'est seulement pour fixer les idées que nous venons de faire cette convention, les valeurs λ dont il s'agit formant un ensemble de mesure nulle par rapport à $(E_\lambda g, g)$ et par conséquent, par rapport à toutes les $(E_\lambda f, f)$.

Maintenant, soit f un élément quelconque. D'après ce que nous venons de voir, la dérivée de $(B_\lambda f, f)$, par rapport à $(E_\lambda f, f)$, coïncide avec celle de $(B_\lambda g, g)$ par rapport à $(E_\lambda g, g)$, donc aussi avec $F(\lambda)$, sauf peut-être pour des valeurs de λ appartenant à l'un ou l'autre de deux ensembles, de mesure nulle par rapport respectivement à $(E_\lambda f, f)$ et $(E_\lambda g, g)$. En vue de l'hypothèse faite sur l'élément g, cela nous assure que la dérivée de $\beta(\lambda)=(B_\lambda f, f)$ par rapport à $\alpha(\lambda)=(E_\lambda f, f)$, posée, pour fixer les idées, égale à 0 là où elle n'est pas déterminée, coïncide avec $F(\lambda)$ presque partout par rapport à $\alpha(\lambda)$. Comme de plus la rapport des accroissements

$$\frac{\beta(\mu)-\beta(\lambda)}{\alpha(\mu)-\alpha(\lambda)}$$

est borné et que, par conséquent, il en est de même quant au rapport des accroissements de la fonction $\beta(\lambda(\alpha))$ et de α, on n'aura qu'à appliquer le théorème affirmant que de telles fonctions sont les intégrales de leurs dérivées et puis retourner à la variable λ, pour en conclure l'équation

$$B(f, f)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, d(E_t f, f)$$

qu'il fallait démontrer.

Il nous reste encore de prouver l'existence d'éléments g du type exigé. À cet effet, envisageons une suite infinie d'éléments g_n, partout denses dans l'espace $\mathfrak{H}$. En partant avec l'élément g_1 (pour lequel nous écrirons aussi g') soit L_1 la plus petite variété linéaire fermée comprenant g_1 et ses images successives Ag_1, $A^2 g_1, \ldots$ De plus, soit g'' l'élément qui vient de g_2 en l'orthogonalisant par rapport à L_1, c'est-à-dire la différence de g_2 et de sa projection sur L_1 et soit L_2 la plus petite variété linéaire fermée comprenant g'' et ses images Ag'', A^2g'', ... En général, ayant défini les variétés $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$, on définira L_n de la même manière en formant d'abord l'élément $g^{(n)}$ et cela en soustrayant de g_n ses projections sur les variétés déjà définies. Cela étant, choisissons une suite de constantes numériques $c_1, c_2, \ldots$ différentes de zéro et telles que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n g^{(n)} \tag{6}$$

soit convergente et définisse de cette sorte un élément g, ce qui revient à supposer la convergence de la série numérique

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, |g^{(n)}|^2.$$

Je dis que l'élément g ainsi défini est du type exigé. Pour le voir, nous aurons d'abord à démontrer les faits suivants, d'ordre général:

a) lorsque l'ensemble e est de mesure nulle par rapport à $(E_\lambda h, h)$ pour un élément h, il l'est aussi par rapport à $(E_\lambda Ch, Ch)$, C désignant une transformation hermitienne permutable avec A, d'ailleurs quelconque;

b) lorsque e est de mesure nulle par rapport à $(E_\lambda h, h)$ et $(E_\lambda h', h')$ pour les éléments h, h', il l'est aussi par rapport à $(E_\lambda(h+h'), h+h')$;

c) lorsque e est de mesure nulle par rapport à toutes les $(E_\lambda h_n, h_n)$ correspondant aux éléments h_n d'une suite qui converge vers l'élément h, elle le sera aussi par rapport à $(E_\lambda h, h)$.

L'assertion a) est une conséquence immédiate de l'inégalité

$$\begin{aligned}(E_\mu Ch, Ch)-(E_\lambda Ch, Ch) = (\Delta Ch, Ch) = (C\Delta h, C\Delta h) \leqq \\ \leqq M_C^2(\Delta h, \Delta h) = M_C^2[(E_\mu h, h)-(E_\lambda h, h)]\end{aligned}$$

pour $\lambda < \mu$ et où nous avons posé $\Delta = E_\mu - E_\lambda$ et désigné par M_C la borne supérieure de $|Cf|$ sous la condition $|f| \leqq 1$.

L'assertion b) est une conséquence immédiate de l'inégalité, écrite avec les mêmes notations,

$$\begin{aligned}(\Delta(h+h'), h+h') = (\Delta(h+h'), \Delta(h+h')) \leqq (\Delta(h+h'), \Delta(h+h')) + \\ + (\Delta(h-h'), \Delta(h-h')) = 2(\Delta h, h) + 2(\Delta h', h').\end{aligned}$$

Enfin, l'assertion c) vient en évaluant la variation totale des fonctions $\psi_n(\lambda)=(E_\lambda(h-h_n), h-h_n)$ tout comme nous l'avons fait au paragraphe précédent pour les fonctions $\varphi_n(\lambda)$; nous n'avons qu'à écrire $h-h_n$ au lieu de f et de f_n. Il s'ensuit que la variation totale de la fonction $\psi_n(\lambda)$ ne surpasse pas la quantité $|h-h_n|^2 \to 0$. Donc en choisissant n de sorte que $|h-h_n|^2 < \varepsilon/2$ et puis en renfermant l'ensemble e dans un système d'intervalles de façon que la somme des variations de $(E_\lambda h_n, h_n)$ sur ces intervalles soit aussi inférieure à $\varepsilon/2$, il vient immédiatement que la somme analogue, formée avec l'élément h, reste au delà de ε; c'est-à-dire que e est de mesure nulle par rapport à $(E_\lambda h, h)$.

Cela étant, soit g l'élément défini par la série (6) et soit f un élément quelconque de l'espace $\mathfrak{H}$. Étant donné un ensemble e de mesure nulle par rapport à $(E_\lambda g, g)$, il faut montrer qu'il l'est aussi par rapport à $(E_\lambda f, f)$. Nous passerons de g à f en plusieurs étapes. Tout d'abord nous passons aux éléments $g^{(n)}$; comme on a

$$g^{(n)}=\frac{1}{c_n} L_n g,$$

où L_n désigne l'opération de projection sur la variété L_n, transformation hermitienne et par sa définition, permutable avec A, l'ensemble e est de mesure nulle par rapport aux fonctions $(E_\lambda g^{(n)}, g^{(n)})$, grâce à l'assertion a). Par la même raison, il le sera par rapport à $(E_\lambda h, h)$ avec $h=P(A)g^{(n)}$ où $P(A)$ est un polynome et par l'assertion c), il le sera aussi pour les limites de tels éléments h, parmi lesquels tous les éléments appartenant à l'un quelconque des variétés L_n. Enfin, en posant $f_n=L_n f$, nous décomposons f en une série orthogonale

$$f=\sum_1^\infty f_n; \tag{7}$$

en effet, comme $f_1+f_2+\ldots+f_n$ est la projection de f sur la variété linéaire qui se compose de $L_1, L_2, \ldots, L_n$ et que cette variété comprend les éléments $g_1, g_2, \ldots, g_n$, on a

$$|f-(f_1+f_2+\ldots+f_n)| \leqq |f-g_k| \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

et cela, combiné avec l'hypothèse que les g_n sont partout denses dans l'espace $\mathfrak{H}$, donne l'équation (7). Or, les f_n appartenant respectivement aux variétés L_n, e est de mesure nulle par rapport aux fonctions $(E_\lambda f_n, f_n)$ et l'on n'aura qu'à appliquer successivement b) et c) pour en conclure qu'il en est de même pour l'élément f, ce qu'il fallait démontrer.

6. Le problème plus général où l'une ou l'autre des transformations A et B ou toutes les deux, toujours supposées linéaires et identiques à leurs adjointes, sont permises de ne pas être bornées, se ramène au problème ici traité par des artifices bien connus. Il en est de même pour l'autre extension où A est remplacée par tout un système, fini ou infini, de telles transformations, permutables entre elles.

(Reçu le 21 février 1935.)

Démonstration nouvelle d'un théorème de Klein et Poincaré.*)

Par B. DE KERÉKJÁRTÓ à Szeged.

Nous allons donner dans cette Note une nouvelle démonstration simple du théorème suivant dû à KLEIN et POINCARÉ:

Une surface de RIEMANN *algébrique de genre $p>1$ n'admet qu'un nombre fini de représentations conformes (c'est-à-dire birationnelles) en elle-même.*

Notre démonstration diffère de celle de POINCARÉ[1]) surtout en ce que la nôtre évite l'application des transformations infiniésimales.

Désignons par $\bar{F}$ la surface de recouvrement à connexion simple de la surface donnée F. Nous représentons $\bar{F}$ conformément sur l'intérieur Φ du cercle unité que nous considérons comme un plan hyperbolique. Au groupe de connexion (ou groupe fondamental) de F correspond un groupe Γ de substitutions linéaires hyperboliques de Φ en soi-même proprement discontinu dans Φ. Deux points de Φ seront appelés *équivalents* si une substitution de Γ transforme l'un de ces points en l'autre. À chaque point P de F correspond un système de points équivalents dans Φ.

Soit T une représentation conforme de F en soi-même; à T correspondent des représentations conformes de Φ en soi-même, ce sont des transformations linéaires τ jouissant de la propriété suivante: étant $\bar{P}$ un point quelconque de Φ correspondant au point P de F, l'image $\tau(\bar{P})=\bar{P}'$ de $\bar{P}$ est un point correspon-

*) Le contenu de cette Note a été présenté à l'Académie des Sciences Hongroise, dans la séance du 8 Octobre 1934.

1) H. POINCARÉ, Sur un théorème de M. Fuchs, *Acta Math.*, 7 (1885), pp. 1—32; voir surtout pp. 16—19.

dant au point $P' = T(P)$ de F. La transformation τ transforme tout système de points équivalents en un système de points équivalents; de là il résulte immédiatement que τ est échangeable avec le groupe Γ: $\tau^{-1}\Gamma\tau = \Gamma$, et que toute autre transformation de Φ correspondante à T peut être exprimée sous chacune des deux formes $\tau\gamma$ et $\gamma'\tau$, où γ et γ' sont des substitutions de Γ.

Désignons par π un *domaine fondamental* dans Φ contenant à tout point de Φ un point équivalent et un seul; soit O un point quelconque de π. Il y a une transformation correspondante à T et une seule qui transforme O en un point du même domaine π.

Soit π_1 un domaine équivalent à π (différent de π) et soit γ la substitution de Γ transformant π en π_1. *Si la transformation τ transforme les points O et $\gamma(O)$ en des points appartenants respectivement aux domaines π et $\gamma(\pi)$, les transformations τ et γ sont échangeables.* Comme $\tau^{-1}\Gamma\tau = \Gamma$, donc $\gamma' = \tau^{-1}\gamma\tau$ appartient à Γ; les points $\gamma(\tau(O))$ et $\gamma'(\tau(O)) = \tau(\gamma(O))$ sont équivalents. $\tau(O)$ appartient au domaine π, par conséquent $\gamma(\tau(O))$ appartient à π_1. Les points $\gamma(\tau(O))$ et $\tau(\gamma(O))$ sont deux points équivalents appartenants au même domaine fondamental π_1, ils doivent être identiques. Donc le point $\gamma(\tau(O))$ est invariant dans la transformation produit de γ^{-1} et $\tau^{-1}\gamma\tau$. Étant ce produit une substitution de Γ, il doit être l'identité, de sorte que $\tau\gamma = \gamma\tau$. — *Si τ n'est pas l'identité, τ est une substitution hyperbolique ayant les mêmes points doubles que γ* (voir l. c. [1])). En effet l'image d'un point double de τ dans la substitution γ est un point double de $\gamma^{-1}\tau\gamma = \tau$; alors ou bien γ échange les points doubles de τ et vice versa τ échange les points doubles de γ, ou bien τ et γ ont les mêmes points doubles. Or la première possibilité est exclue parce que dans ce cas les points doubles de τ et ceux de γ seraient tous invariants dans la transformation γ^2; celle-ci aurait donc plus de deux points invariants, elle devrait être l'identité; mais c'est impossible, étant γ une substitution hyperbolique.

Soient γ_1 et γ_2 deux substitutions non échangeables de Γ; si la transformation τ transforme chacun des trois points équivalents O, $\gamma_1(O)$, $\gamma_2(O)$ en des points appartenants respectivement aux domaines π, $\gamma_1(\pi)$, $\gamma_2(\pi)$, alors τ est l'identité. D'après ce que nous venons de démontrer τ est échangeable avec γ_1 et γ_2. Si τ n'était pas l'identité, les points doubles de τ seraient identiques d'une part avec les points doubles de γ_1, d'autre part avec ceux de γ_2, et alors les deux substitutions hyperboliques γ_1 et γ_2 ayant les mêmes points doubles seraient échangeables contre l'hypothèse.

Soient π_1 et π_2 deux domaines voisins de π, images de π par les substitutions γ_1 et γ_2 de Γ, tels que γ_1 et γ_2 ne soient pas échangeables. Soit δ un nombre supérieur aux distances hyperboliques $(O, \gamma_1(O))$ et $(O, \gamma_2(O))$. Il n'y a qu'un nombre fini $r+1$ de domaines équivalents à π dont les distances de π sont inférieures à δ; nous les désignons par $\pi, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$. — Soient $T_1, T_2, \ldots, T_n$ des représentations conformes de F en soi-même, et soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ les transformations de Φ leur correspondantes qui transforment le point O en des points $\tau_k(O)$ appartenants au domaine π. Les transformations linéaires τ_k conservent les distances hyperboliques, par conséquent la distance des points O et $\gamma_i(O)$ $(i = 1, 2)$ est la même que la distance des points $\tau_k(O)$ et $\tau_k(\gamma_i(O))$. Les points $\tau_k(O)$ appartiennent au domaine π, donc tous les points $\tau_k(\gamma_i(O))$ ont des distances inférieures à δ du domaine π, et alors ils appartiennent aux domaines $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$. Si le nombre n des transformations T_k est plus grand que $\binom{r}{2}$, il y a deux indices p et q tels que les points $\tau_p(\gamma_1(O))$ et $\tau_q(\gamma_1(O))$ appartiennent à un même domaine équivalent à π, de même les points $\tau_p(\gamma_2(O))$ et $\tau_q(\gamma_2(O))$. La transformation $\tau_p^{-1}\tau_q$ transforme chacun des trois points équivalents $\tau_p(O)$, $\tau_p(\gamma_1(O))$, $\tau_p(\gamma_2(O))$ en des points $\tau_q(O)$, $\tau_q(\gamma_1(O))$, $\tau_q(\gamma_2(O))$ appartenants respectivement aux mêmes domaines équivalents à π. De notre proposition ci-dessus, il résulte que $\tau_p^{-1}\tau_q$ est l'identité, d'où $\tau_p = \tau_q$ et $T_p = T_q$. De la sorte, nous avons démontré que le nombre des représentations conformes de F en soi-même ne peut pas dépasser le nombre $\binom{r}{2}$.

Le même raisonnement nous montre que *les représentations conformes d'une surface orientable quelconque F en elle-même forment un groupe proprement discontinu sur F, pourvu que le groupe de connexion de F contienne au moins deux éléments non échangeables;* les cas exclus sont donc les surfaces homéomorphes d'une sphère, d'un cercle, d'une couronne circulaire ou d'un tore[2]).

(Reçu le 9. Octobre 1934)

[2]) *voir* par exemple, H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig und Berlin, 1913), p. 163.

Sur l'indice des transformations analytiques.

Par B. DE KERÉKJÁRTÓ à Szeged.

Dans cette note, je donne quelques propositions simples sur la topologie des transformations analytiques, en particulier concernant l'indice d'une transformation. Elles semblent être utiles dans la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe; que cette circonstance justifie leur publication malgré leur extrème simplicité.

1. Désignons par C une courbe simple et fermée dans le plan de la variable complexe z, et par (C) le domaine formé par C et son intérieur. Une *courbe continue et fermée* C' est l'image de C obtenue par une transformation univoque et continue T de C. Nous appelons T une *transformation analytique* de C si elle est engendrée par une fonction analytique dans le domaine (C).

(*a*) *Si T est une transformation analytique, tout point du plan n'appartenant pas à la courbe $C' = T(C)$ a un ordre positif ou nul par rapport à la courbe C' parcourue dans le sens qui correspond à un circuit positif de C.*

Supposons que pour tout point z de C, le point image $z' = T(z)$ soit différent de z. La direction du *vecteur de la transformation T* dirigé du point z vers le point $z' = T(z)$ subit un changement de $2n\pi$ lorsque z fait un circuit de C dans le sens positif. Nous appelons le nombre entier n l'*indice* de la tranformation T.

(*b*) *L'indice d'une transformation analytique est positif ou nul.*

Soit $w = S(z)$ une représentation conforme et biunivoque de l'intérieur de C en soi-même, et soient a et b des nombres complexes tels que pour tout point z de C soit $a \,.\, T(S(z)) + b \neq z$.

(*c*) *Si T est analytique, l'indice de la transformation $z'' = a \,.\, T(S(z)) + b$ de la courbe C est positif ou nul.*

Les propositions (*a*), (*b*), (*c*) sont des conséquences immédiates des formules de CAUCHY. Elles permettent de reconnaître en un nombre de cas si une transformation de la courbe C en C', soumise à certaines conditions concernant la correspondance de leurs points, ne peut pas être réalisée par une transformation analytique.

2. Commençons par le théorème suivant dû à M. PÓLYA[1]). Soit (C) le rectangle $a_1 \leqq x \leqq a_2$, $b_1 \leqq y \leqq b_2$ $(z = x + iy)$. Une transformation univoque et continue T de $C: z' = T(z) = u + iv$ est appelée une *compression unilatérale* de C si elle vérifie les conditions suivantes: $u(a_1 + iy) < a_1$, $u(a_2 + iy) > a_2$, $b_1 < v(x + ib_1) < b_2$, $b_1 < v(x + ib_2) < b_2$ Le théorème de PÓLYA énonce qu'*une compression unilatérale de C ne peut pas être obtenue par une transformation analytique de C.* — Pour le démontrer, on peut supposer que les images des sommets de C se trouvent sur les lignes horizontales passantes par ces points (fig. 1.); le changement de la direction du vecteur $\overrightarrow{zz'}$ dans un circuit positif de C est $-\pi$ sur chacun des côtés horizontaux, et 0 sur les côtés verticaux de C. L'indice de T est donc -1; d'après la proposition (*b*), la transformation T ne peut pas être analytique.

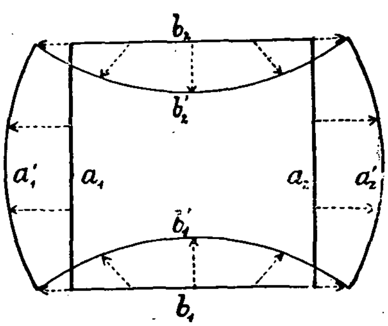


Fig. 1.

Le lemme suivant de AHLFORS, utilisé pour sa généralisation du théorème de PICARD[2]), et dont la méthode a été le point de départ pour le théorème de PÓLYA, est une conséquence immédiate dudit théorème, en vertu de la proposition (*c*): *Soit* $f(z) = u + iv$ *une fonction analytique dans le rectangle*: $a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq y \leqq 1$, *vérifiant les conditions suivantes:* $|f(z)| \leqq 1$, *et* $u(x) \leqq \alpha < \beta \leqq u(x+i)$; *alors* $b - a \leqq \dfrac{2}{\beta - \alpha}$.

3. Par la même méthode, on obtient la généralisation suivante des théorèmes ci-dessus:

[1]) G. PÓLYA, Über analytische Deformationen eines Rechtecks, *Annals of Math.*, **34** (1933), p. 617—620.

[2]) L. AHLFORS, Sur une généralisation du théorème de Picard, *C. R. Académie des Sciences, Paris,* **194** (1932), p. 245.

Soit C une courbe simple et fermée, composée de $2n$ ($\geqq 4$) arcs consécutifs que nous désignons par $l_1, l_2, \ldots, l_{2n}$, orientés d'une façon correspondante à un circuit positif de C. Soit T une transformation univoque et continue de C; désignons par l'_i l'image orientée de l_i. Supposons que l_i et l'_i n'aient pas de point commun, que les arcs $l_1, l_3, \ldots, l_{2n-1}$ soient extérieurs à C', et les arcs $l'_2, l'_4, \ldots, l'_{2n}$ extérieurs à C; ensuite que les nombres d'intersection[3] $(l_{2\nu}, l'_{2\nu+1})$ *et* $(l'_{2\nu+1}, l_{2\nu+2})$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1;\ l_0 = l_{2n})$ *soient tous égaux à* $+1$. *Dans ces conditions, T ne peut pas être analytique* (voir fig. 2.).

Nous allons montrer que l'indice de T est $(1-n)$; comme il est négatif, T ne peut pas être analytique, d'après la proposition (b). Par raisons de simplicité, nous pouvons supposer que C est une circonférence. Nous effectuons les déformations suivantes sur les courbes C et C' au cours desquelles aucun point de C ne coïncide avec son image, par conséquent l'indice de la transformation reste inaltéré. Nous déformons C en soi-même de telle façon que les arcs $l_1, l_3, \ldots, l_{2n-1}$ de C soient réduits à leurs milieux. Ensuite nous déformons la courbe C' de telle façon que chacun des arcs $l'_2, l'_4, \ldots, l'_{2n}$ soit réduit à un seul point, en particulier l'arc $l'_{2\nu}$ au point commun des tangentes de C menées aux points correspondants à $l_{2\nu-1}$ et $l_{2\nu+1}$. Dans un circuit positif de C, la direction du vecteur de la transformation subit un changement par $-\pi$ sur chacun des arcs $l_{2\nu+1}$, et par $(2-n)\pi$ sur la totalité des arcs $l_{2\nu}$; son changement total est donc $(1-n)2\pi$. (Voir aussi la formule (1) du No. 4.)

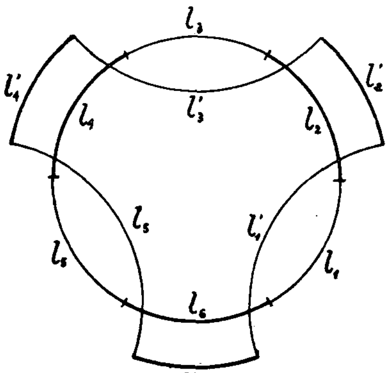


Fig. 2.

On obtient la proposition suivante comme une application du théorème que nous venons de démontrer:

Soit $f(z)$ une fonction analytique pour $|z| \leqq 1$, et y soit $|f(z)| \leqq 1$. Supposons que sur deux arcs $z_1 z_2$ et $z_3 z_4$ de la circon-

[3] H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, 2. éd., Leipzig, Berlin 1923, p. 167.

férence soit $|f(z)|=1$, *sur les deux autres arcs* $z_2 z_3$ *et* $z_4 z_1$ *soit* $|f(z)|<1$. *Le rapport anharmonique* $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$ *est alors supérieur ou égal au rapport anharmonique* $[z_1, z_2, z_3, z_4]$.

Supposons le contraire: $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4] < [z_1, z_2, z_3, z_4]$ où $z'_i = f(z_i)$. Par une transformation homographique H du cercle unité en soi-même on peut alors transformer les points z'_i en des points ζ_i tels que ζ_1 et ζ_2 soient intérieurs à l'arc $z_1 z_2$, et que ζ_3, ζ_4 soient intérieurs à l'arc $z_3 z_4$. Désignons par T la transformation de la circonférence C engendrée par la fonction $f(z)$. Les arcs $z_2 z_3$ et $z_4 z_1$ sont à distance $>\varepsilon(>0)$ de leurs images obtenues par la transformation TH. Soit S une similitude de centre $z=0$ qui transforme C en une circonférence C'' intérieure à C, telle que tout point de C soit en distance $<\varepsilon$ de son image. La transformation $S^{-1}TH$ de la circonférence C'' vérifie les prémisses du théorème ci-dessus; elle ne pourrait pas être analytique contrairement à nos hypothèses.

4. Dans ce paragraphe, nous établirons des formules pour la *détermination géométrique de l'indice d'une transformation.* Soit C une courbe simple et fermée, et soit C' l'image de C obtenue par une transformation univoque et continue T sans point invariant sur C. Si C et C' n'ont pas de point commun, l'indice de la transformation T est égal à $+1$, ou à l'ordre d'un point intérieur de C par rapport à la courbe C', suivant que C' est intérieur ou extérieur à C.

Supposons dans la suite que C et C' se rencontrent en un nombre fini de points dont chacun est un point d'intersection de ces deux courbes. La situation de ces points et de leurs images sur les courbes C et C' détermine l'indice de T. Nous ne considérerons ici que le cas où aussi *C' est une courbe simple et fermée.* Commençons par le cas où les courbes orientées C et C' déterminent le même sens d'orientation dans le plan; nous disons dans ce cas que les orientations de C et de C' sont concordantes. Supposons ensuite que les points communs à C et à C' forment une *distribution normale,* c'est-à-dire que leurs ordres cycliques sur les deux courbes sont les mêmes; supposons enfin que la transformation T déplace tout point de C par une distance très petite. Désignons par $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ les points communs à C et à C' dans leur ordre sur la courbe C; soient $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{2n}$ leurs images. Nous attribuons aux points P_k les indices δ_k et δ'_k par la préscription suivante: soit $\delta'_k = \pm 1$ suivant que la courbe orientée C' passe par le point P_k de l'extérieur de C à son intérieur, ou inversement; (évidemment on a $\delta'_k = (-1)^{k+1}\delta'_1$); soit $\delta_k = \pm 1$ suivant que l'arc $P_k P'_k$ de la courbe C', lequel ne contient pas les autres points P_l, P'_l, orienté de P_k vers P'_k, correspond à l'orientation positive ou négative de C'. L'indice de la transformation T est exprimé alors par la formule suivante:

$$\Omega = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \delta_k \delta'_k. \tag{1}$$

(Voir, par exemple, la figure 2., où pour tout k : $\delta_k = -\delta'_k$; $\Sigma\,\delta_k\delta'_k = -2n$, et $\Omega = 1 - n$.)

Encore sous la condition que les orientations de C et de C' sont concordantes, mais en supprimant les autres conditions restrictives, la définition des indices δ'_k restera la même. Les indices δ_k seront alors définis de la façon suivante. Les points $P'_1, P'_2, \ldots P'_{2n}$ divisent la courbe C' en $2n$ arcs; supposons que P'_ν soit différent de P_1 et que l'arc $P'_\nu P'_{\nu+1}$ de C' contienne le point P_1; le point P'_ν est uniquement déterminé par ces propriétés. Désignons par A' un point intérieur de l'arc $P'_\nu P_1$ de C' tel que l'arc $A'P_1$ de C' ne contienne aucun des points $P_2, P_3, \ldots, P_{2n}$. L'indice δ_k est égal à ± 1 suivant que l'arc positif $A'P'_k$ de C' contient ou non le point P_k. L'indice de la transformation T sera exprimé par la formule:

$$\Omega = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \delta_k\delta'_k + \frac{\delta'_1}{2}\left((-1)^\nu - 1\right). \tag{2}$$

Si les orientations de C et de C' sont opposées, conservant les mêmes définitions des indices δ_k et δ'_k, l'indice de la transformation T sera exprimé par la formule:

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \delta_k\delta'_k + \frac{\delta'_1}{2}\left((-1)^\nu - 1\right). \tag{3}$$

Je n'insisterai pas sur une simplification de ces formules; on pourrait, en effet, renuméroter les points P_k de façon que le membre $\frac{\delta'_1}{2}\left((-1)^\nu - 1\right)$ dans le deuxième terme disparaisse; mais cela aurait d'autre part le désavantage de chercher d'abord un numérotage convenable avant pouvoir appliquer les formules. Toutefois on peut supposer que $\delta'_1 = +1$, c'est-à-dire que nous donnons l'indice $k = 1$ à un tel point P_1 par lequel la courbe orientée C' passe de l'extérieur de C dans son intérieur.

5. Pour vérifier nos formules, nous montrons d'abord que (3) est une conséquence de (2). Soit K une circonférence suffisamment grande contenant les courbes C et C'. Sur un arc de C' qui appartient à la frontière du domaine non borné, déterminé par $C+C'$, nous prenons deux points voisins B_1' et B_2', et nous les joignons à deux points voisins A_1 et A_2 de K par des lignes $B_1'A_1$ et $B_2'A_2$ lesquelles n'ont aucun point sur K, C et C', sauf leurs extrémités. (Fig. 3.) Soit B_1B_2 l'arc de C dont l'image est $B_1'B_2'$; nous le transformons topologiquement sur l'arc composé de la ligne $B_1'A_1$, du grand arc A_1A_2 de K, et de la ligne A_2B_2', de telle façon que l'image de B soit B_i' ($i=1, 2$). Cette transformation de l'arc B_1B_2, et la transformation T sur l'arc $C-B_1B_2$ forment ensemble une transformation topologique T'' de C sur la courbe C'' obtenue de C' en remplaçant l'arc $B_1'B_2'$ par la ligne $B_1'A_1+A_1A_2+A_2B_2'$. Les orientations de C et de C'' sont concordantes. On voit immédiatement que la différence des indices de T'' et de T est égale à $+1$. Par conséquent, la formule (3) résulte de (2); aussi il est clair que (1) n'est qu'un cas particulier de (2).

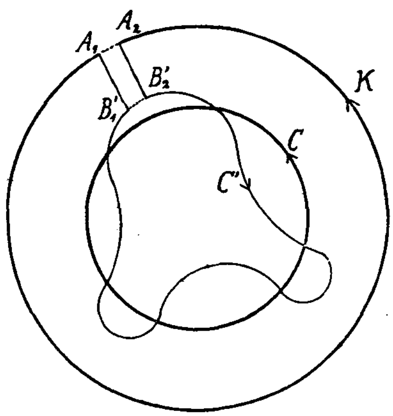


Fig. 3.

Pour vérifier la formule (2), nous déformons continuement la courbe C' en elle-même de telle façon que l'arc $P_1'P_2'\ldots P_{2n}'$ soit réduit au seul point A'; dans ce cas l'indice de la transformation est $\Omega'=+1$. (Voir fig 4., pour $n=1$, dont on obtient la même proposition pour n quelconque par une induction évidente de n à $n+1$). Soit B' un point de l'arc $P_{2n}'P_1'$ de C'; nous effectuons la déformation de C' de telle

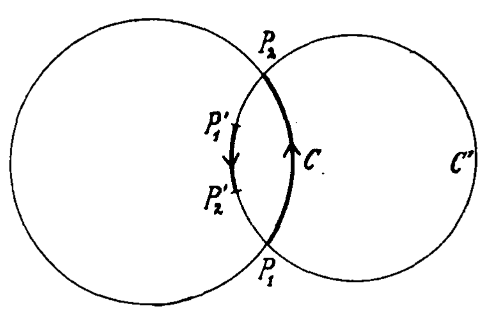


Fig. 4.

façon que les points A' et B' restent invariables; alors chacun des arcs $A'P'_{2n}$ et P'_1A' sera déformé en soi-même au seul point A'. Si au cours de cette déformation, le point P'_k traverse le point P_k, l'indice de la transformation s'augment ou se diminue de 1. En particulier, si $k \geqq \nu+1$, c'est-à-dire si P'_k appartient à l'arc $A'P'_{2n}$, désignons par η_k le nombre 1 ou 0, suivant que l'arc $A'P'_k$ contient ou non le point P_k; comme P'_k se déplace au cours de la déformation dans le sens négatif sur C', lorsqu'il traverse le point P_k, l'indice de la transformation s'augment ou se diminue d'un suivant que dans le point P_k, la courbe orientée C' passe de l'intérieur de C à son extérieur, ou inversement, c'est-à-dire suivant que l'indice δ'_k est ∓ 1 (voir fig. 5., pour $\delta'_k = +1$). — Si $k \leqq \nu$, P'_k appartient à l'arc P'_1A'; désignons par η_k le nombre

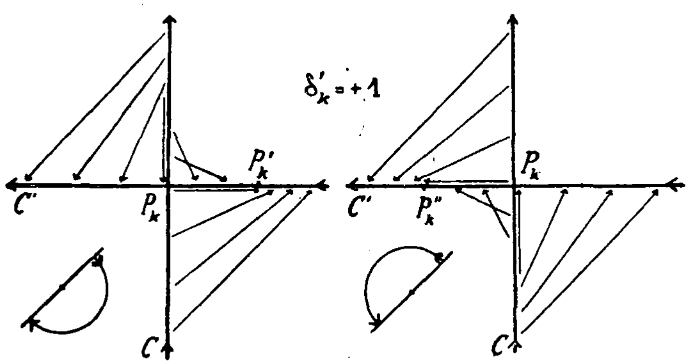


Fig. 5.

— 1 ou 0 suivant que l'arc P'_kA' contient ou non le point P_k. Lorsque nous réduisons l'arc P'_1A' au seul point A', si $\eta_k = -1$, le point P'_k $(k \leqq \nu)$ traverse le point P_k dans le sens positif sur la courbe C'; alors l'indice de la transformation s'augment ou se diminue d'un suivant que $\delta'_k = \pm 1$. — En résumé, pour $k \geqq \nu+1$, et pour $k \leqq \nu$, le changement de l'indice de la transformation effectué par le point P'_k est égal à $-\eta_k\delta'_k$; par conséquent, entre l'indice Ω de la transformation primitive T et l'indice Ω' de la transformation produit de T et de la déformation, la relation subsiste:

$$\Omega' = \Omega - \sum_{k=1}^{2n} \eta_k \delta'_k .$$

Or, comme nous l'avons fait observer, $\Omega' = +1$; d'autre part,

$\eta_k = \frac{1}{2}(\delta_k - 1)$ pour $k \leqq \nu$, et $\eta_k = \frac{1}{2}(\delta_k + 1)$ pour $k \geqq \nu + 1$;
par conséquent

$$\Omega = 1 + \sum_{k=1}^{2n} \eta_k \delta'_k = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \delta_k \delta'_k + \frac{\delta'_1}{2}((-1)^\nu - 1).$$

Nous faisons encore la remarque que dans le cas d'une courbe image C' admettant de points doubles, l'expression de l'indice de la transformation contient encore les ordres des points P_k par rapport aux courbes fermées constituées par les arcs $P'_i P'_{i+1}$ de C'.

6. Pour la *détermination analytique de l'indice d'une transformation*, il faudrait calculer l'intégrale de Kronecker[4], ou, pour le cas d'une transformation analytique d'une variable complexe, l'intégrale de Cauchy. En certains cas, il est plus facile de comparer la transformation à une autre dont l'indice est connu.

Désignons par $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des coordonnées cartésiennes dans l'espace E^n; soit S une variété close à $n-1$ dimensions dans E^n. Désignons par $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ un système de n fonctions uniformes et continues sur S. Si pour tout point de S: $f^2 = f_1^2 + \ldots + f_n^2 > 0$, la transformation définie par les formules $x' = f(x)$ transforme S en une variété S' (admettant des singularités, en général) qui ne passe pas par l'origine $O = (0, \ldots, 0)$. L'ordre du point O par rapport à la variété close S' est par définition le degré de la transformation[5]) de S' sur la sphère unité $x^2 = 1$ qui fait correspondre au point x' de S' le point $\frac{x'}{\sqrt{(x')^2}}$. Ce nombre est appelé l'indice du système de fonctions f sur la variété S, désigné par $\Omega(f)$. L'indice de la transformation de S en S' est l'indice du système $f - x$. — Si le système f est uniforme et continu non seulement sur S, mais aussi dans son intérieur, et partout $f^2 > 0$, alors $\Omega(f) = 0$.

Voici un principe général concernant les indices de deux systèmes de fonctions:

---

[4]) J. Hadamard, *Note sur quelques applications de l'indice de Kronecker* (dans le 2. volume de J. Tannéry, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, 2. éd. Paris, 1910), p. 437—477.

[5]) L. E. J. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, *Mathem. Annalen*, 71 (1911), p. 97—115.

Soient f et g deux systèmes de fonctions sur S. S'il existe un système de fonctions $F(f, g, \lambda)$ dépendant continuement d'un paramètre λ et tel que pour $\lambda=0: F\equiv f$, et pour $\lambda=1: F\equiv g$, ensuite pour tout $\lambda\,(0\leqq\lambda\leqq 1): F^2>0$, les indices $\Omega(f)$ et $\Omega(g)$ sont égaux. Inversement, si $\Omega(f)=\Omega(g)$, il existe un système $F(f, g, \lambda)$ satisfaisant aux conditions ci-dessus.

Si pour toute valeur du paramètre $\lambda: F^2>0$, l'indice de F varie continuement avec λ; comme $\Omega(F)$ est un entier, il est constant; d'où la première partie de notre proposition. — Inversement, si $\Omega(f)=\Omega(g)$, les deux transformations de la variété S sur la sphère unité, définies par les formules

$$x'=\frac{f}{\sqrt{f^2}}, \quad \text{et} \quad x'=\frac{g}{\sqrt{g^2}}$$

appartiennent à la même classe, c'est-à-dire elles peuvent être déformées continuement l'une en l'autre, en vertu des théorèmes démontrés par M. BROUWER (pour $n=2$)[6]) et M. H. HOPF (pour $n>2$)[7]). Désignons par $t(\lambda)$ cette déformation; c'est donc un système de n fonctions $t=(t_1,\ldots,t_n)$ définies sur S, dépendant continuement de $\lambda\,(0\leqq\lambda\leqq 1)$ tel que pour tout λ et dans tout point de $S: t^2=1$, ensuite $t(0)\equiv\frac{f}{\sqrt{f^2}}$, et $t(1)\equiv\frac{g}{\sqrt{g^2}}$. Le système de fonctions $F=[(1-\lambda)\sqrt{f^2}+\lambda\sqrt{g^2}]$. $t(\lambda)$ vérifie toutes les conditions du théorème.

Un cas particulier important est le suivant:[8])

Théorème de POINCARÉ *et* BOHL. *Si sur la variété $S: \Omega(f)\neq\Omega(g)$, il y a au moins un point x de S pour lequel $f(x)=-\mu g(x)$ $(\mu>0)$.*

Considérons, en effet, le système $F=(1-\lambda)f+\lambda g$; d'après la proposition ci-dessus, il existe une valeur de λ et un point de S pour lesquels $F^2=0$, alors $(1-\lambda)f+\lambda g=0$, et $f(x)=-\frac{\lambda}{1-\lambda}g(x)$.

Une conséquence immédiate de là est le *théorème de* ROUCHÉ: *Si pour tout point de $S: f^2>g^2$, alors $\Omega(f)=\Omega(f+g)$.*

[6]) L. E. J. BROUWER, Over één-éénduidige continue transformaties van oppervlakken in zichzelf, 5-de mededeeling, *Amsterdam Akad. Versl.*, 21 (1912), p. 300—309.

[7]) H. HOPF, Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Mathem. Annalen*, 96 (1927), p. 209—325; voir théorème II. b., p. 216.

[8]) J. HADAMARD, l. c. [4]), p. 468—469.

Supposons le contraire: $\Omega(f) \neq \Omega(f+g)$, il y aura donc un point de S pour lequel $f+g = -\mu f \, (\mu > 0)$, $g = -(1+\mu) f$, d'où $g^2 = (1+\mu)^2 . f^2 > f^2$, contrairement à notre hypothèse.

M. HADAMARD[8]) a fait observer que la proposition suivante peut être obtenue du théorème de POINCARÉ et BOHL:

Si dans tout point de $S: fg = f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n > 0$, *alors* $\Omega(f) = \Omega(g)$; *ensuite pour des nombres positifs quelconques m et n, on a* $\Omega(mf + ng) = \Omega(f)$.

Supposons que $\Omega(f) \neq \Omega(g)$; dans un point de S on aura $f = -\mu g$, $(\mu > 0)$, et par conséquent $fg = -\mu g^2 < 0$, contrairement à notre hypothèse. Ensuite si m et n désignent des nombres positifs quelconques, $(mf + ng) . f = m . f^2 + n . (fg) > 0$, et alors aussi $\Omega(mf + ng) = \Omega(f)$.

Ce dernier théorème de HADAMARD a été employé avec succès dans les recherches de M. LIPKA[9]) sur les racines des équations algébriques. Plus tard, il a été retrouvé par M. POMPEIU[10]); ensuite M. MONTEL[11]) a montré qu'il peut être déduit du théorème de ROUCHÉ. Dans notre représentation, le principe général ci-dessus et le théorème de POINCARÉ et BOHL apparaissent comme les sources communes de toutes ces propositions.

(Reçu le 25 mars 1935)

---

9) ST. LIPKA, Zur Theorie der algebraischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten, *ces Acta*, **5** (1931), p. 69—77.

10) D. POMPEIU, Sur un théorème analogue à celui de Rouché . . ., *C. R. Académie des Sciences, Paris*, **195** (1932), p. 855—857.

11) P. MONTEL, Sur un théorème de Rouché, *ibid.*, p. 1214—1216.

Eine Bemerkung über die Mittelwerte der Potenzreihen.

Von S. SIDON in Budapest.

Herr J. E. LITTLEWOOD[1]) bewies den folgenden Satz:

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z|<1$ konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^2|$ divergent, so lassen sich die Faktoren $\varepsilon_n = \pm 1$ derart bestimmen, daß für $0<l<2$ die Ungleichungen

$$(1) \qquad M_l(r_k, f) > A(l)\, M_2(r_k, f)\, [\log M_2(r_k, f)]^{2-4l^{-1}}$$

— wo $r_k > 0$, $\lim r_k = 1$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n z^n$,

$$M_l(r_k, f) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} |f^l(r_k e^{i\varphi})|\, d\varphi\right]^{\frac{1}{l}}$$

ist, $A(l)$ nur von l abhängt — bestehen.

Durch eine leichte Modifikation des Littlewoodschen Beweises ergibt sich folgende Verschärfung von (1):

$$(2) \qquad M_l(r_k, f) > A(l)\, M_2(r_k, f)\cdot h(M_2(r_k, f)),$$

wo $h(M_2)$ eine beliebige mit M_2^{-1} monoton gegen 0 konvergierende positive Funktion bedeutet.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die a_n positiv vorausgesetzt werden. Nach LITTLEWOOD gibt es eine Folge von Funktionen $f_1(z), \ldots, f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n^{(k)} z^n \; (\varepsilon_n^{(k)} = \pm 1), \ldots$, für welche die Ungleichungen

$$M_1(r_k, f_k) > C\, M_2(r_k, f_k)$$

---

[1]) J. E. LITTLEWOOD, On the Mean Values of Power Series, *Proceedings London Math. Society*, (2) 25 (1926), S. 328—337 und *Journal London Math. Society*, 5 (1930), S. 179—182.

bestehen, wo C eine absolute Konstante bedeutet. Hieraus folgt die Existenz einer Funktion $g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx)$, für welche $|g(x)| < 1$ im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ und

$$2\pi \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n^{(k_j)} r_{k_j}^n (c_n + d_n) \right| = \left| \int_0^{2\pi} g(x) f_{k_j}(r_{k_j} e^{ix})\, dx \right| >$$

$$> C\, M_2(r_{k_j}, f)\, |[\log h(M_2)]^{-1}|$$

für eine unendliche Indexfolge $k_1 < k_2 < \ldots < k_j < \ldots$ gilt.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{sgn}(c_n + d_n) z^n$$

erfüllt — wenn $1, 2, \ldots, k \ldots$ für $k_1, \ldots, k_j, \ldots$ gesetzt wird — die Ungleichungen (2).

(Eingegangen am 21. November 1934.)

Über die Fourier-Konstanten der Funktionen der Klasse L_p für $p > 1$.

Von S. SIDON in Budapest.

Herr A. ZYGMUND[1]) bewies: Gehört

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

samt $f(x) \log^{+\frac{1}{2}} [f(x)]$ zur Klasse[2]) L und erfüllt die Indexfolge $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ die Bedingung $A: \frac{n_{k+1}}{n_k} > q > 1$, so muß $\sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2)$ konvergieren. R. E. A. C. PALEY[3]) bewies, daß die Konvergenz von $\sum (a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2)$ auch immer stattfindet, wenn $f(x)$ samt ihrer Konjugierten zur Klasse L gehört.

Durch Kombination der Tatsachen:

1) die Komposition der Fourier-Reihe einer Funktion der Klasse L_p und einer der Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}$, wo $p > 1$, ist die Fourier-Reihe einer beschränkten Funktion,[4])

2) hat die Indexfolge $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ die Eigenschaft B^l, d. h. ist die Folge der Koeffizienten der Potenzreihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} z^{n_k}\right)^l$, wobei l eine positive ganze Zahl bedeutet, beschränkt, so gehört,

---

[1]) A. ZYGMUND, On the convergence of Lacunary Trigonometric Series, *Fundamenta Math.*, **16** (1930), S. 90—107.

[2]) Klasse L_p bedeutet, wie üblich, die Gesamtheit der Funktionen, deren p-te Potenz im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist. Statt L_1 wird L geschreiben.

[3]) R. E. A. C. PALEY, On the Lacunary Coefficients of Power Series, *Annals of Math.*, **34** (1933), S. 615-616.

[4]) Siehe z. B.: S. KACZMARZ, On Some Classes of Fourier Series, *Journal London Math. Society*, 8 (1933), S. 39—45.

wenn $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ konvergiert, $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos n_k x+b_k\sin n_k x)$ zur Klasse L_{2l},[5])

ergibt sich der

Satz. *Gehört* $f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ *zur Klasse* L_p $(p>1)$ *und besitzt die Indexfolge* $n_1,\ldots,n_k,\ldots$ *die Eigenschaft* B^q, *wo* q *ganz und* $\frac{p}{2(p-1)}\leqq q<\frac{p}{2(p-1)}+1$ *ist, so konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)$.

Ich erwähne hier folgendes Korollar dieses Satzes:

Erfüllt die Indexfolge $n_1, n_2,\ldots,n_k,\ldots$ *die Bedingung A und bezeichnet* $N_1,\ldots,N_K,\ldots$ *die Folge der Exponenten der nichtverschwindenden Glieder der Potenzreihe* $\left(\sum_{k=1}^{\infty}z^{n_k}\right)^m$, *wo* m *eine positive ganze Zahl ist, so muß, wenn* $f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ *für ein* $p>1$ *zur Klasse* L_p *gehört,* $\sum_{K=1}^{\infty}(a_{N_K}^2+b_{N_K}^2)$ *konvergieren.*

(Eingegangen am 21. November 1934)

---

[5]) Dies folgt aus der Ungleichung

$$\int_0^{2\pi}\left|\left[\sum_{j=1}^{k}(a_j+ib_j)e^{in_jx}\right]^{2l}\right|dx<C(l)\left[\sum_{j=1}^{k}(a_j^2+b_j^2)\right]^{l},$$

wo $C(l)$ nur von l abhängt.

Über die Descartessche Zeichenregel.

Von STEPHAN LIPKA in Szeged.

1. Die Vorzeichenregel von DESCARTES lautet folgenderweise: *Die Gleichung n-ten Grades mit reellen Koeffizienten*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \tag{1}$$

hat, wenn die Reihe ihrer Koeffizienten

$$a_0, a_1, \ldots, a_n$$

v Zeichenwechsel aufweist, v positive Wurzeln, oder um eine gerade Anzahl weniger.

Es ist bekannt, daß die Anzahl der positiven Wurzeln genau gleich der Zahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Koeffizienten ist, wenn die Gleichung nur reelle Wurzeln hat. Die Descartessche Zeichenregel ist also in diesem Falle *genau.* LAGUERRE bestrebte die Descartessche Zeichenregel so zu verschärfen, daß sie in jedem Falle genau sei und er hat das folgende Problem aufgestellt. Man suche ein Polynom $\varphi(x)$, oder eine Potenzreihe, mit den folgenden Eigenschaften: 1. $\varphi(x)$ habe lauter positive Koeffizienten. 2. Die Koeffizientenfolge des Produktes $f(x)\,\varphi(x)$ habe so viele Zeichenwechsel wie die Anzahl der positiven Nullstellen von $f(x)$ (im Konvergenzkreise) beträgt. Mehrere Arbeiten beschäftigen sich mit der Lösung dieses Problems[1]. Wir werden auf eine, von den

[1]) E. LAGUERRE, *Oeuvres,* I (Paris, 1898), S. 22—25.

M. FEKETE u. G. PÓLYA, Über ein Problem von Laguerre, *Rendiconti Palermo,* **34** (1912), S. 89—120.

BÁLINT E. Vizsgálatok reális együtthatójú hatványsor reális gyökhelyeiről (ungarisch), *Math. és Term.-tud. ért.,* **31** (1913), S. 286—305.

D. R. CURTISS, Recent extensions of Descartes' rule of signs, *Annals of Math.* (2), **19** (1918), S. 251—278.

bisherigen verschiedenen Weise die Zeichenregel von DESCARTES verschärfen, indem wir den folgenden Satz beweisen:

I. *Die Gleichung* (1) *mit beliebigen reellen Koeffizienten besitzt immer eine Tschirnhaustransformierte*

$$F(y) = b_0 + b_1 y + \ldots + b_n y^n = 0$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Die Gleichung $F(y) = 0$ hat so viele positive Wurzeln wie die Gleichung* (1).

2. *Die Koeffizienten der Tschirnhaustransformation*

$$y = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} \tag{2}$$

sind reelle Zahlen.

3. *Die Koeffizientenfolge der Gleichung $F(y) = 0$ weist so viele Zeichenwechsel auf als die Zahl ihrer positiven Wurzeln.*

Beweis. Wir werden vorläufig annehmen, daß die Wurzeln von (1) alle voneinander verschieden sind, wir werden aber diese Voraussetzung am Ende des Beweises fallen lassen. Wir werden eine solche Tschirnhaustransformation konstruieren, welche jede reelle Wurzel in sich selbst transformiert und welche die konjugierten komplexen Wurzelpaare in geeignet zu wählende konjugierte Punktpaare der Halbebene $\Re(z) < 0$ überführt. Es seien die positiven Wurzeln der Gleichung (1) $p_1, \ldots, p_k$, die negativen Wurzeln $q_1, \ldots, q_l$ und die konjugiert komplexen $z_\nu, \bar{z}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, m)$, $(k + l + 2m = n,\ m \geqq 1)$. Dann gewinnt man die Koeffizienten der Tschirnhaustransformation (2) durch Auflösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} p_\varkappa &= c_0 + c_1 p_\varkappa + c_2 p_\varkappa^2 + \ldots + c_{n-1} p_\varkappa^{n-1} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k) \\ q_\lambda &= c_0 + c_1 q_\lambda + c_2 q_\lambda^2 + \ldots + c_{n-1} q_\lambda^{n-1} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \\ \left.\begin{aligned} \xi_\nu + i\eta_\nu &= c_0 + c_1 z_\nu + c_2 z_\nu^2 + \ldots + c_{n-1} z_\nu^{n-1} \\ \xi_\nu - i\eta_\nu &= c_0 + c_1 \bar{z}_\nu + c_2 \bar{z}_\nu^2 + \ldots + c_{n-1} \bar{z}_\nu^{n-1} \end{aligned}\right\} & \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned} \tag{3}$$

wo ξ_ν, η_ν $(\nu = 1, \ldots, m)$ reelle Werte bedeuten, welche später geeignet gewählt werden. Dieses Gleichungssystem besitzt eine und nur eine Lösung, da die Wurzeln von (1) alle voneinander verschieden sind. Offenbar ist diese Lösung reell. Die Tschirnhaustransformierte der Gleichung (1) hat die folgende Gestallt

$$F(y) = \prod_{\nu=1}^{m} \{(y - \zeta_\nu)(y - \bar{\zeta}_\nu)\} \prod_{\varkappa=1}^{k} (y - p_\varkappa) \prod_{\lambda=1}^{l} (y - q_\lambda) = 0, \tag{4}$$

wobei $\zeta_\nu = \xi_\nu + i\eta_\nu$.

Wir betrachten in (4) das Produkt der zwei ersten Faktoren:

$$(5)\qquad F^{*}(y)=\prod_{\nu=1}^{m}\{(y-\xi_\nu)^2+\eta_\nu^2\}\prod_{\varkappa=1}^{k}(y-p_\varkappa)=0.$$

Ordnen wir das Polynom $F^{*}(y)$ nach Potenzen von y, so wird

$$(5')\qquad F^{*}(y)=y^{k+2m}+\alpha_1 y^{k+2m-1}+\ldots+\alpha_i y^{k+2m-i}+\ldots+\alpha_{k+2m}.$$

Der Koeffizient α_i $(i=1,\ldots,k+2m)$ ist ein Polynom der Werte

$$\xi_1,\ldots,\xi_m,\ \eta_1,\ldots,\eta_m,\ p_1,\ldots,p_k.$$

Vorläufig seien $\xi_1,\ldots,\xi_m$, $\eta_1,\ldots,\eta_m$ unabhängige Variablen, und zerlegen wir das Polynom α_i in zwei Teile

$$(6)\qquad \alpha_i=\alpha_i'+\alpha_i'' \qquad (i=1,\ldots,k+2m).$$

α_i' bedeute die Summe derjenigen Glieder von α_i, welche keine von den Veränderlichen $\eta_1,\ldots,\eta_m$ enthalten, also ist α_i' ein Polynom der Veränderlichen $\xi_1,\ldots,\xi_m$. Dann wird α_i'' — falls es nicht identisch verschwindet — ein solches Polynom von $\xi_1,\ldots,\xi_m$, $\eta_1,\ldots,\eta_m$, daß jedes Glied desselben mindestens eine der Veränderlichen $\eta_1,\ldots,\eta_m$ enthält. Die Gleichung (5) geht nach (5′) und (6) in

$$y^{k+2m}+(\alpha_1'+\alpha_1'')\,y^{k+2m-1}+\ldots+(\alpha_{k+2m}'+\alpha_{k+2m}'')=0$$

über. Wir behaupten, daß keine der Funktionen $\alpha_1',\ldots,\alpha_{k+2m}'$ identisch verschwindet. Man gewinnt nämlich α_i', wenn man in (5) $\eta_1=0,\ \eta_2=0,\ldots,\eta_m=0$ einsetzt und dann in der Gleichung

$$(7)\qquad F_{*}(y)=\prod_{\nu=1}^{m}(y-\xi_\nu)^2\prod_{\varkappa=1}^{k}(y-p_\varkappa)=0$$

den Koeffizienten von y^{k+2m-i} bestimmt. Dieser ist aber gleich der Summe der Kombinationen i-ter Ordnung, gebildet von

$$\xi_1,\xi_1,\xi_2,\xi_2,\ldots,\xi_m,\xi_m,p_1,\ldots,p_k.$$

Also ist entweder α_i', oder $-\alpha_i'$ ein Polynom der Veränderlichen $\xi_1,\ldots,\xi_m$ mit *positiven* Koeffizienten. Also kann α_i' nicht identisch verschwinden, und so existiert nach einem bekannten Satze[2]) ein solches Wertsystem $\xi_1,\ldots,\xi_m$, für welche

$$\alpha_i'\neq 0 \qquad (i=1,\ldots,k+2m)$$

und

$$\xi_\nu<0 \qquad (\nu=1,\ldots,m)$$

---

[2]) s. z. B. R. Fricke, *Lehrbuch der Algebra,* I (Braunschweig, 1924), S. 96.

ist. In diesem Falle ist die Anzahl der positiven Wurzeln von (7) gleich k. Die Gleichung (7) hat aber lauter reelle Wurzeln, also die Reihe ihrer Koeffizienten

(8) $$1, \alpha_1', \ldots, \alpha_{k+2m}'$$

weist genau k Zeichenwechsel auf.

Wählt man nun die Werte der Veränderlichen $\eta_1, \ldots, \eta_m$ genügend klein, so werden auch die Werte

$$\alpha_1'', \ldots, \alpha_{k+2m}''$$

beliebig klein, da jedes Glied von α_i'' mindestens eine der Veränderlichen $\eta_1, \ldots, \eta_m$ enthält (wenn $\alpha_i'' \neq 0$ ist). Da alle $\alpha_i' \neq 0$ ist, so folgt nach (6), daß die Reihe

$$1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k+2m}$$

so viele Zeichenwechsel aufweist wie die Reihe (8). Also hat die Koeffizientenreihe von $F^*(y)$ so viel Zeichenwechsel als die Anzahl der positiven Nullstellen von $F^*(y)$ ist.

Jetzt werden wir beweisen, daß — unter den vorigen Bedingungen betreffend die Werte $\xi_1, \ldots, \xi_m$ und $\eta_1, \ldots, \eta_m$ — die Anzahl der Zeichenwechsel von (4) genau gleich der Zahl der positiven Wurzeln von (4) ist. Der Beweis geht durch wiederholte Anwendung des folgenden Lemmas:[3])

Ist p eine positive Zahl und sind die Koeffizienten des Polynoms $\psi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$ reelle Zahlen, so ist die Anzahl der Zeichenwechsel des Polynoms $(x+p)\psi(x)$ nicht größer als die Anzahl der Zeichenwechsel von $\psi(x)$.

Man multipliziere das Polynom $F^*(y)$ nacheinander mit den Faktoren: $(y-q_1), (y-q_2), \ldots, (y-q_l)$, so gewinnt man das Polynom $F(y)$. Nun ist aber $q_1 < 0, \ldots, q_l < 0$, also folgt durch wiederholte Anwendung des vorigen Lemmas, daß die Anzahl der Zeichenwechsel von $F(y$ nicht größer ist als die von $F^*(y)$, also nicht größer als k. Andererseits ist diese Anzahl nach der Descartesschen Zeichenregel mindestens k; daher ist die Anzahl der Zeichenwechsel von $F(y)$ gleich k, w. z. b. w.

Wir haben bei dem Beweis vorausgesetzt, daß die Wurzeln der Gleichung (1) alle voneinander verschieden sind. Wenn dies nicht der Fall ist, können wir es durch eine kleine Veränderung

[3]) s. z. B. PÓLYA—SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, II (Berlin, 1925), S. 38, Aufgabe 4.

der Werte $p_\varkappa, q_\lambda, z_\nu, \bar{z}_\nu$, leicht erreichen. Diese veränderten Werte bezeichnen wir mit $p'_\varkappa, q'_\lambda, z'_\nu, \bar{z}'_\nu$. Setzen wir in der rechten Seite von (3) statt $p_\varkappa, q_\lambda, z_\nu, \bar{z}_\nu$, die Werte $p'_\varkappa, q'_\lambda, z'_\nu, \bar{z}'_\nu$ ein, dann bestimmt dieses Gleichungssystem die Koeffizienten einer Tschirnhaustransformation von (1). Die so bestimmte Tschirnhaustransformation wird die Wurzeln von (1) in solche Werte überführen, die von $p_\varkappa$, q_λ, $(\xi_\nu \pm i\eta_\nu)$ nur beliebig wenig abweichen. Infolgedessen werden diese Werte den nötigen Bedingungen noch genügen.

2. Wir haben in dem vorigen Paragraphen bewiesen, daß jede Gleichung mit reellen Koeffizienten eine Tschirnhaustransformierte besitzt mit den folgenden beiden Eigenschaften: 1. Die transformierte Gleichung hat so viele positive Wurzeln als die Anzahl der positiven Wurzeln der ursprünglichen Gleichung ist. 2. Die transformierte Gleichung hat so viele positive Wurzeln als die Anzahl der Zeichenwechsel in ihrer Koeffizientenreihe ist. Aus dem Beweise geht sogleich hervor, daß es unendlich viele solche Tschirnhaustransformierte gibt. Unser nächster Zweck ist eine solche Tschirnhaustransformierte effektiv zu konstruieren. Dazu beweisen wir zuerst die folgende Ergänzung der Descartesschen Zeichenregel.

II. *Der Grad der Gleichung* (1) *sei fest. Die positiven Wurzeln von* (1) *sollen alle in dem Intervalle* (a, b) *liegen* $(0 < a < b)$. *Die komplexen Wurzeln sollen alle in einem solchen Kreise vom Radius* ϱ *liegen, welcher vollständig in die Halbebene* $\Re(z) < 0$ *fällt. Der Mittelpunkt dieses Kreises habe von dem Nullpunkt einen Abstand d welcher der Ungleichung*

$$d > \Omega(a, b)$$

genügt; es sei ferner

$$\varrho < \varepsilon(d, b). \tag{9}$$

Wir behaupten, daß die Gleichung bei diesen Bedingungen ebenso viele positive Wurzeln hat als die Anzahl der Zeichenwechsel ist.

Dieser Satz besagt, daß die Zeichenregel von DESCARTES genau ist in dem Falle, wo sämtliche komplexe Wurzeln in einem solchen Kreise liegen, welcher genügend weit in der Halbebene $\Re(z) < 0$ liegt und einen genügend kleinen Radius hat. Der Beweis dieses Satzes hängt eng mit den Überlegungen des vorigen Paragraphen zusammen. Wir betrachten die Koeffizienten des Polynoms (7). Diese sind Funktionen der Veränderlichen $\xi_1, \ldots, \xi_m$.

Bedeute ξ eine solche negative Zahl, welche einen genügend großen absoluten Betrag besitzt. Wir beweisen, daß keiner der Koeffizienten von (7) gleich Null ist, wenn nur

$$|\xi_1-\xi|<\delta,\ldots,|\xi_m-\xi|<\delta \tag{10}$$

gilt, wo δ eine genügend kleine positive Zahl bedeutet. Wir berechnen die Werte der Koeffizienten von (7) an der Stelle $\xi_1=\xi$, $\xi_2=\xi,\ldots,\xi_m=\xi$. Man gewinnt diese Werte als Koeffizienten des Polynoms

$$\underset{(\xi_1=\ldots=\xi_m=\xi)}{F_*(y)}=(y-\xi)^{2m}\prod_{\varkappa=1}^{k}(y-p_\varkappa). \tag{11}$$

Es sei noch

$$\prod_{\varkappa=1}^{k}(y-p_\varkappa)=b_0+b_1y+\ldots+y^k$$

und

$$\xi=-\zeta,\quad \zeta>0.$$

Dann folgt nach (11) für die erwähnten Werte der Koeffizienten die Formel

$$\begin{gathered}j!\,b_j\zeta^{2m}+j!\,2m\,b_{j-1}\zeta^{2m-1}+\frac{j!}{2}2m(2m-1)b_{j-2}\zeta^{2m-2}+\ldots+\\+2m(2m-1)\ldots(2m-j+1)b_0\zeta^{2m-j}\\(j=0,1,\ldots,k+2m,\ b_j=0 \text{ wenn } j>k).\end{gathered} \tag{12}$$

Da $b_0\neq0$, $b_1\neq0,\ldots,b_k\neq0$, so ergibt sich leicht, daß keines von den Polynomen (12) identisch verschwindet. Ist also $\zeta=|\xi|$ genügend groß, so sind alle Koeffizienten von (7) an der Stelle $\xi=\xi_1=\ldots=\xi_m$ von Null verschieden. Da die Koeffizienten von (7) stetige Funktionen der Veränderlichen $\xi_1,\ldots,\xi_m$ sind, so folgt, daß diese Koeffizienten in der kleinen Umgebung (10) auch von Null verschieden sind. Es folgt also endlich, da die imaginären Teile der komplexen Wurzeln nach Voraussetzung genüged klein sind, daß man die Überlegungen des vorigen Paragraphen wörtlich wiederholen kann; damit ist der Satz II bewiesen.

Bei dem Beweise des Satzes II war die Tatsache wesentlich, daß die Koeffizienten des Polynoms (7) an einer Stelle $\xi=\xi_1=\ldots=\xi_m$ alle von Null verschieden sind. Man könnte dies so erreichen, daß man den Wert von $\zeta=|\xi|$ größer als alle positive Nullstellen der Polynome (12) wählt. Die Koeffizienten der Polynome (12) sind einfache rationale symmetrische Funktionen der positiven

Wurzeln der Gleichung (1). Da die positiven Wurzeln von (1) im Intervalle (a, b) liegen, also ergibt sich für die Koeffizienten von (12) eine obere und eine untere Schranke, welche nur von den Zahlen a, b abhängt. Damit wird die obere Schranke der positiven Nullstellen von (12) eine Zahl $\Omega(a, b)$. Eine leichte Überlegung zeigt, daß die Zahl ε in (9) eine Funktion von d, b ist, da die Werte $\alpha'_\nu, \alpha''_\nu$ von $\xi_\nu, \eta_\nu, p_\varkappa$ abhängen und d eine obere Schranke für $|\xi_\nu|$ bestimmt.

3. Nunmehr können wir eine solche rationale Transformation (sogar auch eine Tschirnhaustransformation) angeben, welche die Gleichung (1) in eine solche transformiert die den Bedingungen vom Satze II genügt, außerdem die transformierte Gleichung und die Gleichung (1) gleichviele positive Wurzeln haben. — Wir werden einen solchen Streifen

$$-2\delta < \Re(z) < 0 \qquad (z = x + iy)$$

bestimmen, welcher in seinem Inneren keine Nullstelle von $f(x)$ enthält. Wir setzen in das Polynom $f(x)$ statt x die Veränderliche $z = x + iy$ ein, so wird

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Eliminieren wir y aus den Gleichungen $u(x, y) = 0$, $v(x, y) = 0$, so ergibt sich eine Gleichung $h(x) = 0$. Es läßt sich leicht ein solches Intervall

$$-2\delta < x < 0 \qquad (\delta > 0)$$

angeben, in welchem $h(x) = 0$ keine negative Wurzel hat. Das Polynom $f(z)$ wird sicher in dem Streifen

$$-2\delta < \Re(z) < 0$$

keine Nullstellen enthalten. Wenden wir nun auf $f(z)$ die folgende Tschirnhaustransformation:

$$z' = z + \delta$$

an, so hat die transformierte Gleichung keine Wurzel in dem Streifen

$$-\delta < \Re(z) < \delta. \tag{13}$$

Mann kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß sämtliche Wurzeln von (1) im Inneren des Einheitskreises liegen. Es bedeute

$$\left.\begin{array}{r} -\eta < \Im(z) < \eta \\ \delta < \Re(z) \end{array}\right\} \qquad (\eta > 0) \tag{14}$$

einen solchen Halbstreifen, welcher nur die positiven Wurzeln von $f(z)$ enthält. Nun lassen wir aus dem Einheitskreise die Streifen (13) und (14) aus, und bezeichnen mit E^* den übrigbleibenden Teil des Einheitskreises. Wir werden ein Polynom $g(z)$ angeben mit den beiden folgenden Eigenschaften:

1°. $$0 < g(z) < 1$$

wenn $\delta < z < 1$ ist.

2°. Liegt z im Inneren von E^*, dann ist

$$|g(z)| > G$$

wo G eine beliebig große, gegebene positive Zahl bedeutet.

Wir betrachten die folgende ganze Funktion

$$\psi(z) = \frac{1}{2}(\cos^2 kz + e^{-lz})$$

wo k und l geeignet zu wählende positive Zahlen bedeuten. Ist l genügend groß, so gilt

$$0 < \varepsilon < \psi(z) < 1 - \varepsilon \tag{15}$$

wenn z positiv ist und in dem Intervalle

$$\delta < z < 1$$

liegt. Liegt z in E^*, so gilt für $\Re(z) > 0$

$$\begin{aligned} |\psi(z)| &\geqq \frac{1}{2}(|\cos^2 kz| - |e^{-lz}|) = \\ &= \frac{1}{8}(e^{2ky} + e^{-2ky} + 2\cos 2kx) - \frac{1}{2e^{lx}} > \\ &> \frac{1}{8}(e^{2k\eta} + 2\cos 2kx) - \frac{1}{2e^{lx}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Wählt man nun k genüged groß, so folgt nach (16)

$$\begin{gathered} |\psi(z)| > G \\ (z \in E^*,\ \Re(z) > 0). \end{gathered} \tag{17}$$

Wenn z im E^* liegt und $\Re(z) < 0$ ist, so gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |\psi(z)| &\geqq \frac{1}{2}(|e^{-lz}| - |\cos^2 kz|) = \\ &= \frac{1}{2}e^{-xl} - \frac{1}{8}(e^{2ky} + e^{-2ky} + 2\cos 2kx) \geqq \\ &\geqq \frac{1}{2}e^{\delta l} - \frac{1}{8}(e^{2ky} + e^{-2ky} + 2\cos 2kx). \end{aligned} \tag{18}$$

Ist l genügend groß, so folgt nach (18)

$$|\psi(z)| > G \quad (z \in E^*, \ \Re(z) < 0). \tag{19}$$

Nun bedeute $g(z)$ einen Abschnitt der Potenzreihe von $\psi(z)$ von genügend hohem Grad. Dann folgt nach (15), (17), (19), daß das Polynom $g(z)$ die obigen Eigenschaften 1^0, 2^0 besitzt.

Jetzt schreiben wir $g(x)$ statt $g(z)$ und wenden für die Wurzeln der Gleichung (1) die folgende rationale Transformation

$$t(x) = \frac{1}{g(x)}$$

an. Diese Transformation führt die positiven Wurzeln von (1), welcher sämtlich im Intervall (a, b) liegen, in solche Werte über, die in einem Intervall (a', b') liegen, für welches $1 < a' < b'$ gilt. Dies folgt nach Eigenschaft 1^0 von $g(x)$. Diese Transformation wird die anderen Wurzeln von (1) in das Innere eines beliebig kleinen Kreises überführen, welcher den Mittelpunkt in $t = 0$ hat. Dies folgt nach Eigenschaft 2^0 von $g(x)$. Jetzt wenden wir für $t(x)$ die folgende lineare Transformation an:

$$t' = \frac{2\lambda t + 1 - 2\lambda}{\lambda t + 1 - \lambda} = \frac{(1 - 2\lambda) g(x) + 2\lambda}{(1 - \lambda) g(x) + \lambda},$$

wo $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ ist. Diese rationale Transformation in x führt dann die positiven Wurzeln (1) in das Intervall (1, 2) über. Die anderen Wurzeln gehen in das Innere eines beliebig kleinen Kreises über, welcher den Mittelpunkt auf der negativen reellen Achse hat. Dieser letztere Kreis wird passend weit von dem Nullpunkt liegen, wenn $(1 - \lambda)$ genügend klein ist. Also führt die Transformation $t'(x)$ die konjugiert komplexen Wurzeln von (1) in einen genügend kleinen Kreis über, welcher den Bedingungen des Satzes II genügt.

(Eingegangen am 23. Februar 1935.)

Bibliographie.

Woyciechowsky József, Sipos Pál élete és matematikai munkássága, 124 oldal, Budapest, Athenaeum Irodalmi·és Nyomdai R.-T., év nélkül.

[**Josef v. Woyciechowsky, Paul Sipos,** ein ungarischer Mathematiker des ausgehenden 18. Jahrhunderts, über seine Ellipsenrektifikation mittels Kochleoide und seine alleinstehenden logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, mit unveröffentlichten Briefen von BODE und KÄSTNER, 124 S., Budapest, Athenaeum.]

PAUL SIPOS, „der erste ungarische Mathematiker dessen selbständige und auf der Höhe seiner Zeit stehende Abhandlung bekannt ist", ist im Jahre 1759 zu Nagyenyed geboren, studierte dortselbst, wurde Rektor des Partikel-Kollegiums zu Szászváros; er setzte dann seine mathematischen und theologischen Studien in Frankfurt a. O., in Wien und wahrscheinlich auch in Göttingen fort; in 1793 ist er zum Adjunkten der kgl. Gelehrten Gesellschaft der Wissenschaften zu Frankfurt a. O. ernannt worden. In 1796 ist seine Abhandlung: *Beschreibung und Anwendung eines mathematischen Instruments für die Mechaniker, zur unmittelbaren Vergleichung der Circulbogen* in der Sammlung deutscher Abhandlungen der Berliner Akademie (Jahrgang 1790—91, Anhang, S. 201—230) erschienen; die Arbeit wurde durch eine goldene Medaille belohnt. Nach seinem Heimat zurückgekehrt, wirkte er wieder in Szászváros und später an der Hochschule zu Sárospatak als Professor; die letztere verdankt ihm einen vorzüglichen Lehrplan für Mathematik. In 1810 schied er aus dem Lehramt, um in Tordos als reformierter Prediger zu wirken; er starb in 1816 in Bábolna.

Seine oben erwähnte Arbeit „Beschreibung..." ist die erste Publikation über die jetzt unter dem Namen Kochleoide bekannte Kurve, die man daher als Sipos-Kurve bezeichnen sollte. Er verwendet diese Kurve zur Lösung gewisser Aufgaben, wie Rektifikation des Kreisbogens und Winkelteilung. Ferner gibt er mittels derselben eine mechanische (d. h. angenäherte) Konstruktion der Ellipsenlänge an, die der Näherungsformel

$$S = 4\,\frac{(a+b)^3}{(a-b)^2}\,\cos\frac{\pi\sqrt{ab}}{a+b}$$

für den Umfang der Ellipse mit den Halbachsen a, b entspricht. WOYCIECHOVSKY zeigt, daß diese Formel, nach Potenzen der Exzentrizität ε entwickelt, bis zum Potenz ε^6 mit der entsprechenden Entwicklung des genauen Umfangs übereinstimmt und auch im Koeffizienten des nächstfolgenden Gliedes eine sehr kleine Abweichung aufweist, eine Genauigkeit, die, wie es der Verfasser durch sorgfältige Zusammenstellung und Vergleichung von 38 Näherungsformeln zeigt, vor SIPOS nicht erreicht und auch seitdem nur durch wenige (und viel kompliziertere) Formeln übertroffen wurde.

Erwähnenswert sind noch die interessant eingerichteten Tabellen von SIPOS für die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen kleiner Winkeln, wobei er als erster in Ungarn die Dezimalteilung der Winkeln gebraucht.

WOYCIECHOWSKY hat durch Aufsuchen der — im Buch durchwegs zitierten — Quellen, darunter von zwei, zuerst hier abgedruckten Briefen an SIPOS (vom Berliner Astronomen BODE und vom Göttinger Mathematiker KÄSTNER), treffliches geleistet. Ein ausführlicher Auszug in deutscher Sprache, unter dem oben in [ ] angegebenen Titel, macht den wesentlichen Inhalt einem weiteren Leserkreis zugänglich.

L. Kalmár.

Veress Pál, Valós függvények, 175 oldal, Budapest, „Studium" Könyvkereskedelmi és Könyvkiadó R.-T., 1934.

[**Paul Veress, Fonctions réelles,** 175 pages, Budapest, édition „Studium", 1934.]

Jusqu'à ces derniers jours il n'existait aucune monographie en langue hongroise sur ce qu'on appelle d'habitude la théorie des fonctions de variables réelles. Il faut remercier M. VERESS d'avoir tâché de combler cette lacune en réunissant, dans le présent volume, les leçons sur le sujet qu'il a données à l'Université de Budapest. Loin d'être complet, mais présentant d'une façon très claire tout ce qu'il contient et portant jusqu'à des régions élevées, le livre pourra rendre de bien bons services à tous ceux qui n'y voient qu'une première introduction initiant à la lecture des monographies détaillées et des mémoires originaux.

Voici un résumé des matières. Au premier chapitre sont développés ceux des faits concernant les ensembles dont on aura besoin au cours du livre, parmi lesquels un théorème sur les suites infinies d'assertions, du à l'auteur et dont celui se sert pour unifier plusieurs problèmes d'allure différente. Au second chapitre sont discutées la convergence uniforme et la convergence quasiuniforme, les fonctions à variation bornée, la continuité absolue, la semicontinuité et les classes de BAIRE. La troisième donne une première introduction à la théorie des intégrales de LEBESGUE. Enfin, au quatrième chapitre sont esquissés les faits principaux concernant les espaces abstraits, avec quelques applications à des problèmes particuliers.

F. R.

Joseph Fels Ritt, Differential Equations form the Algebraic Standpoint (American Math Society Colloquium Publications, Volume XIV), X + 172 pages, New York, American Mathematical Society, 1932.

This volume represents the principal results of the author's researches in the field of algebraic differential equations. It constitutes volume XIV of the well-known Colloquium Series of the American Mathematical Society.

We shall analyse briefly some of the salient features of the results here expounded. For a more detailed resume of the subjects treated we refer the reader to the introduction of the book. Our operations have as background a field of functions of x (for simplicity we deal with one independent variable at the present) closed under the operation of differentiation. Let $F(x;\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n)$ be any polynomial in the unknowns y_j and their derivatives with coefficients in this field. By equating to zero the members of a system of such polynomials we obtain a system of algebraic differential equations. The notion of solution of a system is defined and it is proved that every system contains a finite subsystem whose solutions are precisely those of the original system.

It is quite evident that the notion of reducibility plays a central role in this work. As a matter of fact, the definition introduced delimits and forecasts the development of the whole theory. We shall briefly explain it here. Let $\Gamma = 0$ symbolize a differential system and $A = 0$, $B = 0$ be two equations of the type described earlier. $\Gamma = 0$ is said to be irreducible if for every pair A, B which has the property that AB vanishes for every solution of $\Gamma = 0$, either A or B vanishes for every solution of $\Gamma = 0$. With this definition, the author proves the fundamental theorem that every system can be decomposed into a finite number of irreducible systems. This decomposition is unique in the sense that any two decompositions contain the same number of indecomposable systems which can be paired off so that the systems in each pair define the same solutions.

In chapter II the notion of general solution of a differential equation is introduced. It is proved that it corresponds to one of the irreducible manifolds to which the equation gives rise. The solution of a system of more than one equation is also studied and is reduced by interesting devices to that of one equation, the resolvent of the system.

In later chapters, among other things, we find applications of this general theory; a special treatment of purely algebraic systems (that is systems involving no derivatives); the existence theorems which form the basis of the whole theory are analysed more closely and methods are given for the construction of the entities in question in a finite number of steps; analogues are given for the HILBERT—NETTO nullstellensatz and LÜROTH's theorem on the parametrization of unicursal curves. In the last two chapters the theory of partial differential equations is studied; the corresponding principal theorems can be deduced here but the generalization is by no means immediate. For the purposes of this study, the existence theorem of RIQUIER on so-called passive orthonormal systems is derived.

The material presented presupposes no more than an elementary knowledge of algebra and analysis. This frees the reading from annoying cross-references. On the other hand, some of the arguments presented, especially elimination processes, will necessarily call for perseverance. But if we take a bird's-eye view of the theory we are impressed with a wholesome feeling of its completeness as well as with mounting surprise that previous to this publication this rich field had been so largely neglected.

E. R. Lorch.

Stanislaw Saks, Théorie de l'intégrale, avec une note de STEFAN BANACH (Monografje Matematyczne, Tom II), VIII + 290 pages, Warszawa, Seminarjum Matematyczne, 1933.

Le présent volume des „Monographies Mathématiques" réunit presque tous les chapitres de cette branche de l'Analyse moderne dont après tant d'années l'importance n'a plus besoin d'être accentuée. Il faut louer le comité de rédaction d'avoir confié cette tâche à M. SAKS qui a enrichi et simplifié la plupart de ces chapitres par ses contributions personnelles, parmi lesquelles, pour ne citer que les principales, ses recherches concernant la dérivation des fonctions d'intervalle, la comparaison des quatre nombres dérivés des fonctions les plus générales et la classification en une hiérarchie des diverses notions d'intégrale.

Les chapitres I—V sont consacrés, après quelques préliminaires concernant les fonctions à variation bornée et celles de figure qui les généralisent au cas de plusieurs variables, à l'intégrale de LEBESGUE, avec des applications sur la théorie des courbes rectifiables. Le chapitre VI traite de l'aire d'une surface courbe $z = w(x, y)$ et de l'intégration des fonctions d'intervalle. Suivent, dans les chapitres VII—X, les intégrales de PERRON et de DENJOY et une discussion très détaillée des diverses généralisations des fonctions absolument continues et de celles à variation bornée ainsi que des fonctions caractériées par les conditions de LUSIN et BANACH. Le dernier chapitre se compose de deux parties indépendantes, l'une embrassant les recherches de MM. RADEMACHER, STEPANOFF et HASLAM-JONES concernant l'existence de la différentielle totale et de la différentielle approximative des fonctions de plusieurs variables que l'auteur a su compléter par ses contributions personnelles, tandis que la seconde contient, à titre d'application des méthodes de BAIRE—LEBESGUE à la théorie des fonctions analytiques, les théorèmes de MM. LOOMANN et MENCHOFF élargissant les conditions classiques d'holomorphie. Une annexe traite de l'intégrale dans les espaces abstraits. Enfin une note, redigée par M. BANACH, expose, sous une forme légèrement généralisée, le dernier travail accompli par notre collègue A. HAAR avant sa mort prématurée, sa belle et importante théorie de la mesure dans des groupes continues.

La structure du livre entier ainsi que l'exposition des détails sont des meilleures.

F. R.

Ernst Steinitz, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluß der Elemente der Topologie, aus dem Nachlaß herausgegeben und ergänzt von HANS RADEMACHER (Grundlehren der math. Wisscnschaften, Band XLI), VIII + 351 S., Berlin, J. Springer, 1934.

Die Grundlage dieses vorzüglichen Buches ist ein unvollendetes Manuskript von STEINITZ, das vom Herausgeber in bester Weise ergänzt und mit zahlreichen Figuren versehen wurde. Das so entstandene Buch zeigt eine klare, systematische und sorfältige Darstellung und enthält eine ganze Reihe der vorher unbekannten eigenen Resultate von STEINITZ. Wir sind eines Sinnes mit dem Herausgeber, „daß das nachgelassene Werk der mathematischen Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden mußte, nicht nur aus Pietät vor dem Namen STEINITZ, sondern vor allem auch seiner inneren Qualität und Eigentümlichkeit halber".

Den eingehenden Spezialuntersuchungen der Werke von BRÜCKNER, CHR. WIENER und V. EBERHARDT gegenüber hat das vorliegende Werk jene allgemeine Theorie der Polyeder vor Augen gehalten, die man auch als Morphologie der Polyeder bezeichnet. Es handelt sich also um die Lehre von topologischen Typen der Polyeder. Die Extremalprobleme und die Theorie der regulären Polyeder wurden aber außer Acht gelassen. — Im ersten Teil gibt das Buch eine historische Übersicht über den Eulerschen Polyedersatz und über seine Entwicklung und Ausgestaltung. Der zweite Teil enthält rein kombinatorische Betrachtungen über die Schemata, die aus Elementen von dreierlei Art: Ecken, Kanten und Flächen bestehen. Aus diesen Untersuchungen folgt, daß die konvexen Polyeder von einem besonderen topologischen Typus sind, der von STEINITZ als „K-Polyeder" bezeichnet wird. Der dritte Teil des Buches enthält drei Beweise des „Fundamentalsatzes der konvexen Typen", nach welchem jedes schematisch-topologisch gegebenes K-Polyeder als konvexes Polyeder realisiert werden kann. Der dritte Beweis führt schließlich zum „Kontinuitätssatz der konvexen Typen", nach dem zwei konvexe Polyeder von gleichem Typus sich unter Aufrechthaltung ihrer Konvexität und ihres Typus stetig ineinander überführen lassen.

J. v. Sz. Nagy.

David Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, zweiter Band: Algebra, Invariantentheorie, Geometrie, VIII + 453 S. u. ein Bildnis, Berlin, J. Springer, 1933.

Der zweite Band Hilberts gesammelter Abhandlungen enthält seine Arbeiten über Algebra, Invariantentheorie und Geometrie. Die Anordnung der algebraischen Abhandlungen entspricht der Reihenfolge der Erscheinung, und zwar: 1. Über die invarianten Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen. 2. Über die notwendigen und hinreichenden kovarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz. 3. Über einen allgemeinen Gesichtspunkt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiete. 4. Über eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete. 5. Über die Singularitäten der Diskriminantenfläche. 6. Über binäre Formenbüschel mit besonderer Kombinanteneigenschaft. 7. Über binäre Formen mit vorgeschriebener Diskriminante. 8. Über die Diskriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe. 9. Lettre adressée à M. HERMITE. 10. Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten. 11. Über die Endlichkeit des Invariantensystems für binäre Grundformen. 12. Über Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Funktionaldeterminante. 13—15. Zur Theorie der algebraischen Gebilde I—III. 16. Über die Theorie der algebraischen Formen. 17. Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null (Zusammen mit A. HURWITZ). 18. Über die Irreduzibilität ganzer rationaler Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten. 19. Über die vollen Invariantensysteme. 20. Über ternäre definite Formen. 21. Ein Beitrag zur Theorie des Legendreschen Polynoms. 22. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen. 23. Über die Theorie der algebraischen Invarianten. 24. Über diophantische Gleichungen. 25. Über die Invarianten eines Systems von beliebig vielen Grundformen. 26. Über die Gleichung neunten Grades.

Diesen Abhandlungen folgt ein „Nachwort zu Hilberts algebraischen Arbeiten" von B. L. VAN DER WAERDEN. Von diesem knappen, aber gelungenen Nachwort stehe hier das folgende Zitat: „Von Hilberts algebraischen Arbeiten haben vorwiegend die Abhandlungen 16. „Über die Theorie der algebraischen Formen" und 19. „Über die vollen Invariantensysteme" einen umwälzenden Einfluß auf das algebraische Denken gehabt. Diese Arbeiten bilden den Abschluß von Hilberts invariantentheoretischen Untersuchungen; sie ragen aber in Methode und Bedeutung über den Bereich der Invariantentheorie weit hinaus. Ihr wesentlicher Kern, der in der zweiten Arbeit von HILBERT selbst bewußt formuliert wird, besteht in der Anwendung arithmetischer Methoden auf algebraischer Probleme... Indem HILBERT in diesen Abhandlungen den Invariantenkörper als Spezialfall eines Funktionenkörpers betrachtet, steht er am Wendepunkt einer historischen Entwicklung: Vor ihm war das Interesse der Algebraiker vorwiegend auf eine möglichst explizite Aufstellung aller Invarianten gegebener Grundformen gerichtet, nach ihm mehr auf die allgemeinen arithmetischen und algebraischen Eigenschaften von Systemen rationaler und algebraischer Funktionen. Aus diesem Gedankenkreis ist später in natürlicher Weise die allgemeine Theorie der abstrakten Körper, Ringe und Moduln erwachsen". Der Verfasser des Nachwortes bespricht dann die großen Erfolge, welche zahlreiche Forscher mit den Hilbertschen Methoden errungen haben. Die Besprechung endigt mit einem Verzeichnis der wichtigsten, durch HILBERT angeregten Arbeiten.

Das Werk „Grundlagen der Geometrie" wurde in diesem Band nicht abgedruckt, bis auf die Note „Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung" aus dem „Anhang". Aber eine Übersicht „Zu Hilberts Grundlegung der Geometrie“ von A. SCHMIDT reicht ein schönes Bild von den Hilbertschen Forschungen über die Grundlagen der Geometrie. Der Band enthält außerdem die geometrischen Abhandlungen Hilberts: Über die reellen Züge algebraischer Kurven. Über die Gestalt einer Fläche vierter Ordnung.

St. Lipka.

F. Bücking, Das bizentrische Viereck, eine Monographie, IV + 44 S. u. 6 Tafeln, Leipzig und Berlin, in Kommission bei B. G. Teubner, 1933.

Ein Viereck ist bizentrisch, wenn es Sehnenviereck in einem Kreise und zugleich Tangentenviereck an einen anderen Kreis ist. Die Mittelpunkte dieser beiden Kreise sind die Mittelpunkte des bizentrischen Vierecks. Zu einem bizentrischen Viereck gehört — nach dem bekannten Schließungssatz von PONCELET — eine unendliche Schar von bizentrischen Vierecken mit demselben Umkreis und Inkreis. Der Verfasser untersucht die verschiedenen, teilweise bekannten Eigenschaften des bizentrischen Vierecks mit elementargeometrischen Hilfsmitteln, besonders mit Hilfe von Inversionen. Ist p der Abstand der beiden Mittelpunkte, sind ferner ϱ bzw. r die Halbmesser des In- und Umkreises, so besteht zwischen p, ϱ und r eine Gleichung vierten Grades. Eine Hauptaufgabe ist diese Gleichung aufzustellen.

Der Verfasser hofft mit diesem Hefte besonders denen etwas zu bieten, die sich aus Liebhaberei mit Mathematik beschäftigen.

J. v. Sz. Nagy.

Ludwig Bieberbach, Vorlesungen über Algebra, unter Benutzung der dritten Auflage des gleichnamigen Werkes von GUSTAV BAUER in fünfter vermehrter Auflage dargestellt, X + 358 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1933.

Das vorliegende Buch ist eine zweite Auflage der Bieberbach—Bauerschen Algebra (Besprechung der ersten Auflage s. *diese Acta,* 4 (1928—29), S. 254). Der Verfasser legt in dieser Auflage ein größeres Gewicht auf die heutigen Gesichtspunkte der Algebra als in der ersten. Man findet in dem ersten Abschnitt unter anderen eine gute, besonders für den Anfänger bestimmte Einleitung in die moderne Körpertheorie. Dieser Abschnitt enthält auch den von GAUSZ, ARTIN und DÖRGE herrührenden Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Dieser Beweis ist, im Gegensatz zu den anderen, ein rein algebraischer Beweis dieses sogenannten funktionentheoretischen Satzes. Die übrigen Abschnitte zeigen nur unwesentliche Abänderungen gegenüber der ersten Auflage. Die Hinweise auf Originalarbeiten sind mit den neuesten ergänzt. Einige störende Druckfehler der ersten Auflage sind beseitigt.

St. Lipka.

Ein Satz über Zählausdrücke.

Von TH. SKOLEM in Bergen (Norwegen).

In einer Abhandlung „Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls“ [1]) hat K. GÖDEL u. a. den Satz bewiesen, daß zu jedem Zählausdruck Z ein anderer Z' gefunden werden kann, der zugleich mit Z erfüllbar oder widerspruchsvoll ist und außerdem die Form

$$(x_1, x_2, x_3)\,(Ey_1, \ldots, y_n)\,K(x_1, x_2, x_3, y_1, \ldots, y_n)$$

hat mit lauter ein- und zweistelligen Prädikaten in K.[2]) Nach mündlicher Mitteilung hatte auch L. KALMÁR in Szeged einen Beweis dieses Satzes gefunden, der aber nicht so einfach war wie der Gödelsche. Wenn ich unten einen weiteren Beweis dieses Satzes veröffentliche, so tue ich das, weil dieser Beweis mir noch wesentlich einfacher erscheint, und zwar aus folgenden Gründen: Erstens bekomme ich mit einem Schlage den neuen Ausdruck Z' und nicht erst durch allmähliche Verminderung der Zahl der Allzeichen wie GÖDEL. Zweitens ist die Anwendung des Satzes von LÖWENHEIM zur Bildung gleichwertiger Ausdrücke mit lauter zweistelligen Prädikaten für meinen Beweis nicht nötig. Der Satz, den ich beweisen will, lautet so:

Zu jedem Zählausdruck Z kann ein anderer Z' gefunden werden, der in bezug auf Erfüllbarkeit mit Z gleichwertig ist und als eine dreigliedrige Konjunktion $Z_1 \,\&\, Z_2 \,\&\, Z_3$ geschrieben werden kann, wobei Z_1, Z_2 und Z_3 bezw. die Form

$$(\xi_1)\,(E\xi_2, \ldots, \xi_h)\,K_1(\xi_1, \ldots, \xi_h), \quad (\xi_1, \xi_2)\,(E\xi_3, \ldots, \xi_k)\,K_2(\xi_1, \ldots, \xi_k),$$
$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,K_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

haben, und ausschließlich ein- und zweistellige Prädikate in den

[1]) *Monatshefte für Math. und Phys.*, 40 (1933), S. 433—443.

[2]) Statt $(x_1)(x_2)\ldots(x_m)$ schreibe ich kürzer $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und ebenso statt $(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n)$ immer $(Ey_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Kernen K_1, K_2, K_3 *vorkommen. Übrigens kann der Ausdruck* Z_2 *auch geschrieben werden als eine Konjunktion mit k Gliedern, deren Präfixe alle die Form* $(\xi_1, \xi_2)(E\eta)$ *besitzen.*

Beweis. Natürlich kann ich annehmen, daß der gegebene Ausdruck Z schon die Form $(x_1, \ldots, x_m)(Ey_1, \ldots, y_n) K(x_1, \ldots, y_n)$ hat; denn wie ich einmal früher bewiesen habe, gibt es zu jedem willkürlich gegebenen Zählausdruck einen gleichwertigen von dieser Gestalt.[3]) Ich kann auch annehmen, daß im Kern K höchstens m-stellige Prädikate vorkommen.[4]) Sollten nämlich auch $(m+1)$-$, \ldots, m+h=m'$-stellige Prädikate in K vorkommen, so kann ich Z auch in der Form

$$(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m'})(Ey_1, \ldots, y_n) K(x_1, \ldots, x_{m'}, y_1, \ldots, y_n)$$

schreiben, wobei K hier speziell von $x_{m+1}, \ldots, x_{m'}$ unabhängig ist; d. h. man hat einen Sonderfall der Aussage der Form

$$(x_1, \ldots, x_{m'})(Ey_1, \ldots, y_n) K(x_1, \ldots, x_{m'}, y_1, \ldots, y_n)$$

mit höchstens m'-stelligen Prädikaten in K. Weiter wird es bequem sein, sich auf den Fall zu beschränken, daß in K ausschließlich m-stellige Prädikate auftreten, wenn m Allzeichen im Präfix vorkommen. Daß auch das möglich ist, erkennt man so: Kommt etwa in K ein r-stelliges Prädikat $A(z_1, \ldots, z_r)$ vor, $r<m$, wobei $z_1, \ldots, z_r$ also r verschiedene oder (teilweise) gleiche der Variablen $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ darstellen, so kann ich statt $A(z_1, \ldots, z_r)$ schreiben $A(z_1, \ldots, z_r, \ldots, z_r)$ mit m Argumenten. Mittels solcher Umformungen erhält man einen Ausdruck Z der Form

$$(1) \qquad (x_1, \ldots, x_m)(Ex_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) K(x_1, \ldots, x_{m+n}),$$

wobei in K jetzt ausschließlich m-stellige Prädikate vorkommen. Diese seien

$$A_1, A_2, \ldots, A_l.$$

Nun sei $\mathfrak{B}$ ein Individuenbereich, worin (1) erfüllt ist. Der Bereich aller geordneten m-tupel aus $\mathfrak{B}$ heiße $\mathfrak{B}^m$. Dann gilt in $\mathfrak{B}^m$ die Aussage

$$(2) \qquad (\xi_1)(E\xi_2, \ldots, \xi_M)(K(\xi_1, \ldots, \xi_M) \& \mathfrak{F}_0(\xi_1, \ldots, \xi_M)),$$

---

[3]) Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze etc., *Videnskapsselskapets skrifter, I. Mat. Naturv. Klasse*, Oslo 1920, No. 4, insb. S. 4.

[4]) Wollte man den erwähnten Satz von Löwenheim anwenden, so konnte man annehmen, daß höchstens zweistellige Prädikate in K vorkämen; allein das hat hier keinen Zweck. Im Gegenteil wird dieser Löwenheimsche Satz mittels der folgenden Überlegungen zugleich mit bewiesen.

wobei ξ_1 ein beliebiges m-tupel $x_1, \ldots, x_m$ sein kann, und $\xi_2, \ldots, \xi_M$ die übrigen m-tupel sind, die als Argumentreihen der Prädikate A in $K(x_1, \ldots, x_{m+n})$ auftreten; weiter ist $\mathfrak{F}_0$ die Konjunktion aller gültigen Aussagen der Form $F_{ij}(\xi_a, \xi_b)$, wobei $F_{ij}(\xi_a, \xi_b)$ bedeutet, daß das i^{te} Glied des m-tupels ξ_a mit dem j^{ten} des m-tupels ξ_b übereinstimmt. In $K(\xi_1, \ldots, \xi_M)$ treten jetzt nur einstellige Prädikate auf. Zur Erläuterung gebe ich ein Beispiel. Der gegebene Ausdruck (1) sei

$$(1')\quad \begin{aligned} &(x_1, x_2)(Ex_3)\big((A(x_1, x_2) \mathbin{\&} \bar{A}(x_2, x_1)) \vee \\ &\qquad \vee A(x_1, x_3) \vee \bar{A}(x_2, x_3) \vee A(x_3, x_3)\big). \end{aligned}$$

Dann wird (2) das Aussehen haben

$$(2')\quad \begin{aligned} &(\xi_1)(E\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)\{[(A(\xi_1) \mathbin{\&} \bar{A}(\xi_2)) \vee A(\xi_3) \vee \bar{A}(\xi_4) \vee A(\xi_5)] \mathbin{\&} \\ &\mathbin{\&} F_{21}(\xi_1, \xi_2) \mathbin{\&} F_{12}(\xi_1, \xi_2) \mathbin{\&} F_{11}(\xi_1, \xi_3) \mathbin{\&} F_{21}(\xi_1, \xi_4) \mathbin{\&} \\ &\mathbin{\&} F_{21}(\xi_2, \xi_3) \mathbin{\&} F_{11}(\xi_2, \xi_4) \mathbin{\&} F_{22}(\xi_3, \xi_4) \mathbin{\&} F_{21}(\xi_3, \xi_5) \mathbin{\&} \\ &\qquad \mathbin{\&} F_{22}(\xi_3, \xi_6) \mathbin{\&} F_{21}(\xi_4, \xi_6) \mathbin{\&} F_{22}(\xi_4, \xi_5)\}. \end{aligned}$$

Man kann aber in (2′) einige der konjunktiven Glieder mit den Prädikaten F entfernen, wenn man, wie ich es im folgenden mache, zu (2′) und allgemein zu (2) die Aussage hinzufügt, welche die Gesamtheit der m-tupel und die Funktionen F charakterisiert. Diese Aussage ist

$$(3)\quad \begin{aligned} &(\eta_1, \eta_2)\mathfrak{F}_1(\eta_1, \eta_2) \mathbin{\&} (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\mathfrak{F}_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \mathbin{\&} \\ &\qquad \mathbin{\&} (\xi)(E\eta_1, \ldots, \eta_m)\mathfrak{F}_3(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_m) \mathbin{\&} \\ &\mathbin{\&} (\xi_1, \xi_2)(E\eta_1, \ldots, \eta_m)\mathfrak{F}_4(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \ldots, \eta_m) \mathbin{\&} (\eta_1, \eta_2)\mathfrak{F}_5(\eta_1, \eta_2), \end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{F}_1$ die Konjunktion aller Aussagen $F_{ij}(\eta_1, \eta_2) \sim F_{ji}(\eta_2, \eta_1)$ für $i, j = 1, 2, \ldots, m$ ist, $\mathfrak{F}_2$ die Konjunktion aller Aussagen $F_{ih}(\eta_1, \eta_2) \mathbin{\&} F_{hj}(\eta_2, \eta_3) \rightarrow F_{ij}(\eta_1, \eta_3)$ für $i, h, j = 1, 2, \ldots, m$, $\mathfrak{F}_3$ die Konjunktion der Aussagen $F_{i1}(\xi, \eta_i)$, $\mathfrak{F}_4$ die Konjunktion der Aussagen $F_{11}(\xi_1, \eta_i) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} F_{i-1, i-1}(\xi_1, \eta_i) \mathbin{\&} F_{1i}(\xi_2, \eta_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, m$ und endlich $\mathfrak{F}_5$ die Konjunktion der Aussagen $F_{11}(\eta_1, \eta_2) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&}$ $\mathbin{\&} F_{mm}(\eta_1, \eta_2) \rightarrow (A_j(\eta_1) \sim A_j(\eta_2))$ für $j = 1, 2, \ldots, l$. Aus der Wahrheit von (1) in $\mathfrak{B}$ bei passender Wahl der Funktionen A folgt also die Wahrheit der Konjunktion von (2) und (3) in $\mathfrak{B}^m$, d. h. die Wahrheit von

$$(4)\quad \begin{aligned} &(\xi_1)(E\xi_2, \ldots, \xi_M)(K(\xi_1, \ldots, \xi_M) \mathbin{\&} \mathfrak{F}_0(\xi_1, \ldots, \xi_M)) \mathbin{\&} \\ &\qquad \mathbin{\&} (\eta_1, \eta_2)\mathfrak{F}_1(\eta_1, \eta_2) \mathbin{\&} (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\mathfrak{F}_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \mathbin{\&} \\ &\qquad\qquad \mathbin{\&} (\xi)(E\eta_1, \ldots, \eta_m)\mathfrak{F}_3(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_m) \mathbin{\&} \\ &\mathbin{\&} (\xi_1, \xi_2)(E\eta_1, \ldots, \eta_m)\mathfrak{F}_4(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \ldots, \eta_m) \mathbin{\&} (\eta_1, \eta_2)\mathfrak{F}_5(\eta_1, \eta_2). \end{aligned}$$

Nun ist (4) wieder ein Zählausdruck, wenn die darin vorkommenden Prädikate A und F als variable Satzfunktionen betrachtet werden. Ich werde nun zeigen, daß wenn (4) in einem Bereiche $\mathfrak{B}_1$ erfüllt ist bei passender Wahl der Funktionen A und F, auch (1) erfüllt ist in einem gewissen Bereiche $\mathfrak{B}_2$, der aus $\mathfrak{B}_1$ in einer Weise abgeleitet ist, die ich näher erklären werde.

Um das zu zeigen, bemerke ich zuerst, daß aus (4), nämlich schon aus

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\, \mathfrak{F}_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\, \&\, (\xi_1, \xi_2)\, (E\eta_1, \ldots, \eta_m)\, \mathfrak{F}_4(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \ldots, \eta_m)$$

für alle $s \leqq m$

$$(5) \qquad (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)\, (E\eta)\big(F_{11}(\xi_1, \eta)\, \&\, F_{12}(\xi_2, \eta)\, \&\, \ldots\, \&\, F_{1s}(\xi_s, \eta)\big)$$

folgt. Denn schon aus

$$(\xi_1, \xi_2)\, (E\eta_1, \ldots, \eta_m)\, \mathfrak{F}_4(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \ldots, \eta_m)$$

folgt ja erstens $(\xi_1, \xi_2)\, (E\eta)\, F_{11}(\xi_2, \eta)$, woraus $(\xi)\, (E\eta)\, F_{11}(\xi, \eta)$, d. h. (5) gilt für $s = 1$. Nun nehme ich an, daß (5) für ein gewisses $s < m$ gilt. Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s+1}$ beliebige Individuen in $\mathfrak{B}_1$. Nach der Annahme gibt es dann ein η derart, daß

$$(6) \qquad F_{11}(\xi_1, \eta)\, \&\, \ldots\, \&\, F_{1s}(\xi_s, \eta)$$

gilt. Aus

$$(\xi_1, \xi_2)\, (E\eta_1, \ldots, \eta_m)\, \mathfrak{F}_4(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \ldots, \eta_m)$$

folgt aber, wenn man η statt ξ_1 und ξ_{s+1} statt ξ_2 einsetzt, daß es ein ζ gibt, so daß

$$(7) \qquad F_{11}(\eta, \zeta)\, \&\, F_{22}(\eta, \zeta)\, \&\, \ldots\, \&\, F_{ss}(\eta, \zeta)\, \&\, F_{1, s+1}(\xi_{s+1}, \zeta).$$

Aus (6) und (7) folgt aber unter Berücksichtigung der Aussage $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\, \mathfrak{F}_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ sofort

$$F_{11}(\xi_1, \zeta)\, \&\, \ldots\, \&\, F_{1s}(\xi_s, \zeta)\, \&\, F_{1, s+1}(\xi_{s+1}, \zeta),$$

wodurch die Richtigkeit von (5) für $s+1$ erkannt ist. Also gilt (5) für alle $s \geqq 1$ und $\leqq m$ und also speziell für $s = m$, was im folgenden benutzt wird.

Wegen der Symmetrie und der Transitivität der Beziehung F_{rr} $(r = 1, 2, \ldots, m)$ kann man alle Individuen von $\mathfrak{B}_1$ in bekannter Art in Klassen einteilen; ich nenne sie die r-Klassen. Die Menge der 1-Klassen soll $\mathfrak{B}_2$ heißen. Auch die r-Klassen mit $r > 1$ können durch die 1-Klassen dargestellt werden im folgenden Sinne: Zu einer r-Klasse, wozu ξ gehört, wird stets und nur dann die 1-Klasse, wozu η gehört, zugeordnet, wenn $F_{r1}(\xi, \eta)$ wahr ist. Offenbar ist dies möglich, weil diese Zuordnung von der Wahl der Elemente ξ und η unabhängig ist. Dann besteht aber eine gegenseitige Zuordnung zwischen den Individuen von $\mathfrak{B}_1$ einerseits und den geordneten m-tupeln der Individuen von $\mathfrak{B}_2$ andererseits, die in folgender Weise erklärt werden kann.

Es sei $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ein m-tupel von Elementen aus $\mathfrak{B}_2$. Dann ist x_r, $r = 1, 2, \ldots, m$, eine 1-Klasse von Elementen des Bereiches $\mathfrak{B}_1$; es sei ξ_r ein Element dieser Klasse. Nach dem eben bewiesenen Hilfssatze gibt es dann ein Element η von $\mathfrak{B}_1$ derart, daß $F_{11}(\xi_1, \eta) \& \ldots \& F_{1m}(\xi_m, \eta)$ stattfindet. Ich sage, daß η dem m-tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ zugeordnet ist. Ist umgekehrt das Element ξ von $\mathfrak{B}_1$ beliebig gegeben, so gibt es ein eindeutig bestimmtes m-tupel $(x_1, \ldots, x_m)$, wozu ξ in diesem Sinne zugeordnet ist; denn zufolge

$$(\xi)(E\eta_1, \ldots, \eta_m)(F_{11}(\xi, \eta_1) \& \ldots \& F_{m1}(\xi, \eta_m))$$

gibt es 1-Klassen, nämlich die durch solche Elemente $\eta_1, \ldots, \eta_m$ gegebenen — sie können wieder $x_1, \ldots, x_m$ heißen —, so daß ξ zugeordnet $(x_1, \ldots, x_m)$ ist. Zu jedem ξ aus $\mathfrak{B}_1$ ist in dieser Weise ein eindeutig bestimmtes m-tupel aus $\mathfrak{B}_2$ zugeordnet. Umgekehrt können zu einem m-tupel wohl mehrere ξ gehören; allein diese stehen zu einander in der Beziehung $F_{11} \& F_{22} \& \ldots \& F_{mm}$, woraus wegen der Gültigkeit von $(\eta_1, \eta_2)\mathfrak{F}_5(\eta_1, \eta_2)$ offenbar folgt, daß wenn $\Phi(\xi)$ irgendein Prädikat ist, das aus den A_j und den F_{ij} ableitbar ist, $\Phi(\xi)$ denselben Wahrheitswert hat für alle diesen ξ. Sie können deshalb ohne Schaden identifiziert werden. Wird das gemacht, so hat man also eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Individuen ξ von $\mathfrak{B}_1$ und den m-tupeln der Individuen von $\mathfrak{B}_2$.

Übrigens kann man auch so sagen: Die Elemente von $\mathfrak{B}_1$ können in Klassen eingeteilt werden, wobei zwei Elemente zu derselben bzw. zu verschiedenen Klassen gerechnet werden, je nachdem die Beziehung $F_{11} \& F_{22} \& \ldots \& F_{mm}$ zwischen beiden Elementen stattfindet oder nicht. Die Menge dieser Klassen heiße $\mathfrak{B}_1'$. Dann gilt (4) auch für $\mathfrak{B}_1'$, wenn man festsetzt, daß $A_j(\xi')$, wo ξ' ein beliebiges Element von $\mathfrak{B}_1'$ ist, dann und nur dann gilt, wenn $A_j(\xi)$ gilt in $\mathfrak{B}_1$ für ein Individuum ξ der Klasse ξ'. Ebenso soll $F_{ij}(\xi', \eta')$ dann und nur dann gelten, wenn $F_{ij}(\xi, \eta)$ gilt in $\mathfrak{B}_1$ für Individuen ξ und η der Klassen ξ' und η'. Dies ist ja alles möglich, weil zufolge $(\eta_1, \eta_2)\mathfrak{F}_5(\eta_1, \eta_2)$ der Wahrheitswert von $A_j(\xi)$ derselbe ist für alle ξ, die zu derselben Klasse ξ' gehören, und ebenso ist der Wahrheitswert von $F_{ij}(\xi, \eta)$ derselbe für alle ξ, η aus den Klassen ξ', η'. Zwischen den Individuen von $\mathfrak{B}_1'$ und den m-tupeln der Individuen von $\mathfrak{B}_2$ hat man dann eine gegenseitig eindeutige Zuordnung.

Aus dem angenommenen Erfülltsein von (4) in $\mathfrak{B}_1$ folgt nun u. a. die Wahrheit von

$$(8) \qquad (\xi_1)(E\xi_2, \ldots, \xi_M)(K(\xi_1, \ldots, \xi_M) \mathbin{\&} \mathfrak{F}_0(\xi_1, \ldots, \xi_M))$$

in $\mathfrak{B}_1$ — und also, wenn man will, in $\mathfrak{B}_1'$ —, und daraus ist es jetzt leicht durch eine Übersetzung die Gültigkeit von (1) in $\mathfrak{B}_2$ abzuleiten. Sind nämlich $x_1, \ldots, x_m$ beliebige Individuen in $\mathfrak{B}_2$, so kann man ξ_1 als das Element von $\mathfrak{B}_1$ — oder wenn man will $\mathfrak{B}_1'$ — wählen, das dem m-tupel $(x_1, \ldots, x_m)$ entspricht. Nach (8) gibt es dann weitere Elemente $\xi_2, \ldots, \xi_M$ von $\mathfrak{B}_1$, für welche sowohl $\mathfrak{F}_0(\xi_1, \ldots, \xi_M)$ wie $K(\xi_1, \ldots, \xi_M)$ stattfinden. Aber $\mathfrak{F}_0$ bedeutet, daß die Elemente $\xi_2, \ldots, \xi_M$ eben denjenigen m-tupeln entsprechen, die in (1) auftreten und von $x_1, \ldots, x_m$ und gewissen anderen Elementen $x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ gebildet sind. Infolgedessen muß (1) wahr werden in $\mathfrak{B}_2$, wenn man $A_j(\xi)$ als $A_j(z_1, \ldots, z_m)$ schreibt, so oft das m-tupel $(z_1, \ldots, z_m)$ dem ξ entspricht.

Hierdurch ist also bewiesen, daß (4) mit (1) in bezug auf Erfüllbarkeit gleichwertig ist. Nach dem Satze

$$(x)A(x) \mathbin{\&} (y)B(y) \sim (x)(A(x) \mathbin{\&} B(x))$$

kann man aber augenscheinlich das erste und vierte konjunktive Glied in (4) und ebenso das zweite, dritte und sechste Glied darin derart zusammenziehen, daß man eine dreigliedrige Konjunktion von der im Satze erwähnten Form bekommt. Andererseits kann das fünfte Glied als eine Konjunktion mit m Gliedern geschrieben werden, deren Präfixe die Form $(\xi_1, \xi_2)(E\eta)$ haben. Es kann nämlich so geschrieben werden:

$$\begin{aligned}(\xi_1, \xi_2)(E\eta_1)F_{11}(\xi_2, \eta_1) \mathbin{\&} (\xi_1, \xi_2)(E\eta_2)(F_{11}(\xi_1, \eta_2) \mathbin{\&} F_{12}(\xi_2, \eta_2)) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} (\xi_1, \xi_2)(E\eta_m)(F_{11}(\xi_1, \eta_m) \mathbin{\&} F_{22}(\xi_1, \eta_m) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} F_{m-1, m-1}(\xi_1, \eta_m) \mathbin{\&} F_{1m}(\xi_2, \eta_m)).\end{aligned}$$

Der Satz ist also jetzt vollständig bewiesen.

Wenn man will, kann man auch die dreigliedrige Konjunktion $Z_1 \mathbin{\&} Z_2 \mathbin{\&} Z_3$ zusammenziehen zu einem Zählausdruck der Form

(9) $$(x_1, x_2, x_3)(Ey_1, \ldots, y_n) K(x_1, x_2, x_3, y_1, \ldots, y_n),$$

d. h. man bekommt den Gödelschen Satz.

Wendet man den hier bewiesenen Satz wiederum auf (9) an, so erkennt man, daß (9) mit einer 5-gliedrigen Konjunktion gleichwertig ist, deren 1^{tes} bezw. 2^{tes}, 3^{tes}, 4^{tes} bezw. 5^{tes} Glied Präfixe der Formen $(x)(Ey_1, \ldots, y_n)$ bezw. $(x_1, x_2)(Ey)$ bezw. (x_1, x_2, x_3) haben. Also ist jeder Zählausdruck mit einem Ausdruck der letzten Gestalt gleichwertig.

(Eingegangen am 15. April 1935.)

Einige Sätze über topologische Flächenabbildungen.

Von Jakob Nielsen in Kopenhagen.

(Aus einem Briefe an Herrn B. v. Kerékjártó)

Satz I: *Eine topologische Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich, die jede einfache geschlossene Kurve homotop transformiert, gehört zur Klasse der Identität.*

Beweis. Sei φ die Fläche vom Geschlecht $p(>1)$, $a_1, b_1; \ldots, a_p, b_p$ mit der Relation $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = 1$ ein kanonisches Schnittsystem. Sei Φ die universelle Überlagerungsfläche, dargestellt durch die hyperbolische Ebene, die konform auf das Innere eines Kreises E abgebildet sei. Sei $\tau\varphi$ die gegebene Abbildung und $t\Phi$ irgend eine überlagernde Abbildung von Φ. Bei dem zugehörigen Automorphismus J der Fundamentalgruppe F gilt dann wegen der Erhaltung der Homotopie $a_1 \to f_1 a_1 f_1^{-1}$, wobei f_1 ein gewisses Element von F ist. Wir ersetzen dann $t\Phi$ durch $f_1^{-1} t\Phi = t_1\Phi$, welches ebenfalls $\tau\varphi$ überlagert, und haben bei dem zugehörigen Automorphismus $J_1 : a_1 \to a_1$; also endigt die Achse des Elementes a_1 in Fixpunkten von $t_1 E$. Für b_1 gilt bei $J_1 : b_1 \to f_2 b_1 f_2^{-1}$ für ein gewisses f_2 aus F. Da aber das Bild der Achse von b_1 notwendig die Achse von a_1 schneiden muß, kommt für f_2 nur eine Potenz a_1^m in Frage. Wir ersetzen dann weiter t_1 durch $t_2 = a_1^{-m} t_1$ und haben bei dem zugehörigen Automorphismus $J_2 : a_1 \to a_1$, $b_1 \to b_1$, also $k_1 \to k_1$, wobei $k_1 = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ gesetzt ist. Die Achsen von b_1 und k_1 liegen wie in Fig. 1, und ihre Endpunkte sind Fixpunkte bei $t_2 E$. Nun ersetzen wir die übrigen $2(p-1)$ Erzeugenden $a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p$ durch die Erzeugenden

$$\begin{aligned} a'_\nu &= a_1^{-1} a_\nu^{-1} \\ b'_\nu &= a_1^{-1} b_\nu \end{aligned} \qquad \nu = 2, 3, \ldots, p,$$

indem diese Elemente a'_ν, b'_ν wieder Kurventypen ohne Doppelpunkte entsprechen. Die Achsen dieser Elemente in Φ verlaufen alle so, daß sie auf dem Teilbogen i von E beginnen und auf dem Teilbogen j endigen. (s. Fig. 1.) Wenn nun die Endpunkte der Achse beispielsweise von a'_2 nicht Fixpunkte von $t_2 E$ wären, so müßte beim unbegrenzten Iterieren der Abbildung $t_2(\Phi + E)$ der Anfangspunkt gegen einen Punkt X des (abgeschlossenen) Bogens i und der Endpunkt gegen einen Punkt Y des Bogens j

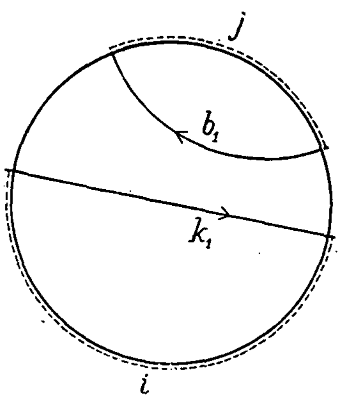


Fig. 1.

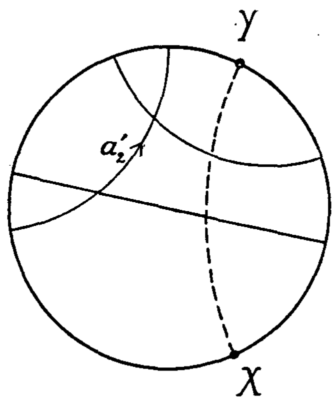


Fig. 2.

konvergieren, die Achsen der Elementfolge a'_2, $(a'_2)_{J_2}$, $(a'_2)_{J_2^2}, \ldots,$ die a'_2 bei J_2 und seinen Potenzen entspricht, müßten also gegen den zu E orthogonalen Kreisbogen XY konvergieren und andererseits bezüglich F äquivalent sein, weil der zugehörige Kurventypus auf φ homotop transformiert wird. (s. Fig. 2.) *Das ist unmöglich, weil sich äquivalente Achsen im Inneren von Φ nicht häufen.* Also hat man bei J_2 auch $a'_2 \to a'_2, \ldots, b'_p \to b'_p$. Dann läßt aber J_2 ein Erzeugendensystem der Gruppe F fest und ist daher der identische Automorphismus, womit die Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung. Daß es nicht etwa genügt, die Erhaltung des Homotopiecharakters nur für die Kurven eines kanonischen Schnittsystems vorauszusetzen, zeigt der schon für $p = 2$ mit der obigen Bedeutung von k_1 zu bildende Automorphismus

$$a_1 \to a_1,\ b_1 \to b_1,\ a_2 \to k_1 a_2 k_1^{-1},\ b_2 \to k_1 b_2 k_1^{-1},$$

dem nicht die Abbildungsklasse der Identität entspricht.

Satz II: *Unter allen geschlossenen orientierbaren Flächen hat nur der Torus die Eigenschaft, solche topologischen Selbstabbildungen zuzulassen, die mit allen Potenzen fixpunktfrei sind. Unter den ersten $2p$ Potenzen einer indikatrixerhaltenden topologischen Selbstabbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p>1$ hat mindestens eine einen Fixpunkt.*

Beweis. Daß der Torus Abbildungen der genannten Art zuläßt, ist klar. Da die geraden Potenzen einer indikatrixumkehrenden Abbildung indikatrixerhaltend sind, beschränken wir uns auf die letzteren. Dann haben die Abbildungen der Kugel nach dem Satz von BROUWER stets Fixpunkte. Man hat also den letzten Teil des obigen Satzes zu beweisen, und hierzu kommt man mit der Formel von J. W. ALEXANDER aus, wie folgende einfache Überlegung zeigt.

Es sei φ eine geschlossene Fläche vom Geschlecht $p>1$, $\tau\varphi$ eine topologische indikatrixerhaltende Selbstabbildung, J ein Automorphismus aus der zu τ gehörigen Automorphismenfamilie, der mittels des in Satz I benutzten Erzeugendensystems ausgedrückt sei, Γ die zu J gehörige Exponentensummenmatrix aus $2p$ Zeilen und Spalten, E_{2p} die entsprechende Einheitsmatrix, s_r die Spur von Γ^r und

$$|\Gamma-\lambda E_{2p}|=\lambda^{2p}+a_1\lambda^{2p-1}+a_2\lambda^{2p-2}+\ldots+a_{2p-1}\lambda+a_{2p}=\gamma(\lambda)$$

das Polynom, dessen Wurzeln die Eigenwerte von Γ sind. Dann ist s_r die Summe der r-ten Potenzen der Wurzeln von $\gamma(\lambda)$, also in bekannter Weise mit den Koeffizienten verbunden:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & s_1+a_1=0 \\
(2) & s_2+a_1s_1+2a_2=0 \\
(3) & s_3+a_1s_2+a_2s_1+3a_3=0 \\
(4) & s_4+a_1s_3+a_2s_2+a_3s_1+4a_4=0 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(2p) & s_{2p}+a_1s_{2p-1}+a_2s_{2p-2}+\ldots+a_{2p-1}s_1+2pa_{2p}=0
\end{array}
$$

und weiter für $m=1,2,\ldots$

$$(2p+m)\qquad s_{2p+m}+a_1s_{2p+m-1}+\ldots+a_{2p}s_m=0.$$

Nun hat die Summe der Indizes der Fixpunkte von τ^r nach ALEXANDER den Wert $2-s_r$. Als notwendige Bedingung dafür, daß τ^r fixpunktfrei ist, hat man daher $s_r=2$. Angenommen nun, $s_1, s_2, \ldots, s_{2p}$ hätten alle den Wert 2, so folgt der Reihe nach

$$\begin{array}{lll} a_1 = -2 & & \text{aus } (1) \\ a_2 = 1 & & \text{aus } (2) \\ a_3 = 0 & & \text{aus } (3) \\ a_4 = 0 & & \text{aus } (4) \\ \cdots & & \cdots \\ a_{2p} = 0 & & \text{aus } (2p). \end{array}$$

a_{2p} ist aber die Determinante von Γ und hat bekanntlich den Wert $+1$; und a_{2p} ist nicht a_2, da $p > 1$ vorausgesetzt wurde. Hieraus folgt die Behauptung.

Zusatz. Wenn eine Potenz von τ zur Abbildungsklasse der Identität gehört, so kommt schon unter den ersten $2p-2$ Potenzen von τ mindestens eine vor, die Fixpunkte hat.

Denn wenn eine Potenz τ^n zur Klasse der Identität gehört, ist $\Gamma^n = E_{2p}$. Folglich sind die Wurzeln von $\gamma(\lambda)$ Einheitswurzeln, also entweder ± 1 oder paarweise konjugiert komplex und damit zugleich zu einander reziprok. Die Koeffizienten von $\gamma(\lambda)$ erfüllen dann die Bedingung $a_q = a_{2p-q}$ für $q = 1, 2, \ldots$ Wäre nun $s_1 = s_2 = \ldots = s_{2p-2} = 2$, so ergäbe sich in derselben Weise wie oben $a_2 = 1$, $a_{2p-2} = 0$ im Widerspruch zur Reziprozitätsbedingung.

Bemerkung. Durch Ausnutzung dieser algebraischen Hilfsmittel lassen sich Abschätzungen dieser Art leicht weitertreiben, worauf ich hier nicht näher eingehe. Ich weise nur auf den Zusammenhang mit meiner im Band 58 der *Acta Mathematica* enthaltenen Abhandlung hin. Für Abbildungsklassen endlicher Ordnung ergeben sich dabei z. B. Abschätzungen der Ordnung in Übereinstimmung mit den Abschätzungen, die man für die Ordnungen birationaler Transformationen einer algebraischen Riemannschen Fläche von einem Geschlecht größer als 1 kennt. Abschätzungen der letztgenannten Art und explizite Ordnungsbestimmungen lassen sich also mit rein topologischen Mitteln erreichen, ohne daß man auf die Struktur der Riemannschen Fläche einzugehen braucht.

Satz III: *Die mit allen Potenzen fixpunktfreien, indikatrixerhaltenden topologischen Selbstabbildungen eines Torus zerfallen in unendlichviele Abbildungsklassen.*

Beweis. Aus dem Beweis von Satz II ergibt sich, daß diese Abbildungen den Werten $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, also dem charakteristischen Polynom

$$\gamma(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

entsprechen müssen. Es sei

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

eine Matrix dieser Art. Dabei hat man die vier ganzen Zahlen a, b, c, d so zu wählen, daß $-bc$ eine Quadratzahl und $a = 1 \pm \sqrt{-bc}$, $d = 1 \mp \sqrt{-bc}$ ist. Dann ist $a + d = 2$ und $ad - bc = 1$. Die Matrix Γ erfüllt die dem charakteristischen Polynom entsprechende Gleichung

$$(1) \qquad (\Gamma - E)^2 = 0, \qquad E = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

die man in

$$\Gamma^2 - E = 2(\Gamma - E)$$

umformt und durch vollständige Induktion zu

$$(2) \qquad \Gamma^n - E = n(\Gamma - E)$$

erweitert.

Nun betrachte man in der xy-Ebene die Transformation

$$(t) \qquad \begin{aligned} x &\to ax + cy + \alpha, \\ y &\to bx + dy + \beta. \end{aligned}$$

Wenn man diese iteriert, so erhält man in Matrizenschreibweise

$$\begin{aligned} \{x \quad y\} &\to \{x \quad y\}\,\Gamma + \{\alpha \quad \beta\}\,E \\ &\to \{x \quad y\}\,\Gamma^2 + \{\alpha \quad \beta\}\,(\Gamma + E) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\to \{x \quad y\}\,\Gamma^n + \{\alpha \quad \beta\}\,(\Gamma^{n-1} + \Gamma^{n-2} + \ldots + \Gamma + E). \end{aligned}$$

Unter Benutzung von (2) hat man also, wenn man den Bildpunkt von x, y bei t^n mit x_n, y_n bezeichnet, für t^n die Darstellung

$$(t^n) \quad \{x_n \ y_n\} = \{x \ y\}[n(\Gamma - E) + E] + \{\alpha \ \beta\}\left[\frac{n(n-1)}{2}(\Gamma - E) + nE\right].$$

Setzt man

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_n &= x + p, \\ y_n &= y + q, \end{aligned}$$

wobei die Größen p und q von x, y und n abhängen, so erhält man aus (t^n)

$$(4) \quad \{p \ q\} - n\{\alpha \ \beta\} = \left[n\{x \ y\} + \frac{n(n-1)}{2}\{\alpha \ \beta\}\right](\Gamma - E).$$

Wegen (1) hat nun $\Gamma - E$ die Determinante 0; es gibt also zwei nicht beide verschwindende ganze Zahlen r und s derart, daß

$$(\Gamma-E)\begin{Bmatrix} r \\ s \end{Bmatrix}=0.$$

Also erhält man aus (4)

$$(5)\qquad 0=\{p-n\alpha \quad q-n\beta\}\begin{Bmatrix} r \\ s \end{Bmatrix}=rp+sq-n(r\alpha+s\beta).$$

Wenn man nun die in der Transformation *(t)* verfügbaren Konstanten α und β so wählt, daß α, β und 1 rational unabhängig sind, so können p und q in (5) für kein $n \neq 0$ zugleich ganz sein. Auf dem aus der xy-Ebene modulo 1 gebildeten Torus stellt also t eine topologische indikatrixerhaltende Transformation dar, die wegen (3) mit allen Potenzen fixpunktfrei ist. Jeder neuen Wahl von Γ in Übereinstimmung mit den oben genannten Bedingungen entspricht dabei eine neue Abbildungsklasse.

Bemerkung. Ist $\Gamma \neq E$, so zeigt (2), daß in Γ^n mit wachsendem n Zahlen von beliebig großen absoluten Beträgen vorkommen. Folglich wird mindestens eine der beiden auf dem Torus geschlossenen Kurven $0 \leqq x \leqq 1$, $y=0$ und $x=0$, $0 \leqq y \leqq 1$ durch die Potenzen der Abbildung auf Bildkurven abgebildet, deren Längen mit wachsendem Exponenten unbegrenzt steigen. Durch die von Ihnen im Band **7** der *Acta Sc. Math.*, Szeged, S. 70 benutzte Schlußweise ergibt sich dann, daß die Abbildung nicht regulär sein kann. Für Abbildungen, die mit allen Potenzen fixpunktfrei und überdies regulär sein sollen, muß somit Γ die Einheitsmatrix sein in Übereinstimmung mit Ihrem Satz l. c., S. 76.

(Eingegangen am 4. Juni 1935.)

Bemerkung über reguläre Abbildungen von Flächen.

Von B. VON KERÉKJÁRTÓ in Szeged.

Auf Grund des Satzes II der vorangehenden Abhandlung des Herrn J. NIELSEN[1]) läßt sich die Periodizität der regulären Abbildungen von orientierbaren geschlossenen Flächen vom Geschlecht $p > 1$ auf sich folgendermaßen einfach nachweisen.

Nach dem angeführten Satz von NIELSEN hat mindestens eine unter den ersten $2p$ Potenzen einer indikatrixerhaltenden topologischen Selbstabbildung einer orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht $p > 1$ einen Fixpunkt. Nach dem Satz 2 meiner Arbeit „Über reguläre Abbildungen von Flächen auf sich"[2]) ist jede reguläre Selbstabbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p \geqq 1$, mit wenigstens einem Fixpunkt, periodisch. Da die Potenzen einer regulären Abbildung ebenfalls regulär sind, so ergibt sich aus diesen beiden Sätzen unmittelbar, daß jede reguläre Selbstabbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ periodisch ist.

Bei dieser Gelegenheit bemerke ich, daß die auf S. 69 (Zeile 14—18) meiner erwähnten Arbeit enthaltene Behauptung, die zum Beweis des Satzes 3 verwendet wurde, auf die folgende (aus dem Beweisgang ersichtliche) Weise ergänzt werden muß: Eine von der Identität verschiedene indikatrixerhaltende periodische Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich, die mindestens einen Fixpunkt besitzt, transformiert keinen d u r c h d e n F i x p u n k t g e h e n d e n Rückkehrschnitt homotop.[3]) Die Homotopie wird dabei unter Festhaltung des Fixpunktes verstanden.[4])

(Eingegangen am 5. Juni 1935.)

---

[1]) J. NIELSEN, Einige Sätze über topologische Flächenabbildungen, *diese Acta,* 7 (1935), S. 200—205.

[2]) *diese Acta,* 7, S. 65—75; insbesondere S. 67.

[3]) Auf dieses Versehen in meinem Text machte mich Herr NIELSEN aufmerksam.

[4]) vgl. meine *Vorlesungen über Topologie* (Berlin, 1923), S. 178.

Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome.

Von GÉZA GRÜNWALD in Szeged.

Einleitung.

PAUL DU BOIS REYMOND hat das erste Beispiel einer stetigen (und nach 2π periodischen) Funktion angegeben, deren Fouriersche Reihe an *gewissen* Stellen divergiert[1]). Einfachere Beispiele stammen von SCHWARZ[2]) und LEBESGUE[3]). Die einfachsten, explizite angegebenen, Funktionen dieser Art hat FEJÉR konstruiert[4]).

---

[1]) P. DU BOIS-REYMOND, Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln, *Abhandlungen der math.-phys. Classe der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften,* **12** (1876), II. Abt., S. I—XXIV und 1—102. NEDER wies darauf hin, daß die du Bois-Reymondsche Konstruktion einer stetigen Funktion, deren Fourierreihe *überall dicht* divergiert, nicht stichhaltig ist (L. NEDER, Über stetige Funktionen mit überall-dicht divergierender Fourierreihe, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* **30** (1921), S. 153—155), so daß das erste Beispiel einer solchen Funktion von FEJÉR stammt.

[2]) Das Schwarzsche Beispiel steht bei A. SACHSE, Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Funktionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen, *Zeitschrift für Math. und Phys.,* **25** (1880), Historisch-literarische Abt., Supplementheft, S. 229—276, insbesondere S. 271.

[3]) H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques* (Paris, 1906), S. 84—89.

[4]) L. FEJÉR, *a)* Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe, *Journal für die reine und angewandte Math.,* 137 (1909), S. 1—5; *b)* Eine stetige Funktion deren Fouriersche Reihe divergiert, *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo,* 28 (1909), S. 402—404; *c)* Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, *Journal für die reine und angewandte Math.,* **138** (1910), S. 22—53; *d)* Sur les singularités des séries de Fourier de fonctions continues, *Annales de l'École Normale Supérieure,* (3) **28** (1911), S. 63—103.

Bei der Konstruktion stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe spielen nach einer wichtigen Bemerkung von LEBESGUE die Größen

$$\varrho_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin (n + {}^1/_2)\, t}{\sin {}^t/_2} \right| dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eine entscheidende Rolle; man nennt diese Größen die *Lebesgueschen Konstanten.* FEJÉR hat gezeigt[5], daß dieselben wie $\log n$ ins unendliche wachsen; genauer, daß

$$(1) \qquad \frac{\varrho_n}{\log n} \to \frac{4}{\pi^2} \qquad (n \to \infty).$$

Man kennt auch stetige Funktionen, deren Fourierreihe an *unendlich vielen* Stellen divergiert (und zwar so, daß die Partialsummen nicht beschränkt sind); man kann sogar *abzählbar unendlich viele Divergenzstellen* (bzw. Unbeschränktheitsstellen) *beliebig vorschreiben* (s. die unter [4]) angeführten Arbeiten von FEJÉR). Solche Funktionen kann man, unter Benutzung der Relation (1), auch mit Hilfe der bekannten Methoden zur Verdichtung der Singularitäten[6]) konstruieren. STEINHAUS hat gezeigt[7]), daß sobald die Menge der Unbeschränktheitsstellen der Fourierreihe einer stetigen Funktion überall dicht liegt, dann besitzt sie sogar in jedem Intervall die *Mächtigkeit des Kontinuums.* Von NEDER stammt schließlich ein Beispiel einer stetigen Funktion, deren Fourierreihe auf einer Punktmenge divergiert, die *perfekt* (also ebenfalls von der Mächtigkeit des Kontinuums) und *nirgends dicht* ist[8]). Die Frage, ob es eine stetige Funktion gibt, deren Fourierreihe *überall,* oder wenigstens *auf einer Menge von positivem Maß* divergiert, blieb aber bisher ungelöst.

Die Partialsummen der Fourierreihe stehen in weitgehender Analogie mit den zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörigen

---

[5]) a. a. O. [4]) *c).*

[6]) Vgl. z. B. S. BANACH und H. STEINHAUS, Sur le principe de la condensation de singularités, *Fundamenta Math.*, 9 (1927), S. 50–61.

[7]) S. in der Dissertation von L. NEDER, *Zur Konvergenz der trigonometrischen Reihen, einschließlich Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise* (Göttingen, 1919), S. 26.

[8]) a. a. O. [7]).

Lagrangeschen Interpolationspolynomen[9]). Diese Abszissen sind

$$x_k^{(n)} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

die Nullstellen des Tschebyscheffschen Polynoms n-ter Ordnung

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \tag{3}$$

Falls kein Mißverständnis zu befürchten ist, werden wir bei $x_k^{(n)}$ (und auch bei den entsprechenden weiter unten zu definierenden Ausdrücken) die oberen Indizes fortlassen. Auch schreiben wir x_k in der Form

$$x_k = \cos \vartheta_k, \quad \vartheta_k = \vartheta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\pi.$$

Es ist offenbar $1 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n > -1$.

Es sei

$$l_k(x) = l_k^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(x-x_k)\, T_n'(x_k)} = (-1)^{k+1} \frac{\sin \vartheta_k}{n} \frac{T_n(x)}{x - x_k}; \tag{4}$$

ist dann $f(x)$ eine im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ definierte Funktion, so liefert die Lagrangesche Interpolationsformel

$$L_n(x) = L_n[f(x)] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k(x) \tag{5}$$

dasjenige Polynom vom höchstens $(n-1)$-ten Grade, welches an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $f(x)$ übereinstimmt. Die Polynomfolge

$$L_1[f(x)],\ L_2[f(x)], \ldots, L_n[f(x)], \ldots \tag{6}$$

nennen wir die zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörige (Lagrangesche) Interpolationsfolge von $f(x)$.

In der Untersuchung der Divergenzmöglichkeiten der Folge (6) spielen die Funktionen

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| \tag{7}$$

dieselbe Rolle, wie die Lebesgueschen Konstanten bei der analo-

[9]) Wegen dieser Analogie haben einige Forscher die Fouriersche Reihe und die zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörige Lagrangesche Interpolation parallel untersucht. S. z. B. G. Faber, Über stetige Funktionen (zweite Abhandlung), *Math. Annalen*, 69 (1910), S. 372—443, insb. § 9, wo interessante Tatsachen über die Frage der Äquikonvergenz bewiesen werden.

gen Frage für Fourierreihen. In § 1 werden wir die Abschätzung

$$(8) \qquad \lambda_n(x) \geqq \frac{1}{\pi} |T_n(x)| \log n - c_1(x)$$

herleiten, wobei wir mit $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_6(x)$ nur von x abhängige positive Zahlen bezeichnen. Daraus folgt, daß die Folge $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x), \ldots, \lambda_n(x), \ldots$ in keinem Punkte x beschränkt ist[10], da sonst die Folge $T_1(x), T_2(x), \ldots, T_n(x), \ldots$ gegen Null konvergieren würde. Nach einem Satz von HAHN[11]) ergibt sich also, daß es zu jedem Punkt x_0 im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ eine im selben Intervall stetige Funktion $f(x)$ gibt derart, daß die Interpolationsfolge (6) von $f(x)$ für $x = x_0$ divergiert und sogar nicht beschränkt ist. Durch die bereits erwähnten Methoden zur Verdichtung der Singularitäten kann man sogar für jede im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ gelegene abzählbare Punktmenge E eine für $-1 \leqq x \leqq +1$ stetige Funktion konstruieren, so daß die Folge (6) in jedem Punkte von E divergiert, bzw. unbeschränkt ist.

Wir werden nun in dieser Arbeit viel mehr beweisen, nämlich die oben erwähnte, auf das Vorhandensein einer Divergenzmenge von positivem Maß bezügliche, für die Fourierreihe einer stetigen Funktion ungelöste Frage bei der zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörigen Lagrangeschen Interpolation in positivem Sinne beantworten. Wir werden sogar den folgenden Satz beweisen:

I. *Es gibt eine im Intervall* $-1 \leqq x \leqq +1$ *stetige Funktion* $f(x)$, *deren zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörige Lagrangesche Interpolationsfolge im Intervall* $-1 \leqq x \leqq +1$ *fast überall divergiert, ja sogar fast überall unbeschränkt ist.*

Die Funktion $f(x)$ werden wir bis auf eine unbekannte Konstante (von der nur die Existenz bewiesen wird) effektiv angeben. Wir werden nämlich zunächst folgenden Satz beweisen:

II. *Man kann zwei im Intervall* $-1 \leqq x \leqq +1$ *stetige Funktionen* $g(x)$ *und* $h(x)$ *angeben, so daß, für eine beliebige Stelle* $x_0 \neq -1$ *des Intervalls, entweder die zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörige Lagrangesche Interpolationsfolge von* $g(x)$, *oder*

---

[10]) Das gleiche habe ich auch für Interpolation an den Nullstellen der Jacobischen Polynome bewiesen.

[11]) H. HAHN, Über das Interpolationsproblem, *Math. Zeitschrift*, 1 (1918), S. 115—142.

die entsprechende Interpolationsfolge von $h(x)$ für $x = x_0$ eine unbeschränkte Zahlenfolge ist.

Aus diesem Satz werden wir dann Satz I herleiten, indem wir zeigen, daß es eine reelle Zahl λ gibt derart, daß $f(x) = g(x) + \lambda h(x)$ die im Satz I behauptete Beschaffenheit besitzt.

Zum Beweis des Satzes II benötigen wir anstatt (8) eine schärfere Ungleichung, die wir in § 2 beweisen werden. Diese Ungleichung bezieht sich auf die Summe, die aus (8) entsteht, indem man diejenigen „Grundfunktionen" $l_k(x)$ wegläßt, die zu Abszissen x_k gehören, welche bei einer äquidistanten Einteilung des Intervalls $-1 \leqq x \leqq +1$ im selben Intervall wie die Stelle x, oder in einem Intervall rechts davon liegen. (Der Einfachheit halber werde ich nur die Glieder mit ungeradem Index behalten, da diese konstantes Vorzeichen besitzen.) Die Abschätzung gilt nicht nur in n, sondern auch in der Anzahl m der Teilintervalle gleichmäßig; dieser Umstand bewirkt es, daß wir einen Divergenzsatz für *sämtliche* Stellen des Intervalls $(-1, +1)$ erhalten. Daß wir statt einer Funktion zwei Funktionen $g(x)$, $h(x)$ auf einmal zu betrachten haben, kommt davon, daß in der erwähnten Ungleichung (ebenso wie in (8)) der Faktor $|T_n(x)|$ auftritt, und dieser wird für gewisse x und n klein.

In § 3 beweisen wir einige weitere Hilfssätze; die Konstruktion von $g(x)$ und $h(x)$ und der Beweis der Sätze I und II bildet den Inhalt von § 4.

§ 1. Untere Abschätzung der Summe der absoluten Beträge der Grundfunktionen.

Wir betrachten zunächst die Summe (7) an einer Stelle x mit $x_n < x \leqq 1$, die von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschieden ist. Es sei ν der kleinste Index mit $x_\nu < x$; da $\sin\vartheta_k$ für jedes k und $x - x_k = x - \cos\vartheta_k$ für $k \geqq \nu$ positiv ist, so folgt aus (4) für $k = \nu$, $\nu + 1, \ldots, n$

$$|l_k(x)| = \frac{|T_n(x)|}{n} \frac{\sin\vartheta_k}{x - \cos\vartheta_k},$$

also

$$\lambda_n(x) \geqq \frac{|T_n(x)|}{n} \sum_{k=\nu}^{n} \frac{\sin\vartheta_k}{x - \cos\vartheta_k}. \tag{9}$$

Nun is aber, wie man aus

$$(x-\cos\vartheta)^2 \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\sin\vartheta}{x-\cos\vartheta}\right)=\cos\vartheta(x-\cos\vartheta)-\sin^2\vartheta=$$
$$=x\cos\vartheta-1\leqq 0$$

entnimmt, $\dfrac{\sin\vartheta}{x-\cos\vartheta}$ eine abnehmende Funktion von ϑ; also ist

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=\nu}^{n}\frac{\sin\vartheta_k}{x-\cos\vartheta_k}\geqq\int_{\vartheta_\nu}^{\pi}\frac{\sin\vartheta}{x-\cos\vartheta}\,d\vartheta=$$
$$=\log(x+1)-\log(x-\cos\vartheta_\nu)\geqq$$
$$\geqq\log\frac{1}{x-\cos\vartheta_\nu}-|\log(x+1)|=\log\frac{1}{x-x_\nu}-c_2(x).$$

Hier ist aber, falls $\nu>1$, $0<x-x_\nu<x_{\nu-1}-x_\nu<\vartheta_\nu-\vartheta_{\nu-1}=\dfrac{\pi}{n}$ (da für $\pi\geqq\alpha>\beta\geqq 0$ die Ungleichung $\cos\beta-\cos\alpha<\alpha-\beta$ besteht, wie z. B. aus der geometrischen Bedeutung des Kosinus hervorgeht); das gleiche gilt auch für $\nu=1$, da dann $x-x_\nu\leqq$ $\leqq 1-x_1\leqq\vartheta_1-0<\dfrac{\pi}{n}$. (In diesem Falle könnte man auch eine viel schärfere Ungleichung beweisen.) Also gilt wegen (9) und $|T_n(x)|\leqq 1$

$$\lambda_n(x)\geqq\frac{1}{\pi}|T_n(x)|\left(\log\frac{n}{\pi}-c_2(x)\right)\geqq\frac{1}{\pi}|T_n(x)|\log n-c_1(x),$$

d. h. Ungleichung (8) mit $c_1(x)=\dfrac{1}{\pi}(c_2(x)+\log\pi)$. Diese Ungleichung gilt offenbar auch für $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nun sei $-1\leqq x<x_n\leqq 0$; dann ist

$$|l_k(x)|=\frac{|T_n(x)|}{n}\,\frac{\sin\vartheta_k}{\cos\vartheta_k-x},$$
$$\lambda_n(x)=\frac{|T_n(x)|}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\vartheta_k}{\cos\vartheta_k-x};$$

da $\dfrac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta-x}$ eine wachsende Funktion von ϑ ist, so gilt

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\vartheta_k}{\cos\vartheta_k-x}\geqq\int_0^{\vartheta_n}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta-x}\,d\vartheta=\log(1-x)-\log(\cos\vartheta_n-x)\geqq$$
$$\geqq\log\frac{1}{\cos\vartheta_n-x}=\log\frac{1}{x_n-x}\geqq\log\frac{1}{x_n+1}\geqq\log\frac{n}{\pi}$$

wegen $x_n - x \leqq x_n + 1 \leqq \pi - \vartheta_n < \frac{\pi}{n}$; d. h. die Ungleichung (8) gilt auch jetzt

Herr SZEGÖ hat mir freundlicherweise mitgeteilt, daß man (8) auch ohne Integralabschätzung, durch Vergleich mit der harmonischen Reihe, beweisen kann.

§ 2. Untere Abschätzung der Summe geeigneter Grundfunktionen.

Es sei $-1 < x \leqq +1$; zerlegen wir das Intervall $-1 < x \leqq +1$ in m gleiche Teile und rechnen wir jedem Teil den rechten Endpunkt hinzu, den linken aber nicht. Es sei x im $(\mu+1)$-ten Teilintervall enthalten (von links gerechnet; $\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1$). Wir betrachten diejenigen ungeraden Werte von k, für welche x_k im ersten, zweiten, ..., oder μ-ten Teilintervall liegt. Wir nehmen an, daß es solche Werte von k gibt; dazu genügt es, daß x_n und x_{n-1} zum ersten Teilintervall gehören, x aber nicht; also, daß

$$1 + x_{n-1} \leqq \frac{2}{m} < 1 + x;$$

wegen $1 + x_{n-1} = \cos\vartheta_{n-1} - \cos\pi \leqq \pi - \vartheta_{n-1} < \frac{6}{n}$ genügt es also, wenn m die Ungleichung

$$\frac{2}{1+x} < m \leqq \frac{n}{3}$$

erfüllt, was wir voraussetzen werden.

Es sei also $2\nu+1$ der kleinste ungerade Index, für welchen $x_{2\nu+1}$ in einem der ersten μ Teilintervallen liegt und betrachten wir die Summe

$$\lambda_n(x; m) = \sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |l_{2k+1}(x)|.$$

Da wegen (4)

$$l_{2k+1}(x) = \frac{\sin\vartheta_{2k+1}}{n} \, \frac{T_n(x)}{x - x_{2k+1}}$$

für die betrachteten Werte von k dasselbe Vorzeichen wie $T_n(x)$ besitzt, ist zugleich

$$(10) \qquad \lambda_n(x; m) = \left| \sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{\sin\vartheta_{2k+1}}{x - \cos\vartheta_{2k+1}} \, \frac{T_n(x)}{n} \right| = \left| \sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} l_{2k+1}(x) \right|.$$

Durch dieselbe Abschätzungsmethode, wie im vorigen Paragraphen, erhalten wir

$$\lambda_n(x;m) = \frac{|T_n(x)|}{n}\sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{\sin\vartheta_{2k+1}}{x-\cos\vartheta_{2k+1}} \geqq \frac{1}{2\pi}|T_n(x)|\int\limits_{\vartheta_{2\nu+1}}^{\pi}\frac{\sin\vartheta}{x-\cos\vartheta}d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}|T_n(x)|\left(\log\frac{1}{x-x_{2\nu+1}} - c_2(x)\right);$$

nun ist aber $\nu > 0$ (da x_1 wegen $1-x_1 < \vartheta_1 = \frac{\pi}{2n} < \frac{6}{n} \leqq \frac{2}{m}$ gewiß im letzten Teilintervall liegt), also

$$0 < x - x_{2\nu+1} = (x - x_{2\nu-1}) + (x_{2\nu-1} - x_{2\nu+1}) <$$

$$< \frac{2}{m} + \vartheta_{2\nu+1} - \vartheta_{2\nu-1} = \frac{2}{m} + \frac{2\pi}{n} < \frac{2}{m} + \frac{9}{n} \leqq \frac{5}{m};$$

daher gewinnt man wegen $|T_n(x)| \leqq 1$

$$\lambda_n(x;m) \geqq \frac{1}{2\pi}|T_n(x)|\left(\log\frac{m}{5} - c_2(x)\right) \geqq \frac{1}{2\pi}|T_n(x)|\log m - c_3(x).$$

Wählt man $c_3(x) \geqq \frac{1}{2\pi}(c_2(x) + \log 5)$ so, daß $c_3(x) \geqq \frac{1}{2\pi}\log\frac{2}{1+x}$ ausfalle, so gilt diese Ungleichung auch für $m \leqq \frac{2}{1+x}$, falls dann unter $\lambda_n(x;m)$ Null zu verstehen ist; also gilt für $-1 < x \leqq +1$, $m \leqq \frac{n}{3}$

$$\lambda_n(x;m) \geqq \frac{1}{2\pi}|T_n(x)|\log m - c_3(x). \tag{11}$$

Diese Ungleichung ist unser Haupthilfsmittel beim Divergenzbeweise.

§ 3. Weitere Hilfssätze über Tschebyscheffsche Abszissen.

Eine Tschebyscheffsche Abszisse n-ter Ordnung, d. h. eine Nullstelle von $T_n(x)$, ist zugleich eine Tschebyscheffsche Abszisse $3n$-ter, $5n$-ter, ..., $(2\nu+1)n$-ter, ... Ordnung. In der Tat ist

$$\cos\frac{2k-1}{2n}\pi = \cos\frac{(2k-1)(2\nu+1)}{2(2\nu+1)n}\pi = \cos\frac{2k'-1}{2(2\nu+1)n}\pi$$

mit

$$k' = (2\nu+1)k - \nu,$$

und für $1 \leqq k \leqq n$ ist

$$1 \leqq \nu+1=(2\nu+1)-\nu \leqq k' \leqq (2\nu+1)n-\nu \leqq (2\nu+1)n.$$

Daraus ergibt sich sogleich der

Hilfssatz 1. *Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ Tschebyscheffsche Abszissen und zwar bzw. n_1-ter, n_2-ter, ..., n_r-ter Ordnung, wobei $n_1, n_2, \ldots, n_r$ entweder sämtlich ungerade, oder sämtlich gerade aber nicht durch 4 teilbar sind*[12]. *Es sei n die kleinste gemeinsame Vielfache von $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Dann sind $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ sämtlich Tschebyscheffsche Abszissen n-ter Ordnung.*

In der Tat, n ist offenbar eine ungerade vielfache sowohl von n_1, wie auch von $n_2, n_3, \ldots, n_r$.

Hilfssatz 2. *Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ verschiedene Zahlen und zwar sei ξ_s eine Tschebyscheffsche Abszisse n_s-ter Ordnung $(s=1,2,\ldots,r)$, wo $n_1, n_2, \ldots, n_r$ entweder sämtlich ungerade, oder sämtlich gerade aber nicht durch 4 teilbar sind. Es sei n die kleinste gemeinsame Vielfache von $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Es seien ferner $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ beliebige Zahlen mit $0 \leqq \eta_s \leqq 1$ für $s=1,2,\ldots,r$. Dann gibt es ein Polynom $P(x)$ von höchstens $(2n-1)$-tem Grade, welches für $-1 \leqq x \leqq +1$ der Ungleichung $0 \leqq P(x) \leqq 1$, ferner den Interpolationsbedingungen $P(\xi_1)=\eta_1, P(\xi_2)=\eta_2, \ldots, P(\xi_r)=\eta_r$ genügt.*

In der Tat, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ sind laut Hilfssatz 1 Tschebyscheffsche Abszissen n-ter Ordnung. Es seien $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \ldots, \xi_n$ die übrigen Tschebyscheffschen Abszissen n-ter Ordnung und es sei $\eta_{r+1}=\eta_{r+2}=\ldots=\eta_n=0$. Dann genügt für $-1 \leqq x \leqq 1$ die durch die Bedingungen

$$(12) \qquad P(\xi_1)=\eta_1, \; P(\xi_2)=\eta_2, \ldots, P(\xi_n)=\eta_n$$

bestimmte Fejérsche Treppenparabel, d. h. dasjenige Polynom von höchstens $(2n-1)$-tem Grade, welches die Bedingungen (12), ferner die Bedingungen

$$P'(\xi_1)=P'(\xi_2)=\ldots=P'(\xi_n)=0$$

erfüllt, laut einem Satze von Fejér[13] auch der Ungleichung $0 \leqq P(x) \leqq 1$; also gilt für $P(x)$ die Behauptung des Hilfssatzes 2.

---

[12] Offenbar gilt die Behauptung allgemein, wenn $n_1, n_2, \ldots, n_r$ den gleichen Paritätsgrad haben; daher gilt dasselbe auch für Hilfssatz 2.

[13] L. Fejér, Über Interpolation, *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1916, S. 66—91, insbesondere Theorem III, S. 73.

Hilfssatz 3. *Es seien n und n' teilerfremde ungerade Zahlen. Ist ξ eine Tschebyscheffsche Abszisse zugleich von n-ter und n'-ter Ordnung, so ist $\xi = 0$. Ist ξ eine Tschebyscheffsche Abszisse zugleich von $2n$-ter und $2n'$-ter Ordnung, so ist entweder* $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, *oder* $\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.[14])

In der Tat ist im ersten Falle (wegen (2))

$$\xi = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi = \cos \frac{2k'-1}{2n'} \pi$$
$$(1 \leqq k \leqq n;\ 1 \leqq k' \leqq n'),$$

also ist

$$\frac{2k-1}{2n} = \frac{2k'-1}{2n'}$$

ein echter Bruch; auf reduzierte Form gebracht ist sein Nenner ein gemeinsamer Teiler von $2n$ und $2n'$; daher ist der Bruch gleich $\frac{1}{2}$, also

$$\xi = \cos \frac{1}{2} \pi = 0.$$

Im zweiten Falle ist

$$\xi = \cos \frac{2k-1}{4n} \pi = \cos \frac{2k'-1}{4n'} \pi$$
$$(1 \leqq k \leqq 2n;\ 1 \leqq k' \leqq 2n'),$$

also ist

$$\frac{2k-1}{4n} = \frac{2k'-1}{4n'}$$

wiederum ein echter Bruch mit einem Nenner, der gemeinsamer Teiler von $4n$ und $4n'$ ist und offenbar nicht 2 sein kann; daher ist der Nenner 4, der Bruch selbst $\frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$, also

$$\xi = \cos \frac{1}{4} \pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{oder} \quad \xi = \cos \frac{3}{4} \pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

[14]) Hilfssatz 3 ist im bekannten Tatsache enthalten: *haben n und n' die gleiche Paritätsgrad, so ist eine gemeinsame Nullstelle von $T_n(x)$ und $T_{n'}(x)$ zugleich eine Nullstelle von $T_d(x)$, wobei d den größten gemeinsamen Teiler von n und n' bedeutet.*

§ 4. Konstruktion von stetigen Funktionen mit divergierender Interpolationsfolge.

Es sei σ_n das Maximum der durch (7) definierten (stetigen) Funktion $\lambda_n(x)$ für $-1 \leqq x \leqq 1$ und $\varrho(n)$ der größte unter den Werten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Dann ist offenbar $\varrho(1) \leqq \varrho(2) \leqq \ldots \leqq \varrho(n)$; ferner ist, wegen $\lambda_n(x_k^{(n)}) = 1$, $\varrho(n) \geqq \sigma_n \geqq 1$. Für eine beliebige Funktion $f(x)$, die für $-1 \leqq x \leqq 1$ der Ungleichung $-1 \leqq f(x) \leqq 1$ genügt, gilt wegen (5) für $\nu \leqq n$ und $-1 \leqq x \leqq 1$

$$|L_\nu[f(x)]| \leqq \sum_{k=1}^{\nu} |l_k^{(\nu)}(x)| = \lambda_\nu(x) \leqq \sigma_\nu \leqq \varrho(n).$$

Es sei nun $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots$ die (wachsend geordnete) Folge der Primzahlen von 5 an, d. h. $p_1 = 5, p_2 = 7, p_3 = 11, \ldots$ Wegen $p_1 > 3, p_2 > 6$ und $p_{r+2} > p_r + 6$ gilt allgemein[15]) $p_r > 3r$. Es sei ferner $m_1, m_2, \ldots, m_r, \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen, die für $r \geqq 2$ die Ungleichungen

$$\log m_r > 4^r \varrho(2 p_{2 m_{r-1}}) \tag{13}$$

und

$$p_{m_r} \geqq 4 p_1 p_2 \ldots p_{2 m_{r-1}} \tag{14}$$

erfüllen. Die Existenz einer solchen Folge ist klar; in der Tat, es sei etwa $m_1 = 1$ und, falls m_{r-1} bereits bekannt ist, m_r die kleinste ganze Zahl, die den (offenbar für genügend große m_r gültigen) Ungleichungen (13) und (14) genügt. Ersichtlich ist $m_1 < m_2 < \ldots < m_r < \ldots$, sogar $m_r > 2 m_{r-1}$.

Wir definieren nun zwei Polynomfolgen $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_r(x), \ldots$ und $Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_r(x), \ldots$ wie folgt. Wir teilen das Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ in m_r gleiche Teile (der rechte Endpunkt wird jedesmal dem Teilintervall zugerechnet, der linke aber nicht). Wir nennen *Abszissen erster Art* diejenigen Nullstellen von ungeradem Index des Tschebyscheffschen Polynoms p_{m_r+1}-ten Ordnung, die im ersten Teilintervall (von links) liegen, ferner diejenigen Nullstellen von ungeradem Index des Tschebyscheffschen Polynoms p_{m_r+2}-ter Ordnung, die im ersten oder zweiten Teilintervall

---

15) Die Ungleichung $p_{r+2} \geqq p_r + 6$ folgt daraus, daß von den sechs konsekutiven Zahlen $p_r, p_r + 1, p_r + 2, p_r + 3, p_r + 4, p_r + 5$ höchstens zwei Primzahlen sein können. Statt der Primzahlen könnte $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots$ eine beliebige wachsende Folge von je zwei teilerfremden ungeraden Zahlen sein, für die die Ungleichung $p_r > 3r$ gilt.

liegen usw., allgemein diejenigen Nullstellen von ungeradem Index $p_{m_r+\mu}$-ter Ordnung, die im ersten, zweiten, ..., oder μ-ten Teilintervall liegen ($\mu = 1, 2, \ldots, m_r$), aber jedesmal die etwaige Nullstelle 0 ausgenommen. Alle übrigen Nullstellen der Tschebyscheffschen Polynome p_{m_r}-ter, p_{m_r+1}-ter, p_{m_r+2}-ter, ..., p_{2m_r}-ter Ordnung, darunter auch 0, sollen *Abszissen zweiter Art* heißen. Laut Hilfssatz 3 sind die Abszissen erster Art von den Abszissen zweiter Art verschieden; also können wir laut Hilfssatz 2 ein Polynom $P_r(x)$ bestimmen, welches für $-1 \leqq x \leqq 1$ der Ungleichung $0 \leqq P_r(x) \leqq 1$ genügt, an den Abszissen erster Art den Wert 1, an den Abszissen zweiter Art den Wert 0 annimmt und dessen Grad (wegen (14)) höchstens

$$2p_{m_r}p_{m_r+1}\ldots p_{2m_r} - 1 < p_{m_{r+1}}$$

beträgt. Analog nennen wir *Abszissen dritter Art* diejenigen Nullstellen von ungeradem Index des Tschebyscheffschen Polynoms $2p_{m_r+\mu}$-ter Ordnung, die im ersten, und zweiten, ..., oder μ-ten Teilintervall liegen ($\mu = 1, 2, \ldots, m_r$), die etwaiger Nullstellen $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ jedesmal ausgenommen; alle übrigen Nullstellen der Tschebyscheffschen Polynome $2p_{m_r}$-ter, $2p_{m_r+1}$-ter, $2p_{m_r+2}$-ter, ..., $2p_{2m_r}$-ter Ordnung, darunter auch $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, heißen *Abszissen vierter Art.* Die Abszissen dritter Art sind laut Hilfssatz 3 von den Abszissen vierter Art verschieden; also können wir laut Hilfssatz 2 das Polynom $Q_r(x)$ derart bestimmen, daß es für $-1 \leqq x \leqq 1$ der Ungleichung $0 \leqq Q_r(x) \leqq 1$ genügt, an den Abszissen dritter Art den Wert 1, an den Abszissen vierter Art den Wert 0 annimmt und sein Grad höchstens gleich

$$4p_{m_r}p_{m_r+1}\ldots p_{2m_r} - 1 < p_{m_{r+1}}$$

ausfällt. Setzen wir

$$\tau_1 = 1, \quad \tau_r = \varrho(2p_{2m_{r-1}}) \quad \text{für} \quad r = 2, 3, \ldots \tag{15}$$

und bilden wir die beiden Reihen

$$g(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{P_r(x)}{2^r \tau_r}, \qquad h(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Q_r(x)}{2^r \tau_r}. \tag{16}$$

Wegen $0 \leqq P_r(x) \leqq 1$, $0 \leqq Q_r(x) \leqq 1$ sind für $-1 \leqq x \leqq 1$ beide Reihen gleichmäßig konvergent, die Funktionen $g(x)$, $h(x)$ stetig im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ und es gilt

$$0 \leqq g(x) \leqq 1, \quad 0 \leqq h(x) \leqq 1.$$

Betrachten wir nun die zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörigen Interpolationsfolgen

$$L_1[g(x)],\ L_2[g(x)], \ldots, L_n[g(x)], \ldots, \tag{17}$$

$$L_1[h(x)],\ L_2[h(x)], \ldots, L_n[h(x)], \ldots \tag{18}$$

von $g(x)$ bzw. $h(x)$. Es sei x eine beliebige feste Zahl mit $-1 < x \leqq 1$. Wir zeigen, daß *eine der Folgen* (17), (18) *divergent, ja sogar unbeschränkt ist.*

Teilen wir das Intervall $(-1, +1)$ in m_r gleiche Teile (die Teilpunkte sollen jedesmal dem von ihnen links gelegenen Teilintervall zugezählt werden); es sei x im (μ_r+1)-ten Teilintervall enthalten ($\mu_r = 0, 1, 2, \ldots, m_r - 1$) und es sei $n_r = p_{m_r+\mu_r}$ So erhalten wir eine (natürlich von x abhängige) Folge $n_1, n_2, \ldots, n_r, \ldots$ von natürlichen Zahlen. Wir betrachten die Teilfolgen

$$L_{n_1}[g(x)],\ L_{n_2}[g(x)], \ldots, L_{n_r}[g(x)], \ldots$$

bzw.

$$L_{2n_1}[h(x)],\ L_{2n_2}[h(x)], \ldots, L_{2n_r}[h(x)], \ldots$$

von (17) bzw. (18).

Es ist wegen (5) und (16)

$$L_{n_r}[g(x)] = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{n_r}[P_s(x)] = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \tag{19}$$

$$L_{2n_r}[h(x)] = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{2n_r}[Q_s(x)] = \Sigma_1' + \Sigma_2' + \Sigma_3', \tag{20}$$

wobei

$$\Sigma_1 = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{n_r}[P_s(x)], \qquad \Sigma_1' = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{2n_r}[Q_s(x)],$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2^r \tau_r} L_{n_r}[P_r(x)], \qquad \Sigma_2' = \frac{1}{2^r \tau_r} L_{2n_r}[Q_r(x)],$$

$$\Sigma_3 = \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{n_r}[P_s(x)], \quad \Sigma_3' = \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{2n_r}[Q_s(x)].$$

Nach Konstruktion sind aber für $s = 1, 2, \ldots, r-1$ die Polynome $P_s(x)$, $Q_s(x)$ von höchstens $p_{m_s+1} \leqq p_{m_r} \leqq n_r$-tem Grade; daher ist

$$L_{n_r}[P_s(x)] = P_s(x), \quad L_{2n_r}[Q_s(x)] = Q_s(x),$$

und also

$$(21)\quad 0 \leqq \Sigma_1 = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{P_s(x)}{2^s \tau_s} \leqq g(x) \leqq 1, \quad 0 \leqq \Sigma_1' = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{Q_s(x)}{2^s \tau_s} \leqq h(x) \leqq 1.$$

Andererseits ist für $s \geqq r+1$ wegen $n_r < 2n_r < 2p_{2m_r} \leqq 2p_{2m_{s-1}}$ und (15)

$$|L_{n_r}[P_s(x)]| \leqq \varrho(2p_{2m_{s-1}}) = \tau_s, \quad |L_{2n_r}[Q_s(x)]| \leqq \varrho(2p_{2m_{s-1}}) = \tau_s,$$

also

$$(22)\qquad |\Sigma_3|, |\Sigma_3'| \leqq \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^s} < 1.$$

Endlich ist wegen (5)

$$L_{n_r}[P_r(x)] = \sum_{k=1}^{n_r} l_k^{(n_r)}(x)\, P_r(x_k^{(n_r)}),$$

$$L_{2n_r}[Q_r(x)] = \sum_{k=1}^{2n_r} l_k^{(2n_r)}(x)\, Q_r(x_k^{(2n_r)}).$$

Nach Konstruktion von $P_r(x)$, $Q_r(x)$ ist aber $P_r(x_k^{(n_r)}) = 1$ oder 0 und $Q_r(x_k^{(2n_r)}) = 1$ oder 0, je nachdem $x_k^{(n_r)}$ eine Abszisse erster oder zweiter Art, bzw. $x_k^{(2n_r)}$ eine Abszisse dritter oder vierter Art ist; also ist $L_{n_r}[P_r(x)]$ bzw. $L_{2n_r}[Q_r(x)]$, abgesehen eventuell von einem bzw. zwei $\left(\text{zu } x_k^{(n_r)} = 0 \text{ bzw. } x_k^{(2n_r)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ gehörigen}\right)$ Glieder gleich einem Summe, deren absoluter Betrag nach (10) durch $\lambda_{n_r}(x; m_r)$ bzw. $\lambda_{2n_r}(x; m_r)$ angegeben und wegen $m_r < \frac{p_{m_r}}{3} \leqq \leqq \frac{n_r}{3} < \frac{2n_r}{3}$ durch (11) abgeschätzt wird (man beachte, daß im Falle $\mu_r = 1$ $\lambda_{n_r}(x; m_r) = \lambda_{2n_r}(x; m_r) = 0$ definiert wurde). Da aber nach einem Satze von FEJÉR[16]) für jedes k und n

$$|l_k^{(n)}(x)| < \sqrt{2}$$

besteht, so ist

$$|L_{n_r}[P_r(x)]| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{n_r}(x)| \log m_r - c_3(x) - \sqrt{2},$$

$$|L_{2n_r}[Q_r(x)]| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{2n_r}(x)| \log m_r - c_3(x) - 2\sqrt{2},$$

---

[16]) L. FEJÉR, Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Annalen*, **106** (1932), S. 1—55, insb. Formel (28).

also wegen (13), (15) und $2^r \tau_r \geqq 1$

$$|\Sigma_2| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{n_r}(x)| 2^r - c_4(x),$$

$$|\Sigma_2'| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{2n_r}(x)| 2^r - c_4(x)$$

und endlich wegen (19), (20), (21), (22)

$$|L_{n_r}[g(x)]| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{n_r}(x)| 2^r - c_5(x),$$

$$|L_{2n_r}[h(x)]| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{2n_r}(x)| 2^r - c_5(x).$$

Wären nun beiden Folgen (17) und (18) beschränkt, so würde hieraus

$$T_{n_r}(x) \to 0, \quad T_{2n_r}(x) \to 0 \qquad (r \to \infty)$$

folgen, was wegen (3)

$$\cos(n_r \arccos x) \to 0$$

und

$$\cos(2n_r \arccos x) = 2\cos^2(n_r \arccos x) - 1 \to 0$$

bedeuten würde, was ersichtlich unmöglich ist. Somit haben wir die den Folgen (17), (18) bezügliche Behauptung und damit den in der Einleitung ausgesprochenen Satz II bewiesen.

Um Satz I zu beweisen, betrachten wir für jedes reelle λ die zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörige Interpolationsfolge der Funktion $f_\lambda(x) = g(x) + \lambda h(x)$. Es sei E_λ die (Borelsche, also meßbare) Menge derjenigen Punkte x, $-1 \leqq x \leqq 1$, für welche diese Interpolationsfolge beschränkt ist. Für $\lambda \neq \mu$ sind die Mengen E_λ und E_μ fremd; in der Tat, würde x_0 ein gemeinsamer Punkt von E_λ und E_μ sein, so würde im Punkte x_0 sowohl die Interpolationsfolge von $f_\lambda(x)$, wie auch die von $f_\mu(x)$ beschränkt sein, also auch die Interpolationsfolgen der Funktionen

$$g(x) = \frac{\lambda f_\mu(x) - \mu f_\lambda(x)}{\lambda - \mu}, \quad h(x) = \frac{f_\lambda(x) - f_\mu(x)}{\lambda - \mu},$$

die sich aus den Interpolationsfolgen von $f_\lambda(x)$ und $f_\mu(x)$ linear zusammensetzen; dies würde aber dem Satz II widersprechen. Also gibt es höchstens abzählbar viele Mengen E_λ von positivem Maß, und so gibt es einen Wert von λ, für den E_λ eine Nullmenge ist. Damit ist auch Satz I bewiesen.

(Eingegangen am 20. Februar 1935.)

Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls.

Von László Kalmár in Szeged.

In dieser Arbeit werde ich für einen Satz der mathematischen Logik einen neuen, einfachen Beweis geben. Da jener Satz dem elementarsten Kapitel der mathematischen Logik, dem sogenannten Aussagenkalkül angehört, setze ich gar keine Vorkenntnisse aus dieser Theorie voraus. Vielmehr werde ich nicht nur alles zum Verständnis des Beweises Nötige entwickeln, sondern gebe ich in **1—3** eine kurze Darstellung der wichtigsten Tatsachen des Aussagenkalküls. Diese Darstellung ermöglicht die Beurteilung der Rolle des in der Frage stehenden Satzes, sowie einen Vergleich der Ideen meines Beweises mit denen der übrigen Beweise auch für einen Leser, der gar nichts aus der mathematischen Logik weiß.

1 und **2** dienen zur Vorbereitung; in **3** gebe ich die Fragestellung an. In **4** werden die Grundideen der wichtigsten bisher angewandten Beweismethoden angegeben. In **5—9** folgt der neue Beweis; **10—13** beschäftigen sich mit anderen Wendungen des Satzes.

1. Dem Aussagenkalkül legt man eine Menge $\{\uparrow, \downarrow\}$ von zwei Elementen zugrunde, etwa in ähnlichem Sinn, wie der Arithmetik die abzählbar-unendliche Menge $\{1, 2, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen zugrunde gelegt wird.[1] Die Elemente $\uparrow$ und $\downarrow$ jener Menge heißen

[1] Die Auffassung des Aussagenkalküls als Arithmetik einer Menge mit zwei Elementen scheint zuerst von Łukasiewicz klar formuliert geworden zu sein; vgl. J. Łukasiewicz und A. Tarski, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III*, 23 (1930), S. 30—50, insb. Definition 5, S. 34; vgl. auch Fußnote [5], S. 32—33. — Diese Auffassung wurde insbesondere im Werk: D. Hilbert und P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, erster Band (Berlin, 1934) beim Aufbau des Aussagenkalküls zugrunde gelegt. — Die älteren Darstellungen

die *logischen Werte;* $\uparrow$ heißt „wahr", $\downarrow$ heißt „falsch". Sie vertreten die gleichbenannten Wahrheitswerte der klassischen Logik; für unsere Zwecke kommt es aber allein darauf an, daß sie zwei verschiedene Elemente sind. Durch große lateinische Buchstaben werden wir meistens Veränderliche bezeichnen, die die logischen Werte anzunehmen fähig sind; sie heißen logische Variable. Das Übereinstimmen zweier logischen Werte bezeichnen wir durch das Gleichheitszeichen.

Analog, wie die Grundoperationen in der Arithmetik, definiert man im Aussagenkalkül fünf Operationen: *Negation, Implikation, Konjunktion, Disjunktion* und *Äquivalenz*. Diese Operationen sind Funktionen, deren Argumente logische Werte annehmen und deren Funktionswerte ebenfalls logische Werte sind; und zwar ist die Negation eine eingliedrige Operation, d. h. eine Funktion mit einem Argument, die übrigen vier aber zweigliedrige Operationen, d. h. Funktionen zweier Argumente. Zur Definition genügt es, die Funktionswerte an sämtlichen (bei der Negation zwei, bei den übrigen Operationen vier) Stellen anzugeben. Man definiert

die *Negation* $\bar{A}$ („nicht A") von A durch $\bar{\uparrow} = \downarrow$, $\bar{\downarrow} = \uparrow$;

die *Implikation* $A \rightarrow B$ („A impliziert B") von A, B durch $\uparrow \rightarrow \uparrow = \uparrow$, $\uparrow \rightarrow \downarrow = \downarrow$, $\downarrow \rightarrow \uparrow = \uparrow$, $\downarrow \rightarrow \downarrow = \uparrow$;

die *Konjunktion* $A \& B$ („A und B") von A, B durch $\uparrow \& \uparrow = \uparrow$, $\uparrow \& \downarrow = \downarrow$, $\downarrow \& \uparrow = \downarrow$, $\downarrow \& \downarrow = \downarrow$;

die *Disjunktion* $A \vee B$ („A oder B") von A, B durch $\uparrow \vee \uparrow = \uparrow$, $\uparrow \vee \downarrow = \uparrow$, $\downarrow \vee \uparrow = \uparrow$, $\downarrow \vee \downarrow = \downarrow$;

die *Äquivalenz* $A \sim B$ („A äquivalent B") von A, B durch $\uparrow \sim \uparrow = \uparrow$, $\uparrow \sim \downarrow = \downarrow$, $\downarrow \sim \uparrow = \downarrow$, $\downarrow \sim \downarrow = \uparrow$.

Man kümmere sich nicht viel um die Benennungen der Operationen; dieselben weisen auf die (sprachlich teilweise durch Bindewörter, teilweise aber durch Zeitwörter ausgedrückten) Begriffe der klassischen Logik hin, die den Operationen des Aussagenkalküls entsprechen; wir haben aber mit diesem Entsprechen

des Aussagenkalküls setzen den Begriff der *Aussage* voraus; dieser Begriff wird meistens durch Beispiele wie „der Schnee ist weiß" bzw. „der Schnee ist schwarz" erläutert und der Aussagenkalkül (der übrigens seinen Namen dieser Behandlungsweise verdankt) als ein algebrenartiger Kalkül mit solchen Aussagen aufgebaut. Diese Auffassung hat den Anschein erweckt, als ob es sich im Aussagenkalkül um Philosophisches handle; dieser Umstand hat erfahrungsgemäß viele, philosophisch nicht interessierte, Mathematiker von dieser schönen Disziplin der reinen Mathematik abgeschreckt.

gar nichts zu tun, so daß wir auf die Frage, inwieweit dieses (insbesondere bei der Disjunktion und Implikation) nur teilweise besteht, nicht einzugehen brauchen. Man beachte aber, daß $\bar{A}=\uparrow$ mit $A=\downarrow$, $\bar{A}=\downarrow$ mit $A=\uparrow$ gleichbedeutend ist; ferner, daß $A\to B=\uparrow$ ist für $A=\downarrow$ und für $B=\uparrow$, sonst aber (d. h. für $A=\uparrow$, $B=\downarrow$) $A\to B=\downarrow$ ist; daß $A \mathbin{\&} B$ dann und nur dann gleich $\uparrow$ ist, falls $A=\uparrow$ und $B=\uparrow$ ist; daß $A\vee B$ dann und nur dann gleich $\downarrow$ ist, falls $A=\downarrow$ und $B=\downarrow$ ist; endlich, daß $A\sim B$ dann und nur dann gleich $\uparrow$ ist, falls $A=B$.

Einen Ausdruck, der aus logischen Variablen mit Hilfe unserer Operationen entsteht, wobei diese Operationen auch mehrmals, in beliebiger Reihenfolge, aber natürlich nur endlich viele Malen angewendet werden können, nennen wir eine *Formel*. Der Aufbau einer Formel wird üblicherweise durch Klammern angedeutet. Z. B. ist $(A\sim(B\mathbin{\&}C))\to((B\vee A)\to C)$ eine Formel. Wir bezeichnen Formeln durch große deutsche Buchstaben.

Man bemerke, daß die obigen Operationen willkürlich aus der Menge aller möglichen Operationen ausgezeichnet wurden. Historisch hängt dies jedenfalls mit dem oben erwähnten Entsprechen den Begriffen der klassischen Logik zusammen. Aber auch ein sachlicher Grund spricht für diese Auszeichnung. In der Tat kann man beweisen, daß sich alle übrigen, beliebig vielgliedrigen, Operationen des Aussagenkalküls[2]) durch jene fünf Operationen ausdrücken, also als Formeln darstellen lassen. Da wir diesen wichtigen Satz des Aussagenkalküls nicht benötigen werden, beweise ich ihn hier nicht, sondern verweise ich auf den Werk von HILBERT und BERNAYS, a. a. O. [1]), S. 55—57.

In dieser Hinsicht ist aber die Einführung aller fünf Operationen nicht begründet, da man auch mit Negation und Implikation allein auskommt; in der Tat gilt für beliebige A, B

(1) $$A \mathbin{\&} B=\overline{A\to\bar{B}},$$

(2) $$A\vee B=\bar{A}\to B,$$

(3) $$A\sim B=(A\to B)\mathbin{\&}(B\to A)=\overline{(A\to B)\to\overline{B\to A}},$$

so daß sich die Konjunktion, Disjunktion und Äquivalenz mit Hilfe der Negation und Implikation ausdrücken läßt. Man beweist

---

[2]) d. h. Funktionen beliebig vieler Argumente, die auf der Menge $\{\uparrow,\downarrow\}$ definiert sind und deren Werte ebenfalls dieser Menge angehören.

die Gleichungen (1)—(3) durch Berechnung der linken und rechten Seite für alle (vier) möglichen Wertverteilungen von A und B mit Hilfe der Definitionen der Operationen. Ähnlich beweist man die Gleichungen

$$(4) \qquad A \vee B = \overline{\overline{A} \,\&\, \overline{B}},$$

$$(5) \qquad A \,\&\, B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}},$$

$$A \rightarrow B = \overline{A \,\&\, \overline{B}} = \overline{A} \vee B,$$

$$A \sim B = \overline{A \,\&\, \overline{B}} \,\&\, \overline{B \,\&\, \overline{A}} = \overline{\overline{\overline{A} \vee B} \vee \overline{\overline{B} \vee A}},$$

die zeigen, daß auch die Konjunktion und Negation, oder die Disjunktion und Negation zur Darstellung aller Operationen des Aussagenkalküls genügen. Der Grund dafür, warum man doch alle fünf Operationen zugleich betrachtet, besteht darin, daß man sonst einige Tatsachen des Aussagenkalküls nur viel komplizierter ausdrücken könnte.

2. Weitere wichtige Sätze des Aussagenkalküls werden durch die Gleichungen

$$(6) \qquad A \,\&\, B = B \,\&\, A,$$

$$(7) \qquad A \vee B = B \vee A,$$

$$(8) \qquad A \,\&\, (B \,\&\, C) = (A \,\&\, B) \,\&\, C,$$

$$(9) \qquad A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C,$$

$$(10) \qquad (A \,\&\, B) \vee C = (A \vee C) \,\&\, (B \vee C),$$

$$(11) \qquad (A \vee B) \,\&\, C = (A \,\&\, C) \vee (B \,\&\, C),$$

$$(12) \qquad \overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B},$$

$$(13) \qquad \overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B},$$

$$(14) \qquad \overline{\overline{A}} = A$$

(für beliebige Werte von A, B, C) ausgedrückt. Man beweist diese Gleichungen ebenfalls durch Ausprobieren aller (höchstens 8) Fällen; durch geeignete Zusammenfassung von Fällen kann man die Anzahl der hierzu nötigen Proben noch vermindern. (Die Gleichungen (12) und (13) lassen sich auch leicht aus (4) und (5) erhalten.) Die Gleichungen (6)—(10) weisen auf eine *Analogie zwischen Aussagenkalkül und Algebra* hin; sie besagen nämlich, daß Konjunktion und Disjunktion kommutative und assoziative Operationen sind und die letztere gegenüber der ersteren distributiv ist. Vermöge der Assoziativität darf man mehrgliedrige Kon-

15

junktionen und Disjunktionen[3]) ohne Klammern schreiben; allgemein kann man mit Konjunktion und Disjunktion ebenso rechnen, wie mit Addition und Multiplikation in einem Ring.[4]) Gleichung (11) zeigt, daß die Analogie auch im umgekehrten Sinne besteht, da auch die Konjunktion gegenüber der Disjunktion distributiv ist; man kann daher die erstere der Multiplikation und die letztere der Addition entsprechen lassen. Vermöge (12)—(14) können diese Analogien dazu verwertet werden, jede Formel nach belieben als Konjunktion von einfachen Disjunktionen oder als Disjunktion von einfachen Konjunktionen zu schreiben; dabei heißt eine Konjunktion oder Disjunktion *einfach,* falls ihre Glieder logische Variable oder Negationen von solchen sind. Zu diesem Zwecke drücke man vor allem die etwaigen Implikationen und Äquivalenzen durch die übrigen drei Operationen aus; dann wende man (12) und (13) zur „Ausführung" der Negationen solange an, bis alle Negationsstriche über einzelnen Variablen stehen; die dabei eventuell auftretenden mehrfachen Negationen beseitige man mit Hilfe von (14). Endlich verwende man zum „Ausmultiplizieren" das Distributivgesetz (10) oder (11), je nachdem die gegebene Formel als Konjunktion von einfachen Disjunktionen *(konjunktive Normalform)* oder als Disjunktion von einfachen Konjunktionen *(disjunktive Normalform)* darzustellen ist.

3. Eine Formel, deren Wert für jede Einsetzung von logischen Werten für die Variablen $\uparrow$ ausfällt, nennen wir eine *identisch wahre* Formel, oder kürzer eine *Identität.* Die Theorie der Identitäten ist ein wichtiges Kapitel des Aussagenkalküls; diese spielen ja hier eine ähnliche Rolle, wie die allgemeingültigen Regeln in der klassischen Logik. Ob eine vorgelegte Formel $\mathfrak{A}$ eine Identität ist oder nicht, läßt sich durch Berechnung des Wertes von $\mathfrak{A}$ für jede einzelne Einsetzung von logischen Werten für die in $\mathfrak{A}$ figurierenden Variablen entscheiden. Eine andere, meistens bequemere Methode besteht darin, daß man $\mathfrak{A}$ als eine konjunktive Normalform darstellt; in der Tat sieht man leicht ein, daß eine Konjunktion

[3]) Die Wörter Negation, Implikation, Konjunktion, Disjunktion, Äquivalenz wendet man auch zur Bezeichnung der *Resultate* der entsprechenden Operationen an; die Werte, worauf die Operationen anwendet werden, heißen (unabhängig davon, um welche Operation es sich handelt,) *Glieder.*

[4]) Mit der wichtigen Ausnahme, daß es hier kein Analogon der Subtraktion gibt.

dann und nur dann eine Identität ist, falls dies für jedes Glied derselben zutrifft; ferner, daß eine einfache Disjunktion dann und nur dann eine Identität ist, falls mindestens eine Variable darin sowohl negiert wie unnegiert als Disjunktionsglied auftritt; daher läßt sich von einer konjunktiven Normalform sofort erkennen, ob sie eine Identität ist.

Diese Möglichkeit, zu entscheiden, ob eine vorgelegte Formel eine Identität ist, ist zweifellos eine der fundamentalsten Tatsachen der Theorie der Identitäten. Diese Theorie ist aber dadurch noch keineswegs erschöpft, ebensowenig, wie etwa die Zahlentheorie durch die Möglichkeit, von einem vorgelegten, aus 1 durch die vier Spezies zusammengesetzten Ausdruck (d. h. von einer numerisch gegebenen rationalen Zahl) zu entscheiden, ob derselbe eine ganze Zahl repräsentiert. Man bedarf vielmehr, um eine Methode zum Beweisen von Sätzen für beliebige Identitäten zu gewinnen, eine analoge Entstehungsart der Identitäten, wie der Aufbau der natürlichen Zahlen aus 1 durch iterierte Addition von 1 — worauf im Grunde die wichtigste Beweismethode der Zahlentheorie, die vollständige Induktion, beruht. Eine solche Entstehungsart der Identitäten gewinnt man aus den folgenden Überlegungen.

Ist $\mathfrak{A}$ eine Identität und setzt man in $\mathfrak{A}$ für eine Variable überall, wo sie in $\mathfrak{A}$ vorkommt, eine und dieselbe Formel $\mathfrak{B}$ (Identität oder nicht) ein, so entsteht offenbar wieder eine Identität. Durch diese Operation der *Einsetzung* können aus einer Identität kompliziertere, sozusagen längere Identitäten gebildet werden.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ zwei Identitäten, so ist auch $\mathfrak{B}$ eine Identität. In der Tat, setzen wir für die in $\mathfrak{B}$ figurierenden Variablen beliebige logische Werte ein. Kommt eine solche Variable auch in $\mathfrak{A}$ vor, so setze man für sie denselben logischen Wert in $\mathfrak{A}$ ein, wie in $\mathfrak{B}$; für die nur in $\mathfrak{A}$, nicht aber in $\mathfrak{B}$ vorkommenden Variablen setze man etwa $\downarrow$ ein. Nach dieser Einsetzung wird laut Voraussetzung $\mathfrak{A} = \uparrow$ und $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} = \uparrow$; also auch $\mathfrak{B} = \uparrow$, da ja $\uparrow \rightarrow \downarrow = \downarrow$ und nicht $\uparrow$ ist. — Die Operation, die aus zwei Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ die Formel $\mathfrak{B}$ erzeugt, nennt man *Abtrennung;* durch diese Operation können wir aus einer Identität $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ eine kürzere Identität $\mathfrak{B}$ bilden (mit Hilfe einer anderen Identität $\mathfrak{A}$).

Nun erhebt sich die Frage, *ob es endlich viele Identitäten gibt, aus denen sich jede Identität durch endlich viele Einsetzungen und Abtrennungen gewinnen läßt.* Die Antwort ist bejahend;

die durch dieselbe ausgedrückte Beschaffenheit der Identitäten ist unter dem Namen *Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls* bekannt. Ein System von endlich vielen Identitäten der verlangten Art heißt ein *Axiomensystem,* jene Identitäten selbst *Axiome des Aussagenkalküls.* Diese Benennungen weisen auf die Analogie hin, die zwischen der fraglichen Entstehungsart der Identitäten einerseits und dem axiomatischen Aufbau einer mathematischen Theorie im üblichen Sinne andererseits besteht; dabei nehmen die Rolle der logischen Schlußweisen die beiden Operationen: Einsetzung und Abtrennung über, man nennt daher diese auch die *Schlußregeln* des Aussagenkalküls.

Durch den Satz von der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls wird das obige Desideratum erfüllt: um einen Satz für beliebige Identitäten zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß er für die Axiome (eines Axiomensystems des Aussagenkalküls) besteht und falls er für eine Formel $\mathfrak{A}$ bzw. für zwei Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gültig ist, so gilt er auch für jede aus $\mathfrak{A}$ durch Einsetzung entstehende Formel bzw. für die aus $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ durch Abtrennung von $\mathfrak{A}$ entstehende Formel $\mathfrak{B}$.

4. Die meisten Beweise der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls beruhen auf der oben besprochenen, mit konjunktiven Normalformen operierenden Methode der Entscheidung, ob eine gegebene Formel eine Identität ist. Bei diesen Beweisen[5]) werden die Axiome derart gewählt, daß sich aus denselben zunächst alle Disjunktionen, die eine Variable nebst ihrer Negation als Glieder enthalten, mittels den Schlußregeln gewinnen lassen; ferner, daß die Operation, die aus zwei Formeln ihre Konjunktion erzeugt, mittels den Axiomen auf die Schlußregeln zurückgeführt werden kann; endlich, daß dasselbe auch auf die *Inversen* jener Opera-

[5]) Man vgl. z. B. D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin, 1928), § 3—4 und 10—11. Diese Methode des Axiomatisierbarkeitsbeweises beruht auf Ideen von Schröder und wurde zuerst von Post exakt ausgeführt: E. L. Post, Introduction to a General Theory of Elementary Propositions, *American Journal of Math.*, 43 (1921), S. 163—185, insb. Nr. 3. Die meisten Darstellungen des Aussagenkalküls umgehen die Frage dadurch, daß sie die Identitäten als diejenigen Formeln definieren, die aus gewissen angegebenen Axiomen durch gewisse angegebene Schlußregeln abgeleitet werden können. Bei solchem Vorgehen taucht doch die Frage als Problem der Vollständigkeit (nebst dem der Widerspruchsfreiheit) des Axiomensystems auf.

tionen zutreffe, die zur Transformation einer Formel in eine konjunktive Normalform anzuwenden sind. Dann ist, falls $\mathfrak{A}$ eine Identität und $\mathfrak{B}$ eine konjunktive Normalform für $\mathfrak{A}$ ist, aus den Axiomen mit Hilfe der Schlußregeln zunächst $\mathfrak{B}$ und daraus weiter $\mathfrak{A}$ ableitbar.

Eine interessante, auf völlig anderen Ideen beruhende Methode zum Beweis der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls ist von ŁUKASIEWICZ[6]) gegeben worden. Er zeigt etwas mehr, nämlich, daß endlich viele Identitäten als Axiome derart angegeben werden können, daß es für jede Formel $\mathfrak{A}$ eine der folgenden beiden Fälle vorliegt: entweder ist $\mathfrak{A}$ aus den Axiomen mit Hilfe von Einsetzungen und Abtrennungen ableitbar, oder läßt sich *jede* Formel aus $\mathfrak{A}$ und den Axiomen mit Hilfe derselben Schlußregeln ableiten. (Da, falls $\mathfrak{A}$ eine Identität ist, aus $\mathfrak{A}$ und den Axiomen durch die Schlußregeln nur Identitäten abgeleitet werden können, so folgt hieraus der Satz von der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls in seiner ursprünglichen Form[7]).) — Die Methode von ŁUKASIEWICZ besteht darin, daß ein Verfahren angegeben wird, wodurch man für eine beliebige Formel $\mathfrak{A}$, je nach der Form derselben, entweder direkt zeigen kann, daß eine der genannten Fälle vorliegt, oder aber eine oder zwei *kürzere* Formeln $\mathfrak{A}'$ bzw. $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ angeben kann, so daß $\mathfrak{A}'$ bzw. $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ mit $\mathfrak{A}$ äquivalent sind im

---

[6]) J. ŁUKASIEWICZ, Ein Vollständigkeitsbeweis des zweiwertigen Aussagenkalküls, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III*, 24 (1931), S. 153—183. ŁUKASIEWICZ beschränkt sich hierbei auf Identitäten, die aus Variablen mittels Negationen und Disjunktionen hergestellt werden (keine wesentliche Einschränkung, da sich jede Operation des Aussagenkalküls auf jene beiden zurückführen läßt); dementsprechend wird daher der Einsetzungsregel eingeschränkt und die Abtrennungsregel abgeändert. Ferner wendet ŁUKASIEWICZ eine von der hier benützten (in vorliegender Form von HILBERT stammenden) abweichende Symbolik an. Dies kann hier nicht als bloß eine Äußerlichkeit aufgefaßt werden, da die Symbolik von ŁUKASIEWICZ sozusagen zur Methode gehört. Überhaupt ist diese Symbolik, deren wichtiger Vorteil ist, daß sie keine Klammern (oder Ersatzmittel für Klammern) benutzt, zur Untersuchung von solchen Fragen sehr geeignet. Wir benutzen doch die Hilbertsche Symbolik, da sie mehr verbreitet ist und für uns, die uns dem Klammerngebrauch der Algebra angewöhnt haben, übersichtlicher zu sein scheint.

[7]) Umgekehrt folgt aus der ursprünglichen Formulierung der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls die oben erwähnte Verschärfung; vgl. HILBERT—ACKERMANN, a. a. O. [5]), S. 33.

Sinne, daß, wenn für $\mathfrak{A}'$ bzw. $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ eine der genannten Fälle vorliegt, so gilt dasselbe auch für $\mathfrak{A}$.

Ich werde nun eine dritte Methode entwickeln, die sich direkt an die Definition der Identität anknüpft und in der Ausführung einfacher ausfällt, als die bisherigen.

5. Es seien zunächst die Axiome angegeben.

Hilfsaxiome:

(I) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)),$

(II) $(A \to B) \to ((\bar{A} \to B) \to B).$

Axiom der Negation:

(III) $A \to \bar{\bar{A}}.$

Axiome der Implikation:

(IV) $B \to (A \to B),$

(V) $\bar{A} \to (A \to B),$

(VI) $A \to (\bar{B} \to \overline{A \to B}).$

Axiome der Konjunktion:

(VII) $A \to (B \to (A \mathbin{\&} B)),$

(VIII) $\bar{A} \to \overline{A \mathbin{\&} B},$

(IX) $\bar{B} \to \overline{A \mathbin{\&} B}.$

Axiome der Disjunktion:

(X) $A \to (A \vee B),$

(XI) $B \to (A \vee B),$

(XII) $\bar{A} \to (\bar{B} \to \overline{A \vee B}).$

Axiome der Äquivalenz:

(XIII) $A \to (B \to (A \sim B)),$

(XIV) $A \to (\bar{B} \to \overline{A \sim B}),$

(XV) $\bar{A} \to (B \to \overline{A \sim B}),$

(XVI) $\bar{A} \to (\bar{B} \to (A \sim B)).$

Die Rolle der Einteilung der Axiome[8]) wird aus dem Beweise der Axiomatisierbarkeit klar hervortreten; insbesondere auch,

---

[8]) Eine ähnliche Einteilung findet man in Hilbert—Bernays, a. a. O. [1]), S. 66; dort kommen aber keine Hilfsaxiome vor; auch sonst ist jenes Axiomensystem eleganter, als das unsere. In der Tat, bei Hilbert und Bernays gehören zu jeder Operation je drei Axiome; dieselben enthalten außer der fraglichen Operation nur die Implikation als einzige Hilfsoperation. (Vgl. aber den zweiten Absatz von **10.**) — Die Axiome (III), (X) und (XI) kommen auch bei Hilbert und Bernays vor.

warum (I) und (II) Hilfsaxiome und nicht Axiome der Implikation heißen. Vorläufig deute ich nur an, daß die nach den Operationen genannten Axiome in einem gewissen Sinn zur Formalisierung der Definition der fraglichen Operationen dienen.

Ich nenne eine Formel $\mathfrak{A}$ *ableitbar,* falls sie aus den Axiomen durch eine endliche Kette von Einsetzungen und Abtrennungen entsteht, falls es also eine endliche Folge

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$$

von Formeln gibt, so daß jedes Glied $\mathfrak{A}_m$ der Folge entweder mit einem der Axiome (I)—(XVI) identisch ist, oder aber aus einer Formel $\mathfrak{A}_k$ mit $k<m$ durch Einsetzung, oder aus zwei Formeln $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{A}_l$ mit $k, l<m$ durch Abtrennung entsteht, endlich $\mathfrak{A}_n$ mit $\mathfrak{A}$ identisch ist. Außer diesem Begriff benötigen wir auch den Hilfsbegriff der *Ableitbarkeit aus Prämissen.* Es seien $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ beliebige Formeln; wir sagen, $\mathfrak{A}$ sei aus den Prämissen[9]) $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ ableitbar, falls es eine endliche Folge.

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$$

von Formeln gibt, so daß jedes Glied $\mathfrak{A}_m$ desselben entweder mit einem der Axiome (I)—(XVI), oder mit einem der Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ identisch ist, oder aus einer Formel $\mathfrak{A}_k$ mit $k<m$ durch Einsetzung einer Formel *für eine Variable* entsteht, *die in keiner der Prämissen* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ *vorkommt,* oder aber aus zwei Formeln $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{A}_l$ mit $k, l<m$ durch Abtrennung hervorgeht, endlich $\mathfrak{A}_n$ mit $\mathfrak{A}$ identisch ist.

6. Nun zeige ich, daß die Axiome (I)—(XVI) lauter Identitäten sind. Man könnte dies auch mittels Durchprobieren aller Fälle für die Werte von A, B, C verifizieren; durch die folgende Bemerkung geht es aber kürzer. Um zu zeigen, daß eine Formel von der Form $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ eine Identität ist, genügt es nachzuweisen, daß für alle Werte der in derselben vorkommenden Variablen, für die $\mathfrak{A} = \uparrow$ ist, auch $\mathfrak{B} = \uparrow$ ausfällt. In der Tat gilt dann $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} = \uparrow$ für beliebige Werte der Variablen, da, falls $\mathfrak{A} = \downarrow$ ist, sowieso $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} = \uparrow$ ausfällt. Analog sieht man ein, daß es zum Beweis, daß eine Formel $\mathfrak{A}_1 \rightarrow (\mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{B})$ bzw. $\mathfrak{A}_1 \rightarrow (\mathfrak{A}_2 \rightarrow (\mathfrak{A}_3 \rightarrow \mathfrak{B}))$ eine Identität ist, genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{B} = \uparrow$ gilt für alle Werte der Variablen, für welche $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \uparrow$, bzw. $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = \uparrow$ ausfällt. Mit Hilfe

[9]) Das Wort *Prämisse* verwenden wir also in diesem Zusammenhang als Synonyme des Wortes *Formel.*

dieser Bemerkung verifiziert man den Identitätscharakter der Axiome (I)—(XVI) wie folgt.

(I). Falls $A \to (B \to C) = A \to B = A = \uparrow$, so gilt auf Grund der Definition der Implikation $B = \uparrow$ (da nämlich sonst $A \to B = \uparrow \to \downarrow = \downarrow$ wäre) und ebenso $B \to C = \uparrow$, daher auch $C = \uparrow$.

(II). Falls $A \to B = \bar{A} \to B = \uparrow$, so muß auch $B = \uparrow$ sein. Sonst wäre $B = \downarrow$, und da entweder A, oder $\bar{A}$ gleich $\uparrow$ ist, entweder $A \to B$, oder $\bar{A} \to B$ gleich $\uparrow \to \downarrow = \downarrow$.

(III). Falls $A = \uparrow$, so gilt auf Grund der Definition der Negation $\bar{\bar{A}} = \uparrow$.

(IV). Falls $B = \uparrow$, so gilt auf Grund der Definition der Implikation, unabhängig vom Wert von A, $A \to B = \uparrow$.

(V). Falls $\bar{A} = \uparrow$, also $A = \downarrow$, so gilt auf Grund der Definition der Implikation, unabhängig vom Wert von B, $A \to B = \uparrow$.

(VI). Falls $A = \bar{B} = \uparrow$, so gilt $A = \uparrow$, $B = \downarrow$, also auf Grund der Definition der Implikation $A \to B = \downarrow$, $\overline{A \to B} = \uparrow$.

(VII). Falls $A = B = \uparrow$, so gilt auf Grund der Definition der Konjunktion $A \& B = \uparrow$.

(VIII) und (IX). Falls $\bar{A} = \uparrow$, d. h. $A = \downarrow$, oder aber $\bar{B} = \uparrow$, d. h. $B = \downarrow$, so gilt auf Grund der Definition der Konjunktion $A \& B = \downarrow$, also $\overline{A \& B} = \uparrow$.

(X) und (XI). Falls $A = \uparrow$, oder aber $B = \uparrow$, so gilt auf Grund der Definition der Disjunktion $A \vee B = \uparrow$.

(XII). Falls $\bar{A} = \bar{B} = \uparrow$, d. h. $A = B = \downarrow$, so gilt auf Grund der Definition der Disjunktion $A \vee B = \downarrow$, also $\overline{A \vee B} = \uparrow$.

(XIII) und (XVI). Falls $A = B = \uparrow$, oder aber $\bar{A} = \bar{B} = \uparrow$, d. h. $A = B = \downarrow$, so gilt nach Definition der Äquivalenz $A \sim B = \uparrow$.

(XIV) und (XV). Falls $A = \bar{B} = \uparrow$, d. h. $A = \uparrow$, $B = \downarrow$, so gilt auf Grund der Definition der Äquivalenz $A \sim B = \downarrow$, also $\overline{A \sim B} = \uparrow$. Dasselbe gilt auch im Falle $\bar{A} = B = \uparrow$, d. h. $A = \uparrow$, $B = \downarrow$.

Aus dem somit verifizierten Identitätscharakter der Axiome folgt nach einer obigen Bemerkung, daß auch alle ableitbaren Formeln Identitäten sind. Wir werden nun auch das Umgekehrte und damit die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls beweisen.

7. Zum Beweis benötigen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1.[10]) *Es seien* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ *beliebige Formeln, die die* (in den Axiomen figurierenden) *Variablen A, B, C nicht enthalten. Es sei die Formel* $\mathfrak{A}$ *aus den Prämissen* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ *ableitbar. Dann ist die Formel* $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$ *aus den Prämissen* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ *ableitbar.* (Für $r = 1$ bedeutet dies: ableitbar schlechthin.)

Wir beweisen die Behauptung a) für den Fall, daß die Formel $\mathfrak{A}$ eine der Axiome (I)—(XVI) oder der Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ ist; b) für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{P}_r$ identisch ist; dann c) angenommen, daß die Behauptung für eine Formel $\mathfrak{A}$ gültig ist, beweisen wir dieselbe für jede Formel $\mathfrak{B}$, die aus $\mathfrak{A}$ durch Einsetzung einer Formel für eine in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ nicht vorkommende Variable entsteht; endlich d) angenommen, daß die Behauptung für die Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gilt, beweisen wir sie für die Formel $\mathfrak{B}$. Aus der Definition der Ableitbarkeit aus Prämissen ergibt sich, daß dann die Behauptung für jede aus $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ als Prämissen ableitbare Formel gilt.

a) Ist $\mathfrak{A}$ ein Axiom, oder eine der Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$, so erhält man aus dem Axiom (IV) durch zweimalige Einsetzung (von $\mathfrak{P}_r$ für A und dann $\mathfrak{A}$ für B)

$$\mathfrak{A} \to (\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}),$$

daraus durch Abtrennung des Axioms oder der Prämisse $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}.$$

Die beiden dabei benötigten Einsetzungen erfolgten für die Variablen A und B, also für solche, die in den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ nicht vorkommen; also ist $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$ aus jenen Prämissen ableitbar.

b) Ist $\mathfrak{A}$ identisch mit $\mathfrak{P}_r$, so handelt es sich um die Ableitbarkeit von $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{P}_r$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$. Wir zeigen sogar die Ableitbarkeit dieser Formel ohne Prämissen, wobei aber nur für A, B, C Formeln eingesetzt werden. Man erhält zunächst aus Axiom (I) durch Einsetzung von A für C

$$(15) \qquad (A \to (B \to A)) \to ((A \to B) \to (A \to A));$$

---

10) Vgl. zu der in diesem Hilfssatz ausgedrückten Idee *a)* A. Tarski, Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III,* **23** (1930), S. 22—29, insb. Axiom 8*, S. 24; *b)* Hilbert—Bernays, a. a. O. [1]), Begriff der regulären Implikationsformel, S. 68, und Deduktionstheorem, S. 155; *c)* G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen I, *Math. Zeitschrift,* **39** (1934), S. 176—210, insb. Schlußfiguren-Schema „*FE*", S. 186.

ferner aus dem Axiom (IV) durch Vertauschung von A mit B (dies kommt auf eine dreimalige Einsetzung hinaus: man setzt zunächst C für A, dann A für B, endlich B für C ein)

(16) $$A \to (B \to A);$$

durch Abtrennung dieser Formel von (15) gewinnt man

$$(A \to B) \to (A \to A);$$

daraus durch Einsetzung von $B \to A$ für B

$$(A \to (B \to A)) \to (A \to A);$$

trennt man endlich (16) von der letzten Formel ab, so erhält man die Formel

$$A \to A,$$

woraus die verlangte Formel $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{P}_r$ durch Einsetzung von $\mathfrak{P}_r$ für A entsteht.

c) Ist $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ ableitbar und entsteht $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$ durch Einsetzung einer Formel $\mathfrak{F}$ für eine Variable, die weder in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$, noch in $\mathfrak{P}_r$ vorkommt, so entsteht durch Einsetzung von $\mathfrak{F}$ für dieselbe Variable aus $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$ die Formel $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{B}$, die dann also ebenfalls aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ ableitbar ist.

d) Sind die Formeln $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}_r \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ ableitbar, so ist es auch $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{B}$. In der Tat gewinnt man aus dem Axiom (I) durch Einsetzung von $\mathfrak{P}_r$ für A, dann durch gleichzeitige Einsetzung[11]) von $\mathfrak{A}$ für B und von $\mathfrak{B}$ für C die Formel

$$(\mathfrak{P}_r \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})) \to ((\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}) \to (\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{B})),$$

woraus durch Abtrennung der aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ ableitbaren Formeln $\mathfrak{P}_r \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ und $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{A}$ die Formel $\mathfrak{P}_r \to \mathfrak{B}$ entsteht. Damit ist der Hilfssatz 1 vollständig bewiesen.

Man beachte, daß beim Beweis nur die Axiome (I) und (IV) benutzt wurden; der Hilfssatz gilt also auch für andere Axiomensysteme, falls nur (I) und (IV) Axiome (oder aber ableitbare Formeln[12])) sind.

---

[11]) Eine gleichzeitige Einsetzung läßt sich leicht auf sukzessive Einsetzungen zurückführen. Z. B. hat man im vorliegenden Fall zuerst für C eine weder in $\mathfrak{A}$, noch in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ vorkommende Variable D einzusetzen; dann setze man $\mathfrak{A}$ für B und endlich $\mathfrak{B}$ für D ein.

[12]) Falls eine der verlangten Formeln kein Axiom, nur eine ableitbare Formel ist, so soll eine solche Ableitung für sie existieren, wobei für keine

Hilfssatz 2. *Enthalten die Formeln* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ *die Variable* A, B, C *nicht, und ist eine Formel* $\mathfrak{A}$ *sowohl aus den Prämissen* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \mathfrak{P}_r$, *wie auch aus den Prämissen* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \overline{\mathfrak{P}_r}$ *ableitbar, so ist* $\mathfrak{A}$ *auch aus den Prämissen* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ *allein ableitbar.*

In der Tat ist dann nach Hilfssatz 1 sowohl die Formel $\mathfrak{P}_r \rightarrow \mathfrak{A}$, wie auch $\overline{\mathfrak{P}_r} \rightarrow \mathfrak{A}$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ ableitbar. Ferner gewinnt man aus dem Axiom (II) durch Einsetzung von $\mathfrak{P}_r$ für A und dann $\mathfrak{A}$ für B die Formel

$$(\mathfrak{P}_r \rightarrow \mathfrak{A}) \rightarrow ((\overline{\mathfrak{P}_r} \rightarrow \mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{A}),$$

woraus durch zweimalige Abtrennung (von $\mathfrak{P}_r \rightarrow \mathfrak{A}$ und dann von $\overline{\mathfrak{P}_r} \rightarrow \mathfrak{A}$) die Formel $\mathfrak{A}$ entsteht.

Beim Beweise wurde außer Hilfssatz 1 nur das Axiom (II) benutzt; daher gilt Hilfssatz 2 für jedes Axiomensystem, in welchem (I), (II) und (IV) Axiome (oder ableitbare Formeln, vgl. [12])) sind.

8. Die wesentliche Beweisidee wird durch den folgenden Hilfssatz ausgedrückt, wobei nunmehr auch die übrigen Axiome benutzt werden.

Hilfssatz 3. *Es seien* $D_1, D_2, \ldots, D_r$ *beliebige*[13]) *von* A, B, C *verschiedene Variable; es sei* $\mathfrak{A}$ *eine Formel, die keine andere Variablen enthält als (höchstens) jene; wir bezeichnen daher* $\mathfrak{A}$ *auch durch* $\mathfrak{A}(D_1, D_2, \ldots, D_r)$. *Es seien* $W_1, W_2, \ldots, W_r$ *beliebige gegebene logische Werte;* $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r)$ *bezeichne den logischen Wert, die aus* $\mathfrak{A}$ *durch Einsetzung von* W_1 *für* D_1, W_2 *für* $D_2, \ldots, W_r$ *für* D_r *und Berechnung des Wertes des so entstandenen Ausdruckes mit Hilfe der Definitionen der Operationen entsteht. Es bezeichne* $\mathfrak{D}_s$ *für* $s = 1, 2, \ldots, r$ *die Formel* D_s *oder* $\overline{D}_s$, *je nachdem* $W_s = \uparrow$ *oder* $W_s = \downarrow$. *Ist nun* $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$, *so ist* $\mathfrak{A}$, *ist aber* $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, *so ist* $\overline{\mathfrak{A}}$ *aus den Prämissen* $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ *ableitbar.*

Wir beweisen die Behauptung a) für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ eine Variable ist; b) falls $\mathfrak{A}$ die Negation einer Formel $\mathfrak{B}$ ist, für die

---

in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ vorkommende Variable eine Einsetzung erfolgt. Dies ist aber, wie man z. B. mittels der Methode der „Rückverlegung der Einsetzungen" (vgl. z. B. HILBERT—BERNAYS, a. a. O. [1]), S. 225) leicht zeigen kann, stets der Fall. (Natürlich wird auch hier vorausgesetzt, daß $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ die in den Axiomen figurierenden Variablen nicht enthalten.)

[13]) Sie sollen also nicht notwendig durch $D_1, D_2, \ldots, D_r$ bezeichnet werden.

die Behauptung bereits gilt; c) falls $\mathfrak{A}$ die Implikation, oder d) Konjunktion, oder e) Disjunktion, oder f) Äquivalenz zweier Formeln $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ist, für die die Behauptung gilt. Aus der Definition der Formel folgt dann, daß die Behauptung für jede Formel gültig ist.

a) Bezeichnet $\mathfrak{A}$ die Variable D_s ($s = 1, 2, \ldots$, oder r), so ist $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = W_s$; für $W_s = \uparrow$ ist $\mathfrak{D}_s$ mit $\mathfrak{A}$, für $W_s = \downarrow$ mit $\overline{\mathfrak{A}}$ identisch. Also ist im ersten Fall $\mathfrak{A}$, im zweiten $\overline{\mathfrak{A}}$ eine der Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$, daher ableitbar aus denselben.[14])

b) Es gelte die Behauptung für die Formel $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ bezeichne die Formel $\overline{\mathfrak{B}}$. Da $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ mit $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$ mit $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ gleichbedeutend ist, ist im ersten Fall $\overline{\mathfrak{B}}$, d. h. $\mathfrak{A}$, im zweiten Fall $\mathfrak{B}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar. Aus $\mathfrak{B}$ und der Formel

$$\mathfrak{B} \rightarrow \overline{\overline{\mathfrak{B}}},$$

die aus dem Axiom (III) durch Einsetzung[15]) entsteht, gewinnt man dann weiter durch Abtrennung die Formel $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$, d. h. $\overline{\mathfrak{A}}$.

Es gelte nun die Behauptung für die Formeln $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

c) Es bezeichne $\mathfrak{A}$ die Formel $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$. Dann gilt $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ dann und nur dann, falls $\mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$, oder $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$; im ersten Fall ist $\mathfrak{C}$, im zweiten $\overline{\mathfrak{B}}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar. Trennt man die so erhaltene Formel von der (aus (IV) bzw. (V) durch Einsetzung entstandenen) Formel

$$\mathfrak{C} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})$$

bzw.

$$\overline{\mathfrak{B}} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})$$

ab, so gewinnt man die Formel $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$, d. h. $\mathfrak{A}$. Ist aber $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, so gilt $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ und $\mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, also sind $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar, also auch $\overline{\mathfrak{A}}$ d. h. $\overline{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}}$, da sie durch Abtrennung von $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ aus der (aus (VI) durch Einsetzung

---

[14]) Auf Grund der Definition gelten die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ selbst als aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ ableitbare Formeln.

[15]) Unter Einsetzung ist hier und im Folgenden stets eine Einsetzung für eine Variable zu verstehen, die in den jeweiligen Prämissen nicht vorkommt, bzw. eine Reihe von solchen Einsetzungen.

entstandenen) Formel

$$\mathfrak{B} \to (\overline{\mathfrak{C}} \to \overline{\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}})$$

entsteht.

d) Es bezeichne $\mathfrak{A}$ die Formel $\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}$. Falls $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ gilt, so ist $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ und $\mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$; daher sind nach Voraussetzung $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar, also auch die Formel $\mathfrak{A}$ d. h. $\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}$, da sie aus (VII) durch Einsetzung und zweimalige Abtrennung entsteht. Falls aber $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, so ist entweder $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, oder $\mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, also ist entweder $\overline{\mathfrak{B}}$, oder $\overline{\mathfrak{C}}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar; in beiden Fällen gilt dasselbe auch für $\overline{\mathfrak{A}}$, da diese Formel, d. h. $\overline{\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}}$, aus (VIII) bzw. (IX) durch Einsetzung und Abtrennung von $\overline{\mathfrak{B}}$ bzw $\overline{\mathfrak{C}}$ entsteht.

e) Es sei $\mathfrak{A}$ die Formel $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$. Ist $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$, so ist einer der Werte $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r)$, $\mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r)$ gleich $\uparrow$; also ist eine der Formeln $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar, also auch $\mathfrak{A}$ d. h. $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$, da diese Formel aus (X) oder (XI) durch Einsetzung und Abtrennung entsteht. Ist aber $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, so ist $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, also sind $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar, mithin auch $\overline{\mathfrak{A}}$, d. h. $\overline{\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}}$, da diese Formel aus (XII) durch Einsetzung und zweimalige Abtrennung entsteht.

f) Es sei endlich $\mathfrak{A}$ die Formel $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}$. Ist $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$, so ist $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r)$, d. h. entweder beide gleich $\uparrow$, oder beide gleich $\downarrow$. Im ersten Fall sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, im zweiten Fall $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar. Im ersten Fall setze man in (XIII), im zweiten Fall in (XVI) $\mathfrak{B}$ für A und $\mathfrak{C}$ für B ein; durch zweimalige Abtrennung erhält man jedesmal $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}$, d. h. $\mathfrak{A}$. Ist aber $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \downarrow$, so ist einer der Werte $\mathfrak{B}(W_1, W_2, \ldots, W_r)$, $\mathfrak{C}(W_1, W_2, \ldots, W_r)$ gleich $\uparrow$, der andere $\downarrow$; also sind entweder $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$, oder $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{C}$ aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar; durch Einsetzung von $\mathfrak{B}$ für A und $\mathfrak{C}$ für B in (XIV) oder (XV) und zweimalige Abtrennung erhält man jedesmal $\overline{\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}}$, d. h. $\overline{\mathfrak{A}}$.

9. Nun gehen wir zum Beweis des Satzes über, laut dessen jede Identität eine ableitbare Formel ist. Es sei zunächst

$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(D_1, D_2, \ldots, D_r)$ eine Identität, die die Variablen A, B, C nicht, sondern nur die Variablen $D_1, D_2, \ldots, D_r$ enthält. Da, für beliebige Werte $W_1, W_2, \ldots, W_r$, $\mathfrak{A}(W_1, W_2, \ldots, W_r) = \uparrow$ ausfällt, so ist $\mathfrak{A}$ nach Hilfssatz 3 aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ableitbar, falls $\mathfrak{D}_1$ beliebig D_1 oder $\bar{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ beliebig D_2 oder $\bar{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ beliebig D_r oder $\bar{D}_r$ bedeuten kann. Wählt man also $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{r-1}$ beliebig in diesem Sinn, so ist $\mathfrak{A}$ sowohl aus $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{r-1}, D_r$, wie auch aus $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{r-1}, \bar{D}_r$, also, nach Hilfssatz 2, auch aus $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{r-1}$ als Prämissen ableitbar. Wählt man hier $\mathfrak{D}_{r-1}$ einmal D_{r-1}, das anderemal $\overline{D_{r-1}}$, so folgt analogerweise, daß $\mathfrak{A}$ auch aus den Prämissen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{r-2}$ allein ableitbar ist, u. s. w.: in dieser Weise gelangt man endlich zur Ableitbarkeit von $\mathfrak{A}$ ohne Prämissen.

Enthält aber $\mathfrak{A}$ auch A, B, C, oder einige dieser Variablen, so ersetze man sie provisorisch durch beliebige, in $\mathfrak{A}$ ursprünglich nicht vorkommende (und natürlich von A, B, C verschiedene) Variable. Dann ist die so entstandene Formel $\mathfrak{A}'$ laut Obigem ableitbar; aus $\mathfrak{A}'$ gelangt man aber durch Einsetzung wiederum zu $\mathfrak{A}$ zurück.

10. Unser Axiomensystem (I)—(XVI) läßt hinsichtlich Einfachheit und anderen ästhetischen Gesichtspunkten viel zu wünschen übrig. So habe ich nicht untersucht, ob die Axiome voneinander unabhängig sind, oder einige aus den übrigen durch Einsetzungen und Abtrennungen abgeleitet werden können. Für die Axiome (VII)—(XVI) trifft letzteres gewiß nicht zu; man kann ja für jedes dieser Axiome eine von der üblichen abweichende Definition der entsprechenden Operation so angeben, daß das fragliche Axiom keine Identität bleibt, wohl aber alle übrigen. Bei den Axiomen (I)—(VI) versagt aber diese Methode, da die Negation und Implikation auch in den übrigen Axiomen vorkommen.

Nun habe ich das Axiomensystem (I)—(XVI) bloß zum Dienste aufgestellt, um die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls einfach beweisen zu können. Hat man ein eleganteres Axiomensystem und will man beweisen, daß dasselbe zur Ableitung aller Identitäten mit Hilfe von Einsetzungen und Abtrennungen ausreicht, so ist es bloß zu zeigen, daß die Formeln (I)—(XVI) in bezug auf jenes Axiomensystem ableitbar sind, was im allgemeinen eine geringere Mühe erfordert, als der direkte Beweis, daß das gleiche auf jede

Identität zutrifft. Dies werde ich weiter unten an einem Beispiel (allerdings bei einer gewissen Vereinfachung der Fragestellung) zeigen.

11. Der obige Beweis der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls zeigt, daß es zur Ableitung einer Identität $\mathfrak{A}$ außer den Hilfsaxiomen (I), (II) und dem Axiom (IV) nur Axiome derjenigen Operationen nötig sind, die in $\mathfrak{A}$ vorkommen; auch können alle Zwischenformeln der Ableitung mit Hilfe von Negationen, Implikationen und den in $\mathfrak{A}$ vorkommenden Operationen aufgebaut werden. Engt man also den Begriff der Formel (und damit den Begriff der Identität) derart ein, daß nur die aus logischen Variablen mit Hilfe von Negationen und Implikationen aufgebauten Ausdrücke als Formeln gelten (wozu der Umstand Anlaß gibt, daß jede, beliebig vielgliedrige, logische Operation sich als Formel in diesem engeren Sinn darstellen läßt), so kann man behaupten, daß jede Identität aus den Identitäten (I)—(VI) mit Hilfe einer endlichen Kette von Einsetzungen und Abtrennungen abgeleitet werden kann. Bei einer Einsetzung kann dabei natürlich nur eine Formel im engeren Sinn für eine Variable eingesetzt werden. Wir werden von nun an die Wörter Formel, Identität, Einsetzung im angegebenen engeren Sinn gebrauchen.

Für dieses engere System der Identitäten wurden mehrere, recht elegante Axiomensysteme von verschiedenen Autoren aufgestellt. Als Beispiel betrachten wir das folgende Axiomensystem von ŁUKASIEWICZ:[16])

$$(L_1) \qquad A \to (B \to A),$$

$$(L_2) \qquad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)),$$

$$(L_3) \qquad (\bar{A} \to \bar{B}) \to (B \to A).$$

Man bemerke, daß (L_2) mit (I) identisch ist und (L_1) sich von (IV)

[16]) Dieses Axiomensystem ist durch Vereinfachung eines von FREGE stammenden Axiomensystems entstanden. Vgl. ŁUKASIEWICZ—TARSKI, a. a. O. [1]), Fußnote [9]) auf S. 35. Ich habe dieses Axiomensystem statt dem noch eleganteren, ebenfalls von ŁUKASIEWICZ stammenden Axiomensystem

$$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)),$$
$$(\bar{A} \to A) \to A,$$
$$A \to (\bar{A} \to B)$$

(vgl. ebendort, Satz 6) gewählt, da das System (L_1)—(L_3) leichter mit unserem zu vergleichen ist.

nur in der Bezeichnung unterscheidet. Daraus folgt, daß diese beiden Formeln Identitäten sind; das gleiche gilt auch für (L_3). Um dies zu beweisen, genügt es nach einer früheren Bemerkung zu zeigen, daß $\bar{A} \to \bar{B} = B = \uparrow$ nur im Fall $A = \uparrow$ möglich ist. Dies folgt aber daraus, daß für $A = \downarrow$, $B = \uparrow$ $\bar{A} \to \bar{B} = \uparrow \to \downarrow = \downarrow$ ausfällt.

Wir nennen eine Formel L-ableitbar, falls sie aus den Axiomen (L_1)—(L_3) mit Hilfe einer endlicher Kette von Einsetzungen und Abtrennungen entsteht. Analog nennen wir eine Formel L-ableitbar aus gewissen Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$, falls sie aus den Axiomen (L_1)—(L_3) und den Formeln $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ mit Hilfe einer endlichen Kette von Abtrennungen und Einsetzungen für solche Variable entsteht, die in den Prämissen *nicht* vorkommen. Nach Obigem sind alle L-ableitbare Formeln Identitäten. Um den das Umgekehrte aussprechenden Satz von ŁUKASIEWICZ zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, daß die Formeln (I)—(VI) L-ableitbar sind. Da (I) mit (L_2) identisch ist und (IV) aus (L_1) durch Einsetzung entsteht, brauchen wir nur die Formeln (II), (III) (V) und (VI) zu betrachten.

Nach der Bemerkung zum Beweis des Hilfssatzes 1 gilt jener Hilfssatz auch für die L-Ableitbarkeit. Wir benötigen einen weiteren Hilfssatz, der sozusagen die indirekte Beweismethode im Axiomensystem (L_1)—(L_3) formalisiert; um diesen Hilfssatz formulieren zu können, führen wir den folgenden Begriff ein. Es seien $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ beliebige Formeln. Wir sagen, daß die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ *widerspruchsvoll*[17]) sind, falls es eine Formel $\mathfrak{A}$ gibt, so daß sowohl $\mathfrak{A}$, wie auch $\bar{\mathfrak{A}}$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ L-ableitbar sind. Enthalten die widerspruchsvollen Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ die Variable A, B, C nicht[18]), so ist eine beliebige Formel $\mathfrak{B}$ aus jenen Prämissen L-ableitbar. In der Tat, aus (L_1) gewinnt man durch Einsetzung $\bar{\mathfrak{A}} \to (\bar{\mathfrak{B}} \to \bar{\mathfrak{A}})$, daraus durch Abtrennung von $\bar{\mathfrak{A}}$ die Formel $\bar{\mathfrak{B}} \to \bar{\mathfrak{A}}$; ferner gewinnt man aus (L_3) durch Einsetzung die Formel $(\bar{\mathfrak{B}} \to \bar{\mathfrak{A}}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ und daraus durch Abtrennung von $\bar{\mathfrak{B}} \to \bar{\mathfrak{A}}$ und dann von $\mathfrak{A}$ die verlangte Formel $\mathfrak{B}$.

Schon diese einfache Bemerkung genügt, um die L-ableit-

---

[17]) Konsequenter sollte man *L-widerspruchsvoll* sagen; der Begriff hängt ja vom zugrunde gelegten Axiomensystem ab.

[18]) Wir benötigen den Begriff der widerspruchsvollen Prämissen und seine Eigenschaften nur in diesem Fall.

barkeit der Formel (V) mit Hilfe des Hilfssatzes 1 zu zeigen. In der Tat: die Prämissen $\bar{D}$ und D sind offenbar widerspruchsvoll, also ist die Formel E aus jenen L-ableitbar; nach Hilfssatz 1 folgt daraus die L-Ableitbarkeit der Formel $D \rightarrow E$ aus der Prämisse $\bar{D}$, daraus weiter die L-Ableitbarkeit der Formel $\bar{D} \rightarrow (D \rightarrow E)$ ohne Prämissen; aus der letzteren gewinnt man aber (V) durch Einsetzung.

Unser neuer Hilfssatz lautet nun, wie folgt:

Hilfssatz 4. *Es seien* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ *beliebige, die Variablen* A, B, C *nicht enthaltende Formeln.* a) *Sind die Prämissen* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \bar{\mathfrak{P}}_r$ *widerspruchsvoll, so ist die Formel* $\mathfrak{P}_r$ *aus den Prämissen* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ *L-ableitbar.* b) *Sind die Prämissen* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \mathfrak{P}_r$ *widerspruchsvoll, so ist die Formel* $\bar{\mathfrak{P}}_r$ *aus den Prämissen* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ *L-ableitbar.*

Beweis. a) Es bezeichne $\mathfrak{A}$ eine beliebige, aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ L-ableitbare Formel, etwa (L_1). Sind die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \bar{\mathfrak{P}}_r$ widerspruchsvoll, so ist nach obiger Bemerkung die Formel $\bar{\mathfrak{A}}$ aus diesen Prämissen L-ableitbar; daher ist nach Hilfssatz 1 die Formel $\bar{\mathfrak{P}}_r \rightarrow \bar{\mathfrak{A}}$ L-ableitbar aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$. Trennt man nun diese Formel, und danach die Formel $\mathfrak{A}$, von der aus (L_3) durch Einsetzung entstandenen Formel

$$(\bar{\mathfrak{P}}_r \rightarrow \bar{\mathfrak{A}}) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{P}_r)$$

ab, so gewinnt man die Formel $\mathfrak{P}_r$.

b) Wenden wir die eben bewiesene Hälfte a) des Hilfssatzes 4 auf die offenbar widerspruchsvolle Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \bar{\bar{\mathfrak{P}}}_r, \bar{\mathfrak{P}}_r$ an. Es folgt, daß die Formel $\mathfrak{P}_r$ L-ableitbar ist aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \bar{\bar{\mathfrak{P}}}_r$. Sind also die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \mathfrak{P}_r$ widerspruchsvoll, so läßt sich aus $\mathfrak{P}_r$, aus $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$ und aus den Axiomen (L_1)—(L_3) durch endlich viele weitere Abtrennungen und Einsetzungen für in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \mathfrak{P}_r$ nicht vorkommende Variable eine gewisse Formel nebst ihrer Negation gewinnen; also sind dann auch die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}, \bar{\bar{\mathfrak{P}}}_r$ widerspruchsvoll. Eine nochmalige Anwendung der Hälfte a) des Hilfssatzes 4 ergibt die L-Ableitbarkeit von $\bar{\mathfrak{P}}_r$ aus den Prämissen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{r-1}$.

12. Nun können wir die L-Ableitbarkeit der Formeln (II), (III) und (VI) beweisen. Offenbar genügt es die Formeln

$$\text{(II')} \qquad (D \to E) \to ((\bar{D} \to E) \to E),$$
$$\text{(III')} \qquad D \to \bar{\bar{D}},$$
$$\text{(VI')} \qquad D \to (\bar{E} \to \overline{D \to E}),$$

aus denen die Formeln (II), (III) und (VI) durch Einsetzung entstehen, als L-ableitbar nachzuweisen. Dies können wir allein durch Anwendung der Hilfssätze 1 und 4 (und des Abtrennungsregels)[19]) wie folgt erbringen.

(II'). Die Prämissen $D \to E$, $\bar{D} \to E$, $\bar{E}$ und $\bar{D}$ sind offenbar widerspruchsvoll (aus der zweiten entsteht ja durch Abtrennung der letzten die Formel E). Daher ist, nach Hilfssatz 4, D aus den Prämissen $D \to E$, $\bar{D} \to E$, $\bar{E}$ L-ableitbar. Also sind auch diese Prämissen widerspruchsvoll; durch Abtrennung von D gewinnt man nämlich aus der ersten Prämisse $D \to E$ die Formel E. Eine nochmalige Anwendung des Hilfssatzes 4 zeigt also die L-Ableitbarkeit von E aus den Prämissen $D \to E$, $\bar{D} \to E$; hieraus folgt aber durch zweimalige Anwendung des Hilfssatzes 1, daß die Formel (II') L-ableitbar (ohne Prämissen) ist.

(III'). Die Prämissen D und $\bar{D}$ sind offenbar widerspruchsvoll; also ist nach Hilfssatz 4 die Formel $\bar{\bar{D}}$ aus der Prämisse D, daher nach Hilfssatz 1 die Formel (III') ohne Prämissen L-ableitbar.

(VI'). Betrachten wir die Formeln D, $\bar{E}$ und $D \to E$ als Prämissen. Durch Abtrennung erhält man E, also sind die genannten Prämissen widerspruchsvoll. Daraus ergibt sich nach Hilfssatz 4,

---

[19]) Daraus folgt, daß die Formeln (II), (III) und (VI) in jedem Axiomensystem ableitbar sind, für welches die Hilfssätze 1 und 4 gültig sind und deren Schlußregeln die Einsetzung und die Abtrennung sind. Durch analoge Betrachtungen erhält man, daß dasselbe auch für die Formeln (I), (IV) und (V) zutrifft. Man kann sogar die Hilfssätze 1 und 4 als *Schlußregeln* deuten in einem Axiomensystem, wobei keine Axiome vorhanden sind, sondern man aus beliebigen Prämissen ausgehen darf; diese Schlußregeln dienen zur Elimination einer Prämisse. Auf diese Weise gelangt man zu einer Formulierung der Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls — bei Beschränkung auf Formeln, die mittels Negationen und Implikationen aufgebaut sind —, die man, bei Zugrundelegung des allgemeinen Formelbegriffs und sogar auch den sogenannten engeren Funktionenkalkül einbezogen, Gentzen verdankt. (Vgl. Gentzen, a. a. O. [10]).)

daß $\overline{D \to E}$ aus den Prämissen D, $\overline{E}$, also nach Hilfssatz 1, daß (VI′) ohne Prämissen L-ableitbar ist.

Damit haben wir gezeigt, daß die Formeln (I)—(VI) und damit alle Identitäten L-ableitbar sind.

13. Die hier dargelegte Methode des Axiomatisierbarkeitsbeweises läßt mehrere Anwendungen zu. So kann man mit ihrer Hilfe auch die Axiomatisierbarkeit derjenigen (von ŁUKASIEWICZ stammenden und von WAJSBERG und LINDENBAUM als axiomatisierbar erkannten[20])) Verallgemeinerung des gewöhnlichen (zweiwertigen) Aussagenkalküls beweisen, bei der die Rolle der beiden logischen Werte durch mehrere (aber endlich viele) verschiedene Werte übernommen wird. Ferner läßt sich die Methode (mit einer geringen Modifikation) auch zum Beweis der Axiomatisierbarkeit gewisser fragmentarischer Systeme des (zwei- oder mehrwertigen) Aussagenkalküls anwenden, die die Negation nicht enthalten. Auf diese Anwendungen werde ich noch zurückkommen.

(Eingegangen am 21. März 1935.)

---

[20]) Vgl. ŁUKASIEWICZ—TARSKI, a. a. O. [1]), Satz 22, S. 40.

Über die Ovaloidschalen der Flächen vom Maximalindex.[1])

Von JULIUS V. SZ. NAGY in Szeged.

1. Unter einer Fläche verstehen wir hier eine aus Elementarflächen bestehende Fläche. Eine Elementarfläche ist eine stetige, geschlossene Fläche, die in jedem Punkte eine mit dem Punkte sich stetig ändernde Berührungsebene hat und für die jede ebene Schnittkurve, sowie jede ebene Schnittkurve eines jeden ihrer Berührungskegel aus Elementarkurven besteht. Eine Elementarkurve ist im Sinne von C. JUEL ein reelles eindeutiges Kreisbild in der projektiven Ebene, welches überall eine Tangente besitzt und aus endlichvielen Konvexbogen besteht[2]). Durch Erweiterung dieser Definition lassen wir den Elementarkurven ganze Geraden und auch isolierte Doppelpunkte zu.

Ein kleinster geschlossener Teil einer Fläche, der selbst eine Fläche im definierten Sinn ist, ist eine Schale oder ein Mantel der Fläche. Wir nehmen an, daß die Fläche keine Ebene- oder Punktschale besitzt.

Die Ordnung einer Fläche ist die höchste Anzahl (einfacher) reeller Punkte, in denen die Fläche von einer beliebigen, nicht ganz in der Fläche enthaltenen Geraden getroffen wird. Der Index der Fläche ist die geringste Anzahl (einfacher) reeller Punkte, in

---

[1]) Diese Arbeit ist ein wenig veränderter kleiner Teil aus einer der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 12. Nov. 1934 vorgelegten Arbeit: Maximális indexű felületekre vonatkozó vizsgálatok, *Mat. és Természettudományi Értesitő,* **53** (1935), S. 420—474.

[2]) C. JUEL, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, *D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter,* (7), *Naturv. og Math. Afd.,* **11** (1914), Nr. 2, S. 113—136; Über Elementarflächen, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung,* **22** (1913), S. 345—349; Über Flächen von Maximalindex, *D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Math.-fys. Meddelelser,* **6** (1924), Nr. 5, S. 1—40.

denen die Fläche von einer beliebigen Geraden getroffen werden kann. Eine Fläche n-ter Ordnung ist vom Maximalindex, wenn sie den Index $n-2$ hat.

Wir verstehen unter einem Ovaloid eine Fläche zweiter Ordnung, die sich ins Endliche projizieren läßt. Für Ovaloidschalen der Flächen vom Maximalindex haben wir die folgenden Sätze bewiesen[3]:

Eine Fläche vom Maximalindex kann höchstens ein Ovaloid haben. Die Ovaloidschale einer Fläche vom Maximalindex wird von keiner anderen Schale der Fläche geschnitten oder berührt.

Ist eine Schale einer Fläche vom Maximalindex eine Kegelfläche, so sind auch ihre übrigen Schalen — mit Ausnahme höchstens eines Ovaloides — Kegelflächen mit derselben Spitze.

2. Zur Ergänzung dieser Sätze beweisen wir erst den folgenden Satz:

I. *Hat eine Fläche vom Maximalindex eine Ovaloidschale, so kann sie keine Regelflächenschale haben.*

Ist nämlich S_o bzw. S_r eine Ovaloid- bzw. Regelflächenschale einer Fläche F vom Maximalindex, so wird S_o von keiner Geraden der Schale S_r getroffen. Man kann also durch eine gewöhnliche Erzeugende von S_r eine Ebene σ führen, von der das Ovaloid S_o berührt wird. Die Ebene σ berührt aber auch die Schale S_r, weil sie durch eine Erzeugende von S_r hindurchgeht. Bedeutet P_o bzw. P_r den Berührungspunkt der Tangentialebene σ mit der Schale S_o bzw. S_r, so liegt die Gerade P_oP_r ganz auf der Fläche F, weil eine Fläche vom Maximalindex keine Doppeltangente haben kann[4]. Der Punkt P_o ist also ein gemeinsamer Punkt des Ovaloides S_o mit der Schale S_r.

Aus diesem Widerspruch folgt also der Satz I.

3. Wir beweisen auch den folgenden Satz:

II. *Die Ordnung und der Index einer Fläche vom Maximalindex, die ein Ovaloid und außerdem auch andere Schalen hat, bleibt unverändert, wenn man das Ovaloid ausläßt oder es durch*

---

[3]) Julius v. Sz. Nagy, Über Flächen vom Maximalindex, *Math Annalen*, **98** (1927), S. 657—683, insb. S. 660—663. Diese Arbeit wird im Folgenden unter N angeführt.

[4]) N, S. 658; vgl. auch Hans Mohrmann, Über algebraische und nicht algebraische gewundene Kurven vom Maximalindex, *Math. Annalen*, **78** (1918), S. 171—176, insb. S. 172.

ein anderes Ovaloid ersetzt, das im Innern des ersten Ovaloides liegt.

Das Innere eines Ovaloides bedeutet die Menge der Punkte, von denen keine Tangente des Ovaloides ausgeht.

Zum Beweis dieses Satzes müssen wir nur zeigen, daß die Schnittkurve K der Fläche F vom Maximalindex mit einer beliebigen Ebene σ, von der die Ovaloidschale S_0 geschnitten wird, ihre Ordnung und ihren Index behält, wenn man das auf S_0 liegende Oval M_0 der Kurve K ausläßt oder durch ein im Innern von M_0 liegendes Oval ersetzt.

Das Oval M_0 hat keinen gemeinsamen Punkt mit einem anderen Zuge von K. Im entgegengesetzten Falle hätte nämlich das Ovaloid S_0 mit einer anderen Schale der Fläche F gemeinsame Punkte.

Die polare Figur der Kurve K in bezug auf einen in der Ebene liegenden Kreis ist eine Kurve K' vom Maximalklassenindex. Die Anzahlen der Tangenten, die aus zwei beliebigen Punkten der Ebene σ an die Kurve K' gehen, weichen nämlich voneinander um höchstens 2 ab. Die polare Figur des Ovales M_0 ist ein Oval M_0', das keine gemeinsame Tangente mit den übrigen Zügen von K' hat.

Auf Grund dieser Eigenschaft von M_0' werden wir zeigen, daß die übrigen Züge von K' alle im Innern von M_0' liegen. Für den Beweis benützen wir den folgenden Satz[5]):

Die Züge M_0' und M' einer ebenen Kurve vom Maximalklassenindex haben $m_0 m$ gemeinsame Tangenten, wenn m bzw. m_0 die Anzahl der Tangenten bedeuten, die aus einem Punkte von M_0' bzw. M' an den anderen Zug gehen.

Bedeutet M_0' bzw. M' das Oval bzw. einen beliebigen Zug von K', so ist $m_0 m = 0$, weil diese Züge keine gemeinsame Tangente haben. Ist nun die Klasse des Zuges M' mindestens drei, so ist $m \neq 0$ und deshalb $m_0 = 0$. Der Zug M' liegt also innerhalb des Ovales M_0'. Ist auch der Zug M' ein Oval, so liegt das eine Oval von M_0' und M' innerhalb des anderen, weil entweder $m_0 = 0$, oder $m = 0$ ist. Die Kurve K' kann also außerhalb des Inneren von M_0' nur Ovalzüge haben, von denen das Oval M_0'

[5]) Julius v. Sz. Nagy, Über die Züge der ebenen Kurven von Maximal-Klassenindex, *Math. Annalen*, **100** (1928), S. 179—187, insb. S. 186.

umgegeben ist. Hat die Kurve K' mehrere solche Ovale M', so gibt es unter diesen auch ein solches Oval $\bar{M}'$, so daß das von M_0' und $\bar{M}'$ begrenzte zweifach zusammenhängende Gebiet keinen Zug von K' enthält. Aus den Punkten dieses Gebietes läßt sich die konvexe bzw. die konkave Seite des Ovales M_0' bzw. $\bar{M}'$ erreichen. Dies ist aber unmöglich, weil K' eine Kurve vom Maximalklassenindex ist[6]).

Daraus folgt, daß das Innere des Ovales M_0' jeden anderen Zug von K enthält.

Das Oval M_0' und damit auch die ganze Kurve K' läßt sich ins Endliche projizieren. Daraus folgt, daß die Kurve K' keine Wendetangente hat, weil eine Kurve vom Maximalklassenindex höchstens eine Wendetangente haben kann und eine Kurve mit einer einzigen Wendetangente unpaar ist, die sich ins Endliche nicht projizieren läßt.

Die Kurve K' teilt die Ebene σ in gewisse Gebiete G_0, $G_1, \ldots$ Gehören die an der konkaven Seite des Ovales M_0' liegenden Punkte der Ebene zum Gebiete G_0 und bedeutet n die Klasse der Kurve K', so gehen $n-2$ Tangenten aus jedem Punkte von G_0 an die Kurve K'. Aus den Punkten der zu G_0 benachbarten Gebiete gehen n Tangenten an K'. In diese Gebiete gelangt nämlich ein Punkt aus G_0 ausgehend so, daß er einen konvexen Bogen von K' von der konkaven Seite nach der konvexen Seite übertritt.

Die Klasse und der Klassenindex der Kurve K' bleibt offenbar unverändert, wenn man das Oval M_0' durch ein größeres Oval ersetzt, von dem M_0' ungegeben ist, oder das Oval M_0' einfach ausläßt. Durch dieses Verfahren wird das Gebiet G_0 durch ein solches Gebiet der Ebene vergrößert, aus dessen Punkten an die Kurve K' n Tangenten gezogen werden können.

Nimmt man die polare Figur der Kurve K' in bezug auf den angenommenen Kreis, so folgt, daß die Kurve K n-ter Ordnung und vom Maximalindex ihre Ordnung und ihren Index behält, wenn mas das Oval ausläßt oder durch ein im Innern von M_0 liegendes anderes Oval ersetzt.

Damit ist auch der Satz II bewiesen.

4. Aus dem Beweise des Satzes II folgt auch der folgende Satz:

---

[6]) Julius v. Sz. Nagy, Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex, *Math. Annalen*, **89** (1923), S. 32–75, insb. S. 49–50.

III. *Hat eine Fläche vom Maximalindex ein Ovaloid, so werden ihre Schalen von jeder das Ovaloid schneidenden Ebene in Kurven von gerader Klasse geschnitten.*

Im entgegengesetzten Falle gäbe es eine Ebene σ, von der das Ovaloid S_0 bzw. die Schale S der Fläche F vom Maximalindex in einem Oval M_0 bzw. in einer Kurve M mit einer Spitze geschnitten würde. Die duale Figur der Schnittkurve der Fläche F mit der Ebene σ hätte also eine Wendetangente. Dies ist aber nach den Vorigen unmöglich.

5. Nachtrag während der Korrektur (am 3. Oktober 1935).

IV. *Eine Ovaloidschale einer Fläche vom Maximalindex kann von keiner Tangentialebene der Fläche geschnitten werden.*

Im Innern der Ovaloidschale S_0 kann die Fläche F keinen Punkt haben. Im entgegengesetzten Falle hätte nämlich S_0 mit einer anderen Schale S_1 von F gemeinsame Punkte und deshalb auch gemeinsame Geraden.

Für den Beweis des Satzes IV nehmen wir an, daß S_0 von einer Tangentialebene der Schale S_1 im Oval M_0 geschnitten wird. Der Berührungspunkt P dieser Tangentialebene von S_1 liegt außerhalb von S_0 und deshalb auch außerhalb von M_0. Das Oval M_0 hat also zwei durch P hindurchgehende Tangenten t_1 und t_2. Diese Tangenten berühren die Fläche F auch im Punkte P. Dies ist aber unmöglich, weil eine Fläche vom Maximalindex keine Doppeltangente haben kann und weil t_1 und t_2 der Fläche F nicht zugehören können. Wären nämlich diese Geraden auf F gelegen, so hätte das Ovaloid S_0 mit einer anderen Schale von F gemeinsame Punkte und Geraden.

Daraus folgt der Satz IV.

Durch eine Gerade, von der S_0 geschnitten wird, gehen also keine Tangentialebenen an die Fläche F. Der Klassenindex von F ist also Null. Daraus folgt der Satz:

V. *Die Klasse bzw. der Klassenindex einer Fläche vom Maximalindex, die auch eine Ovaloidschale besitzt, ist eine gerade Zahl bzw. Null.*

Die Sätze I—III lassen sich aus dem Satze IV unschwer gefolgert werden.

(Eingegangen am 23. April 1935.)

Bibliographie.

Felix Klein, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, gehalten an der Universität Göttingen im Wintersemester 1893/94, ausgearbeitet von ERNST RITTER, herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von OTTO HAUPT (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band XXXIX), IX+344 S., Berlin, J. Springer, 1933.

Est ist erstaunlich, welche Lebendigkeit und Kraft der Intuition aus den Vorlesungen von FELIX KLEIN auch 40 Jahre nach ihrem Entstehen entströmt. Die Neuausgabe der Kleinschen Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion wird aus diesem Grunde jedem herzlich willkommen sein. In einer sorgfältig zusammengestellten Reihe von Anmerkungen des Herausgebers werden Hinweise auf inzwischen gemachte Fortschritte der Wissenschaft gegeben.

B. v. K.

Casimir Kuratowski, Topologie, I: Espaces métrisables, espaces complets (Monografje Matematyczne, Tom III), X+285 pages, Warszawa-Lwów, 1933.

Le présent volume contient une étude détaillée et approfondie de la topologie des ensembles abstraits. La méthode adoptée est purement axiomatique; cette méthode permet de reconnaître une base suffisante et réduite de chacun des théorèmes considérés. La méthode axiomatique appliquée à la théorie des ensembles abstraits caractérise l'oeuvre de l'école des mathématiciens groupé autour des *Fundamenta Mathematicae;* l'auteur du présent volume expose sous un aspect général et uniforme une partie considérable des résultats obtenus par cette école.

Voici quelques indications très sommaires sur le riche contenu du volume. Après une introduction au formalisme adopté, le premier chapitre fait connaître la topologie dans les espaces appelés accessibles, n'assujetis qu'à trois axiomes sur la fermeture des ensembles, analogues à ceux introduits par M. F. RIESZ. Conformément à la théorie des espaces abstraits développée par M. FRÉCHET, dans le deuxième chapitre les espaces métrisables et séparables ont été considérés. On trouve dans ce chapitre aussi un excellent résumé sur la théorie de la dimension et des applications de la théorie générale à la théorie des fonctions. Le troisième chapitre considère les espaces complets, en particulier les espaces complets séparables, mettant en évidence leur rapport avec les ensembles projectifs et analytiques. Un index terminologique ajouté à la fin du volume facili e la lecture du livre.

On attend avec intérèt ce que contiendra le volume II.

B. de K.

Kazimierz Bartel, Malerische Perspektive, Band I: Grundsätze, geschichtlicher Überblick, Ästhetik, deutsch von WOLFGANG HAACK, VIII + 339 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

Das Buch enthält eine wissenschaftliche Analyse der malerischen Perspektive. Die Perspektive umfaßt diejenigen Gesetze, nach denen ein anschauliches Bild räumlicher Objekte zu zeichnen ist. Der Verfasser verwirft die weitverbreitete Ansicht, daß ein Eindringen der Wissenschaft in das Gebiet der Kunst nicht möglich ist. Das Buch beginnt mit den Elementen der Zentralprojektion. Dann folgen die Grundzüge der ebenen angewandten Perspektive. Dieses Gebiet der Perspektive befaßt sich vorwiegend mit Problemen der Architekten und Maler. Der Verfasser veranschaulicht die charakteristischen Fälle mit photographischen Aufnahmen und Zeichnungen. Es ist sonst in dem ganzen Buch ein großes Gewicht auf die Veranschaulichung mit künstlerischen Bildern gelegt. Die Kapiteln: *Perspektive der Kegelschnitte, Das perspektive Bild von Rotationsflächen, Perspektive Darstellung ebener Spiegelbilder* behandeln schon die komplizierteren Aufgaben des darstellenden Künstlers. Das Kapitel: *Gebundene Perspektive* ist besonders den Architekten gewidmet. — Das Buch bietet eine wissenschaftliche Einführung in die Theorie der darstellenden Kunst und zeigt ihre Entwicklung seit den ältesten Zeiten. Die prachtvolle Ausstattung des Buches ist besonders erwähnenswert.

St. Lipka.

Gilbert Ames Bliss, Algebraic Functions (American Math. Society Colloquium Publications, Volume XVI), IX + 218 pages, New York, American Mathematical Society, 1933.

The theory of algebraic functions has been developed by three different methods which have been designated as transcendental, algebraic-geometric and arithmetic. The present volume gives an excellent introduction to and account on the three different methods.

Chapter I serves as an introduction to the theory of single-valued analytic functions. Chapter II contains the elements for a formal theory of algebraic functions, among others the NEWTON polygon method for the expansions of an algebraic function in the neighborhood of a singular point. In Chapter III the theory of rational functions of two variables is exposed; the theory of divisors and bases is developed in a simple way in order to obtain the RIEMANN—ROCH theorem — fundamental in the arithmetic theory. In Chapter IV the RIEMANN surfaces of algebraic functions have been introduced together with the theory of holomorphic functions on a RIEMANN surface. Chapter V is devoted to the integrals of rational functions and Chapter VI to ABEL's theorem on integrals of rational functions. In Chapter VII the birational transformations give an opportunity to a thorough geometrical investigation of the genus of an algebraic curve. In Chapter VIII the fundamental theorems concerning the reduction of the singularities of an algebraic curve by transformations are proved; the distinction between transformations on the projective and on the function-theoretic plane, respectively, as given by the author, makes transparent the character of this kind of theorems. In Chapter IX the inversion problem of elliptic integrals and the elementary theory of elliptic functions is explained. In Chapter X the author gives a series of instructive examples for the whole of the work. A list of references and index close the volume.

The whole book is very easy to read and it gives a comparatively reach material. The referent should like to express two suggestions for a new edition: 1. it would be desirable to give an adequate place to the WEIERSTRASS theory of algebraic functions; 2. in connection with ABEL's theorem it would be advantageous to formulate the inversion problem for sums of integrals of the first kind and to emphasize the principial difference between the cases $p=1$ and $p>1$.

The referent is convinced that this short book will be an excellent guide for the theory of algebraic functions and it will conquire new friends to this brilliant theory — partly out of fashion in recent time.

B. de K.

H. Seifert und W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, VII+353 S, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

Die Verfasser des vorliegenden Buches, beide bekannt durch ihre eigenen Resultate in Topologie, stellen sich die Aufgabe, eine Einführung und einen Überlick über den heutigen Stand der Topologie zu geben. Sie wollen ihr Ziel nicht nur durch eine vollständige Zusammenstellung der grundlegenden allgemeinen Sätze erreichen, sondern sie stellen die Begriffe und die Methoden in die Mitte der Betrachtung. Die historische Entwicklung bestätigt die Richtigkeit dieser Auffassung.

Die Unterscheidung zwischen den drei Richtungen: abstrakte, punktmengentheoretische und kombinatorische Topologie kommt mit der Entwicklung dieser Wissenschaften immer mehr zum Verschwinden. Zwischen der abstrakten und der punktmengentheoretischen Richtung wird die Lücke durch die Charakterisierung der lokal-euklidischen Mannigfaltigkeiten als topologisch homogener, im Kleinen kompakter und im Kleinen zusammenhängender, separabler Mengen endlicher Dimension hoffentlich bald beseitigt. Zwischen der punktmengentheoretischen und der kombinatorischen Topologie bildet ein neulich von NÖBELING bewiesener grundlegender Satz die Brücke, laut dessen jede lokal-euklidische separable Menge eine simpliziale Zerlegung (Triangulation) zuläßt. Die Folgerungen aus diesem Satz sind durchdringend für die Topologie der Mannigfaltigkeiten.

Die kombinatorische Topologie betrachtet die $0, 1, \ldots, n$-dimensionalen Zellen, aus denen eine Mannigfaltigkeit aufgebaut wird, und deren Inzidenzrelationen, ohne Kenntnis davon zu nehmen, daß die Zellen von Punkten ausgefüllt werden. Die punktmengentheoretische Topologie erklärt die Mannigfaltigkeiten als lokal-euklidische separable Mengen. Vor dem Resultat von NÖBELING wurde eine méthode mixte angewendet, die einerseits von den Zellen der kombinatorischen Topologie ihre Homöomorphie mit euklidischen Simplexen, andererseits von den Mannigfaltigkeiten ihre Triangulierbarkeit voraussetzte. Diese Betrachtungsweise wurde dem vorliegenden Buch zugrundegelegt, wobei die kombinatorisch-algebraische Methode die vorwiegende Rolle bekam. Der Inhalt des Buches wird durch das Resultat von NÖBELING in keiner Hinsicht gestört, nur vervollständigt; höchstens wäre die Definition der Mannigfaltigkeiten auf S. 236 anders zu fassen.

Das Grundproblem der Topologie ist die Bestimmung von Bedingungen, unter denen zwei Gebilde homöomorph, d. h. topologisch aufeinander abbildbar sind. Dieses Problem ist nur für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten (Flächen) gelöst worden. Bereits bei diesem Fall erhellt es, daß außer den absoluten Eigenschaften der Gebilde, die bei allen topologischen Abbildungen invariant bleiben, die relativen Eigenschaften eine grundlegende Rolle spielen müssen: die relativen Eigenschaften der in einem gegebenen Gebilde G enthaltenen Gebilde, in bezug auf G, können als absolute Eigenschaften von G selbst erklärt werden. Auf diese Weise gelangt man zu den Homologie-, Homotopie-, und Isotopiebegriffen. Als das höchste Resultat in dieser Richtung ist heute wohl der Dualitätssatz von ALEXANDER und seine von PONTRJAGIN herrührende Weiterbildung anzusehen; mit den Verfassern zusammen können wir nur bedauern, daß diese Resultate nur in den Anmerkungen kurz erörtert werden konnten. — Es gibt aber umsomehr zu freuen bei der Lektüre dieses schönen Buches!

Das ist nämlich ein vortreffliches Lehrbuch von dem heutigen Stand der Topologie. Die klare Darstellung, die gut gewählten Beispiele und die schön gezeichneten Figuren sorgen überall dafür, daß man nicht nur den Eindruck bekommt, etwas verstanden zu haben, sondern daß man wirklich Alles bis in die letzten Einzelheiten und Feinheiten versteht. Von dem reichen Inhalt gibt bereits das folgende Verzeichnis ein Bild. I. Anschauungsmaterial. II. Simplizialer Komplex. III. Homologiegruppen. IV. Simpliziale Approximation. V. Eigenschaften im Punkte. VI. Flächentopologie. VII. Fundamentalgruppe. VIII. Überlagerungskomplexe. IX. Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. X. n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. XI. Stetige Abbildungen. XII. Hilfssätze aus der Gruppentheorie.

Das vorhandene Material wurde nach eigener und sehr tiefer Auffassung der Verfasser geordnet und umgestaltet, um eine durchwegs interessante und bindende Lektüre dem Fachmann, und Lehrbuch dem Studierenden zu bieten. Die eigenen Resultate der Verfasser über gefaserte Räume, die ein Eindringen in das ungelöste Homöomorphieproblem dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten bedeuten, müssen besonders hervorgehoben werden; man hätte gern etwas mehr darüber in dem Buch gelesen. — Die Flächentopologie ist ein wenig umständlich dargestellt; der Grund dafür ist wohl der, daß die Verfasser keinen zu großen Gebrauch von den Vorteilen dieses einfachsten Falles machen wollten, vielmehr bestanden sie darauf, die allgemeinen Methoden an diesem einfachen Fall dem Leser geläufig zu machen. Die im zwölften Kapitel enthaltenen Betrachtungen über Gruppentheorie müssen noch besonders erwähnt werden, wegen ihrer Einfachheit und Eleganz. — Die Anmerkungen am Schluß des Bandes bilden eine reizende Lektüre für sich. Es ist Schade, daß das Literaturverzeichnis nicht nach irgend einem Prinzip zusammengestellt wurde; es enthält immerhin wertvolles bibliographisches Material.

Die mathematische Welt muß den Verfassern dieses vorzüglichen Werkes Dank wissen. Der schönste Erfolg des Buches wäre, wenn es die Forscher zu der in diesem Buch vertretenen gesunden Richtung der konkreten Topologie zuwenden könnte. Wir wünschen es im Interesse des Buches und der Topologie.

B. v. K.

D. Hilbert und P. Bernays, Grundlagen der Mathematik, erster Band (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band XL), XII + 471 S., Berlin, J. Springer, 1934.

Wir alle, die uns um die mathematische Grundlagenforschung interessieren, schauten seit 1928 mit Ungeduld der bereits im Vorwort der *Grundzüge der theoretischen Logik* von HILBERT und ACKERMANN angekündigten Darstellung der Methoden und Ergebnissen der Hilbertschen Beweistheorie entgegen. Die Notwendigkeit einer solchen zusammenfassenden Darstellung liegt an der Hand und wird auch besonders durch folgende Gründe motiviert. In seinen Originalarbeiten beschränkte sich HILBERT auf die Klarlegung der Leitgedanken seiner Beweistheorie und auf die Angabe der Ansätze zum Widerspruchsfreiheitsbeweis; dann ließ er sich meistens in Diskussionsbemerkungen ein. Daher blieb die — mit großen technischen Schwierigkeiten verbundene und oft auch neue Ideen verlangende — Durchführung der äußerst reichhaltigen Hilbertschen Gedanken eine Aufgabe seiner Schüler und Anhänger. Die diesbezüglichen Untersuchungen wurden nur zum Teil publiziert. Andererseits erschien inzwischen eine Arbeit von GÖDEL, die eine Revision der früheren Vermutungen über die Anwendbarkeitsgrenzen der bisherigen Ansätze (wenn auch, wie HILBERT in den zur Einführung geschriebenen Zeilen stark betont, nicht der Beweistheorie selbst) nötig machte. Diese Umstände verzögerten natürlich zugleich die Herausgabe des Werkes; endlich liegt nun aber wenigstens der erste Band desselben zu unsere Freude vor.

Das Buch verlangt vom Leser — außer einer gewissen Vertrautheit mit den Elementen der Zahlentheorie — keine mathematischen Vorkenntnisse; auch das oben erwähnte Hilbert-Ackermannsche Werk wird nicht als bekannt vorausgesetzt, sondern es wird zunächst der Aussagenkalkul in § 3 als ein arithmethischer Kalkul in einer Menge von zwei Elementen — die man in Hinblick auf die Anwendungen „wahr" und „falsch" nennt — entwickelt. Diese — auf ŁUKASIEWICZ und noch weiter zurückgehende — Darstellungsweise ist dem Mathematiker gewiß sympathischer, als die ältere Auffassung dieses Kalkuls als eine Algebra der Aussagen; sie läßt den rein mathematischen, von jedem besonderen philosophischen Standpunkt unabhängigen Charakter des Aussagenkalkuls klar hervortreten. Dann folgt in § 4 ein formal-axiomatischer Aufbau des (engeren) Prädikatenkalkuls; zur heuristischen Begründung desselben wird die im vorigen Paragraphen berührte Axiomatisierung des Aussagenkalkuls herangezogen; auch die (für Anwendungen auf beweistheoretische Untersuchungen nicht in Betracht kommende) mengentheoretische Auffassung des Prädikatenkalkuls wird kurz besprochen. In § 5 wird der Prädikatenkalkul durch die Hinzunahme der Gleichheitsaxiome erweitert.

Diesen *logischen* Teil (§ 2—5) des Buches gehen zwei einleitende Paragraphen voran. § 1 dient zur Einführung in die Fragestellungen der Beweistheorie; dieser Paragraph enthält zugleich alles, was dem Fachphilosophen Lust zum Lesen dieses (auch für ihn genußreiches) Buches machen kann, um danach reine Mathematik bieten zu können. In § 2 wird die inhaltichte Arithmetik insoweit entwickelt, wie dies später benötigt wird; zugleich wird auf die Grenzen des in derselben in Anwendung kommenden finiten Schließens hingewiesen.

Von § 6 an schreitet das Werk allmählich gegen das große Ziel: „unsere übliche Methoden der Mathematik samt und sonders als widerspruchsfrei zu erkennen". Zunächst wird das Peanosche Axiomensystem, erweitert durch die Axiome für „kleiner", aber unter Ausschluß der Addition oder sonstigen, durch Rekursion definierten Funktionen, als widerspruchsfrei erkannt; dadurch wird zugleich die Widerspruchsfreiheit unendlicher Individuenbereiche gezeigt. Derselbe Paragraph enthält auch die entsprechenden Vollständigkeits- und Unabhängigkeitsuntersuchungen. Da nun das erwähnte Axiomensystem sich als ungenügend für die Entwicklung der Zahlentheorie erweist, werden in § 7 die rekursiven Definitionen hinzugenommen. Durch Ausschluß der gebundenen Variablen gewinnt man ein Axiomensystem, das sich leicht als widerspruchsfrei erkennen läßt und zugleich eine brauchbare Grundlage für weitere Untersuchungen bildet. Zunächst wird das sogenannte primitive Rekursionsschema zugrunde gelegt; die übliche elementare Zahlentheorie wird mit Hilfe desselben entwickelt. Nach Behandlung gewisser Typen von komplizierteren Rekursionen, die sich noch auf primitive zurückführen lassen, wird an einem von Herrn ACKERMANN stammenden, durch Frl. PÉTER stark vereinfachten Beispiel gezeigt, daß eine wesentliche Verallgemeinerung des Rekursionsbegriffes möglich ist, die alle wichtigen Eigenschaften der Rekursion ungeändert läßt.

Da nun das freie Handeln mit den Begriffen „alle" und „es gibt", das nur durch den Kalkul mit gebundenen Variablen gewährleistet wird, zu „unseren üblichen Methoden der Mathematik" gehört, wird zum Formalismus des vorigen Paragraphen zurückgekehrt und dieser zunächst durch die Addition als einzige rekursive Funktion erweitert. Durch die Methode des Ausintegrierens, die bereits in § 6 verwendet wurde, wird für das so gewonnene System Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit, dagegen aber Unzulänglichkeit für den Aufbau der Zahlentheorie gezeigt. Bei Hinzunahme der Multiplikation gewinnt man ein viel weiterreichendes Axiomensystem; auf dieses ist aber jene Methode nicht mehr anwendbar. — § 8 ist der Hinzunahme des Begriffs „derjenige, welcher“ zum bisherigen Formalismus gewidmet; mit Hilfe desselben wird die Eliminierbarkeit der weiteren rekursiven Funktionen gezeigt; andererseits wird auch die Eliminierbarkeit des erwähnten Begriffs, ohne Auftreten neuer rekursiver Funktionen, bewiesen, so daß die Widerspruchsfreiheit der durch die gebundenen Variablen erweiterten rekursiven Zahlentheorie auf die des letzterwähnten Axiomensystems zurückgeführt wird. Die beweistheoretische Untersuchung dieses Systems blieb aber leider dem zweiten Bande vorbehalten.

Diese sehr lückenhafte Inhaltsangabe zeigt schon, welche Fülle von Stoff in acht Paragraphen bearbeitet wird. Es gibt keine Unterteilung der Paragraphen; das Fehlen von Gliederung stört aber erstaunlicherweise die Übersichtlichkeit gar nicht; im — recht ausführlichen — Inhaltsverzeichnis wird die Unterteilung der Paragraphen so musterhaft verwirklicht, daß man einen bereits gelesenen Teil sofort wiederfinden kann. Die Gliederungslosigkeit des Textes ist auch eine (aber nur die kleinere!) Ursache dafür, daß man das Lesen des Buches nicht vor Abschluß des Paragraphen unterbrechen kann.

Man wird angenehm durch das vollständige Fehlen von Diskussionsbemerkungen überrascht. Dies ist ein Zeichen dafür, daß die beiden großen Forscher der Grundlagen der Mathematik: BROUWER und HILBERT sich verstanden haben. Daß dieses Verständnis in der Tat ein gegenseitiges ist, zeigt die anerkennende Besprechung durch HEYTING, Brouwers Schüler, im *Zentralblatt für Math.*, **9** (1934), S. 145—146, nach welcher im ganzen Buch eine einzige vom intuitionistischen Standpunkt zu beanstandende Stelle vorhanden ist; dabei sind die Einwände historischer bzw. philosophischer Art. Auch die optimistische Äußerung Hilberts im Vorwort, aus den Ergebnissen von GÖDEL folge nicht die Undurchführbarkeit der Beweistheorie, ist seiner Vermutung zuzuschreiben, daß nie alle inhaltlichen Konstruktionsmethoden im Rahmen eines festen (finit zu beschreibenden) Axiomensystems formalisiert werden können: wieder eine Annäherung an die Ansichten Brouwers. Möge das zweite Band bald zeigen, daß Hilberts Optimismus berechtigt ist!

L. Kalmár.

A. Heyting, Mathematische Grundlagenforschung: Intuitionismus, Beweistheorie (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, dritter Band, Heft 4), IV+73 S., Berlin, J. Springer, 1934.

Die Schriftleitung der *Ergebnisse* hätte wohl keinen geeigneteren Mann für ein unparteiisches Referat über die beiden, früher aus Mangel an Objektivität feindlichen, jetzt aber glücklicherweise versöhnten und neben einander arbeitenden Richtungen zur Grundlegung der Mathematik finden können, als diesen, unter Anderen durch Aufstellung eines formalen Axiomensystems, die die *bisherige* intuitionistische Mathematik auszudrücken fähig ist, bekannt gewordenen Forscher. Jene beiden Richtungen, Intuitionismus und Beweistheorie, besitzen als gemeinsame Grundlage die althergebrachte, durch finite Konstruktionen begründete inhaltliche Zahlenlehre. Der Brouwersche Intuitionismus bestrebt die inhaltlichen Methoden weiterzuführen und mit deren Hilfe einen möglichst weiten Teil der Analysis und Mengenlehre zu begründen; alles, was eine solche Begründung nicht zuläßt, läßt er, wenn auch mit schweren Herzen, fallen. Die Hilbertsche Beweistheorie verwendet dagegen die inhaltlichen Methoden zur Untersuchung von Formalismen, darunter von solchen, in denen die *gesamte* klassische Mathematik ausgedrückt werden kann. Hier wird also kein Teil der Mathematik zum Opfer der Grundlagenforschung, dafür ist man aber, um die Nichttrivialität der formalen Operationen zu sichern, gezwungen, die formale Widerspruchsfreiheit des Systems zu zeigen, was bekantlich bisher nur für einige einfache Formalismen ausgeführt wurde. — Die dritte wohlbekannte Richtung der Grundlagenforschung, der Logizismus, der auf einer völlig anderen Grundlage beruht, wurde im vorliegenden Heft nicht behandelt; dagegen werden die Ansichten der dem Intuitionismus in manchem Hinsicht nahe stehenden französischen Mathematiker (POINCARÉ, BOREL, LEBESGUE und ihre Schule), wie auch die empirischen Standpunkte von MANNOURY und PASCH, besprochen.

Nach einem kurzen Referat über die Leitgedanken und Ergebnisse des intuitionistischen und axiomatisch-beweistheoretischen Begründung der Mathematik folgt ein zusammenfassender Paragraph über *Intuitionismus und Beweistheorie.* Aus diesem Paragraphen möge hier das folgende, für die Objektivität des Heftes charakteristische Stelle angeführt werden: „Lebhaft steht in der Erinnerung der Streit zwischen HILBERT und BROUWER. Beide hochverdient für Mathematik, beide von einer großen Liebe zu ihrer Wissenschaft beseelt, wurden diese Männer durch die Divergenz ihrer Grundansichten zu verbitterten Gegnern. Wie BROUWER es nicht ertragen konnte, daß die Mathematik, dieses kostbare Kleinod des Geistes, zu einem sinnlosen Spiel mit Zeichen werden sollte, so war es HILBERT unmöglich, die schönen Teile des stolzen Bauwerkes, das für ihn die Mathematik war, einer spitzfindigen Tadelsucht zu opfern. Die Diskussion wurde noch erschwert durch terminologische Unklarheiten ...". — Nach Heytings Ansicht ist „eine Einigung zwischen Intuitionismus und Formalismus ... durchaus möglich, vorausgesetzt, daß dieser sich auf den extremen formal-historischen Standpunkt stellt ...". Diese Worte zeigen allerdings eine Ablehnung von Hilberts Theorie der *idealen Aussagen*, die in der Überzeugung von einer inhaltlichen Bedeutung der Mathematik wurzelt, welche durch die Widerspruchsfreiheit gerechtfertigt wird.

Im letzten Abschnitt, über *Mathematik und Erfahrung*, werden die Ansichten von WEYL und BROUWER über die Anwendbarkeit der Mathematik auf die Umwelt auseinandergesetzt. Nach WEYL wird die formale Mathematik eben durch die empirisch bestätigte Anwendbarkeit auf die Erfahrungswelt berechtigt; nach BROUWER beruht die Anwendungsmöglichkeit im letzten Grunde darauf, daß bereits das Konstatieren einer Erfahrungstatsache mit einer mathematischen Konstruktion verbunden ist.

L. Kalmár.

23

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK, Budapest

Mostly reprinted (available in October, 1968). Vols. 1—50, 1892—1943, all published, with General Index

clothbound US $ 850.—, paperbound, resp. in original issues US $ 750.—

Prepublication price, valid until June 30, 1968:
clothbound US $ 800.—, paperbound, resp. in original issues US $ 700.—

Published by the L. Eötvös Mathematical and Physical Association in Hungarian, since 1920 contains also ample summaries in German language.
Mathematical editors: G. Rados (1892—1913), L. Fejér (1914—1932), D. König (1933—1943).

MATEMATIKAI LAPOK, Budapest

Partly reprinted. Vols. 1—18, 1949/50—1967

clothbound US $ 196.—, paperbound, resp. in original issues US $ 160.—

Mathematical quarterly, published by the Bolyai Mathematical Society in Hungarian, with summaries in congress languages.

SOVIET MATHEMATICAL REPRINTS

TRUDY SEMINARA PO VEKTORNOMU I TENZORNOMU ANALIZU

Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis. Mémoires du Séminaire pour l'Analyse vectorielle et tensorielle. Moscow-Leningrad, 1933—1966

clothbound US $ 240.—

Vols. 1—4 are published chiefly in Western languages. Vol. 4. contains the proceedings of the 1st International Conference for Tensor Differential Geometry, held in Moscow, 1934. Editors: Professor V. F. Kagan and P. K. Razhevskij

Single volumes of all above periodicals are available. Subscriptions to forthcoming volumes may be also entered.

„KULTURA"

Hungarian Trading Company for Books and Newpapers,
Back issues Department,

BUDAPEST 62, P. O. B. 149, Hungary

Orders and inquiries should be sent to above address, directly, or through any international scientific bookseller.