ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS VI.

1932–1934

SZEGED

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA
LITTERARUM AC SCIENTIARUM
REGIAE UNIVERSITATIS HUNGARICAE FRANCISCO-JOSEPHINAE

SECTIO
SCIENTIARUM MATHEMATICARUM.

REDIGUNT:

A. HAAR † — B. DE KERÉKJÁRTÓ — F. RIESZ.

TOMUS VI.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK.

SZERKESZTIK:

HAAR ALFRÉD † — KERÉKJÁRTÓ BÉLA — RIESZ FRIGYES.

VI. KÖTET.

1932—1934.

SZEGED.
AZ EGYETEM ÉS A ROTHERMERE-ALAP TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM BARÁTAINAK EGYESÜLETE.

SZEGED VÁROSI NYOMDA ÉS KÖNYVKIADÓ R.-T. 33—3706.

INDEX — TARTALOM.

Tomus VI. — 1932/34 — VI. Kötet.

Contributions to the Theory of Minimal Surfaces.[1]

By TIBOR RADÓ in Columbus, Ohio, U. S. A.

Introduction.

The present paper contains results which I obtained while studying the work of H. A. SCHWARZ on minimal surfaces.

SCHWARZ constructed several examples of portions of minimal surfaces which do *not* have a smallest area if compared with surfaces bounded by the same curve. By very beautiful computations he obtains a convenient formula for the second variation of the area-integral and constructs then his examples by using certain deep existence theorems concerning the partial differential equation $\Delta\psi + \lambda p \psi = 0$, where λ is a parameter and p is a given positive function. The results of SCHWARZ concerning this equation and the methods he develops are of the highest importance.[2] It seemed to me however that it would be interesting to finish up the construction of SCHWARZ in an elementary way. In § 1 of this paper I show in a very elementary way that if we consider, for instance, a piece of the much studied minimal surface of ENNEPER[3])

$$\begin{aligned} x &= 3u + 3uv^2 - u^3, \\ y &= -3v - 3u^2v + v^3, \\ z &= 3u^2 - 3v^2, \end{aligned}$$

[1]) Parts of this paper have been presented to the American Mathematical Society at the meetings in Minneapolis, September 1931, and Chicago, April 1932.

[2]) The papers of SCHWARZ, concerned with these subjects, are the following ones. Beitrag zur Untersuchung der zweiten Variation von Minimalflächenstücken im Allgemeinen und von Teilen der Schraubenfläche im besonderen, and Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhaltes betreffendes Problem der Variationsrechnung, pp. 151—167 and pp. 223—269 respectively in the *Gesammelte Mathematische Abhandlungen* of SCHWARZ (Berlin, 1890).

[3]) See G. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces* (Paris, 1887), vol. 1, pp. 372—376, where a picture of the surface is also given.

corresponding to $0 \leqq u^2 + v^2 \leqq r^2$, where $1 < r < \sqrt{3}$, then this piece is bounded by a curve without multiple points and its area is *not* a minimum if compared with surfaces bounded by the same curve. This example is chosen as an illustration; the elementary method used permits to obtain also one of the general theorems of SCHWARZ, namely that if the spherical image of a minimal surface $\mathfrak{M}$ comprises half of the unit sphere in its interior, then the area of $\mathfrak{M}$ is not a minimum.

On several occasions, SCHWARZ stated that a minimal surface is generally not determined by its boundary curve. He also stated that if the boundary is a skew quadrilateral, then the minimal surface is univocally determined. I was unable to find in the Collected Papers of SCHWARZ or in the more recent literature a proof of this statement. In a previous paper[4]) I proved the uniqueness for the case when the boundary curve has a simple covered convex curve as its orthogonal projection upon some plane. In § 2 of the present paper, I prove the uniqueness for the case when the boundary curve has a simply covered convex curve as its central projection from some point upon some plane. The minimal surfaces considered are supposed to be continuous images of the circle, otherwise they are allowed to have multiple points and any singularities.

Several applications of the preceding results are considered in § 3. The conclusions obtained are very immediate, still I thought that their interest might justify their explicit statement.

§. 1. Elementary discussion of the second variation of the area-integral.

1. Let R be a JORDAN region in the (u, v)-plane bounded by an analytic Jordan curve. Consider a surface

$$S: x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\quad (u, v) \text{ in } R,$$

where $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ have all necessary differential coefficients in the closed region R. Suppose that the above equations carry the boundary curve of R in a one-to-one way into a JORDAN curve Γ in the (x, y, z)-space. Put, as usual

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,\quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,\quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

[4]) Some remarks on the problem of PLATEAU, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **16** (1930), pp. 242–248; see in particular p. 247.

and suppose that

$$W^2 = EG - F^2 > 0$$

in the closed region R. This assumption secures the existence of a normal for every point of the surface S. The direction cosines of the normal will be denoted by X, Y, Z.

2. Denote now by ε a parameter and by $\psi(u, v)$ a function having continuous first partial derivatives in the closed region R and *vanishing* on the boundary of R. Define a surface $\bar{S}$ by the equations

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v) + \varepsilon\psi(u, v)\, X(u, v), \\ y &= y(u, v) + \varepsilon\psi(u, v)\, Y(u, v), \\ z &= z(u, v) + \varepsilon\psi(u, v)\, Z(u, v) \end{aligned}\right\} (u, v) \text{ in } R.$$

The area of $\bar{S}$ is a function $A(\varepsilon)$ of ε; we are going to compute $A'(0)$ and $A''(0)$. If $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ are the first fundamental quantities relative to $\bar{S}$, we find

$$\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots, \tag{1.1}$$

where

$$\left\{\begin{aligned} & a_0 = W^2 = EG - F^2,\; a_1 = -2\psi(EN - 2FM + GL), \\ & a_2 = \psi^2[Eg - 2Ff + Ge + 4(LN - M^2)] + \\ & \qquad\qquad + E\psi_v^2 - 2F\psi_u\psi_v + G\psi_u^2. \end{aligned}\right. \tag{1.2}$$

In these formulas, L, M, N, e, f, g are the second and third fundamental quantities relative to the original surface S; the explicit expressions are

$$L = \mathfrak{X}\mathfrak{x}_{uu},\; M = \mathfrak{X}\mathfrak{x}_{uv},\; N = \mathfrak{X}\mathfrak{x}_{vv},$$
$$e = \mathfrak{X}_u^2,\; f = \mathfrak{X}_u\mathfrak{X}_v,\; g = \mathfrak{X}_v^2,$$

where $\mathfrak{x}$ and $\mathfrak{X}$ stand for the vectors (x, y, z) and (X, Y, Z) respectively. We obtain then

$$(\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2)^{\frac{1}{2}} = b_0 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

where the coefficients b are obtained by squaring and comparing with (1.1). It follows

$$b_0^2 = a_0,\; 2b_0b_1 = a_1,\; b_1^2 + 2b_0b_2 = a_2. \tag{1.3}$$

As

$$A(\varepsilon) = \iint_R (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2)^{\frac{1}{2}}\, du\, dv,$$

we get

$$A'(0) = \iint\limits_R b_1\, du\, dv, \quad A''(0) = \iint\limits_R 2 b_2\, du\, dv.$$

3. Suppose now that the original surface S is a minimal surface, that is to say that its mean curvature

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

vanishes identically. From (1. 2) it follows then that $a_1 = 0$, and (1. 2) and (1. 3) yield the formulas

$$(1.4)\quad \begin{aligned} A'(0) = 0,\ A''(0) = \iint\limits_R \frac{1}{W} [\psi^2 (Eg - 2Ff + Ge) + \\ + 4\psi^2 (LN - M^2) + E\psi_v^2 - 2F\psi_u\psi_v + G\psi_u^2]\, du\, dv. \end{aligned}$$

If we can choose $\psi(u, v)$, subject to the condition of vanishing on the boundary curve of the region R, so as to make $A''(0)$ negative, the function $A(\varepsilon)$ will have a relative maximum for $\varepsilon = 0$, that is to say the given minimal surface S will certainly not have a minimum area if compared with surfaces bounded by the same curve.

4. Suppose that the minimal surface S is given by the formulas of WEIERSTRASZ

$$(1.5)\quad \begin{cases} x = \Re \int (1 - w^2)\, \mu(w)\, dw, \\ y = \Re \int i(1 + w^2)\, \mu(w)\, dw, \\ z = \Re \int 2w\mu(w)\, dw, \end{cases}$$

where $w = u + iv$ and where $\mu(w)$ is an analytic function of w in the closed region R. For the quantities $E, F, G, L, M, N, e, f, g$ we obtain the expressions

$$\begin{aligned} & E = G = \mu\bar{\mu}(1 + w\bar{w})^2,\ F = 0, \\ & L = -N = -(\mu + \bar{\mu}),\ M = -i(\mu - \bar{\mu}), \\ & e = g = \frac{4}{(1 + w\bar{w})^2},\ f = 0, \end{aligned}$$

where the bar denotes the conjugate complex number. Substituting in (1. 4) we obtain *the formula of Schwarz for the second variation:*

$$(1.6)\qquad A''(0) = \iint\limits_R \left[\psi_u^2 + \psi_v^2 - \frac{8\psi^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \right] du\, dv.$$

The function $\mu(w)$ does not figure in $A''(0)$, which depends only upon the region R and the function ψ.

5. So we have to find

a) a JORDAN region R and a function $\psi(u,v)$ in R, having continuous first partial derivatives in the closed region R and vanishing on the boundary of R, and such that the integral (1.6), extended over R, be *negative*, and

b) an analytic function $\mu(w)$ in R, such that the formulas (1.5) of WEIERSTRASZ carry the boundary curve of R in a one-to-one and continuous way into a JORDAN curve in the (x, y, z)-space.

It is possible to give examples for such a situation without reference to the deep existence theorems used by SCHWARZ,[5]) as we are going to show presently.

6. Consider the function

$$\psi(u,v)=\frac{u^2+v^2-r^2}{u^2+v^2+r^2} \quad \text{for} \quad 0 \leqq u^2+v^2 \leqq r^2. \tag{1.7}$$

Then

$$\psi(u,v)=0 \quad \text{for} \quad u^2+v^2=r^2. \tag{1.8}$$

Put

$$\lambda(r)=\iint\limits_{(r)}\left[\psi_u^2+\psi_v^2-\frac{8\psi^2}{(1+u^2+v^2)^2}\right]du\,dv, \tag{1.9}$$

where $\iint\limits_{(r)}$ means integration over $0 \leqq u^2+v^2<r^2$. First we observe that $\lambda(1)=0$. Indeed, using (1.8), we find by partial integration

$$\lambda(r)=-\iint\limits_{(r)}\psi\left[\Delta\psi+\frac{8\psi}{(1+u^2+v^2)^2}\right]du\,dv,$$

and an easy computation shows that the function

$$\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1},$$

to which ψ reduces for $r=1$, satisfies the partial differential equation

$$\Delta\psi+\frac{8\psi}{(1+u^2+v^2)^2}=0.$$

So the relation

$$\lambda(1)=0 \tag{1.10}$$

is proved. We show next that

$$\lambda'(1)<0. \tag{1.11}$$

---

[5]) See, in particular, the second paper of SCHWARZ quoted under [2]).

This can be seen as follows. Substituting (1.7) into (1.9), we obtain

$$\lambda(r)=\iint\limits_{(r)}\frac{16(u^2+v^2)r^4}{(u^2+v^2+r^2)^4}\,du\,dv-\iint\limits_{(r)}\frac{8\,(u^2+v^2-r^2)^2}{(u^2+v^2+r^2)^2(u^2+v^2+1)^2}\,du\,dv.$$

We introduce new variables α,β by $u=\alpha r$, $v=\beta r$ and we get

$$(1.12)\qquad \begin{aligned}\lambda(r)=\iint\limits_{(1)}\frac{16\,(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2+1)^4}\,d\alpha\,d\beta\,-\\ -\iint\limits_{(1)}\frac{8\,(\alpha^2+\beta^2-1)^2r^2}{(\alpha^2+\beta^2+1)^2\,(\alpha^2r^2+\beta^2r^2+1)^2}\,d\alpha\,d\beta,\end{aligned}$$

where the domain of integration (namely the unit circle) is now fixed. Hence we can compute $\lambda'(1)$ by differentiating under the integral sign. We obtain

$$\lambda'(1)=16\iint\limits_{(1)}\frac{(\alpha^2+\beta^2-1)^3}{(\alpha^2+\beta^2+1)^5}\,d\alpha\,d\beta.$$

As $\alpha^2+\beta^2<1$ in the domain of integration, the integrand is obviously negative, and (1.11) is proved. From $\lambda(1)=0$ and $\lambda'(1)<0$ it follows that we have a $\sigma>1$ such that

$$(1.13)\qquad \lambda(r)<0 \quad\text{for}\quad 1<r<\sigma.$$

It should be observed that it follows from (1.12) that

$$\lambda(r)\to\iint\limits_{(1)}\frac{16\,(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2+1)^4}\,d\alpha\,d\beta \quad\text{for}\quad r\to+\infty,$$

that is to say that $\lambda(r)$ does not stay permanently negative for $r>1$.

7. The inequality (1.13) expresses that if $1<r<\sigma$, then there exists a function $\psi(u,v)$, having continuous first derivatives for $0\leqq u^2+v^2\leqq r^2$, vanishing for $u^2+v^2=r^2$, and such that

$$\iint\limits_{(r)}\left[\psi_u^2+\psi_v^2-\frac{8\psi^2}{(1+u^2+v^2)^2}\right]du\,dv<0.$$

It is easy to complete this result and to show that such a ψ exists even for $r\geqq\sigma$. Consider an $r\geqq\sigma$. Choose r_0,δ so that

$$1<r_0<\sigma,\ \delta>0,\ r_0+\delta<\sigma,$$

and define, for $0\leqq u^2+v^2\leqq r^2$, a function ψ as follows.

$$(1.14)\quad \begin{cases} \psi = \dfrac{u^2+v^2-r_0^2}{u^2+v^2+r_0^2} & \text{for} \quad u^2+v^2 \leqq r_0^2, \\ \psi = \dfrac{1}{r_0\delta^2}\left[(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}-r_0\right]\left[(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}-r_0-\delta\right]^2 & \\ \qquad\qquad \text{for} \quad r_0^2 \leqq u^2+v^2 \leqq (r_0+\delta)^2, & \\ \psi = 0 \quad \text{for} \quad (r_0+\delta)^2 \leqq u^2+v^2 \leqq r^2. & \end{cases}$$

This ψ vanishes for $u^2+v^2=r^2$, and an easy computation shows that it has continuous first derivatives for $u^2+v^2 \leqq r^2$. Consider now

$$(1.15)\quad \iint\limits_{(r)}\left[\psi_u^2+\psi_v^2-\frac{8\psi^2}{(1+u^2+v^2)^2}\right]du\,dv = \iint\limits_{(r_0)} + \iint\limits_{(r_0,\, r_0+\delta)} + \iint\limits_{(r_0+\delta,\, r)}.$$

The first integral on the right-hand side of (1. 15) is equal to $\lambda(r_0)$, and so this term is negative, on account of $r_0<\sigma$. The last term on the right-hand side of (1. 15) is zero, and for the second term a rough evaluation gives the bound

$$\frac{9}{r_0^4}(2r_0+\delta)\,\delta,$$

and so this term will be as small as we please, if $\delta>0$ is chosen properly. So we see that by a proper choice of $\delta>0$ the function ψ defined by (1. 14) will make the integral (1. 6) negative.

8. It follows then, on account of § 1, No. **3** and **4**, that the formulas (1. 5) of WEIERSTRASZ, if considered for $|w| \leqq r$, $1<r$, give a minimal surface which does *not* have a minimum area, no matter how the analytic function $\mu(w)$ is chosen. In order to have a clear-cut example, this $\mu(w)$ must be chosen so that the minimal surface obtained be bounded by a curve without multiple points. A case which permits a simple discussion is $\mu(w) \equiv 3$. The corresponding surface is called the *minimal surface of Enneper.* From (1. 5) we obtain, putting $\mu(w) \equiv 3$, the equations of the surface in the form

$$(1.16)\quad \begin{cases} x = 3u+3uv^2-u^3, \\ y = -3v-3u^2v+v^3, \\ z = 3u^2-3v^2. \end{cases}$$

We are going to show that if $r<\sqrt{3}$, then the image of the circle $u^2+v^2=r^2$ by the equations (1. 16) is a curve without multiple points. Write $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$, where r is fixed according to $r>\sqrt{3}$. Then x, y, z become functions $x(\varphi)$, $y(\varphi)$, $z(\varphi)$ of φ, the explicit expressions being

$$(1.17)\qquad \begin{cases} x(\varphi)=[3-r^2(\cos^2\varphi-3\sin^2\varphi)]\,r\cos\varphi, \\ y(\varphi)=-[3-r^2(\sin^2\varphi-3\cos^2\varphi)]\,r\sin\varphi, \\ z(\varphi)=3r^2\cos 2\varphi. \end{cases}$$

We show that for

$$(1.18)\qquad 0\leqq\varphi_1<\varphi_2<2\pi$$

the equations

$$x(\varphi_1)=x(\varphi_2),\ y(\varphi_1)=y(\varphi_2),\ z(\varphi_1)=z(\varphi_2)$$

cannot be satisfied simultaneously if $r<\sqrt{3}$. Indeed, from $z(\varphi_1)=z(\varphi_2)$ it follows that $\cos 2\varphi_1-\cos 2\varphi_2=2\sin(\varphi_2+\varphi_1)\sin(\varphi_2-\varphi_1)=0$, that is to say that $\sin(\varphi_2+\varphi_1)=0$ or $\sin(\varphi_2-\varphi_1)=0$. The only possibilities, consistent with (1. 18), are

I. $\varphi_2=\varphi_1+\pi$.

II. $\varphi_2=-\varphi_1+\pi,\ 0\leqq\varphi_1<\frac{\pi}{2}$.

III. $\varphi_2=-\varphi_1+2\pi,\ 0<\varphi_1<\pi$.

IV. $\varphi_2=-\varphi_1+3\pi,\ \pi<\varphi_1<\frac{3\pi}{2}$.

The equations $x(\varphi_1)=x(\varphi_2)$, $y(\varphi_1)=y(\varphi_2)$ give then, corresponding to these four cases, the following relations:

I*. $x(\varphi_1)=-x(\varphi_1)$, $y(\varphi_1)=-y(\varphi_1)$, that is to say $x(\varphi_1)=y(\varphi_1)=0$.

II*. $x(\varphi_1)=-x(\varphi_1)$, that is to say $x(\varphi_1)=0$.

III*. $y(\varphi_1)=-y(\varphi_1)$, that is to say $y(\varphi_1)=0$.

IV*. $x(\varphi_1)=-x(\varphi_1)$, that is to say $x(\varphi_1)=0$.

The brackets in (1. 17) are both $\geqq 3-r^2$, and consequently $\neq 0$ on account of $r<\sqrt{3}$. Hence, from $x(\varphi_1)=0$ it follows that $\cos\varphi_1=0$, and from $y(\varphi_1)=0$ it follows that $\sin\varphi_1=0$. It is then obvious that I* is impossible, and that II and II*, III and III*, IV and IV* respectively are incompatible.

§ 2. A uniqueness theorem.

1. If the functions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ are continuous in a closed Jordan region R, we shall say that the equations

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\quad (u,v)\text{ in } R$$

define a *continuous surface S of the type of the circle.* This definition does not require that the correspondence between the points (u,v) and (x,y,z) be one-to-one.

Suppose we map, by equations $u=u(\alpha,\beta)$, $v=v(\alpha,\beta)$, the JORDAN region R in a one-to-one and continuous way upon another JORDAN region R^*. The functions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ are transformed into the new functions $x^*(\alpha,\beta)=x[u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)]$ and so on, and we say that the two sets of equations

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\quad (u,v) \text{ in } R,$$

and

$$x=x^*(\alpha,\beta),\ y=y^*(\alpha,\beta),\ z=z^*(\alpha,\beta),\quad (\alpha,\beta) \text{ in } R^*$$

define the same surface, or that these two sets of equations are parametric representations of the same surface.

In the sequel, by a *surface* we always mean a continuous surface of the type of the circle.

2. Consider a surface

$$S:\ x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\quad (u,v) \text{ in } R.$$

If these equations carry the boundary of R in a one-to-one and continuous way into a JORDAN curve Γ in the (x, y, z)-space, we shall say that S is bounded by Γ.

3. Given a surface

$$S:\ x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\quad (u,v) \text{ in } R,$$

consider an interior point (u_0, v_0) of R. Map some vicinity of (u_0, v_0) in a one-to-one and continuous way upon a domain of an (α,β)-plane by equations $u=u(\alpha,\beta)$, $v=v(\alpha,\beta)$. The functions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ become then functions of α,β and we say that we introduced *new parameters in the vicinity of* (u_0, v_0).

Suppose then that it is possible to introduce new parameters α,β in the vicinity of *every* interior point (u_0, v_0) of R in such a way that

I. x, y, z become harmonic functions of α,β, and

II. x, y, z as functions of α,β satisfy the relations $E=G$, $F=0$, where

$$E=x_\alpha^2+y_\alpha^2+z_\alpha^2,\quad F=x_\alpha x_\beta+y_\alpha y_\beta+z_\alpha z_\beta,\quad G=x_\beta^2+y_\beta^2+z_\beta^2.$$

Under these circumstances, we shall say that S is a *minimal surface.* Parameters α,β, satisfying the conditions I, II for the vicinity of an interior point (u_0, v_0) of R, will be called *local typical parameters for* (u_0, v_0).

4. If we should add the condition $EG-F^2>0$, the minimal surfaces in the sense of the preceding definition would become identical to the minimal surfaces considered in differential geometry. In differential geometry, the condition $EG-F^2>0$ is standard. On the one hand, this condition secures the existence of the tangent plane, and on the other hand, $EG-F^2$ appears in the denominators of most of the important quantities studied in differential geometry. Our purpose in omitting the condition $EG-F^2>0$ and in requiring the existence of typical parameters *in the small* only, is to secure the generality necessary for the applications.

5. Uniqueness theorem. *Let there be given, in the (x, y, z)-space, a Jordan curve Γ. Suppose that Γ has a simply covered convex curve as its central or parallel projection upon some plane. Then Γ cannot bound more than one minimal surface.*

6. We are going to state first a lemma which will be used in the proof. Let $h(u, v)$ be a continuous function in a JORDAN region R. Let (u_0, v_0) be an interior point of R, and map some vicinity of (u_0, v_0) in a one-to-one and continuous way upon a domain in an (α, β)-plane by equations $u=u(\alpha, \beta)$, $v=v(\alpha, \beta)$. The function $h(u, v)$ is then transformed, in the vicinity of (u_0, v_0), into the function $h^*(\alpha, \beta)=h[u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)]$, and we say that we introduced *new variables α, β in the vicinity of* (u_0, v_0).

Suppose it is possible to introduce new variables (α, β) in the vicinity of *every* interior point (u_0, v_0) of R in such a way that the transformed function $h^*(\alpha, \beta)$ is harmonic. Then $h(u, v)$ will be called a *generalized harmonic function;* the variables α, β as described above will be called *local typical variables.*

Lemma. *Let $h(u, v)$ be a generalized harmonic function in a Jordan region R. Suppose that after introduction of local typical variables α, β for the vicinity of some interior point (u_0, v_0) of R, the transformed function and its first partial derivatives with respect to α and β vanish at the image (α_0, β_0) of (u_0, v_0). Then the function $h(u, v)$ vanishes in at least four distinct points of the boundary of R. Moreover, $h(u, v)$ takes on both positive and negative values on the boundary of R, except in the trivial case when $h(u, v)$ vanishes identically.*

In the particular case when R is a circle and $h(u, v)$ is harmonic in the usual sense, this lemma has been proved in a previous paper of the author.[6] The proof extends easily to the

[6] The problem of the least area and the problem of PLATEAU, *Math. Zeitschrift*, **32** (1930), pp. 763—796; see in particular § 2, No 3.

above general statement, and the reader is asked to think through himself the necessary modifications.

7. Consider now a minimal surface

$$\mathfrak{M}: \ x=x(u,v), \ y=y(u,v), \ z=z(u,v), \quad (u,v) \text{ in } R,$$

bounded by a JORDAN curve Γ. Suppose that the central projection of Γ from some point upon some plane is a simply covered convex curve. We can obviously suppose that the center of projection is the point $(0, 0, 1)$, that the plane is the (x, y)-plane, and that Γ is below the plane $z=1$, that is to say that $z<1$ on the whole curve Γ. From this it follows that

$$z(u,v)<1 \text{ in } R. \tag{2.1}$$

Indeed, by the definition of a minimal surface, $z(u, v)$ is a generalized harmonic function, and it is immediate that such a function takes on its maximum on the boundary.

Denote by R^* the JORDAN region bounded by the central projection Γ^* of Γ. The central projection of a point $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ of the minimal surface $\mathfrak{M}$ from the point $(0, 0, 1)$ upon the (x, y)-plane is a point with coordinates $x=a$, $y=b$, where

$$a=\frac{x(u,v)}{1-z(u,v)}, \quad b=\frac{y(u,v)}{1-z(u,v)}.$$

We are going to show that these equations carry the JORDAN region R in a one-to-one and continuous way into the JORDAN region R^*.

8. Consider an interior point (u_0, v_0) of R; we shall first show that the transformation is one-to-one in the vicinity of (u_0, v_0). We introduce, for the minimal surface $\mathfrak{M}$, local typical parameters in the vicinity of (u_0, v_0). The vicinity of (u_0, v_0) is then transformed in a one-to-one and continuous way into a vicinity of the image (α_0, β_0) of (u_0, v_0), and the functions x, y, z become functions $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$, $z(\alpha, \beta)$ of α, β. Hence it is sufficient to prove that the equations

$$a=\frac{x(\alpha,\beta)}{1-z(\alpha,\beta)}, \quad b=\frac{y(\alpha,\beta)}{1-z(\alpha,\beta)} \tag{2.2}$$

carry the vicinity of (α_0, β_0) in a one-to-one and continuous way into a vicinity of

$$a_0=\frac{x_0}{1-z_0}, \quad b_0=\frac{y_0}{1-z_0},$$

where $x_0=x(\alpha_0, \beta_0)$ and so on.

As α, β are local typical parameters for the minimal surface $\mathfrak{M}$, the functions $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$, $z(\alpha, \beta)$ are harmonic and consequently analytic functions of α, β. As $z(\alpha, \beta) < 1$, a and b are also analytic functions of α, β and the assertion that the transformation is one-to-one in the small will be proved if we show that

$$a_\alpha^{(0)} b_\beta^{(0)} - a_\beta^{(0)} b_\alpha^{(0)} \neq 0,$$

where $a_\alpha^{(0)} = a_\alpha(\alpha_0, \beta_0)$ and so on. Suppose $a_\alpha^{(0)} b_\beta^{(0)} - a_\beta^{(0)} b_\alpha^{(0)} = 0$. Then we have two numbers λ, μ which satisfy the relations

$$\lambda a_\alpha^{(0)} + \mu b_\alpha^{(0)} = 0, \ \lambda a_\beta^{(0)} + \mu b_\beta^{(0)} = 0, \ \lambda^2 + \mu^2 > 0.$$

Substituting the values of $a_\alpha^{(0)}, \ldots, b_\beta^{(0)}$ obtained from (2. 2), we get

$$\begin{aligned} (\lambda x_\alpha^{(0)} + \mu y_\alpha^{(0)})(1 - z_0) + (\lambda x_0 + \mu y_0) z_\alpha^{(0)} &= 0, \\ (\lambda x_\beta^{(0)} + \mu y_\beta^{(0)})(1 - z_0) + (\lambda x_0 + \mu y_0) z_\beta^{(0)} &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Consider now, in the JORDAN region R, the function

$$h(u, v) = (\lambda x_0 + \mu y_0)(z(u, v) - 1) - (\lambda x(u, v) + \mu y(u, v))(z_0 - 1). \tag{2.4}$$

If we introduce, in the vicinity of (u_0, v_0), the new variables α, β, then h and its first partial derivatives with respect to α, β vanish at (α_0, β_0), as it follows from (2. 4) and (2. 3). On the other hand, $h(u, v)$ is a generalized harmonic function. Indeed, typical local parameters for the minimal surface $\mathfrak{M}$ transform $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ into harmonic functions simultaneously, and consequently h, as a linear combination of x, y, z with constant coefficients, is also transformed into a harmonic function.

Applying then the lemma of § 2, No. **6** to $h(u, v)$, it follows that $h(u, v)$ vanishes in at least four distinct points of the boundary of R, and that $h(u, v)$ takes on both positive and negative values on the boundary of R, except if $h(u, v)$ vanishes identically. This means that the plane with equation

$$(\lambda x_0 + \mu y_0)(z - 1) - (\lambda x + \mu y)(z_0 - 1) = 0 \tag{2.5}$$

intersects the boundary curve Γ of $\mathfrak{M}$ in at least four distinct points, and that either there are points of $\mathfrak{M}$ on both sides of this plane, or else Γ is entirely situated in this plane. As however the plane (2. 5) obviously passes through the center of projection (0, 0, 1), these conclusions are in contradiction with the assumption that the projection of Γ from (0, 0, 1) upon the (x, y)-plane is a simply covered convex curve.

9. The formulas

$$a=\frac{x(u,v)}{1-z(u,v)},\quad b=\frac{y(u,v)}{1-z(u,v)}$$

define a transformation of the region R. On account of $z(u,v)<1$ this transformation is continuous. In the preceding No. **8** we proved that the transformation is one-to-one in the small. From the assumption that the boundary curve of R is carried in a one-to-one way into Γ and that Γ is projected in a one-to-one way into Γ^*, it follows that the transformation carries the boundary curve of R in a one-to-one way into the projection Γ^* of Γ. Hence we have a transformation

$$T:\ a=a(u,v),\ b=b(u,v)$$

with the following properties. T is continuous in the JORDAN region R. T carries the boundary curve of R in a one-to-one way into a JORDAN curve Γ^*, and T is one-to-one in the vicinity of every interior point of R. On account of the *monodromy theorem* in topology,[7] it follows then that T carries the JORDAN region R in a one-to-one and continuous way into the JORDAN region R^* bounded by Γ^*. Consequently, we can express u, v as single-valued and continuous functions of a, b and we obtain then the equations of the minimal surface $\mathfrak{M}$ in the form

$$\mathfrak{M}:\ x=x(a,b),\ y=y(a,b),\ z=z(a,b),\quad (a,b) \text{ in } R^*,$$

where $x(a,b)$, $y(a,b)$, $z(a,b)$ are single-valued continuous functions in R^* and satisfy the relations

$$z(a,b)<1,\ a=\frac{x(a,b)}{1-z(a,b)},\quad b=\frac{y(a,b)}{1-z(a,b)}.$$

It is important to observe that $x(a,b)$, $y(a,b)$, $z(a,b)$ are actually *analytic* functions of a, b in the interior of R^*. Indeed, if we introduce local typical parameters α, β in the vicinity of an interior point (u_0, v_0) of R for the minimal surface $\mathfrak{M}$, then the equations

$$x=x(a,b),\ y=y(a,b),\ z=z(a,b)$$

are obtained by eliminating α, β from the equations

$$x=x(\alpha,\beta),\ y=y(\alpha,\beta),\ z=z(\alpha,\beta)$$

and

$$a=\frac{x(\alpha,\beta)}{1-z(\alpha,\beta)},\quad b=\frac{y(\alpha,\beta)}{1-z(\alpha,\beta)}.$$

---

[7]) See, for instance, B. VON KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie*, vol. 1 (Berlin, 1923), p. 175.

As $x(\alpha,\beta)$, $y(\alpha,\beta)$, $z(\alpha,\beta)$ are harmonic, and as we proved that $a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha$ is different from zero, $x(a,b)$, $y(a,b)$, $z(a,b)$ come out to be analytic functions of a, b, on account of well-known theorems on implicit functions.

10. As $1-z(a,b)>0$ in R^*, we can write

$$1-z(a,b)=e^{\zeta(a,b)},$$

where $\zeta(a,b)$ is single-valued continuous in R^* and analytic in the interior of R^*. The equations of $\mathfrak{M}$ appear then in the form

$$\text{(2. 6)}\quad \mathfrak{M}:\ x=ae^{\zeta(a,b)},\ y=be^{\zeta(a,b)},\ z=1-e^{\zeta(a,b)},\quad (a,b)\text{ in }R^*.$$

The first fundamental quantities

$$E=x_a^2+y_a^2+z_a^2,\ F=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b,\ G=x_b^2+y_b^2+z_b^2$$

have then the expressions

$$E=e^{2\zeta}[(1+a^2+b^2)\zeta_a^2+2a\zeta_a+1],$$
$$F=e^{2\zeta}[(1+a^2+b^2)\zeta_a\zeta_b+a\zeta_b+b\zeta_a],$$
$$G=e^{2\zeta}[(1+a^2+b^2)\zeta_b^2+2b\zeta_b+1].$$

It follows that

$$W^2=EG-F^2=e^{4\zeta}[\zeta_a^2+\zeta_b^2+(1+a\zeta_a+b\zeta_b)^2],$$

and consequently

$$W^2=EG-F^2>0.$$

Thus $\mathfrak{M}$, which is a minimal surface in the general sense of the definition of § 2, No. **3,** is also a minimal surface in the usual sense of differential geometry. Hence the mean curvature

$$H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}$$

vanishes. For the second fundamental quantities L, M, N we obtain from (2. 6) the expressions

$$L=\frac{1}{W}e^{\zeta}(\zeta_a^2-\zeta_{aa}),$$
$$M=\frac{1}{W}e^{\zeta}(\zeta_a\zeta_b-\zeta_{ab}),$$
$$N=\frac{1}{W}e^{\zeta}(\zeta_b^2-\zeta_{bb}),$$

and $H=0$ gives then for ζ the partial differential equation

$$\text{(2. 7)}\quad \begin{aligned}&[(1+a^2+b^2)\zeta_b^2+2b\zeta_b+1]\zeta_{aa}-2[(1+a^2+b^2)\zeta_a\zeta_b+a\zeta_b+b\zeta_a]\zeta_{ab}+\\&+[(1+a^2+b^2)\zeta_a^2+2a\zeta_a+1]\zeta_{bb}-(\zeta_a^2+\zeta_b^2)=0.\end{aligned}$$

11. Thus we find that our minimal surface $\mathfrak{M}$ admits of a representation

$$\mathfrak{M}: \ x = ae^{\zeta}, \ y = be^{\zeta}, \ z = 1 - e^{\zeta}, \quad (a, b) \text{ in } R^*,$$

where $\zeta = \zeta(a, b)$ is single-valued continuous in R^* and analytic in the interior of R^*, and satisfies in the interior of R^* the equation (2.7). The boundary values of ζ on the boundary curve Γ^* of R^* are determined by the boundary curve Γ. Consequently, the uniqueness of the minimal surface bounded by the given Jordan curve Γ will be proved if the solutions of (2.7) are univocally determined by their boundary values, and this follows directly from general uniqueness theorems.

Indeed, (2.7) has the form

$$P(a, b, \zeta, p, q, r, s, t) = 0 \tag{2.8}$$

where P is a polynomial of its arguments and $p, \ldots, t$ stand for $\zeta_a, \ldots, \zeta_{bb}$ (it would be sufficient if P would be a sufficiently regular function of its arguments). For a partial differential equation of the form (2.8) we have then the theorem that the solutions are univocally determined by their boundary values provided

$$P_r P_t - P_s^2 > 0, \quad P_\zeta \leqq 0.^{8)}$$

In our case $P_\zeta = 0$, and

$$P_r P_t - P_s^2 = p^2 + q^2 + (1 + ap + bq)^2.$$

This expression is obviously positive.

12. The case of the central projection being thus settled, let us suppose that the boundary curve Γ of the minimal surface $\mathfrak{M}$ has a simply covered convex curve as its projection when projected parallel to some direction upon some plane. The projection of Γ in the same direction and upon a plane perpendicular to that direction is then again a simply covered convex curve and so it is sufficient to consider the case of the *orthogonal* projection.[9]

Suppose that we project upon the (x, y)-plane. Denote by Γ^* the projection of Γ and by R^* the JORDAN region bounded

---

[8] A beautiful treatment of this theorem and of related subjects is given in the paper of E. HOPF, Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Klasse*, 1927, pp. 147—152.

[9] This case has already been considered, in a somewhat restricted form, in the paper of the author referred to under [4].

by Γ^*. A reasoning similar to that used in the case of the central projection leads in the present case to the following first result which we state, with regard to later application, as a

Lemma. *Suppose that the boundary curve Γ of a minimal surface $\mathfrak{M}$ has a simply covered convex curve Γ^* as its orthogonal projection upon the (x, y)-plane. Denote by R^* the Jordan region bounded by Γ^*. Then $\mathfrak{M}$ admits of a representation*

$$\mathfrak{M}: \; z = z(x, y), \quad (x, y) \text{ in } R^*,$$

where $z(x, y)$ is single-valued continuous in R^*, analytic in the interior of R^*, and satisfies in the interior of R^* the partial differential equation

$$(2.9) \qquad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

where $p, \ldots, t$ stand for $z_x, \ldots, z_{yy}$.

The boundary values of $z(x, y)$ are univocally determined by the given JORDAN curve Γ. Consequently the uniqueness of the minimal surface $\mathfrak{M}$, bounded by the given JORDAN curve Γ, follows from the fact that the solutions of (2.9) are univocally determined by their boundary values. This fact has been proved in many ways[10]) and follows, in particular, from the general uniqueness theorem used in § 2, No. **11.**

§ 3. Applications.

1. We shall combine the preceding results with the following

Existence theorem.[11]) *Let Γ be a Jordan curve in the (x, y, z)-space. Consider all the continuous surfaces S of the type of the circle, bounded by Γ, and denote by $a(\Gamma)$ the greatest lower bound of their areas $A(S)$, where $A(S)$ is the area as defined by Lebesgue.*

---

[10]) A very simple proof might be obtained by using certain convexity properties of the area-integral $\iint (1 + p^2 + q^2)^{1/2} \, dx \, dy$; see A. HAAR, Über reguläre Variationsprobleme, *these Acta*, **3** (1927), pp. 224—234. It would be interesting to investigate the possibility of a similar method for the partial differential equation (2.7).

[11]) T. RADÓ, loc. cit. [6]); J. DOUGLAS, Solution of the problem of PLATEAU, *Transactions of the American Mathematical Society*, **33** (1931), pp. 263—321. — For an exposition of the theory of the area, in the sense of LEBESGUE, see the authors paper, Über das Flächenmaß rektifizierbarer Flächen, *Math. Annalen*, **100** (1928), pp. 445—479.

If $a(\Gamma) < +\infty$, that is to say if Γ bounds some continuous surface of the type of the circle with a finite area, then there exists a minimal surface, bounded by Γ, the area of which is equal to $a(\Gamma)$.

The condition $a(\Gamma) < +\infty$ is satisfied, in particular, if Γ is such that it has a simply covered convex curve as its central or parallel projection upon some plane.[12] In this case, on account of the uniqueness theorem of § 2, No. **5**, the minimal surface is also *unique*.

2. Consider now the piece of surface

$$(3.1)\qquad \left.\begin{aligned} x &= 3u + 3uv^2 - u^3, \\ y &= -3v - 3u^2v + v^3, \\ z &= 3u^2 - 3v^2, \end{aligned}\right\} \; 0 \leqq u^2 + v^2 \leqq r^2, \; 1 < r < \sqrt{3}.$$

This is (see § 1, No. **8**) a minimal surface, bounded by a JORDAN curve, the area of which is *not* a minimum. On the other hand, as $x_u, \ldots, z_v$ are bounded, the area of this surface is finite, and so the existence theorem of § 3, No. **1** guarantees the existence of a minimal surface, bounded by the same JORDAN curve, the area of which *is* a minimum. That is to say, *the equations*

$$(3.2)\qquad \left.\begin{aligned} x &= 3r\cos\varphi - r^3\cos 3\varphi \\ y &= -3r\sin\varphi - r^3\sin 3\varphi, \\ z &= 3r^2\cos 2\varphi, \end{aligned}\right\} \; 0 \leqq \varphi < 2\pi,$$

determine, provided $1 < r < \sqrt{3}$, a Jordan curve which bounds at least two distinct minimal surfaces.

While the catenoids give explicit elementary examples of distinct *multiply connected* minimal surfaces with the same boundary curves,[13] it seems that no elementary example has yet been given for *simply connected* minimal surfaces. In our own example, one of the two minimal surfaces, bounded by the JORDAN curve (3.2), is explicitly given by the equations (3.1), while a second minimal surface is only known to *exist*.[14] It would be interesting to find an *elementary explicit example* of two minimal surfaces, *of the type of the circle*, bounded by the same JORDAN curve.

[12] Loc. cit. [6], in particular p. 265.

[13] See, for instance, the beautiful chapter IV in the book of G. A. BLISS, *Calculus of Variations*, No. 1 of the Carus Mathematical Monographs (Chicago, 1925).

[14] The situation is similar in the examples which I was able to find in the literature.

3. SCHWARZ, after having shown that a minimal surface generally does not have a minimum area, asked for conditions under which a given piece of a minimal surface does have a minimum area. While his methods are restricted to the case of a *relative* minimum,[15] we have the following theorem concerning an *absolute* minimum, as an obvious consequence of the statements in § 3, No. **1** and § 2, No. **5.**

Theorem. *Let there be given a minimal surface $\mathfrak{M}$ bounded by a Jordan curve Γ, such that Γ has a simply covered convex curve as its central or parallel projection upon some plane. Then the area of $\mathfrak{M}$ is a minimum if compared with the areas of all continuous surfaces, of the type of the circle, bounded by Γ.*

Consider then, in particular, a minimal surface $\mathfrak{M}$ in the usual sense of differential geometry. The vicinity of every point of $\mathfrak{M}$ can be then represented, if for instance the (x, y)-plane is parallel to the tangent plane in that point, by an equation $z = z(x, y)$, where $z(x, y)$ is single-valued in the vicinity of the (x, y)-projection of the point under consideration. Consequently we have on $\mathfrak{M}$ a JORDAN curve Γ, surrounding the given point, the projection of which is convex upon the (x, y)-plane. Hence, every point on a minimal surface, in the usual sense of differential geometry, is comprised in a portion of the surface the area of which is a minimum if compared with the areas of all continuous surfaces of the type of the circle and with the same boundary. Shortly: *the area of a minimal surface is an absolute minimum in the small.*

4. As a last application, we are going to discuss a general statement of S. BERNSTEIN concerning the partial differential equation

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = 0. \tag{3.3}$$

Given, in the (x, y)-plane, a JORDAN curve C, and a continuous set of values on C, the boundary value problem for (3. 3) requires the determination of a function $z(x, y)$, continuous in and on C, analytic inside, and which takes on the given set of values on C. S. BERNSTEIN stated, without complete proof, that the problem is always solvable if C is convex, and that the problem is generally not solvable if C is not convex.[16] We can easily verify this statement.

---

[15]) See loc. cit. [2]).

[16]) S. BERNSTEIN, Sur les équations du Calcul des Variations, *Annales de l'École Normale*, (3) **29** (1912), pp. 431—485; see in particular pp. 484—485.

Concerning the second, negative half of the statement, an example which allows a simple and complete discussion may be obtained, for instance, in the following way. Denote by A, B, C, D the vertices of a regular tetrahedron and by Γ the quadrilateral with the sides AB, BC, CD, DA. The orthogonal projection of Γ upon properly chosen planes is then obviously simply covered and convex, and consequently (see § 3, No. 1) there exists a *unique* minimal surface $\mathfrak{M}$ bounded by Γ. Let us first show that $\mathfrak{M}$ *posses through the center of the tetrahedron* A, B, C, D.[17]) Denote by p the plane through A, C and parallel to the edge BD. The orthogonal projection of Γ upon p is then the simply covered perimeter of a square, that is to say the projection is convex. Hence, it follows from the lemma in § 2, No. **12**, that every point interior to this square is the projection of exactly one point of $\mathfrak{M}$. Applying this remark to the center of the square, it follows that the straight line g, connecting the centers of the edges AC and BD, intersects $\mathfrak{M}$ in exactly one point, which we denote by P. Rotate now the figure around the axis g through 90 degrees, and then reflect upon the plane passing through the center of the tetrahedron and perpendicular to g. Then Γ is carried into itself, and consequently $\mathfrak{M}$ is carried into itself. For $\mathfrak{M}$ is carried into a minimal surface, bounded again by Γ, and $\mathfrak{M}$ is the *only* minimal surface bounded by Γ. The point P is therefore carried into a point P' also situated on $\mathfrak{M}$. As g is obviously carried into itself, P' is also situated on g. But g intersects $\mathfrak{M}$ in exactly one point, and thus P and P' must coincide, which is the case if and only if P coincides with the center O of the tetrahedron A, B, C, D. So we see that $\mathfrak{M}$ passes through O.

Choose now the plane through A, B, C as the (x, y)-plane, and let the z-axis be perpendicular to this plane. The projection of the vertex D of the tetrahedron upon the (x, y)-plane is then the center O^* of the equilateral triangle ABC, and O^* is also the projection of the center O of the tetrahedron A, B, C, D.

[17]) This surface has been explicitly determined by SCHWARZ in his paper, Bestimmung einer speciellen Minimalfläche, pp. 6—91 of the *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. He also stated, without proof, that the surface is unique. The fact that the surface passes through the center of the tetrahedron can also be seen by using the explicit equations of the surface in terms of elliptic functions. It seemed interesting to me that this fact also follows by elementary geometry from the uniqueness of the surface.

The orthogonal projection of Γ upon this (x, y)-plane is the simply covered quadrilateral AB, BC, CO^*, O^*A. The z-coordinate of a variable point of Γ is then a continuous function on this quadrilateral, and we assert that *using this function as the given boundary function, the corresponding boundary value problem is not solvable for the partial differential equation* (3. 3). Indeed, if the solution $z(x, y)$ would exist, the equation $z = z(x, y)$ would define a minimal surface, bounded by Γ and such that no straight line parallel to the z-axis intersects the surface in more than one point. This minimal surface would coincide with $\mathfrak{M}$, as $\mathfrak{M}$ is the unique minimal surface bounded by Γ,[18]) and $\mathfrak{M}$ is intersected by the parallel to the z-axis through the center of the tetrahedron A, B, C, D in two points, one of which is the vertex D, and the other one the center O.

The proof of the first, positive half of the statement of S. BERNSTEIN is immediate. If the curve C, bearing the given continuous boundary values, is convex, then the boundary value problem requires to determine a minimal surface, given by an equation $z = z(x, y)$ and bounded by a JORDAN curve Γ of which C is the simply covered convex orthogonal projection. The existence theorem in § 3, No. 1 and the lemma in § 2, No. 12 secure therefore directly the existence of the solution of the boundary value problem.[19])

The Ohio State University, Department of Mathematics.

(Received February 13, 1932.)

[18]) Several examples for the non-existence of the solution of the boundary value problem, discussed in the literature without using arguments similar to our uniqueness theorem in § 2, No 5 and our lemma in § 2, No 12, seem to be incomplete.

[19]) While we only require the mere continuity of the given boundary values, previous results have been obtained under more restrictive conditions. See, also for references, A. HAAR, Über das Plateausche Problem, *Math. Annalen*, 97 (1927), pp. 124—258.

Die Irreduzibilität einer Determinante der analytischen Geometrie.

Von JOSEF KÜRSCHÁK in Budapest.

1. Einleitung. Es bedeute D die bekannte Determinante, deren Verschwinden die Bedingung dafür ist, daß man durch $M = \binom{m+n}{n}$ gegebene Punkte des n-dimensionalen projektiven Raumes eine algebraische Hyperfläche m-ter Ordnung legen könne (also im Falle $n = 2$ eine ebene algebraische Kurve, im Falle $n = 3$ eine algebraische Fläche von der besagten Ordnung). Bereits MORITZ REISS[1]) versuchte zu beweisen, daß D eine *irreduzible* rationale ganze Funktion der Koordinaten der M Punkte ist. Aus seinen Erörterungen ist aber die Irreduzibilität von D nicht klar ersichtlich. Im Folgenden soll die Irreduzibilität von D ausführlich dargelegt werden. Dabei beschränke ich mich auf den Fall $n = 2$, also auf ebene Kurven. Diese Beschränkung ist aber unwesentlich, denn meine Überlegungen gelten auch für $n > 2$.

2. Bezeichnungen. Die Gleichung einer algebraischen Kurve m-ter Ordnung hat die Gestalt

$$F = A^{(1)}U_1 + A^{(2)}U_2 + \ldots + A^{(M)}U_M = 0 \tag{1}$$

wo $U_1, U_2, \ldots, U_M$ die $M = \binom{m+2}{2}$ Potenzprodukte m-ter Ordnung der homogenen Punktkoordinaten x, y, z bedeuten und $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(M)}$ konstante Koeffizienten sind. (Als Koordinaten und Koeffizienten erlauben wir beliebige komplexe Zahlen, nur dürfen weder die Koordinaten eines Punktes, noch die Koeffizienten einer Gleichung (1) sämtlich gleich Null sein.)

Zwei Gleichungen (1) definieren dann und nur dann dieselbe Kurve m-ter Ordnung, wenn in beiden das Verhältnis der

---

1) M. REISS, Analytisch-geometrische Studien, § 1, *Math. Annalen*, 2 (1870), S. 385—388.

Koeffizienten $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(M)}$ dasselbe ist. (In diesem Sinne definieren $xy^2=0$ und $x^2y=0$ zwei *verschiedene* Linien dritter Ordnung, obzwar beide Linien aus den Geraden $x=0$ und $y=0$ bestehen. Der Unterschied besteht darin, daß einmal die Gerade $y=0$, das andermal die Gerade $x=0$ doppelt gezählt wird.)

Soll die Kurve $F=0$ durch die μ Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ hindurchgehen, so müssen $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(M)}$ das Gleichungssystem

$$A^{(1)}U_{r1}+A^{(2)}U_{r2}+\ldots+A^{(M)}U_{rM}=0 \tag{2}$$
$$(r=1,2,\ldots,\mu)$$

befriedigen, wo $U_{r1}, U_{r2}, \ldots, U_{rM}$ die Potenzprodukte m-ter Ordnung der Koordinaten x_r, y_r, z_r von P_r bedeuten. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \ldots & U_{1M} \\ U_{21} & U_{22} & \ldots & U_{2M} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & \ldots & U_{\mu M} \end{pmatrix}$$

bezeichnen wir zur Abkürzung durch $[\mu]$.

Durch $M-1$ Punkte geht immer *wenigstens eine* Kurve m-ter Ordnung; *nur eine* dann, wenn $[M-1]$ den Rang $M-1$ hat. Die linke Seite der Gleichung $F=0$ dieser einzigen Kurve unterscheidet sich höchstens durch einen konstanten Faktor von der Determinante

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \ldots & U_{1M} \\ U_{21} & U_{22} & \ldots & U_{2M} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ U_{M-1,1} & U_{M-1,2} & \ldots & U_{M-1,M} \\ U_1 & U_2 & \ldots & U_M \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Durch M gegebene Punkte kann man dann und nur dann wenigstens eine Kurve m-ter Ordnung legen, wenn die Determinante

$$D=|U_{rs}| \quad (r,s=1,2,\ldots,M) \tag{4}$$

gleich Null ist.

Von dieser Determinante D soll bewiesen werden, daß sie eine *irreduzible* rationale ganze Funktion von

$$x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots;\ x_M, y_M, z_M \tag{5}$$

ist.

3. Hilfssätze. α) *Bedeutet Δ einen Minor der Determinante D oder diese Determinante selbst, so sind die Glieder der Determinante Δ — vom Vorzeichen abgesehen — Potenzprodukte der Größen (5) und zwar lauter verschiedene Potenzprodukte.*

Mit anderen Worten: *Die Entwicklung von Δ als einer Determinante und ihre Entwicklung nach den Potenzprodukten der Größen (5) sind gliedweise identisch.*

Bei dem Beweise dürfen und wollen wir die Bezeichnung so wählen, daß

(6) $$\Delta = |U_{rs}| \quad (r, s = 1, 2, \ldots, \mu)$$

ist, wo μ den Grad der Determinante Δ bedeutet.

Die *Glieder* dieser Determinante sind die Produkte von der Gestalt $\pm U_{1a} U_{2b} \ldots U_{\mu v}$, wo $a, b, \ldots, v$ eine Permutation von $1, 2, \ldots, \mu$ ist und das Vorzeichen der Cramerschen Regel entspricht. Sie sind — vom Vorzeichen abgesehen — ersichtlich Potenzprodukte der Größen (5).

In den Gliedern

$$H = \pm U_{1a} U_{2b} \ldots V_{\mu v} \text{ und } H' = \pm U_{1a'} U_{2b'} \ldots U_{\mu v'}$$

haben x_1, y_1, z_1 dann und nur dann dieselben Exponenten, wenn $a = a'$, denn $U_{2b}, \ldots$ und $U_{2b'}, \ldots$ sind von diesen Koordinaten frei. Sollen alle Größen (5) in H dieselben Exponenten haben als in H', so muß $a = a'$, $b = b', \ldots, v = v'$ sein, also H und H' dasselbe Glied von Δ bedeuten.

β) *Zwei Determinanten μ-ten Grades der Matrix $[\mu]$ — wo $\mu < M$ —, die nicht aus denselben Spalten von $[\mu]$ gebildet sind, enthalten keine ähnlichen Glieder.*

Diesmal bedeute $H = \pm U_{1a} U_{2b} \ldots U_{\mu v}$ ein Glied von

$$S = |U_{rs}| \quad (r = 1, 2, \ldots, \mu;\ s = s_1, s_2, \ldots, s_\mu)$$

und $H' = \pm U_{1a'} U_{2b'} \ldots U_{mv'}$ ein Glied von

$$T = |U_{rt}| \quad (r = 1, 2, \ldots, \mu;\ t = t_1, t_2, \ldots, t_\mu).$$

Soll H zu H' *ähnlich* sein (das heißt, soll jede der Größen (5) in H denselben Exponenten haben als in H'), so muß $a = a'$, $b = b', \ldots, v = v'$ sein. Da $a, b, \ldots, v$ eine Permutation von $s_1, s_2, \ldots, s_\mu$ ist, $a', b', \ldots, v'$ aber eine solche von $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$: so besagt dies, daß $s_1, s_2, \ldots, s_\mu$ und $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ sich nur der Reihenfolge nach unterscheiden können. S und T müssen also aus denselben Spalten von $[\mu]$ gebildet sein.

γ) *Die Determinanten μ-ten Grades von $[\mu]$ sind von einander linear unabhängig.*

Das heißt, zwischen den besagten Determinanten, die wir mit $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ bezeichnen, besteht keine Identität von der Gestalt

$$\lambda_1 \Delta_1 + \lambda_2 \Delta_2 + \ldots = 0,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Konstanten sind und zwar nicht sämtlich gleich Null.

In der Tat enthalten nach β)

$$\lambda_1 \Delta_1, \ \lambda_2 \Delta_2, \ldots$$

keine ähnlichen Glieder, also ist bei ihrer Addition ein Herausfallen von Gliedern ausgeschlossen.

δ) *Hat in der Gleichung $F=0$ einer algebraischen Kurve m-ter Ordnung F keine mehrfachen Teiler und ist $\mu < M$: so gibt es auf dieser Kurve sicher μ solche Punkte, für welche die Matrix $[\mu]$ den Rang μ hat.*

Für $\mu = 1$ ist der Satz evident, denn

$$U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{1M}$$

können nicht alle zugleich Null sein.

Zum Beweise genügt also eine Folgerung von $\mu - 1$ auf μ. Wir nehmen nun an, es sei gelungen auf der Kurve $F=0$ die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{\mu-1}$ so zu bestimmen, daß $[\mu]$ den Rang μ hat: und werden auf der Kurve die Existenz eines solchen Punktes P_μ nachweisen, daß für $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ die Matrix $[\mu]$ den Rang μ hat. Dabei dürfen und wollen wir die Bezeichnung so wählen, daß

$$\Delta = |U_{rs}| \quad (r, s = 1, 2, \ldots, \mu - 1) \tag{7}$$

von Null verschieden ist.

Gebe es zu $P_1, P_2, \ldots, P_{\mu-1}$ auf der Kurve keinen solchen Punkt P_μ, daß $[\mu]$ den Rang μ erhält: so hieße dies, daß für jeden Punkt x, y, z der Kurve alle Determinanten μ-ten Grades der Matrix

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \ldots & U_{1M} \\ U_{21} & U_{22} & \ldots & U_{2M} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ U_{\mu-1,1} & U_{\mu-1,2} & \ldots & U_{\mu-1,M} \\ U_1 & U_2 & \ldots & U_M \end{pmatrix} \tag{8}$$

gleich Null wären. Dann wären aber diese Determinanten solche rationale ganze Funktionen von x, y, z, die durch jeden irreduziblen Faktor von F teilbar sind. Da F keine mehrfache Faktoren hat, müssten diese Determinanten auch durch F teilbar sein.

Die besagten Determinanten sind, ebenso wie F, homogene rationale ganze Funktionen m-ten Grades von x, y, z; sie können also nur so durch F teilbar sein, wenn sie sich von F nur durch konstante Faktoren unterscheiden. Dann darf es aber unter ihnen keine zwei geben, die von Null verschieden sind und sich von einander nicht nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden.

Das trifft aber nicht zu; denn

$$S=\begin{vmatrix} U_{11} & \dots U_{1,\mu-1} & U_{1s} \\ U_{21} & \dots U_{2,\mu-1} & U_{2s} \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ U_{\mu-1,1} & \dots U_{\mu-1,\mu-1} & U_{\mu-1,s} \\ U_1 & \dots U_{\mu-1} & U_s \end{vmatrix},\quad T=\begin{vmatrix} U_{11} & \dots U_{1,\mu-1} & U_{1t} \\ U_{21} & \dots U_{2,\mu-1} & U_{2t} \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ U_{\mu-1,1} & \dots U_{\mu-1,\mu-1} & U_{\mu-1,t} \\ U_1 & \dots U_{\mu-1} & U_t \end{vmatrix}$$

sind *solche* Determinanten der Matrix (8), wenn s und t zwei verschiedene Zahlen der Folge $\mu, \mu+1, \dots, M$ bedeuten. (Wegen $\mu < M$ enthält diese Folge sicher wenigstens zwei Zahlen.) In der Tat ist weder S noch T gleich Null, denn das Potenzprodukt U_s hat in S, und das Potenzprodukt U_t hat in T die von Null verschiedene Determinante (7) zum Koeffizienten. S und T können auch nicht bis auf einen konstanten Faktor einander gleich sein, denn U_s kommt in S vor, in T aber nicht.

4. Beweis der Vermutung von Reiss. *a) D kann nicht in das Produkt zweier rationalen ganzen Funktionen (A und B) von*

$$x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2; \dots;\ x_M, y_M, z_M$$

in solcher Weise zerlegt werden, daß die Koordinaten gewisser Punkte nur im Faktor A, die anderen nur im Faktor B vorkommen.

Nehmen wir an, es gebe eine solche Zerlegung, bei welcher die Koordinaten von $P_1, P_2, \dots, P_\mu$ nur in A, die Koordinaten der übrigen Punkte nur in B vorkommen. In der nach den Potenzprodukten von x_M, y_M, z_M entwickelten Gestalt von D müsste dann jeder Koeffizient — also jede Determinante $(M-1)$-ten Grades von $[M-1]$ — durch A teilbar sein. Ist $\mu < M-1$, so können desgleichen diese Determinanten nur so durch A teilbar sein, wenn die Determinanten $(M-2)$-ten Grades von $[M-2]$ durch A teilbar sind. Usw. Schließlich müssen dann alle Determinanten μ-ten Grades von $[\mu]$ durch A teilbar sein.

Diese Determinanten μ-ten Grades sind in den Koordinaten jedes P_r $(r \leqq \mu)$ homogen und vom Grade m. Auch A ist so beschaffen, denn D hat diese Eigenschaft und in der Zerlegung $D = AB$ ist B von den Koordinaten der besagten Punkte frei. Zufolge dieser Beschaffenheit von A und den Determinanten μ-ten Grades von $[\mu]$ können diese Determinanten nur so durch A teilbar sein, wenn sie sich von A und somit auch von einander nur durch konstante Faktoren unterscheiden. Das widerspricht aber dem Hilfssatze γ).

b) D kann auch in solcher Weise nicht in ein Produkt zweier rationalen ganzen Funktionen zerlegt werden, daß die Koordinaten wenigstens eines Punktes in beiden Faktoren vorkommen.

Gebe es eine Zerlegung $D = AB$, in welcher weder A noch B von x_M, y_M, z_M frei ist, so wären beide Faktoren in x_M, y_M, z_M homogen und ihre Grade in *diesen* Veränderlichen wären $< m$.

Betrachten wir nun eine spezielle Kurve $F = 0$ von der m-ten Ordnung, in deren Gleichung F nicht in Faktoren niedrigeren Grades zerlegbar ist. (Z. B. sei $F = x^{m-1}z + y^m$.) Auf ihr wählen wir $P_1, P_2, \ldots, P_{M-1}$ so, daß $[M-1]$ den Rang $M-1$ erhält, was nach Hilfssatz δ) immer möglich ist. Dann geht außer unserer Kurve keine andere Kurve m-ter Ordnung durch die gewählten Punkte. Folglich wird D bis auf einen von Null verschiedenen konstanten Faktor in das Polynom F übergehen, wenn wir für

$$x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots;\ x_{M-1}, y_{M-1}, z_{M-1}$$

die Koordinaten der auf $F = 0$ gewählten Punkte einsetzen, für x_M, y_M, z_M aber die Veränderlichen x, y, z. Diese Substitution führt also die Zerlegung $D = AB$ in eine solche Zerlegung $F = \bar{A}\bar{B}$ über, in welcher $\bar{A}$ und $\bar{B}$ solche homogene rationale Funktionen von x, y, z allein sind, deren Grade $< m$ sind. Das widerspricht aber der Unzerlegbarkeit von F.

B e m e r k u n g. Wie wir bereits in der Einleitung bemerkten, lassen sich unsere Untersuchungen auch auf den Raum von 3 oder mehreren Dimensionen übertragen. Mit Ausnahme des Satzes b) kann alles auch auf die Gerade, also auf das binäre Gebiet übertragen werden, ist aber in diesem Falle trivial. Daß Satz b) im binären Gebiete nicht giltig ist (sondern durch den Vandermondeschen Determinantensatz zu ersetzen ist), folgt aus dem Umstande, daß jede rationale ganze Funktion von zwei Veränderlichen in lineare Faktoren zerlegbar ist.

(Eingegangen am 3. April 1932.)

An Elliptic System Corresponding to Poisson's Equation.

By GRIFFITH EVANS in Houston, Texas, U. S. A.

Introduction.

It is evident that the equations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y} = u(x, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial x} = v(x, y) \tag{1}$$

bear much the same relation to the CAUCHY—RIEMANN equations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

that Poisson's equation

$$\nabla^2 \psi = p(x, y) \tag{1'}$$

bears to the equation of Laplace $\nabla^2 \psi = 0$. In fact, if u and v are sufficiently differentiable, φ and θ satisfy (1'), with $p = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ and $p = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, respectively. But this notion does not provide an adequate treatment of (1), precisely because it involves in an essential manner the derivatives of u and v.

On the other hand, if we let $U(x, y)$ be a function such that $\nabla^2 U = u(x, y)$ and $V(x, y)$ such that $\nabla^2 V = v(x, y)$, the functions

$$\varphi_1 = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \theta_1 = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \tag{3}$$

are formal solutions of (1), as is seen by direct substitution.

In the following, we suppose that u, v are bounded and measurable in the LEBESGUE sense, in a bounded region T; and we consider especially the potentials

$$
(4) \qquad \begin{aligned} U(x, y) = U(M) &= -\frac{1}{2\pi}\int_T \log\frac{1}{r}\, u(P)\, d\sigma_P, \\ V(M) &= -\frac{1}{2\pi}\int_T \log\frac{1}{r}\, v(P)\, d\sigma_P, \end{aligned}
$$

with $r = MP$. We show, under certain general conditions, that if (1) has solutions at all, a particular pair of solutions is then furnished by (3), with (4), and the difference between these and any other pair of solutions is a pair of conjugate harmonic functions. Hence an inequality on the functions φ_1, θ_1 has a valid application beyond the range of a hypothesis on the given functions u, v such as would be sufficient to establish directly the existence of solutions.[1])

We note, in passing, the special case where u and v do satisfy conditions sufficient for the existence of first order derivatives of φ_1 and θ_1.

If u, v are bounded in T, and satisfy at each point M of T a Hölder condition

$$|u(P) - u(M)| \le A(M)\,\overline{MP}^{\alpha}, \quad |v(P) - v(M)| \le A(M)\,\overline{MP}^{\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

the functions φ_1, θ_1 given by (3), *with* (4), *are solutions of* (1).

It is well known that under these conditions $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ and $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ exist at M and that $\nabla^2 U = u$. It may be verified easily that the same method of proof,[2]) and even more simply, shows that $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)$ and $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)$ exist, and are equal. With this and the corresponding facts about V, the explicit differentiation becomes permissible, and the values given by (3) satisfy (1).

1. Properties of φ_1, θ_1 derived from potentials.

Return now to the more general situation in which u and v are not continuous. Since $u(P) = u(x, y)$, $v(P) = v(x, y)$ are

---

[1]) This note is an exposition of the contents of the author's letter of September 1931 to Professor T. Radó, who inquired about the existence of such inequalities, and suggested that the results might be interesting to readers of these Acta.

[2]) O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory* (Berlin, 1929), p. 153.

bounded, the functions U, V defined by (4) and their first partial derivatives

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{\cos(x, r)}{r}\, u(P)\, d\sigma, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{\cos(y, r)}{r}\, u(P)\, d\sigma \end{aligned}$$

exist and are continuous at every point of the finite plane. Hence the functions defined by (3), with (4), are continuous, and have the values

$$(6)\qquad \begin{aligned} \varphi_1(M) &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{1}{r}\left\{\cos(x, r)\, u(P) + \cos(y, r)\, v(P)\right\} d\sigma \\ \theta_1(M) &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{1}{r}\left\{\cos(x, r)\, v(P) - \cos(y, r)\, u(P)\right\} d\sigma. \end{aligned}$$

But, if $|u(P)| < N$, $|v(P)| < N$ in T,

$$|\cos(x, r)\, u(P) + \cos(y, r)\, v(P)| < N\sqrt{2},$$

and $\int\limits_T \frac{d\sigma}{r}$ is not greater than the same integral extended over a circle with center M and the same measure as T; that is, $\leq 2\pi\sqrt{\frac{\text{meas. } T}{\pi}}$. Hence

$$(7)\qquad |\varphi_1(x, y)| < N\sqrt{\frac{2\,\text{meas. } T}{\pi}}, \quad |\theta_1(x, y)| < N\sqrt{\frac{2\,\text{meas. } T}{\pi}}.$$

A further relation is in evidence. The functions φ_1, θ_1 satisfy the integral equations

$$(8)\qquad \begin{aligned} \int\limits_s \varphi\, dy + \theta\, dx &= \int\limits_\sigma u(P)\, d\sigma \\ \int\limits_s \theta\, dy - \varphi\, dx &= \int\limits_\sigma v(P)\, d\sigma, \end{aligned}$$

for any simple rectifiable closed curve s which, with its interior region σ, is interior to T (or, when u, v vanish identically outside T, for any such curves in the finite plane).

In fact, if σ is made up of a finite number of non-overlapping rectangles, and n denotes the interior normal, we have

$$\int_s \varphi_1 dy + \theta_1 dx = \int_s [-\varphi_1 \cos(x, n) + \theta_1 \cos(y, n)]\, ds$$

$$= -\int_s \left[\frac{\partial U}{\partial x}\cos(x, n) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(y, n)\right] ds +$$

$$+ \int_s \left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(y, n) - \frac{\partial V}{\partial y}\cos(x, n)\right] ds =$$

$$= -\int_s \frac{dU}{dn}\, ds + \int_s \frac{dV}{ds}\, ds,$$

the last integral vanishing, since $V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ are continuous. But

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial U}{\partial x}\, dy = -\frac{1}{2\pi}\int_T d\sigma\, u(P) \int_{y_1}^{y_2} \frac{\cos(x, r)}{r}\, dy,$$

since the quantity

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_T \frac{|\cos(x, r)|}{r} |u(P)|\, d\sigma$$

exists, and since for a fixed x, the function $\frac{\cos(x, r)}{r} u(P)$ is measurable in the three dimensional region $\{(\xi, \eta) \text{ in } T,\ y_1 < y < y_2\}$, where $P = (\xi, \eta)$.[8]) Hence, for any rectangle s

$$\int_s \frac{dU}{dn}\, ds = -\frac{1}{2\pi}\int_T d\sigma\, u(P) \int_s -\frac{\cos(x, r)}{r}\, dy + \frac{\cos(y, r)}{r}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_T d\sigma\, u(P) \int_s \frac{d}{dn}\log\frac{1}{r}\, ds = -\int_\sigma u(P)\, d\sigma.$$

Hence for any finite collection of non-overlapping rectangles, the first of equations (8) is established. The simple rectifiable curve is a limiting case, for the left hand member, by definition of the curvilinear integral, and for the right hand member, by the absolute continuity of $\int_\sigma u(P)\, d\sigma$. The second of equations (8) may be established in a similar manner.

[8]) Ch. de la Vallée Poussin, *Cours d'analyse infinitésimale,* vol. 2 (Paris, 1912), p. 122.

These results may be summarized as follows.

Theorem. *If u, v are bounded in T and summable in the Lebesgue sense over T, the functions φ_1. θ_1, defined by* (3), *with* (4), *have the form* (6), *are bounded and continuous in the finite plane, and satisfy the inequalities* (7); *and within T satisfy the integral equations* (8) *for curves s which are contained with their interiors in T.*

2. The homogeneous integral equations.

The differences of two pairs of solutions of (8) are solutions of the homogeneous equations

$$\int_s \varphi\, dy + \theta\, dx = 0, \quad \int_s \theta\, dy - \varphi\, dx = 0. \tag{9}$$

Theorem. *A pair of continuous solutions of* (9), *for curves s of the kind described, form a pair of conjugate harmonic functions in T.*

Consider any simply connected portion T' of T. Let Q be a fixed and M a variable point in T'. Then, by the first of (9),

$$\int_Q^M \varphi\, dy + \theta\, dx = \Psi(M)$$

defines a single valued function of M in T', and since φ and θ are continuous in T',

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \theta, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \varphi$$

$$\frac{d\Psi}{d\alpha} = \theta \cos(x, \alpha) + \varphi \cos(y, \alpha)$$

where $\frac{d\Psi}{d\alpha}$ is the directional derivative in the direction α.

The second of equations (9) now becomes

$$\int_s \frac{\partial \Psi}{\partial x} dy - \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx = 0,$$

so that

$$\int \frac{d\Psi}{dn} ds = 0.$$

But it is a well known theorem of BÔCHER that if $\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ are continuous in T' and $\int_s \frac{d\Psi}{dn} ds = 0$, for all circles s in T', then the derivatives of all orders of Ψ exist and are continuous in T' and Ψ satisfies Laplace's equation.[4]) Consequently

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial\theta}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=-\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

and φ and θ are conjugate harmonic functions in T'. And any point of T is interior to some T'. In this demonstration, rectangles or other special classes of curves may be used in place of circles.

3. Relations between differential and integral equations.

In general, in order to make connection between (1) and (8), mere continuity of φ and θ is not enough; it is necessary to make some hypothesis of absolute continuity of φ and θ with respect to the variables x and y separately, and it is desirable to make the assumption as a two dimensional condition in dealing with two-dimensional problems. We retain the requirement of continuity, as appropriate to the present problem, and add the following:

(A). Consider simple closed rectifiable curves, which with their interior regions lie in T (in fact, rectangles suffice) and write $F(\sigma)=\int\limits_{s}\varphi\,dy$, $G(\sigma)=-\int\limits_{s}\varphi\,dx$. The condition is that $F(\sigma)$, $G(\sigma)$ *define absolutely continuous functions of point sets in* T.

As a result of this condition, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ and $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ exist almost everywhere and are summable in T, having almost everywhere the values of the point set derivatives of these respective functions of point sets; and for almost all y the φ is absolutely continuous in x, and for almost all x it is absolutely continuous in y.[5])

---

[4]) M. Bôcher, On Harmonic Functions in Two Dimensions, *Proceedings of the American Academy of Sciences*, 41 (1905—6), pp. 577—583.

[5]) This condition was introduced and similar properties obtained in G. Evans, Fundamental Points of Potential Theory, *Rice Institute Pamphlet*, 7 (1920), pp. 252—329 (see p. 274), with φ summable instead of continuous. In the restriced case in which φ is continuous it is identical with the concept of „funzione di due variabili assolutamente continua" described by L. Tonelli, Sulla quadratura delle superficie, *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, (6) 3 (1926, 1º sem.), pp. 633—638, and Sulle funzioni di due variabili assolutamente continue, *Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna* (Scienze fisiche), (8) 6 (1928—29), pp. 81—88. See also G. Evans, *The Logarithmic Potential* (New York, 1927), p. 146.

Theorem. *Let φ and θ be continuous in T and satisfy* (A), *and let s be a curve of the kind already described. Then if φ, θ satisfy* (1) *almost everywhere they satisfy* (8) *for all s, and if they satisfy* (8), *in fact, merely for rectangles, they satisfy* (1) *almost everywhere.*

For, the equations (1), holding almost everywhere, imply

$$(10)\quad \int_\sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)d\sigma=\int_\sigma u\,(x,y)\,d\sigma,\ \int_\sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)d\sigma=\int_\sigma v\,(x,y)\,d\sigma,$$

since the first partial derivatives of φ and θ are summable. And (10) implies (8), by (A), for any curve which, with its interior region, is contained in T. Conversely, (8) implies (10) by (A), and (10) implies (1) almost everywhere.

Corollary. *If the system* (1) *has a pair of solutions which are continuous and satisfy condition* (A), *then it has as solutions the particular functions φ_1, θ_1, which satisfy the inequality* (7), *and also these functions plus an arbitrary pair of conjugate harmonic functions in T.*

For, by the theorem just given, such a pair must constitute solutions of (8). But if one pair of solutions of (8) satisfy (A), any pair must do so, since the pairs of differences are harmonic in T.

In conclusion, we remark that instead of (8) which are not much more general than the differential equations (1), we might consider equations of a different order of generality, namely

$$(11)\qquad \int_s \varphi\,dy+\theta\,dx=F(s),\ \int_s \theta\,dy-\varphi\,dx=G(s),$$

in which φ and θ are merely summable, and $F(s)$, $G(s)$ are additive functions of curves, which correspond, on curves of continuity, to completely additive functions of point sets; the equations (11) are assumed to hold on „almost all" rectangles, or „almost all" curves of a certain class. By taking alternalely $F(s)\equiv 0$ and $G(s)\equiv 0$ the problem may be reduced to one in potential theory considered by the author.[6]

[6] Discontinuous Boundary Value Problems of the First Kind for Poisson's Equation, *American Journal of Mathematics*, 51 (1929), pp. 1—18.

(Received April 29, 1932.)

Über eine Beweismethode in der Theorie der abstrakten Räume.

Von PAUL VERESS in Budapest.

In den folgenden Zeilen will ich mich mit einer Beweismethode befassen, die schon wiederholt angewandt wurde, ohne daß das dabei Prinzipielle betont und das allen diesen Beweisen Gemeinsame herausgehoben worden wäre.

Eine ähnliche Rolle hat auch das Borelsche oder das Borel–Lebesguesche Überdeckungstheorem gespielt.[1]) Eine schärfere Analyse zeigt aber, daß der Weg über die Intervallbedeckungen in vielen Fällen ein Umweg ist, es ist meist vorteilhafter, direkt mit den Aussagen zu operieren, die für die einzelnen Elemente gültig sind. So kann man den Satz I oder I′ des folgenden § 1 anwenden. Dieser Satz enthält den Borelschen, aber nicht den Borel–Lebesgueschen Satz[2]) und trotzdem kommt man mit ihm schon in den meisten Fällen aus, wo sonst der Borel–Lebesguesche Satz notwendig war. (S. die Beispiele des § 1.) Dies spricht eben dafür, daß das Wesentliche dieser Beweismethode in Satz I besser ergriffen wird, als im Borelschen. Dabei braucht man aber

[1]) Man vergleiche hierüber das zusammenfassende Referat von T. H. HILDEBRANDT: The Borel Theorem and Its Generalisations, *Bulletin of the American Math. Society*, **32** (1926), p. 423–474.

[2]) Der Borelsche Satz heißt: *Liegt jeder Punkt einer kompakten abgeschlossenen Menge in einem der Folge $i_1, i_2, i_3, \ldots$ von offenen Intervallen, so liegt die ganze Menge in der Summe von endlich vielen dieser Intervalle.* Der Borel–Lebesguesche Satz ist: *Liegt jeder Punkt einer kompakten abgeschlossenen Menge in einem eines beliebigen Systems von offenen Intervallen, so liegt die ganze Menge in der Summe von endlich vielen dieser Intervalle.* Kompakt wird eine Menge genannt, wenn sie keine unendliche Teilmenge ohne Häufungspunkt hat. Im n-dimensionalen euklidischen Raum ist kompakt gleichbedeutend mit „im Endlichen gelegen."

auch nicht Intervalle einzuführen in den Fällen, wo solche nicht schon natürlicher Weise gegeben sind; für das Aussprechen und den Beweis des Satzes I ist weder der Begriff der Entfernung, noch der einer Umgebung, ja nicht einmal der Begriff der Konvergenz und des Limes notwendig.

§ 1.

1. Man betrachte eine Menge M von beliebigen Elementen z (Zahlen, Punkte eines euklidischen Raumes, Funktionen, Mengen, kurz Elemente eines beliebigen abstrakten Raumes). Wir betrachten noch Aussagen $A_n(z)$ (bzw. abstrakte Mengen) deren jede für das beliebige Element $z \in M$ entweder gilt oder nicht gilt (bzw. das Element z enthält oder nicht). Solche Aussagen können z. B. sein:

für komplexe Zahlen z: $|z| < 1$;

für Funktionen $z = f(x)$: $f(x)$ ist stetig im Punkte a, oder: die Schwankung von $f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ ist $< \varepsilon$;

für Punkte des Raumes $z = P$: P liegt im gegebenen Intervalle i.

Wenn daraus, daß $A_1(z)$ für irgendein Element z_0 gilt, folgt, daß $A_2(z)$ für dasselbe Element z_0 ebenfalls gültig ist, so sagen wir: die Aussage $A_2(z)$ folgt aus $A_1(z)$, in Zeichen $A_1(z) \rightarrow A_2(z)$.

Eine unendliche Folge von auseinander folgenden Aussagen

$$A_1(z) \rightarrow A_2(z) \rightarrow A_3(z) \rightarrow \ldots$$

nennen wir eine *monotone* Folge.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen können wir aussprechen den

Satz I. *Ist eine Menge M der Elemente z und eine monotone Folge von Aussagen so gegeben, daß*

1. *zu jedem Elemente z von M eine Aussage $A_n(z)$ gehört, die für das Element z gilt;*

2. *zu jeder unendlichen Teilmenge M' von M eine Aussage $A_m(z)$ gehört, die für unendlich viele Elemente z aus M' gilt;*

dann gibt es eine Aussage $A_N(z)$, die für alle Elemente der Menge M gültig ist.

Der Beweis läßt sich nach bewährtem Muster folgendermaßen durchführen. Gilt $A_1(z)$ schon für alle $z \in M$, dann ist nichts mehr zu beweisen. Im entgegengesetzten Falle gibt es ein Element z_1, für welches $A_1(z)$ nicht gilt. Zu diesem z_1 gehört aber eine gültige

Aussage aus der Folge, sagen wir $A_{n_1}(z)$. Entweder gilt $A_{n_1}(z)$ schon für alle $z \in M$, oder aber gibt es ein Element z_2, für welches sie nicht gilt, aber $A_{n_2}(z)$ schon gültig ist. Man setze dieses Auswahlverfahren fort: gilt $A_{n_k}(z)$ nicht für alle Elemente, gilt es z. B. für z_{k+1} nicht, so bestimme man $A_{n_{k+1}}(z)$ so, daß dieses auch für z_{k+1} gültig sei. (Aus der Monotonität der Folge $A_n(z)$ folgt: $n_{k+1} > n_k$.) Ließe sich das Auswahlverfahren ins Unendliche fortsetzen, so käme man mit der Voraussetzung 2 in Widerspruch, denn in der Folge

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

ist jede Aussage $A_n(z)$ nur für endlich viele Glieder gültig. Infolgedessen muß es nach endlich viel (r) Schritten abbrechen, und dann gilt die letzte erhaltene Aussage $A_{n_r}(z)$ für alle Elemente $z \in M$.

Wenn man anstatt „die Aussage $A_n(z)$ gilt für das Element z" sagt: „die Menge A_n enthält z", kann man den Satz auch so formulieren:

Ist jedes Element der Menge M in einer Menge der monoton wachsenden Mengenfolge $A_1 < A_2 < A_3 < \ldots$ enthalten und liegen ferner aus jeder unendlichen Teilmenge M' von M unendlich viele Elemente in einer geeignet gewählten Menge A_m, dann ist die ganze Menge M in einer Menge A_N enthalten.

So formuliert ist der Satz sehr anschaulich, doch ist die erste Form für die Anwendungen bequemer.

2. Um für die Anwendungen gleich ein Beispiel zu geben, will ich beweisen, daß eine Funktion $f(x)$, die in jedem Punkte einer kompakten und abgeschlossenen Menge M eines metrischen Raumes stetig ist, auf M gleichmäßig stetig ist.

Zu der gegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ definieren wir die Aussage $A_n(x)$ so: die Schwankung von $f(x)$ ist im Intervall,[3]) dessen Mittelpunkt x und dessen Länge $\frac{1}{2^n}$ ist, kleiner als ε.

Daß die Voraussetzung 1 des Satzes I erfüllt ist, also für jedes x eine gültige Aussage $A_n(x)$ zu finden ist $(n = n(x, \varepsilon))$, das bedeutet eben die Stetigkeit von $f(x)$ im Punkte x.

---

[3]) Dieses Intervall soll in einem allgemeinen metrischen Raum die Menge der Elemente bedeuten, die von x in einer Entfernung $\leqq \frac{1}{2^{n+1}}$ liegen.

Eine unendliche Teilmenge M' von M hat einen in M gelegenen Häufungspunkt x_0, da M kompakt und abgeschlossen ist. Gilt nun $A_m(x)$ für x_0, so gilt $A_{m+1}(x)$ für alle x, die im Intervalle der Länge $\frac{1}{2^{m+1}}$ um den Mittelpunkt x_0 liegen, d. h. für unendlich viele $x \in M'$. Die Voraussetzung 2 ist also auch erfüllt und so ergibt Satz I, daß eine Aussage $A_N(x)$ für alle Punkte $x \in M$ gültig ist und das heißt eben, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein von x unabhängiges $\delta = \frac{1}{2^N}$ existiert, so daß die Schwankung von $f(x)$ auf jedem Intervalle, dessen Länge $\leqq \delta$ ist, kleiner als ε ausfällt.

Dieser Satz kann nicht direkt aus dem Borelschen, sondern nur aus dem Borel–Lebesgueschen Satz bewiesen werden, denn die zu benützenden, überdeckenden Intervalle haben die Mächtigkeit des Kontinuums, während Aussagen bezüglich der Stetigkeit, auf die es allein ankommt, in abzählbarer Zahl gestellt werden können.

3. Ich will noch zeigen, wie das Borelsche Überdeckungstheorem und zwar gleich in der allgemeinsten Form, für einen Hausdorffschen Raum, aus Satz I herauszulesen ist.

Hausdorffschen Raum nennen wir einen Raum, in dem Umgebungen definiert sind, die den vier Umgebungs-postulaten[4]) genügen. Die für metrische Räume bekannten Begriffe werden für diesen Raum einfach übertragen: z ist ein innerer Punkt der Menge M, wenn z eine Umgebung hat, die in M liegt. Eine Menge, die nur aus inneren Punkten besteht, ist offen. Der Punkt z ist Limes der Folge $z_1, z_2, z_3, \ldots$ wenn für jede Umgebung U_ε von z eine natürliche Zahl n existiert, so daß $z_\nu \in U_\varepsilon$ für $\nu > n$. Konvergent ist eine Folge, die einen Limes hat; kompakt ist eine Menge, deren jede unendliche Teilmenge eine konvergente Teilfolge enthält

Nun sei eine kompakte abgeschlossene Menge M eines Hausdorffschen Raumes gegeben und dazu eine Folge von offenen Mengen $u_1, u_2, u_3, \ldots$, so daß jeder Punkt $z \in M$ in mindestens einer dieser Mengen u_n enthalten ist. Als Aussage $A_n(z)$ betrachte man

---

[4]) S. E. HAUSDORFF: *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, 1914), p. 213. HAUSDORFF nennt diesen Raum *topologisch*, doch da von anderen Autoren diese Bezeichung in einem anderen Sinne gebraucht wird, sagen wir nach FRÉCHET (*Les éspaces abstraits* (Paris, 1929), p. 167, Fußnote) Hausdorffschen Raum.

folgendes: der Punkt z ist in der Summe $U_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ enthalten. Voraussetzung 1 ist offenbar erfüllt. Ist ferner M' eine unendliche Teilmenge von M, so hat M' einen Häufungspunkt z_0 in M. Ist $z_0 \in U_m$, so sind die Punkte von M', die in einer bestimmten Umgebung von z_0 liegen, ebenfalls in u_m (weil u_m offen ist) und so auch in U_m enthalten. Solche Punkte gibt es aber unendlich viele, da z_0 ein Häufungspunkt von M' ist. Die zweite Voraussetzung ist also ebenfalls erfüllt, daher gilt ein $A_N(z)$ für alle $z \in M$, d. h. die Menge M ist in der Summe

$$U_N = u_1 + u_2 + \ldots + u_N$$

enthalten.

4. Bilden die Aussagen $A_1(z), A_2(z), A_3(z), \ldots$ keine monotone Folge, so kann man an ihrer Stelle eine andere, monotone Folge einführen, indem man als $A'_n(z)$ die Aussage definiert, daß für das Element z mindestens eine der Aussagen $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_n(z)$ gültig ist, wofür man auch schreiben kann:

$$A'_n(z) = A_1(z) \vee A_2(z) \vee \ldots \vee A_n(z).$$

Beim Beweis des Borelschen Theorems haben wir vorhin schon diese Methode angewandt. Sind die weiteren Voraussetzungen des Satzes I erfüllt, so gibt es eine für alle $z \in M$ gültige Aussage $A'_N(z)$, was auf die ursprünglichen Aussagen angewandt besagt, daß es endlich viele unter ihnen gibt, so daß für jedes $z \in M$ eine von diesen endlich vielen Aussagen besteht. Für manche Anwendungen empfiehlt es sich diesen Satz besonders auszusprechen.

Satz I'. *Ist eine Menge M der Elemente z und eine Folge von Aussagen $A_1(z), A_2(z), A_3(z), \ldots$ so gegeben, daß*

1. *zu jedem Elemente z von M eine gültige Aussage $A_n(z)$ gehört,*

2. *zu jeder unendlichen Teilmenge M' von M gibt es eine Aussage $A_m(z)$, die für unendlich viele Elemente von M' gilt,*

dann gibt es einen endlichen Abschnitt der Folge so, daß für jedes Element $z \in M$ eine Aussage dieses Abschnittes gültig ist.

Anwendungen kann dieser Satz in der Theorie der reellen Funktionen und auch in den Elementen der Analysis reichlich finden. Fast überall, wo der Borel–Lebesguesche Satz angewendet wird, kommt man direkter zum Ziel durch den Satz I oder I', man hat nur die Aussagen entsprechend zu definieren. Nur wo die Elemente selbst Mengen sind und die Aussagen sich auf

„. . . enthalten sein" beziehen, ist die Anwendung des Borel–Lebesgueschen Satzes vorteilhafter.

5. Von den vielen möglichen Anwendungen sei es mir erlaubt, als Beispiel noch eine, den Beweis des folgenden Satzes anzuführen:

Sind die Funktionen $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ *und* $f(x)$ *auf der kompakten, abgeschlossenen Menge* M *eines metrischen Raumes stetig und konvergiert* $f_\nu(x)$ *gegen* $f(x)$ *für* $\nu \to \infty$, *so ist die Konvergenz quasigleichmäßig.*

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir an, daß die positive Zahl ε gegeben ist. Die Aussage $A_n(x)$ definieren wir folgendermaßen: es ist $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Wegen der Kovergenz $f_\nu(x) \to f(x)$ gibt es für jeden Punkt x eine gültige Aussage $A_n(x)$, wo $n = n(x, \varepsilon)$.

Eine beliebige unendliche Teilmenge M' von M hat mindestens einen in M gelegenen Häufungspunkt x_0. Für diesen Häufungspunkt x_0 sei $A_m(x)$ gültig, d. h.

$$a_m = |f_m(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Nun gibt es infolge der Stetigkeit von $f_m(x)$ und $f(x)$ zu x_0 ein $\delta_m > 0$ und ein $\delta > 0$, so daß

$$|f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon - a_m}{2}, \text{ wenn } |x - x_0| < \delta_m, \tag{2}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon - a_m}{2}, \text{ wenn } |x - x_0| < \delta. \tag{3}$$

Ist $0 < \delta' \leqq \delta_m$ und $\delta' \leqq \delta$, so gelten die Ungleichungen (1), (2) und (3) gleichzeitig für $|x - x_0| < \delta'$, es ist also auch

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ wenn } |x - x_0| < \delta'.$$

Die Aussage $A_m(x)$ gilt also für alle x, die in genügender Nähe von x_0 sind, daher für unendlich viele $x \in M'$, da x_0 ein Häufungspunkt von M' ist.

Die Voraussetzungen des Satzes I' sind mithin erfüllt, es gibt also endlich viele Aussagen $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_N(x)$, so daß für jedes $x \in M$ eine dieser Aussagen erfüllt ist, also eine der Ungleichungen

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

stattfindet.

Dasselbe gilt aber für die Folge

$$f_r(x), f_{r+1}(x), f_{r+2}(x), \ldots,$$

die dieselben Voraussetzungen erfüllt, wie die Folge $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ Wir können also sagen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder natürlichen Zahl r eine natürliche Zahl $N > r$ gibt so, daß für jedes $x \in M$ eine der Ungleichungen:

$$|f_r(x) - f(x)| < \varepsilon, \ |f_{r+1}(x) - f(x)| < \varepsilon, \ldots, |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$$

stattfindet und das heißt eben soviel, daß die Konvergenz quasigleichmäßig ist.

§ 2.

6. Das Erfülltsein der Voraussetzung 2 haben wir in den vorhergehenden Anwendungen immer daraus gefolgert, daß die Menge der Elemente kompakt war und die Aussage, welche für das Limeselement gültig war, in einer gewissen Umgebung des Limes auch bestanden hat. Auf diese Weise bekommt man notwendige Bedingungen dafür, daß eine gegebene Menge kompakt sei.

Kriterien für kompakte Mengen in den speziellen metrischen Räumen sind schon verschiedentlich aufgestellt worden.[5]) Die Frage mußte aber für jeden Raum separat — und nicht immer auf ganz einfache Weise — behandelt werden. Ich will nun zeigen, daß die Notwendigkeit dieser Kriterien in allen Fällen aus Satz II ohne jede weitere Überlegung direkt herauszulesen ist. Man braucht dabei die Metrik des Raumes nicht vorauszusetzen, es sei denn, daß diese Kriterien selbst sich auf Entfernungen beziehen.

Die weiteren Ausführungen können also auf einen Raum L bezogen werden, in dem die Konvergenz einer Folge von Elementen definiert ist.[6]) Es ist also außer den Elementen des Raumes noch eine Vorschrift gegeben, mittels welcher man entscheiden kann, ob eine gegebene Folge konvergent ist oder nicht, und mittels der man im Falle der Konvergenz das Limeselement (das dem Raume angehört) bestimmen kann. Die Vorschrift soll den Fréchetschen zwei Postulaten genügen.[6])

Hat eine Aussage die Eigenschaft, daß sie, wenn sie für das Limeselement einer Folge gilt, für alle Elemente der Folge von einem gewissen an ebenfalls gültig ist, so nennen wir die Aussage *stetig*. Eine Menge des Raumes L nennen wir kompakt, wenn sie

---

[5]) Vgl. die Fußnoten [7])—[11]).

[6]) Vgl. M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rendiconti di Palermo*, 22 (1906), p. 1—74; vgl. insb. p. 5.

endlich ist, oder falls sie unendlich ist, jede unendliche Teilmenge von ihr eine in dem obigen Sinne konvergente Teilfolge enthält.

Wir nehmen noch an, daß eine monotone Folge von stetigen Aussagen

$$A_1(z) \to A_2(z) \to A_3(z) \to \ldots$$

so gegeben ist, daß für jedes Element des Raumes eine Aussage der Folge gültig ist. Dieses Bestehen einer Aussage der Folge $A_n(z)$ kann eben die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ausdrücken, daß das Element dem Raum angehöre.

Ist nun M eine kompakte Menge, so enthält jede unendliche Teilmenge M' von ihr eine konvergente Folge, deren Limes M angehören kann oder nicht. Jedenfalls gilt aber für dieses Limeselement, als Element des Raumes L, eine Aussage $A_m(z)$ und dann gilt diese wegen der Stetigkeit von $A_m(z)$ für unendlich viele Glieder der Folge — also ist auch die Voraussetzung 2 des Satzes I erfüllt. So hat man den

Satz II. *Gilt für jedes Element eines Raumes L eine der stetigen Aussagen*

$$A_1(z) \to A_2(z) \to A_3(z) \to \ldots,$$

die eine monotone Folge bilden, so gibt es für jede kompakte Menge M des Raumes L eine natürliche Zahl N, so daß die Aussage $A_N(z)$ für alle Elemente von M gilt.

Wie man sieht, genügt es, anstatt der Stetigkeit der Aussagen nur soviel vorauszusetzen, daß wenn $A_n(z)$ für den Limes einer Folge gilt, so gibt es eine natürliche Zahl p so daß $A_{n+p}(z)$ für alle Glieder der Folge von einem gewissen an gültig ist. Für diesen Fall sagen wir: die Aussagen bilden eine *stetige, monotone Folge.*

7. Als erstes Beispiel wählen wir den Raum der auf einer kompakten, abgeschlossenen Menge eines metrischen Raumes der Variablen x erklärten stetigen Funktionen $z=f(x)$. Konvergenz soll jetzt gleichmäßige Konvergenz bedeuten. Jedes Element des Raumes ist eine gleichmäßig stetige Funktion (vgl. § 1, Nr. 2), als $A_n(z)$ kann also zu irgendeinem $\varepsilon>0$ die Aussage definiert werden, daß die Schwankung von $f(x)$ in jedem Intervall der Länge $\frac{1}{2^n}$ kleiner als ε ist. Diese Aussagen sind stetig, also gibt es laut Satz II für eine kompakte Menge der stetigen Funktionen ein N so, daß für alle Funktionen $f(x)$ der kompakten Menge und für alle Stellen x:

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon \text{ ist, falls } |x-x'|<\frac{1}{2^N},$$

d. h. die Funktionen sind *gleichartig* gleichmäßig stetig.[7])

8. Die Elemente des Hilbertschen Raumes sind die Punkte z mit den abzählbar vielen reellen Koordinaten

$$z=(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

für die $\sum_1^\infty x_\lambda^2$ konvergent ist. Als Aussage $A_n(z)$ kann also hier:

$$r_n(z)=\{x_{n+1}^2+x_{n+2}^2+x_{n+3}^2+\ldots\}^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$$

gewählt werden.

Die Konvergenz der Folge $z^{(\nu)}\to z$ bedeutet

$$(z^{(\nu)}, z)=\left\{\sum_1^\infty (x_\lambda^{(\nu)}-x_\lambda)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\to 0.$$

Die Stetigkeit der Aussagen $A_n(z)$ folgt aus

$$r_n(z^{(\nu)})\leqq r_n(z)+(z^{(\nu)}, z).$$

Auf Grund des Satzes II gibt es also zu einer kompakten Menge M des Hilbertschen Raumes für jedes $\varepsilon>0$ ein N so, daß

$$r_N(z)<\varepsilon$$

ist für alle $z\in M$.[8])

9. Für die in $\langle a, b\rangle$ meßbaren Funktionen kann als Aussage $A_n(z)$ zu irgendeinem $\varepsilon>0$ folgendes gewählt werden: es gibt eine Menge e, mit $m(e)<\varepsilon$ so, daß wenn man das Intervall $\langle a, b\rangle$ in n gleiche Teilintervalle: $i_1, i_2, \ldots, i_n$ teilt, die Schwankung von $z=f(x)$ auf jeder Menge $i_k e$ kleiner als ε ausfällt $(k=1, 2, \ldots, n)$. Für jedes Element dieses Raumes gibt es eine gültige Aussage $A_n(z)$; versteht man unter Konvergenz die Konvergenz *dem Maße nach*, so sind diese Aussagen stetig, also folgt aus Satz II für eine kompakte Menge dieses Raumes die Existenz

---

7) C. Arzelà: Sulle funzioni di linee, *Memorie delle R. Accademia delle Scienze di Bologna*, (5) **5** (1895—96), p. 225—244.

8) M. Fréchet, Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel, *Rendiconti di Palermo*, 30 (1910), p. 1—26.

einer für alle Elemente der kompakten Menge gültige Aussage $A_N(z)$.[9])

Sind die Funktionen außerdem quadratisch integrierbar, so können die kompakten Mengen auf Grund der Konvergenz im Mittel definiert werden, für eine in diesem Sinne kompakte Menge ist wieder obige Bedingung notwendig.[10]) Das ergibt (neben der in Nr. 8) eine zweite Lösung der gestellten Frage für den Hilbertschen Raum.

10. Als Raum der Jordanschen Kurven betrachten wir die topologischen (umkehrbar eindeutigen und stetigen) Bilder des abgeschlossenen Intervalls $\langle 0, 1 \rangle$. Eine Folge $K_1, K_2, K_3, \ldots$ von solchen Kurven nennen wir gegen K konvergent, wenn es eine topologische Abbildung von K_ν auf K so gibt, daß die maximale (euklidische) Entfernung der entsprechenden Punkte auf K_ν und K gegen Null konvergiert. Als Aussage $A_n(K)$ gilt hier: man kann die Kurve so in n Bogen teilen, daß die maximale Entfernung von irgend zwei Punkten jedes Teilbogens kleiner als ε wird. Diese Aussage ist stetig, also gibt es für eine kompakte Menge der Jordanschen Kurven zu jedem $\varepsilon > 0$ eine gültige Aussage $A_N(K)$: die Kurven einer kompakten Menge sind gleichmäßig teilbar.[11])

§ 3.

11. Jede kompakte Menge eines metrischen Raumes ist beschränkt. (Dies kann man auch aus Satz II ersehen.) Es gilt aber noch mehr: jede kompakte Menge eines metrischen Raumes ist *total beschränkt*, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$, gibt es n Elemente (eine endliche Basis) der kompakten Menge M:

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \qquad n = n(\varepsilon),$$

so daß jedes Element $z \in M$ zu irgendeinem z_i kleinere Entfernung als ε hat. Es können nämlich nur endlich viele Elemente in M sein, deren Entfernung paarweise $\geqq \varepsilon$ ist, sonst enthielte die unendliche Folge $z_1, z_2, z_3, \ldots$ mit $(z_i, z_k) \geqq \varepsilon$ für $i \neq k$ keine konvergente Teilfolge.

---

[9]) M. Fréchet, Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables, *Fundamenta Math.*, 9 (1927), p. 25—32; P. Veress, Über Funktionenmengen, *diese Acta*, 3 (1927), p. 177—192.

[10]) P. Veress, l. c. [9]) p. 192.

[11]) M. Fréchet, l. c. [6]) p. 60.

Daraus und aus Satz II folgt unmittelbar der Borel–Lebesguesche Satz für metrische Räume, den wir analog dem Satz II so aussprechen:

Satz III. *Es sei M eine kompakte, abgeschlossene Menge eines metrischen Raumes; mit $\{A(z)\}$ bezeichnen wir ein System stetiger Aussagen über die Elemente z. Gilt für jedes $z \in M$ eine dieser Aussagen, so gibt es endlich viele unter ihnen: $A_1(z)$, $A_2(z), \ldots, A_n(z)$ so, daß für jedes $z \in M$ ein $A_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gültig ist.*

Für den Beweis definieren wir als $A'_\nu(z)$ folgende Aussage: für z gilt mindestens eine solche Aussage $A(z)$, die auch für alle $\zeta \in M$, für die $(\zeta, z) < \frac{1}{\nu}$, gültig ist.[12]) Die Aussagen $A'_\nu(z)$ bilden eine stetige monotone Folge, ferner gilt für jedes $z \in M$ eine von ihnen; also gilt laut Satz II eine Aussage $A'_N(z)$ für alle $z \in M$. Das heißt aber, daß es für jedes $z \in M$ ein $A(z)$ gibt, das für z und für alle $\zeta \in M$ mit $(\zeta, z) < \frac{1}{N}$ gilt. Es sei die zu $\varepsilon = \frac{1}{N}$ gehörige Basis der Menge M: $z_1, z_2, \ldots, z_r$, $A_i(z)$ sei die Aussage, die für $(z_i, z) < \frac{1}{N}$ gilt, dann gilt für jedes Element $z \in M$ eine der Aussagen $A_1, A_2, \ldots, A_N$.

12. Ich erwähne noch einen Satz über kompakte Mengen, der im Satz II nicht, nur im Satz III enthalten ist.

Als Elemente des Raumes betrachten wir jetzt meßbare Funktionen, die auf einer meßbaren Menge E erklärt sind; Entfernung soll die obere Grenze des absoluten Wertes der Differenz der beiden Funktionen in E sein. Konvergenz heißt also gleichmäßige Konvergenz. Die Funktionen einer in diesem Raume kompakten Menge M liegen zwischen zwei festen (nur von M abhängigen) Schranken.

Es ergibt sich nun aus Satz III: Ist M eine kompakte Menge der meßbaren Funktionen $z = f(x)$, so läßt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ die Menge E in endlich viele, elementenfremde meßbare Teilmengen so einteilen, daß die Schwankung von jeder Funktion der

---

[12]) Die in Nr. **6** gegebene Definition der Stetigkeit ist in metrischen Räumen mit folgender äquivalent: gilt $A(z)$ für z, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß $A(z)$ auch für alle $\zeta \in M$ gilt, für die $(\zeta, z) < \delta$ ist.

Menge M auf jeder Teilmenge kleiner als ε ist.[13]) Dies ist nämlich eine stetige Aussage, deren Gültigkeit für eine einzige beschränkte meßbare Funktion selbstverständlich ist.

13. Der Satz, daß eine kompakte Menge totalbeschränkt ist, ist für vollständige, metrische Räume umkehrbar, wie man es durch das Schachtelprinzip leicht einsieht: jede totalbeschränkte Menge eines vollständigen, metrischen Raumes ist kompakt. Auf Grund dieses Satzes beweist man leicht, daß die Beschränktheit und die Gültigkeit der betreffenden Aussagen in Nr. **7—10** zusammen auch hinreichend sind dafür, daß die Menge kompakt sei. Der Beweis läßt sich in allen Fällen der Nr. **7—10** am einfachsten durchführen, indem man zu gegebenem $\varepsilon > 0$ die Basis konstruiert.[14])

(Eingegangen am 29. April 1932.)

---

[13]) Vgl. P. Veress, Über kompakte Funktionenmengen und Bairesche Klassen, *Fundamenta Math.*, **7** (1925), p. 244—249.

[14]) Vgl. P. Veress, l. c. [9]).

Elementare Bemerkung über identische Kongruenzen.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

In der Arbeit „Zur Theorie der identischen Kongruenzen mit Idealmoduln"[1]) berechnet Herr ZÁNYI das Produkt

$$\prod_{\tau_\alpha} f(x+(\tau_\alpha\pi)^n) \qquad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{\alpha+1}),$$

wo $f(x)$ ein Polynom bedeutet, dessen Koeffizienten wieder Polynome von neuen Unbestimmten mit ganzen Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ sein können. Die Zahlen τ_α durchlaufen alle Zahlklassen (mod. $\mathfrak{p}^\alpha$), $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal und π eine genau durch $\mathfrak{p}$ teilbare ganze Zahl. Der Verfasser bemerkt, daß für $n>1$ schärfere Resultate erzielt werden können. Tatsächlich läßt sich das Produkt

$$\prod_{\tau_\alpha} f(x+(\tau_\alpha\pi)^n) \qquad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{\alpha+n})$$

vollständig berechnen und man bekommt sehr einfache Resultate.

I. *Wenn $N(\mathfrak{p})>2$ und $\varphi(\mathfrak{p})\nmid n$ sind*[2]), *so gilt die Kongruenz*

$$(1) \qquad \prod_{\tau_\alpha} f(x+(\tau_\alpha\pi)^n) \equiv f(x)^{N(\mathfrak{p}^\alpha)} \qquad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{\alpha+n}).$$

In den Fällen $\varphi(\mathfrak{p})\,|\,n$, $N(\mathfrak{p})=p^f$, $f>1$, oder $\varphi(\mathfrak{p})\,|\,n$, $N(\mathfrak{p})=p>2$, $\mathfrak{p}^2\,|\,p$, besteht dieselbe Kongruenz mit der Einschränkung $\alpha>1$, also wird

$$(1^*) \qquad \prod_{\tau_\alpha} f(x+(\tau_\alpha\pi)^n) \equiv f(x)^{N(\mathfrak{p}^\alpha)} \qquad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{\alpha+n}), \qquad \alpha>1.$$

1) *Diese Acta*, **5** (1930—1932), S. 117—131 und S. 168—171.

2) N bedeutet die Norm, φ ist das Eulersche Zeichen, $a\nmid b$ bedeutet, daß a kein Teiler von b ist, p ist die natürliche Primzahl, welche durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, also wird $\mathfrak{p}\,|\,p$. Wir setzen noch $\tau_1=\tau$.

Im Falle $\varphi(\mathfrak{p})\,|\,n$, $N(\mathfrak{p})=p>2$, $\mathfrak{p}^2\nmid p$, *ist*

$$(2)\qquad \prod_{\tau_\alpha} f(x+(\tau_\alpha\pi)^n)\equiv\left(f(x)f^{p-1}(x+p^n)\right)^{p^{\alpha-1}}\qquad(\text{mod. } \mathfrak{p}^{\alpha+n}).$$

II. *Wenn* $N(\mathfrak{p})=2$, $2\,|\,n$ *ausfallen, so sind die Formeln* (1*) *bzw.* (2) *gültig, je nachdem* $\mathfrak{p}^2\,|\,2$ *oder* $\mathfrak{p}^2\nmid 2$. Der Fall $N(\mathfrak{p})=2$, $n=1$ ist a. a. O. erledigt. *Wird* $n>1$, $2\nmid n$, *so ist im Falle* $\mathfrak{p}^2\nmid 2$ *die Formel* (1*) *gültig, während im Falle* $\mathfrak{p}^2\,|\,2$

$$(1^{**})\qquad \prod_{\tau_\alpha} f(x+(\tau_\alpha\pi)^n)\equiv f(x)^{N(\mathfrak{p}^\alpha)}\qquad(\text{mod. } \mathfrak{p}^{\alpha+n}),\ \alpha>2$$

wird.

1. Aus der Formel (42) der zitierten Arbeit folgt zunächst, daß für $N(\mathfrak{p})>2$, $\alpha>1$, oder $N(\mathfrak{p})=2$, $\alpha>2$, oder endlich für $N(\mathfrak{p})=2$, $\alpha>1$, $2\,|\,n$

$$(3)\qquad \prod_{\tau_\alpha} f(x+(\tau_\alpha\pi)^n)\equiv \prod_{\tau_{\alpha-1}} f(x+(\tau_{\alpha-1}\pi)^n)^{N(\mathfrak{p})}\qquad(\text{mod. } \mathfrak{p}^{\alpha+n})$$

ausfällt. Nun betrachten wir die Kongruenz

$$(4)\qquad \begin{aligned}\prod_{\tau} f(x+(\tau\pi)^n)&\equiv \prod_{\tau}(f(x)+(\tau\pi)^n f'(x))\equiv\\ &\equiv f(x)^{N(\mathfrak{p})}+\pi^n f(x)^{N(\mathfrak{p})-1}f'(x)\sum_{\tau}\tau^n\qquad(\text{mod. } \mathfrak{p}^{1+n}).\end{aligned}$$

Da (vergl. z. B. a. a. O., S. 129) im Falle $N(\mathfrak{p})>2$, $\varphi(\mathfrak{p})\nmid n$,

$$\sum \tau^n\equiv 0\qquad(\text{mod. } \mathfrak{p})$$

wird, ist (1) richtig. Die Formel (1*) ist in den unter I. angegebenen Fällen richtig, weil für $N(\mathfrak{p})=p^f$, $f>1$, oder $N(\mathfrak{p})=p>2$, $\mathfrak{p}^2\,|\,p$, die Kongruenz

$$(5)\qquad \begin{aligned}\prod_{\tau_2} f(x+(\tau_2\pi)^n)&\equiv \Big\{f(x)^{N(\mathfrak{p})}+\pi^n f(x)^{N(\mathfrak{p})-1}f'(x)\sum_{\tau}\tau^n\Big\}^{N(\mathfrak{p})}\equiv\\ &\equiv f(x)^{N(\mathfrak{p}^2)}\qquad(\text{mod. } \mathfrak{p}^{2+n})\end{aligned}$$

gilt. Dieselbe besteht auch für $N(\mathfrak{p})=2$, $2\,|\,n$, $\mathfrak{p}^2$ 2.

2. In den Fällen $N(\mathfrak{p})=p>2$, $\varphi(\mathfrak{p})\,|\,n$, $\mathfrak{p}^2\nmid p$, oder $N(\mathfrak{p})=2$, $2\,|\,n$, $\mathfrak{p}^2\nmid 2$, wird $\varphi(\mathfrak{p})=p-1$ und jede ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{K}$ ist nach jedem Modul $\mathfrak{p}^\beta$ einer rationalen ganzen Zahl kongruent, es kann $\pi=p$ gesetzt werden, womit (2) bewiesen ist. Zu behandeln bleibt noch der Fall $N(\mathfrak{p})=2$, $n>1$, $2\nmid n$. Es ist

$$(5^*)\qquad \begin{aligned}\prod_{\tau_2} f(x+(\tau_2\pi)^n)&\equiv f(x)f(x+\pi^n)f(x+\pi^{2n})f(x+\pi^n(1+\pi)^n)\equiv\\ &\equiv f^2(x)f(x+\pi^n)f(x+\pi^n+\pi^{n+1})\qquad(\text{mod. } \mathfrak{p}^{2+n}).\end{aligned}$$

Man bekommt weiter

$$f(x+\pi^n)f(x+\pi^n+\pi^{n+1})\equiv(f(x)+\pi^n f'(x))(f(x)+(\pi^n+\pi^{n+1})f'(x))\equiv$$
$$\equiv f^2(x)+(2\pi^n+\pi^{n+1})f(x)f'(x) \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{2+n}).$$

Wenn $\mathfrak{p}^2 \nmid 2$ ausfällt, so kann $\pi=2$ gesetzt werden, also wird

$$\prod_{\tau_2} f(x+(\tau_2\pi)^n)\equiv f^4(x) \qquad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{2+n})$$

und die Formel (1*) ist gültig. Ist $\mathfrak{p}^3|2$, so wird

$$\prod_{\tau_3} f(x+(\tau_3\pi)^n)\equiv f(x)^{N(\mathfrak{p}^3)} \qquad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{3+n})$$

und man bekommt die Formel (1**)

3. Analog läßt sich ohne Mühe auch das Produkt

$$\prod_{\varkappa_\alpha} f(x+(\varkappa_\alpha\pi)^n) \qquad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{\alpha+n})$$

berechnen, wo $\varkappa_\alpha^t$ (mod. $\mathfrak{p}^\alpha$) die gegen $\mathfrak{p}$ relativ primen Zahlklassen durchläuft. Es können auch gewisse Verallgemeinerungen behandelt werden, worauf wir nicht eingehen.

(Eingegangen am 4. Juni 1932.)

Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimal- und Extremalpolynome.[1]

Von JULIUS v. SZ. NAGY in Szeged.

§ 1. Einleitung. Formulierung der Sätze.

1. Die vorliegende Arbeit schließt sich eng an eine Arbeit[2] von L. FEJÉR und eine gemeinsame Arbeit[3] von M. FEKETE und J. L. v. NEUMANN an.

Wir bezeichnen im Folgenden mit P stets *eine entweder aus endlichvielen Punkten bestehende, oder eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge in der komplexen Ebene, mit p einen beliebigen Punkt dieser Punktmenge P.*

Wir betrachten die Gesamtheit der Polynome n-ten Grades von der Form

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{1}$$

wo die Koeffizienten beliebige komplexe Zahlen sind. Wir ordnen auf eine bestimmte Weise einem Polynom $A(z)$ in jedem Punkte p von P je eine nichtnegative reelle Zahl zu, welche *die Abweichung* (von der Null) *des Polynoms $A(z)$ im Punkte p* genannt werden soll. Das Maximum der Abweichungen in den Punkten p von P wird *die Abweichung des Polynoms auf der Punktmenge P* genannt.

---

[1]) Diese Arbeit wurde am 13. Juni 1932 der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

[2]) L. FEJÉR, Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen, *Math. Annalen*, **85** (1922), S. 41–48.

[3]) M. FEKETE und J. L. v. NEUMANN, Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **31** (1922), S. 125–138.

Die Abweichung des Polynoms $A(z)$ im Punkte p bzw. auf P wird im Folgenden mit

$$D(p)\{A(z)\} \quad \text{bzw.} \quad D(P)\{A(z)\}$$

bezeichnet werden.

Die Abweichung $D(p)\{A(z)\}$ ist *monoton*, wenn für zwei beliebige Polynome $A_1(z)$ und $A_2(z)$ n-ten Grades von der Form (1) in irgendeinem Punkte p von P

$$(2) \qquad \begin{gathered} D(p)\{A_1(z)\} > D(p)\{A_2(z)\}\,,\; D(p)\{A_1(z)\} < D(p)\{A_2(z)\} \\ \text{bzw. } D(p)\{A_1(z)\} = D(p)\{A_2(z)\} \end{gathered}$$

ist, je nachdem

$$(3) \quad |A_1(p)| > |A_2(p)|,\; |A_1(p)| < |A_2(p)| \text{ bzw. } |A_1(p)| = |A_2(p)|$$

ist.

Die Abweichung $D(p)\{A(z)\}$ ist stetig, wenn $D(p)\{A_1(z)\}$ und $D(p)\{A_2(z)\}$ in irgendeinem Punkte p von P, wo der Unterschied zwischen $|A_1(p)|$ und $|A_2(p)|$ hinreichend klein ist, beliebig wenig voneinander abweichen.

Die am einfachsten definierbare Abweichung ist die sogenannte Tschebyscheffsche Abweichung, die sich durch die Gleichungen

$$(4) \qquad D(p)\{A(z)\} = |A(p)|,\; D(P)\{A(z)\} = \operatorname{Max}|A(p)|$$

definieren läßt. Diese Abweichung ist stetig, monoton, nichtnegativ und verschwindet in den Nullstellen und nur in den Nullstellen von $A(z)$. Eine Abweichung mit diesen vier Eigenschaften soll als eine *normale Abweichung* bezeichnet werden.

Man kann verschiedene Abweichungen $D(P)\{A(z)\}$ definieren, ohne die Abweichung $D(p)\{A(z)\}$ definieren zu müssen.[4]) Die Monotonität der nur auf der ganzen Menge P definierten Abweichung läßt sich auf Grund des Begriffes Unterpolynom und Oberpolynom definieren.

---

[4]) Vgl. die Arbeit von Fejér (a. a. O. [2])) und die folgenden zwei Arbeiten:

G. Szegő, Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören, *Math. Zeitschrift*, 9 (1921), S. 218–270;

Ch. Jordan, Sur une série de polynomes dont chaque somme partielle représente la meilleure approximation d'un degré donné suivant la méthode des moindres carrés, *Proceedings of the London Math. Soc.*, (2) 20 (1922), S. 297–325.

Nach FEKETE und V. NEUMANN ist ein Polynom $A_2(z)$ (von der Form (1)) ein *Unterpolynom* von $A_1(z)$ (von der Form (1)) auf P, wenn in jedem Punkte p von P, wo $A_1(p) \neq 0$ bzw. $A_1(p) = 0$ ist, $|A_2(p)| < |A_1(p)|$ bzw. $A_2(p) = 0$ ist. Das Polynom $A_1(z)$ ist in diesem Falle ein *Oberpolynom* von $A_2(z)$ auf P.

Eine Abweichung $D(P)\{A(z)\}$ ist auf P *monoton*, wenn für je zwei Polynome $A_1(z)$ und $A_2(z)$, von denen $A_2(z)$ ein Unterpolynom von $A_1(z)$ ist, $D(P)\{A_1(z)\} > D(P)\{A_2(z)\}$ ist.

Eine monotone Abweichung $D(p)\{A(z)\}$ bestimmt offenbar auf der Punktmenge P eine monotone Abweichung $D(P)\{A(z)\}$.

2. Diejenigen Polynome von der Form (1), für welche bei einer bestimmten Definition der Abweichung auf der Punktmenge P diese Abweichung möglichst klein ausfällt, werden *Minimalpolynome* genannt. Diejenigen Polynome von der Form (1), die auf P kein Unterpolynom besitzen, werden *Extremalpolynome* genannt.

Es ist klar, daß ein Minimalpolynom auch ein Extremalpolynom ist.

Für jedes Extremalpolynom gilt der Hauptsatz von L. FEJÉR:

Die Nullstellen jedes zu der Menge P gehörigen Extremalpolynoms liegen alle in der konvexen Hülle von P, (insofern der Grad des Polynoms die Anzahl der Punkte von P nicht übersteigt).

Der Hauptsatz von M. FEKETE und J. L. V. NEUMANN lautet, wie folgt:

Ist die Punktmenge P symmetrisch zur reellen Achse und konstruiert man die Kreise, welche die Verbindungsstrecke je zweier zur reellen Achse symmetrisch liegender Punkte von P als Durchmesser besitzen, so liegt jede nichtreelle Nullstelle der zu P gehörigen Extremalpolynome mit reellen Koeffizienten im Innern oder am Rande dieser Kreise (wenn der Grad der Polynome die Anzahl der Punkte von P nicht übersteigt).

3. Im Anschluß an diese Sätze werden wir drei Sätze beweisen:

Ist $A^*(z)$ ein Minimalpolynom normaler Abweichung auf P, dessen Grad kleiner ist, als die Anzahl der Punkte von P, und ist P^* die Menge derjenigen Punkte von P, in denen die gegebene Abweichung von $A^*(z)$ maximal ist, so gelten die folgenden drei Sätze:

I. *Die Nullstellen von $A^*(z)$ liegen alle in der konvexen Hülle von P^*.*

II. *Liegen die Punkte von P alle auf der reellen Achse und ist $A^*(z)$ vom n-ten Grade, so enthält die Menge P^* solche $n+1$ Punkte, die voneinander durch die n reellen Nullstellen des Polynoms $A^*(z)$ getrennt werden.*

III. *Ist die Menge P symmetrisch zur reellen Achse und hat $A^*(z)$ lauter reelle Koeffizienten, so liegt jede nichtreelle Nullstelle von $A^*(z)$ im Innern oder am Rande wenigstens eines der Kreise, welche die Verbindungsstrecke je zweier, in bezug auf die reelle Achse symmetrischer Punkte von P^* als Durchmesser haben.*

Die Sätze I und III gelten auch im Falle, wenn der Grad von $A(z)$ und die Anzahl der Punkte von P übereinstimmen.

Ist $D(p)\{A(z)\} = |A(p)|$ und besteht P aus den Punkten des abgeschlossenen Intervalles $(-1, +1)$, so drückt der Satz II die charakteristische Eigenschaft des bekannten Tschebyscheffschen Polynoms aus.[5])

4. M. Fekete und J. L. v. Neumann haben bewiesen, daß die Ableitung eines Polynoms $f(z)$ von der Form

$$(5) \qquad f(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c_1 z^n + c_2 z^{n-1} + \ldots + c_{n+1}$$

mit lauter verschiedenen Nullstellen $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ auf der Menge P dieser Nullstellen ein Minimalpolynom n-ten Grades ist. Die zugehörige normale Abweichung ist

$$(6) \qquad D(p_i)\{A(z)\} = \left|\frac{A(p_i)}{f'(p_i)}\right|$$

bzw.

$$(6') \qquad D(P)\{A(z)\} = \operatorname{Max}\left|\frac{A(p_i)}{f'(p_i)}\right| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Der Fejérsche bzw. der Fekete—Neumannsche Satz enthält also den bekannten Gaußschen bzw. Jensenschen Satz für die Ableitung eines Polynoms.

Auch die folgende spezielle Folgerung eines Satzes von uns[6]) läßt sich für die Extremalpolynome verallgemeinern:

---

[5]) Vgl. E. v. Egerváry, Über die charakterisierenden geometrischen Eigenschaften der Legendreschen und Tschebyscheffschen Polynome, *Archiv der Math. und Phys.*, **27** (1918), S. 17—24.

[6]) Julius v. Sz. Nagy, Zur Theorie der algebraischen Gleichungen, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, **31** (1921), S. 138—151; vgl. insb. S. 150—151.

Sind α_1 und α_2 zwei verschiedene Nullstellen der Ableitung $f'(z)$ eines Polynoms $f(z)$, und ist H eine beliebige gleichseitige Hyperbel, die durch die Punkte α_1 und α_2 hindurchgeht und in dem Halbierungspunkte der Strecke $\alpha_1\alpha_2$ den Mittelpunkt hat, so besitzt das Polynom $f(z)$ entweder an beiden Seiten der Hyperbel H mindestens eine Nullstelle, oder aber es liegen alle Nullstellen von $f(z)$ auf der Hyperbel.

(Die Punkte der Ebene, aus denen zwei verschiedene Tangenten bzw. keine Tangenten an die Hyperbel gehen, liegen in der äußeren bzw. inneren Seite der Hyperbel.)

Für Extremalpolynome beweisen wir den folgenden Satz:

IV. *Sind α_1 und α_2 zwei Nullstellen eines Extremalpolynoms auf P, so kann die ganze Punktmenge P nicht auf einer Seite der gleichseitigen Hyperbel liegen, deren Hauptachse die Verbindungsstrecke $\alpha_1\alpha_2$ ist.*

§ 2. **Beweis der Sätze I—III über Minimalpolynome normaler Abweichung.**

1. Zum Beweise der Sätze I—III können wir annehmen, daß die Anzahl der Punkte P größer ist, als der Grad des Polynoms $A^*(z)$. Wären nämlich diese zwei Zahlen gleich, so müßten die Nullstellen von $A^*(z)$ mit den Punkten von P offenbar zusammenfallen.

Ist die Anzahl der Punkte von P größer als der Grad n von $A^*(z)$, so gehört keine Nullstelle von $A^*(z)$ der Menge P an. Jede normale Abweichung eines Polynoms n-ten Grades verschwindet nämlich nur in den n Nullstellen des Polynoms. Das Maximum der normalen Abweichung von $A^*(z)$ ist also positiv, weil sie in $n+1$ Punkten nicht verschwinden kann.

2. Zum Beweise des Satzes I nehmen wir an, daß der Satz unrichtig ist: es gibt also eine Punktmenge P, eine normale Abweichung $D(p)\{A(z)\}$ und ein zugehöriges Minimalpolynom $A^*(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)$, dessen Nullstelle α_1 außerhalb der konvexen Hülle von P^* liegt.

Wir werden dann beweisen, daß die Abweichung $D(p)\{A(z)\}$ in der Punktmenge P durch das Polynom $A^*(z)$ nicht minimalisiert sein kann, weil es dann ein Polynom n-ten Grades von der Form

$$(7)\quad B(z)=\frac{A^*(z)}{z-\alpha_1}(z-\beta_1)=(z-\beta_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)$$

gäbe, für das die Ungleichung

$$(8)\quad D(P)\{B(z)\}<D(P)\{A^*(z)\}=\operatorname{Max} D(p)\{A^*(z)\}$$

bestände. Das Polynom $A^*(z)$ wäre also kein Minimalpolynom normaler Abweichung.

Liegt nämlich α_1 außerhalb der konvexen Hülle von P^*, so gibt es eine Gerade g, die den Punkt α_1 und die konvexe Hülle von P^* voneinander trennt. Wir bezeichnen mit γ den Fußpunkt der aus α_1 auf g gefällten Senkrechten, mit β_1 einen inneren Punkt der Strecke (α_1, γ), ferner mit P_1 (bzw. P_2) die abgeschlossene Menge, gebildet aus denjenigen Punkten von P, welche auf der Geraden g und an derselben (bzw. an der entgegengesetzten) Seite der Geraden g liegen, wie die Menge P^*.

Es ist klar, daß für jeden Punkt p_1 von P_1 $|p_1-\beta_1|<|p_1-\alpha_1|$ ist und daher, daß in jedem Punkte p_1, wo $A^*(z)$ nicht verschwindet,

$$|B(p_1)|=\left|\frac{A^*(p_1)}{p_1-\alpha_1}(p_1-\beta_1)\right|<|A^*(p_1)|$$

ist.

Wegen der Monotonität der normalen Abweichungen folgt daraus die Ungleichung

$$(9)\quad D(P_1)\{B(z)\}<D(P_1)\{A^*(z)\}=D(P)\{A^*(z)\}.$$

Die Punktmenge P_2 enthält keinen Punkt von P^*; es gilt also die Ungleichung

$$(10)\quad D(P_2)\{A^*(z)\}<D(P)\{A^*(z)\}=D(P_1)\{A^*(z)\}.$$

Wegen der Stetigkeit der normalen Abweichungen kann man den Punkt β_1 innerhalb der Strecke (α_1, γ) dem Punkte α_1 so nahe wählen, daß auch die Ungleichung

$$(11)\quad D(P_2)\{B(z)\}<D(P)\{A^*(z)\}$$

statthat. Aus den Ungleichungen (9) und (11) folgt die Ungleichung (8). Damit ist der Satz I bewiesen.

3. Ist $A^*(z)$ ein dem Satze II entsprechendes Minimalpolynom n-ten Grades, so liegen nach dem Satze I seine Nullstellen auf der Strecke, die von den äußersten Punkten der Menge P^* begrenzt wird. Für den Beweis des Satzes II müssen wir nur zeigen, daß auf der reellen Achse zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $A^*(z)$ wenigstens ein Punkt von P^* liegt.

Nehmen wir an, daß es zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen α_k und α_{k+1} ($\alpha_k \leqq \alpha_{k+1}$) von $A^*(z)$ keinen Punkt von P^* gibt. Die Punkte α_k und α_{k+1} können der Punktmenge P^* nicht angehören, weil die Anzahl der Punkte von P mindestens $n+1$, und deshalb $D(P)\{A^*(z)\}>0$ ist. Man kann daher die Strecke (α_k, α_{k+1}) in beiden Richtungen um eine genügend kleine Strecke von der Länge $\varepsilon\,(>0)$ so verlängern, daß auch die Strecke $(\alpha_k-\varepsilon, \alpha_{k+1}+\varepsilon)$ keinen Punkt P^* enthält.

Bezeichnet P_2 (bzw. P_1) die abgeschlossene Menge derjenigen Punkte p_2 (bzw. p_1) von P, die im abgeschlossenen inneren endlichen (bzw. äußeren unendlichen) Intervalle $(\alpha_k-\varepsilon, \alpha_{k+1}+\varepsilon)$ liegen, so besteht die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &\leqq |(p_1-\alpha_k+\varepsilon)(p_1-\alpha_{k+1}-\varepsilon)| = \\ &= |(p_1-\alpha_k)(p_1-\alpha_{k+1})-\varepsilon(\alpha_{k+1}-\alpha_k+\varepsilon)| < \\ &< |(p_1-\alpha_k)(p_1-\alpha_{k+1})|. \end{aligned}$$

Ist also

$$B(z)=\frac{A^*(z)}{(z-\alpha_k)(z-\alpha_{k+1})}(z-\alpha_k+\varepsilon)(z-\alpha_{k+1}-\varepsilon),$$

so besteht die Ungleichung $|B(p_1)|<|A^*(p_1)|$ für jeden Punkt p_1 von P_1, wo $A^*(z)$ nicht verschwindet. Daraus folgt die Ungleichung

$$(12)\qquad D(P_1)\{B(z)\}<D(P_1)\{A^*(z)\}=D(P)\{A^*(z)\}\neq 0.$$

Das (innere) Intervall $(\alpha_k-\varepsilon, \alpha_{k+1}+\varepsilon)$ enthält keinen Punkt von P^*, daraus folgt die Ungleichung

$$D(P_2)\{A^*(z)\}<D(P)\{A^*(z)\}.$$

Wegen der Stetigkeit der normalen Abweichungen läßt sich die Zahl ε so klein wählen, daß auch die Ungleichung

$$(13)\qquad D(P_2)\{B(z)\}<D(P)\{A^*(z)\}$$

statthat. Das Polynom $A^*(z)$ ist daher nach den Ungleichungen (12) und (13) kein Minimalpolynom.

Aus diesem Widerspruch folgt, daß das Intervall $(\alpha_k-\varepsilon, \alpha_{k+1}+\varepsilon)$ mindestens eine Nullstelle von $A^*(z)$ enthält und $\alpha_k\neq\alpha_{k+1}$ ist, weil die Punkte von P^* keine Nullstellen von $A^*(z)$ sind. Damit ist der Satz II bewiesen. Aus diesem Satze folgt der Satz:

Die Abweichung eines Minimalpolynoms n-ten Grades, das eine normale Abweichung auf einer in der reellen Achse liegen-

den Punktmenge P minimalisiert, nimmt ihren Maximalwert mindestens in $n+1$ Punkten von P an, (insofern nur die Anzahl der Punkte von P größer als n ist).

4. Wäre nun der Satz III unrichtig, so gäbe es ein Minimalpolynom mit reellen Koeffizienten, das eine normale Abweichung auf einer zur reellen Achse symmetrisch liegenden Punktmenge P minimalisiert und dessen konjugiert komplexe Nullstellen α und $\bar{\alpha}$ außerhalb der sämtlichen im Satze III konstruierten Kreise K^* liegen.

Ist γ ein dem Punkte α näher liegender Punkt der Strecke $(\alpha, \bar{\alpha})$, welcher noch außerhalb aller Kreise K^* liegt, so konstruieren wir durch den Punkt γ alle Kreise K_γ, die mit den Kreisen K^* konzentrisch sind. Wir bezeichnen mit P_1 die Teilmenge derjenigen Punkte von P, die am Rande oder im Innern wenigstens eines der Kreise K_γ liegen, mit P_2 die Teilmenge der übrigen und der auf den Kreisen K_γ liegenden Punkte von P, endlich mit β bzw. $\bar{\beta}$ einen inneren Punkt der Strecke (α, γ) bzw. seinen Spiegelpunkt in bezug auf die reelle Achse.

Nach einem geometrischen Hilfssatze von FEKETE und v. NEUMANN[7]) gilt die Ungleichung

$$|(p_1-\beta)(p_1-\bar{\beta})| < |(p_1-\alpha)(p_1-\bar{\alpha})|$$

für jeden Punkt p_1 der Menge P_1. Für jeden Punkt p_1 von P_1, wo $A^*(z)$ nicht verschwindet, besteht also die Ungleichung

$$|B(p_1)| = \left| \frac{A^*(p_1)}{(p_1-\alpha)(p_1-\bar{\alpha})} (p_1-\beta)(p_1-\bar{\beta}) \right| < |A^*(p_1)|.$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$D(P_1)\{B(z)\} < D(P_1)\{A^*(z)\} = D(P)\{A^*(z)\}. \tag{14}$$

Auf der Menge P_2 ist

$$D(P_2)\{A^*(z)\} < D(P)\{A^*(z)\};$$

man kann also den Punkt β auf der Strecke (α, γ) dem Punkte α so nahe wählen, daß auch die Ungleichung

$$D(P_2)\{B(z)\} < D(P)\{A^*(z)\} \tag{15}$$

statthat. Aus den Ungleichungen (14) und (15) folgt daher, daß die gegebene normale Abweichung von $A^*(z)$ auf der Menge P nicht minimalisiert wird. Aus diesem Widerspruche folgt die Richtigkeit des Satzes III.

---

[7]) FEKETE—NEUMANN, a. a. O. [3]), S. 130—131.

§ 3. Beweis des Satzes IV über die Extremalpolynome.

Zum Beweise können wir annehmen, daß ein zur Menge P gehöriges Extremalpolynom $A^*(z)$ in den Punkten $-a$ und $+a$ der reellen Achse verschwindet.

1. Wir nehmen zuerst an, daß jeder Punkt $p=u+iv$ von P der inneren Seite der Hyperbel

(16) $$x^2-y^2-a^2=0$$

angehört, d. h. $u^2-v^2-a^2>0$ ist.

Führt man durch jeden Punkt p je eine gleichseitige Hyperbel hindurch, deren Hauptachse in die reelle Achse und deren Mittelpunkt in den Punkt 0 fällt, so besitzen die Längen der Hauptachsen dieser Hyperbeln ein Minimum $2b\,(>2a)$.

Ist also $2c^2=a^2+b^2$, so gehören die Punkte $p=u+iv$ der Punktmenge P alle der inneren Seite der Hyperbel

$$x^2-y^2-c^2=0$$

an, weil $c^2<b^2$ ist. Für jeden Punkt $p=u+iv$ von P gilt also die Ungleichung

$$u^2-v^2-c^2>0.$$

Da

$$|(p-a)(p+a)|^2=|p^2-a^2|^2=(u^2-v^2-a^2)^2+4u^2v^2$$

und

$$|p^2-b^2|^2=(u^2-v^2-b^2)^2+4u^2v^2$$

ist, so gilt für jeden Punkt $p=u+iv$ von P die Gleichung

(17) $$|p^2-b^2|^2-|p^2-a^2|^2=2(a^2-b^2)(u^2-v^2-c^2).$$

Wegen der Ungleichungen

$$u^2-v^2-c^2>0 \text{ und } a^2-b^2<0$$

besteht also für jeden Punkt p die Ungleichung

$$|p^2-b^2|<|p^2-a^2|.$$

Aus dieser Ungleichung folgt, daß das Polynom

(18) $$B(z)=\frac{A^*(z)}{z^2-a^2}(z^2-b^2)$$

auf P ein Unterpolynom von $A^*(z)$ ist. Dies ist aber unmöglich, da $A^*(z)$ auf P ein Extremalpolynom ist.

Aus diesem Widerspruche folgt, daß nicht jeder Punkt von P der inneren Seite der Hyperbel (16) angehören kann.

2. Auf ähnliche Weise beweist man, daß nicht alle Punkte p von P der äußeren Seite der Hyperbel (16) angehören können.

Wäre nämlich jeder Punkt $p = u + iv$ in der äusseren Seite der Hyperbel (16) gelegen, so wäre $u^2 - v^2 - a^2 < 0$.

Wir führen durch jeden Punkt p, der zwischen der Hyperbel (16) und ihren Asymptoten liegt, je eine Hyperbel hindurch, deren Hauptachse in die reelle Achse und deren Mittelpunkt in den Punkt 0 fällt. Die Längen der Hauptachsen dieser Hyperbeln besitzen ein Maximum $2b\,(< 2a)$. (Liegen keine Punkte von P zwischen der Hyperbel (16) und ihren Asymptoten, so ist $2b = 0$.)

Wegen der Ungleichung $2c^2 = a^2 + b^2 < 2b^2$ besteht für jeden Punkt $p = u + iv$ von P die Ungleichung $u^2 - v^2 - c^2 < 0$. Aus der Gleichung (17) folgt daher auch in diesem Falle die Ungleichung

$$|p^2 - b^2| < |p^2 - a^2|,$$

weil $a^2 - b^2 > 0$ ist. Für den so bestimmten Wert von b ist das Polynom (18) auch in diesem Falle ein Unterpolynom von $A^*(z)$ auf P. Aus diesem zweiten Widerspruche folgt die Richtigkeit des Satzes IV.

(Eingegangen am 15. Juni 1932.)

Ein Beweis des Ruffini—Abelschen Satzes.

Von LÁSZLÓ KALMÁR in Szeged.

Die Herleitung des Satzes von RUFFINI und ABEL — laut dessen die allgemeine algebraische Gleichung n-ten Graden für $n \geqq 5$ nicht durch Radikale lösbar ist — aus dem Galoisschen Kriterium für die algebraische Lösbarkeit erfolgt gewöhnlich unter Berufung auf die Tatsache, daß die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ von n Elementen für $n \geqq 5$ einfach ist. Statt dessen würde auch die weniger scharfe Tatsache genügen, daß $\mathfrak{A}_n$ für $n \geqq 5$ keinen Normalteiler vom Primzahlindex besitzt. Für diese letztere Tatsache werden wir einen einfachen Beweis geben, wodurch ein für Vorlesungszwecke[1]) besonders geeigneter Beweis des Ruffini—Abelschen Satzes entsteht.

Es genügt folgenden Satz zu beweisen:

Es sei $\mathfrak{G}$ ein echter Normalteiler der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_n$ von n Elementen; ferner sei p eine ungerade Primzahl $\leqq n$. Dann gibt es eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{A}_n$, die $\mathfrak{G}$ als Untergruppe vom Index p enthält.

In der Tat folgt hieraus, daß der Index von $\mathfrak{G}$ in bezug auf $\mathfrak{A}_n$ durch jede ungerade Primzahl $p \leqq n$ teilbar ist, also kann für $n \geqq 5$ keine Primzahl sein.

Zum Beweise sei Z ein nicht zu $\mathfrak{G}$ gehöriger p-gliedriger Zyklus[2]); $G_1, G_2, \ldots, G_g$ seien die Elemente von $\mathfrak{G}$. Wir betrachten die Permutationen

[1]) Wir meinen eine Vorlesung, in der der in Rede stehende Satz nicht independent, sondern als eine Anwendung des Galoischen Kriteriums bewiesen wird.

[2]) Gehört jeder p-gliedriger Zyklus der Gruppe $\mathfrak{G}$ an (wobei p *irgendeine ungerade* Zahl bedeutet), so gehört bekanntlich überhaupt jede gerade Permutation $\mathfrak{G}$ an, also ist $\mathfrak{G}$ kein *echter* Normalteiler von $\mathfrak{A}_n$.

(1) $$Z^i\, G_j \qquad (i=0,\ 1,\ 2, \dots, p-1,\quad j=1,\ 2,\ 3, \dots, g);$$

dieselben gehören sämtlich $\mathfrak{A}_n$ an. Ferner sind sie verschieden. In der Tat folgt aus

(2) $$Z^{i_1} G_{j_1} = Z^{i_2} G_{j_2},$$

daß $Z^{i_1-i_2} = G_{j_2} G_{j_1}^{-1}$ zu $\mathfrak{G}$ gehört; wäre hier $i_1 \neq i_2$, also $(i_1 - i_2, p) = 1$, so könnte man die ganzen Zahlen x und y so bestimmen, daß sie die diophantische Gleichung

$$(i_1 - i_2)\, x + p\, y = 1$$

erfüllen; daher ergäbe sich, daß $Z = Z^{1-py} = Z^{(i_1-i_2)x} = (Z^{i_1-i_2})^x$ gegen der Voraussetzung $\mathfrak{G}$ angehört. Daher ist $i_1 = i_2$, also, wegen (2), $G_{j_1} = G_{j_2}$, d. h. $j_1 = j_2$.

Wir zeigen nun, daß die $g p$ Permutationen (1) eine Gruppe $\mathfrak{U}$ bilden. In der Tat ist

$$\begin{aligned} Z^{i_1} G_{j_1} . Z^{i_2} G_{j_2} &= Z^{i_1+i_2} Z^{-i_2} G_{j_1} Z^{i_2} G_{j_2} = \\ &= Z^{i_1+i_2} G_{j_3} G_{j_2} = \\ &= Z^{i_3} G_{j_4}, \end{aligned}$$

wobei i_3, j_3, j_4 aus

$$\begin{aligned} & i_3 \equiv i_1 + i_2 \pmod{p}, \qquad 0 \leqq i_3 \leqq p-1, \\ & G_{j_3} = (Z^{i_2})^{-1} G_{j_1} Z^{i_2}, \\ & G_{j_4} = G_{j_3} G_{j_2} \end{aligned}$$

zu bestimmen sind, was wegen der Voraussetzung, daß $\mathfrak{G}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{A}_n$ sein soll, bzw. wegen der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{G}$ möglich ist.

Da die Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{U}$ vom Index p ist, so ist die Behauptung bewiesen.

(Eingegangen am 6. August 1932.)

Bibliographie.

Otto Weinberger, Mathematische Volkswirtschaftslehre, XIV + 241 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1930.

Das Buch soll, wie auch in einem Untertitel ausgedrückt wird, eine Einführung sein, doch ist die erste Hälfte des Buches eine historisch-kritische Darstellung der matematischen Volkswirtschaftslehre, die ohne Kenntnis der ganzen Theorie mit wenig Erfolg zu lesen ist. Der historische Bericht erstreckt sich auch auf den Lebenslauf einzelner Forscher und geht manchmal in ganz unbedeutende Einzelheiten ein (so in Nr. 23 in der Geschichte der Auffindung des verschollenen Buches von GOSSEN). Bei Besprechung der bedeutenden Werke wird oft neben der deutschen Übersetzung auch der Originaltext in Klammer beigefügt, ein wenig vorsichtiges Verfahren, denn es kann dabei vorkommen, (wie hier auf Seite 74) daß die deutsche Übersetzung genau das Gegenteil der Bedeutung des zitierten englischen Textes aussagt.

Im weiteren wollen wir das Buch ausschließlich aus dem Gesichtspunkte des Mathematikers betrachten. Wir halten den Bericht des unfruchtbaren Streites über die Berechtigung der mathematischen Methode in der Volkswirtschaftslehre für ganz nutzlos; diese Frage kann ja nur durch die Erfolge der Theorie selbst, jedoch nicht durch erkenntnistheoretische Betrachtungen entschieden werden. Zur Charakterisierung führen wir nur eine Frage an: von den Gegnern der mathematischen Methode wird eingewendet, daß Gefühlsgrößen nicht gemessen werden können, demgegenüber beruft sich der Verfasser auf Jevons Ausspruch: „wer hätte vor Pascals Zeit daran gedacht, Zweifel und Glauben zu messen?" Nach des Referenten Meinung wird heute wohl kein Mathematiker zugeben, daß man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Zweifel und Glauben mißt.

Mathematiker werden wohl auch der Meinung des Referenten zustimmen, daß die Anwendung von Formeln und Grafikons für die mathematische Behandlung eines Gegenstandes weder notwendig noch aber hinreichend ist. Die mathematische Methode sollte vielmehr gleich bei der präzisen Definition der Grundbegriffe einsetzen, hierauf verzichtet aber der Verfasser schon im Vorwort. In Nr. 14a „Erläuterung wichtiger Grundbegriffe" lernt man das Produkt zweier Funktionen zu differenzieren und das Extremum einer Funktion zu bestimmen. Die Einführung der Begriffe Nutzen und Wert (S. 134) ist bei weitem nicht mathematisch, dagegen wird der Preis im ersten Satz der Nr. 57 einwandfrei definiert, durch die nachfolgende „mathematische" Erklärung auf Grund der Abbildung und Formel wird aber die Sache eher nur verdunkelt. Wie die Definitionen, so sind auch die Beweise nicht immer geeignet einen Mathematiker zu befriedigen.

Wenn man auch das Verdienst der mühsamen Zusammenstellung so vieler Daten anerkennen muß, kann man kaum hoffen, daß dieses Buch die Gegner der mathematischen Volkswirtschaftslehre bekehren werde.

P. Veress.

Friedrich Schilling, Projektive und Nichteuklidische Geometrie, Band I: Projektive Geometrie in analytischer Behandlung nebst einem Einblick in die Grundlagen der Geometrie und **Band II:** Nichteuklidische Geometrie auf der Grundlagen der projektiven Geometrie, XI + 212 bzw. XI + 216 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1931.

Das vorliegende Buch besteht aus zwei Bänden. Der erste Band: *Projektive Geometrie,* enthält eine konsequent strenge Behandlung der wichtigeren Teile der projektiven Geometrie. Der Verfasser baut die ebene projektive Geometrie in ganz neuer und origineller Weise auf und schließt dabei alles aus, was dem Begriff *projektiv* fremd ist. Der Band besteht aus zwei Teilen: *Entwicklungen der Elementargeometrie als Fundament für den Aufbau der projektiven Geometrie; Aufbau der projektiven Geometrie.* Im ersten Teil weist der Verfasser mit Nachdruck darauf hin, daß das Parallelenaxiom bei einen streng projektiven Aufbau auszuschließen ist und führt die wichtigen Begriffe der verschiedenartigen uneigentlichen Elementen ein. Im zweiten Teile wird die Behandlungsweise nach projektiver Einführung eines Koordinatensystems durchwegs rein analytisch. Die weiteren Abschnitte behandeln der Reihe nach die Gleichung der Geraden, die Linienkoordinaten, die Koordinatentransformationen in der projektiven Ebene, die projektive Verwandschaften, die projektive Theorie der Kegelschnitte, die Abbildung der projektiven Ebene in einem begrenzten Gebiet des Raumes, ferner die biprojektive Ebene.

Der erste Band ist eigentlich eine vollständige Vorbereitung zu dem zweiten: *Nichteuklidische Geometrie.* Letzterer besteht ebenfalls aus zwei Teilen: *Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie; Höhere Gebiete der nichteuklidischen Geometrie.* Der Verfasser gelangt zur nichteuklidischen Geometrie auf jenen Weg, den schon BOLYAI und LOBATSCHEFSKIJ gewandert sind. Dieser Weg mündet aber schließlich, bei den höheren Untersuchungen, in den Kleinschen Weg ein. Zum Aufbau der projektiven Geometrie waren nur die Axiome der *Verknüpfung,* der *Anordnung* und der *Stetigkeit* nötig. Jetzt werden zu den vorigen Axiomen noch bestimmte Axiome der *Bewegung* hinzugenommen, daraus die Kongruenzsätze gewonnen und dann mit Hilfe des einen oder anderen Parallelenaxioms die verschiedenen nichteuklidischen Geometrien entwickelt.

Der Leser wird in diesem recht interessanten Werke viele neue Überlegungen und Ergebnisse finden und wird auch erlernen, daß sich die Ideen Kleins zur Aufbau der nichteuklidischen Geometrie auch ganz unabhängig von der euklidischen Geometrie entwickeln lassen. Man findet in diesem Buch auch hinsichtlich der höheren Gebiete der nichteuklidischen Geometrie einen reichhaltigen Stoff. Die Kreistheorie, der Bogenelement, die nichteuklidische Trigonometrie werden ausführlich behandelt. Ein Schlußabschnitt wird dem Verhältnis der nichteuklidischen Geometrie zur Relativitätstheorie, Geodäsie und Astronomie gewidmet.

Die Beweisführungen werden durchwegs streng aber sehr anschaulich geführt und verleihen dem Buch in pädagogischen Hinsicht einen besonderen Wert.

St. Lipka.

Horst v. Sanden, Darstellende Geometrie (Teubners math. Leitfäden, 2), VIII + 111 S., mit 114 Abbildungen im Anhang, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1931.

Der Hauptzweck des vorliegenden Büchleins ist, die Raumanschauung des Lesers beim Studium der darstellenden Geometrie auszubilden. Das Buch behandelt die gewöhnliche Darstellung mit Grund- und Aufriß, die Axonometrie und die Zentralperspektive. Als Ausgangspunkt dienen oft technische Aufgaben; dies ist nicht nur dem Ingenieur nützlich, sondern jedem Leser lehrreich. Der Verfasser wendet häufig die analytische Methode an, um den Weg möglichst zu verkürzen. Bei den Abbildungen wird das Gewicht auf das Wesentliche gelegt.

St. Lipka.

Ludwig Bieberbach, Projektive Geometrie (Teubners math. Leitfäden, 30), VI + 190 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1931.

Das Hauptziel des Verfassers dieses kleinen, aber reichhaltigen Buches war, die projektive Geometrie rein analytisch darzustellen. Diese Darstellung ist ihm recht gelungen. Nach einigen Vorbereitungen werden die allgemeinen homogenen Koordinaten eingeführt; dadurch verwischt sich der Unterschied zwischen eigentlichen und uneigentlichen Elementen der Geometrie schon vom Anfang an. Dann wird die projektive Geometrie im Sinne des Erlanger Programms behandelt; der Gegenstand der weiteren Entwicklungen ist also die Untersuchung derjenigen Eigenschaften der Figuren, welche gegenüber Kollineationen invariant bleiben. Die Theorie der Kurven und Flächen zweiter Ordnung gewinnen eine ausführliche Darstellung vom projektiven Standpunkt aus. Der Verfasser legt einen großen Gewicht daran, den Unterschied zwischen „projektiv" und „affin" bei den verschiedenen Klassifikationen jedesmal hervortreten zu lassen. Die Darstellung trägt nicht nur der ganzen projektiven Gruppe, sondern auch ihren Untergruppen, der affinen, euklidischen und metrischen Gruppe Rechnung. Das Buch ist, neben ausführlicher Darlegung der prinzipiellen

Gesichtspunkte, auch hinsichtlich des Stoffes recht reichhaltig; unter anderen bietet es vieles aus der Dreiecksgeometrie. Die Ausdruckweise ist modern und bedient sich oft der Matrizensprache. Da der Darstellung ein ganz knappes und leichtes Axiomensystem zugrunde gelegt wird, kann das Buch auch als eine erste Einführung in die Grundlagen der Geometrie dienen.

St. Lipka.

Friedrich Schilling, Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie, V + 70 S. mit einer Bildnistafel, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1931.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die *Bolyai-Lobatschefskijsche* (hyperbolische) Geometrie mit möglichst einfachen Mitteln einzuführen. Nach einer kurzen Gegenüberstellung der elliptischen und hyperbolischen Geometrie führt das Buch die Gleichung der Pseudosphäre (Drehfläche der Traktrix-Kurve) ein. Durch die bekannte konforme Abbildung dieser Fläche auf die euklidische Ebene ergeben sich die Grundsätze der hyperbolischen Geometrie sehr einfach. Nach einer übersichtlichen Ableitung der hyperbolischen Trigonometrie werden die Kreistheorie, die drei Arten der sogenannten Pseudobewegungen und der Dreiecksinhalt in dieser Abbildung behandelt. Durch Übertragung der Pseudobewegungen auf die Pseudosphäre werden die Hauptarten der Bewegungen und die Haupteigenschaften der geodetischen Linien auf der Pseudosphäre einfach und anschaulich festgestellt. — Wir hoffen, daß das vorliegende vorzügliche Buch die Kenntnisse der nichteuklidischen Geometrie in größeren Kreisen, sogar im Schulunterricht verbreiten wird.

Das Buch enthält eine Bildnistafel mit den Bildern von GAUSZ, LOBATSCHEFSKIJ, MÖBIUS, RIEMANN, BELTRAMI, POINCARÉ, KLEIN und HILBERT nebst Angabe ihrer Lebensdauer und der Örter, wo sie gewirkt haben. Da kein Bildnis von JOHANN v. BOLYAI erhalten geblieben ist, so hätte der Verfasser wenigstens die Daten den Lesern mitteilen können. Auch könnte der Verfasser statt des Bildnisses von J. v. BOLYAI das Bildnis seines Vaters WOLFGANG v. BOLYAI angeben, der in der nichteuklidischen Geometrie ebenfalls eine bedeutungsvolle Rolle gespielt hat. Die Aufzählungen der Arbeiten von LOBATSCHEFSKIJ und BOLYAI stehen nicht im richtigen Verhältnis. Während die Daten der Faksimileausgabe der Arbeiten von LOBATSCHEFSKIJ zitiert werden, wurden nicht einmal die Titel und das Erscheinungsjahr der Hauptarbeiten von WOLFGANG und JOHANN v. BOLYAI angegeben. (Der Appendix von JOHANN v. BOLYAI ist übrigens ebenfalls in Faksimileausgabe erschienen: Maros-Vásárhely, 1907.)

Sz. Nagy.

ALFRED HAAR †

Am 16. März 1933 erlitten die k. ung. Franz Joseph-Universität, unsere Acta und die mathematische Wissenschaft einen harten Schlag. ALFRED HAAR, seit 21 Jahren Professor der Mathematik an unserer Universität, wurde von uns durch eine tückische Krankheit entrissen.

ALFRED HAAR war einer der eifrigsten Begründer der Acta und hat sich an der Schriftleitung der mathematischen Sektion mit voller Seele betätigt. Er hat einen großen Anteil daran, daß unsere Sektion zu den allgemein bekannten mathematischen Publikationen gehört; und zwar nicht nur dadurch, daß er durch seine wissenschaftliche Verbindungen wertvolle Arbeiten für uns erwarb, daß er durch sein Wirken als Lehrer und Forscher erfolgreiche Untersuchungen anregte, sondern in erster Linie durch seine eigenen Arbeiten. Seit Anfang an enthält jeder Band unserer Acta eine Arbeit aus seiner Feder, wichtige Untersuchungen aus dem Problemkreis, der ihn eben beschäftigte: Variationsrechnung, singuläre Integrale, lineare Ungleichungen, partielle Differentialgleichungen, Gruppentheorie. Aber auch seine anderwärts veröffentlichten Untersuchungen, aus diesen oder sonstigen Problemkreisen, waren eine fruchtbare Saat für die Acta: wir brachten schon manche Arbeiten und gewiß werden wir noch viele bringen, die sich an seine Ideen anschließen.

Inmitten einer produktiven Arbeitsperiode ist er dahingegangen. Er beabsichtigte vor kurzem, jene Methoden, die er in den letzten Jahren in seinen Arbeiten über Gruppencharaktere und zuletzt in den Berichten der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und in den Annals of Mathematics über den Maßbegriff auf Gruppenmannigfaltigkeiten entwickelt hat, auf verschiedene Fragen der Algebra, Topologie, Analysis und Zahlentheorie anzuwenden. Der unerbittliche Tod hat diesen Plan vereitelt, zu großem Verlust unserer Wissenschaft. Somit bleibt das Einernten der Früchte seiner Ideen und Methoden eine ehrenvolle Aufgabe der Nachwelt und wir wollen hoffen, daß hiedurch ein würdiges Denkmal für ALFRED HAAR errichtet wird.

Die Redaktion.

Über eine allgemeine Ungleichung zwischen Mittelwerten.

Von Börge Jessen in Kopenhagen.

Es bezeichne $f = f(x)$ eine im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ meßbare und nichtnegative Funktion. Ist nun p eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnet man als *Mittelwert p^{ter} Ordnung* $M_p(f)$ der Funktion f, falls $p \neq 0$, die Größe

$$M_p(f) = \left[\int_0^1 f^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

falls $p = 0$, die Größe

$$M_0(f) = e^{\int_0^1 \log f\,dx}.$$

Wir wollen im Folgenden nur solche Funktionen f betrachten, für welche $M_p(f)$ für jeden Wert von p definiert ist, d. h. für welche f^p für jeden (positiven oder negativen) Wert von p summierbar ist; dann muß auch $\log f$ summierbar sein.[1]) Nun gilt der wichtige Satz:

Sind p und q reelle Zahlen, so ist dann und nur dann

(1) $$M_p(f) \leqq M_q(f)$$

[1]) Diese Funktionenklasse besitzt die wichtige Eigenschaft, daß Produkt und Quotient von Funktionen aus der Klasse immer wieder zur Klasse gehören. Wir hätten auch weniger umfassende Funktionenklassen betrachten können, etwa die Klasse aller beschränkten, meßbaren Funktionen mit positiver unterer Grenze. Wie immer, wenn von meßbaren Funktionen die Rede ist, sind äquivalente Funktionen (das sind solche, die sich nur in einer Nullmenge unterscheiden) nicht als verschieden anzusehen; so ist etwa die Aussage, daß f konstant ist, so zu verstehen, daß f mit einer Konstanten äquivalent ist. Diese Bemerkung wird im Folgenden nicht wiederholt.

für jede Funktion f der betrachteten Art, wenn $p \leqq q$ ist. Ferner gilt in der Ungleichung (1) *das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn entweder $p = q$, oder $p < q$ und f konstant ist.*[2])

Wir können diesen Satz auch so aussprechen:

Die Mittelwerte $M_p(f)$ bilden ihrer Größe nach eine geordnete Menge, und zwar ist die Ordnung dieselbe für die Mittelwerte wie für die zugehörigen Exponenten p.

Für jeden festen Wert von p gilt offenbar $M_p(f) \leqq M_p(g)$, wenn $f \leqq g$.

Außer der Ungleichung (1), die wir im Folgenden als die *Jensensche Ungleichung*[3]) bezeichnen wollen, sind mehrere Ungleichungen zwischen den Mittelwerten $M_p(f)$ bekannt. Die wichtigsten sind die Ungleichungen von Hölder und Minkowski, zu denen wir unten zurückkehren wollen. Wir wollen nämlich zeigen, wie man durch geeignete Erweiterung des Begriffs des Mittelwertes p^{ter} Ordnung zu einer Ungleichung gelangen kann, die sowohl die Jensensche als auch die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung enthält. Diese Erweiterung wird möglich, indem wir Funktionen von mehreren Variablen heranziehen.

Wir betrachten Funktionen $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, die im Einheitswürfel $0 \leqq x_1 \leqq 1$, $0 \leqq x_2 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq x_n \leqq 1$ meßbar und nichtnegativ sind. Auf diesen Fall läßt sich die obige Definition des Mittelwertes $M_p(f)$ sofort übertragen; man hat dazu nur die Integration über das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ durch die Integration über den Einheitswürfel $0 \leqq x_1 \leqq 1$, $0 \leqq x_2 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq x_n \leqq 1$ zu er-

[2]) In vollem Umfang ist dieser Satz wohl zuerst von Jensen bewiesen worden, vgl. J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta mathematica*, **30** (1906), S. 175—193; einen einfacheren Beweis findet man bei B. Jessen, Über die Verallgemeinerungen des arithmetischen Mittels, *diese Acta*, **5** (1931), S. 108–116; hier wird auch die Stetigkeit von $M_p(f)$ als Funktion von p bewiesen. — Ich benutze die Gelegenheit, den Hinweisen in der letztgenannten Arbeit noch die folgenden hinzuzufügen: K. Knopp, Neuere Sätze über Reihen mit positiven Gliedern, *Mathematische Zeitschrift*, **30** (1929), S. 387—403. — M. Nagumo, Über eine Klasse der Mittelwerte, *Japanese Journal of Mathematics*, **7** (1930), S. 71—79. — A. Kolmogoroff, Sur la notion de la moyenne, *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, (6) **12** (1930), S. 388—391. — B. de Finetti, Sul concetto di media, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, **2** (1931), S. 369—396. Man findet in diesen Arbeiten ähnliche Entwicklungen wie in meiner Arbeit.

[3]) Auch andere Ungleichungen gehen in der Literatur unter diesem Namen.

setzen. Wir wollen im Folgenden nur solche Funktionen f betrachten, für welche $M_p(f)$ für jeden Wert von p definiert ist; dazu ist es, wie oben, erforderlich, daß f^p für jeden Wert von p summierbar ist.[1]) Denselben Mittelwert $M_p(f)$ erhält man nun auch in einer anderen Weise, indem man nämlich zunächst den Mittelwert p^{ter} Ordnung in Bezug auf eine der Variablen, etwa x_1, bildet, sodann von der so entstandenen Funktion der Variablen $x_2, \ldots, x_n$ den Mittelwert p^{ter} Ordnung in Bezug auf eine von ihnen, etwa x_2, bildet und so weiter, bis schließlich alle Variablen berücksichtigt sind. Die gewählte Permutation der Variablen ist offenbar für das Ergebnis gleichgültig.

Die genannte Erweiterung des Begriffs des Mittelwertes p^{ter} Ordnung besteht nun darin, daß wir für irgend eine Permutation der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dieselben Operationen ausführen wie eben, jetzt aber mit *beliebigen*, nicht notwendig gleichen, Exponenten. Sind $p_1, p_2, \ldots, p_n$ beliebige reelle Zahlen, und ist $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ irgendeine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so bezeichnen wir den entsprechenden Mittelwert von f mit

$$M_{p_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \ldots M_{p_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}} M_{p_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f).$$

Dabei sind die angeführten Operationen (Mittelwertbildungen) von rechts nach links auszuführen, und es bedeutet allgemein M_p^x die Bildung des Mittelwertes p^{ter} Ordnung in Bezug auf die Variable x. Die Operationen sind stets ausführbar, wenn f nur den obigen Bedingungen genügt. Sind alle Exponenten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gleich, etwa $= p$, so ist, wie schon bemerkt, der Mittelwert unabhängig von der gewählten Permutation und gleich dem oben definierten Mittelwert $M_p(f)$. Für beliebige Exponenten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ liegt der Mittelwert immer zwischen den beiden Mittelwerten $M_p(f)$, die man erhält, wenn man p gleich der kleinsten bzw. größten der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ wählt.

Die allgemeine Frage, die wir in der vorliegenden Arbeit behandeln wollen, ist nun die folgende:

Welche Bedingungen müssen die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *und* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *und die Permutationen* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ *und* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *erfüllen, damit die Ungleichung*

$$(2) \qquad M_{p_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \ldots M_{p_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}} M_{p_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f) \leqq M_{q_{\mu_n}}^{x_{\mu_n}} \ldots M_{q_{\mu_2}}^{x_{\mu_2}} M_{q_{\mu_1}}^{x_{\mu_1}}(f)$$

für jede Funktion f der betrachteten Art bestehe? Ferner: *Für welche*

Funktionen f gilt, falls diese Bedingungen erfüllt sind, in der Ungleichung (2) das Gleichheitszeichen?

In dem Spezialfall $n=1$ wurde diese Frage durch den obigen Satz von JENSEN beantwortet. Ein weiterer Spezialfall wird durch den folgenden Satz geliefert, der sich auf den Fall $n=2$ bezieht:

Sind p und q reelle Zahlen, so gilt dann und nur dann

$$M_q^y\, M_p^x(f) \leqq M_p^x\, M_q^y(f) \tag{3}$$

für jede im Quadrate $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ gegebene Funktion $f=f(x, y)$ der betrachteten Art, wenn $p \leqq q$ ist. Ferner gilt in der Ungleichung (3) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn entweder $p=q$, oder $p<q$ und $f(x, y)=\varphi(x)\,\psi(y)$ ist.

Wir können diesen Satz auch so aussprechen:

Zwei Mittelwertbildungen M_p^x und M_q^y nach verschiedenen Variablen sind dann und nur dann vertauschbar, wenn die zugehörigen Exponenten p und q gleich sind. Ist dies nicht der Fall, so erhält man den größeren Mittelwert, wenn man den größeren Exponenten bevorzugt, d. h. wenn man zuerst die Mittelwertbildung nach derjenigen Variablen vornimmt, zu der der größere Exponent gehört.

Die Ungleichung (3) ist, wie es aus dem Folgenden mit aller Deutlichkeit hervorgehen wird, als eine recht naheliegende Verallgemeinerung der Minkowskischen Ungleichung anzusehen. Wir wollen sie deshalb im Folgenden kurz als die *Minkowskische Ungleichung* bezeichnen. Der Spezialfall $p=0$, $q=1$ ist, wie es sich ebenfalls später zeigen wird, eine recht unmittelbare Verallgemeinerung der Hölderschen Ungleichung.

Wir warten vorläufig mit dem Beweis der Ungleichung (3) und zeigen zunächst, wie man mit Hilfe der beiden Ungleichungen (1) und (3) unser allgemeines Problem hinsichtlich der Aufstellung aller Ungleichungen der Form (2) vollständig lösen kann. Die Lösung läßt sich in verschiedenen Weisen formulieren; am interessantesten scheint mir die folgende Formulierung zu sein:

Es gibt keine Ungleichung der Form (2), die nicht als triviale Folgerung der Jensenschen und der Minkowskischen Ungleichung anzusehen ist. Dies ist so zu verstehen: *Gilt eine Ungleichung der Form (2) für alle Funktionen $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der betrachteten Art, so ist es immer möglich von dem Mittelwert*

$$M_{p_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \cdots M_{p_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}}\, M_{p_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f)$$

zu dem Mittelwert

$$M_{q_{\mu_n}}^{x_{\mu_n}} \ldots M_{q_{\mu_2}}^{x_{\mu_2}} M_{q_{\mu_1}}^{x_{\mu_1}}(f)$$

durch sukzessive Anwendung der folgenden beiden Operationen zu gelangen: a) *Vergrößerung des Exponenten in einer der Mittelwertbildungen, ohne Änderung der Reihenfolge der Mittelwertbildungen.* b) *Vertauschung von zwei nebeneinanderstehenden Mittelwertbildungen, wenn dadurch ein größerer Exponent bevorzugt wird, oder wenn die betreffenden Exponenten einander gleich sind.*

Es ist klar, daß durch Änderungen dieser Art der Mittelwert niemals verkleinert wird. Daß wirklich jede Ungleichung (2) in dieser Weise zu erhalten ist, wird sich aus dem Beweis des folgenden Satzes ergeben; dieser Satz stellt die Bedingungen für das Bestehen der Ungleichung (2) in einer anderen Form dar, die einer Nachprüfung unmittelbarer zugänglich ist.

Notwendig und hinreichend für das Bestehen der Ungleichung

$$M_{p_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \ldots M_{p_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}} M_{p_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f) \leqq M_{q_{\mu_n}}^{x_{\mu_n}} \ldots M_{q_{\mu_2}}^{x_{\mu_2}} M_{q_{\mu_1}}^{x_{\mu_1}}(f) \tag{2}$$

für jede Funktion $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der betrachteten Art ist das Bestehen der folgenden Ungleichungen zwischen den Exponenten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ und $q_1, q_2, \ldots, q_n$: α) *Für jeden Wert von i soll $p_i \leqq q_i$ sein.* β) *Für jedes Paar von Zahlen i, j, welches in der Permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ in der Ordnung $\ldots i \ldots j \ldots$ und in der Permutation $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ in der Ordnung $\ldots j \ldots i \ldots$ auftritt, soll $p_i \leqq q_j$ sein.*

Wir beweisen zunächst, daß die aufgestellten Bedingungen α) und β) für das Bestehen der Ungleichung (2) notwendig sind. Hierzu bezeichnen wir mit $g = g(x)$ eine beliebige für $0 \leqq x \leqq 1$ definierte Funktion, die unsere gewöhnlichen Bedingungen erfüllt, und wählen zunächst

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_i).$$

Dann besagt die Ungleichung (2), daß

$$M_{p_i}(g) \leqq M_{q_i}(g),$$

und da dabei g beliebig war, muß nach der Jensenschen Ungleichung $p_i \leqq q_i$ sein. Hiermit ist also die Notwendigkeit der Bedingung α) bewiesen.

Der Beweis für die Notwendigkeit der Bedingung β) ist ebenso leicht, aber trotzdem ein Hauptpunkt der vorliegenden

Arbeit. Wir gehen ähnlich vor, aber wählen diesmal

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} g(x_i + x_j) & \text{für} \quad x_i + x_j \leq 1, \\ g(x_i + x_j - 1) & \text{für} \quad x_i + x_j > 1. \end{cases}$$

Dann ist nach unserer Voraussetzung über das Zahlenpaar i, j, wie leicht nachzurechnen,

$$M_{p_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \ldots M_{p_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}} M_{p_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f) = M_{p_i}(g)$$

und entsprechenderweise

$$M_{q_{\mu_n}}^{x_{\mu_n}} \ldots M_{q_{\mu_2}}^{x_{\mu_2}} M_{q_{\mu_1}}^{x_{\mu_1}}(f) = M_{q_j}(g).$$

Denn bei der ersten Mittelwertbildung trifft man von den beiden Operationen $M_{p_i}^{x_i}$ und $M_{p_j}^{x_j}$ zuerst die Operation $M_{p_i}^{x_i}$, während man bei der zweiten Mittelwertbildung von den beiden Operationen $M_{q_i}^{x_i}$ und $M_{q_j}^{x_j}$ zuerst der Operation $M_{q_j}^{x_j}$ begegnet. Die Ungleichung (2) besagt also, daß

$$M_{p_i}(g) \leq M_{q_j}(g),$$

und da dabei g beliebig war, muß $p_i \leq q_j$ sein.

Der Beweis dafür, daß die Bedingungen α) und β) für das Bestehen der Ungleichung (2) hinreichend sind, wird gleichzeitig den Beweis unseres Hauptsatzes in der zuerst gegebenen Formulierung enthalten. Wir werden nämlich unter der Voraussetzung, daß die Bedingungen α) und β) erfüllt sind, den Beweis der Ungleichung (2) dadurch erbringen, daß wir eine Vorschrift für die Umformung des Mittelwertes

$$M_{p_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \ldots M_{p_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}} M_{p_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f) \tag{4}$$

in den Mittelwert

$$M_{q_{\mu_n}}^{x_{\mu_n}} \ldots M_{q_{\mu_2}}^{x_{\mu_2}} M_{q_{\mu_1}}^{x_{\mu_1}}(f) \tag{5}$$

durch sukzessive Anwendung der beiden obigen Operationen a) und b) angeben. Diese Operationen haben ja, wie oben bemerkt wurde, die Eigenschaft, daß sie den Mittelwert niemals verkleinern. Sind die beiden Permutationen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ und $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ gleich, so daß nur die Bedingung α) in Frage kommt, dann ist die Umformung unmittelbar vorzunehmen; man hat nur die Operation a) anzuwenden, indem man sukzessiv die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ durch die Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ersetzt. Wir können uns also im Folgenden auf den interessanteren Fall beschränken, wo die beiden Permutationen verschieden sind.

Die Bedingungen α) und β) drücken aus, daß jedes $p_i \leqq$ einiger der Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sein soll, nämlich erstens $\leqq q_i$ und zweitens $\leqq q_j$ für jedes j, welches in der Permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ *nach* i, dagegen in der Permutation $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *vor* i auftritt. Es sei mit r_i die kleinste derjenigen der Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_n$ bezeichnet, von denen wir somit wissen, daß sie $\geqq p_i$ sind. Dann ist offenbar für jeden Wert von i

$$p_i \leqq r_i \leqq q_i.$$

Ferner gilt für jedes Paar von Zahlen i, j, welches in der Permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ in der Ordnung $\ldots i \ldots j \ldots$ und in der Permutation $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ in der Ordnung $\ldots j \ldots i \ldots$ auftritt, die Ungleichung

$$r_i \leqq r_j; \tag{6}$$

denn entweder ist $r_j = q_j$, dann ist die Ungleichung klar nach der Definition von r_i, oder es ist $r_j = q_k$, wobei k eine Zahl bedeutet, die in der Permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ *nach* j, dagegen in der Permutation $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *vor* j auftritt. Daraus folgt aber, wenn wir das Zahlenpaar i, k betrachten, daß dieses Paar in der Permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ in der Ordnung $\ldots i \ldots k \ldots$, dagegen in der Permutation $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ in der Ordnung $\ldots k \ldots i \ldots$ auftritt, so daß die Ungleichung auch in diesem Fall richtig ist.

Unsere erste Änderung des Mittelwertes (4) ist eine Anwendung der Operation a) und besteht darin, daß wir sukzessiv die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ durch die Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ersetzen; hierdurch gelangen wir zu dem Mittelwert

$$M_{r_{\nu_n}}^{x_{\nu_n}} \ldots M_{r_{\nu_2}}^{x_{\nu_2}} M_{r_{\nu_1}}^{x_{\nu_1}}(f). \tag{7}$$

Von diesem Mittelwert gelangen wir nunmehr durch Anwendung der Operation b), also durch sukzessive Vertauschung von Operationen nach einem sofort anzugebenden Gesetz, zu dem Mittelwert

$$M_{r_{\mu_n}}^{x_{\mu_n}} \ldots M_{r_{\mu_2}}^{x_{\mu_2}} M_{r_{\mu_1}}^{x_{\mu_1}}(f). \tag{8}$$

Dabei gehen wir folgendermaßen vor. Nach Voraussetzung gibt es eine gewisse Anzahl von Zahlenpaaren i, j, die in der Permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ in der Ordnung $\ldots i \ldots j \ldots$, dagegen in der Permutation $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ in der Ordnung $\ldots j \ldots i \ldots$ auftreten. Es sei m die Anzahl solcher Zahlenpaare i, j. Dann ist es bekanntlich möglich, durch m sukzessive Vertauschungen von *nebeneinanderstehenden* Zahlen von der Permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ zu der Permutation $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ zu gelangen, und dabei ist m die kleinstmögliche Anzahl von solchen Vertauschungen. Bei jeder Vertauschung wird gerade eines von den m Zahlenpaaren i, j berücksichtigt. Durch diese Reihe von m Vertauschungen ist nun auch eine Vorschrift für die Umformung des Mittelwertes (7) in den Mittelwert (8) gegeben; und dabei sind die auszuführenden Vertauschungen wegen der Relation (6) immer Operationen der Form b).

In dem letzten Mittelwert (8) ersetzen wir nun sukzessiv die Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ durch die Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_n$, wodurch wir zu dem Mittelwert (5) gelangen. Das sind wieder Operationen von der Form a). Im Ganzen sind wir also auf diese Weise durch sukzessive Anwendung der beiden Operationen a) und b) von dem Mittelwert (4) zu dem Mittelwert (5) gelangt.

Hiermit ist unser allgemeiner Satz bewiesen. Gleichzeitig haben wir eine prinzipielle Beantwortung der Frage gewonnen, *für welche Funktionen f das Gleichheitszeichen in der Ungleichung* (2) *gilt.* Denn der obige Beweis gibt ja gerade eine Vorschrift für die Zurückführung einer beliebigen Ungleichung dieser Form auf die Jensensche und die Minkowskische Ungleichung, für welche die Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens bekannt sind.

*

Das Einzige, was noch übrig ist, ist das genauere Studium der Ungleichung (3). Bei dieser Untersuchung ist es bequem, den Buchstaben f für Funktionen *einer* Variablen zu reservieren. Wir formulieren deshalb den Satz, den wir zu diskutieren haben, wie folgt:

Es sei $p < q$ und $g = g(x, y)$ eine Funktion, die unseren gewöhnlichen Bedingungen genügt. Dann gilt die Ungleichung

$$M_q^y M_p^x(g) \leqq M_p^x M_q^y(g), \tag{3}$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $g(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$.[4]

Wie oben gesagt, ist die Ungleichung (3) als eine recht naheliegende Verallgemeinerung der Minkowskischen Ungleichung anzusehen; wir haben sie deshalb kurz als die Minkowskische

[4]) Diese Formulierung ist nur scheinbar spezieller als die obige.

Ungleichung bezeichnet. Diesen Sachverhalt wollen wir nun näher erörtern.

Wählt man in der Ungleichung (3) speziell $p=1$ und $g(x, y)=f_1(y)$ für $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, $g(x, y)=f_2(y)$ für $\frac{1}{2}<x \leqq 1$, so ergibt sich für $q>1$ die Ungleichung

$$(9) \qquad M_q\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right) \leqq \frac{M_q(f_1)+M_q(f_2)}{2},$$

oder kürzer, wegen der Homogeneität der betrachteten Mittelwerte,

$$(10) \qquad M_q(f_1+f_2) \leqq M_q(f_1)+M_q(f_2).$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn f_1/f_2 konstant ist. In entsprechender Weise ergibt sich aus (3) für $q=1$, daß für $p<1$ die Ungleichung

$$(11) \qquad \frac{M_p(f_1)+M_p(f_2)}{2} \leqq M_p\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)$$

oder

$$(12) \qquad M_p(f_1)+M_p(f_2) \leqq M_p(f_1+f_2)$$

besteht. Das Gleichheitszeichen gilt wieder dann und nur dann, wenn f_1/f_2 konstant ist. Die beiden Ungleichungen (10) und (12) bilden zusammen die übliche Formulierung der Minkowskischen Ungleichung.

Aus den Ungleichungen (10) und (12) kann man nun andererseits die allgemeinere Ungleichung (3) herleiten. Hierzu mag der Hinweis genügen, daß die Ungleichung (3) in dem Falle $p=1$, also die Ungleichung

$$(13) \qquad M_q^y\left(\int_0^1 g(x, y)\, dx\right) \leqq \int_0^1 M_q^y(g(x, y))\, dx,$$

in genau demselben Verhältnis zu der Ungleichung (9) steht, wie die allgemeine Jensensche Ungleichung für konvexe Funktionen zu der Definition dieser Funktionen. In genau demselben Verhältnis zu der Ungleichung (11) steht die Ungleichung (3) für $q=1$, d. h. die Ungleichung

$$(14) \qquad \int_0^1 M_p^x(g(x, y))\, dy \leqq M_p^x\left(\int_0^1 g(x, y)\, dy\right).$$

Die Ungleichungen (13) und (14) sind also in Wirklichkeit nicht wesentlich allgemeiner als die Ungleichungen (9) und (11). Weiter ist es nun eine sehr leichte Aufgabe, aus den beiden Spezialfällen $p=1$ und $q=1$ die Ungleichung (3) für beliebige Exponenten p und q darzutun.

Der skizzierte Beweis zeigt deutlich die unmittelbare Verbindung zwischen der Ungleichung (3) und der Minkowskischen Ungleichung in der üblichen Form (10) und (12). Der Beweis besitzt aber einen bestimmten Nachteil, den er mit vielen anderen Beweisen auf diesem Gebiete gemein hat, nämlich daß er nicht geeignet ist, ohne Weiteres die genauen Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Ungleichung (3) zu liefern. Man wird sich deshalb einen Beweis wünschen, der sofort die Ungleichung (3) liefert, ohne den Weg über die Ungleichungen (10) und (12) zu nehmen, und der zugleich die Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens aufweist. Einen solchen Beweis werden wir unten geben.

Zuerst sei aber noch eine Bemerkung über die Ungleichung (3) eingeschoben, nämlich, daß auch die *Höldersche Ungleichung*, die aussagt, daß

$$M_1(f_1 f_2) \leqq M_r(f_1)\, M_{\frac{r}{r-1}}(f_2) \tag{15}$$

für $r>1$, in dieser Ungleichung enthalten ist. Wählen wir nämlich $p=0$, $q=1$ und $g(x,y)=(f_1(y))^r$ für $0 \leqq x \leqq \frac{1}{r}$, $g(x,y)=(f_2(y))^{\frac{r}{r-1}}$ für $\frac{1}{r}<x\leqq 1$, so ergibt sich aus (3) die Ungleichung

$$M_1\left(e^{\frac{1}{r}\log f_1^r + \frac{r-1}{r}\log f_2^{\frac{r}{r-1}}}\right) \leqq e^{\frac{1}{r}\log M_1(f_1^r) + \frac{r-1}{r}\log M_1\left(f_2^{\frac{r}{r-1}}\right)}$$

oder

$$M_1(f_1 f_2) \leqq [M_1(f_1^r)]^{\frac{1}{r}} \left[M_1\left(f_2^{\frac{r}{r-1}}\right)\right]^{\frac{r-1}{r}},$$

und das ist gerade die Ungleichung (15). Dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $f_1^r \big/ f_2^{\frac{r}{r-1}}$ konstant ist. Umgekehrt kann man nach dem obigen Muster aus der Ungleichung (15), übrigens auch schon aus dem Spezialfall $r=\frac{1}{2}$, d. h. aus der Schwarzschen Ungleichung, die Ungleichung (3) für den Fall $p=0$, $q=1$ herleiten. Dabei verliert man aber wieder die Möglichkeit einer einfachen Feststellung der Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens.

Zum Schluß bringen wir noch den angekündigten, direkten Beweis der Ungleichung (3).[5]) Als Ausgangspunkt nehmen wir eine bekannte Verallgemeinerung der Jensenschen Ungleichung (1).

Es seien $f=f(x)$ und $h=h(x)$ zwei im Intervalle $0 \leq x \leq 1$ definierte Funktionen, die unseren gewöhnlichen Bedingungen genügen. Ferner sei

$$\int_0^1 h\,dx = 1.$$

Dann bezeichnen wir, falls $p \neq 0$, die Größe

$$M_p(f;\,h) = \left[\int_0^1 f^p\,.\,h\,dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

falls $p=0$, die Größe

$$M_0(f;\,h) = e^{\int_0^1 \log f\,.\,h\,dx}$$

als Mittelwert p^{ter} Ordnung $M_p(f;\,h)$ von f *mit der Gewichtsfunktion* h. Dann gilt der Satz:

Bei fest gehaltenem h besteht dann und nur dann die Ungleichung

(16) $$M_p(f;\,h) \leq M_q(f;\,h)$$

für jede Funktion f der betrachteten Art, wenn $p \leq q$ *ist. Ferner gilt in der Ungleichung* (16) *das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn entweder* $p=q$, *oder* $p<q$ *und f konstant ist.*[6])

Aus diesem Satz ziehen wir eine wichtige Folgerung:

Es sei $p<q$ *und* f_0 *eine vorgegebene Funktion, die unsere gewöhnlichen Bedingungen erfüllt. Dann gibt es immer eine Konstante a und eine Gewichtsfunktion h, so daß*

$$M_p(f) = a\,M_q(f;\,h),$$

sobald f/f_0 *konstant ist, während für alle anderen Funktionen f die*

---

[5]) Bei der Ausarbeitung dieses Beweises habe ich den Beweis für die Minkowskische Ungleichung von F. Riesz vor Augen gehabt; vgl. F. Riesz, Su alcune disuguaglianze, *Bolletino dell'Unione Matematica Italiana*, 7 (1928), S. 77—79. Unser Beweis ist eigentlich nur eine weitere Ausgestaltung dieses Beweises.

[6]) Vgl. J. L. W. V. Jensen oder B. Jessen, loc. cit., Fußnote [2]). — Die Ungleichung (16) folgt übrigens unmittelbar aus der Ungleichung (1) durch eine einfache Variabeltransformation.

Ungleichung

$$M_p(f) < a\,M_q(f;\,h)$$

besteht.[7])

Bei dem Beweis dieses Satzes dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $M_p(f_0)=1$ annehmen. Dann erfüllt offenbar die Funktion f_0^p die Bedingung

$$\int_0^1 f_0^p\,dx = 1\,;$$

denn für $p \neq 0$ folgt dies unmittelbar aus der Voraussetzung $M_p(f_0)=1$, und für $p=0$ ist ja f_0^p konstant $=1$. Also gilt nach der obigen Ungleichung (16) für jedes f die Ungleichung

$$M_p\left(\frac{f}{f_0};\,f_0^p\right) \leqq M_q\left(\frac{f}{f_0};\,f_0^p\right), \tag{17}$$

und dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn f/f_0 konstant ist. Nun steht auf der linken Seite von (17) gerade die Operation $M_p(f)$; dies ist trivial, wenn $p \neq 0$ und folgt für $p=0$ aus der Voraussetzung $M_p(f_0)=1$. Und auf der rechten Seite von (17) steht gewiß eine Operation der Form $a\,M_q(f;\,h)$; denn für $q \neq 0$ ist ja

$$M_q\left(\frac{f}{f_0};\,f_0^p\right) = \left[\int_0^1 \left(\frac{f}{f_0}\right)^q .\, f_0^p\,dx\right]^{\frac{1}{q}} = a\,M_q(f;\,h),$$

falls

$$h = \frac{f_0^{p-q}}{\int_0^1 f_0^{p-q}\,dx} \qquad \text{und} \qquad a = \left[\int_0^1 f_0^{p-q}\,dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

gesetzt wird, und für $q=0$ ist

$$M_0\left(\frac{f}{f_0};\,f_0^p\right) = e^{\int_0^1 \log\frac{f}{f_0}\,.\,f_0^p\,dx} = a\,M_0(f;\,h),$$

falls

$$h = f_0^p \qquad \text{und} \qquad a = e^{-\int_0^1 \log f_0\,.\,f_0^p\,dx}$$

gesetzt wird. Hiermit ist der Satz bewiesen.

[7]) Auf Grund dieses Satzes kann man sagen, daß für $p<q$ die Funktionaloperation $M_q(f)$ *konvex* ist in Bezug auf $M_p(f)$. Diese Konvexität ist der eigentliche Grund für das Bestehen der Ungleichung (3).

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun ein Leichtes, die allgemeine Ungleichung (3) zu beweisen. Es gilt zu zeigen, daß für jedes $g=g(x, y)$ die Ungleichung

$$M_q^y M_p^x (g(x, y)) \leqq M_p^x M_q^y (g(x, y)) \tag{3}$$

besteht, falls $p<q$, und ferner, daß in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $g(x, y)=\varphi(x)\psi(y)$ ist.

Wir wählen in dem obigen Satze

$$f_0(x)=M_q^y (g(x, y)),$$

und bestimmen zu dieser Funktion f_0 nach demselben Satze eine Zahl a und eine Gewichtsfunktion $h=h(x)$, so daß für jede Funktion $f=f(x)$

$$M_p^x(f(x)) \leqq a M_q^x(f(x);\, h(x)), \tag{18}$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann besteht, wenn f/f_0 konstant ist. Dann gilt also insbesondere (für $f=f_0$) die Gleichung

$$M_p^x M_q^y (g(x, y)) = a M_q^x (M_q^y (g(x, y));\, h(x)), \tag{19}$$

die die rechte Seite von (3) allein durch Mittelwerte q^{ter} Ordnung ausdrückt. Wenden wir andererseits für konstantes y die Ungleichung (18) auf die Funktion $f(x)=g(x, y)$ an, so ergibt sich die Ungleichung

$$M_p^x(g(x, y)) \leqq a M_q^x(g(x, y);\, h(x)). \tag{20}$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann für alle Werte von y, wenn $g(x, y)/f_0(x)$ nur von y abhängt, d. h. also, wie man sich leicht überlegt, wenn $g(x, y)=\varphi(x)\psi(y)$ ist. Aus (20) folgt nun durch Mittelwertbildung q^{ter} Ordnung in Bezug auf die Variable y die Ungleichung

$$M_q^y M_p^x (g(x, y)) \leqq M_q^y\, a M_q^x (g(x, y);\, h(x)), \tag{21}$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann besteht, wenn $g(x, y)=\varphi(x)\psi(y)$ ist. Nun sind aber die beiden auf den rechten Seiten von (19) und (21) stehenden Größen gleich; denn Mittelwertbildungen von der gleichen Ordnung sind unabhängig von ihrer Reihenfolge, auch wenn Gewichtsfunktionen auftreten. Also folgt aus (19) und (21) die zu beweisende Ungleichung (3).

(Eingegangen am 23. Dezember 1932.)

On Continuability of Power Series.

By A. ZYGMUND in Wilno.

§ 1.

Let $\Sigma a_n z^n$ be an arbitrary power series whose radius of convergence is equal to 1. As regards the continuability of the series

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n z^n,$$

where $\{\varepsilon_n\}$ is a sequence of unit factors: $|\varepsilon_n| = 1$, the following theorems have been proved.

a) There exists a sequence of $\varepsilon_n = \pm 1$, for which (1) is not continuable across $|z| = 1$.[1])

b) For „almost all" sequences $\varepsilon_n = \pm 1$, the series (1) is not continuable across $|z| = 1$.[2])

c) If $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$, the set of sequences $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n = \pm 1$ such that (1) can be continued outside $|z| = 1$ is at most enumerable.[3])

d) If ε_n are arbitrary (complex) unit factors: $\varepsilon_n = e^{2\pi i x_n}$ $(0 \leq x_n < 1)$ then for „almost all" $\{\varepsilon_n\}$ the functions (1) are not continuable.[4])

---

1) Theorem of PÓLYA. See e. g. E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, 2nd ed. (1929), p. 86—87.

2) See R. E. A. C. PALEY and A. ZYGMUND, On some series of functions (3), *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 28 (1932), p. 190—205, esp. p. 201, Theorem XI.

3) F. HAUSDORFF, Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen, *Math. Zeitschrift*, 4 (1919), p. 98—103.

4) H. STEINHAUS, Über die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist, *Math. Zeitschrift*, 31 (1929), p. 408—416.

„Almost all“ in *b)* is meant as follows. We consider the sequence of (RADEMACHER's) functions $\varphi_0(t), \varphi_1(t) \ldots, \varphi_n(t), \ldots,$ where $\varphi_n(t) = \operatorname{sign} \sin (2^{n+1}\pi t)$ and put

$$f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t) z^n. \tag{2}$$

Proposition *b)* asserts that for almost every t the functions $f_t(z)$ have the circle $|z| = 1$ as their natural boundary. As regards „almost all“ in *d)* we refer the reader to the paper of STEINHAUS.

It is clear that *a)* is included in *b)* (but not in *d)*). The condition $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$ is obviously essential for the validity of *c)*. Propositions *b)* and *d)* cannot be compared. Theorem *c)* is false if ε_n, $|\varepsilon_n| = 1$, is permitted to assume complex values.

The proof of *b)* given in the paper referred to can be easily extended to some more general classes of $\{\varepsilon_n\}$ and, in particular, it gives *d)*. However the proof of the latter theorem given by STEINHAUS and using some specific properties of the space of sequences $\{x_n\}$ $(0 \leqq x_n < 1)$ is more elementary. It is therefore natural to apply that method to the proof of theorem *b)* and this is just the purpose of the present paper. As regards the following proof, two remarks may be added.

1°. Although the proof is more elementary than the original proof in the paper quoted under [2]), the method seems to be less powerful. In particular it does not give the corresponding theorem for DIRICHLET series.[5]) 2°. The reader acquainted with STEINHAUS' paper will notice, that, although we utilise some of its ideas, the changes that had to be made are not completely trivial (see also § 4 below).

§ 2.

We begin with a few general remarks on the structure of linear sets of points. Let $t = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ be the dyadic development (the only one if t is not dyadically rational) of an arbitrary number in the interval $0 \leqq t \leqq 1$. Let Q_n $(n = 1, 2, \ldots)$ be one of the two operations which may be performed upon α_n: leaving α_n unaltered or replacing α_n by $1 - \alpha_n$. Let for an arbitrary sequence $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \ldots$ the operation $Q_1 Q_2 \ldots Q_n \ldots$ be denoted by Q. Q transforms every number $t = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ into another

[5]) See PALEY and ZYGMUND, loc. cit., Theorem XXVII.

number $Q(t)=0, \beta_1\beta_2 \ldots$ If we reject from the interval $I=(0, 1)$ the (enumerable) set D of numbers t such that either t or $Q(t)$ is dyadically rational, the rest $I-D$ is transformed by Q into itself. Given an arbitrary set E of points t we shall denote by $Q(E)$ (image of E) the set of points $Q(t)$ when $t \in E-D$.

Lemma. For an arbitrary measurable set E of points t, the set $Q(E)$ is measurable and $|E|=|Q(E)|$.[6])

The lemma is obviously true if E is an interval of the form $(k2^{-N}, (k+1)2^{-N})$ $(N=1, 2, \ldots;\ k=0, 1, \ldots, 2^N-1)$. Every open set can be represented as the sum of a finite or enumerable system of such intervals. Hence the truth of the lemma follows for open, and, consequently, passing to the complements, also for closed sets. It is sufficient to notice that any measurable set is contained between two sets, one open, the other closed, with measures differing as little as we please.

Let $E(\alpha, \beta)$ denote the set of t for which the function $f_t(z)$ $(z=re^{i\theta})$ posesses at least one singular point on the arc $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ $(r=1)$. It is not difficult to see that $E(\alpha, \beta)$ is always measurable. Moreover, (the proposition and the proof are well known) $E(\alpha, \beta)$ is either of measure 0 or 1. In fact, rejecting a finite number of terms in the series (2) we do not change $E(\alpha, \beta)$. Consequently if γ is an arbitrary dyadically rational number and $E_\gamma(\alpha, \beta)$ the set $E(\alpha, \beta)$ translated by γ (and taken mod. 1), we have $E_\gamma(\alpha, \beta)=E(\alpha, \beta)$. If $E(\alpha, \beta)$ and its complement were both of positive measure we could, choosing γ suitably, bring a point of density of $E(\alpha, \beta)$ as near as we please to a point of density 0, what is, of course, impossible.

§ 3.

Now, passing to our problem, we prove that $E(\alpha, \beta)$ has the same measure as $E(\alpha+\pi, \beta+\pi)$. In fact, $f_t(z)$ possesses a singular point on the arc $(\alpha+\pi, \beta+\pi)$ if and only if the function $f_t(-z)=$ $=\Sigma a_n z^n (-1)^n \varphi_n(t)$ possesses one on (α, β). But $(-1)^n \varphi_n(t)=$ $=\varphi_n(t')$, $f_t(-z)=f_{t'}(z)$, where t' can be obtained from t by a transformation Q, and the assertion follows from Lemma. In particular, as every $f_t(z)$ has at least one singular point on $|z|=1$, at least one of the sets $E(\alpha, \alpha+\pi)$, $E(\alpha+\pi, \alpha+2\pi)$ is of positive measure. It follows that both sets are of measure 1.

[6]) By $|E|$ we denote the (Lebesgue) measure of E.

Let $N>0$ be an arbitrary integer and (α, β) an arc of length $\leqq 2\pi/2^{-N}$, I_k^N $(k=0, 1, \ldots, 2^N-1)$ the arc (α, β) translated by $2\pi k/2^N$. We are going to prove that if almost all $f_t(z)$ have singular points on one of the arcs $I_0^N, I_1^N, I_2^N, \ldots$ the same may be said of the other arcs. We have already proved this for $N=1$; let us suppose the assertion true for $N-1$. Since $\beta-\alpha\leqq 2\pi/2^N<2\pi/2^{N-1}$, almost all functions $f_t(z)$ have singular points either on the arcs $I_0^N, I_2^N, \ldots, I_{2^N-2}^N$ or on $I_1^N, I_3^N, \ldots, I_{2^N-1}^N$, say, on the former. Suppose, contrarily to what we are trying to prove, that almost all $f_t(z)$ are regular on the arcs $I_1^N, I_3^N, \ldots$, i. e. that for almost all t, the functions $f_t(\omega z), f_t(\omega^3 z), f_t(\omega^5 z), \ldots$ where $\omega=\exp(2\pi i/2^N)$ are regular on I_0^N. Let $n_\lambda^{(r)}=2^{N-1}\lambda+r$ $(0\leqq r<2^{N-1}, \lambda=0, 1, 2, \ldots)$. Then, for ν odd,

$$(3)\qquad f_t(\omega^\nu z)=\sum_n \omega^{\nu n} a_n z^n \varphi_n(t)=$$
$$=S_0+\omega^\nu S_1+\omega^{2\nu}S_2+\ldots+\omega^{\nu(2^{N-1}-1)}S_{2^{N-1}-1}$$
$$(\nu=1, 3, 5, \ldots, 2^N-1)$$

where

$$S_r=\sum_\lambda a_{n_\lambda^{(r)}} z^{n_\lambda^{(r)}} (-1)^\lambda \varphi_{n_\lambda^{(r)}}(t).$$

Since the determinant of the linear system of equations (3) is not zero, the functions $S_0, S_1, \ldots, S_{2^{N-1}-1}$ are linear combinations of $f_t(\omega z), f_t(\omega^3 z) \ldots$ and, consequently, they are, as well as their sum $S=S_0+S_1+\ldots+S_{2^{N-1}-1}$, regular on I_0^N for almost every t. But $S=S_t(z)=f_{t'}(z)$, where $t'=Q(t)$, hence, contrarily to our hypothesis, almost all $f_t(z)$ are regular on I_0^N.

As at least one of the sets $E(2k\pi/2^N, 2(k+1)\pi/2^N)$ $(k=0, 1, \ldots, 2^N-1)$ is of positive measure, i. e. of measure 1, almost all $f_t(z)$ have singular points on every arc I_k^N. It follows that almost all $f_t(z)$ have $|z|=1$ as their natural boundary.

§ 4.

It is natural to inquire whether the method of the proof can be applied to analogous problems. Let $\mathfrak{K}$ be a class of power series $\mathfrak{P}$, and suppose that, if $\mathfrak{P}$ belongs to $\mathfrak{K}$, every series that may be obtained from $\mathfrak{P}$ by multiplying the coefficients by *complex* unit factors ε_n or by changing a finite number of the coefficients of $\mathfrak{P}$, also belongs to $\mathfrak{K}$. Let P be a property such, that, for any function f of $\mathfrak{K}$, there exists a direction $\arg z = \theta_0$, for which $f(z)$ possesses property P in every angle $\theta_0 - \varepsilon \leqq \arg z \leqq \theta_0 + \varepsilon$, and that changing of a finite number of terms in the development of f, θ_0 remains unaltered. Then an argument completely analogous to that used by STEINHAUS in his paper referred to, shows that (in STEINHAUS' sens) „almost all" functions obtained from $f(z)$ by introducing complex unit factors ε_n possess property P in every angle $\alpha \leqq \arg z \leqq \beta$. For instance, if we take for $\mathfrak{K}$ the class of all power series with radius of convergence equal to 1, and for P existence of singularities on a given arc of the circle $|z| = 1$, we get proposition *d)*. If $\mathfrak{K}$ is the class of integral functions and P existence of directions J (JULIA) we get the theorem (which, it seems, has never been explicitely stated), that for „almost all" series (1) with complex ε_n, $|\varepsilon_n| = 1$, every direction is J.[7])

As regards the factors $\varepsilon_n = \pm 1$, the problem, propounded by PÓLYA[8]) in a little weaker form, requiring only existence of *one* sequence $\{\varepsilon_n\}$, looks more difficult. In the above proof (§ 3) we utilised the fact that, if two functions are regular on an arc, so is their sum. The corresponding theorem for directions not J is not true and the problem remains unsolved. Only in the case of functions of infinite order it is not difficult to prove that for almost every sequence of $\varepsilon_n = \pm 1$ PÓLYA's hypothesis is true.

(Received February 11, 1933.)

---

[7]) A direction $\arg z = \theta_0$ is J if in every angle $(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$ $f(z)$ assumes every value, with one possible exception, infinitely many times. It has been proved by VALIRON (see M. BIERNACKI, Sur la théorie des fonctions entières, *Bull. de l'Acad. Polonaise,* (A) 1929, p. 529–570, esp. p. 546 sq. where a different proof is given) that for every integral function $f(z)$ there exists a direction θ_1 (direction J^*) such that, whatever rational function $R(z)$, with one possible exception, $f(z) - R(z)$ vanishes in every angle $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$ infinitely many times. It is obvious that changing a finite number of coefficients of $f(z)$ does not move J^* directions. Hence in the theorem stated above we may replace J by J^*. It must be added that the proofs of measurability of sets analogous to $E(\alpha, \beta)$ (considered above) are, for directions J and J^*, a little troublesome.

[8]) G. PÓLYA, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Math. Zeitschrift,* **29** (1929), p. 549—640.

Sur les transformations localement topologiques.

Par HENRI CARTAN à Strasbourg.

Je me propose d'indiquer ici quelques remarques élémentaires relatives aux transformations „localement topologiques". Cet article se compose de deux parties distinctes, entre lesquelles il n'y a pas de lien logique. La première partie est relative à l'existence de *chemins de détermination* dans toute transformation localement topologique d'un domaine D en un ensemble de points intérieurs à un domaine Δ; dans le cas particulier où D et Δ sont identiques à l'ensemble des points à distance finie de l'espace, on obtient diverses conditions suffisantes pour qu'une transformation localement topologique, définie en tout point de l'espace à distance finie, soit une transformation biunivoque de cet espace en lui-même; par cette voie, on peut retrouver un théorème de M. HADAMARD.

La deuxième partie de cet exposé comporte quelques applications d'un lemme fort simple (§ 7), qui est lui-même un cas particulier d'une proposition générale (théorème fondamental, § 9) implicitement contenue dans les travaux de M. BROUWER. Comme conséquence de ce lemme, nous établirons une proposition (théorème III) relative à la *convergence des suites de transformations localement topologiques.* Dans le cas particulier des domaines *univalents,* on peut établir des propositions plus précises, d'où résulte notamment un fait assez curieux: de pures conditions métriques, imposées à une transformation localement topologique d'un domaine univalent donné, permettent d'affirmer l'univalence du domaine transformé (on trouvera un énoncé précis au théorème VI).

Qu'il me soit permis de remercier ici M. KERÉKJÁRTÓ de ses précieux conseils, et de l'hospitalité qu'il a bien voulu accorder à ce petit travail.

PREMIÈRE PARTIE.

Sur les chemins de détermination et leurs applications.

1. Nous envisagerons des *domaines abstraits* à n dimensions, c'est-à-dire des ensembles de points pour lesquels on peut définir des *voisinages* satisfaisant aux conditions de HAUSDORFF (y compris la séparabilité), chaque voisinage étant en outre homéomorphe à une hypersphère de l'espace à n dimensions.

Soient donnés deux domaines abstraits à n dimensions D et Δ. Envisageons une loi qui fasse correspondre à chaque point M de D un point P de Δ, bien déterminé, et cela de manière que P varie de façon *continue* avec M; le point P sera dit homologue de M. Nous dirons qu'une telle loi de correspondance définit une transformation *localement topologique* si elle satisfait en outre à la condition suivante: à chaque point M_0 intérieur au domaine D, on peut associer un voisinage $U(M_0)$, qui contient M_0, est intérieur à D, et est tel que deux points distincts quelconques de $U(M_0)$ aient pour homologues deux points *distincts* de Δ. Si cette condition est vérifiée, on sait, d'après le théorème de SCHOENFLIES,[1]) que le point P_0 de Δ, homologue de M_0, possède un voisinage $V(P_0)$ tel que tout point de ce voisinage soit homologue d'un point (et d'un seul) du voisinage $U(M_0)$.

Étant donnée une telle transformation localement topologique, nous la désignerons par une lettre T, et nous conviendrons de dire que le domaine abstrait D, auquel on a adjoint la transformation T, définit un *domaine Δ' intérieur au domaine abstrait Δ*. On remarquera que chaque *point* du domaine Δ' est constitué par l'ensemble d'un point du domaine abstrait D, et du point homologue du domaine abstrait Δ. En résumé, par *domaine Δ' intérieur à un domaine Δ*, nous entendons l'ensemble des données suivantes: 1° un domaine abstrait D; 2° une transformation T, localement topologique dans D, qui fait correspondre à chaque point intérieur à D un point intérieur à Δ.

Étant donnés deux domaines abstraits D et Δ, et une transformation T localement topologique de D en un domaine Δ' intérieur à Δ, deux cas peuvent se présenter : ou bien il est possible de trouver, dans D, deux points distincts ayant pour homologues

[1]) Voir, par exemple, L. BROUWER, Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets, *Math. Annalen*, 72 (1912), p. 55—56.

un même point de Δ, — ou bien deux points distincts de D ont toujours pour homologues deux points distincts de Δ. Dans le second cas, nous dirons que le domaine Δ' est non seulement un domaine intérieur à Δ, mais un *sous-domaine* de Δ. Ce cas est caractérisé par le fait que tout point de Δ est homologue de *zéro* ou *un* point de D. Dans le cas particulier où chaque point de Δ est homologue d'un point de D (et d'un seul), nous dirons que T est une *transformation* (localement topologique) *biunivoque de D en Δ*.

2. Plaçons-nous dans le cas général d'une transformation T, localement topologique, qui transforme D en un domaine intérieur à Δ. Il existe, dans Δ, au moins un point P_0 qui soit homologue d'au moins un point M_0 de D. Comme nous l'avons signalé plus haut, il existe, dans D, un voisinage $U(M_0)$, et, dans Δ, un voisinage $V(P_0)$, tels que tout point de $V(P_0)$ soit homologue d'un point (unique) de $U(M_0)$. On fait ainsi correspondre à chaque point P du domaine $V(P_0)$ un point M du domaine $U(M_0)$, et on vérifie facilement que cette loi de correspondance définit une transformation localement topologique du domaine $V(P_0)$ en un sous-domaine de $U(M_0)$; nous désignerons cette transformation par T^{-1}. On peut dire que $M = T^{-1}(P)$ est une fonction continue du point P (de Δ), définie dans le voisinage $V(P_0)$.

Cela étant, soit $\widehat{P_0Q_0}$ un arc de courbe continue intérieur à Δ. On peut essayer de *prolonger*, le long de cet arc, la fonction $M = T^{-1}(P)$; ce prolongement se fera à la manière du prolongement analytique, et nous croyons inutile d'insister sur ce point. Ou bien le prolongement pourra se faire jusqu'en Q_0 à l'aide d'un nombre fini d'opérations, — ou bien il existe, sur l'arc $\widehat{P_0Q_0}$, un point Q, bien déterminé, qui jouit de la propriété suivante: il est impossible d'effectuer, au moyen d'un nombre fini d'opérations, le prolongement jusqu'en Q, mais, quel que soit P intérieur à l'arc $\widehat{P_0Q_0}$, le prolongement est possible jusqu'en P à l'aide d'un nombre fini d'opérations.

La transformation T^{-1} est alors définie pour tout point de l'arc $\widehat{P_0Q}$, l'extrémité Q exceptée. L'ensemble des points de D, transformés des points de cet arc par la transformation T^{-1}, constitue une courbe continue, partant de M_0, et dont tous les points sont intérieurs à D. Je dis que, lorsque P décrit l'arc $\widehat{P_0Q}$ et *tend vers*

Q, le point $M = T^{-1}(P)$ *tend vers la frontière de D;* cette locution signifie, par définition, que les points $M = T^{-1}(P)$ n'ont aucun point d'accumulation intérieur à D quand P tend vers Q; d'une façon précise: étant donnée, sur l'arc $\widehat{P_0 Q}$, une suite infinie quelconque de points $P_1, \ldots, P_k, \ldots$ qui tendent vers Q, les $T^{-1}(P_k)$ n'ont aucun point d'accumulation intérieur à D.

Démonstration: raisonnons par l'absurde. Soit N un point de D, supposé être point d'accumulation de la suite $M_k = T^{-1}(P_k)$. On peut, en extrayant au besoin de la suite P_k une suite partielle convenable, se ramener au cas où les points $M_k = T^{-1}(P_k)$ tendent vers N. Soit alors Q' le transformé de N par la transformation T. Le point Q', étant point-limite des points P_k, se confond avec Q. Or la transformation T, étant localement topologique, établit une correspondance biunivoque entre les points d'un certain voisinage $U(N)$ et ceux d'un voisinage $V(Q)$. Mais alors le prolongement de la transformation T^{-1} le long de l'arc $\widehat{P_0 Q_0}$ serait possible au-delà du point Q, ce qui est contraire à l'hypothèse.

C. Q. F. D.

Il est ainsi établi que l'arc $\widehat{P_0 Q}$ est transformé, par la transformation T, d'un arc de courbe intérieur à D, partant du point M_0 et „tendant vers la frontière de D". Un tel arc sera dit „chemin de détermination", par analogie avec les chemins de détermination dans la théorie des fonctions méromorphes d'une variable complexe. Un chemin de détermination est, en somme, un arc de courbe continue, intérieur à D, qui tend vers la frontière de D, et est tel que le transformé $T(M)$ d'un point de cet arc tende vers un point Q intérieur à Δ quand M tend vers la frontière de D le long de cet arc.

Théorème I. *Soit T une transformation localement topologique d'un domaine D en un domaine intérieur à Δ; si cette transformation ne possède aucun chemin de détermination, alors T transforme D en un domaine de recouvrement*[2]) *de Δ.*

---

[2]) On dit qu'un domaine Δ', intérieur à un domaine Δ, est un *domaine de recouvrement* de Δ si tout arc de courbe continue, intérieur à Δ, et dont l'origine appartient aussi à Δ', a tous ses points intérieurs à Δ'. D'une façon plus précise, faisons intervenir le domaine abstrait D et la transformation T, localement topologique dans D, qui transforme D en Δ': Δ' sera un domaine de recouvrement de Δ, si tout arc de courbe continue, intérieur à Δ, et dont l'origine est transformée (par T) d'un point de D, est l'image (par T) d'un arc de courbe intérieur à D.

En effet, la transformation T transforme D en un domaine Δ' intérieur à Δ. D'autre part, la transformation T ne possède, par hypothèse, aucun chemin de détermination; donc la transformation T^{-1} est prolongeable le long de tout arc de courbe continue, intérieur à Δ, et partant d'un point fixe P_0 intérieur à Δ'; par suite, un tel arc de courbe est toujours l'image (par T) d'un arc de courbe intérieur à D. Le domaine Δ' est donc bien un domaine de recouvrement de Δ. Si le domaine Δ est *simplement connexe,*[3]) alors il est bien connu que tout domaine de recouvrement de Δ est nécessairement identique à Δ. D'où:

Corollaire du théorème I. *Soit donnée une transformation T, localement topologique dans un domaine D, qui transforme D en un domaine intérieur à un domaine Δ. Si cette transformation ne possède aucun chemin de détermination, et si Δ est simplement connexe, alors T est une transformation biunivoque de D en Δ* (au point de vue *abstrait*, D et Δ sont identiques).

Voyons une autre conséquence du théorème I. Soit D un domaine *clos* (c'est-à-dire un domaine qui puisse être tout entier recouvert à l'aide d'un nombre *fini* de voisinages). Si T est une transformation localement topologique du domaine D en un domaine intérieur à un domaine Δ, il est clair que T ne peut posséder de chemins de détermination, puisque D n'a pas de frontière. Donc le théorème I et son corollaire s'appliquent; on voit, en particulier, que si Δ est simplement connexe, alors Δ est clos et D est simplement connexe. Par exemple, il est impossible qu'une transformation localement topologique, définie sur la surface d'une sphère, transforme celle-ci en un domaine intérieur à un cercle; de même, il est impossible qu'une transformation localement topologique, définie sur la surface d'un tore, transforme celle-ci en un domaine intérieur au domaine (à 2 dimensions) constitué par la surface d'une sphère.

3. Avant d'appliquer le corollaire du théorème I au cas particulier où l'on prend pour D, ainsi que pour Δ, le domaine constitué par l'ensemble de tous les points (à distance finie) de l'espace euclidien E_n à n dimensions, faisons encore une remarque au sujet du théorème I et de son corollaire:

Soit T une transformation localement topologique d'un do-

[3]) Par domaine *simplement connexe,* nous entendons un domaine Δ tel que toute courbe fermée à une dimension, intérieure à Δ, soit réductible à zéro par déformation continue sans sortir de Δ.

maine D en un domaine intérieur à un domaine Δ supposé simplement connexe. Si l'on peut trouver une suite infinie de points intérieurs à D, sans point d'accumulation intérieur à D, et telle que leurs homologues dans Δ aient un point d'accumulation intérieur à Δ, alors on peut trouver un arc de courbe continue intérieur à D, qui tend vers la frontière de D, et dont le transformé par T tend vers un point intérieur à Δ. En effet, s'il n'existait pas de chemin de détermination, la transformation serait une transformation biunivoque de D en Δ, ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse faite.

C. Q. F. D.

L'hypothèse suivant laquelle Δ est *simplement connexe* est essentielle.

La proposition précédente paraît utile dans un certain nombre de questions. Elle permet, notamment, de compléter un théorème M. CARATHÉODORY.[4] À ce propos, je dois dire que c'est M. KERÉKJÁRTÓ qui m'a signalé ce théorème, et m'a fait remarquer qu'on peut en déduire le „théorème II" du paragraphe suivant.

4. *Cas particulier des transformations localement topologiques de l'espace euclidien E_n en un domaine intérieur à E_n.* Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées (réelles) d'un point de E_n. Considérons une transformation de la forme

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

où les f_i sont définies, réelles et continues pour toutes les valeurs des variables réelles $x_1, \ldots, x_n$; supposons en outre que cette transformation soit *localement topologique*, c'est-à-dire qu'à chaque système $a_1, \ldots, a_n$ on puisse faire correspondre un $\varepsilon > 0$ tel que les relations

[4]) C. CARATHÉODORY, Sur les transformations ponctuelles, *Bulletin de la Soc. math. de Grèce*, **5** (1923), p. 12—19. Dans l'énoncé du théorème de CARATHÉODORY, on peut remplacer l'hypothèse *d*) par l'hypothèse moins restrictive suivante (que nous formulons en conservant les notations de M. CARATHÉODORY):

d') un arc de courbe continue, intérieur à A' (y compris ses extrémités), n'est jamais l'image d'une courbe de $[R]$ qui tend vers l'infini.

Faisons encore deux remarques sur ce théorème: 1° l'hypothèse, faite par M. CARATHÉODORY, que $[R]$ est partout dense dans E_n, est inutile; 2° le fait que $[S']$ est *fermé* ne résulte pas de ce que $[S]$ est fermé, mais est une conséquence des hypothèses *a, b, c, d*.

$$\left\{\begin{array}{ll} f_i(x_1,\ldots,x_n)=f_i(y_1,\ldots,y_n) & \\ |x_i-a_i|<\varepsilon, \quad |y_i-a_i|<\varepsilon \end{array}\right. \qquad (i=1,\ldots,n)$$

entraînent $x_i=y_i$ $(i=1, 2,\ldots, n)$.

Cela étant, proposons-nous de chercher des conditions *suffisantes* pour que les formules (1) définissent une transformation *biunivoque* de l'espace E_n en lui-même, c'est-à-dire pour que le système (1) soit équivalent à un système de la forme

$$x_i=g_i(x'_1,\ldots,x'_n),$$

les g_i étant définies, réelles et continues pour toutes les valeurs des variables réelles $x'_1,\ldots,x'_n$. Appliquons précisément le corollaire du théorème I. Nous obtenons le

Théorème II. *Si la transformation* (1) *ne possède pas de chemin de détermination, c'est une transformation biunivoque de E_n en lui-même.*

Corollaire. *Si la transformation* (1) *déplace chaque point de E_n d'une distance plus petite qu'un nombre fixe, c'est-à-dire si l'on a les inégalités*

$$|f_i(x_1,\ldots,x_n)-x_i|<M,$$

alors (1) *est une transformation biunivoque de E_n en lui-même; autrement dit, les fonctions f_i prennent une fois et une seule tout système de valeurs.* En effet, l'hypothèse faite exclut l'existence d'un chemin de détermination.

Plus généralement, soit $l(r)$ le minimum de la distance, à un point fixe, des transformés des points de l'hypersphère $\Sigma(x_i)^2=r^2$. *Si l'on a*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ l(r)=+\infty,$$

alors (1) *est une transformation biunivoque de E_n en lui-même.* En effet, dans ce cas, il ne peut exister de chemin de détermination. *Il en sera ainsi, en particulier, si $l(r)$ augmente indéfiniment avec r.*

Complément au théorème II. *Si* (1) *n'est pas une transformation biunivoque de E_n en lui-même, non seulement la transformation* (1) *possède un chemin de détermination, mais, d'une façon précise, il existe dans E_n une courbe continue qui tend vers l'infini, et dont la transformée par* (1) *est un segment de droite de longueur finie.* En effet, soient M_0 un point de E_n, et P_0 son transformé; je dis que la transformation T^{-1}, inverse de (1), ne peut pas se prolonger le long de chaque demi-droite issue de P_0; la proposition annoncée en résultera évidemment. Pour faire la démonstration, raisonnons par l'absurde. Supposons que T^{-1} puisse se prolonger le long de chaque demi-droite issue de P_0; alors T^{-1} transformerait E_n en un domaine D intérieur à E_n, et, par suite, E_n serait transformé de D par T; il en résulte que deux points distincts de D auraient toujours des coordonnées différentes, et que D ne posséderait aucun point frontière à distance finie; donc D serait identique à E_n. Ainsi, T serait une transformation biunivoque de E_n en lui-même, ce qui est contraire à l'hypothèse.

C. Q. F. D.

Cela étant, chaque fois que nous connaîtrons une condition *nécessaire* pour qu'une transformation localement topologique, de la forme (1), possède un chemin de détermination dont l'image soit un segment de droite fini, alors, en exprimant que cette condition *n'est pas remplie*, nous obtiendrons une condition *suffisante* pour que (1) soit une transformation biunivoque de E_n en lui-même. Cette remarque nous conduit à une démonstration très simple d'un ancien théorème de M. HADAMARD.[5])

Supposons en effet, avec M. HADAMARD, que les fonctions $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ admettent des dérivées partielles du premier ordre continues, le déterminant fonctionnel étant partout différent de zéro. M désignant un point quelconque de E_n, considérons un arc ds infiniment petit issu de M, et son transformé ds' par la transformation (1); lorsque la tangente au premier arc prend toutes les directions possibles issues de M, le rapport des longueurs $\frac{ds'}{ds}$ admet un *minimum non nul*, que nous désignerons par $\lambda(M)$. Soit $\mu(r)$ le minimum de $\lambda(M)$ quand M décrit l'hypersphère

$$\sum (x_i)^2 = r^2.$$

Si la transformation (1) possède un chemin de détermination dont l'image est un segment de droite de longueur finie, l'intégrale $\int \lambda(M)\,ds$, étendue au chemin de détermination, est évidemment finie. A fortiori, l'intégrale

[5]) J. HADAMARD, Sur les transformations ponctuelles, *Bulletin de la Soc. math. de France*, 34 (1906), p. 71—81.

$$\int_{r_0}^{+\infty} \mu(r)\, dr$$

est *finie*. D'où le théorème d'Hadamard:

Si l'intégrale $\int_{r_0}^{+\infty} \mu(r)\, dr$ *est divergente, la transformation* (1) *est une transformation biunivoque de* E_n *en lui-même.*

DEUXIÈME PARTIE.

Convergence des suites de transformations localement topologiques.

5. Nous n'envisagerons désormais que des domaines intérieurs à l'espace euclidien E_n à n dimensions réelles (il s'agit de l'espace à distance finie). Chaque point d'un domaine D, intérieur à E_n, est affecté de n coordonnées réelles; nous désignerons par $\overline{M}$ le point de E_n qui a les mêmes coordonnées, et nous l'appellerons point *associé* à M. D sera un *sous-domaine* de E_n, si deux points distincts de D ont toujours pour associés deux points distincts de E_n; dans ce cas, on dit aussi que le domaine D est *univalent*. Dans le cas contraire, D sera dit *multivalent*.

Lorsque nous parlerons d'un *domaine*, sans autre précision, il sera toujours sous-entendu qu'il s'agit d'un domaine intérieur à l'espace E_n. Un tel domaine est toujours *orientable*.

Soit D un domaine intérieur à E_n. On peut envisager des domaines qui soient eux-mêmes intérieurs à D; un domaine D_1 intérieur à D est, comme on l'a vu dans la première partie, défini par deux données: 1° un domaine abstrait Δ; 2° une transformation T, localement topologique dans ce domaine abstrait, qui fait correspondre à chaque point de Δ un point intérieur à D. Puisque D est lui-même intérieur à E_n, on déduit de là une transformation localement topologique de Δ en un domaine $\overline{D}_1$ intérieur à E_n. Inversement, tout domaine D_1 intérieur à un domaine D, lui-même intérieur à E_n, peut être considéré comme défini par deux données: 1° un domaine $\overline{D}_1$ intérieur à E_n; 2° une loi de correspondance continue, qui associe à chaque point de $\overline{D}_1$ un point bien déterminé de D, ayant les mêmes coordonnées.

Le domaine D_1 sera un *sous-domaine* de D, si cette loi associe toujours deux points distincts de D à deux points distincts de $\overline{D}_1$. Il est clair que si D est univalent, et si D_1 est un sous-domaine de D, alors $\overline{D}_1$ est univalent.

6. *Sur la convergence des suites de transformations localement topologiques.*[6]) Soit $\varDelta$ un domaine abstrait à n dimensions, et soit T une transformation localement topologique de $\varDelta$ en un domaine D intérieur à E_n. Soit encore une suite infinie de transformations $T_1, \ldots, T_p, \ldots$; supposons que chaque T_p soit une transformation localement topologique de $\varDelta$ en un domaine D_p intérieur à E_n. Nous dirons que les transformations $T_1, \ldots, T_p, \ldots$ *convergent uniformément vers la transformation* T, si à chaque $r > 0$ on peut associer un entier $k(r)$ tel que, pour tout entier $p > k(r)$, la distance des points $T_p(M)$ et $T(M)$[7]) soit inférieure à r quel que soit le point M de $\varDelta$.

Cela posé, nous nous proposons de comparer les domaines D_p au domaine D. Voici ce que nous allons démontrer à ce sujet: prenons arbitrairement un sous-domaine $\varDelta'$ du domaine $\varDelta$, complètement intérieur[8]) à $\varDelta$; désignons par D' le domaine $T(\varDelta')$, et par D'_p le domaine $T_p(\varDelta')$. Il existe un nombre positif r, tel que tout point M de D' soit centre d'une hypersphère, de rayon r, intérieure à D.[9]) Cela étant:

---

[6]) Le cas particulier de la convergence des suites de transformations *pseudo-conformes* (c'est-à-dire définies par n fonctions analytiques de n variables complexes) a été étudié par M. Carathéodory, Über die Abbildungen, die durch Systeme von Funktionen von mehrerer Veränderlichen erzeugt werden, *Math. Zeitschrift*, **34** (1932), p. 754—792: voir notamment p. 769—777.

[7]) Les points $T_p(M)$ et $T(M)$ sont deux points de l'espace euclidien E_n; par *distance* de deux points $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de cet espace, nous entendons la quantité

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,.$$

[8]) $\varDelta'$ est dit *complètement intérieur* à $\varDelta$ si, étant donné un ensemble infini quelconque de points intérieurs à $\varDelta'$, et l'ensemble des points associés dans $\varDelta$, ce dernier ensemble admet au moins un point d'accumulation intérieur à $\varDelta$.

[9]) Cette locution signifie, d'une façon précise, que l'on peut trouver un sous-domaine Σ de D, tel que $\overline{\Sigma}$ soit une hypersphère, et que le point de Σ qui a pour coordonnées celles du centre de $\overline{\Sigma}$ ait pour associé dans D le même point qui est associé au point M de D'.

Théorème III. 1° *Si $p > k(r)$, le domaine D_p a la même orientation que le domaine D, et le domaine D' est un sous-domaine du domaine D_p;*

2° *en outre, si $p > k\left(\frac{r}{2}\right)$, le domaine D'_p est un sous-domaine du domaine D.*

Cet énoncé demande quelques explications. D'abord, puisque Δ peut se transformer, par le moyen de T, en un domaine intérieur à E_n, Δ est orientable. Supposons donc que Δ ait été orienté; il en résulte une orientation pour $D = T(\Delta)$, et une orientation pour $D_p = T_p(\Delta)$; on peut supposer que l'on a orienté Δ de façon que l'orientation de D se trouve en accord avec l'orientation de E_n; si alors l'orientation de D_p se trouve aussi en accord avec celle de E_n, nous dirons que *D_p a la même orientation que D*; sinon, nous dirons que *D_p et D ont des orientations contraires.*

Dans l'énoncé du théorème III, 1°, il y a la phrase: „le domaine D' est un sous-domaine du domaine D_p". C'est là une façon abrégée de dire: „il existe un sous-domaine E du domaine D_p, tel que les domaines $\bar{E}$ et D' soient identiques" (cf. § 5); ou, ce qui revient au même: „il est possible d'associer à chaque point M de D' un point P de D_p ayant les mêmes coordonnées que M, cette loi de correspondance étant univoque, continue, et telle que deux points distincts de D' aient toujours pour associés deux points distincts de D_p".

La partie 2° de l'énoncé du théorème III peut être précisée d'une façon analogue.

7. Pour établir le théorème III, nous nous servirons d'un lemme fort simple:

Lemme. *Soit Σ une hypersphère de centre O, de rayon R, et de frontière Φ. Soit T une transformation définie et continue dans $(\Sigma + \Phi)$, et localement topologique dans Σ. Supposons que la distance d'un point quelconque de Φ à son transformé soit inférieure à un nombre fixe $\varrho < R$. Alors la transformation T conserve l'orientation, et transforme Σ en un domaine* (univalent ou multivalent) *qui contient le point O une fois et une seule.*[10])

---

[10]) Ceci veut dire, d'une façon précise, qu'il existe, dans le domaine $T(\Sigma)$, un point et un seul ayant pour coordonnées celles du point O.

Ce lemme, qui du reste n'est vraisemblablement pas nouveau, sera démontré plus loin comme conséquence d'une proposition plus générale (théorème fondamental) que l'on peut déduire des résultats de M. BROUWER. Admettons provisoirement le lemme précédent, et tirons-en une démonstration du théorème III.

Effectuons d'abord la transformation T^{-1} de D en Δ, puis la transformation T_p de Δ en D_p. Si l'on pose

$$T_p T^{-1} = U_p,$$

la transformation U_p est une transformation localement topologique de D en D_p.

Le théorème III résulte alors du théorème suivant (nous écrivons U au lieu de U_p):

Théorème IV. 1⁰ *Si une transformation localement topologique U déplace chaque point de D d'une distance inférieure à r, cette transformation conserve l'orientation, et le domaine D' est un sous-domaine du domaine $U(D)$;*

2⁰ *Si en outre U déplace chaque point de D d'une distance inférieur à $\frac{r}{2}$, le domaine $U(D')$ est un sous-domaine du domaine D.*

Rappelons que, par hypothèse, D' est un sous-domaine de D, et que tout point de D' est centre d'une hypersphère, de rayon r, intérieure à D.

Démonstration de 1⁰. Soit M un point quelconque de D'; M, étant intérieur à D', est centre d'une hypersphère Σ_M, intérieure à D, de rayon $r+\varepsilon_M$ ($\varepsilon_M > 0$ assez petit). Le lemme, appliqué à cette hypersphère et à la transformation U, montre que U conserve l'orientation, et que le domaine $U(\Sigma_M)$ contient une fois et une seule le point $\overline{M}$ ($\overline{M}$ désignant le point de l'espace qui a les mêmes coordonnées que M). Il existe donc, dans Σ_M, un point P_M et un seul, tel que le point $U(P_M)$ ait les mêmes coordonnées que M; le point P_M est un point bien déterminé du domaine D. Nous associons ainsi à chaque point M de D' un point P_M de D, bien déterminé, tel que M ait les mêmes coordonnées que $U(P_M)$; cette loi de correspondance est continue. Si nous montrons en outre qu'à deux points distincts M_1 et M_2 du domaine D', elle associe toujours deux points distincts P_{M_1} et P_{M_2} du domaine D, alors nous aurons établi la première partie du théorème.

Or, si P_{M_1} et P_{M_2} étaient confondus en un même point de D, alors $U(P_{M_1})$ et $U(P_{M_2})$ auraient les mêmes coordonnées; donc M_1 et M_2 auraient les mêmes coordonnées, tout en étant deux points distincts de D'. Les hypersphères Σ_{M_1} et Σ_{M_2}, tout en étant confondues dans l'espace, seraient deux sous-domaines différents de D; mais c'est impossible, puisque Σ_{M_1} contient P_{M_1}, que Σ_{M_2} contient P_{M_2}, et que P_{M_1} et P_{M_2} sont confondus en un même point de D.

C. Q. F. D.

Démonstration de 2°. Supposons que U déplace chaque point de D d'une distance inférieure à $\frac{r}{2}$. Soit alors M un point quelconque de D'; M est centre d'une hypersphère Σ_M, de rayon $r+\varepsilon_M$, intérieure à D. La transformation U transforme le centre M de Σ_M en un point Q_M intérieur à Σ_M. Ce point Q_M, considéré comme appartenant à l'hypersphère Σ_M elle-même intérieure à D, peut être considéré comme un point bien déterminé du domaine D. Nous avons donc une loi qui, à chaque point M de D', associe un point Q_M de D ayant les mêmes coordonnées que $U(M)$; cette loi définit une correspondance continue; si nous montrons en outre que, à deux points distincts M_1 et M_2 de D', elle associe toujours deux points distincts du domaine D, nous aurons établi la seconde partie du théorème IV.

Or, si Q_{M_1} et Q_{M_2} sont confondus en un même point Q de D, l'hypersphère $\overline{S}$, de centre $\overline{Q}$ et de rayon $\frac{r}{2}+\frac{\varepsilon_{M_1}}{2}$, contient $\overline{M}_1$ et $\overline{M}_2$ (puisque la distance de $\overline{Q}$ à $\overline{M}_1$ ou à $\overline{M}_2$ est au plus égale à $\frac{r}{2}$, d'après l'hypothèse faite sur la transformation U). Donc $\overline{S}$ est intérieure à $\overline{\Sigma}_{M_1}$. Par suite, l'hypersphère S, de centre Q et de rayon $\frac{r}{2}+\frac{\varepsilon_{M_1}}{2}$, est intérieure à D. Le lemme, appliqué à l'hypersphère S et à la transformation U, montre que S contient un point et un seul dont le transformé a les mêmes coordonnées que Q. Mais, d'autre part, S contient M_1 et M_2; il faut donc que M_1 et M_2 soient confondus.

C. Q. F. D.

Corollaire du théorème IV, 2°. *Soient D un domaine univalent, et D' un sous-domaine de D, complètement intérieur à D.*

Soit r un nombre positif tel que tout point de D' soit centre d'une hypersphère, de rayon r, intérieure à D. Si une transformation U, localement topologique dans le domaine D, déplace chaque point de D d'une distance au plus égale à $\frac{r}{2}$, alors le domaine $U(D')$ est univalent.

En effet, d'après la deuxième partie du théorème IV, $U(D')$ est un sous-domaine du domaine D; comme D est univalent, $U(D')$ est univalent.

Il est curieux qu'une pure condition *métrique*, imposée à la transformation U, entraîne pour conséquence que cette transformation soit *univalente* dans le sous-domaine D' du domaine D. De ce point de vue, cette proposition se rattache au Corollaire du théorème II (première partie de ce travail).

Nous allons voir (théorème VI) que le corollaire du théorème IV peut encore être précisé davantage, dans le cas où D est univalent et borné.

8. Supposons désormais que le domaine D soit univalent et borné. La première partie du théorème IV peut alors être précisée comme suit:

Théorème V. *Soit D un domaine univalent et borné, et soit D' un sous-domaine de D, tel que tout point de D' soit centre d'une hypersphère, de rayon r, intérieure à D. Si une transformation U, définie et continue dans D et sur sa frontière, est localement topologique dans D et déplace chaque point de la frontière de D d'une distance au plus égale à un nombre fixe $\varrho < r$, alors U conserve l'orientation, et le domaine $U(D)$*[11]*) contient une fois et une seule chaque point de D', ainsi que chaque point frontière de D'.*

Le théorème V sera démontré plus loin comme conséquence d'un *théorème fondamental* auquel il a déjà été fait allusion. Si on applique le théorème V au cas où D et D' sont deux hypersphères concentriques, on retrouve le *lemme* du paragraphe **7.**

Admettons provisoirement le théorème V. Nous allons en déduire le

Théorème VI. *Soit D un domaine univalent et borné, et soit D' un sous-domaine de D, tel que tout point de D' soit centre*

[11]) Ce domaine n'est pas forcément univalent.

d'une hypersphère, de rayon r, intérieure à D. Soit U une transformation définie et continue dans D et sur sa frontière; supposons que U soit localement topologique dans D et déplace chaque point du domaine $(D-D')$[12] *d'une distance au plus égale à un nombre fixe ϱ. Alors, si $\varrho < \frac{r}{2}$, le domaine $U(D')$ est univalent* (et, bien entendu, complètement intérieur à D).

D é m o n s t r a t i o n. Considérons l'ensemble des points M du domaine D qui jouissent de la propriété suivante: M est intérieur à au moins une hypersphère de rayon $\frac{r}{2}$, dont le centre appartient à D'. Cet ensemble constitue un sous-domaine D_1 (connexe) du domaine D. Il est clair que tout point de D_1 est centre d'une hypersphère, de rayon $\frac{r}{2}$, intérieure à D. Appliquons alors le théorème V au domaine D et à son sous-domaine D_1: on voit que $U(D)$ contient une fois et une seule chaque point de D_1 et chaque point frontière de D_1. Il en résulte que la transformation U^{-1} (inverse de U) est définie et continue dans D_1 et sur sa frontière, et qu'elle est localement topologique dans D_1.

D'autre part, toujours en vertu du théorème V, le domaine $U(D-D')$ contient une fois et une seule chaque point frontière de D_1. Donc la transformation U^{-1} transforme chaque point frontière M de D_1 en un point P de $(D-D')$; on a ainsi

$$M = U(P),$$

et par suite, d'après l'hypothèse de l'énoncé, la distance de M à $P = U^{-1}(M)$ est au plus égale à ϱ.

Appliquons maintenant le théorème V au domaine D_1 et à la transformation U^{-1}. On voit que chaque point de D' appartient une fois et une seule au domaine $U^{-1}(D_1)$; donc U transforme D' en un sous-domaine de D_1. En particulier, le domaine $U(D')$ est *univalent*.

C. Q. F. D.

C o m p l é m e n t a u t h é o r è m e VI. D, D', la transformation U, les nombres r et ϱ ayant la signification indiquée dans

[12]) Cette notation désigne le domaine obtenu en enlevant de D les points qui ont les mêmes coordonnées que les points de D'.

l'énoncé du théorème VI, celui-ci affirme que si $\varrho < \frac{r}{2}$, le domaine $U(D')$ est univalent. Nous allons voir que *la limite supérieure* $\frac{r}{2}$, *ainsi assignée à* ϱ, *ne peut pas être améliorée.* Autrement dit, si petit que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un D, un D', et une transformation U telle que $\varrho < \frac{r}{2} + \varepsilon$, et telle néanmoins que le domaine $U(D')$ soit multivalent.

Bornons-nous, pour simplifier, au cas de deux dimensions. Appelons x et y les coordonnées (rectangulaires); considérons les cercles

$$(D) \qquad x^2 + y^2 \leqq \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2,$$

$$(D') \qquad x^2 + y^2 \leqq \left(1 - \frac{r}{2}\right)^2.$$

On peut évidemment trouver une transformation T, localement topologique, du cercle

$$(C) \qquad x^2 + y^2 \leqq 1,$$

de façon que T déplace chaque point de ce cercle d'une distance $\leqq \varepsilon$, et transforme néanmoins ce cercle en un domaine *multivalent*. Si $\eta > 0$ est assez petit, T transformera aussi le cercle

$$(C') \qquad x^2 + y^2 \leqq (1 - \eta)^2$$

en un domaine multivalent.

D'autre part, on peut trouver une transformation T_1, localement topologique, du cercle D, qui déplace chaque point de $(D - D')$ d'une distance au plus égale à $\frac{r}{2}$, et qui transforme D en C, et D' en C'. La transformation $U = TT_1$ est localement topologique dans D et déplace chaque point de $(D - D')$ d'une distance au plus égale à $\frac{r}{2} + \varepsilon$; néanmoins, le domaine $U(D')$ est multivalent.

C. Q. F. D.

9. Comme nous l'avons déjà dit, le théorème V, ainsi que le lemme du § **7**, est un cas particulier d'une proposition générale que l'on peut déduire des résultats de M. BROUWER,[13]) et que voici (la démonstration en sera donnée au § **10**):

---

[13]) *Math. Annalen*, tomes **70, 71, 72.**

T h é o r è m e f o n d a m e n t a l. *Soient D un domaine, et D_1 un sous-domaine de D, complètement intérieur à D. Soit T une transformation localement topologique de D en un domaine D'; supposons que, en ce qui concerne le domaine $(D-D_1)$,*[14] *la transformation T soit réductible à la transformation identique,* c'est-à-dire que l'on puisse trouver une transformation[15])

$$\overline{M}' = T(M, \lambda)$$

qui dépende d'un paramètre λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$, et qui jouisse des propriétés suivantes: 1⁰ pour chaque valeur de λ, elle fait correspondre à chaque point M du domaine $(D-D_1)$ un point $\overline{M}'$ de l'espace E_n; 2⁰ $\overline{M}'$ est une fonction *continue* par rapport à l'ensemble des variables M et λ; 3⁰ pour $\lambda=0$, $T(M, 0) = \overline{M}$, et, pour $\lambda = 1$, $T(M, 1) = T(M)$.

Soit maintenant $\overline{P}$ un point de E_n, tel que le point $\overline{M}' = T(M, \lambda)$ soit distinct de $\overline{P}$ quels que soient M (intérieur à $D-D_1$) *et λ Alors, si D ne contient pas $\overline{P}$,*[16]) *D' ne contient pas $\overline{P}$; si D contient $\overline{P}$ k fois*[17]) $(k>0)$, *la transformation T conserve l'orientation, et D' contient $\overline{P}$ k fois.*

Indiquons tout de suite comment, du théorème fondamental, on peut déduire le théorème V. Reprenons les notations du théorème V, en écrivant toutefois T au lieu de U, et Δ au lieu de D'. Soit ϱ_1 une quantité comprise entre ϱ et r. La transformation T, étant continue dans D et sur sa frontière, déplace d'une distance inférieure à ϱ_1 chaque point de D assez voisin de la frontière de D. On peut donc trouver un sous-domaine D_1 du domaine D, complètement intérieur à D, tel que: 1⁰ tout point de Δ (et aussi tout point frontière de Δ) soit centre d'une hypersphère, de rayon ϱ_1, intérieure à D_1; 2⁰ tout point de $(D-D_1)$ soit déplacé par T

[14]) Cette notation désigne le domaine obtenu en enlevant de D les points associés aux points de D_1.

[15]) Il n'est pas nécessaire de supposer que cette transformation soit localement topologique pour les valeurs de λ comprises entre 0 et 1.

[16]) C'est-à-dire si aucun point de D n'a pour coordonnées celles du point $\overline{P}$.

[17]) D ne peut contenir $\overline{P}$ qu'un nombre fini de fois, car, d'après les hypothèses, le domaine $(D-D_1)$ ne contient pas le point $\overline{P}$; d'autre part, le domaine D_1 ne peut contenir le point $\overline{P}$ qu'un nombre fini de fois, puisque D_1 est complètement intérieur à D.

d'une distance moindre que ϱ_1. Dans ces conditions, si M est un point quelconque de $(D-D_1)$, le segment de droite qui joint M à $T(M)$ est tout entier extérieur à Δ. Désignons alors par

$$T(M, \lambda) \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

le point de ce segment de droite qui le partage dans le rapport $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$; soit enfin $\overline{P}$ un point (fixe) quelconque de Δ. On voit que toutes les conditions d'application du théorème fondamental sont remplies, ce qui démontre le théorème V, et, plus particulièrement, le lemme du § **7.**

Le théorème fondamental s'applique, en somme, à un domaine D *intérieur à l'espace* E_n, et à une transformation localement topologique T du domaine D en un domaine D' également *intérieur à* E_n. Il est clair que ce théorème resterait vrai si l'on remplaçait l'espace E_n par un domaine Δ qui lui soit homéomorphe. Mais *il pourrait devenir faux si l'on remplaçait E_n par un domaine Δ non homéomorphe à E_n*. Par exemple, prenons pour Δ la surface d'un tore; soient C et C' deux courbes fermées tracées sur ce tore, non homologues à zéro, mais homologues entre elles; si ces courbes n'ont aucun point commun, elles limitent, sur la surface du tore, deux domaines (à 2 dimensions) D et D' sans points communs. Il existe une transformation localement topologique de D en D', qui laisse fixe chaque point frontière de D: le théorème fondamental est évidemment en défaut pour une telle transformation.

10. *Démonstration du théorème fondamental.* Le domaine D ayant été orienté en accord avec l'espace E_n, prenons pour orientation de D' celle qui résulte de l'orientation de D par la transformation T. Suivant que l'orientation de D' est en accord avec celle de E_n ou ne l'est pas, T conserve l'orientation ou ne la conserve pas.

Cela étant, décomposons E_n en hypercubes d'arêtes ε, le point $\overline{P}$ étant intérieur à l'un de ces hypercubes. On peut prendre ε assez petit pour que, M étant un point quelconque de D_1, l'hypercube qui contient M soit tout entier intérieur à D; le domaine D_1 se trouve alors recouvert à l'aide d'un nombre *fini* d'hypercubes tous intérieurs à D (il importe de remarquer qu'un même hypercube de l'espace peut intervenir plusieurs fois, sur des „feuillets" différents du domaine D). Nous partagerons ces hypercubes en tétraèdroïdes ou simplexes, auxquels nous donnerons l'orientation positive, c'est-à-dire, par définition, une orientation en accord avec celle choisie pour l'espace E_n. Étant donnée une telle décomposition (δ) en simplexes, l'ensemble de tous les simplexes de (δ) constitue un domaine Δ, limité par des faces que nous appellerons les *faces frontières* de la décomposition (δ). Les sommets des faces frontières appartiennent au domaine $(D-D_1)$.

À la décomposition (δ) correspond une *approximation simpliciale* de la transformation T; pour la définir, on fait correspondre à chaque simplexe S de (δ), le simplexe S' ayant pour sommets les transformés des sommets de S par la transformation T. Parmi ces nouveaux simplexes, comptons ceux qui contiennent $\overline{P}$;[18]) soit p le nombre de ceux dont l'orientation est positive, et q le nombre de ceux dont l'orientation est négative. *Le nombre* $p-q$ *est indépendant de l'approximation simpliciale choisie, pourvu que* ε *soit assez petit;* de plus, *ce nombre est égal à* $\eta k'$, k' désignant le nombre de fois que le domaine D' contient $\overline{P}$, et η étant égal à $+1$ si T conserve l'orientation, à -1 si T change l'orientation.[19])

D'autre part, *l'intégrale de* KRONECKER, étendue à la frontière orientée d'un simplexe orienté de E_n, est égale à zéro si $\overline{P}$ est extérieur à ce simplexe, à $+1$ si $\overline{P}$ est intérieur et si l'orientation du simplexe est positive, à -1 si $\overline{P}$ est intérieur et si l'orien-

[18]) On peut toujours s'arranger pour que $\overline{P}$ ne tombe sur la frontière d'aucun simplexe.

[19]) En effet, si D' contient k' fois le point $\overline{P}$, le domaine D_1 contient k' points $A_1, \ldots, A_{k'}$ qui sont transformés par T en $\overline{P}$. Chaque point A_i ($i = 1, \ldots, k'$) est intérieur à un petit domaine univalent V_i, intérieur à D_1, et dont le transformé par T est univalent. Cela étant, les simplexes de la décomposition (δ) se partagent en deux catégories: ceux qui sont intérieurs à l'un au moins des domaines V_i, et les autres. Dans l'approximation simpliciale de la transformation T, les transformés des simplexes de la deuxième catégorie ne contiennent pas $\overline{P}$; quant aux transformés des simplexes intérieurs au domaine V_i, la différence entre le nombre de ceux qui contiennent $\overline{P}$ et sont orientés positivement, et le nombre de ceux qui contiennent $\overline{P}$ et sont orientés négativement, est égale à ± 1 ($+1$ si T conserve l'orientation, -1 dans le cas contraire). Du moins, tout cela est vrai dès que ε est assez petit, comme l'a montré M. BROUWER.

tation est négative. Donc, d'une part l'entier k sera égal à l'intégrale de KRONECKER étendue aux faces frontières de la décomposition (δ); d'autre part, $\eta k'$ sera égal à l'intégrale de KRONECKER étendue aux faces homologues dans l'approximation simpliciale. Cela va nous permettre de conclure que $k=\eta k'$, ce qui démontrera le théorème; en effet, de cette relation on déduira: 1° si $k=0$, que $k'=0$; 2° si $k>0$, que l'on a $\eta=+1$ et $k'=k$.

Pour montrer $k=\eta k'$, nous allons faire intervenir la transformation

$$\overline{M}'=T(M,\lambda)$$

de l'énoncé. Aux sommets des faces frontières de la décomposition (δ), elle fait correspondre des points, qui varient avec λ, et qui, d'après les hypothèses de l'énoncé, restent distants du point P d'une quantité supérieure à un nombre positif fixe. Cela étant, à chaque face frontière F de (δ) (une telle face est un simplexe à $n-1$ dimensions) et à chaque valeur de λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ nous ferons correspondre le simplexe à $n-1$ dimensions ayant pour sommets les transformés, par $\overline{M}'=T(M,\lambda)$, des sommets de la face F. À l'ensemble des faces frontières de (δ) correspondra ainsi, pour chaque valeur de λ, une variété fermée orientée (à $n-1$ dimensions) qui se déformera de façon continue sans jamais passer par $\overline{P}$ (du moins si ε a été choisi assez petit). L'intégrale de KRONECKER, étendue à cette variété, sera une fonction continue de λ; comme elle est égale à un nombre entier, sa valeur est indépendante de λ, et l'on a par suite

$$k=\eta k'.$$

C. Q. F. D.

(Reçu le 18 mai 1933.)

Transformatio formarum quadraticarum Weierstrassiana.

Auctore LUDOVICO GROSSCHMID Budapestinensi.

SUMMA

Transformatio Weierstrassiana quaestionem notam reductionis formae cuiuslibet quadraticae in summam solis variabilium quadratis constantem solvit, et quidem tali modo, ut transformatio hanc reductionem perficiens etiam seriem quandam parametrorum ad libitum electarum involvat.[1]) Itaque transformatio Weierstrassiana finitima transformationi generalissimae ab Ill$^{\text{mo}}$. DARBOUX detectae est habenda; satis enim constat transformationem a DARBOUX

[1]) De rebus in hac commentatione pertractatis vide et cfr. K. WEIERSTRASS' *Math. Werke*, VII. Band: Vorlesungen über Variationsrechnung, bearb. von RUDOLF ROTHE (Leipzig, 1927); Zweites Kapitel: Hülfssätze aus der Theorie der quadratischen Formen. Etc., p. 11–20. In hoc opere considerationes reperiuntur, quibus disquisitiones subsequentes, — in particulis vero ulterius progredientes, — innituntur.

ortam iam ab origine quam maximum numerum parametrorum introducere.[2])

Per hanc occasionem animadvertimus, quod in constructione reductionis cognitae Kroneckerianae „alternantis" *vertices* quidam speciales formarum coniunctarum dominantur,[3]) quare methodus haec alternans et *verticem-quaerens* nominari potest, quae itaque contrarium offert rationis Weierstrassianae nunc discernendae, cuius quidem quantitates fundamentales — scilicet illae proxime commemoratae parametri — vertices formarum in processu reductionis apparentium repraesentare nequeunt; quamobrem transformatio Weierstrassiana methodum *verticem-fugientem* constituit.

CAPUT PRIMUM.

Structura generalis reductionis Weierstrassianae.

Proposita forma quadratica generali

$$(1)\qquad f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sum_{i,k}^{n} a_{ik} x_i x_k \not\equiv 0, \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

sint numeri

$$(e)\qquad e_1, e_2, \ldots, e_n$$

ita sumpti, ut

$$(2)\qquad f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \gamma \neq 0$$

evadat; tales numeros reperiri posse, posito $f \not\equiv 0$, dubium non est. Ulterius certum est

$$E = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

cadere, quippe quum aliter et $\gamma = 0$ esset; punctum E secundum (2) vertex esse certe nequit.[4]) Argumentis adeo appositis

$$(3)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

[2]) G. Darboux, Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques, *Journal de math. pures et appliquées,* (2) **19** (1874), pp. 347—396. — Cfr. et infra sub adnot. [19]).

[3]) Vide ex. gr. M. Bôcher, *Introduction to Higher Algebra* (New-York, 1907), Section 49.

[4]) Complexus $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, n valoribus $a_1, \ldots, a_n$ conflatus breviter *punctum* dicitur, duo huiusmodi puncta aequalia dicuntur, i. e.

$$A = (a_1, \ldots, a_n) = B = (b_1, \ldots, b_n),$$

si $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

scribentes, videlicet

$$(4)\qquad i\sum_1^n e_i u_i(e_1,\ldots,e_n)=f(e_1,\ldots,e_n)=\gamma$$

esse, et quum $\gamma \neq 0$, unusquisque valorum

$$(5)\qquad c_i=u_i(e_1,e_2,\ldots,e_n) \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

non evanescet, nec, ratione (4), unumquodque ex productis

$$e_i c_i = e_i u_i(e_1,\ldots,e_n).$$

Et quidem ponamus[5])

$$(6)\qquad e_1 u_1(e_1,\ldots,e_n)=e_1 c_1 \neq 0,$$

unde patet etiam

$$(6')\qquad e_1\neq 0,\ c_1\neq 0$$

fore.[6])

Praeterea facile probatur aequationem

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^n y_i u_i(x_1,\ldots,x_n)\equiv \sum_{i=1}^n x_i u_i(y_1,\ldots,y_n)$$

pro unoquoque systemate valorum x et y locum habere; symmetrica enim est matrix $(f)=(a_{ik})$.[7])

Quibus omnibus ita praeparatis aspiciamus deinde identitatem cognitam[8]):

$$\begin{aligned}(\mathrm{I})\qquad & f(x_1+\lambda e_1, x_2+\lambda e_2,\ldots,x_n+\lambda e_n)\equiv f(x_1,\ldots,x_n)+\\ &\quad +2\lambda\,.\sum_{i,k}^n a_{ik}x_i e_k+\lambda^2.f(e_1,\ldots,e_n)\equiv\\ &\equiv f(x_1,\ldots,x_n)+2\lambda\,.\sum_i^n u_i(e_1,\ldots,e_n)\,.\,x_i+\lambda^2\gamma\equiv\\ &\equiv f(x_1,\ldots,x_n)+2\lambda\,.\sum_i^n c_i x_i+\lambda^2\gamma;\end{aligned}$$

ibidem iam formulis (2) et (5) usi sumus. Et si hic scribatur

$$(8)\qquad y_1=\sum_i^n c_i x_i = c_1 x_1+\ldots+c_n x_n,$$

---

5) Propter (6) sententia generalis ne minimum laeditur, quia si initio fuisset $e_i c_i \neq 0$, transpositio $(1, i)$ hunc casum ad (6) reduceret.

6) Inaequalitate $c_1 \neq 0$ infra non utemur; at saltem cognitionem iuvat et huic condicioni satisfieri posse.

7) Expressio bilinearis (7) vulgo *forma polaris* ad f pertinens dici solet.

8) BÔCHER: 3), p. 130, (4).

secundum (I) oritur

$$f(x_1+\lambda e_1,\ldots,x_n+\lambda e_n)\equiv\lambda^2\gamma+2\lambda y_1+f(x_1,\ldots,x_n),$$

aut quod idem est

$$f(x_1+\lambda e_1,\ldots)\equiv\frac{1}{\gamma}(\lambda\gamma+y_1)^2+f(x_1,\ldots)-\frac{y_1^2}{\gamma};$$

hinc autem, designante

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{f(e_1,\ldots,e_n)}=g(\neq 0),\text{[9]} \tag{9}$$

habebimus

$$f(x_1,\ldots,x_n)\equiv g y_1^2+f(x_1+\lambda e_1,\ldots)-g(\lambda\gamma+y_1)^2.$$

Deliberantes deinde ex (4), (5) et (8)

$$\lambda\gamma+y_1=\lambda\sum_i^n c_i e_i+\sum_i^n c_i x_i=\sum_i^n c_i(x_i+\lambda e_i)$$

fluere, aequationem antecedentem hunc aspectum induere perspicimus:

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv g y_1^2+f(x_1+\lambda e_1,\,x_2+\lambda e_2,\ldots,x_n+\lambda e_n)-\\ -g\left(\sum_i^n c_i(x_i+\lambda e_i)\right)^2;\end{aligned} \tag{10}$$

hinc tandem *passus generator elementaris* reductionis Weierstrassianae prorsus accipitur. Si enim parametrus λ designata formulae (10) aequatione

$$\lambda=-\frac{x_1}{e_1} \tag{11}$$

determinetur, cui dispositioni, quia $e_1\neq 0$, nihil obstat, formula (10) in aequationem

$$\begin{aligned}f(x_1,\ldots,x_n)\equiv g y_1^2+f\left(0,\,x_2-\frac{e_2}{e_1}x_1,\ldots,x_n-\frac{e_n}{e_1}x_1\right)-\\ -g\left(\sum_{i=2}^n c_i\left(x_i-\frac{e_i}{e_1}x_2\right)\right)^2\end{aligned} \tag{W}$$

mutabit; haec autem iam istam transformationem genetricem exhibet. — Stabilita aequatione identica (W) visamus substitutionem linearem

---

[9]) Ex (9) statim sequitur:

$$g=\frac{\gamma}{\gamma^2}=f\left(\frac{e_1}{\gamma},\frac{e_2}{\gamma},\ldots,\frac{e_n}{\gamma}\right). \tag{2'}$$

$$(12)\qquad \begin{cases} y_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n, \\ y_2 = -\frac{e_2}{e_1}x_1 + x_2, \\ y_3 = -\frac{e_3}{e_1}x_1 \qquad + x_3, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n = -\frac{e_n}{e_1}x_1 \qquad\qquad + x_n, \end{cases}$$

cuius matrix, scilicet

$$X = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ -\frac{e_2}{e_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{e_3}{e_1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{e_n}{e_1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

certo non est singularis, quoniam, uti sine negotio invenitur:

$$(13)\qquad \text{det. } X = c_1 + \frac{1}{e_1}(e_2c_2 + e_3c_3 + \dots + e_nc_n) = \frac{\gamma}{e_1} \neq 0.$$

Ceterum generaliter habemus:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & \dots & m \\ \beta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = a - b\beta - c\gamma - \dots - m\mu;$$

quae propositio facillime probatur subtrahendo elementa 2., 3., etc. lineae per b, per c, etc. ordinatim multiplicata elementis primae lineae respondentibus.

Itaque substitutio ad (12) *inversa*, ponatur

$$(14)\qquad [x] = Y[y],$$

formam f secundum (W) in formam

$$(15)\qquad \bar{f}(y_1, \dots, y_n) \equiv gy_1^2 + f(0, y_2, \dots, y_n) - g\left(\sum_{i=2}^{n} c_iy_i\right)^2$$

transfert; et determinans non evanescens

$$(14')\qquad \text{det. } Y = \frac{1}{\text{det. } X} = \frac{e_1}{\gamma} = ge_1$$

habet. Hoc modo igitur terminus quadratus gy_1^2 „abscinditur", forma vero „residua", scilicet

$$(16)\qquad \begin{aligned}\varphi(y_2,\ldots,y_n) &\equiv f(0,y_2,\ldots,y_n)-g\left(\sum_{i=2}^{n} c_i y_i\right)^2 \equiv \\ &\equiv \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n} \alpha_{ik} y_i y_k,\end{aligned}$$

variabilem y_1 iam nequaquam continebit; hic autem

$$(17)\qquad \alpha_{ik}=a_{ik}-g c_i c_k \qquad (i,k=2,3,\ldots,n)$$

invenitur.

Antequam porro progrederemur observari convenit, „ordine"[10]) formae f, id est $r(f)=r$ accepto, ordinem formae residuae

$$(17')\qquad r(\varphi)=r-1$$

fore. Nullo quidem negotio demonstrabimus in matrice n^{ti} gradus et ordinis r, aspectum

$$(18)\qquad \mathfrak{a}=\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_k & \\ \hline & & & \mathfrak{b} \end{array}\right)$$

habente, ubi enim $a_1 a_2 \ldots a_k \neq 0$ et $\mathfrak{b}$ aliquam matricem $(n-k)^{\text{ti}}$ gradus esse supponitur, dum campi vacui solum elementis „0" compleantur, ordinem matricis $\mathfrak{b}$

$$(18')\qquad r(\mathfrak{b})=r-k\,^{11})$$

fore.

Supponamus quidem 1°: $\varrho=r(\mathfrak{b})>r-k$; si deinde determinans quoddam ϱ^{ti} gradus, puta b_ϱ, sub matrice $\mathfrak{b}$ contentum at $\neq 0$ eligatur,[12]) obvium est determinans $(\varrho+k)^{\text{ti}}$ gradus

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_k & \\ \hline & & & b_\varrho \end{array}\right| = a_1\ldots a_k b_\varrho$$

[10]) Hic et infra verbo „*ordo*" in eadem sententia utimur, quam ex. gr. lingua Germanica voce hodierna rite velut „*Rang* einer Matrix, resp. einer Form" designaret.

[11]) Liquet $r \geqq k$ esse. — Coniunctio ordinum supra exhibita in theoria matricum *dissolubilium* amplificationem respondentem nanciscitur; vide ex. gr. P. MUTH, *Elementartheiler* (Leipzig, 1899), art. 22.

[12]) Praesente casu hoc perfici posse constat.

sub matrice $\mathfrak{a}$ contentum et non evanescens fore, quod autem suppositioni $\varrho+k>r$ opponeretur.

Si ex contrario 2^0: $\varrho=r(\mathfrak{b})<r-k$ fieri posset, ϱ etiam ordinem matricis cum $n-k$ lineis ultimis matricis $\mathfrak{a}$ formatae — et typum $(n-k)\times n$ habentis — significaret, quocirca omnia subdeterminantia r^{ti} gradus matricis $\mathfrak{a}$ — observando in his elementa linearum numero $\varrho+1$ aut plurium certe ex illis $n-k$ lineis ultimis sumpta esse — secundum notum theorema Laplaceianum evanescerent; c. hyp. etc. Per haec formula (18') et specialiter, respectu $g \neq 0$, etiam (17') verificabantur.[13])

Et nunc ad thema principale, unde digressi sumus, revertentes, fiat adhuc

$$r(\varphi)=r-1>0$$

et ideo

$$\varphi \not\equiv 0;$$

tunc manifestum est formam quadraticam φ — iam solum $n-1$ variabiles involventem[14]) — processui, omni ratione illi simili, quo supra per occasionem formae nativae f usi sumus, subicere posse. Hac via inter variabiles $y_2,\ldots,y_n$[15]) et alias recentiores $z_2,\ldots,z_n$ substitutionem regularem typi ad (12) *inversae*

$$[y_2,\ldots,y_n]=Z_1[z_2,\ldots,z_n] \tag{19}$$

nanciscemur, quae quidem formam φ in formam

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(z_2,\ldots,z_n)&\equiv g' z_2^2+\varphi(0,z_3,\ldots,z_n)-g'\left(\sum_{i=3}^{n} c_i' z_i\right)^2\equiv\\ &\equiv g' z_2^2+\psi(z_3,\ldots,z_n)\end{aligned} \tag{20}$$

reducet.

Hic, postquam numeris idoneis

$$e_2',\ldots,e_n'$$

iam

$$\varphi(e_2',\ldots,e_n') \neq 0 \tag{20'}$$

et una $e_2' \neq 0$ adepti sumus,

---

13) Apparet enim $r(\bar{f})=r(f)=r$ fieri.

14) Fieri vero potest formam φ *de facto* pauciorem variabilium numerum quam $n-1$ continere; sed hoc eventum sequentia minime attinget.

15) Hoc loco signa $y_2,\ldots,y_n$ iam condicioni post transignationem antecedentem forte necessariam respondent; si transignatio facta sit, hanc in ultimis $n-1$ lineis substitutionis (12) pro futuris sine mora exsequimur.

$$g' = \frac{1}{\varphi(e_2', \ldots, e_n')} \neq 0$$

fiet; insuper posito

$$c_i' = \alpha_{i2} e_2' + \ldots + \alpha_{in} e_n', \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

erit

$$z_2 = c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n,$$

et tandem:

$$z_3 = -\frac{e_3'}{e_2'} y_2 + y_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_n = -\frac{e_n'}{e_2'} y_2 \qquad + y_n.$$

Praeterea habemus observationis antecedentis memores:

$$r(\psi) = r(\overline{\varphi}) - 1 = r(\varphi) - 1 = r - 2.$$

Completo deinde systemate (19) aequatione

$$y_1 = z_1,$$

transformationem linearem n variabilium regularem

(21) $$[y] = Z[z]$$

nanciscimur, cuius composita cum transformatione (14), id est

(22) $$[x] = YZ[z],$$

formam $f(x_1, \ldots, x_n)$ directe in formam

(23) $$\overline{\overline{f}}(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv g z_1^2 + g' z_2^2 + \psi(z_3, \ldots, z_n)$$

mutabit. Simili modo, ut in tractatibus forma f coniunctis invenitur

$$\text{det. } Z = \text{det. } Z_1 = g' e_2',$$

et ideo, respectu (14'),

(22') $$\text{det. } (YZ) = \text{det. } Y . \text{det. } Z = g g' e_1 e_2'$$

fore.

Per haec revera via procedendi iam statis indicatur. Si enim

$$r(\psi) = r - 2 = 0, \text{ i. e. } r = 2,$$

quocirca $\psi \equiv 0$ sit, partem dexteram formulae (23) iam transformatam in summam quadratorum formae f suppeditare; si quidem contra adhuc

$$r(\psi) > 0$$

esset, formam ψ, quae tunc $n-2$ variabiles solum contineret,[16]) secundum praescripta supra stabilita ulterius reducere licebit; etc. etc. Inde perspicitur post r passus formam tandem χ residuam $n-r$ variabilium identice evanescentem nancisci; quo facto repraesentatio formae f sicut summa terminis quadratis solum conflata perfecta erit.[17]) Substitutiones denique passus intervenientes exhibentes connectendo, videmus successionem transformationum genetricum typi (W) substitutionem linearem et regularem

$$(24) \qquad [x] = H[\eta]$$

praebere, qua forma quadratica f ordinis r in summam quadratorum

$$(25) \qquad fH \equiv g_1\eta_1^2 + g_2\eta_2^2 + \ldots + g_r\eta_r^2$$

transfertur[18]); hic quidem patet

$$(25') \qquad g_1 g_2 \ldots g_r \neq 0$$

fieri.

Evolutiones praecedentes reductionem Weierstrassianam in summam quadratorum constituunt.

*

Observationes ad modum pendendi matricis H a parametris e pertinentes in CAPITE TERTIO colligemus, nunc quidem praedicare solum volumus substitutionem (24) per varietatem parametrorum e totum examen transformationum typum (25) suppeditantium cohaerere.[19]) Ceterum videmus reductionem Weierstrassianam nec in ulla particula *alternantem* esse, sed magis per unumquemque passum, uniformi semper processu, terminum quendam *quadratum* recentem producere.

---

[16]) Numerum variabilium semper sicut finem superiorem huius numeri intellegendo.

[17]) Visum est formam residuam k^{tam} ordinem $r-k$ habere, quocirca manifestum est condicionem identice evanescendi ante passum r^{tum} non apparere; post autem passum r^{tum} forma residua, ordinem $r-r=0$ ostendens, $\equiv 0$ evadet.

[18]) fH significat substitutionem (24) in forma $f(x_1, \ldots, x_n)$ exsecutam esse.

[19]) In capite subsequenti *omnes* reductiones non-singulares formae f in typum (26) per transformationes Weierstrassianas — casu quidem formae non-singularis — perfici posse videbimus. Patet igitur methodum Weierstrassianam pro hoc casu *generalitatem* processui a DARBOUX orto *aequalem* repraesentare.

Posito tandem $r = r(f) = n$, formula (25) habitum

(26) $$fH \equiv g_1 \eta_1^2 + \ldots + g_n \eta_n^2$$

induere videtur, ubi certo

(26') $$\det. (fH) = g_1 g_2 \ldots g_n = |H|^2 . \det. f \neq 0$$

fore.

CAPUT SECUNDUM.

Transformationes Weierstrassianae omnes reductiones formae in summam quadratorum complectuntur.

Pro insigni complemento explanationum antecedentium et quadam ratione sicut conversio earum est habendum

Theorema I. *Si forma $f(x_1, \ldots, x_n)$ non-singularis substitutione quadam regulari*

(24^{bis}) $$[x] = H[\eta]$$

in formam

(26^{bis}) $$fH \equiv g_1 \eta_1^2 + g_2 \eta_2^2 + \ldots + g_n \eta_n^2$$

reducitur, ubi itaque

(26'') $$g_1 g_2 \ldots g_n \neq 0;$$

matrix H matrice W transformationis cuiusdam Weierstrassianae — ad formam f pertinenti — permutari potest.[20])

Demonstratio.[21]) Substitutio ad (24^{bis}) inversa systema formarum linearium, variabilium $x_1, x_2, \ldots, x_n$ constituit, puta

(η) $$\begin{cases} \eta_1 = \eta_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \eta_2 = \eta_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n = \eta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

cuius determinans:

$$\frac{1}{\det. H} \neq 0.$$

Introductio autem harum formarum (η) in partem dextram relationis (26^{bis}) evidenter reddet formam $f(x_1, \ldots, x_n)$; unde quidem oritur

---

20) Quapropter $H = \Theta W$ statuere licet, ubi enim Θ matricem transformationis cuiusdam *automorphae* formae f significat.

21) Cfr. WEIERSTRASS: 1), pp. 15–16.

$$(27)\quad \begin{aligned} f_1(x_1,\ldots,x_n) &\equiv f(x_1,\ldots,x_n) - g_1(\eta_1(x_1,\ldots,x_n))^2 \equiv \\ &\equiv g_2(\eta_2(x_1,\ldots,x_n))^2 + \ldots + g_n(\eta_n(x_1,\ldots,x_n))^2, \end{aligned}$$

et porro, adhibente transformatione (24^{bis}) formae f_1, forma

$$(28)\qquad f_1 H \equiv g_2\eta_2^2 + \ldots + g_n\eta_n^2$$

iam solum $n-1$ variabiles η continens. Itaque perspicimus formam f_1 certo *singularem* evadere et ideo valores

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$$

non omnes evanescentes identitatique

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\cdot\mu_i \equiv 0$$

satisfacientes reperiri posse.[22])

Licet igitur relationem scribere:

$$(29)\quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\cdot\mu_i &\equiv \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\mu_i - g_1\eta_1\frac{\partial \eta_1}{\partial x_i}\mu_i\right) \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n}\mu_i u_i - g_1\eta_1\cdot\sum_{i=1}^{n} c_i\mu_i \equiv 0, \end{aligned}$$

ubi quidem numeri

$$c_i \equiv \frac{\partial\eta_1}{\partial x_i}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

coefficientibus formae linearis

$$(30)\qquad \eta_1(x_1,\ldots,x_n) \equiv c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

determinantur.

Ex (29) patet

$$(31)\qquad C = \sum_{i=1}^{n} c_i\mu_i \neq 0$$

fore, quia aliter iterum ex (29)

$$\sum_i \mu_i u_i \equiv 0$$

flueret, quod autem — non omnibus μ evanescentibus — suppositae *regularitati* formae f contradiceret. Ex (31) deinde obvium est non omnes c evanescere[23]) et proinde $\eta_1 \not\equiv 0$ esse; $g_1 \neq 0$

---

[22]) Secundum (28) et (26″) fit $r(f_1) = n-1$, quamobrem lineae matricis n^{ti} gradus formae f_1 inter se *lineari modo dependere* debent.

[23]) Haec condicio etiam e regularitate matricis H extemplo concluditur.

tandem (26″) confirmat. Itaque sequitur ratione (29):

(32) $$\eta_1 \equiv c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \equiv \sum_i \frac{\mu_i}{g_1 C} \cdot u_i;$$

si autem systema lineare

$$a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n \equiv u_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

pro litteris x solvatur, quod posito def. $f \neq 0$ unica ratione perfici potest, systema aliud

$$x_i \equiv \alpha_{1i} u_1 + \alpha_{2i} u_2 + \ldots + \alpha_{ni} u_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

accipitur, in quo quidem, si per characteres $A_{ik} = A_{ki}$ *cofactores* elementorum $a_{ik} = a_{ki}$ in determinante symmetrico $|f|$ designentur, aequationes

$$\alpha_{ki} = \frac{A_{ki}}{|f|} = \frac{A_{ik}}{|f|} = \alpha_{ik}$$

locum habent. Idcirco

(33) $$\eta_1 \equiv c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \equiv e_1 u_1 + \ldots + e_n u_n,$$

ubi scriptum est:

(33′) $$e_i = \alpha_{i1} c_1 + \alpha_{i2} c_2 + \ldots + \alpha_{in} c_n = \\ = \frac{1}{|f|} \cdot (A_{i1} c_1 + A_{i2} c_2 + \ldots + A_{in} c_n).$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

In transitu inici potest, quod ope formarum linearium

(34) $$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} \equiv \frac{1}{|f|} (A_{i1} x_1 + \ldots + A_{in} x_n) \equiv U_i(x_1, \ldots, x_n),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

ad *formam reciprocam*

$$F \equiv \sum_{i,k} \frac{A_{ik}}{|f|} x_i x_k$$

formae f pertinentium, ex (33′) relationes

(33″) $$e_i = U_i(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

nascuntur.

Comperimus deinde secundum (33), respectu (7):

$$\eta_1 \equiv \sum_i c_i x_i \equiv \sum_i e_i u_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sum_i u_i(e_1, \ldots, e_n) \cdot x_i,$$

et hinc

$$c_i = u_i(e_1, \ldots, e_n), \tag{35}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

quod ceterum et ex (33′) aut (33″) manifestum est. Si igitur, pro variabilibus x identice

$$\eta_1 \equiv \sum_i c_i x_i \equiv \sum_i \alpha_i u_i \equiv \sum_i u_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \,.\, x_i$$

supponatur, sive

$$u_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = c_i$$

sumantur, etiam aequationes

$$\alpha_i = e_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

locum habere invenientur. Systema enim lineare

$$u_i(x_1, \ldots, x_n) = c_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

respectu $|f| \neq 0$, unicam tantum solutionem pro incognitis x permittit, et quidem talem suppeditat complexus $e_1, e_2, \ldots, e_n$ in (33′) determinatus, ratione aequationum (35). Videlicet itaque ope (32) relationes

$$\frac{\mu_i}{g_1 C} = e_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

subsistere, unde tandem per (31), adiumento (35) sequitur:

$$\frac{1}{g_1 C} \sum_i \mu_i c_i = \frac{1}{g_1} = \sum_i e_i c_i = \sum_i e_i u_i(e_1, \ldots, e_n) = \tag{36}$$
$$= f(e_1, e_2, \ldots, e_n) \neq 0.$$

Enuntiare denique possumus: elementa $e_1, e_2, \ldots, e_n$, sub (33′) coefficientibus $c_1, c_2, \ldots, c_n$ formae η_1 in summa quadratorum (26^{bis}) determinata, talia esse, ut quaevis iis innisa transformatio Weierstrassiana genetrix elementaris[24]) terminum quadtratum $g_1 \eta_1^2$ forma f abscindit.

Aut brevius: ad terminum $g_1 \eta_1^2$, per (24^{bis}) ab exordio datum,[25]) transformatio genetrix typi Weierstrassiani pertinet, qua ille generatur.

Et revera — collectis supra repertis — tota condicio sequentibus formulis comprehendi potest:

---

[24]) Notum est quidem unumquodque e_i, quod $\neq 0$, ad constructionem cuiusdam passus generatoris adeptum esse.

[25]) Idem vero valet pro quovis termino $g_k \eta_k^2$ summae (24^{bis}).

1⁰) data sunt $g_1 \neq 0$ et forma linearis

$$\eta_1 \equiv c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \not\equiv 0$$ [26];

2⁰) per (33') — aut si velis per (33'') — numeri certi

$$(e) \qquad e_1, e_2, \ldots, e_n$$

determinantur, quibuscum:

3⁰) secundum (35):

$$(35) \qquad c_i \equiv u_i(e_1, \ldots, e_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et tandem

4⁰) secundum (36):

$$(36^{bis}) \qquad f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \frac{1}{g_1} \neq 0$$

evadent.

Perspicitur enim ratione promulgationum CAPITIS PRIMI formulas nunc conscriptas condicionem constituere, per quam transformatio quaedam genetrix Weierstrassiana elementis $e_1, e_2, \ldots, e_n$ superstructa atque formae f adhibita terminum $g_1 \eta_1^2$ generabit.

Demonstratio vero generalis Theorematis I. per hactenus evoluta nondum est perfecta; perscrutari proinde debemus, quomodo deinde termini ceteri quadrati $g_2 \eta_2^2, \ldots$, itemque semper methodo Weierstrassiana, alter post alterum abscindi possent?

Construamus hanc ob rem „anulum" quendam transformationis Weierstrassianae ad elementa (e) pertinentem. Tam (35) quam (36^{bis}) certe confirmat unum minimum ex numeris (e) non evanescere; puta iam $e_1 \neq 0$,[27] tunc substitutio ad substitutionem

$$\begin{aligned} \eta_1 &= c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n, \\ y_2 &= -\frac{e_2}{e_1} x_1 + x_2 \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n &= -\frac{e_n}{e_1} x_1 \quad + x_n, \end{aligned}$$

aut curte

$$(37) \qquad [\eta_1, y_2, \ldots, y_n] = X[x],$$

[26]) Haec inaequalitas etiam *a priori* nota est, quia, sicut hunc nexum iam antea (adnot. [23])) indicavimus, matrices H et ideo H^{-1} regulares supponuntur.

[27]) Permutatione simplici indicum capi potest.

secundum praescripta formulae (12) CAPITIS PRIMI constructam, *reciproca*,[28]) formam $f(x_1, \ldots, x_n)$ in formam

(37′) $$\bar{f}(\eta_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv g_1\eta_1^2 + \varphi(y_2, \ldots, y_n)$$

transmutabit. Itaque respectu (26^{bis}):

(38) $$\varphi(y_2, \ldots, y_n) \equiv g_2\eta_2^2 + \ldots + g_n\eta_n^2,$$

identitatem quidem *pro variabilibus* x intellegendo, postquam valores y secundum (37), valores η autem secundum (η) per variabiles x expressi sunt. Si igitur in aequatione (38) variabiles x secundum (24^{bis}) transformantur, pars dextera eius intacta manebit,[29]) sinistra contra per substitutionem

(39) $$[\eta_1, y_2, \ldots, y_n] = XH[\eta],$$

ex (37) et (24^{bis}) compositam, in formam quandam

$$\bar{\varphi}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$$

transmutabit; quapropter, pro variabilibus η identice

$$\bar{\varphi}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \equiv g_2\eta_2^2 + \ldots + g_n\eta_n^2$$

evadet.

Inde sequitur, — ratione independentiae variabilium $\eta_1, \ldots, \eta_n$, — omnes coefficientes formae $\bar{\varphi}$ ad terminos typi $\eta_1\eta_\alpha$ ($\alpha = 1, \ldots, n$) pertinentes evanescere; quocirca autem scribi potest:

(40) $$\bar{\varphi}(0, \eta_2, \ldots, \eta_n) \equiv g_2\eta_2^2 + \ldots + g_n\eta_n^2.$$

Manifestum est praeterea eandem formam $\bar{\varphi}(0, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ nancisci via substitutionis $\eta_1 = 0$ *a limine*, id est expressiones variabilium $y_2, \ldots, y_n$ ex (39) sumptas — respectu $\eta_1 = 0$ — in formam $\varphi(y_2, \ldots, y_n)$ introducendo. Hic processus autem evidenter transformationem formae $\varphi(y_2, \ldots, y_n)$ per substitutionem $n-1$ variabilium

(41) $$[y_2, \ldots, y_n] = B[\eta_2, \ldots, \eta_n]$$

significat, in qua charactere B matricem $(n-1)^{\text{mi}}$ gradus, ex XH ommissione primae lineae atque primae columnae remanentem nuncupavimus. Superest persuasio de regularitate matricis B. Et

---

28) Secundum (13) resp. (36): $\det. X = \dfrac{1}{g_1 e_1} \neq 0$.

29) Patet enim

$$[\eta] = H^{-1}[x] = H^{-1}H[\eta] = [\eta]$$

esse.

revera protinus perspicitur matricem XH aspectum

$$XH=\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \alpha_2 & & & \\ \vdots & & B & \\ \alpha_n & & & \end{array}\right)$$

induere, quia enim substitutio (39) variabilem η_1 certe immutatam conservat; habemus itaque propter regularitatem matricis XH:

$$\text{det. } XH = \text{det. } B \neq 0;$$

q. e. d.

Ex his omnibus concludimus: substitutio Weierstrassiana

$$[x] = W[\eta_1, y_2, \dots, y_n],$$

ubi quidem $W = X^{-1}$, formam f in formam (37′) transfert, in qua forma residua

$$\varphi(y_2, \dots, y_n),$$

secundum (17′) ordinis $n-1$, talis est, ut per substitutionem

(41) $$[y_2, \dots, y_n] = B[\eta_2, \dots, \eta_n]$$

in summam quadratorum

$$\bar{\varphi} \equiv \varphi B \equiv g_2\eta_2^2 + \dots + g_n\eta_n^2$$

transformatur. Itaque substitutio (41) forma φ regulari ex toto eundem nexum praebet, quem supra inter (24[bis]) et formam f repperimus. Denuo habebitur ergo — antea stabilitis quidem utendo — passus Weierstrassianus, quo terminus $g_2\eta_2^2$ forma φ abscinditur; etc., etc. — Compositione horum passuum transformatio tandem Weierstrassiana

(42) $$[x] = W[\eta]$$

accipitur, per quam

(43) $$fW \equiv \sum_{i=1}^{n} g_i\eta_i^2$$

exhibetur.

Hac via Theorema I. omni ex parte demonstratum est.

*

Hoc theorema lucis plenioris gratia etiam ita concipi potest:

Theorema I[bis]. *Transformatio Weierstrassiana instrumentum quoddam generalissimum reductionis formae $f(x_1, \dots, x_n)$ non singularis, variabiles numero n involventis, in summam quadratorum constituit; id est: per transformationes Weierstrassianas omnes* *repraesentationes formae f regularis per summam terminorum solum quadratorum capi possunt.*

Corollarium. Posita forma $f(x_1, \ldots, x_n)$ singulari, id est

$$(0 <) r(f) = r < n,$$

substitutione quadam regulari

$$[x] = H[\eta]$$

habeatur

(a) $$fH \equiv g_1\eta_1^2 + g_2\eta_2^2 + \ldots g_r\eta_r^2,$$

ubique

$$g_1 g_2 \ldots g_r \neq 0;$$

tunc substitutiones Weierstrassianae

$$[x] = W[y]$$

et

$$[y] = \overline{W}[\eta]$$

reperiri possunt, quarum composita:

$$[x] = W\overline{W}[\eta]$$

formam f in summam

$$fW\overline{W} \equiv fH \equiv g_1\eta_1^2 + \ldots + g_r\eta_r^2$$

traducet.[30])

Ante omnia hoc duplex Lemma est cognoscendum:

Lemma: I.) *Si $0 < r < n$, et respectu matricibus diagonalibus*

$$A_r = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_r \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_r \end{pmatrix}$$

r^{ti} gradus matrix M n^{ti} gradus ita se habet, ut

(A) $$B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ n-r \text{ lineae} \left\{ \right. \end{array} \begin{pmatrix} \beta_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \beta_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}^{31)} = M'AM,$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n-r \text{ columnae}}$$

ubi quidem

---

[30]) Ergo: $H = \Theta W\overline{W}$, ubi Θ matricem transformationis cuiusdam *automorphae* formae f significat.

[31]) Locis vacuis ubique nota 0 est fingenda.

$$A=\begin{array}{r} \\ \\ \\ n-r \text{ lineae} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \left(\begin{array}{ccc:ccc} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r & & & \\ \hdashline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right)^{31)} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array},$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{n-r \text{ columnae}}$$

et M′ transpositam matricis M designant, tunc etiam

$$(\alpha) \qquad B_r = M_r' A_r M_r$$

concluditur, si enim M_r matricem r^{ti} gradus angulum superiorem sinistrum matricis M occupantem, M_r' quidem illius transpositam significant.

II.) *Si autem locum habeat* (α), *simul concludetur:*[32])

$$(\beta) \qquad B = M_1' A M_1,$$

cum matrice n^{ti} gradus

$$M_1 = \left(\begin{array}{c:ccc} M_r & & & \\ \hdashline & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right) \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} n-r \\ \text{lineae} \end{array}$$
$$\qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{n-r \text{ columnae}}$$

eiusque transposita[33])

$$M_1' = \left(\begin{array}{c:ccc} M_r' & & & \\ \hdashline & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right).$$

D e m o n s t r a t i o a d I. Compositione directa comperimus matricem AM n^{ti} gradus in angulo suo superiore sinistro matricem $A_r M_r$ r^{ti} gradus continere, et simul ultimis $n-r$ lineis elementa tantum 0 ostentare; idcirco in matrice $M'(AM)$ matrix r^{ti} gradus in angulo superiore sinistro emergens prorsus $M_r' A_r M_r$ erit, unde quidem (α) secundum (A) iam innotescit.

D e m o n s t r a t i o a d II. Et nunc ut supra $A_r M_r$ est matrix r^{ti} gradus, quae angulum superiorem sinistrum matricis compositae AM_1 occupat, et haec in $n-r$ lineis ultimis elementa solum 0 continet; manifestum itaque, quod $M_r' A_r M_r$, matrix r^{ti} gradus, an-

---

[32]) Obvium est theorema II.) Lemmatis quodam sensu inversum theorematis I.) effingere.

[33]) In campos vacuos notae 0 sunt scribendae.

gulum superiorem sinistrum matricis $M_1'(AM_1)$ explebit ac posterior in suis lineis, numero $n-r$ ultimis — respectu structurae matricis M_1' — elementa omnino 0 habebit. Quoniam tandem *symmetrica* est matrix $M_1'AM_1$,[34]) ideo vero secundum (α):

$$M_1'AM_1=\begin{pmatrix} B_r & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix}=B;$$

q. e. d.[35])

Stabilito hoc Lemmate duplici, demonstremus Corollarium.

Imprimis videtur — ratione disquisitionum CAPITIS PRIMI — transformationem Weierstrassianam regularem

$$[x]=W[y]$$

exsistere, qua forma f r^{ti} ordinis in formam

(b) $$fW\equiv \omega_1 y_1^2+\ldots+\omega_r y_r^2$$

redigitur, ubi quidem

$$\omega_1\omega_2\ldots\omega_r\neq 0.$$

Et si ad analogiam praecedentium ponantur:

$$G_r=\begin{pmatrix} g_1 & & & \\ & g_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_r\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G=\begin{pmatrix} G_r & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix},$$

et porro:

$$\Omega_r=\begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_r\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Omega=\begin{pmatrix} \Omega_r & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix};$$

ubi quidem G et Ω n^{ti} gradus sunt; aequationes per matrices expressae atque identitatibus (a) resp. (b) aequivalentes manifeste hae erunt:

(γ) $$G=H'(f)H, \text{ resp. } \Omega=W'(f)W;$$

et ideo ordinatim:

(c) $$\begin{aligned} G&=H'(f)H=H'W'^{-1}(W'(f)W)W^{-1}H=\\ &=(W^{-1}H)'\Omega(W^{-1}H)=M'\Omega M,\end{aligned}$$

[34]) Matrix A enim evidenter symmetrica est, quapropter

$$(M_1'AM_1)'=M_1'AM_1.$$

[35]) Admonere convenit regulas compositionis matricum hic adhibitas ope theoriae compositionis matricum *dissolubilium* ex unico fonte hauriri posse.

si quidem scriptum est

$$W^{-1}H = M.$$

Haec autem relatio (c) omni respectu eandem structuram revelat, quam in aequatione (A) partis I.) Lemmatis cognovimus, et ideo habemus ex (c), secundum (α):

$$\text{(d)} \qquad G_r = M_r' \Omega_r M_r,$$

et praeterea matricem M_r *non-singularem* fore, quia enim ex (d)

$$0 \neq \det. G_r = g_1 g_2 \ldots g_r = \det. \Omega_r (\det. M_r)^2$$

concluditur. Relatio (d) igitur indicat substitutionem regularem

$$\text{(e)} \qquad [y_1, \ldots, y_r] = M_r [\eta_1, \ldots, \eta_r]$$

variabiles r involventem exsistere, qua forma non-singularis

$$\omega_1 y_1^2 + \ldots + \omega_r y_r^2$$

in formam non-singularem

$$g_1 \eta_1^2 + \ldots + g_r \eta_r^2$$

transformatur. Hinc autem sequitur — in Theoremate I.) pro n numerum r ponendo — relationi (e) et matrice W_r characteris Weierstrassiani satisfieri posse, qua quidem relatio

$$\text{(d')} \qquad G_r = W_r' \Omega_r W_r$$

aequationi (d) respondens locum habebit. Utendo denique hac relatione (d'), sicut *suppositione praemissa* partis II.) Lemmatis antecedentis, typum quidem (α) habenti, invenimus secundum (β)

$$\text{(g)} \qquad G = \overline{W}' \Omega \overline{W},$$

ubi enim $\overline{W}$ matricem n^{ti} gradus

$$\overline{W} = \begin{pmatrix} W_r & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

significat.[86]) Oritur tandem ex (g) ope (γ):

$$G = H'(f) H = \overline{W}' W'(f) W \overline{W} = (W\overline{W})'(f, (W\overline{W}),$$

unde revera:

$$fH \equiv fW\overline{W};$$

q. e. d.

*

[86]) Matrice W_r nucleum matricis $\overline{W}$ efficiente transformationem matricis $\overline{W}$ item Weierstrassianam aspectare licebit.

Hoc cum theoremate est sine dubio coniunctum sequens aliud, cuius quidem demonstrationem — ope promulgationum antecedentium — quisque facillime perficiet.

Theorema II. *Si formas ingularis f r^{ti} ordinis substitutione regulari*

$$[x] = H[\eta]$$

in quadratorum summam (a) *transferatur, etiam transformatio generalis „dichotoma"*[37])

$$[x] = \Gamma[y],$$

et insuper alia transformatio Weierstrassiana

$$[y] = W[\eta]$$

inveniri poterunt, quarum compositione, scilicet

$$[x] = \Gamma W[\eta],$$

identitas

$$f\Gamma W \equiv fH$$

evadat.[38])

CAPUT TERTIUM.

Investigationes circa problema parametrorum.

Haud superfluum credimus considerationes sequentes — nexum vero rerum ad tempus ferme tantum explanantes — praemittere.[39]) Ante omnia videlicet haec duo problemata:

---

[37]) Supposito enim in forma f r^{ti} ordinis determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

transformationem regularem

$$[x] = \Gamma[y],$$

cuius ope

$$f\Gamma \equiv f(y_1, \ldots, y_r, 0, \ldots, 0) \equiv \sum_{i,k}^{r} a_{ik} y_i y_k$$

reperitur, *dichotomam*, [ex διχοτομέω = dissecare, diffindere], — ad f pertinentem — vocamus; haec quidem denominatio nobis haud absona videbatur. Pertractationem transformationum huius generis fusiorem vide ex. gr. apud T. J. I'A. Bromwich, *Quadratic forms and their classification by means of invariant-factors* (Cambridge, 1906), p. 9 sqq.

[38]) Proinde scribi potest $\Gamma W = \Theta H$, ubi Θ matricem transformationis cuiusdam *automorphae* ad formam f pertinentis significat.

[39]) Cf. ex. gr. J. A. Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, tome I, 6. éd. (Paris, 1910), p. 548, art. 247, et R. F. Scott — G. B. Mathews, *The Theory of Determinants*, 2. ed. (Cambridge 1904), p. 189, art. 11.

I) exhibeatur substitutio non-singularis

$$[x] = Z[\zeta],$$

per quam forma regularis n variabilium

$$f \equiv \sum_{i,k}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

in summam quadratorum

(44) $$fZ \equiv \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \ldots + \zeta_n^2$$

redigatur, aut

II) determinentur elementa *ignota* α — numero n^2 — matricis regularis n^{ti} gradus

$$Z^{-1} = (\alpha_{ik}),$$

relationi

$$\sum_{i,k}^{n} a_{ik} x_i x_k \equiv \sum_{s=1}^{n} (\alpha_{s1} x_1 + \alpha_{s2} x_2 + \ldots + \alpha_{sn} x_n)^2$$

pro variabilibus x identicae satisfacientia, — unum idemque desiderium exprimere.

Haec autem identitas ultima $\frac{n(n+1)}{2}$ relationibus aequabit, quae systema sequens constituunt:

(45) $$\sum_{s=1}^{n} \alpha_{si} \alpha_{sk} = a_{ik}.$$
$$(1 \leqq i \leqq k \leqq n)$$

Quoniam autem numerus aequationum huius systematis *quadratici* $\frac{n(n+1)}{2}$ est, quantitatum ignotarum quidem n^2, ideo „generaliter" expectandum, recte *sperandum* esset, valores α numero $\frac{n(n+1)}{2}$ per relictos α numero

(N) $$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

exprimi posse. Secundum hanc ratiocinationem quantitates α nunc ipsum commemoratae numero $\frac{n(n-1)}{2}$ in matrice Z^{-1} sicut parametri independentes fungentur, ideoque elementa matricis Z identitatem (44) proferentis nihilo minus quam illae α functiones parametrorum numero $\frac{n(n-1)}{2}$ libere eligendarum erunt.

His observationibus praemissis superest deinde, ut transformationem Weierstrassianam et ex parte quaestionis parametrorum paulo accuratius perscrutemur.

Utamur primo quadam simplificatione, per quam enim una transformationis Weierstrassianae effigies certa uniformis orietur, quippe quum tali modo forma f iam ab ovo in sua forma *normali*

$$\zeta_1^2+\zeta_2^2+\ldots+\zeta_r^2, \qquad (r=r(f))$$

prodiret. — Ceterum supponatur nunc formam f non-singularem, id est

$$r(f)=n$$

fore; respectu autem designationum symboli in CAPITE PRIMO introducti conserventur. Si deinde

$$f(e_1, e_2, \ldots, e_n)=\gamma\neq 0 \tag{2}$$

una cum $e_1\neq 0$ accipiantur, ponamus

$$e_i=\sqrt{\gamma}\,.\,\varepsilon_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{46}$$

ubi quidem $\sqrt{\gamma}$ duorum valorum radicis *utrum determinatum* significat. Habetur ideo ex (2) secundum (46):

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)=1, \tag{47}$$

insuper vero

$$\varepsilon_1=\frac{e_1}{\sqrt{\gamma}}\neq 0.$$

Scribendo praeterea

$$\varkappa_i=u_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)=a_{i1}\varepsilon_1+a_{i2}\varepsilon_2+\ldots+a_{in}\varepsilon_n, \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

concluditur:

$$c_i=u_i(e_1, e_2, \ldots, e_n)=a_{i1}e_1+a_{i2}e_2+\ldots+a_{in}e_n= \\ =\sqrt{\gamma}\,.\,(a_{i1}\varepsilon_1+a_{i2}\varepsilon_2+\ldots+a_{in}\varepsilon_n)=\sqrt{\gamma}\,.\,\varkappa_i,$$

porroque

$$y_1=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n=\sqrt{\gamma}\,.\,(\varkappa_1x_1+\varkappa_2x_2+\ldots+\varkappa_nx_n).$$

His omnibus respectis, quia secundum (9) $g\gamma=1$ et

$$\frac{e_i}{e_1}=\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1}, \quad (i=2, 3, \ldots, n)$$

habetur, identitas (W) CAPITIS PRIMI in relationem

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \ldots + \varkappa_n x_n)^2 +$$
$$+ f\left(0, x_2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} x_1, \ldots, x_n - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} x_1\right) - \left(\sum_{i=2}^{n} \varkappa_i \left(x_i - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1} x_1\right)\right)^2$$

transiet, quocirca autem, si hic inversa substitutionis

$$(48) \qquad \begin{cases} \varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \ldots + \varkappa_n x_n = x_1', \\ -\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} x_1 + x_2 \qquad\qquad = x_2', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\dfrac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} x_1 \qquad\qquad + x_n = x_n', \end{cases}$$

curte

$$(49) \qquad [x] = W_1 [x']$$

adhibeatur, ubi quidem[40])

$$(50) \qquad \text{det. } W_1 = \frac{1}{\text{det. (48)}} = \frac{\varepsilon_1}{\varkappa_1 \varepsilon_1 + \ldots + \varkappa_n \varepsilon_n} = \varepsilon_1 \neq 0,$$ [41])

transformata sub (15) scriptae respondens

$$(51) \qquad \bar{f}(x_1', x_2', \ldots, x_n') \equiv x_1'^2 + f(0, x_2', \ldots, x_n') - \left(\sum_{i=2}^{n} \varkappa_i x_i'\right)^2 \equiv$$
$$\equiv x_1'^2 + \varphi(x_2', \ldots, x_n')$$

nanciscetur, in qua igitur aequatio identica

$$(52) \qquad \varphi(x_2', \ldots, x_n') \equiv f(0, x_2', \ldots, x_n') - \left(\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i x_i'\right)^2 \equiv$$
$$\equiv \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=2}^{n} \alpha_{ik} x_i' x_k',$$

cum coefficientibus

$$(53) \qquad \alpha_{ik} = a_{ik} - \varkappa_i \varkappa_k \quad (i, k = 2, 3, \ldots, n)$$

locum habebit.[42]) Ratione evolutionum **respondentium** CAPITIS PRIMI notum est

$$(53') \qquad r(\varphi) = r(f) - 1 = n - 1$$

fore.

---

[40]) Cf. (13) supra.

[41]) Est enim propter (47):

$$(47') \qquad \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_i(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 1.$$

[42]) Itaque coefficientes α_{ik} polynomia respectu elementorum ε secundi gradus offerunt. Quod ad valorem det. φ spectat, vide infra ADNOTATIONEM.

Et si nunc numeri $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ubicunque velut *parametri variabiles* conspiciantur, et has quantitates ε relationibus

(54) $$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_1 \neq 0$$

solum satisfacere debere memoremus, transformationem (49) tamquam $n-1$ elementa e complexu

(ε) $$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$$

idonee sumpta atque parametros libere eligendas repraesentantia involventem aspicere licebit. Hic ideo status est post passum primum transformationis Weierstrassianae; perlustremus adhuc breviter tabulatum consequens reductionis. Sumantur ad exemplum praecedentium numeri

$$\varepsilon_2', \varepsilon_3', \ldots, \varepsilon_n',$$

quibus

(55) $$\varphi(\varepsilon_2', \varepsilon_3', \ldots, \varepsilon_n') = 1$$

et eodem tempore

(55') $$\varepsilon_2' \neq 0$$

inveniantur. Hoc autem casu supponere convenit valores — antecedentibus satisfacientes — seriei (ε) ad tempus *fixos* esse, et ideo secundum (53') $\varphi \not\equiv 0$ fore atque relationi (55) numeris non omnibus evanescentibus satisfieri posse.[43]) Si deinde scribatur

$$\varkappa_i' = \alpha_{i2}\varepsilon_2' + \alpha_{i3}\varepsilon_3' + \ldots + \alpha_{in}\varepsilon_n',$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n)$$

ita ut fiat

$$\varkappa_2'\varepsilon_2' + \varkappa_3'\varepsilon_3' + \ldots + \varkappa_n'\varepsilon_n' = \varphi(\varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n') = 1,$$

per substitutionem inversam substitutionis

$$\begin{array}{lll} x_1' & & = x_1'', \\ & \varkappa_2'x_2' + \varkappa_3'x_3' + \ldots + \varkappa_n'x_n' & = x_2'', \\ & -\dfrac{\varepsilon_3'}{\varepsilon_2'}x_2' + x_3' & = x_3'', \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ & -\dfrac{\varepsilon_n'}{\varepsilon_2'}x_2' \qquad\qquad + x_n' & = x_n'' \end{array}$$

variabilium totalitatem implicantis, puta

(56) $$[x'] = W_2[x''],$$

[43]) Status $\varepsilon_2 \neq 0$ transignatione apta capi potest.

forma

$$\bar{f}(x_1', x_2', \ldots, x_n')$$

in formam

(57) $$\bar{\bar{f}}(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'') \equiv x_1''^2 + x_2''^2 + \psi(x_3'', \ldots, x_n'')$$

transmutabitur, ubi quidem

$$r(\psi) = n - 2$$

et

$$\text{det. } W_2 = \varepsilon_2' \neq 0,$$

coefficientes autem formae

$$\psi(x_3'', \ldots, x_n'') \equiv \sum_{i=3}^{n} \sum_{k=3}^{n} \beta_{ik} x_i'' x_k''$$

per analogiam (53):

$$\beta_{ik} = \alpha_{ik} - \varkappa_i' \varkappa_k' = a_{ik} - \varkappa_i \varkappa_k - \varkappa_i' \varkappa_k'$$
$$(i, k = 3, 4, \ldots, n)$$

erunt. Expressiones β igitur polynomia secundi gradus respectu quantitatum ε', quarti gradus contra respectu elementorum ε — ob valores α in formis $\varkappa'$ occurrentes — constituunt.[44])

Innitentes ergo supra circumscriptis $n-2$ valores adeptos ex serie

(ε') $$\varepsilon_2', \varepsilon_3', \ldots, \varepsilon_n'$$

electos, sicut parametros *independenter variabiles* aspectare et ideo enuntiare possumus: *in substitutione lineari*

$$[x] = W_1 W_2 [x''],$$

ex substitutionibus (49) *et* (56) *composita elementa matricis* $W_1 W_2$ *a parametris numero* $(n-1)+(n-2) = 2n-3$ *liberis pendent.*

Hac via autem in constructione transformationis Weierstrassianae porro progredientes, statim perspicimus unumquemque passum generatorem, quo terminus quadratus — alter post alterum — a forma principali abscinditur, seriem ulteriorem parametrorum novarum introducere, atque has series recentiores — multitudinem ordinatim unitate imminutam parametrorum continentes — praecedentibus cum seriebus — in colligatione ex supra traditis elucenti — se coniungere. Momentum quidem implicationem superpositarum serierum parametrorum succedentium efficiens in eo conspicari potest, quod coefficientes formae cuiusvis residuae poly-

---

[44]) Valorem det. ψ vide infra in ADNOTATIONE.

nomia *omnium parametrorum praecedentium* repraesentant. Patet idcirco spatia varietatis pro seriebus singulis parametrorum inter se non independentia fore. Itaque haud dubium est determinationem concinnam spatiorum variandi valorum singularum parametrorum independentium disquisitionem specialem et seorsum perficiendam requirere.[45])

Adducimur attamen ipsis discussionibus eatenus traditis ad sequentem affirmationem — magis vero superficiarii generis — nunc quidem unice appetitam: transformatio Weierstrassiana secundum praescripta antecedenter evoluta constructa, puta

$$[x] = W[\zeta],$$

qua enim forma $f(x_1, \ldots, x_n)$ n^{ti} ordinis in suam formam normalem

$$fW \equiv \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \ldots + \zeta_n^2$$

redigatur, omnino

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

parametros „independentes" in elementis matricis W implicatas continebit.

ADNOTATIO.

Ex identitate (51) protinus derivatur:

$$\det. \bar{f} = \det. \varphi = (\det. W_1)^2 . \det. f = \varepsilon_1^2 . \det. f,$$

aut quod idem est:

$$|a_{ik} - \varkappa_i \varkappa_k| = \varepsilon_1^2 . |a_{jl}|;$$
$$(i, k = 2, 3, \ldots, n) \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, n)$$

haec autem relatio ope aequationis

$$\varkappa_1 \varepsilon_1 + \varkappa_2 \varepsilon_2 + \ldots + \varkappa_n \varepsilon_n = 1$$

etiam per transformationes simplices determinantium facillime verificari posset. Eodemque modo accipitur ex (57):

$$\det. \bar{\bar{f}} = \det. \psi = |a_{ik} - \varkappa_i \varkappa_k - \varkappa'_i \varkappa'_k| = \varepsilon_1^2 \varepsilon_2'^2 . \det. f;$$
$$(i, k = 3, 4, \ldots, n)$$

etc., etc.

---

[45]) Observare convenit transformationem Darbouxianam *a limine* vero aliquid obvolutiorem esse, quippe quod minus aperiat accessum ad iudicium non solum de numero parametrorum *independentium* in transformatione inclusarum, sed etiam de modo praesentiae harum parametrorum.

CAPUT QUARTUM.

Transformatio Jacobiana sicut casus specialis.[46])

Fiat

$$\det. f = |a_{ik}| = A$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

et ponatur:

$$(58)\quad A^{(i)} = \begin{vmatrix} a_{n-i+1,\, n-i+1} & a_{n-i+1,\, n-i+2} & \ldots & a_{n-i+1,\, n} \\ a_{n-i+2,\, n-i+1} & a_{n-i+2,\, n-i+2} & \ldots & a_{n-i+2,\, n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,\, n-i+1} & a_{n,\, n-i+2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = $$
$$= \frac{\partial^{n-i} A}{\partial a_{11}\, \partial a_{22} \ldots \partial a_{n-i,\, n-i}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

denique unitatis gratia: $A^{(n)} = A$. Habebitur itaque ordinatim

$$A^{(1)} = a_{nn},\ A^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{n-1,\, n-1} & a_{n-1,\, n} \\ a_{n,\, n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, A^{(n-2)} = \frac{\partial^2 A}{\partial a_{11}\, \partial a_{22}},$$
$$A^{(n-1)} = \frac{\partial A}{\partial a_{11}} = A_{11},\ A^{(n)} = A;$$

si quidem specialiter A_{11} cofactorem in A ad a_{11} pertinentem significet. Minores capitales sic definitos „minores subcardinales" resp.

$$1., 2., \ldots, i., \ldots, n.$$

gradus determinantis A appellare volumus. In subsequentibus omnes hos minores capitales „cifra" differentes, id est

$$(59)\qquad A^{(1)} A^{(2)} \ldots A^{(n-1)} A^{(n)} \neq 0$$

supponemus.

Construamus deinde ad scopum nostrum reductam quandam specialem formae f summam quadratorum ostentantem, cuius vero identitatem repraesentatione Jacobiana statim agnoscere possimus. Ponamus enim hanc ob rem:[47])

$$(60)\qquad e_1 = A_{11} = A^{(n-1)},\ e_2 = A_{12}, \ldots, e_n = A_{1n},$$

ubi quidem A_{ik} cofactorem in A ad a_{ik} pertinentem designat; reperietur ideo:

$$c_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + \ldots + a_{1n} e_n = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n} = A,$$

et porro

[46]) Cf. WEIERSTRASS: [1]) p. 18—20.

[47]) Cf. undique designationes et evolutiones CAPITIS PRIMI.

$$c_i = a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n = a_{i1}A_{11} + \ldots + a_{in}A_{1n} = 0;$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n)$$

habebitur itaque

$$f(e_1, \ldots, e_n) = \gamma = c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n = A A_{11} = A A^{(n-1)} \neq 0,$$

quapropter

$$g = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{A A^{(n-1)}};$$

denique autem

$$y_1 = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = c_1 x_1 = A x_1.$$

His cum valoribus proinde identitas (W) CAPITIS PRIMI formam

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \frac{A}{A^{(n-1)}} \cdot x_1^2 + f(0, y_2, \ldots, y_n) \tag{61}$$

induet, in qua

$$y_i = x_i - \frac{A_{1i}}{A_{11}} x_1 \tag{61'}$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n)$$

intellegendum est.

In aequalitate (61) matrix formae $n-1$ variabilium

$$f(0, y_2, \ldots, y_n) \equiv \varphi(y_2, \ldots, y_n)$$

evidenter

$$(A^{(n-1)}) = (a_{ik})$$
$$(i, k = 2, 3, \ldots, n)$$

erit, eiusque determinans

$$\text{det. } \varphi = A^{(n-1)} \neq 0.$$

Ponamus deinde cum cofactoribus $A_{2k}^{(n-1)}$ ad elementa primae lineae determinantis $A^{(n-1)}$ pertinentibus:

$$e_2' = A_{22}^{(n-1)} = A^{(n-2)} \neq 0, \quad e_3' = A_{23}^{(n-1)}, \ldots, e_n' = A_{2n}^{(n-1)},$$

quo autem fit

$$c_2' = a_{22} e_2' + \ldots + a_{2n} e_n' = \text{det. } \varphi = A^{(n-1)}$$

et

$$c_i' = a_{i2} e_2' + \ldots + a_{in} e_n' = 0;$$
$$(i = 3, 4, \ldots, n)$$

praeterea fluent inde

$$\varphi(e_2', \ldots, e_n') = \gamma' = c_2' e_2' + \ldots + c_n' e_n' = A^{(n-1)} \cdot A^{(n-2)} \neq 0,$$

atque

$$g' = \frac{1}{\gamma'}; \; y_2' = c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n = A^{(n-1)} \cdot y_2.$$

Hanc per viam oritur transformata formae φ, expressioni (61) similiter constructa:

$$\varphi(y_2, \ldots, y_n) \equiv \frac{A^{(n-1)}}{A^{(n-2)}} \cdot y_2^2 + \varphi(0, y_3', \ldots, y_n'), \tag{62}$$

ubi quidem variabiles y_i et y_i' aequationibus

$$y_i' = y_i - \frac{A_{2i}^{(n-1)}}{A^{(n-2)}} \cdot y_2 \tag{62'}$$

$$(i = 3, 4, \ldots, n)$$

coniunctae sunt.

Per has evolutiones certe satis persuademur methodum reductionis nuperrime perlustratam — respectu enim suppositionis (59) — etiam porro adhiberi et tali modo tandem ad repraesentationem

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv & \frac{A^{(n)}}{A^{(n-1)}} \cdot x_1^2 + \frac{A^{(n-1)}}{A^{(n-2)}} \cdot y_2^2 + \frac{A^{(n-2)}}{A^{(n-3)}} \cdot y_3'^2 + \\ & + \ldots + \frac{A^{(2)}}{A^{(1)}} \cdot (y_{n-1}'^{(n-3)})^2 + A^{(1)} \cdot (y_n'^{(n-2)})^2 \end{aligned} \tag{63}$$

formae f perveniri posse; hic autem habetur

$$A^{(n)} = A, \; A^{(1)} = a_{nn}.$$

Restituantur deinde ubique in summa (63) quadratorum variabiles x principales; cum notatione

$$\alpha_{21} = -\frac{A_{12}}{A_{11}}$$

habemus ex (61')

$$y_2 = x_2 + \alpha_{21} x_1;$$

secundum (62') autem, ratione (61'):

$$y_3' = y_3 + \beta y_2 = x_3 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{31} x_1,$$

ubi constantes α una cum β variabilibus non pendebunt. Ita continuando simili ratione perspicietur valores $y_k^{(k-2)}$ per variabiles x

expressos typum

$$y_k^{(k-2)} = x_k + \alpha_{k,\,k-1} x_{k-1} + \ldots + \alpha_{k1} x_1$$
$$(k = 3, 4, \ldots, n)$$

ostentaturos esse. Identitas (63) ergo in sequenti forma adscribi poterit:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv a_{nn}(x_n + \alpha_{n,\,n-1} x_{n-1} + \ldots + \alpha_{n2} x_2 + \alpha_{n1} x_1)^2 + \\ + \frac{A^{(2)}}{a_{nn}} (x_{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1,\,2} x_2 + \alpha_{n-1,\,1} x_2)^2 + \\ + \ldots\ldots\ldots + \frac{A^{(n-1)}}{A^{(n-2)}} (x_2 + \alpha_{21} x_1)^2 + \\ + \frac{A}{A^{(n-1)}} \cdot x_1^2; \end{aligned}$$

unde autem revera lucramur hanc formam transformatam ab ea repraesentatione Jacobiana formae f non diversam fore, quae ad successionem

$$x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$$

variabilium x pertinebit.[48])

Manifestum enim est inversione successionis *et* linearum *et* columnarum cuiusdam determinantis valorem eius non mutari ideoque minores *sub*-cardinales determinantis principalis cum minoribus graduum respondentium *supra*-cardinalibus determinantis inversi ordinatim congruere.

(Acceptum die 17. mensis Iunii a. 1932.)

[48]) Cf. JACOBI, Ueber eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks, *Gesammelte Werke,* III (Berlin, 1884), pp. 585—590.

Sur les ensembles compacts de fonctions sommables.

Par Marcel Riesz à Lund.*)

1. Soit R un espace euclidien à un nombre fini de dimensions. En désignant par x un point quelconque de cet espace, on entend par dx l'élément de volume correspondant. Par $x+h$ on désigne l'effet du déplacement h au point x. La valeur absolue $|h|$ du déplacement sera mesurée au sens euclidien.

Nous désignons, pour $p \geqq 1$, par L^p la classe des fonctions $f(x)$ définies et mesurables dans l'espace R et telles que l'intégrale de $|f(x)|^p$, étendue à tout l'espace, existe. Nous posons pour une telle fonction

$$\|f\| = \|f(x)\| = \left(\int_R |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

et encore, en désignant par E un sous-ensemble mesurable quelconque de l'espace R,

$$\|f\|_E = \|f(x)\|_E = \left(\int_E |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

Nous aurons souvent à nous servir de l'inégalité de Minkowski

$$\|f+g\| \leqq \|f\| + \|g\|, \tag{3}$$

qui met en évidence que (1) définit un espace métrique au sens de M. Fréchet, la dénomination étant celle de M. Hausdorff.

Si $f(x)$ satisfait à l'inégalité

$$\|f\| \leqq M, \tag{4}$$

nous dirons que M est une *borne* de $f(x)$.

*) Conférence faite au Séminaire mathématique de l'Université de Lund le 21 février 1933.

Cela étant, nous pouvons énoncer le théorème suivant dû à M. Lebesgue

Pour toute fonction $f(x)$ de la classe L^p, on a

$$(5)\quad \lim_{|h|\to 0}\|f(x+h)-f(x)\| = \lim_{|h|\to 0}\left(\int_E |f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

M. Lebesgue n'a donné ce théorème que pour $p=1$, mais la démonstration s'étend immédiatement au cas général. Pour préciser le sens de (5), nous l'écrirons encore sous la forme

$$(5')\qquad \|f(x+h)-f(x)\| \leqq \varepsilon, \qquad \text{pour } |h| \leqq \delta.$$

Ici ε et δ sont des nombres positifs, le premier arbitraire, le second suffisamment petit.

En désignant encore par E_A l'ensemble des points de R dont a distance à un point fixe de R est $>A$, on a évidemment

$$(6)\qquad \lim_{A\to\infty}\|f\|_{E_A} = 0,$$

ou

$$(6')\qquad \|f\|_{E_A} \leqq \varepsilon, \qquad \text{pour } A \text{ assez grand.}$$

Nous dirons avec M. Fréchet qu'un ensemble de fonctions $\{f(x)\}$ appartenant à la classe L^p est *compact* au sens L^p, si, de tout sous-ensemble infini, on peut tirer une suite qui tend vers une fonction limite au sens L^p. Cette définition implique que tout ensemble de fonctions qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments, est compact.

Le but principal de cette Note est de démontrer le théorème suivant.

Pour qu'un ensemble $\{f(x)\}$ de fonctions appartenant à la classe L^p soit compact au sens L^p, il faut et il suffit qu'il existe une borne commune M telle que (4) *tienne, et que les relations* (5) *et* (6) *aient lieu uniformément pour toutes les fonctions de l'ensemble* $\{f(x)\}$.

On pourra aussi exprimer ces conditions en disant que *les fonctions $f(x)$ ont à être également bornées et également continues dans l'espace R et encore également infiniment petites dans la partie infiniment éloignée de cet espace, tout cela étant entendu au sens L^p.*

En admettant un instant que nos fonctions s'annulent à l'extérieur d'un certain ensemble borné et fermé, la condition (6) disparaît et l'on retrouve, pour $p\to\infty$, comme cas limite les conditions d'ARZELÀ pour qu'un système de fonctions continues dans un tel ensemble y soit compact dans le sens de la convergence uniforme, à savoir que les fonctions soient également bornées et également continues au sens ordinaire.

2. *Pour* $p > 1$, on possède déjà un critère pour la compacticité au sens L^p dû à M. KOLMOGOROFF[1]) et à M. TAMARKIN.[2]) M. KOLMOGOROFF s'est restreint à des fonctions qui s'annulent à l'extérieur d'un ensemble borné. Il trouve comme conditions nécessaires et suffisantes que les fonctions $\{f(x)\}$ soient également bornées et que ces fonctions puissent être approchées uniformément par certaines valeurs moyennes qu'on retrouvera plus loin au n° **4** (formule (8)). Là on retrouve aussi la condition de M. KOLMOGOROFF sous forme explicite (inégalité (9)). M. TAMARKIN a étendu le résultat de M. KOLMOGOROFF en supprimant la condition que les fonctions $\{f(x)\}$ s'annulent à l'extérieur d'un ensemble borné. Il ajouta en échange aux conditions nécessaires et suffisantes de M. KOLMOGOROFF celle que nous avons exprimée en disant que les fonctions $\{f(x)\}$ ont à être également infiniment petites dans la partie infiniment éloignée de l'espace R.

En résumé, *pour* $p > 1$, deux de nos conditions se trouvent déjà chez les auteurs cités, tandis que celle exigeant que nos fonctions soient également continues au sens L^p, remplace la condition la plus marquée de M. KOLMOGOROFF se rattachant aux valeurs moyennes (8). Notre condition permet de résoudre la question aussi dans le cas $p = 1$.

3. Avant d'aborder la démonstration de notre théorème, nous donnons encore une condition alternative qui découle immédiatement d'un théorème très général et très important de M. HAUSDORFF sur les espaces métriques. M. HAUSDORFF démontre[3]) qu'un ensemble d'éléments d'un espace métrique (complet) est compact en même temps qu'il est totalement borné. Appliqué au cas particulier qui nous occupe, le théorème de M. HAUSDORFF revient à ceci:

---

1) A. KOLMOGOROFF, Über die Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel, *Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen*, 1931, p. 60—63.

2) J. D. TAMARKIN, On the compactness of the space L_p, *Bulletin American Math. Soc.*, **38** (1932), p. 79—84.

3) F. HAUSDORFF, (*Grundzüge der*) *Mengenlehre*, 1ère éd. 1914, p. 311 et *suiv.*, 2ième éd. 1927, p. 107 et *suiv.*

Pour que l'ensemble $\{f(x)\}$ *de la classe* L^p *soit compact au sens* L^p *il faut et il suffit que, pour tout nombre positif* ε, *il existe un nombre* f i n i *de fonctions* $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ *appartenant elles-mêmes à la classe* L^p *de sorte que, pour chaque fonction* $f(x)$, *l'une au moins des inégalités*

$$\|f(x) - g_k(x)\| \leqq \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{7}$$

soit remplie.

Il est pour ainsi dire évident que les fonctions $g_k(x)$ pourront être spécialisées de beaucoup de manières. Ainsi p. ex. on pourra les choisir parmi les fonctions $\{f(x)\}$, ou encore on pourra prescrire qu'elles soient continues ou qu'elles n'admettent qu'un nombre fini de valeurs etc.

Le critère de M. Hausdorff admet bien des applications directes. Ainsi p. ex., on voit sur le champ que tout système de fonctions également bornées et à variation également bornée sur un segment fini, y est compact L^p pour toute valeur finie de p.

4. Montrons maintenant comment on peut déduire le théorème énoncé au n° 1 du théorème de M. Hausdorff. Il s'ensuit immédiatement de ce dernier théorème et des remarques faites au n° 1 que nos conditions sont nécessaires. En effet, ces conditions étant remplies pour chacune des fonctions $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$, on n'aura qu'à prendre les bornes les moins favorables et à appliquer l'inégalité (3).

Il reste à démontrer que nos conditions sont suffisantes. Le nombre de dimensions de notre espace étant n, désignons avec M. Kolmogoroff la sphère à n dimensions de centre x et de rayon δ par $S(x, \delta)$ et formons avec lui la valeur moyenne

$$f_\delta(x) = \frac{1}{V(\delta)} \int\limits_{S(x,\,\delta)} f(y)\, dy, \tag{8}$$

$V(\delta)$ désignant le volume de la sphère.

Nous allons démontrer que si les conditions (5') et (6') sont remplies par la fonction $f(x)$, on a aussi

$$\|f(x) - f_\delta(x)\| \leqq \varepsilon \tag{9}$$

et

$$\|f_\delta(x)\|_{E_A} \leqq 2\varepsilon. \tag{10}$$

On a encore, pour *tout point* x, les deux inégalités, la dernière étant valable pour h quelconque,

$$|f_\delta(x)| \leqq (V(\delta))^{-\frac{1}{p}} \|f\| \tag{11}$$

et

$$|f_\delta(x+h) - f_\delta(x)| \leqq (V(\delta))^{-\frac{1}{p}} \|f(x+h) - f(x)\|. \tag{12}$$

Ces deux dernières relations disent que nos conditions (4) et (5) étant également remplies par les fonctions $\{f(x)\}$, les fonctions $\{f_\delta(x)\}$ seront *également bornées et également continues au sens ordinaire, pour toute valeur fixe de* δ. Les mêmes conclusions découlent, pour $p > 1$, aussi des hypothèses de M. Kolmogoroff et jouent un rôle important dans sa démonstration.

Admettons un instant que les inégalités (9)—(12) soient déjà établies. Alors il est facile de trouver des fonctions $g_k(x)$ qui pourront figurer au théorème de M. Hausdorff et de réduire ainsi notre théorème à celui-là.

En effet, on peut d'abord, en vertu de (9), choisir δ de façon que les valeurs $\|f(x) - f_\delta(x)\|$ soient *également*[4]) très petites. Ensuite, grâce à (10), on peut déterminer un domaine rectangulaire D assez grand pour que les fonctions $\{f'_\delta(x)\}$ identiques aux fonctions $\{f_\delta(x)\}$ à l'intérieur de D et s'annulant à son extérieur, rendent les valeurs $\|f_\delta(x) - f'_\delta(x)\|$ très petites. Puisque les fonctions $\{f'_\delta(x)\}$ sont également bornées, on pourra trouver des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, en nombre fini, de manière que chaque valeur particulière $f'_\delta(x)$ soit très voisine de l'une au moins de ces valeurs α_j. D'autre part, les fonctions $\{f'_\delta(x)\}$ étant aussi également continues, on peut diviser D en un nombre fini s de domaines rectangulaires partiels de sorte que l'oscillation d'une fonction quelconque $f'_\delta(x)$ dans un tel domaine soit très petite. Toutes les valeurs qu'une certaine fonction $f'_\delta(x)$ admet dans un tel domaine partiel seront alors très voisines de l'une au moins des valeurs α_j que nous venons d'introduire. Cela étant, nous définissons un système de r^s fonctions $g_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, r^s)$ s'annulant toutes à l'extérieur de D et admettant dans chaque domaine partiel une valeur constante, égale à l'une des valeurs α_j. Il ressort

[4]) Dans la suite, nous ne répétons pas ce mot à chaque occasion.

de la construction ci-dessus que toute fonction $f'_\delta(x)$ sera très voisine — au sens ordinaire — de l'une au moins des fonctions $g_k(x)$. Les deux fonctions étant identiques à l'extérieur de D, une approximation assez bonne, au sens ordinaire, rendra la valeur $\|f'_\delta(x)-g_k(x)\|$ aussi petite qu'on voudra. Les valeurs $\|f(x)-f_\delta(x)\|$, $\|f_\delta(x)-f'_\delta(x)\|$ et $\|f'_\delta(x)-g_k(x)\|$ pouvant être rendues arbitrairement petites, il en sera de même, grâce à l'inégalité fondamentale (3), de la valeur $\|f(x)-g_k(x)\|$.

5. Tout ce qui reste, c'est à démontrer les inégalités (9)—(12). Nous partons, pour y arriver, d'une inégalité bien connue, qui est une conséquence immédiate de l'inégalité de Hölder. On a pour toute fonction $l(x)$ de la classe L^p

$$(14)\qquad \left|\frac{1}{V(\delta)}\int\limits_S l(y)\,dy\right| \leqq \left(\frac{1}{V(\delta)}\int\limits_S |l(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

où l'on a posè, pour abréger, S au lieu de $S(x,\delta)$.

Posons ici d'abord $l(y)=f(y)$. Il vient d'après (8)

$$|f_\delta(x)| \leqq (V(\delta))^{-\frac{1}{p}}\|f\|_S \leqq (V(\delta))^{-\frac{1}{p}}\|f\|,$$

c'est-à-dire l'inégalité (11).

En posant maintenant dans (14) $l(y)=f(y+h)-f(y)$, nous obtenons, par un calcul analogue,

$$|f_\delta(x+h)-f_\delta(x)| \leqq (V(\delta))^{-\frac{1}{p}}\|f(x+h)-f(x)\|,$$

c'est-à-dire l'inégalité (12).

En posant encore $l(y)=f(x)-f(y)$, il vient d'abord

$$|f(x)-f_\delta(x)| \leqq \left(\frac{1}{V(\delta)}\int\limits_S |f(x)-f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

ou

$$|f(x)-f_\delta(x)|^p \leqq \frac{1}{V(\delta)}\int\limits_{S(x,\,\delta)} |f(x)-f(y)|^p\,dy =$$

$$= \frac{1}{V(\delta)}\int\limits_{S(0,\,\delta)} |f(x)-f(x+h)|^p\,dh.$$

En intégrant cela par rapport à x, l'intégrale étant étendue à l'espace entier R, il résulte

$$\int_R |f(x)-f_\delta(x)|^p dx \leqq \frac{1}{V(\delta)} \int_{S(0,\delta)} dh \int_R |f(x+h)-f(x)|^p dx.$$

L'intégrale étendue à l'espace R qui figure au second membre étant $<\varepsilon^p$ d'après (5'), on en tire immédiatement l'inégalité (9).

Enfin l'inégalité (10) résulte immédiatement par (3) de la combinaison de (9) et de (6').

(Reçu le 12 juin 1933)

Über das zweite Hauptproblem der „Factorisatio Numerorum".

Von G. SZEKERES und P. TURÁN in Budapest.

1. Das Problem der „Factorisatio Numerorum" ist das folgende: wir betrachten die möglichen Zerlegungen einer ganzen Zahl n in ganzzahlige Faktoren und fragen nach ihrer Anzahl. Diese Anzahl hängt natürlich von den Zerlegungen ab, welche man allein betrachtet; wir können nämlich zwei Zerlegungen, die sich nur in der Reihenfolge der Faktoren von einander unterscheiden, als verschieden betrachten oder nicht. So erhält man die zwei Hauptprobleme der „Factorisatio Numerorum". Da in beiden Fällen die Anzahl $R(n)$ der Faktorisationen von n sich ziemlich unregelmäßig verändert (falls n eine Primzahl ist, $R(n)=1$, sonst kann sie beliebig groß werden), so hat man nicht $R(n)$, sondern den Mittelwert $\dfrac{R(1)+R(2)+\ldots+R(n)}{n}$ zu untersuchen.

Das erstgenannte Problem wurde von Herrn L. KALMÁR behandelt, von dem übrigens die ganze Problemstellung stammt, dabei erhielt er folgendes Resultat[1])

$$R(1)+R(2)+\ldots+R(n)=-\frac{n^{\varrho}}{\varrho\zeta'(\varrho)}+O\left(n^{\varrho}(\log n)^{-\alpha\log\log\log n}\right)$$

für jedes $\alpha<\dfrac{1}{2(\varrho-1)\log 2}$, wobei ϱ die einzige positive reelle Wurzel der Gleichung $\zeta(s)=2$ ist. Die vorliegende Arbeit behandelt das andere Hauptproblem, indem wir zwei Zerlegungen, die sich nur in der Reihenfolge der Faktoren unterscheiden, als

[1]) L. KALMÁR, Über die mittlere Anzahl der Produktdarstellungen der Zahlen, erste Mitteilung, *diese Acta*, **5** (1930—32), S. 95—107.

identisch betrachten. Es bedeute also $R(n)$ für $n>1$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$(1) \qquad n = n_1 n_2 \ldots n_\alpha$$
$$(2 \leqq n_1 \leqq n_2 \leqq \ldots \leqq n_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \ldots);$$

es sei ferner $R(1) = 1$. Dann gelangen wir zum Resultat

$$\frac{R(1)+R(2)+\ldots+R(n)}{n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{2\sqrt{\log n}}}{\log^{\frac{3}{4}} n} + A_1 \frac{e^{2\sqrt{\log n}}}{\log^{\frac{5}{4}} n} + \\ + \ldots + A_{k-1} \frac{e^{2\sqrt{\log n}}}{\log^{\frac{2k+1}{4}} n} + O\left(\frac{e^{2\sqrt{\log n}}}{\log^{\frac{2k+3}{4}} n}\right),$$

wo $A_1, A_2, \ldots$ gewisse Konstante bezeichnen und k beliebig groß gewählt werden kann.

2. Wir wollen zunächst für $\sigma > 1$ $(s = \sigma + ti)$ die Identität

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(n)}{n^s} = e^{\psi(s)}$$

beweisen, wobei

$$(3) \qquad \psi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [\zeta(ks) - 1].$$

Wir betrachten zu diesem Zwecke das Produkt

$$P(s) = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{3^{3s}} + \ldots\right) \cdot \\ \cdot \left(1 + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^{2s}} + \frac{1}{4^{3s}} + \ldots\right) \ldots$$

Die Faktoren dieses Produktes sind für $\sigma > 1$ absolut konvergente Reihen; auch das Produkt selbst ist für $\sigma > 1$ absolut konvergent, wie dies aus der Form

$$(4) \qquad P(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4^s}} \cdot \ldots$$

klar ist. Folglich kann man das Produkt in der üblichen Weise in eine Dirichletsche Reihe umordnen; jeder Zerlegung

$$n = \overbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{3 \cdot 3 \ldots 3}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{4 \cdot 4 \ldots 4}^{\alpha_3} \ldots$$

entspricht in der Dirichletschen Reihe das Glied

$$\frac{1}{(2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}4^{\alpha_3}\ldots)^s}$$

und umgekehrt. Auf diese Weise trägt jede einzelne Faktorisation von n zum Koeffizienten von $\frac{1}{n^s}$ genau 1 bei. Daraus folgt

$$P(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R(n)}{n^s}. \tag{5}$$

Aus (4) erhalten wir

$$P(s)=e^{-\sum\limits_{k=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{k^s}\right)}=e^{\sum\limits_{k=2}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\frac{1}{k^{ls}}}.$$

Die in dem Exponenten stehende Doppelreihe ist für $\sigma>1$ absolut konvergent, folglich können wir die Reihenfolge der Summationen vertauschen:

$$P(s)=e^{\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{ls}}}=e^{\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}[\zeta(ls)-1]},$$

woraus unter Berücksichtigung von (5) und (3) die zu beweisende Gleichung (2) folgt.

3. Wir untersuchen jetzt die Funktion $\psi(s)$ und beweisen den Hilfssatz: *Die Funktion*

$$\varphi(s)=\psi(s)-\frac{1}{s-1}$$

ist für $\sigma>\frac{1}{2}$ *regulär und es ist* $\varphi(1)=0$.

In der Tat ist

$$\varphi(s)=\frac{1}{1}\left[\zeta(s)-\frac{1}{s-1}-1\right]+\frac{1}{2}[\zeta(2s)-1]+\frac{1}{3}[\zeta(3s)-1)]+\ldots \tag{6}$$

Die Glieder dieser Funktionenreihe sind für $\sigma>\frac{1}{2}$ regulär; die Reihe selbst ist gleichmäßig konvergent, da für $l\geqq 4$

$$\left|\frac{1}{l}(\zeta(ls)-1)\right|=\frac{1}{l}\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{ls}}\right|\leqq\frac{1}{l}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{l\sigma}}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{l}{2}}}$$

ist und die Reihe mit positiven Gliedern

$$\sum_{l=4}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{l}{2}}}$$

wegen der für jedes N gültigen Ungleichung

$$\sum_2^N \frac{1}{n^{4/2}} + \sum_2^N \frac{1}{n^{5/2}} + \sum_2^N \frac{1}{n^{6/2}} + \sum_2^N \frac{1}{n^{7/2}} + \ldots <$$

$$< \sum_2^N \frac{1}{n^{4/2}} + \sum_2^N \frac{1}{n^{4/2}} + \sum_2^N \frac{1}{n^{6/2}} + \sum_2^N \frac{1}{n^{6/2}} + \ldots =$$

$$= 2\left[\sum_2^N \frac{1}{n^2} + \sum_2^N \frac{1}{n^3} + \ldots\right] = 2\sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} < 2$$

konvergiert. Die zweite Behauptung beweisen wir folgenderweise: es ist bekanntlich

$$\lim_{s\to 1}\left[\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right] = C,$$

wo C die Eulersche Konstante ist. Daher ist wegen (6)

$$(7) \qquad \varphi(1) = C - 1 + \frac{1}{2}[\zeta(2)-1] + \frac{1}{3}[\zeta(3)-1] + \ldots =$$

$$= C - 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}[\zeta(k)-1].$$

Nun ist aber

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}[\zeta(k)-1] = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kn^k} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\left[-\log\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right] = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\log\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}\right] =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[\log\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{m}{m-1} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right)\right] = 1 - C,$$

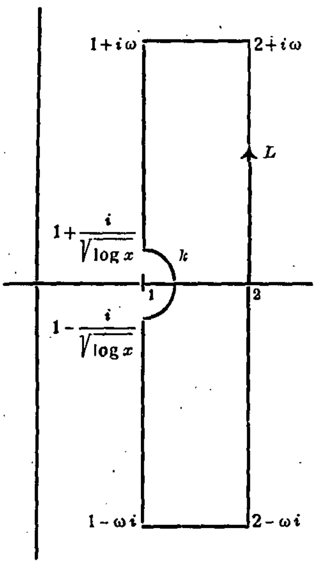
also wirklich

$$(8) \qquad \varphi(1) = 0.$$

4. Nach einer bekannten Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihen ist wegen (2)

$$(9) \qquad \sum_{n\le x} R(n)\log\frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^2} e^{\psi(s)}\, ds$$

wo $\int_{(2)}$ das Integral $\int_{2-\infty i}^{2+\infty i}$ bedeutet.



Um das Integral asymptotisch auswerten zu können, werden wir einen geeigneten Integrationsweg wählen. Betrachten wir das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)} \frac{x^s}{s^2}\, e^{\psi(s)}\, ds$$

wo (L) den aus der Figur ersichtlichen geschlossenen Weg bezeichnet. Innerhalb und längs der Kurve (L) ist der Integrand nach unserem Hilfsatze regulär; also ist der Wert des Integrals 0. Nun ist für $1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 1$, wenn C_1 (und später $C_2, C_3, \ldots$) positive Konstanten bezeichnen,

$$(10) \qquad |e^{\zeta(s)}| < C_1 t^{\frac{1}{2}}.$$

In der Tat[2]) ist für $1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 1$

$$|\zeta(s)| < C_2 \log t, \qquad \text{also} \qquad |e^{\zeta(s)}| \leqq e^{|\zeta(s)|} < t^{C_3},$$

ferner[3]) für $\sigma = 1$, $t \geqq 1$

$$|\zeta(s)| < \frac{1}{2}\log t + C_3, \qquad \text{also} \qquad |e^{\zeta(s)}| < C_4 t^{\frac{1}{2}},$$

endlich ist für $\sigma = 2$

$$|\zeta(s)| < C_5 \qquad \text{also} \qquad |e^{\zeta(s)}| < C_6;$$

hieraus folgt aber nach dem Phragmén—Lindelöfschen Satz,[4]) angewendet auf die Funktion $e^{\zeta(s)}$ und auf das Halbstreifen $1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 1$, die Ungleichung (10).

Für $\sigma \geqq 1$ ist nun offenbar (für $t \to \infty$)

$$|\psi(s) - \zeta(s)| = O(1)$$

also

$$|e^{\psi(s)-\zeta(s)}| \leqq e^{|\psi(s)-\zeta(s)|} = O(1)$$

folglich gilt für $1 \leqq \sigma \leqq 2$

$$(11) \qquad |e^{\psi(s)}| = |e^{\zeta(s)}|\,|e^{\psi(s)-\zeta(s)}| = O(t^{\frac{1}{2}}).$$

---

[2]) Vgl. z. B. E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig und Berlin, 1909), Bd. 1, S. 171.

[3]) Dies folgt z. B. aus der Abschätzung $\zeta(1+ti) = o(\log t)$, $t \to \infty$; vgl. H. Weyl, Zur Abschätzung von $\zeta(1+ti)$, *Math. Zeitschrift*, **10** (1921), S. 88—101.

[4]) Vgl. z. B. E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927) Bd. 2, Satz 405, S. 49—51.

Hieraus folgt für die Integrale längs den beiden wagerechten Wegstücken die für $\omega \to \infty$ gültige Abschätzung

$$\left| \int \frac{x^s}{s^2} e^{\psi(s)} ds \right| < C_7 \frac{x^2}{\omega^2} \omega^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Folglich ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s^2} e^{\psi(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(1)} \frac{x^s}{s^2} e^{\psi(s)} ds, \tag{12}$$

wo jetzt (1) den folgenden aus fünf Stücken bestehenden Weg bedeutet ($x > e$):

a) $\sigma = 1,\ t \leqq -1,$

b) $\sigma = 1,\ -1 \leqq t \leqq -\frac{1}{\sqrt{\log x}},$

c) den rechten Halbkreis (k) um 1 mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{\log x}}$,

d) $\sigma = 1,\ 1 \geqq t \geqq \frac{1}{\sqrt{\log x}},$

e) $\sigma = 1,\ t \geqq 1.$

Also ist

$$\int\limits_{(1)} \frac{x^s}{s^2} e^{\psi(s)} ds = \int\limits_{1-\infty i}^{1-i} + \int\limits_{1-i}^{1-\frac{i}{\sqrt{\log x}}} + \int\limits_{(k)} + \int\limits_{1+\frac{i}{\sqrt{\log x}}}^{1+i} + \int\limits_{1+i}^{1+\infty i} \equiv \tag{13}$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

Hier ist[5]) wegen (11)

$$|I_1| = |I_5| < x \int\limits_1^\infty \frac{1}{t^2} O(\sqrt{t})\, dt = O(x), \tag{14}$$

ferner

$$|I_2| = |I_4| = \left| x \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\log x}}}^{1} \frac{x^{it}}{(1+it)^2} e^{\frac{1}{it} + \varphi(1+it)} dt \right| < x O(1) = O(x); \tag{15}$$

daher ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s^2} e^{\psi(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} I_3 + O(x). \tag{16}$$

---

[5]) Die O-Abschätzungen beziehen sich durchwegs auf den Grenzübergang $x \to \infty$.

5. Jetzt haben wir also noch J_3 zu untersuchen. Es ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(k)} \frac{x^s}{s^2} e^{\psi(s)}\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2} e^{\psi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)} \frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{\log x}}\, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{x}{\sqrt{\log x}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sqrt{\log x}\, e^{i\vartheta}}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2} e^{\sqrt{\log x}\, e^{-i\vartheta}+\varphi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)} e^{i\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{x}{\sqrt{\log x}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2\sqrt{\log x}\cos\vartheta}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2} e^{\varphi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)} e^{i\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$(17) \qquad = \frac{1}{2\pi}\frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\sqrt{\log x}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-4\sqrt{\log x}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \frac{e^{\varphi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2} e^{i\vartheta}\, d\vartheta.$$

Da $\frac{e^{\varphi(s)}}{s^2}$ für $R(s) > \frac{1}{2}$ regulär ist, können wir die Funktion $\frac{e^{\varphi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2}$ nach Potenzen von $\frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{\log x}}$ entwickeln. Daher gilt wegen (8)

$$\frac{e^{\varphi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2} = 1 + a_1\frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{\log x}} + a_2\frac{e^{2i\vartheta}}{\sqrt{\log^2 x}} + \\ + \ldots + a_{k-1}\frac{e^{(k-1)i\vartheta}}{\sqrt{\log^{k-1}x}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log^k x}}\right),$$

also

$$(18) \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-4\sqrt{\log x}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \frac{e^{\varphi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2} e^{i\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$= J_1 + \frac{a_1}{\sqrt{\log x}}J_2 + \ldots + \frac{a_{k-1}}{\sqrt{\log^{k-1}x}}J_k + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log^k x}}\right),$$

wobei

$$J_m=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-4\sqrt{\log x}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} e^{mi\vartheta}\,d\vartheta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-4\sqrt{\log x}\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\cos m\vartheta\,d\vartheta=$$

$$=2\int_0^{\sqrt[4]{4\log x}} e^{-u^2}\frac{\cos\left(2m\arcsin\frac{u}{2\sqrt[4]{\log x}}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{4\sqrt{\log x}}\right)^{1/2}}\frac{du}{\sqrt[4]{\log x}}.$$

Hier können wir wegen

$$0\leqq u\leqq\sqrt[4]{4\log x},\ \frac{u^2}{4\sqrt{\log x}}\leqq\frac{1}{2}$$

die Funktion

$$\frac{\cos\left(2m\arcsin\frac{u}{2\sqrt[4]{\log x}}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{4\sqrt{\log x}}\right)^{1/2}}$$

nach Potenzen von $\frac{u^2}{\sqrt{\log x}}$ entwickeln, da sie eine an der Stelle 0 reguläre gerade Funktion von $\frac{u}{\sqrt[4]{\log x}}$ ist; also ist

$$J_m=\frac{2}{\sqrt[4]{\log x}}\int_0^{\sqrt[4]{4\log x}} e^{-u^2}\left\{1+b_1\frac{u^2}{\sqrt{\log x}}+b_2\frac{u^4}{\sqrt{\log^2 x}}+\right.$$

$$\left.+\ldots+b_{k-1}\frac{u^{2k-2}}{\sqrt{\log^{k-1}x}}+O\left(\frac{u^{2k}}{\sqrt{\log^k x}}\right)\right\}du,$$

wo die Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots$ von m abhängig sind. Da nun

$$\int_{\sqrt[4]{4\log x}}^{\infty} e^{-u^2}u^k\,du=\int_{\sqrt[4]{4\log x}}^{\infty} O(e^{-u})\,du=O\left(e^{-\sqrt[4]{4\log x}}\right),$$

ferner

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ist und $\int\limits_0^\infty e^{-u^2}u^k\,du$ konvergiert, so wird

$$(19)\qquad J_m=\frac{2}{\sqrt[4]{\log x}}\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\Big[1+b_1\frac{u^2}{\sqrt{\log x}}+b_2\frac{u^4}{\sqrt{\log^2 x}}+\ldots+$$

$$+b_{k-1}\frac{u^{2k-2}}{\sqrt{\log^{k-1}x}}+O\left(\frac{u^{2k}}{\sqrt{\log^k x}}\right)\Big]du+O\left(e^{-\sqrt[4]{4\log x}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt[4]{\log x}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\frac{c_1}{\sqrt{\log x}}+\frac{c_2}{\sqrt{\log^2 x}}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{c_{k-1}}{\sqrt{\log^{k-1}x}}\right]+O\left(\frac{1}{\log^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}x}\right).$$

(9), (16), (17), (18) und (19) zusammenfassend erhalten wir

$$(20)\qquad \sum_{n\leqq x}R(n)\log\frac{x}{n}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{3}{4}}x}+d_1x\frac{e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{5}{4}}x}+$$

$$+\ldots+d_{k-1}x\frac{e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2k+1}{4}}}+O\left(\frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2k+3}{4}}x}\right).$$

5. Es sei λ eine später zu bestimmende Funktion von x, von der wir vorläufig nur voraussetzen, daß $\lambda>0$ und $\lambda=\lambda(x)\to 0$ falls $x\to\infty$. Es ist offenbar

$$(21)\qquad \sum_{n\leqq x}R(n)\log\frac{x}{n}-\sum_{n\leqq\frac{x}{1+\lambda}}R(n)\log\frac{x}{n(1+\lambda)}=$$

$$=\log(1+\lambda)\sum_{n\leqq x}R(n)+\sum_{\frac{x}{1+\lambda}\leqq n\leqq x}R(n)\log\frac{x}{n(1+\lambda)}\leqq$$

$$\leqq\log(1+\lambda)\sum_{n\leqq x}R(n)\leqq$$

$$\leqq\log(1+\lambda)\sum_{n\leqq x}R(n)+\sum_{x<n\leqq x(1+\lambda)}R(n)\log\frac{x+\lambda x}{n}=$$

$$=\sum_{n\leqq x+\lambda x}R(n)\log\frac{x+\lambda x}{n}-\sum_{n\leqq x}R(n)\log\frac{x}{n}.$$

Nach (20) ist ferner, wenn wir $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = d_0$ setzen,

$$(22) \quad \sum_{n \leq x} R(n) \log \frac{x}{n} - \sum_{n \leq \frac{x}{1+\lambda}} R(n) \log \frac{x}{n(1+\lambda)} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k-1} d_\nu \left(\frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}} x} - \frac{x}{1+\lambda} \frac{e^{2\sqrt{\log x - \log(1+\lambda)}}}{\log^{\frac{2\nu-3}{4}} \frac{x}{1+\lambda}} \right) + O\left(\frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2k+3}{4}} x} \right).$$

Nun ist aber

$$(23) \quad \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} - \frac{x}{1+\lambda} \frac{e^{2\sqrt{\log x - \log(1+\lambda)}}}{\log^m \frac{x}{1+\lambda}} =$$

$$= \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left\{ 1 - \frac{e^{2\sqrt{\log x - \log(1+\lambda)} - 2\sqrt{\log x}}}{(1+\lambda)\left(\frac{\log x - \log(1+\lambda)}{\log x} \right)^m} \right\} =$$

$$= \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left\{ 1 - \frac{e^{2\sqrt{\log x}\left(\left[1 - \frac{\log(1+\lambda)}{\log x} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right)}}{1+\lambda} \left[1 - \frac{\log(1+\lambda)}{\log x} \right]^{-m} \right\} =$$

$$= \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left\{ 1 - \frac{e^{2\sqrt{\log x}\left[-\frac{1}{2} \frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O\left(\frac{\lambda^2}{\log^2 x} \right) \right]}}{1+\lambda} \left[1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + m \frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O\left(\frac{\lambda^2}{\log^2 x} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left\{ 1 - \frac{1}{1+\lambda} e^{-\log(1+\lambda) \log^{-\frac{1}{2}} x + O\left(\lambda^2 \log^{-\frac{3}{2}} x \right)} \left[1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + m \frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O\left(\frac{\lambda^2}{\log^2 x} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left\{ 1 - [1 - \lambda + O(\lambda^2)] \left[1 - \frac{\log(1+\lambda)}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{\lambda^2}{\log x} \right) \right] \left[1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + m \frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O\left(\frac{\lambda^2}{\log^2 x} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left\{ 1 - \left[1 - \lambda - \frac{\log(1+\lambda)}{\sqrt{\log x}} + m \frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O(\lambda^2) \right] \right\} =$$

$$= \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left\{ \lambda + \frac{\log(1+\lambda)}{\sqrt{\log x}} - m \frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O(\lambda^2) \right\}.$$

Wenn wir (23) in (22), dann in (21) einsetzen und durch $\log(1+\lambda)$ dividieren, so folgt unter Beachtung, daß

$$\frac{\lambda}{\log(1+\lambda)} = 1 + O(\lambda)$$

ist,

$$(24)\quad \sum_{n\leqq x} R(n) \geqq \sum_{\nu=0}^{k-1} d_\nu \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}} x}\left[1+\frac{1}{\sqrt{\log x}} - \right.$$

$$\left. -\frac{2\nu+3}{4}\frac{1}{\log x} + O(\lambda)\right] + O\left(\frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\lambda \log^{\frac{2k+3}{4}} x}\right).$$

In genau derselben Weise sieht man ein, daß

$$\sum_{n\leqq x+\lambda x} R(n)\log\frac{x+\lambda x}{n} - \sum_{n\leqq x} R(n)\log\frac{x}{n} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k-1} d_\nu \left(\frac{(1+\lambda)xe^{2\sqrt{\log x+\log(1+\lambda)}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}}(x+\lambda x)} - \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}} x}\right) + O\left(\frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2k+3}{4}} x}\right)$$

und

$$\frac{x(1+\lambda)e^{2\sqrt{\log x+\log(1+\lambda)}}}{\log^m(x+\lambda x)} - \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} =$$

$$= \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x}\left[\lambda + \frac{\log(1+\lambda)}{\sqrt{\log x}} - m\frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O(\lambda^2)\right],$$

also nach (21)

$$(25)\quad \sum_{n\leqq x} R(n) \leqq \sum_{\nu=0}^{k-1} d_\nu \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}} x}\left[1+\frac{1}{\sqrt{\log x}} - \right.$$

$$\left. -\frac{2\nu+3}{4}\frac{1}{\log x} + O(\lambda)\right] + O\left(\frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\lambda \log^{\frac{2k+3}{4}} x}\right).$$

Aus (24) und (25) folgt

$$\sum_{n\leqq x} R(n) = \sum_{\nu=0}^{k-1} d_\nu \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}} x}\left[1+\frac{1}{\sqrt{\log x}} - \frac{2\nu+3}{4}\frac{1}{\log x}\right] +$$

$$+ O\left(\lambda \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{3}{4}} x}\right) + O\left(\frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\lambda \log^{\frac{2k+3}{4}} x}\right).$$

Man sieht unmittelbar ein, daß die günstigste Wahl von λ ist:

$$\lambda = \frac{1}{\log^{\frac{k}{4}} x};$$

dann erhält man

$$\sum_{n \leqq x} R(n) = \sum_{\nu=0}^{k+1} A_\nu \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}} x} + O\left(\frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{k+3}{4}} x}\right).$$

Setzt man hier $k = 2l$ und unterdrückt man diejenigen Glieder der Summe rechts, deren Größenordnung die des Restgliedes nicht übertrifft, so erhält man unter Beachtung von $A_0 = d_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

$$\sum_{n \leqq x} R(n) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{3}{4}} x} + A_1 \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{5}{4}} x} + \\ + \ldots + A_{l-1} \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2l+1}{4}} x} + O\left(\frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2l+3}{4}} x}\right),$$

wie behauptet.

(Eingegangen am 29. Juli 1932.)

Über trennende Knotenpunkte in Graphen (nebst Anwendungen auf Determinanten und Matrizen).

Von DÉNES KÖNIG in Budapest.

Unter einem *Graphen* versteht man eine endliche oder unendliche Menge von Elementen, die *Knotenpunkte (Punkte)* genannt werden und von denen gewisse Paare durch eine oder mehrere (eventuell unendlich viele) *Kanten* „verbunden sind." Eine Kante, die P und Q verbindet, wird manchmal durch PQ bezeichnet; P und Q sind die *Endpunkte* dieser Kante. Im Gegensatz zur kontiunierlich-geometrischen Auffassung wird in der *kombinatorischen* (abstrakten) Auffassung der Graphentheorie — und im Folgenden wird ausschließlich diese Auffassung zur Geltung kommen — eine Kante nicht als Punktmenge aufgefaßt: eine Kante PQ ist einfach eine *Zusammenfassung* der verschiedenen[1]) Elemente P und Q; sie besitzt die *einzige* definierende Eigenschaft ihre Endpunkte P, Q zu bestimmen. Ein Graph wird schon durch seine Kanten bestimmt, als Knotenpunkte gelten stets die Endpunkte seiner Kanten.

Ein Knotenpunkt heißt ein *Endpunkt* eines Graphen, wenn in ihm eine einzige Kante (eine *Endkante*) endet. Ein Graph heißt *endlich* oder *unendlich*, je nach dem er endlich oder unendlich viele Kanten besitzt. Sind alle Kanten (also auch alle Knotenpunkte) des Graphen G' im Graphen G enthalten, so heißt G' ein *Teilgraph* von G. Zwei Arten von Graphen spielen als Teilgraphen eine besondere Rolle: sind die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sämtlich von einander verschieden, so bilden Kanten vom Typus P_1P_2, $P_2P_3, \ldots$, $P_{n-1}P_n$ einen *Weg* $(P_1P_2 \ldots P_n)$ und verschiedene Kanten vom Typus P_1P_2, $P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$, P_nP_1 einen *Kreis*. Hier ist $n \geqq 2$

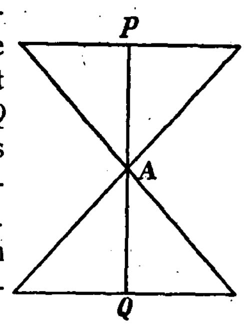
[1]) Sog. „Schlingen" werden also hier ausgeschlossen.

eine beliebige endliche Zahl. Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn für irgend zwei seiner Knotenpunkte ein Weg existiert, welcher diese „verbindet." Werden die Kanten eines Graphen derart in Klassen eingeteilt, daß zwei Kanten dann und nur dann derselben Klasse zugeteilt werden, wenn ein und derselbe Weg des Graphen diese zwei Kanten enthält, so bilden die Kanten derselben Klasse je einen *zusammenhängenden Bestandteil* des Graphen. Jeder Graph zerfällt auf eine eindeutige Weise in seine zusammenhängenden Bestandteile. Zwei Graphen (Wege, Kreise) heißen *fremd*, wenn sie keinen gemeinsamen Knotenpunkt (also auch keine gemeinsame Kante) besitzen.

Im Folgenden werden aus den ersten Elementen der Graphentheorie noch folgende zwei leicht beweisbare Sätze angewendet werden. Verbindet ein Weg W_1 die Knotenpunkte P_1 und P_2 und ein Weg W_2 die Knotenpunkte P_2 und P_3, so bilden gewisse Kanten von W_1 und W_2 einen Weg, der P_1 und P_3 verbindet. Enthält ein Kreis K_1 die Kanten k_1 und k_2 und ein Kreis K_2 die Kanten k_2 und k_3, so bilden gewisse Kanten von K_1 und K_2 einen Kreis, der k_1 und k_3 enthält.

§ 1. Artikulationen und Glieder.

In der Theorie der endlichen und der unendlichen Graphen spielt eine Art von Knotenpunkten — Artikulation genannt — eine besondere Rolle. Sie sind durch eine analoge Eigenschaft ausgezeichnet, wie unter den Kanten die sog. Brücken.[2]) Ein Knotenpunkt A eines Graphen G heiße nämlich eine *Artikulation* von G, wenn G zwei nach A laufende Kanten AP und AQ von der Beschaffenheit besitzt, daß jeder Weg von G, der P mit Q verbindet, auch A enthält (s. die Figur). Dies besagt m. a. W., daß kein Kreis von G zugleich die drei Knotenpunkte A, P, Q enthält. Aus dieser Definition folgt unmittelbar: ein Endpunkt des Graphen ist niemals eine Artikulation; derjenige Endpunkt einer Endkante,



der kein Endpunkt des Graphen ist, ist eine Artikulation; jeder Knotenpunkt eines kreislosen Graphen (eines „Baumes") ist ent-

[2]) Eine Kante eines zusammenhängenden Graphen heißt eine *Brücke*, falls die übrigen Kanten einen nicht-zusammenhängenden Graphen bilden.

weder ein Endpunkt oder eine Artikulation; die Endpunkte einer Brücke sind Artikulationen. Es gilt der Satz:

1. *Ein Knotenpunkt A eines Graphen G ist dann und nur dann eine Artikulation, wenn man die übrigen Knotenpunkte von G so in zwei nichtleere Klassen Π_1 und Π_2 einteilen kann, daß jeder $\Pi_1\Pi_2$-Weg*[3]) *den Punkt A enthält.*

Sei nämlich erstens A eine Artikulation, also AP und AQ zwei solche Kanten, daß jeder Weg von P nach Q den Punkt A enthält. Betrachten wir sämtliche Wege $W_1 = AP \ldots X$, die mit der Kante AP beginnen. Die zweiten Endpunkte X von allen solchen Wegen sollen die Menge Π_1 bilden. Dann gehört also P zu Π_1, jedoch Q zur komplementären Menge Π_2. Gäbe es nun einen Weg W von einem Punkte X aus Π_1 nach einem Punkt Y aus Π_2, welcher A nicht enthält, so könnte man aus den Kanten der Wege W_1 und W einen von A nach Y führenden Weg zusammensetzen; dieser würde mit der Kante AP beginnen (da aus W und aus W_1 keine andere Kante in A endet) und Y würde nicht zu Π_2, sondern zu Π_1 gehören.

Zweitens nehmen wir an, die Mengen Π_1 und Π_2 seien von der genannten Beschaffenheit, X sei ein beliebiger Punkt aus Π_1 und Y aus Π_2. Gibt es keinen Weg von A nach X, so kann natürlich kein Weg von X nach Y den Punkt A enthalten. Wir dürfen also voraussetzen, daß ein Weg $AR_1R_2 \ldots X$ von A nach X und ebenso auch ein Weg $AS_1S_2 \ldots Y$ von A nach Y existiert. Hier ist $R_1 \neq S_1$, da man sonst aus den Kanten der Teilwege $R_1R_2 \ldots X$ und $S_1S_2 \ldots Y$ einen A nicht enthaltenden Weg von X nach Y bilden könnte, was unserer Annahme widerspricht. Dann ist aber A in der Tat eine Artikulation, da jeder Weg W von R_1 nach S_1 den Punkt A enthält, sonst könnte man nämlich aus den Kanten der drei Wege $X \ldots R_2R_1$, W und $S_1S_2 \ldots Y$ einen Weg von X nach Y bilden, der A nicht enthält.

Der Begriff der Artikulation wurde, und zwar durch die im Satz 1 ausgesprochene Eigenschaft von SAINTE-LAGUË [9][4]) eingeführt.

Durch seine Artikulationen wird der Graph — anschaulich

---

[3]) Ein Weg heißt ein $\Pi_1\Pi_2$-Weg, wenn er einen Punkt aus Π_1 mit einem Punkt aus Π_2 verbindet. Im entsprechenden Sinne wird die Bezeichnung $\Pi_1\Pi_2$-Kante benützt werden.

[4]) Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf die *Bibliographie*, die sich am Ende dieser Abhandlung befindet.

ausgedrückt — „in seine Glieder zerlegt". Wie diese Ausdrucksweise zu verstehen ist, soll im Folgenden genau beschrieben werden.

Enthält ein Kreis des Graphen G die Kanten k_1 und k_2, so soll dies übergangsweise durch $k_1 \circ k_2$ ausgedrückt werden. Wir setzen außerdem $k \circ k$ für jede Kante k von G. Die für die Kantenmenge K von G so definierte binäre Relation $\circ$ besitzt folgende Eigenschaften:

α) Es ist stets $k \circ k$ (Reflexivität).

β) Aus $k_1 \circ k_2$ folgt $k_2 \circ k_1$ (Symmetrie).

γ) Aus $k_1 \circ k_2$ und $k_2 \circ k_3$ folgt $k_1 \circ k_3$ (Transitivität).

Die Eigenschaften α) und β) sind trivial, aber auch die Eigenschaft γ) läßt sich — wie in der Einleitung schon erwähnt wurde — unmittelbar einsehen. Es folgt bekannter Weise aus diesen drei Eigenschaften, daß man die Kantenmenge K von G — und zwar in eindeutiger Weise — so in paarweise elementenfremde Klassen K_α einteilen kann, daß zwei Kanten k_1 und k_2 dann und nur dann zur selben Klasse gehören, falls $k_1 \circ k_2$ besteht. Die Kanten von G, die einer und derselben Klasse angehören, bilden ein *Glied* von G.[5])

Jedes Glied ist ein zusammenhängender Teilgraph von G. Die Endkanten und Brücken bilden — da sie in keinem Kreis enthalten sind — an sich je ein Glied. Alle übrigen Glieder enthalten wenigstens zwei Kanten. Jede Kante gehört einem und nur einem Gliede an. Zwei Kanten, welche dasselbe Punktepaar verbinden, gehören — da sie zusammen einen Kreis bilden — demselben Gliede an.[6]) Jeder Knotenpunkt gehört wenigstens einem Gliede an. Weiter gilt der Satz:

2. *Ein Knotenpunkt gehört mehreren oder nur einem Gliede an, je nach dem er eine Artikulation ist oder nicht.*

Ist nämlich A eine Artikulation, so gibt es zwei Kanten AP

---

[5]) Ein ähnlicher Begriff (*membre*) wurde von Sainte-Laguë [9] eingeführt: ein *membre* ist ein Glied, welches nur eine Artikulation des ursprünglichen Graphen enthält. Der von Whitney [11] eingeführte Begriff *component* deckt sich inhaltlich mit dem hier eingeführten Begriff des Gliedes. Für Artikulation benützt Whitney — in Anschluß an Ayres — die Bezeichnung *cut-point*.

[6]) Wenn also in den hier folgenden Untersuchungen davon die Rede sein wird, ob die Kante PQ einem oder anderen Gliede angehört, dürfen wir schlechtweg von *der Kante PQ* sprechen, auch wenn mehrere Kanten P mit Q verbinden.

und AQ, die keinem Kreise zugleich angehören, also verschiedenen Gliedern angehören; beide Glieder enthalten A. Gehört andererseits A zu zwei Gliedern, so muß das eine Glied eine Kante AP, das andere eine Kante AQ enthalten, wobei kein Kreis zugleich AP und AQ enthält; dann ist aber A eine Artikulation.

3. *Besitzt ein Graph keine Artikulationen, so sind seine Glieder mit seinen zusammenhängenden Bestandteilen identisch.*

Gehören nämlich die Kanten k_1 und k_2 von G demselben Gliede von G an, so gehören sie — da ein Glied stets zusammenhängend ist — auch demselben zusammenhängenden Bestandteile von G an. Gehören andererseits k_1 und k_2 demselben zusammenhängenden Bestandteile an, so existiert ein Weg $P_1 P_2 \ldots P_n$ wo $P_1 P_2 = k_1$ und $P_{n-1} P_n = k_2$ ist. Da P_2 keine Artikulation ist, gehört, laut Satz 2, $P_2 P_3$ demselben Gliede an, wie $P_1 P_2 = k_1$. Da auch P_3, $P_4, \ldots$ keine Artikulationen sind, gehören, der Reihe nach, ebenso auch $P_3 P_4$, $P_4 P_5, \ldots$ und endlich $P_{n-1} P_n = k_2$ demselben Gliede an. Damit ist der Satz bewiesen. Als Spezialfall ergibt sich der Satz:

4. *Besitzt ein zusammenhängender Graph keine Artikulationen, so ist er sein einziges Glied.*

5. *Besteht ein zusammenhängender Graph nicht aus einer einzigen Kante und besitzt er keine Artikulation, so gibt es für irgend zwei Knotenpunkte P, Q des Graphen zwei Wege, die P und Q miteinander verbinden und außer P und Q keinen gemeinsamen Knotenpunkt besitzen.*[7])

Sei nämlich k_1 eine Kante, die in P und k_2 eine Kante, die in Q endet. Da der Graph nicht aus einer einzigen Kante PQ besteht, lassen sich k_1 und k_2 als verschiedene Kanten wählen. Laut Satz 4 gibt es einen Kreis, der k_1 und k_2 enthält; dieser enthält auch P und Q und wird durch P und Q in zwei Wege von der verlangten Eigenschaft zerlegt.

Nun beweisen wir:

6. *Kein Knotenpunkt eines Gliedes G_α ist eine Artikulation von G_α.*

Sonst würde es nämlich in G_α zwei Kanten, AP und AQ geben, die nicht im selben Kreise von G_α enthalten wären; dann wären aber AP und AQ auch in keinem Kreise von G enthalten,

---

[7]) Vgl. Whitney [11], Theorem 7.

da alle Kanten eines Kreises demselben Gliede G_α angehören. Und dies widerspricht der Definition des Gliedes.

7. *Zwei verschiedene Glieder eines Graphen besitzen höchstens einen gemeinsamen Knotenpunkt.*

Nehmen wir an, P und Q wären gemeinsame Knotenpunkte der Glieder G_α und G_β von G. Es führt dann sowohl ein Weg $PR_1R_2\ldots Q$ von G_α, wie auch ein Weg $PS_1S_2\ldots Q$ von G_β aus P nach Q. Es sei in der Folge $R_1, R_2, \ldots, Q$ der erste Punkt, der auch im Wege $PS_1S_2\ldots Q$ enthalten ist, R_k, also $R_k = S_l$ (oder Q). Dann haben die beiden Wege $PR_1R_2\ldots R_k$ und $PS_1S_2\ldots S_l$ keinen gemeinsamen inneren Knotenpunkt, bilden also zusammen einen Kreis und dies widerspricht der Tatsache, daß PS_1 und PR_1 zu verschiedenen Gliedern gehören.

Gehören die Kanten $P_{k-1}P_k$ und P_kP_{k+1} $(1 < k < n)$ des Weges $W = P_1P_2\ldots P_k\ldots P_n$ zu verschiedenen Gliedern, so ist, laut Satz 2, P_k eine Artikulation. Sie soll als eine *Durchgangsartikulation* von W bezeichnet werden.

8. *Gehören die Endpunkte eines Weges $W = P_1P_2\ldots P_n$ nicht demselben Gliede an, so ist wenigstens ein innerer Knotenpunkt dieses Weges W eine Durchgangsartikulation von W.*

Da nämlich P_1P_2 und $P_{n-1}P_n$ zu verschiedenen Gliedern gehören, muß es im Wege $P_1P_2\ldots P_n$ zwei Nachbarkanten $P_{k-1}P_k$ und P_kP_{k+1} geben, die ebenfalls zu verschiedenen Gliedern gehören, so daß P_k tatsächlich eine Durchgangsartikulation von W ist.

9. *Enthält der Weg $P_1P_2\ldots P_k\ldots P_n$ die Durchgangsartikulation P_k, so ist P_k in jedem Wege W enthalten, der P_1 mit P_n verbindet.*

Nehmen wir an, dies wäre nicht der Fall. Man kann aus gewissen Kanten von $P_{k+1}P_{k+2}\ldots P_n$ und von W einen Weg W_1 bilden, der P_{k+1} mit P_1 verbindet und P_k nicht enthält, da P_k in keinem der „vereinigten" Wege enthalten ist. Aus demselben Grunde kann man aus gewissen Kanten von W_1 und von $P_1P_2\ldots P_{k-1}$ einen Weg W_2 bilden, der P_{k+1} mit P_{k-1} verbindet und der P_k ebenfalls nicht enthält. Der Teilweg $P_{k-1}P_kP_{k+1}$ von $P_1P_2\ldots P_k\ldots P_n$ hat also mit W_2 nur ihre Endpunkte gemein. Die Vereinigung dieser Wege $P_{k-1}P_kP_{k+1}$ und W_2 ergibt also einen Kreis, der $P_{k-1}P_k$ und P_kP_{k+1} enthält. Dies ist aber unmöglich, da diese zwei Kanten verschiedenen Gliedern angehören, womit der Satz bewiesen ist.

Also hat W die Form $P_1Q_1Q_2\ldots Q_\nu P_kR_1R_2\ldots R_\mu P_n$. Wir zeigen, daß $Q_\nu P_k$ demselben Gliede G_α angehört, wie $P_{k-1}P_k$. Dies ist klar, wenn $Q_\nu = P_{k-1}$ ist. Ist aber $Q_\nu \neq P_{k-1}$, so kann man aus gewissen Kanten der Wege $P_{k-1}P_{k-2}\ldots P_2P_1$ und $P_1Q_1Q_2\ldots Q_\nu$ einen Weg bilden, der von P_{k-1} nach Q_ν führt und P_k nicht enthält. Fügt man also diesem Wege die Kanten $P_{k-1}P_k$ und P_kQ_ν hinzu, so ergibt sich ein Kreis. Als Kanten dieses Kreises, gehören also $P_{k-1}P_k$ und P_kQ_ν wahrhaftig demselben Gliede an. Ebenso sieht man, daß P_kP_{k+1} und P_kR_1 einem und demselben Gliede angehören. Da aber $P_{k-1}P_k$ und P_kP_{k+1} verschiedenen Gliedern angehören, so gilt dasselbe für $Q_\nu P_k$ und P_kR_1. So ist bewiesen, daß P_k auch für W eine Durchgangsartikulation ist. Damit haben wir folgende Verschärfung des Satzes 9 erhalten:

10. *Zwei Wege mit gemeinsamen Endpunkten besitzen dieselben Durchgangsartikulationen.*

Der soeben ausgeführte Gedankengang zeigt sogar, daß diese Durchgangsartikulationen in beiden Wegen in derselben Reihenfolge aufeinander folgen.

Seien P und Q zwei beliebige Knotenpunkte eines beliebigen Graphen G. Liegen *erstens* P und Q im selben Gliede G_α von G, so sind zwei Fälle möglich: entweder besteht G_α aus einer einzigen Kante PQ, so daß PQ in keinem Kreise von G enthalten ist, also diese Kante PQ der einzige Weg von P nach Q ist; oder gibt es, da G_α zusammenhängend ist und (Satz 6) keine Artikulation (von G_α) besitzt, — laut Satz 5 — (in G_α) zwei Wege von P nach Q, die außer P und Q keinen gemeinsamen Knotenpunkt besitzen. Gehören *zweitens* P und Q nicht demselben Gliede an, so haben alle Wege, die P mit Q verbinden, einen gemeinsamen inneren Knotenpunkt, da (Satz 8) jeder solche Weg eine Durchgangsartikulation besitzt und diese Artikulation (Satz 9) auch in jedem anderen Weg von P nach Q enthalten ist. Ohne die Begriffe „Artikulation" und „Glied" kann man unser Resultat folgendermaßen formulieren:

11. *Für irgend zwei Knotenpunkte P, Q eines Graphen gibt es — wenn nur nicht eine Kante PQ der einzige von P nach Q führende Weg ist*[8]*) — nur folgende zwei Möglichkeiten:*

[8]) In der kontinuierlichen Auffassung der Graphen, wo Kanten auch „innere Punkte" besitzen, darf diese Bedingung wegbleiben; ist nämlich diese Bedingung nicht erfüllt, so ist jeder „innere" Punkt dieser Kante PQ ein gemeinsamer innerer Punkt „sämtlicher" Wege von P nach Q (Fall β)).

α) es gibt zwei Wege von P nach Q, die außer P und Q keinen gemeinsamen Knotenpunkt besitzen oder

β) alle Wege von P nach Q enthalten einen gemeinsamen inneren Knotenpunkt.

Hieraus ergibt sich noch folgender Satz:

12. *Seien Π_1 und Π_2 zwei fremde Teilmengen der Knotenpunktmenge eines Graphen G. Entweder gibt es zwei elementenfremde $\Pi_1\Pi_2$-Wege in G, oder besitzen alle $\Pi_1\Pi_2$-Wege von G einen gemeinsamen Knotenpunkt.*

Zum Beweis seien die Punkte P_α, bzw. die Punkte Q_β die Elemente von Π_1 bzw. von Π_2. Wir ergänzen G zu einem Graphen G^* indem wir zu G zwei neue Knotenpunkte P und Q und für alle Werte von α und β je eine Kante der Form PP_α und QQ_β hinzufügen. Da G^* keine Kante der Form PQ enthält, kann man auf G^* und auf das Punktepaar P, Q den Satz 11 anwenden. Enthält G^* zwei Wege von P nach Q: $PP_\alpha \ldots Q_\beta Q$ und $PP_{\alpha'} \ldots Q_{\beta'} Q$, die außer P und Q keinen gemeinsamen Punkt besitzen, so sind die Teilwege $P_\alpha \ldots Q_\beta$ und $P_{\alpha'} \ldots Q_{\beta'}$ zwei $\Pi_1\Pi_2$-Wege von G mit der verlangten Eigenschaft. Enthält andererseits jeder Weg $P \ldots Q$ von G^* einen von P und Q verschiedenen Punkt, welcher also auch Knotenpunkt von G ist, so muß dieser in jedem $\Pi_1\Pi_2$-Weg $P_\alpha \ldots Q_\beta$ von G enthalten sein, da dieser Weg zu einem Weg $PP_\alpha \ldots Q_\beta Q$ von G^* ergänzt werden kann.

[Die vorangehend entwickelten Begriffe und Sätze haben in der *kontinuierlichen* Auffassung der Graphen ihre Analoga. Dort entspricht dem Graphenbegriff der Begriff des *Peanoschen Raumes,* welcher als stetiges Bild der Strecke definiert wird und dem Begriff des Gliedes der von WHYBURN in 1927 eingeführte Begriff des *zyklischen Elementes.* Das Analogon unseres Satzes 11 ist der von AYRES bewiesene folgende Satz: werden die Punkte a und b eines Peanoschen Raumes durch keinen Punkt getrennt, so liegen sie auf einer einfachen geschlossenen Kurve dieses Raumes. Die Bibliographie dieser Untersuchungen (WHYBURN, AYRES, R. L. MOORE, KURATOWSKI) findet man in der Arbeit KURATOWSKI und WHYBURN [7]. Vgl. auch die viel allgemeineren Untersuchungen von MENGER [8], auf die wir noch zurückkommen (§ 4)].

Wir wollen noch hervorheben, daß in den vorangehenden Untersuchungen nirgends die Endlichkeit des Graphen vorausgesetzt wurde.

§ 2. Trennende Knotenpunktsysteme, insbesondere für paare Graphen.

Die vorangehenden Untersuchungen, auf die wir uns im Folgenden nicht stützen werden, lassen weitgehende Verallgemeinerungen zu.

Wir haben gesehen (Satz 1), daß zu jeder Artikulation A zwei fremde Teilmengen, Π_1 und Π_2, der Knotenpunktmenge des Graphen so angegeben werden können, daß jeder $\Pi_1\Pi_2$-Weg des Graphen A enthält. Wir werden dies auch so ausdrücken, daß Π_1 und Π_2 durch A *getrennt* werden. In Verallgemeinerung dieser Ausdrucksweise führen wir folgende Bezeichnung ein. Sei Π die Menge der Knotenpunkte eines Graphen G. Sind Π_1 und Π_2 zwei fremde Punktmengen, so sagen wir, daß Π_1 und Π_2 durch die Teilmenge Π' von Π (oder auch: durch die Punkte von Π') in G *getrennt* werden, wenn jeder $\Pi_1\Pi_2$-Weg von G wenigstens einen Punkt aus Π' enthält. (Dieser Punkt kann auch ein Endpunkt des Weges sein.) Hier muß nicht vorausgesetzt werden, daß Π_1 und Π_2 Teilmengen von Π sind.[9]) Es kann hier Π' auch die Nullmenge sein: die Aussage, daß Π_1 und Π_2 durch die Nullmenge getrennt werden, bedeutet natürlich, daß G keinen $\Pi_1\Pi_2$-Weg besitzt. In der gegebenen Definition muß weiter Π' weder zu Π_1 noch zu Π_2 fremd sein. Durch Π_1 selbst wird z. B. Π_1 von jeder zu Π_1 fremden Punktmenge getrennt. Es wird natürlich die trennende Menge Π' *nur* Punkte von $\Pi_1+\Pi_2$ enthalten, falls $\Pi_1+\Pi_2$ die ganze Knotenpunktmenge des Graphen ist. Auf diesen Fall bezieht sich der folgende Satz, den wir jetzt beweisen. Auch hier braucht der Graph nicht als endlich vorausgesetzt zu werden.

13. *In einem Graphen G soll jede Kante einen Punkt der Menge Π_1 mit einem Punkt der zu ihr fremden Menge Π_2 verbinden. Können Π_1 und Π_2 nicht durch weniger als n Punkte getrennt*

---

[9]) Ist z. B. G ein Teilgraph des Graphen H und sind Π_1 und Π_2 zwei fremde Teilmengen der Knotenpunktmenge von H, so hat es — laut der hier gegebenen Definition — einen Sinn, zu sagen, daß Π_1 und Π_2 in G durch eine Teilmenge Π' der Knotenpunktmenge von G getrennt werden, auch wenn nicht alle Punkte von $\Pi_1+\Pi_2$ zu G gehören. Dies ist z. B. stets der Fall, wenn kein $\Pi_1\Pi_2$-Weg von H gänzlich zu G gehört, also z. B. wenn kein Punkt von Π_1 (oder Π_2) zu G gehört.

werden (n eine beliebige endliche Zahl),[10] *so gibt es n Kanten in G, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen.*

In dem Graphen G sei k die (endliche) Maximalzahl der Kanten von G, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen.[11] Wir setzen voraus, daß $k<n$ ist; dann genügt es zu zeigen, daß Π_1 und Π_2 durch weniger als n Punkte getrennt werden können. Es sei also

$$K=(P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots, P_kQ_k)$$

eine Menge von k Kanten von G, wo die $2k$ Punkte P_i und Q_i sämtlich voneinander verschieden sind. Hier bedeuten die P_i Punkte von Π_1 und die Q_i Punkte von Π_2. Und zwar setzen wir:

$$\Pi_1'=(P_1, P_2, \ldots, P_k), \; \Pi_2'=(Q_1, Q_2, \ldots, Q_k).$$

Einen Weg $A_1A_2\ldots A_{2r}$ von G wollen wir als einen *K-Weg*[12] bezeichnen, falls seine zweite (A_2A_3), vierte $(A_4A_5), \ldots, 2\nu$-te $(A_{2\nu}A_{2\nu+1}), \ldots,$ vorletzte $(A_{2r-2}A_{2r-1})$ Kante zu K gehört. Wir beweisen zunächst den *Hilfssatz:*

Ein Punkt von $\Pi_1-\Pi_1'$ kann mit einem Punkt von $\Pi_2-\Pi_2'$ durch keinen K-Weg verbunden werden.

Wäre nämlich W ein solcher Weg, so könnte man aus K diejenigen Kanten, die in W enthalten sind, entfernen und die in K nicht enthaltenen Kanten von W (ihre Anzahl ist um 1 größer) hinzufügen und auf diese Weise $k+1$ solche Kanten von G erhalten, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen; dies steht aber mit der Maximaleigenschaft von k im Widerspruch.

Nun definieren wir eine Teilmenge $\Pi'=(R_1, R_2, \ldots, R_k)$ von $\Pi_1'+\Pi_2'$ folgendermaßen. Für $\alpha=1, 2, \ldots,$ oder k sei $R_\alpha=Q_\alpha$, falls ein K-Weg einen Punkt von $\Pi_1-\Pi_1'$ mit Q_α verbindet; gibt es keinen solchen K-Weg, so setzen wir $R_\alpha=P_\alpha$. Die Menge Π' enthält also je einen Endpunkt der Kanten von K. Wir beweisen, daß *die Menge Π' die Mengen Π_1 und Π_2 in G voneinander trennt.* Hiezu muß gezeigt werden, daß für jede Kante PQ von G (wo

[10]) Da jede Kante an sich ein $\Pi_1\Pi_2$-Weg ist, könnte man diese Bedingung in anschaulicher Weise auch so formulieren: man kann die Kanten des Graphen nicht durch weniger als n Punkte „erschöpfen", wobei wir von einer Punktmenge Π dann die Behauptung treffen, daß sie die Kantenmenge K erschöpft, falls jede Kante von K wenigstens einen Endpunkt aus Π besitzt.

[11]) Gibt es keine solche *endliche* Maximalzahl, so besteht natürlich der Satz.

[12]) Dieser Begriff, auf dem der hier folgende Beweis basiert, wurde zu ähnlichen Zwecken in meiner Arbeit [4] eingeführt.

P zu Π_1 und Q zu Π_2 gehört), entweder P oder Q ein Punkt von Π' ist. Wir unterscheiden vier Fälle.

Fall 1. P gehört zu $\Pi_1 - \Pi_1'$ und Q zu $\Pi_2 - \Pi_2'$. Fügt man PQ zur Menge K hinzu, so erhält man, im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von k, $k+1$ Kanten von G, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen. Dieser Fall ist also unmöglich.

Fall 2. P gehört zu $\Pi_1 - \Pi_1'$ und Q zu Π_2'. Dann ist, für $\alpha = 1, 2, \ldots,$ oder $k: Q = Q_\alpha$ und die Kante PQ bildet an sich einen K-Weg, der den Punkt P von $\Pi_1 - \Pi_1'$ mit $Q = Q_\alpha$ verbindet. Also gehört $Q = Q_\alpha$ zu Π'.

Fall 3. P gehört zu Π_1' und Q zu $\Pi_2 - \Pi_2'$. Dann ist für $\alpha = 1, 2, \ldots,$ oder $k: P = P_\alpha$. Würde es einen K-Weg geben, der einen Punkt P_0 von $\Pi_1 - \Pi_1'$ mit Q_α verbindet, so könnte man, indem man diesem Weg die Kanten $P_\alpha Q_\alpha$ und $P_\alpha Q$ hinzufügt, einen K-Weg erhalten, der P_0 mit Q verbindet; dies ist aber laut des Hilfssatzes unmöglich. Es gibt also keinen K-Weg, der einen Punkt von $\Pi_1 - \Pi_1'$ mit Q_α verbindet. Somit gehört $P = P_\alpha$ zu Π'.

Fall 4. P gehört zu Π_1' und Q zu Π_2'. Es sei etwa $P = P_\alpha$ und $Q = Q_\beta$. Ist $\alpha = \beta$, so gehört natürlich entweder $P = P_\alpha$ oder $Q = Q_\alpha$ zu Π'. Wir dürfen also $\alpha \neq \beta$ voraussetzen. Entweder gehört $P = P_\alpha$ zu Π' oder führt ein K-Weg aus einem Punkte P_0 von $\Pi_1 - \Pi_1'$ nach Q_α; im letzteren Fall ergibt sich, wenn man diesem K-Weg die Kanten $Q_\alpha P_\alpha$ und $P_\alpha Q_\beta$ hinzufügt, ein K-Weg, der von P_0 nach Q_β führt, so daß in diesem Fall $Q = Q_\beta$ zu Π' gehört.

Damit ist bewiesen, daß Π_1 und Π_2 durch eine k (also weniger als n) Punkte enthaltende Menge Π' voneinander getrennt werden. Der Beweis von Satz 13 ist damit beendet.[13])

Um die Tragweite dieses Satzes zu beleuchten, wollen wir noch zeigen, daß ein von mir [5][14]) schon vor längerer Zeit bewiesener Satz über die Faktorenzerlegung von regulären endlichen paaren Graphen aus Satz 13 unmittelbar abgeleitet werden kann.

---

13) Einen anderen Beweis teilte mir Herr L. Kalmár mit.

14) Später wurden für diesen Satz, bzw. für seine Interpretation in der Determinantentheorie und in der Kombinatorik verschiedene Beweise gegeben, so durch Frobenius, Sainte-Laguë, van der Waerden, Sperner, Skolem, Egerváry.

Der betreffende Satz lautet:

14. *Jeder endliche paare reguläre Graph besitzt einen Faktor ersten Grades.*[15])

Es sei nämlich G ein endlicher regulärer paarer Graph g-ten Grades, in dem jede Kante einen der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ mit einem der Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ verbindet $(P_i \neq Q_j)$.[16]) Die beiden Mengen $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ und $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ können nicht durch weniger als n Punkte getrennt werden; denn könnten sie durch $\nu < n$ Punkte getrennt werden, so daß jede Kante von G in einem dieser ν Punkte endet, so würde G höchstens νg Kanten haben, während er doch $ng > \nu g$ Kanten besitzt. Der Satz 13 besagt dann die Existenz eines Faktors ersten Grades und der Satz ist bewiesen.

In einer etwas prägnanteren Fassung läßt sich Satz 13 folgendermaßen formulieren:

15. *Für einen Graphen G sei m die (endliche) Minimalzahl der Knotenpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_m$, die so beschaffen sind, daß jede Kante von G in einem dieser Knotenpunkte endet und es sei n die Maximalzahl der Kanten $k_1, k_2, \ldots, k_n$, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen. Dann ist, falls G ein paarer Graph ist, $m = n$.*

Erstens ist nämlich $m \leqq n$; sonst gäbe es — laut Satz 13 — $n+1$ Kanten, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt haben. Zweitens ist auch $m \geqq n$, da zu jeder der Kanten $k_1, k_2, \ldots, k_n$ einer der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_m$ als Endpunkt angehört und verschiedenen Kanten auf diese Weise verschiedene Knotenpunkte entsprechen.

Als eine weitere Anwendung des Satzes 13 wollen wir noch folgenden Satz beweisen, welcher insbesondere durch seine An-

---

[15]) Ein Graph wird als ein *paarer* Graph bezeichnet, wenn jeder Kreis des Graphen eine gerade Anzahl von Kanten enthält, oder m. a. W., wenn man seine Knotenpunkte so in zwei Klassen einteilen kann, daß die beiden Endpunkte jeder Kante zu verschieden Klassen gehören. Ein endlicher Graph heißt *regulär* (PETERSEN), wenn in jedem Knotenpunkt dieselbe Anzahl von Kanten endet. Diese konstante Anzahl wird als der *Grad* des regulären Graphen bezeichnet. Ein Teilgraph G' von G heißt ein *Faktor k-ten Grades von G*, falls, in jedem Knotenpunkt von G, k Kanten von G' enden. Ein regulärer Graph ersten Grades (also jeder Faktor ersten Grades) ist somit ein Graph, der aus Kanten ohne gemeinsamen Endpunkten besteht.

[16]) Man sieht unmittelbar ein, daß die Anzahl der P mit der Anzahl der Q übereinstimmen muß.

wendung auf Determinanten — wovon im nächsten Paragraphen die Rede sein wird — von Interesse ist.

16. *Im (paaren) Graphen G soll jede Kante einen der Punkte von* $\Pi_1=(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ *mit einem der Punkte von* $\Pi_2=(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ *verbinden* $(P_i \neq Q_j)$ *und diejenigen Kanten von G, die in einem Faktor ersten Grades von G enthalten sind, sollen einen nichtzusammenhängenden Graphen* G^* *bilden. Dann kann man* $r\,(>0)$ *Punkte aus* Π_1 *und* $n-r\,(>0)$ *Punkte aus* Π_2 *so auswählen, daß keine Kante von G zwei ausgewählte Punkte verbinde.*

Erstens soll jede Kante von G in einem Faktor ersten Grades von G enthalten sein, so daß $G^*=G$ ist. Wir dürfen annehmen, daß die Kanten der Kantenmenge $K=(P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots, P_nQ_n)$ einen Faktor ersten Grades von G ergeben. Es sei G_1 ein zusammenhängender Bestandteil von G; da $G=G^*$ nicht zusammenhängend ist, enthält der aus den in G_1 *nicht* enthaltenen Kanten von G bestehender Graph G_2 wenigstens eine Kante. Mit der Kante P_iQ_j ist auch P_iQ_i in G_1 (bzw. in G_2) enthalten, also enthält sowohl G_1, wie G_2 wenigstens eine Kante aus K. Sind etwa $P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots, P_rQ_r$ in G_1 und $P_{r+1}Q_{r+1}, P_{r+2}Q_{r+2}, \ldots, P_nQ_n$ in G_2 enthalten, so gibt es keine Kante von G, die einen der r Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_r$ mit einem der $n-r$ Punkte $Q_{r+1}, Q_{r+2}, \ldots, Q_n$ verbinden würde und der Satz besteht.

Zweitens sei P_1Q_1 eine Kante von G, die in keinem Faktor ersten Grades von G enthalten ist. Sei G' der Graph, der aus G entsteht, wenn man alle nach P_1 und alle nach Q_1 laufenden Kanten aus ihm entfernt. In G' kann es nicht $n-1$ Kanten geben, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt haben, da man sonst durch Hinzunahme von P_1Q_1 einen P_1Q_1 enthaltenden Faktor ersten Grades von G erhalten würde. Laut Satz 13, (wo jetzt $n-1$ für n zu setzen ist) können also $\Pi_1'=(P_2, P_3, \ldots, P_n)$ und $\Pi_2'=(Q_2, Q_3, \ldots, Q_n)$ in G' durch weniger als $n-1$, also sicherlich durch $n-2$ Punkte getrennt werden. Gehören von diesen $n-2$ Punkten α Punkte zu Π_1' und $n-2-\alpha$ zu Π_2', dann gibt es in G', also auch in G, keine Kante, die eine der übrigen $n-1-\alpha=r$ Punkte von Π_1' mit einem der übrigen $n-1-(n-2-\alpha)=$ $=\alpha+1=n-r$ Punkte von Π_2' verbindet. Damit ist Satz 16 auch für diesen zweiten Fall bewiesen.

§ 3. Anwendung auf Determinanten und Matrizen.

Ich habe schon in verschiedenen Arbeiten auf den Zusammenhang zwischen der Graphentheorie und der Theorie der Determinanten und Matrizen hingewiesen (s. insbesondere [4] und [5]). Auch die Untersuchungen des vorangehenden Paragraphen gestatten eine Interpretation dieser Art. Dies beruht auf folgender Verabredung. Einer beliebigen (nicht unbedingt quadratischen) Zahlen-Matrix

$$M = \| a_{ik} \| \quad (i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, q)$$

ordnen wir einen paaren Graphen G folgendermaßen zu. (Wir beschränken uns in diesem Paragraphen auf endliche Matrizen und auf endliche Graphen). Den Zeilen von M soll je einer der p Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_p$ und den Spalten von M je einer der q Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_q$ entsprechen und wir führen *eine* Kante P_iQ_k dann und nur dann ein, wenn $a_{ik} \neq 0$ ist. Andere Kanten werden nicht eingeführt. Was besagt nun der Satz 13, wenn man ihn auf den so definierten paaren Graphen G anwendet und $\Pi_1 = (P_1, P_2, \ldots, P_p)$, $\Pi_2 = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_q)$ setzt, über die Matrix M? Hat man n Kanten von G, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen, so entsprechen ihnen n nicht verschwindende Elemente a_{ik}, die paarweise verschiedenen Reihen (Zeilen und Spalten) von M angehören, deren Produkt also (vom Vorzeichen stets abgesehn) ein Entwicklungsglied ($\neq 0$) einer Unterdeterminante n-ter Ordnung von M ergibt. Was bedeutet andererseits für eine Zahl n, die der Bedingung $n \leqq p$, $n \leqq q$ genügt, daß Π_1 und Π_2 durch weniger als n, also sicherlich durch $n-1$ Punkte in G getrennt werden können? Dies bedeutet, daß man $n-1$ Reihen (Zeilen und Spalten) von M so angeben kann, daß alle nicht-verschwindenden Elemente von M in einer dieser $n-1$ Reihen enthalten sind. Sind unter diesen $n-1$ Reihen $p-r\,(\geqq 0)$ Zeilen und $q-s\,(\geqq 0)$ Spalten enthalten, dann sind also alle Elemente, welche die übrigen r Zeilen mit den übrigen s Spalten gemein haben, gleich Null. Hier ist wegen $p-r \leqq n-1 < p$ sicherlich $r > 0$ und ebenso $s > 0$. Infolge von $(p-r)+(q-s) = n-1$ ist hier $s = (p+q-n+1)-r$ und r nimmt einen der Werte $1, 2, \ldots, p$ an. Unser Satz 13 ergibt also, in die Sprache der Matrizen übersetzt, folgendes Resultat.

17. *Verschwinden sämtliche Entwicklungsglieder aller Unter-*

determinanten n-ter Ordnung einer Matrix von p Zeilen und q Spalten (wo $n \leqq p$, $n \leqq q$ ist), so verschwinden alle Elemente, welche r Zeilen mit $(p+q-n+1)-r$ Spalten gemeinsam haben für $r=1$, oder 2, ..., oder p.

Die Übertragung des Satzes 15 ergibt ebenso folgenden Satz

18. *Die Minimalzahl der Reihen (Zeilen und Spalten), welche in ihrer Gesamtheit jedes nicht-verschwindende Element einer Matrix enthalten, ist gleich der Maximalzahl von nicht-verschwindenden Elementen, welche paarweise verschiedenen Zeilen und verschiedenen Spalten angehören.*[17])

Z. B. sind für die Matrix

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

beide dieser Zahlen gleich 3.

In diesem Satz darf natürlich für „nicht-verschwindend" eine beliebige Eigenschaft der Elemente gesetzt werden, so daß der Satz eine rein kombinatorische Eigenschaft der Matrizen (der zweidimensionalen Tafeln) ausspricht, wo die Elemente beliebige Gegenstände (nicht nur Zahlen) sein können.

Für $p=q=n$ ergibt sich aus Satz 17 folgender Determinantensatz von Frobenius [3]:

19. *Wenn alle Glieder einer Determinante n-ter Ordnung verschwinden, so verschwinden alle Elemente, welche r Zeilen mit $n-r+1$ Spalten gemeinsam haben, für $r=1$ oder 2, ..., oder n.*

In ähnlicher Weise wollen wir jetzt folgenden, ebenfalls von Frobenius [2][18]) stammenden Determinantensatz graphentheoretisch beweisen, bzw. auf Satz 16 zurückführen.

---

[17]) Die Sätze 17 und 18 hat der Verfasser, mit den hier gegebenen Beweisen, am 26. März 1931 in der Budapester Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft vorgetragen, s. [6]. Hieran anschließend hat dann E. Egerváry [1] für den Satz 18 einen anderen Beweis und eine interessante Verallgemeinerung gegeben.

[18]) Dort wird dieser Satz „aus verborgenen Eigenschaften der Determinanten mit nichtnegativen Elementen" durch komplizierte Betrachtungen bewiesen. Ich gab dann in 1915 in meiner Arbeit [4] einen elementaren graphentheoretischen Beweis (welcher hier durch einen noch einfacheren ersetzt wird). In 1917 hat dann auch Frobenius [3] einen elementaren Beweis publi-

20. *In einer Determinante n-ter Ordnung D seien die nichtverschwindenden Elemente unabhängige Veränderliche. Ist D eine reduzible Funktion ihrer (nichtverschwindenden) Elemente, so verschwinden alle Elemente von D, welche r Zeilen mit n—r Spalten gemeinsam haben für $r=1$ oder $2, \ldots,$ oder $n-1$.*

Der Determinante

$$D = |a_{ik}|_{i,\,k=1,\,2,\ldots,\,n}$$

ordnen wir einen paaren Graphen G mit den Knotenpunkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$; $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ wieder durch die Regel zu, daß G dann und nur dann eine Kante $P_i Q_k$ enthalten soll, wenn $a_{ik} \neq 0$ ist, während zwei P-Punkte, so wie zwei Q-Punkte niemals durch eine Kante verbunden werden. Jedem nichtverschwindenden Glied $a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$, wo $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ eine Permutation von $(1, 2, \ldots, n)$ ist, entspricht ein Faktor ersten Grades von G, nämlich $(P_1 Q_{i_1}, P_2 Q_{i_2}, \ldots, P_n Q_{i_n})$ und umgekehrt. Es sei G^* derjenige Teilgraph von G, welcher diejenigen Kanten von G enthält, die in einem

---

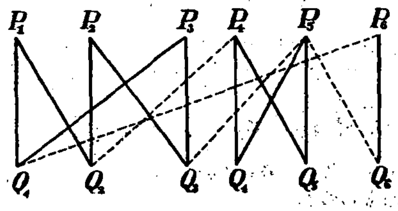
ziert, und zwar nach dem ich ihm meinen Beweis (in deutscher Übersetzung) zugeschickt hatte. Frobenius hat es dort unterlassen, diese Tatsache, sowie überhaupt meine Arbeit [4] zu erwähnen. Jedoch zitiert er meine Arbeit [5] und zwar mit folgender Bemerkung: „Die Theorie der Graphen, mittels deren Hr. König den obigen Satz [dies ist die determinantentheoretische Interpretation von Satz 14] abgeleitet hat, ist nach meiner Ansicht ein wenig geeignetes Hilfsmittel für die Entwicklung der Determinantentheorie. In diesem Falle führt sie zu einem ganz speziellen Satz vom geringem Werte. Was von seinem Inhalt Wert hat, ist in dem Satze II [dies ist der Frobeniussche Satz 19] ausgesprochen."

Es ist wohl natürlich, daß der Verfasser vorliegender Abhandlung diese Meinung nicht unterschreiben wird. Die Gründe, die man für oder gegen den Wert oder Unwert eines Satzes oder einer Methode anführen könnte, haben stets, mehr oder weniger, einen subjektiven Charakter, so daß es vom geringen wissenschaftlichen Wert wäre, wenn wir hier den Standpunkt von Frobenius zu bekämpfen versuchten. Wollte aber Frobenius seine verwerfende Kritik über die Anwendbarkeit der Graphen auf Determinantentheorie damit begründen, daß sein tatsächlich „wertvoller" Satz 19 nicht graphentheoretisch bewiesen werden kann, so ist seine Begründung — wie wir gesehen haben — sicherlich nicht stichhaltig. Der graphentheoretische Beweis, den wir für Satz 19 gegeben haben, scheint uns ein einfacher und anschaulicher Beweis zu sein, der dem *kombinatorischen* Charakter des Satzes in natürlicher Weise entspricht und auch zu einer bemerkenswerten Verallgemeinerung (Satz 17) führt.

Es sei noch erwähnt, daß wir oben, im § 2, beim Beweis des Satzes 16 einen Gedanken von Frobenius benützt haben, den er bei seiner Zurückführung des Satzes 20 auf Satz 19 angewendet hat.

Faktor ersten Grades von G enthalten sind. (Als Illustration zeigt die Figur den Graphen G, welcher der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{vmatrix}$$



zugeordnet ist. Die vertikal gezeichneten Kanten entsprechen dort den Elementen der Hauptdiagonale; zum Teilgraph G^* gehören die ausgezogenen Kanten.)

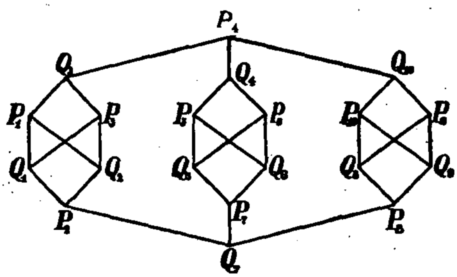
Nun sei D reduzibel. Wir beweisen, daß dann G^* *nicht zusammenhängend ist.* D hängt von einem (nichtverschwindenden) Element a_{ik} dann und nur dann ab, wenn a_{ik} in einem nichtverschwindenden Glied von D enthalten ist, wenn also $P_i Q_k$ zu G^* gehört. Setzt man also in D alle Elemente von denen D nicht abhängt (in unserem Beispiel $a_{42}, a_{53}, a_{56}, a_{61}$) gleich Null, so entspricht der so entstandenen Determinante D^* der Graph G^*. Nun ist D^*, da sie dieselbe Funktion, wie D darstellt, ebenfalls reduzibel: $D^* = D_1 D_2$, wo sowohl D_1, wie D_2 ein Polynom ist, welches wenigstens eine Veränderliche a_{ik} enthält. Da die Determinante in Bezug auf jedes Element linear ist, kann kein Element in beiden der Faktoren D_1, D_2 enthalten sein. Die Kanten $P_i Q_k$, die einem in D_1 (bzw. in D_2) enthaltenen Element a_{ik} entsprechen, sollen den Teilgraphen G_1 (bzw. G_2) von G^* bilden; jede Kante von G^* ist dann in einem und nur einem der Graphen G_1 und G_2 enthalten. G_1 und G_2 besitzen auch keinen gemeinsamen Knotenpunkt, denn wäre etwa P_i ein solcher, so müßte eine Kante $P_i Q_k$ zu G_1 und eine Kante $P_i Q_l$ zu G_2 gehören, also a_{ik} in D_1 und a_{il} in D_2 enthalten sein. Da aber a_{ik} und a_{il} derselben Zeile von D angehören und die Determinante in Bezug auf die Elemente einer Zeile linear ist, so ist dies unmöglich. G_1 und G_2 sind also fremd zueinander. Da jede Kante von G^* entweder zu G_1, oder zu G_2 gehört, ist somit G^* in der Tat nicht zusammenhängend. (In unserem obigen Beispiel zerfällt G^* in drei zusammenhängende Bestandteile.)

Wir können also auf G Satz 16 anwenden. Dieser besagt, — in die Determinantensprache übersetzt — daß die gemeinsamen

Elemente von r Zeilen und $n-r$ Spalten lauter Nullen sind. Damit ist aber Satz 20 bewiesen.

Wir wollen noch einmal das Resultat hervorheben, daß G^* nicht zusammenhängend ist, falls D reduzibel ist. Ebenso ersieht man, daß auch umgekehrt G^* zusammenhängend ist, wenn D irreduzibel ist. Damit haben wir eine auch praktisch sehr gut anwendbare *Methode, um zu entscheiden, ob eine Determinante, die als Elemente nur Nullen und unabhängige Veränderliche enthält, reduzibel ist,* — da an einem gezeichnet vorliegenden Graphen unmittelbar zu sehen ist, ob er zusammenhängend ist, oder nicht. Betrachten wir als zweites Beispiel die Determinante 10-ten Grades:

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{27} & 0 & 0 & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,10} \\
0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & a_{76} & a_{77} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} & a_{89} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{98} & a_{99} & a_{9,10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,8} & a_{10,9} & a_{10,10}
\end{vmatrix}$$



Auch mit Hilfe des Satzes 20 wäre es mühsam die Frage der Reduzibilität dieser Determinante zu entscheiden. Die Figur[19]) zeigt nun den entsprechenden paaren Graphen G. Da jede Zeile und jede Spalte genau 3 nicht-verschwindende Elemente besitzt, ist dies ein regulärer Graph, so daß — wie dies aus Satz 14 unmittelbar folgt — jede Kante in einem Faktoren ersten Grades

[19]) Dieser Graph wurde von Sainte-Laguë [9] als Beispiel für einen brückenlosen regulären paaren Graphen 3-ten Grades angegeben, für den kein Kreis existiert, welcher sämtliche Knotenpunkte enthält.

enthalten ist, also ist hier $G^* = G$. Man sieht, daß $G^* = G$ zusammenhängend ist. Deshalb ist unsere Determinante irreduzibel.

In dem für Satz 20 gegebenen Beweis wurden die charakteristischen Eigenschaften der Determinanten nur teilweise benützt. Würde man nämlich in der Determinantendefinition

$$|a_{ik}|_1^n = \sum \varepsilon_i a_{1 i_1} a_{2 i_2} \ldots a_{n i_n}$$

die Vorzeichen ε_i in beliebiger Weise modifizieren, ja sogar für die ε_i beliebige von Null verschiedene (von den a_{ik} unabhängige) Zahlen setzen und eventuell eine beliebige Konstante noch additiv hinzufügen, so würde die Richtigkeit des gegebenen Beweises hiedurch nicht beeinträchtigt. Dieser Beweis ergibt also auch folgendes allgemeineres Resultat:

21. *In einer Determinante n-ter Ordnung D seien die nicht-verschwindenden Elemente unabhängige Veränderliche. Eine mit nicht-verschwindenden Koeffizienten gebildete lineare ganze Funktion der Entwicklungsglieder von D ist (als Polynom der Elemente von D) nur dann reduzibel, wenn — für* $r = 1$ *oder* $2, \ldots,$ *oder* $n-1$ *— alle Elemente von D verschwinden, welche gewisse r Zeilen mit gewissen* $n-r$ *Spalten gemein haben.*

§ 4. Der Mengersche Satz.

Jetzt soll ein ganz allgemeiner Satz bewiesen werden, der die Sätze 12 und 13 — falls diese nur für endliche Graphen formuliert werden — als Spezialfälle in sich enthält. Er wurde von Menger [8][20]) ausgesprochen und lautet folgendermaßen.

[20]) S. dort Satz δ. Der Beweis von Menger enthält eine Lücke, da es vorausgesetzt wird (S. 102, Zeile 3—4), daß „K' ein punktförmiges Stück s enthält, welches in der Menge $P+Q$ nicht enthalten ist", während es recht wohl möglich ist, daß — mit der hier gewählten Bezeichnungsweise ausgedrückt — jeder Knotenpunkt von G zu $\Pi_1 + \Pi_2$ gehört. Dieser — keineswegs einfacher — Fall wurde in unserer Darstellung durch den Beweis des Satzes 13 erledigt. Die weiteren — hier folgenden — Überlegungen, die uns zum Mengerschen Satz führen werden, stimmen im Wesentlichen mit dem — sehr kurz gefaßten — Beweis von Menger überein. In Anbetracht der Allgemeinheit und Wichtigkeit des Mengerschen Satzes wird im Folgenden auch dieser Teil ganz ausführlich und den Forderungen der *rein-kombinatorischen* Graphentheorie entsprechend dargestellt.

[Zusatz bei der Korrektur, 10. V. 1933.] Herr Menger hat die Freundlichkeit gehabt — nachdem ich ihm die Korrektur meiner vorliegenden Arbeit zugeschickt habe — mir mitzuteilen, daß ihm die oben beanstandete Lücke

21. *Seien Π_1 und Π_2 zwei fremde Teilmengen der Knotenpunktmenge Π eines endlichen Graphen G, welche nicht durch weniger als n Knotenpunkte getrennt werden können. Dann gibt es in G n paarweise fremde $\Pi_1\Pi_2$-Wege.*

Entfernt man aus G, der Reihe nach, gewisse Kanten, so muß man, wegen der endlichen Kantenzahl, schließlich einen Graphen G^* von der Beschaffenheit erhalten, daß Π_1 von Π_2 auch in G^* nicht durch weniger als n Knotenpunkte getrennt werden kann,[21] wie man aber auch noch eine Kante aus G^* entfernt, in dem so entstandenen Graphen Π_1 von Π_2 durch weniger als n Knotenpunkte getrennt werden kann. Es genügt natürlich den Satz, statt für G, für G^* zu beweisen, so daß wir von Anfang an voraussetzen dürfen, daß *in jedem echten Teilgraph von G die Mengen Π_1 und Π_2 durch weniger als n Knotenpunkte getrennt werden können.* Diese Eigenschaft von G wird im Folgenden als *Eigenschaft α* bezeichnet.

Erstens sei $\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi$. Dann enthält jeder $\Pi_1\Pi_2$-Weg von G eine $\Pi_1\Pi_2$-Kante. Entsteht also G' aus G, indem eine Kante, die zwei Π_1-Punkte (bzw. zwei Π_2-Punkte) verbindet, entfernt wird, so wird durch eine Punktmenge, welche Π_1 von Π_2 in G trennt, Π_1 von Π_2 auch in G' getrennt. Wegen der Eigenschaft α verbindet also keine Kante von G zwei Punkte von Π_1 (bzw. von Π_2), so daß die Bedingungen des Satzes 13 erfüllt sind. Die diesem Satz entsprechenden n Kanten von G sind dann n Wege von G, welche die verlangte Eigenschaft besitzen.

Wir dürfen uns also auf den *zweiten* Fall beschränken, daß nämlich ein Knotenpunkt R_0 von G weder zu Π_1 noch zu Π_2 gehört.

Besteht G aus einer einzigen Kante, so gilt der zu beweisende Satz (es muß dann $n = 1$ sein), wir können also in Bezug auf die Kantenzahl von G vollständige Induktion anwenden.

Entfernt man aus G alle nach R_0 laufende Kanten, so kann — wegen der Eigenschaft α — in dem so entstandenen Graphen

---

seines Beweises schon bekannt war, daß jedoch sein vor Kurzem erschienenes Buch *Kurventheorie* (Leipzig, 1932) einen vollkommen lückenlosen und rein kombinatorischen Beweis des Mengerschen Satzes (des „n-Kettensatzes") enthält. Mir blieb dieser Beweis bis jetzt unbekannt.

[21]) Wie schon hervorgehoben wurde, hat diese Aussage auch dann einen Sinn, wenn gewisse Punkte von $\Pi_1 + \Pi_2$ nicht dem Teilgraphen G^* angehören.

Π_1 von Π_2 durch $r<n$ Knotenpunkte $R_1, R_2, \ldots, R_r$ getrennt werden. Dann wird Π_1 von Π_2 in G natürlich durch die Menge $M=(R_0, R_1, R_2, \ldots, R_r)$ getrennt, so daß $r+1 \geqq n$ ist; wegen $r<n$ folgt hieraus $r=n-1$. Zusammenfassend können wir also sagen: Π_1 und Π_2 werden in G durch eine Menge $M=(R_0, R_1, R_2, \ldots, R_{n-1})$ von n Punkten getrennt, wobei einer dieser Punkte, R_0, nicht zu $\Pi_1+\Pi_2$ gehört.

Ein Punkt R_i von M soll der Teilmenge M_1, bzw. M_2, bzw. M_0 zugeteilt werden, je nach dem er zu Π_1, bzw. zu Π_2, bzw. zu keiner dieser beiden Mengen gehört. Damit haben wir die Zerlegung $M=M_0+M_1+M_2$ in drei paarweise fremde Teile, wobei R_0 zu M_0 gehört.

Betrachten wir nun sämtliche Wege „vom Typus W_1", d. h. diejenigen Wege von G, die einen Punkt von Π_1-M_1 mit einem Punkt von M_0+M_2 verbinden und außer diesem Punkt von M_0+M_2 keinen Punkt von M enthalten. Diejenigen Kanten, die in einem Weg vom Typus W_1 enthalten sind, sollen den Teilgraph G_1 von G bilden. Ebenso sollen diejenigen Kanten von G, die in einem solchen Weg enthalten sind, welcher einen Punkt von Π_2-M_2 mit einem Punkt von M_0+M_1 verbindet und außer diesem Punkt von M_0+M_1 keinen Punkt von M enthält (Wege „vom Typus W_2"), den Teilgraph G_2 von G bilden.

Wir beweisen, daß *ein nicht zu M gehörender Punkt nicht gemeinsamer Knotenpunkt von G_1 und G_2 sein kann.* Hätten nämlich ein Weg $P \ldots A \ldots R_i$ vom Typus W_1 und ein Weg $Q \ldots A \ldots R_j$ vom Typus W_2 (es soll P stets einen Punkt von Π_1 und Q einen Punkt von Π_2 bezeichnen) einen gemeinsamen Knotenpunkt A, der nicht zu M gehört, so würden die Teilwege $P \ldots A$ und $Q \ldots A$ einen $\Pi_1\Pi_2$-Weg $P \ldots Q$ ergeben, der keinen M-Punkt enthält und dies ist unmöglich.

G_1 und G_2 können auch keine gemeinsame Kante besitzen, denn dann müßten beide Endpunkte dieser Kante M-Punkte sein, während — laut der Definition von G_1 und G_2 — eine Kante, die zwei M-Punkte verbindet, weder zu G_1, noch zu G_2 gehören kann.

Zu jedem Punkt R_i von M gehört ein $\Pi_1\Pi_2$-Weg von G, der aus M den Punkt R_i und nur diesen Punkt enthält; im entgegengesetzten Falle würden nämlich die von R_i verschiedenen

$n-1$ Punkte von M auch schon Π_1 von Π_2 trennen. Ist insbesondere $R_i = R_0$, so ist R_0 ein innerer Punkt des ihm auf diese Weise zugeordneten $\Pi_1\Pi_2$-Weges, so daß dieser Weg durch R_0 in zwei Wege zerlegt wird; der eine ist vom Typus W_1, der andere vom Typus W_2. Von den beiden nach R_0 laufenden Kanten dieses $\Pi_1\Pi_2$-Weges gehört also der eine zu G_1, der andere zu G_2. Somit enthält sowohl G_1, wie G_2 wenigstens eine Kante und *es enthält also sowohl G_2, wie G_1 weniger Kanten als G.*

In G_1 können $\Pi_1 - M_1$ und $M_0 + M_2$ nicht durch eine weniger als $m_0 + m_2$ Punkte enthaltende Menge M' getrennt werden (hier bezeichnen m_0, m_1, m_2 bzw. die Punktzahl der Mengen M_0, M_1, M_2), denn würde dies der Fall sein, so würde man, indem man die Menge M_1 hinzufügt, eine weniger als n Punkte enthaltende Menge $M' + M_1$ erhalten, durch die Π_1 und Π_2 in G getrennt wären. Enthält nämlich ein $\Pi_1\Pi_2$-Weg W von G keinen Punkt von M_1, beginnt er also in einem Punkt P von $\Pi_1 - M_1$ und ist R_i von P aus gerechnet der erste Punkt von W, der zu M, also zu $M_0 + M_2$ gehört, so ist der Teilweg $P \dots R_i$ von W ein Weg vom Typus W_1, also ein Weg in G_1, der einen Punkt von $\Pi_1 - M_1$ mit einem Punkt von $M_0 + M_2$ verbindet; dieser Teilweg, also auch W, muß somit einen Punkt von M' enthalten.

Da G_1 weniger Kanten besitzt als G, dürfen wir — laut unserer Induktionsvoraussetzung — den zu beweisenden Satz, wo jetzt $m_0 + m_2$ für n zu setzen ist, auf G_1, und zwar auf die Punktmengen $\Pi_1 - M_1$ und $M_0 + M_2$ anwenden. Diese Anwendung ergibt folgendes: es gibt $m_0 + m_2$ paarweise fremde Wege in G_1, die sämtlich einen Punkt von $\Pi_1 - M_1$ mit einen Punkt von $M_0 + M_2$ verbinden. Da $m_0 + m_2$ die Punktezahl von $M_0 + M_2$ ist, so gehört jeder der Punkte von $M_0 + M_2$ einem und nur einem dieser Wege (als Endpunkt) an, während ein Punkt aus M_1, da er nicht zu G_1 gehört, keinem dieser Wege angehört. Es seien unter ihnen $T_1, T_2, \dots, T_{m_2}$ die nach den Punkten von M_2, und $U_1', U_2', \dots, U_{m_0}'$ die nach den Punkten von M_0 laufenden Wege. Ebenso definiert man $m_0 + m_1$ Wege von G_2: $V_1, V_2, \dots, V_{m_1}$; $U_1'', U_2'', \dots, U_{m_0}''$ mit entsprechenden Eigenschaften. Laufen U_i' und U_i'' nach demselben M_0-Punkt, so bestimmen diese beiden Wege einen $\Pi_1\Pi_2$-Weg U_i von G. Dies folgt aus dem Umstande, daß nur ein Punkt von M gemeinsamer Punkt von G_1 und G_2 sein kann. Aus demselben Grunde sind dann die $n = m_0 + m_1 + m_2$ $\Pi_1\Pi_2$-Wege

$U_1, U_2, \ldots, U_{m_0}$; $V_1, V_2, \ldots, V_{m_1}$; $T_1, T_2, \ldots, T_{m_2}$ paarweise fremd zueinander, womit der Mengersche Satz bewiesen ist.[22])

In einer etwas prägnanteren Fassung läßt sich der Mengersche Satz — der Formulierung des Satzes 15 entsprechend — folgendermaßen formulieren.

22. *Seien Π_1 und Π_2 zwei fremde Teilmengen der Knotenpunktmenge Π eines endlichen Graphen G. Die Minimalzahl der Knotenpunkte, durch die Π_1 und Π_2 in G voneinander getrennt werden können, ist gleich der Maximalzahl der paarweise fremden $\Pi_1\Pi_2$-Wege von G.*

Bezeichnen wir nämlich diese Maximal- und Minimalzahl durch M, bzw. m, so gibt es M paarweise fremde $\Pi_1\Pi_2$-Wege in G; da jeder dieser Wege wenigstens einen Punkt aus jedem trennenden Punktsystem enthalten muß, ist $m \geqq M$. Andererseits besagt der Mengersche Satz, daß $M \geqq m$ ist. Also ist $m = M$.

Es sei hervorgehoben, daß in dem hier gegebenen Beweis des Mengerschen Satzes — im Gegensatz zu den Beweisen, die wir oben für Satz 12 und Satz 13 gegeben haben — die Voraussetzung, daß der Graph endlich sei — wegen der Anwendung der vollständigen Induktion — wesentlich war. Man wird also hier zum Problem geführt, ob für endliches n der Mengersche Satz auch für unendliche Graphen gültig bleibt. Mir bereitete diese Frage große Schwierigkeiten. Kürzlich ist es aber Herrn Paul Erdős, den ich auf dieses Problem aufmerksam machte, gelungen, die Frage in bejahendem Sinne zu beantworten. Als Abschluß dieser Abhandlung soll jetzt noch dieser Beweis von Erdős mitgeteilt werden.

Seien Π_1 und Π_2 zwei fremde Teilmengen der Knotenpunktmenge Π des unendlichen Graphen G, welche nicht durch weniger als n Knotenpunkte in G getrennt werden können, wo n eine beliebige endliche Zahl bedeutet. Nehmen wir an, daß im Widerspruch zu dem zu beweisenden Satze, die Maximalzahl r der paarweise fremden $\Pi_1\Pi_2$-Wege von G kleiner als n sei. Es seien $W_1, W_2, \ldots, W_r$ r paarweise fremde $\Pi_1\Pi_2$-Wege von G. Wir betrachten die *endliche* Menge M der Knotenpunktsysteme $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$, die so beschaffen sind, daß (für $i = 1, 2, \ldots, r$) A_i

[22]) Das interessante Hauptresultat einer Abhandlung von Whitney [10], nämlich sein Theorem 7, folgt unmittelbar aus diesem Mengerschen Satz, jedoch, wie es scheint, nicht umgekehrt.

zu W_i gehört. Da Π_1 von Π_2 in G nicht durch $r<n$ Punkte getrennt werden kann, gibt es zu jedem Element $S_\alpha=(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ von M einen $\Pi_1\Pi_2$-Weg U_α von G, der keinen der Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_r$ enthält. Werden sämtliche Kanten von allen diesen Wegen den Kanten der Wege $W_1, W_2, \ldots, W_r$ hinzugefügt, so ergibt sich ein *endlicher* Teilgraph G^* von G. In G^* kann Π_1 von Π_2 nicht durch r Punkte getrennt werden, denn ein solches trennende System müßte, da es aus jedem der Wege $W_1, W_2, \ldots, W_r$ einen Punkt enthalten muß, ein Element $S_\alpha=(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ von M sein, und der ihm entsprechende $\Pi_1\Pi_2$-Weg U_α von G^* würde keinen der Punkte A_i enthalten. Auf dem endlichen Graphen G^* dürfen wir nun den Mengerschen Satz anwenden (wo wir jetzt $r+1$ für n setzen) und dieser besagt, daß $r+1$ paarweise fremde $\Pi_1\Pi_2$-Wege in G^*, also auch in G existieren. Und dies widerspricht der vorausgesetzten Maximaleigenschaft von r. Somit haben wir den Satz:

23. *Der Mengersche Satz* 21 *gilt, für eine beliebige endliche Zahl n, auch für unendliche Graphen.*

Natürlich gilt dann auch Satz 22 für unendliche Graphen; es muß aber (falls Π_1 oder Π_2 eine unendliche Menge ist) die dort erwähnte Maximal-, bzw. Minimalzahl als eine *endliche* Zahl vorausgesetzt werden.

Bibliographie.

[1] E. Egerváry, Matrixok kombinatórius tulajdonságairól (Über kombinatorische Eigenschaften von Matrizen), *Matematikai és Fizikai Lapok,* **38** (1931), S. 16—28 (ungarisch mit einem deutschen Auszug).

[2] G. Frobenius, Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen, *Sitzungsberichte der preußischen Akademie,* 1912, I, S. 456—477.

[3] G. Frobenius, Über zerlegbare Determinanten, *ebenda,* 1917, I, S. 274—277.

[4] D. König, Vonalrendszerek és determinánsok (Graphen und Determinanten), *Mathematikai és Természettudományi Értesitő,* **33** (1915), S. 221—229 (ungarisch).

[5] D. König, Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantheorie und Mengenlehre, *Mathematische Annalen,* **77** (1916), S. 453—465.

[6] D. König, Graphok és matrixok (Graphen und Matrizen), *Matematikai és Fizikai Lapok,* **38** (1931), S. 116—119 (ungarisch mit einem deutschen Auszug).

[7] C. Kuratowski et G. T. Whyburn, Sur les éléments cycliques et leurs applications, *Fundamenta Mathematicae,* **16** (1930), S. 305—331.

[8] K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, *ebenda,* 10 (1927), S. 96–115.
[9] A. Sainte-Laguë, *Les réseaux*, Toulouse, 1924.
[10] H. Whitney, Congruent graphs and the connectivity of graphs, *American Journal of Mathematics*, 54 (1932), S. 150–168.
[11] H. Whitney, Non-separable and planar graphs, *Transactions of the American Mathematical Society*, 34 (1932), S. 339–362. (Ein Auszug dieser Arbeit befindet sich in *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.*, 17 (1931), S. 125–127.)

(Eingegangen am 28. Januar 1933.)

Zu den Verallgemeinerungen des Rolleschen Satzes.

Von STEPHAN LIPKA in Szeged.

1. Im folgenden wird $f(z)$ immer eine im Kreise $|z| \leqq 1$ reguläre analytische Funktion bedeuten, und es wird vorausgesetzt, daß $f(z)$ in diesem Kreise bis auf die Nullstellen $z = \pm 1$ nicht verschwindet. Ich beweise zuerst den folgenden Satz, der eine gewisse Analogie zum Rolleschen Satze zeigt.

Es sei

$$f(z) = (z^2 - 1) g(z),$$

wo die Funktion $g(z)$ im Kreise $|z| \leqq 1$ regulär und von Null verschieden ist. Ich behaupte, daß die Gleichung

$$f'(z) = 0$$

im Inneren des Einheitskreises genau eine Wurzel besitzt, wenn an jeder Stelle $z = e^{i\vartheta}$, wo

$$\Re\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right) = 0$$

ist, die Ungleichung

$$1 - \Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right) \sin\vartheta > 0 \qquad (z = e^{i\vartheta})$$

gilt.

Zum Beweise brauchen wir den folgenden

Hilfssatz. *Im Kreise $|z| \leqq 1$ seien die Funktionen $\psi(z)$ und $\varphi(z)$ regulär und am Rande $\psi(z) \neq 0$. Wenn an jeder Stelle der Peripherie, wo das „vektorielle Produkt" $\psi(z) \times \varphi(z) = \Im(\overline{\psi(z)}\, \varphi(z))$ verschwindet, das „skalare Produkt" $(\psi(z) \cdot \varphi(z)) = \Re(\overline{\psi(z)}\, \varphi(z))$*

konstantes Vorzeichen hat, so besitzen die Funktionen $\psi(z)$ und $\varphi(z)$ gleichviele Nullstellen im Kreise $|z| < 1$.[1])

Wir wenden jetzt diesen Hilfssatz auf die Funktionen

$$\psi(z) = z$$

und

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{g(z)} = 2z + (z^2 - 1)\frac{g'(z)}{g(z)} \tag{1}$$

an. Dies ist erlaubt, da $g(z)$ im Kreise $|z| \leqq 1$ von Null verschieden ist. Zuerst berechnen wir das skalare Produkt der Funktionen z und $\frac{f'(z)}{g(z)}$; es wird nach (1)

$$\left(z \cdot \frac{f'(z)}{g(z)}\right) = 2 + \Re\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\{\sin\vartheta \sin 2\vartheta - 2\sin^2\vartheta\cos\vartheta\} -$$
$$- \Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\{\sin 2\vartheta\cos\vartheta + 2\sin^2\vartheta\sin\vartheta\} \quad (z = e^{i\vartheta}),$$

da aber

$$\sin\vartheta\sin 2\vartheta - 2\sin^2\vartheta\cos\vartheta = 0$$

und

$$\sin 2\vartheta\cos\vartheta + 2\sin^2\vartheta\sin\vartheta = 2\sin\vartheta$$

ist, so gewinnt man für das skalare Produkt die Formel

$$\left(z \cdot \frac{f'(z)}{g(z)}\right) = 2\left\{1 - \Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\sin\vartheta\right\}. \tag{2}$$

Ferner gilt für das vektorielle Produkt

$$z \times \frac{f'(z)}{g(z)} = \left\{2\sin\vartheta + \sin 2\vartheta\,\Re\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right) - 2\sin^2\vartheta\,\Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\right\}\cos\vartheta -$$
$$- \left\{2\cos\vartheta - 2\sin^2\vartheta\,\Re\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right) - \sin 2\vartheta\,\Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\right\}\sin\vartheta$$
$$= 2\sin\vartheta\,\Re\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right). \tag{3}$$

Nach (2) und (3) folgt aus dem Hilfssatze, daß die Gleichung $f'(z) = 0$ im Kreise $|z| < 1$ genau eine Wurzel hat.

---

[1]) Für den Beweis dieses Hilfssatzes vgl. St. Lipka, Zur Theorie der algebraischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten, *diese Acta*, **5** (1930—32), S. 69—77, insb. S. 73. (Hilfssatz II.)

Bemerkung. Setzt man voraus, daß an jeder Stelle der Peripherie $|z|=1$, wo $\Re\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)=0$ ist, die Ungleichung

$$\left|\Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\right|<1$$

gilt, dann folgt

$$1-\Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\sin\vartheta \geqq 1-\left|\Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\right|>0,$$

und man gewinnt den folgenden Satz von Herrn DIEUDONNÉ[2]). *Man schneide die Ebene z von den Punkten i und $-i$ ausgehend in der Richtung der positiven bzw. der Negativen imaginären Achse auf. Wenn das durch die Funktion $\frac{g'(z)}{g(z)}$ vermittelte Bild des Kreises $|z|\leqq 1$ im Inneren der aufgeschnittenen Ebene liegt, dann hat die Gleichung*

$$f'(z)=((z^2-1)g(z))'=0$$

genau eine Wurzel im Kreise $|z|<1$.

Ich habe vorausgesetzt, daß $g(z)$ im Kreise $|z|\leqq 1$ von Null verschieden ist; es stellt sich aber aus der Formel (1) sogleich heraus, daß die Funktion $\frac{f'(z)}{g(z)}$ in diesem Kreise auch dann noch regulär bleibt, wenn $g(1)=0$, $g(-1)=0$ wird. Die vorangehenden Überlegungen bleiben also richtig, wenn die Wurzeln $z=\pm 1$ der Gleichung $f(z)=0$ beliebig hohe Multiplizität haben.

2. Es sei wieder die Funktion $f(z)$ im Kreise $|z|\leqq 1$ regulär und von Null verschieden, bis auf die Nullstellen $z=\pm 1$. Wenn der Punkt $z=1$ eine mindestens zweifache Wurzel von $f(z)=0$ ist, so kann man schreiben

$$\begin{aligned} f(z)&=(z^2-1)g(z)\\ &=(z-1)^2(z+1)h(z). \end{aligned}$$

Ich behaupte nun: *wenn das durch die Funktion $\frac{g'(z)}{h(z)}$ vermittelte Bild des Kreises $|z|\leqq 1$ in der Halbebene $\Re(z)>-1$ liegt, so hat die Gleichung $f'(z)=0$ genau eine Wurzel im Kreise $|z|<1$.*

---

[2]) J. DIEUDONNÉ, Sur une généralisation du théorème de Rolle aux fonctions d'une variable complexe etc., *Annals of Mathematics*, (2) **31** (1930), pp. 79–116.

B e w e i s. Wir betrachten statt $f'(z)=0$ die Gleichung

$$\frac{f'(z)}{g(z)}=2z+(z+1)\frac{g'(z)}{h(z)}=0.$$

Es sei $\frac{g'(z)}{h(z)}=\frac{1}{u(z)}$; dann gewinnt man aus der vorigen Gleichung die folgende:

$$2z\,u(z)+z+1=0,$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung

$$z=-\frac{1}{2u(z)+1}=U(u(z)). \tag{4}$$

Wenn nun die Funktion $\frac{1}{u(z)}$ den Kreis $|z|\leqq 1$ auf einen Teil der Halbebene $\Re(z)>-1$ abbildet, so bildet $U(u(z))$ nach (4) den Kreis $|z|\leqq 1$ auf einen Teil der offenen Kreisscheibe $|z|<1$ ab. Also wird am Rande des Kreises $|z|\leqq 1$

$$|z|>|U(u(z))|,$$

so daß die Gleichung (4) nach einem wohlbekannten Satze genau eine Wurzel im Kreise $|z|<1$ besitzt.

(Eingegangen am 11. März 1933.)

Über Sätze von Stone und Bochner.

Von Friedrich Riesz in Szeged.

Einleitung.

Es sei U_t, $-\infty < t < \infty$, eine lineare Gruppe unitärer Transformationen des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$, d. h. es sei

$$(U_t f, U_t f) = (f, f), \quad U_s U_t = U_{s+t}, \quad U_0 = E,$$

wo das Symbol (f, g) das innere Produkt der Elemente f, g und E die Identität bedeuten. Die Gruppe sei ferner stetig in dem Sinne, daß das innere Produkt $(U_t f, g)$ für beliebige f und g eine stetige Funktion von t darstelle.

Über solche Gruppen hat M. H. Stone den wichtigen Satz aufgestellt, daß *die Gruppe U_t die Spektraldarstellung*

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda$$

oder in bilinearer Schreibweise

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d(E_\lambda f, g) \tag{1}$$

zuläßt. Hier bezeichnet E_λ, $-\infty < \lambda < \infty$, eine sogenannte Spektralschar, auch Zerlegung der Einheit genannt, d. i. eine Schar von beschränkten, selbstadjungierten, linearen Transformationen von $\mathfrak{H}$, für welche *a)* $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$ für $\lambda \leqq \mu$, also speziell $E_\lambda^2 = E_\lambda$; *b)* $(E_\lambda f, g) \to 0$ bzw. (f, g) für $\lambda \to -\infty$ bzw. $+\infty$ und *c)* Linksstetigkeit d. i. $(E_\lambda f, g) \to (E_\mu f, g)$ für $\lambda < \mu$, $\lambda \to \mu$ gilt.[1])

---

[1]) M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space, III, *Proceedings Nat. Acad.*, **16** (1930), S. 172—175.

Das durch den Stoneschen Satz erledigte Problem zeigt eine unverkennbare Analogie mit jenem Ansatz, auf den ich seinerzeit meinen Beweis für die Hilbertsche Spektraldarstellung der beschränkten quadratischen Formen unendlich vieler Veränderlichen und ihrer Resolvente gründete.[2]) In der hier benützten Schreibweise handelte es sich dort darum, eine der Natur des Problems gemäß außerhalb eines gewissen Intervalles (m, M) konstante Spektralschar E_λ so zu bestimmen, daß die Gleichungen

$$A^n = \int_m^M \lambda^n dE_\lambda \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und also speziell die Gleichungen

$$(A^n f, f) = \int_m^M \lambda^n d(E_\lambda f, f) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

bestehen, wo A die durch die quadratische Form bestimmte Transformation und A^n die entsprechenden Potenzen von A bedeuten. Zufolge der geforderten Monotonität von $(E_\lambda f, f)$ als Funktion von λ war hiemit das Problem der Spektraldarstellung auf das Stieltjessche Momentenproblem für ein endliches Intervall zurückgeführt. An Stelle des Gleichungsystems (2) tritt nun bei dem Stoneschen Problem die Gleichung (oder genauer die kontinuierliche Schar von Gleichungen)

$$(U_t f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d(E_\lambda f, f) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{3}$$

die sich aus der Forderung (1) durch Gleichsetzen von f und g ergibt. Für fest gegebenes f ist diese Gleichung von der Form

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\, V(\lambda), \tag{4}$$

wo $p(t)$ für $-\infty < t < \infty$ gegeben und $V(\lambda)$ als für $-\infty < \lambda < +\infty$ reelle, beschränkte und nirgends abnehmende Funktion zu bestimmen ist. Es handelt sich hier also um die Frage, wann eine gegebene Funktion $p(t)$ die Fourier—Stieltjessche Integraldarstellung (4) mit beschränkter und nirgends abnehmender Verteilungsfunktion $V(\lambda)$ oder anders ausgedrückt mit einer nichtnegativen Massenverteilung dV von endlicher Gesamtmasse zuläßt. Dieses

[2]) F. Riesz, Über quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen, *Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen,* 1910, S. 190—195.

Momentenproblem, das in der Theorie der Fourierschen Integrale das Gegenstück zu einem für Fouriersche Reihen wohlbekannten, vor mehr als 20 Jahren gelösten Problem bedeutet,[3]) wurde merkwürdigerweise erst vor kurzem durch S. BOCHNER erledigt.[4]) *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $p(t)$ die Darstellung* (4) *zulasse, besteht darin, daß die Funktion $p(t)$ positiv-definit sei d. i. erstens für alle endliche t stetig sei und zweitens die Eigenschaft habe, daß für irgendwelche Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ und irgendwelche Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$*

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m} p(t_\mu - t_\nu)\, \varrho_\mu \overline{\varrho_\nu} \geqq 0 \tag{5}$$

ausfällt. Fügen wir noch hinzu, daß sobald diese Bedingungen für $p(t)$ erfüllt sind, die gesuchte Vorteilungsfunktion $V(t)$ durch die Forderung der Linksstetigkeit und von $V(-\infty) = 0$ eindeutig festgelegt ist.

Aus den soeben angeführten Tatsachen ergibt sich der Stonesche Satz durch einen ähnlichen Gedankengang wie die Hilbertsche Spektraldarstellung aus dem Momentenproblem. Ich hatte ursprünglich die Absicht, dies in allen Einzelnheiten auseinanderzulegen. Während der Schriftlegung der vorliegenden Note erhielt ich jedoch von Herrn BOCHNER die Korrekturbogen einer der Preußischen Akademie vorgelegten Arbeit,[5]) in der er einen ähn-

---

[3]) Wir denken hier an den folgenden Satz: *Damit das Gleichungssystem*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik\lambda}\, d\alpha(\lambda) = a_k \qquad (k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$$

eine monoton wachsende und beschränkte Lösung $\alpha(\lambda)$ zulasse, ist notwendig und hinreichend, daß $a_{-k} = \overline{a_k}$ und daß die Formen

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{j-k}\, x_j \overline{x_k} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

positiv-definit sind. Der Satz ergibt sich durch triviale Verknüpfung der klassischen Sätze von CARATHÉODORY und TOEPLITZ über Potenzreihen mit positivem Realteil mit einem Satze des Verfassers, welcher den Zusammenhang zwischen jenen Reihen und den monotonen Funktionen feststellt. Vgl., auch wegen der übrigen Zitate, C. CARATHÉODORY, Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, *Rendiconti Circ. Mat. Palermo,* 32 (1911), S. 193—217.

[4]) S. BOCHNER, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale,* Leipzig 1932, S. 74—76.

[5]) S. BOCHNER, Spektralzerlegung linearer Scharen unitärer Operatoren, unter Druck in den *Sitzungsberichten Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Klasse,* 1933.

lichen Beweis mitteilt. So darf ich mich nun hier auf eine skizzenhafte Darstellung beschränken und mich hauptsächlich einer zweiten Frage zuwenden. Diese Frage hängt damit zusammen, daß der Stonesche Satz, wie dies zuerst durch J. v. NEUMANN bemerkt wurde, auch dann gültig bleibt, wenn man die an $(U_t f, g)$ als Funktion von t gestellte Stetigkeitsforderung durch die schwächere Forderung der *Meßbarkeit* ersetzt. Beide bisher veröffentlichten Beweise[6]) gelten unter dieser schwächeren Bedingung. Dies ist nun auch für den hier skizzierten Beweis der Fall. Ich werde nämlich zeigen, daß in dem Bochnerschen Satze selbst die Forderung der Stetigkeit durch jene der Meßbarkeit ersetzt werden kann, indem nämlich die Stetigkeit von $p(t)$ aus der Meßbarkeit und aus der Voraussetzung (5) folgt, bis auf einen kleinen Schönheitsfehler.[7]) *Genauer gesagt folgt aus diesen Voraussetzungen die Existenz einer stetigen Funktion $p^*(t)$ von positiv definitem Typus und somit von der Form* (4), *die fast überall mit der vorgegebenen Funktion $p(t)$ übereinstimmt.* Bei Anwendung auf das Stonesche Problem wird dieser Schönheitsfehler durch die Gruppeneigenschaft eliminiert.

Erweiterung des Bochnerschen Satzes.

Um Wiederholungen zu vermeiden, beginne ich mit der Ausdehnung des Bochnerschen Satzes. Es sei also $p(t)$, $-\infty<t<\infty$, eine meßbare Funktion von positivem Typus, d. i. eine reelle oder komplexwertige meßbare Funktion, die für beliebige Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_m$ und beliebige komplexe Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ die Ungleichung (5) erfüllt. Stetigkeit von $p(t)$ wird nicht vorausgesetzt und wird, falls vorhanden, besonders betont.

Die Ungleichung (5) besagt, daß der linksstehende Ausdruck eine nichtnegative Hermitesche Form darstellt. Somit ist

$$p(t_2-t_1)=\bar{p}(t_1-t_2).$$

---

[6]) J. VON NEUMANN, Über einen Satz von M. H. Stone, *Annals of Math.*, **33** (1932), S. 567—573; M. H. STONE, On one-parameter unitary groups in Hilbert space, *ebenda*, S. 643—648.

[7]) Daß dieser Schönheitsfehler wirklich vorkommt, zeigt das folgende einfache Beispiel. Es sei $\mathfrak{M}$ irgendeine Nullmenge, die mit s und t zugleich auch $ms+nt$ enthält $(m, n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$. Die Funktion, die auf $\mathfrak{M}$ überall gleich 1, sonst gleich 0 ist, ist eine *unstetige* Funktion vom gewünschten Typus.

Setzt man speziell $t_1 = \frac{t}{2}$, $t_2 = -\frac{t}{2}$, so erhält man, daß allgemein

(6) $$p(-t) = \bar{p}(t).$$

Setzt man außerdem $m=1$ und $m=2$ und beachtet man, daß die Determinante der entsprechenden Form reell und nichtnegativ sein muß, so ergibt sich, daß

$$p(0) \geqq 0, \quad |p(t)| \leqq p(0)$$

für alle Werte von t. Die Funktion $p(t)$ ist somit beschränkt.

Besonders wichtig für alles weitere ist die der Ungleichung (5) analoge Integralungleichung

(7) $$\iint\limits_{-A}^{A} p(t-s)\,\varrho(t)\,\bar{\varrho}(s)\,ds\,dt \geqq 0,$$

wo $\varrho(s)$ eine beliebige im Intervall $(-A, A)$ quadratisch integrierbare Funktion bedeutet. Im Falle stetiger oder nach RIEMANN integrierbarer Funktionen p und ϱ folgt diese Ungleichung aus (5) durch evidenten Grenzübergang.[8]) Im allgemeinen Falle schließen wir wie folgt. In der Ungleichung (5) setzen wir an Stelle von ϱ_μ, $\bar{\varrho}_\nu$ die Funktionen $\varrho(t_\mu)$, $\bar{\varrho}(t_\nu)$ der unabhängigen Variabeln t_μ, t_ν und integrieren m-fach von $-A$ bis A. Die diagonalen Glieder $(\mu = \nu)$ ergeben je

$$(2A)^{m-1} p(0) \int\limits_{-A}^{A} |\varrho(t)|^2\,dt,$$

die übrigen je

$$(2A)^{m-2} \iint\limits_{-A}^{A} p(t-s)\,\varrho(t)\,\bar{\varrho}(s)\,ds\,dt;$$

somit erhält man, daß

$$m\,(2A)^{m-1}\,p(0) \int\limits_{-A}^{A} |\varrho(t)|^2\,dt + \\ + m\,(m-1)\,(2A)^{m-2} \iint\limits_{-A}^{A} p(t-s)\,\varrho(t)\,\bar{\varrho}(s)\,ds\,dt \geqq 0$$

Division durch den vor dem zweiten Integralausdruck stehenden Faktor und der Grenzübergang $m \to \infty$ ergeben dann die zu be-

[8]) Vgl. BOCHNER, a. a. O. [4]).

weisende Ungleichung. Schließlich kann die quadratische Integrierbarkeit von $\varrho(s)$ durch gewöhnliche Integrierbarkeit ersetzt werden, indem man nämlich $|\varrho(t)|$ in der Höhe n abschneidet, d. h. an allen Stellen t, wo $|\varrho(t)| > n$, $\varrho(t)$ durch $n\varrho(t)/|\varrho(t)|$ ersetzt, die Ungleichung (7) auf die abgeschnittene Funktion anwendet und dann n ins Unendliche wachsen läßt. Ferner erhält man für $A \to \infty$ die Ungleichung

$$\iint_{-\infty}^{\infty} p(t-s)\,\varrho(t)\,\overline{\varrho}(s)\,ds\,dt \geqq 0, \tag{8}$$

gültig für jede integrierbare d. h. absolut integrierbare Funktion $\varrho(t)$. Nebenbei bemerkt, werden wir die Ungleichung (8) nur auf gewisse spezielle stetige Funktionen $\varrho(t)$ anzuwenden haben; die Verallgemeinerung benötigen wir nur zufolge des allgemeinen Ansatzes betreffs $p(t)$.

Von hier angefangen könnten wir im großen und ganzen die Bochnersche Schlußweise wiederholen. Wir ziehen es vor, den Weg zur gesuchten Funktion $V(\lambda)$ durch jene positive lineare Operation hindurch zu leiten, deren erzeugende Funktion sie ist, die also schließlich für eine geeignete Funktionenklasse $\{h(\lambda)\}$ durch das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\,dV(\lambda) \tag{9}$$

dargestellt wird.

Sei zunächst $h(\lambda)$ eine reelle, stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion, die außerhalb eines Intervalls überall verschwindet.[9] Ihre Fouriersche Transformierte

$$h^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\,e^{i\lambda t}\,d\lambda$$

ist bekanntlich stetig und integrierbar. Die Fouriersche Transformierte von $h^*(t)$ ist $h(-\lambda)$, jene von $h^*(-t)$ ist $h(\lambda)$ selbst. Wir erklären nun die Funktionaloperation $A(h)$ durch das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\,h^*(-t)\,dt, \tag{10}$$

[9]) Man könnte sich ebenso gut auf stückweise zweimal stetig differenzierbare oder auch auf stückweise analytische Funktionen beschränken. Dagegen erweist sich der naheliegende Gedanke, mit stückweise linearen oder mit Treppenfunktionen zu arbeiten, in der Ausführung als schwerfällig.

das zufolge der Meßbarkeit und Beschränktheit von p und der Integrierbarkeit von h^* sicher vorhanden ist. Damit ist also für die Klasse der betrachteten Funktionen h eine distributive Operation A definiert.

Wir zeigen, daß die Operation A reell, positiv und beschränkt ist. Dies soll bedeuten, daß

1. für nichtnegative Funktionen $h(\lambda)$ der Wert von $A(h)$ reell und nichtnegativ ausfällt und daß

2. für alle $h(\lambda)$ der Wert $A(h)$ reell ist und sobald $|h(\lambda)| < 1$, der Betrag von $A(h)$ unterhalb einer (von h unabhängigen) Schranke verbleibt.

Betrachten wir zunächst die Funktionen vom Typus $h^2(\lambda)$. Sie gehören ebenfalls zur betrachteten Funktionenklasse und ihre Fouriersche Transformierte ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, h^*(-s)\, e^{i\lambda s} e^{i\lambda t} d\lambda\, ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h^*(s+t)\, h^*(-s)\, ds\,;$$

also ergibt der Ausdruck (10), indem man h durch h^2, also h^* durch den soeben erhaltenen Ausdruck ersetzt,

$$A(h^2) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} p(t)\, h^*(s+t)\, h^*(-s)\, ds\, dt.$$

Ersetzt man noch t durch $t-s$ und bemerkt man, daß zufolge der Realität von $h(\lambda)$ die Gleichung

$$h^*(-s) = \overline{h^*}(s)$$

besteht, so wird

$$A(h^2) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} p(t-s)\, h^*(t)\, \overline{h^*}(s)\, ds\, dt,$$

also wird wegen (8)

$$A(h^2) \geqq 0.$$

Nun sei $h_1(\lambda)$ eine beliebige reelle, nichtnegative Funktion der betrachteten Klasse, sie verschwinde außerhalb des Intervalls

(a, b) und es sei

$$h_2(\lambda) = (\lambda - a + 1)^2 (\lambda - b - 1)^2$$

für $a - 1 \leqq \lambda \leqq b + 1$, sonst gleich 0. Die positive Quadratwurzel der Funktion $h_1 + \varepsilon h_2$, wo $\varepsilon > 0$, sonst beliebig ist, gehört zu unserer Klasse, wie auch h_2 selbst; daher ist

$$A(h_1) + \varepsilon A(h_2) = A(h_1 + \varepsilon h_2) \geqq 0,$$

woraus für $\varepsilon \to 0$ auch

$$A(h_1) \geqq 0$$

folgt.

Damit ist die Behauptung 1. bewiesen. Um 2. zu beweisen, benutzen wir als Hilfsfunktion die Funktion

$$\begin{aligned} h_3(\lambda) &= 1 - \frac{|\lambda|}{2} \quad &&\text{für } |\lambda| \leqq 2, \\ &= 0 &&\text{für } |\lambda| > 2. \end{aligned} \tag{11}$$

Sie gehört zur betrachteten Klasse und ihre Fouriersche Transformierte ist

$$l(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^2 t}{t^2}.$$

Ist nun $|h(\lambda)| < 1$, so ist für genügend großes n überall auch

$$|h(\lambda)| < h_3\left(\frac{\lambda}{n}\right),$$

so daß also

$$h(\lambda) = h_3\left(\frac{\lambda}{n}\right) - \left[h_3\left(\frac{\lambda}{n}\right) - h(\lambda)\right]$$

eine Darstellung von $h(\lambda)$ als Differenz zweier nichtnegativer Funktionen aus unserer Klasse ist. Daher ist auch $A(h)$ reell. Ferner folgt aus der Positivität von $h_3\left(\frac{\lambda}{n}\right) \pm h(\lambda)$, daß

$$|A(h)| \leqq A\left(h_3\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, l(-nt)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\frac{t}{n}\right) l(t)\, dt$$

ausfällt. Wegen $|p(t)| \leqq p(0)$ liegt aber der Wert des letzten Integrals unterhalb

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} p(0) \int_{-\infty}^{\infty} l(t)\,dt = p(0)\,h_3(0) = p(0).$$

Damit ist auch die Behauptung 2. bewiesen.

Bekanntlich gibt es zur distributiven positiven und beschränkten Funktionaloperation $A(h)$ eine beschränkte und monoton wachsende Funktion $V(\lambda)$ derart, daß die Operation $A(h)$ durch das Stieltjessche Integral (9) dargestellt wird. Die Funktion $V(\lambda)$ ist an allen Stetigkeitsstellen bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt; über die Konstante kann man so verfügen, daß der Grenzwert $V(-\infty)$ verschwinde. An den Sprungstellen kann man den Wert $V(\lambda)$ zwischen $V(\lambda-0)$ und $V(\lambda+0)$ beliebig verschieben, ohne den Wert des Integrals (9) zu beeinflußen; wir können z. B. so verfügen, daß $V(\lambda)=V(\lambda-0)$, d. i. die Funktion $V(\lambda)$ überall linksstetig werde. Die Differenz $V(\lambda_2-0)-V(\lambda_1+0)$, wo $\lambda_1<\lambda_2$, also der auf das offene Intervall (λ_1, λ_2) entfallende Teil der Belegung, ist nichts anderes als die obere Schranke der Werte $A(h)$, wenn man zur Konkurrenz sämtliche, außerhalb des Intervalles verschwindende, sonst zwischen 0 und 1 gelegene Funktionen h der betrachteten Klasse zuläßt. Man erhält denselben Wert auch als Grenzwert von $A(h_n)$, wenn h_n eine wachsende Folge von Funktionen der soeben geschilderten Art durchläuft und für $n\to\infty$ im Intervall (λ_1, λ_2) gegen 1 konvergiert. In ähnlicher Weise ergibt sich die Differenz $V(\lambda_2+0)-V(\lambda_1-0)$ als untere Schranke von $A(h)$ für alle nichtnegative Funktionen h, die im Intervall (λ_1, λ_2) überall $\geqq 1$ sind, wie auch als Grenzwert von $A(h_n)$ für abnehmende Folgen h_n, die im abgeschlossenen Intervall gegen 1, sonst gegen 0 gehen. Speziell erhält man den Wert des Sprunges $V(\lambda+0)-V(\lambda-0)$, indem man $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ setzt.

Das über die Berechnung von $V(\lambda_2-0)-V(\lambda_1+0)$ Gesagte gilt sinngemäss auch für $\lambda_1=-\infty$.

Das soeben Gesagte dient nur dazu, um bei dem Beweise des Stoneschen Satzes gewisse formale Überlegungen zu ersparen. Wir könnten auch mit der bloßen Existenz von $V(\lambda)$ auskommen.

Wir betrachten nun die durch das Integral

$$q(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,d\,V(\lambda) \tag{12}$$

definierte Funktion $q(t)$, die zufolge der absoluten Konvergenz des

Integrals sicher beschränkt und stetig ist. Wir wollen zeigen, daß $q(t)$ fast überall mit der gegebenen Funktion $p(t)$ übereinstimmt. Wir verwenden hiefür die Identität

$$(13) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} q(t)\, h^*(-t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, h^*(-t)\, dt,$$

gültig für die Fouriersche Transformierten $h^*(t)$ von Funktionen $h(t)$ der betrachteten Klasse. Man erhält (13) durch Einsetzen des Ausdrucks (12) für $q(t)$ in das linksstehende Integral und Ausführung der Integration in bezug auf t, wodurch das Integral in

$$\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, d\, V(\lambda) = \sqrt{2\pi}\, A(h),$$

also der Definition von $A(h)$ gemäß in das rechtstehende Integral übergeht.

Die Formel (13) bleibt auch für komplexwertige Funktionen von der Form $h = h_4 + i h_5$ bestehen, wo h_4 und h_5 beliebige Funktionen aus der betrachteten Klasse sind; dies folgt unmittelbar aus $h^* = h_4^* + i h_5^*$. Wir wenden sie speziell auf die Funktion

$$h(\lambda) = e^{i\lambda u} h_3\left(\frac{2\lambda}{n}\right)$$

an, wo $h_3(\lambda)$ die in (11) erklärte Funktion und u einen reellen Parameter bezeichnen. Evidente Rechnung ergibt

$$h^*(t) = \frac{n}{2}\, l\left(\frac{n}{2}(t+u)\right),$$

wo $l(t)$ die Fouriersche Transformierte von $h_3(\lambda)$ bezeichnet, also ist

$$h^*(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{2}{n}\, \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t+u)}{(t+u)^2}.$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (13) wird

$$(14) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} q(t)\, \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t-u)}{n\,(t-u)^2}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t-u)}{n\,(t-u)^2}\, dt.$$

Nun aber konvergieren die beiden Ausdrücke für $n \to \infty$ gegen $\pi/_2\, q(u)$ bwz. $\pi/_2\, p(u)$, der erste überall, der zweite fast überall. Dies folgt z. B. indem man zunächst durch eine evidente Abschätzung der Integranden für $|t-u| > \delta$ zeigt, daß das Verhalten für $n \to \infty$ nur von der Wertverteilung der Funktionen p, q in der

Umgebung der Stelle u abhängt, so daß also speziell das Verhalten innerhalb eines Intervalls $(a, a+2\pi)$ nicht geändert wird, wenn man außerhalb des Intervalls die beiden Funktionen derart modifiziert, daß man sie nach 2π periodisch fortsetzt. Die entsprechend modifizierten Integrale (14) sind aber bekanntlich bis auf den Faktor $\pi/2$ gleich den arithmetischen Mitteln der Fourierschen Reihen der gesagten periodischen Funktionen; also folgt die Richtigkeit unserer Behauptung für das Intervall $(a, a+\pi)$ und durch Verschiebung des Intervalls für alle Werte von u aus den klassischen Sätzen von Fejér und Lebesgue.

Damit ist gezeigt, daß die Funktionen $p(t)$ und $q(t)$ fast überall einander gleich sind. Also gilt wegen (12) auch fast überall die Gleichung (4). Wir haben so den Satz:

Jede meßbare Funktion $p(t)$ von positivem Typus gestattet fast überall die Darstellung

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \, d\, V(\lambda),$$

wo $V(\lambda)$ eine reelle, monoton wachsende und beschränkte Funktion ist.

Außer diesem Satze werden wir uns im Folgenden noch auf einige Zwischenergebnisse berufen, die jedoch auch aus dem fertigen Satze herausgeschält werden könnten.

Der Satz von Stone.

Der Beweis des Stoneschen Satzes gestaltet sich nun folgendermaßen.

Die Funktion

$$p(t) = (U_t f, f),$$

gebildet für irgendein Element f des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$, ist laut Voraussetzung meßbar. Da nun der Gruppeneigenschaft von U_t zufolge

$$\sum_{\mu, \nu=1}^{m} p(t_\mu - t_\nu)\, \varrho_\mu \bar{\varrho}_\nu = \left(\sum_{\mu=1}^{m} \varrho_\mu U_{t_\mu} f, \sum_{\nu=1}^{m} \varrho_\nu U_{t_\nu} f \right) \geqq 0$$

ist, so ist $p(t)$ außerdem von positivem Typus und daher gilt fast überall die Darstellung

$$(15) \qquad (U_t f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \, d\, V(\lambda; f),$$

wo V eine reelle, monoton wachsende und beschränkte Funktion von λ ist, deren Abhängigkeit auch vom Elemente f wir durch die Schreibweise $V(\lambda; f)$ betonen. Wir können dabei noch annehmen, V verschwinde stetig für $\lambda = -\infty$ und sei durchwegs linksstetig.

Der Wert von $V(\lambda_0; f) = V(\lambda_0 - 0; f)$ ergibt sich für jedes λ_0 als Grenzwert von

$$(16) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\lambda)\, d\, V(\lambda; f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (U_t f, f)\, h_n^*(-t)\, dt,$$

wo die $h_n(\lambda)$ irgendeine Folge von Funktionen vom Typus h sind, die für $\lambda \geqq \lambda_0$ sämtlich verschwinden und für $\lambda < \lambda_0$ mit unendlich wachsendem n wachsend überall gegen 1 konvergieren; $h_n^*(t)$ bedeutet die Fouriersche Transformierte von $h_n(t)$.

Aus dieser Darstellung von V als Grenzwert von (16) folgt in evidenter Weise, daß mit $(U_t f, f)$ zugleich auch $V(\lambda; f)$ eine Funktionale von bilinearem Typus ist, d. h. daß $V(\lambda; f + \mu g)$ für komplex veränderliches μ die in μ und $\bar{\mu}$ bilineare Darstellung

$$V(\lambda; f + \mu g) = V(\lambda; f, f) + \mu V(\lambda; g, f) + \bar{\mu} V(\lambda; f, g) + \mu \bar{\mu} V(\lambda; g, g)$$

zuläßt, wo $V(\lambda_0; f, g)$ sich analog wie $V(\lambda_0; f)$ als Grenzwert von

$$(17) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (U_t f, g)\, h_n^*(-t)\, dt$$

berechnet und $V(\lambda; f, f) = V(\lambda; f)$ ist. Durch Einsetzen von $f + \mu g$ in (15) an Stelle von f und Vergleichen der Koeffizienten von $\bar{\mu}$ folgt ferner, daß fast überall

$$(18) \qquad (U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\, V(\lambda; f, g)$$

ist. Dabei ist der Ausdruck „fast überall" zunächst so zu verstehen, daß die eventuelle Ausnahmemenge (die, wie wir sehen werden, in Wirklichkeit nicht vorhanden ist) von der Wahl von f und g abhängt. Läßt man jedoch f und g eine abzählbare überall dichte Teilmenge des Raumes $\mathfrak{H}$ durchlaufen und vereinigt man die entsprechenden Ausnahmemengen, so zeigt man in der üblichen Weise, daß (18) außerhalb der Vereinigungsmenge, also noch immer fast überall für *alle* f, g aus $\mathfrak{H}$ gültig ist.

Schließlich folgt aus der im Laufe der vorhergehenden Untersuchungen bewiesenen Beschränktheit der dort eingeführten Operation $A(h)$ oder genauer aus der Abschätzung $A(h) \leqq p(0)$ für $0 \leqq h(t) \leqq 1$, daß auch $0 \leqq V(\lambda) \leqq p(0)$ und somit hier $0 \leqq V(\lambda; f) \leqq (f, f)$. Daraus folgt in bekannter Weise, daß auch

$$|V(\lambda; f, g)|^2 \leqq (f, f)(g, g)$$

und damit wegen der Bilinearität die Existenz einer beschränkten Transformation, die wir mit E_λ bezeichnen, derart daß für alle f, g

$$V(\lambda; f, g) = (E_\lambda f, g) \tag{19}$$

wird.

Wir haben nun zu zeigen, daß die Transformationen E_λ selbstadjungiert sind, daß sie eine Spektralschar bilden und schließlich, daß die Darstellung (1), d. i. die Gleichung (18) für *alle Werte von* t besteht.

Daß die E_λ selbstadjungiert sind, folgt unmittelbar durch Vertauschen von f und g in (17), wenn man beachtet, daß die Adjungierte von U_t gleich U_{-t} und daß $h_n^*(-t) = \overline{h_n^*}(t)$ ist, so daß also das Vertauschen von f und g gleichwertig ist dem Übergang zur konjugierten Größe, was dann auch für die Grenzwerte der Fall ist.

Für das Weitere betrachten wir die durch das Integral

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda)\, d E_\lambda \tag{20}$$

erklärte Transformation K; um mit den gewohnten Mitteln auszukommen, sollen das Integral (20) und auch die übrigen mit Transformationsscharen gebildeten Integrale in der üblichen Weise durch die entsprechenden bilinearen Bildungen hindurch erklärt gedacht werden. Sind $k_1(\lambda)$ und $k_2(\lambda)$ und damit auch das Produkt $k_3(\lambda) = k_1(\lambda) k_2(\lambda)$ zunächst reelle oder komplexwertige Funktionen vom Typus h, so folgt aus der Gleichung

$$K_j = \int_{-\infty}^{\infty} k_j(\lambda)\, d E_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_j^*(-t)\, U_t\, dt \qquad (j = 1, 2, 3)$$

(vgl. (16) und (19)) durch evidentes Rechnen, daß $K_1 K_2 = K_3$. Dies besagt, daß die durch (20) erklärte Zuordnung von Transformationen K zu Funktionen k *multiplikativ* ist, einstweilen für die Funktionen vom Typus h. Diese Regel überträgt man ohne Schwierigkeit auf Funktionen $k(\lambda)$ von sehr allgemeiner Art durch Vermittlung von konvergenten Funktionenfolgen vom Typus h. Uns kommt es hier nur auf zwei ganz spezielle Fälle an, für welche der Übergang in evidenter Weise geschieht.

Der eine Fall sind die Funktionen $k(\lambda) = e^{it\lambda}$ mit reellem, sonst beliebigen t. Angewandt auf diese Funktionen, besagt die Multiplikationsregel nichts anderes, als daß die durch die Gleichung

$$(21) \qquad Q_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d E_\lambda \qquad (-\infty < t < \infty)$$

definierte, evident stetige Schar von Transformationen Q_t eine *Gruppe* bildet. Andererseits ist (18) und (19) zufolge auch $U_t = Q_t$, höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge von Werten t. Ist nun $U_{t_1} = Q_{t_1}$ und $U_{t_2} = Q_{t_2}$, so ist wegen der Gruppeneigenschaft der Scharen U_t und Q_t auch $U_{t_1+t_2} = Q_{t_1+t_2}$. Da schließlich jede reelle Zahl in zwei Summanden zerlegt werden kann, die einer vorgegebenen Nullmenge nicht angehören, so *ist also $U_t = Q_t$ ohne Ausnahme.*

Der zweite Spezialfall sind die Funktionen, die für $\lambda < \mu$ gleich 1, sonst gleich 0 sind. Nach (20) entsprechen ihnen die Transformationen E_μ selbst und die Multiplikationsregel besagt, daß $E_{\mu_1} E_{\mu_2} = E_{\mu_1}$ ist, sobald $\mu_1 \leq \mu_2$. Da ferner definitionsgemäß $(E_\lambda f, g) \to 0$ für $\lambda \to -\infty$ und andererseits aus (21) und aus $Q_0 = U_0 = E$ folgt, daß

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} d E_\lambda,$$

daß also $E_\lambda \to E$ für $\lambda \to \infty$, so *befriedigt die Schar E_λ sämtliche Kennzeichen einer Spektralschar.*

Damit ist der Stonesche Satz bewiesen. Ich möchte noch hinzufügen, daß man die Ausführungen dieser Arbeit leicht so umgruppieren kann, daß man unter Ausschaltung des Bochnerschen Satzes unmittelbar die Zuordnung zwischen Funktionen $k(\lambda)$ und den entsprechenden Transformationen K zunächst für die Funktionen vom Typus h durch die Vorschrift

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k^*(-t)\, U_t\, dt$$

definiert, die Eigenschaften dieser Zuordnung, wie Distributivität, Beschränktheit, Positivität, sowie die Multiplikationsregel feststellt und schließlich durch monotone Folgen von Funktionen *h* hindurch zu weiteren Funktionen übergeht. Der sich so ergebende Beweis läuft ziemlich parallel jenem Beweise des Hilbertschen Satzes, den ich seinerzeit auf die Betrachtung von Transformationspolynomen gründete;[10]) die Rolle der Polynome übernimmt hier natürlich der Typus *h*.

(*Eingegangen am 16. Juni 1933.*)

[10]) F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris 1913, Chapitre V.; Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *diese Acta*, **5** (1930), S. 23—54.

Bibliographie.

Solomon Lefschetz, Topology (American Math. Society Colloquium Publications, Volume XII), IX + 410 pages, New York, American Mathematical Society, 1930.

The work of LEFSCHETZ on Topology is heartily welcome to every one who cares for new researches in this field: its content is rich, almost too rich; besides of new results many efficient methods are exposed; there are new and general points of view under which most of the fundamental concepts are ordered; some times one regrets to find a general and complicated theorem instead of the particular important and simple theorems hidden under it. The whole work has a certain freshness that gives stimulation for new researches.

In a short introduction the primary notions of general (abstract) topology are explained. Chapter I deals with the combinatorial theory of complexes. In Chapter II the topological invariance of the homology characters is proved on the base of certain deformation theorems; the invariance of dimensionality and regionality are deduced as their consequences. Chapter III contains a study of the general theory of manifolds, then very comprehensive duality theorems. Chapter IV deals with intersection numbers and KRONECKER index, Chapter V with product complexes and manifolds. In Chapter VI transformations of manifolds, their coincidences and fixed points are considered under a very extensive and general aspect. Chapter VII is devoted to infinite complexes; ideal elements are introduced in a looser way than by KERÉKJÁRTÓ and FREUDENTHAL; many interesting results turn out all the same. The last Chapter gives an account on the applications of general results of topology to analytical and algebraic varieties.

B. de K.

Oswald Veblen, Analysis Situs (American Math. Society Colloquium Publications, Volume V, Part II), second edition, XI + 194 pages, New-York, American Mathematical Society, 1931.

In the preface of the first edition (1922) the author says that „analysis situs is still in such a state that the best welcome which can be offered to any comprehensive treatment is to wish it speedy obsolescence". As the new researches on combinatorial analysis situs have avoided the main problems, and VEBLEN has the right feeling for separating results and methods of constant value from those of temporary interest, his wish is not fulfilled for his own work: the new edition is — except some minor changes — a reprint of the first one and it seems to stay still for a long time as the standard-work on combinatorial analysis situs. The content of the first edition — I. linear graphs, II. two dimensional complexes and manifolds, III. complexes and manifolds of n dimensions, IV. orientable manifolds, V. the fundamental group and certain unsolved problems — has been enlarged by two appendixes, I. on the intersection numbers and II. on matrices whose elements are integers, — two papers of the author reprinted with minor changes.

B. de K.

Konrad Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band II), dritte vermehrte und verbesserte Auflage, XII + 582 S., Berlin, J. Springer, 1931.

Das bereits in seiner ursprünglicher Form reichhaltige Buch wurde in der zweiten Auflage durch eine wesentliche Erweiterung des Kapitels über die verschiedenen Summierungsverfahren für divergente Reihen bereichert; in der vorliegenden dritten Auflage wurde sein Wert durch ein neues Kapitel erhöht. Dieses behandelt, nachdem der Begriff einer asymptotischen Reihe im Anschluß an das vorangehende Kapitel erläutert wird, die Euler-Maclaurinsche Summenformel in einer sehr eleganten, auf WIRTINGER zurückgehenden Darstellung; als Anwendungen werden die bekannten Formeln für die Potenzsummen und die Teilsummen der harmonischen Reihe, ferner die Strilingsche Formel für die Gammafunktion hergeleitet. Dann folgen allgemeine Betrachtungen über asymtotische Reihen, insbesondere über die asymptotische Entwicklung vorgelegter Funktionen und über das umgekehrte Problem, zu einer asymptotischen Reihe die entsprechende Funktion (oder Funktionen) zu ermitteln.

Auch der alte Teil des Buches wurde durchgearbeitet; mehrere Beweise wurden durch einfachere ersetzt.

Ein Zeugniß der allgemeinen Beliebtheit des Buches ist, daß dasselbe inzwischen auch in englicher Sprache erschienen ist.

L. Kalmár.

Leon Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen, X + 164 S., Berlin, J. Springer, 1931.

In dieser wertvollen Monographie gelang es dem anerkannten Forscher die reife und reiche Frucht seiner zerstreuten Untersuchungen zu sammeln und — in Gastvorlesungen einheitlich behandelt — weiteren Kreisen zugänglich zu machen. Sie ist auch deshalb beachtenswert, da sie alle die Ergebnisse umfaßt, welche seit den grundlegenden Untersuchungen von E. SCHMIDT und LIAPOUNOFF (1906) bis vor kurzem (1929) im Kreise dieser Funktionalgleichungen überhaupt ans Licht gefördert wurden.

Kapitel I beginnt mit den Grundlagen: der Betrachtung von Schmidtschen nichtlinearen Integralgleichungen im Kleinen, d. h. in der Nachbarschaft einer bekannten Lösung bei kleiner Änderung der gegebenen Funktionen bzw. Parameter. Resultate, auf welche SCHMIDT in Verallgemeinerung der Auflösung eines nichtlinearen Gleichungssystems sowohl im Falle des Nichtverschwindens (regulärer Fall), wie des Verschwindens der Funktionaldeterminante (Verzweigungsfall) gelangte, LIAPOUNOFF dagegen bei der Untersuchung von Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten in der Nachbarschaft der klassischen Ellipsoide kam. Die Methode ist aber neu: jene der sukzessiven Approximationen, was sich in mehrfacher Hinsicht erfolgreicher erweist. Die Verzweigungsgleichungen werden mit einer hübschen Vereinfachung der Schmidtschen Kernzerspaltung eingeführt. Durch die naheliegende Verallgemeinerung auf Systeme solcher Integralgleichungen wird der Rahmen der klassischen Resultate überschritten und eine Anzahl auf solche Systeme zurückführbarer Integro-Differentialgleichungen einheitlich behandelt. Daß die dort angegebene Gleichung (108) auf eine frühere zurückführbar sei, scheint aber fraglich zu sein.

Die folgenden beiden Kapiteln bieten eine überraschend reiche Auswahl an Anwendungen in engerem und weiterem Sinne. Die letzteren umfassen die Fortpflanzung zweidimensionaler permanenter Oberflächenwellen endlicher Amplitude, ein nichtlineares Randwertproblem der Wärmestrahlung, Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Dynamik inkohärenter gravitierender Medien, Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten.

Den Mathematiker werden insbesondere die — teilweise schon von E. SCHMIDT vermuteten — Anwendungen auf nichtlineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung interessieren. Diese beziehen sich einerseits auf des Verhalten der Lösung bei kleiner Änderung der Randwerte oder Parameter, also auf Probleme im Kleinen, anderseits aber durch Verwendung einer auf ROY und S. BERNSTEIN zurückgehenden Methode auch auf Probleme im Großen. Nach dieser Methode wird ja in die Gleichung ein Parameter eingeführt, schrittweise klein geändert, und so die für seinen Anfangswert bekannte Lösung in die für seinen Endwert gesuchte schrittweise fortgesetzt.

Das letzte Kapitel behandelt spezielle nichtlineare Integralgleichungen im Großen. Existenzfragen werden auf Variationsprobleme zurückgeführt und mit der Ritzschen Methode behandelt.

Die Darstellung ist streng, die Literaturangaben vorzüglich und vollständig, die Forderung an Vorkenntnissen durch ausführliche Angabe des Nötigen gemäßigt. Bei dem heutzutage wachsenden Interesse für ihren Gegenstand ist die Monographie als eine wertvolle Bereicherung der Literatur dieses Forschungsgebietes zu begrüßen. T. v. Stachó.

R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, zweiter Band: Funktionen mehrerer Veränderlicher, zweite verbesserte und vermehrte Auflage, VIII + 412 S., Berlin, J. Springer, 1931.

Es erübrigt sich, von der Beliebtheit des trefflichen Lehrbuches von COURANT zu reden: die Tatsache, daß so unerwartet rasch eine zweite

Auflage beider Bände nötig geworden ist, spricht selbst. Während aber der erste Band fast unverändert zum zweitenmal erschienen ist, so weist die Neuauflage des zweiten Bandes wesentliche Erweiterungen auf, die den Wert des Buches, wenn möglich, noch erhöhen.

So begrüßt man mit Freude den neuen Paragraphen über das Volumen und Oberfläche in mehrdimensionalen Räumen: heute besitzen diese Sachen kein bloß theoretisches Interesse, vielmehr gehören sie dem unentbehrlichen Werkzeug des Physikers an. Die Eigenschaften der Gammafunktion, die in der ersten Auflage nur teilweise als Beispiele vorgekommen sind, wurden hier in einem besonderen Paragraphen systematisch entwickelt. Das letzte Kapitel hat durch eine kurze Darlegung der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen (nebst ihren Randwertproblemen), des Eulerschen Multiplikators und besonders durch den Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes der Differentialgleichungen erster Ordnung eine wesentliche Erweiterung erfahren.

Auch abgesehen von diesen größeren Erweiterungen wurde überall eine Verbesserung, wo sie sich dargeboten hat, durchgeführt. Um nur eine einzige Stelle zu erwähnen, wurde ein Wunsch des Referenten der *ersten* Auflage (*diese Acta,* 4 (1928—29), S. 255—256) erfüllt, indem die Abhängigkeit des Sinnes eines Symbols wie $\frac{\partial u}{\partial x}$ von dem Umstand, welche Größen neben x als unabhängige Veränderliche betrachtet werden, ausführlich erläutert wurde.

L. Kalmár.

R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Teil IV, 1. Heft (Teubners math. Leitfäden, Band 33), unter Mitwirkung von Oskar Degosang, IV + 52 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1932.

Das vorliegende Heft enthält 229 Aufgaben, die sich auf die beiden ersten Abschnitte des Teils I der *Höheren Mathematik* beziehen. 61 von diesen Aufgaben kommen auch im Teil I vor. Zu jeder Aufgabe ist das Ergebnis und in der Regel auch eine Anleitung zur Lösung angegeben. Die Aufgaben sind mannigfaltig, mehrere von ihnen haben gewisse Beziehungen zur Technik. Wir können diese Aufgabensammlung jedem Studierenden der Mathematik und Technik aufs wärmste empfehlen. Wir hoffen, daß die — übrigens nicht vielen — Druckfehler in der folgenden Auflage berichtigt werden.

Nagy.

Alfred Barneck, Die Grundlagen unserer Zeitrechnung, (Math.—Phys. Bibliothek, Band 29), zweite Auflage, IV + 49 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1932.

Das vorliegende Büchlein betrachtet in drei Kapiteln die historische Entwicklung unserer Zeitmessung und Zeitrechnung. Im ersten Kapitel werden die Elemente der astronomischen Ortsbestimmung (das Horizontalund das Äquatorialsystem) besprochen, dann der Sterntag und die Sternzeit definiert. Die Sternzeit kann nur astronomischen Zwecken dienen, für das tägliche Leben hatte man die sogenannte Sonnenzeit eingeführt. Diese wird im Kapitel 2 besprochen. Es werden hier zunächst Weisungen zur verfertigung einer genauen Sonnenuhr gegeben. Nach Besprechnung des Ekliptikalsystems wird die Veränderlichkeit des Sonnentages und damit auch die der Sonnenstunde erklärt und aus praktischen Gründen die mittlere Sonnenzeit eingeführt. Es ist zu bedauern, daß auf die Variation des wahren Sonnentages im Laufe eines Jahres und speziell auf die beiden Maxima und Minima nicht näher eingegangen worden ist. Im Kapitel 3 wird an einigen Beispielen gezeigt, wie durch die rasche Entwicklung der Verkehrsmittel auch die mittlere Sonnenzeit (Ortszeit) für das tägliche Leben unbrauchbar wurde, und seinen Platz der Zonenzeit abtreten mußte. Es wird endlich die technische Ausführung der Verbreitung der von den Sternwarten bestimmten richtigen Zeit beschrieben. Die Figuren und eine Tabelle der Normalzeiten erleichtern das Verständnis.

F. Bukovszky.

Ludwig Bieberbach, Analytische Geometrie (Teubners math. Leitfäden, Band 29), zweite Auflage, V + 141 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1932.

Die vorliegende zweite Auflage des Bieberbachschen Buches ist eine vermehrte und durchgesehene Ausgabe der ersten Auflage (Besprechung s. *diese Acta*, 5 (1930—32), S. 140—141). Der Text wurde sorfaltig durchgesehen und durchgearbeitet. Es wurden einige weiteren Beispiele und Ergänzungen eingefügt. Man findet z. B. eine ausführlichere Diskussion der Definition des Winkels. Der Verfasser betont die Wichtigkeit der axiomatischen Begründung der Geometrie noch nachdrücklicher als in der ersten Auflage. Die geometrische Bedeutung der Gruppentheorie und der Invarianten kommt in der neuen Auflage auch zur Geltung. Das Buch hat auch in typographischen Hinsicht eine übersichtlichere Form gewonnen.

St. Lipka.

Marshall Harvey Stone, Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis (American Math. Society Colloquium Publications, Volume XV), VIII + 622 pages, New-York, American Mathematical Society, 1932.

Not so long ago, Professor STONE has started with his investigations about linear transformations in Hilbert space in a few really interesting and really short papers. Today, I think, everyone of the guild greets with surprise but with wondering interest his present work, an exceptionally large handbook on the same subject both for the student and for the searcher. It was his intention, as he says, to present his results in some currents journals, but various circumstances as the lack of a detailed treatment starting with the foundations and carriing the development as far as possible in every direction, especially the lack of English-language works dealing with the theory, have led to the preparation of the volume, in which he has attempted to include not only contributions of his own but also a substantial portion of the existing material bearing on the subject.

What is more surprising, is the missing of some topics of first rate interest, especially of the authors personal work concerning group theoretic questions of fundamental importance in the quantum machanics. Not even the so-called STONE's Theorem, on the spectral resolution of linear groups of unitary transformations, a counterpart of HILBERT's classical theorem on the resolution of quadratic forms in infinitely many variables, is included in the volume. We are missing too the very important investigations of VON NEUMANN about the topological and algebraical features of spaces of commutative self-adjoint and normal transformations and on their simultaneous spectral resolution. Moreover, one vainly tries to look up the recent work of CARLEMAN, KOOPMAN, VON NEUMANN, BIRKHOFF and E. HOPF on problems connected with the ergodic hypothesis. All these topics, I suppose, had to be dealth with in the two chapters for which provision has originally be made but which have been omitted by considerations of space.

I am pleased to say that these first impressions on lack of completeness are highly contrebalanced by the masterly and minute exposition of the remaining matter. After a first chapter on abstract HILBERT space and its realisations, the second is dealing with a step by step analysis of the general transformation idea, leading to the different types of transformations, analysis that is really important later on for the thorough understanding of CARLEMAN's and VON NEUMANN's general theory of symmetric transformations. Chapter III, about examples, deals with some of the less difficult problems concerning differential and integral operators, including FOURIER and HANKEL transformations. In Chapter IV the fundamental problems concerning resolvents, spectra and reducibility are posed and investigated under a general aspect.

In the two following chapters the general theory of bounded or nonbounded self-adjoint transformations and the corresponding operational calculus are developed. The analysis depends, as in the authors original papers dealing with these topics, upon methods originated by STIELTJES and extended by CARLEMAN; later on the RADON-STIELTJES integral is introduced and used. May I express the opinion that a considerable amount of calculating trouble could have been spared by defining and using direct integration of transformations as functions of a parameter instead of going back to ordinary integrals by way of the corresponding bilinear operators, as well as by keeping to the symbolic method developed in the reviewers book, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris, 1913, and improved and extended in a recent paper published in the fifth volume of *these Acta*.

The next chapter gives an up to date analysis of the really difficult problem of unitary equivalence of self-adjoint transformations as originated by HELLINGER in his *Thesis,* Göttingen, 1907 and in a paper in *Crelle's Journal,* **136,** 1909. Chapter VIII is dealing with unitary transformations and more generally with normal ones; the corresponding facts are, as one knows, almost immediate consequences of the theory of self-adjoint transformations.

In Chapter IX the general symmetric transformation is exhaustively treated, first following, with occasional additions, VON NEUMANN's exposition in the *Mathematische Annalen,* 10 1929; later an abstract definition of „real" transformations in „complex" HILBERT space is given and analysed. The third section of this chapter is essentially a translation into abstract terms of CARLEMAN's results concerning sequences of integral operators, with some occasional extensions too.

The last chapter, on applications, more than a third of the whole, is one of the most significant and most instructive ones. So sorry, I am not allowed, by considerations of space, to go into the matter.

In summary, Professor STONE's book is a most excellent treatise for anyone wishing to penetrate into the theory as a whole.

I am much grateful to the author for his emphasizing, in the foreword, the rôle my own contributions played in preparing the ground for a successful consideration of non-bounded transformations. As a matter of fact, I feel really ashamed for that the decisive step, from the bounded type to the non-bounded one, had to be waited for so many years and finally had to be accomplished by others.

F. R.

D. Hilbert und S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band XXXVII), VIII + 310 S., Berlin, J. Springer, 1932.

Zweck des Werkes ist die Geometrie in ihrem gegenwärtigen Zustand von der Seite des Anschaulichen aus zu betrachten. In sechs voneinander unabhängigen Kapiteln wird der Leser „in dem großen Garten der Geometrie spazieren geführt; jeder soll sich einen Strauß pflücken können, wie er ihm gefällt" (nach dem Wortlaut des Vorwortes). Im ersten Kapitel werden die einfachsten Kurven und Flächen behandelt, besonders die Kegelschnitte und die Flächen zweiter Ordnung; Fadenkonstruktionen und Stangenmodelle stehen im Mittelpunkt der Behandlung. Im zweiten Kapitel kommen reguläre Punktsysteme, Punktgitter in zwei-, drei- und mehrdimensionalen Räumen mit ihren zahlentheoretischen Beziehungen, Krystalle und die diskontinuierlichen Gruppen der Ebene und des Raumes zu Betrachtung. Im dritten Kapitel werden die Konfigurationen der projektiven Geometrie, sowie die Pascalsche, die Desarguesche und andere Konfigurationen untersucht. Im vierten Kapitel werden nach einer sehr anschaulichen Einführung in die Grundbegriffe der Differentialgeometrie Eigenschaften der Kugel, Verbiegungen von Flächen in sich, die nichteuklidischen Geometrien und Abbildungen von Flächen behandelt. [Die bibliographische Bemerkung auf S. 237 betreffend die Lösung des Plateauschen Problems könnte wohl mißverstanden werden; erst in neuester Zeit hat T. RADÓ eine Lösung des allgemeinen Plateauschen Problems gegeben; kurz nachher J. DOUGLAS eine andere, welche auch eine Verallgemeinerung des Problems mit erledigt — dieses Wortlaut würde den Sachverhalt besser ausdrücken.] Im fünften Kapitel werden kinematische Fragen, darunter Gelenkmechanismen, im sechsten Kapitel Fragen über anschauliche Topologie der Flächen besprochen.

B. v. K.

Paul Alexandroff, Einfachste Grundbegriffe der Topologie, V + 48 S, Berlin, J. Springer, 1932.

Das vorliegende Büchlein war zuerst als Anhang zu Hilberts Vorlesungen über *Anschauliche Geometrie* geplant, hat sich aber nachher etwas ausgedehnt und ist schließlich zu der jetzigen Gestalt gekommen, — so erfährt man es aus dem Vorwort.

In einer kurzen Einleitung werden grundlegende Tatsachen aus der Topologie in Hinsicht auf ihre Selbstverständlichkeit und auf ihre Gültigkeit betrachtet. Auf die Möglichkeit von drei ebenen Gebieten mit demselben Rand wird ebenfalls hingewiesen; diese Entdeckung rührt bekanntlich von BROUWER her; er hat dafür auch eine präzise Konstruktion gegeben, die den von YONEYAMA später gefundenen „Arbeitsplan" selbst an Übersichtlichkeit weit übertrifft. — Das Grundproblem der mengentheoretischen Topologie wird folgendermaßen formuliert: „Diejenigen mengentheoretischen Gebilde festzulegen, die einen Anschluß an das anschaulich gegebene Material der elementaren Polyedertopologie gestatten und somit verdienen, als — wenn auch allgemeinste — geometrische Figuren betrachtet zu werden". Mit dieser vernünftigen Formulierung des Grundproblems wird wohl jeder Topologe einverstanden sein. Es ist dann eine Geschmacksache, welche obere Schranke den Verallgemeinerungen gestellt wird. Nach der Ansicht des Referenten hat ALEXANDROFF auch in dieser Hinsicht das richtige Maß getroffen, indem er in einer allgemeinen Auffassung genügend breite Perspektive eröffnet um alles Wesentliche der konkreten Topologie einheitlich überblicken zu können — aber ohne auf das Pathologische zu großen Wert zu legen. Diese gesunde Tendenz ist auch für das vorliegende Büchlein charakteristisch. In dem ersten Kapitel wird der Begriff des Komplexes, in dem zweiten auf Grund eines üblichen Kompromisses der Begriff des algebraischen Komplexes erläutert. Im dritten Kapitel werden simpliziale Abbildungen und die grundlegenden Invarianzsätze der Topologie in einer sehr eleganten Form dargestellt.

B. v. K.

Karl Menger, Kurventheorie, herausgegeben unter Mitarbeit von GEORG NÖBELING (Mengertheoretische Geometrie in Ein-

zeldarstellungen, Band II), VI + 376 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1932.

In dem vorliegenden Buch wird der dimensionstheoretische Kurvenbegriff einer systematischen Untersuchung zugrunde gelegt: ein Kontinuum K heißt eine Kurve, wenn jeder Punkt von K in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, deren Begrenzungen mit K diskontinuierliche Durchschnitte haben. In einem einführenden Kapitel werden die „alten" Kurvenbegriffe besprochen; es wird festgestellt, daß keiner von ihnen dem dimensionstheoretischen Gesichtspunkt entspricht. Es wird nicht betont, jedoch ist es wahr, daß umgekehrt für viele Zwecke der „neue" Kurvenbegriff unangemessen ist. Auf Grund der neuen Definition wird eine „einheitliche und abgeschlossene Theorie der Kurven" entwickelt; dabei kommen manche auch für sich interessante Fragen zu Betrachtung, die anderen dienen zu einem möglichst vollständigen Aufbau der Theorie. Manche interessanten Resultate werden im Schlußkapitel gestreift, darunter der wichtige Satz von BROUWER betreffend die Übereinstimmung der Zusammenhangszahl und der Komponentenzahl des Komplementes für beliebige Kurven der Ebene. Unter den ungelösten Problemen wird die Frage erörtert, ob der Kreis unter allen im Kleinen zusammenhängenden Kurven durch Homogeneität charakterisiert ist; diese Frage verdient sicher eine zentrale Stellung in der „mengentheoretischen Geometrie". Hoffentlich wird sie in einem nächsten Band der Sammlung ihren Platz finden.

B. v. K.

Stefan Banach, Théorie des opérations linéaires (Monografje Matematyczne, Tom I), VIII + 254 pages, Warszawa, Seminarjum Matematyczne, 1932.

La théorie des opérations a pour objet l'étude des fonctions numériques et d'autres correspondances définies dans les espaces à une infinité de dimensions ou si l'on préfère, dans les ensembles abstraits. Les opérations linéaires, ce sont des fonctions et des correspondances linéaires, c'est-à-dire additives et continues dans des espaces vectoriels, espaces dans lesquels on a défini l'addition des éléments et leur multiplication par des nombres comme pour les vecteurs ordinaires.

La théorie générale des opérations linéaires qui fait l'objet du présent volume de M. BANACH, embrasse par ses méthodes toute une foule de problèmes variés, des problèmes d'existence en premier lieu, concernant les équations différentielles et les équations intégrales et plus généralement les équations fonctionnelles linéaires, les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, les séries de FOURIER, la sommation des séries divergentes et enfin, les fonctions continues sans dérivée. Bien que précédée par l'Analyse générale de E. H. MOORE et préparée par les recherches de M. FRÉCHET et d'autres sur les ensembles abstraits et bien qu'elle pût profiter des méthodes développées antérieurement pour des buts particuliers mais dont les auteurs ont déjà prévu et prédit l'efficacité générale, la théorie en question appartient presque entièrement à ces denières années. Son développement systématique est dû principalement à M. BANACH et à ses collaborateurs et c'est lui le géomètre le plus compétent de nous présenter l'état actuel de la théorie.

Il m'est impossible, en ces quelques lignes, de passer en revue la variété des problèmes considérés dans le livre et dont quelques uns, très raffinés, y sont posés pour la première fois. Quant aux méthodes, il y en a quelquesunes d'une extrème finesse, comme par exemple celle assise sur l'idée d'ensemble faiblement fermé d'opérations linéaires. Il y en a d'autres, peut-être pas moins efficaces, mais qui sont d'une simplicité épatante. Qu'il me soit permis d'en rapporter une, en particulier pour ceux qui ont peur des abstractions de trop grande généralité. Je commence par rappeler un théorème appartenant aux éléments de la théorie des ensembles, d'après lequel l'intervalle est un ensemble de seconde catégorie, c'est-à-dire qu'il ne peut être épuisé par une suite dénombrable d'ensembles non-denses. Il s'ensuit immédiatement qu'une suite de fonctions continues étant supposée d'être bornée en chaque point d'un intervalle, il y en a nécessairement un intervalle partiel où la suite est bornée uniformément. Ces théorèmes restent valables, avec des modifications évidentes, pour des ensembles parfaits au lieu des intervalles, situés dans des espaces à une ou à plusieurs dimensions. Ils remontent si je ne me trompe pas, à RENÉ BAIRE et à M. OSGOOD qui les ont établis indépendemment autour de 1900; ce dernier en a tiré parti, entre autres, pour en déduire un théorème important appartenant à la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables. Or, M. BANACH a observé que ces théorèmes restent valables, par des raisons immédiates et sous des hypothèses très générales, pour divers espaces à une infinité de dimensions, parmi lesquels le champ des fonctions continues, les divers champs de fonctions mesurables et en particulier l'espace de HILBERT, la continuité des opérations dans ces champs étant définie conformément aux problèmes envisagés. Quand il s'agit en particulier des opérations *linéaires*, il s'ensuit, eu égard encore à des raisons d'homogénéité, qu'une suite de telles opérations ne peut rester bornée en tout point sans rester bornée uniformément dans chaque partie bornée de l'espace considéré. D'une manière plus ou moins immédiate, ce théorème implique, oûtre ses applications aux problèmes d'inversion des transformations linéaires, la partie la plus essentielle des beaux théorèmes du regretté HAAR et de M. LEBESGUE sur la convergence des intégrales singulières, un théorème de MM. HELLINGER et TOEPLITZ d'après lequel la suite des réduites d'une forme quadratique à une infinité de variables ne pourra être convergente en tout point de l'espace de HILBERT sans que la forme ellemême soit bornée et enfin, l'existence de diverses catégories de fonctions continues sans dérivée. Ainsi le théorème de M. BANACH embrasse des résultats appartenant à des théories variées, résultats dont chacun représentait un réel accomplissement à l'époque de sa découverte.

Nous sommes enchantés de pouvoir saluer le prèmier volume des *Monographies Mathématiques* qui commencent sous d'heureux auspices.

F. R.

Elementare Sätze über die Abgrenzung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Von LUDWIG BERWALD in Prag.

Im Folgenden wird eine Anzahl elementarer Sätze bewiesen, die sich an bekannte Cauchysche Sätze über die Abgrenzung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung anschließen. Über die behandelten Fragestellungen, die (mit Ausnahme der des § 3) auf andere Autoren zurückgehen, orientieren die Einleitungen der einzelnen Paragraphen.

§ 1. Über einen Satz von A. Cohn.

1. Nach CAUCHY[1]) liegen bekanntlich alle Nullstellen eines Polynoms

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \quad (a_n \neq 0, \ |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| > 0) \tag{1}$$

in dem Kreisbereich

$$|z| \leqq p, \tag{2}$$

wo p die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$|a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2 + \ldots + |a_{n-1}| z^{n-1} - |a_n| z^n = 0 \tag{3}$$

ist. Herr COHN[2]) hat diese Aussage durch den Satz ergänzt, daß mindestens eine Nullstelle von $f(z)$ der Ungleichung

$$|z| \geqq p\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \text{ }^{3)} \tag{4}$$

[1]) A. L. CAUCHY, Sur la résolution des équations numériques et sur la théorie de l'élimination, *Exercices de Math.* (1829); *Oeuvres*, (2) 9, S. 87—161.

[2]) A. COHN, Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise, *Math. Zeitschrift*, **14** (1922), S. 110—148, bes. S. 143 f.

[3]) $\sqrt[\nu]{2}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ bedeutet im Folgenden stets den positiven Wurzelwert. Das Gleiche gilt allgemein für gebrochene Potenzen positiver Zahlen.

genügt, und daß in (4) das Gleichheitszeichen wirklich auftreten kann.

Herr COHN beweist seinen Satz mit Hilfe eines Satzes von GRACE[4]) über die Nullstellen apolarer Polynome. Der Satz kann aber viel einfacher bewiesen werden. Wir führen den Beweis sogleich für den etwas mehr aussagenden

Satz I. *Sind* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *die Wurzeln der Gleichung*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0, \quad (a_n \neq 0, \ |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| > 0) \tag{5}$$

und bedeutet p die positive Wurzel der Gleichung

$$|a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2 + \ldots + |a_{n-1}| z^{n-1} - |a_n| z^n = 0, \tag{6}$$

so gilt

$$p \geqq \frac{|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|}{n} \geqq p\left(\sqrt[n]{2} - 1\right). \tag{7}$$

In (7) *steht in der zweiten Ungleichung das Gleichheitszeichen für die Gleichungen* (5) *mit lauter gleichen Wurzeln und nur für diese.*

Beweis. Die erste Ungleichung (7) folgt aus dem angeführten Satze von CAUCHY. Zum Beweise der zweiten bezeichnen wir die k-te elementarsymmetrische Funktion von n Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $\Sigma x_1 x_2 \ldots x_k$. Dann ist, wenn p die angegebene Bedeutung hat,

$$\tag{8} \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|}{n} + p\right)^n = \\ &\qquad = \left(\frac{(|z_1| + p) + (|z_2| + p) + \ldots + (|z_n| + p)}{n}\right)^n \geqq \\ &\geqq (|z_1| + p) \cdot (|z_2| + p) \ldots (|z_n| + p) = \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_n| + p\, \Sigma |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_{n-1}| + \ldots + \\ &\qquad + p^k \Sigma |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_{n-k}| + \ldots + p^n \geqq \\ &\geqq |z_1 z_2 \ldots z_n| + p\, |\Sigma z_1 z_2 \ldots z_{n-1}| + \ldots + \\ &\qquad + p^k |\Sigma z_1 z_2 \ldots z_{n-k}| + \ldots + p^n = \\ &= \frac{|a_0| + |a_1| p + |a_2| p^2 + \ldots + |a_{n-1}| p^{n-1}}{|a_n|} + p^n = 2p^n. \end{aligned} \right.$$

Die erste Ungleichung (8) ist die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n positiven Zahlen;

---

[4]) J. H. GRACE, The zeros of a polynomial, *Proceedings Cambridge Phil. Soc.*, 11 (1900—1902), S. 352—357.

die übrigen sind evident. Wie aus (8) selbst hervorgeht, gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$. Aus (8) folgt unmittelbar (7).

Da das arithmetische Mittel von n nichtnegativen Zahlen nicht größer ist als die größte der Zahlen, so ist damit auch der Satz von COHN bewiesen. Ein *direkter* Beweis des Satzes von COHN ergibt sich aus

$$(|z_n|+p)^n \geqq (|z_1|+p)\,.\,(|z_2|+p)\ldots(|z_n|+p),$$

wo z_n die absolut größte Wurzel der Gleichung (5) bedeutet.

2. Setzen wir in (5) $|a_0|\,.\,|a_n|>0$ voraus, so ergibt sich durch Anwendung des Satzes I auf die Gleichung

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right) \equiv a_n + a_{n-1}z + a_{n-2}z^2 + \ldots + a_0 z^n = 0,$$

deren Wurzeln die reziproken Werte der Wurzeln von (5) sind:

$$\frac{1}{q} \geqq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{|z_1|}+\frac{1}{|z_2|}+\ldots+\frac{1}{|z_n|}\right) \geqq \frac{1}{q}(\sqrt[n]{2}-1),$$

wo $\frac{1}{q}$ die positive Wurzel der Gleichung

$$|a_n| + |a_{n-1}|z + \ldots + |a_1|z^{n-1} - |a_0|z^n = 0$$

ist. Es gilt also

Satz I′. *Sind $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Wurzeln der Gleichung*

$$f(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0, \qquad (|a_0|\,.\,|a_n|>0)$$

und bedeutet q die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$|a_0| - |a_1|z - |a_2|z^2 - \ldots - |a_n|z^n = 0, \tag{9}$$

so ist

$$q \leqq \frac{n}{\frac{1}{|z_1|}+\frac{1}{|z_2|}+\ldots+\frac{1}{|z_n|}} \leqq \frac{q}{\sqrt[n]{2}-1}. \tag{10}$$

In der zweiten Ungleichung (10) *steht das Gleichheitszeichen für die Gleichungen $f(z)=0$ mit lauter gleichen Wurzeln und nur für diese.*

Bemerkung: *Haben $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dieselbe Bedeutung, wie im Satze I′, und gilt*

$$\frac{n}{\frac{1}{|z_1|}+\frac{1}{|z_2|}+\ldots+\frac{1}{|z_n|}} \geqq \frac{a}{\sqrt[n]{2}-1}, \qquad (a>0) \tag{11}$$

so ist

$$|a_0| - |a_1|a - |a_2|a^2 - \ldots - |a_\lambda|a^\lambda \geqq 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Denn aus (10) und (11) folgt $a \leqq q$. Nun ist die linke Seite der Gleichung (9) für $z > 0$ eine monoton abnehmende Funktion von z. Sie ist für $z = q$ Null, also für $z = a$ nichtnegativ. Umsomehr gilt (12).

§ 2. Eine Fragestellung von St. Lipka.

3. Den Ausgangspunkt der Untersuchung des Herrn LIPKA[5]) bildet der wohlbekannte, aus dem Satz zu Beginn von Nr. **1** leicht ableitbare Satz von CAUCHY,[1]) daß alle Nullstellen des Polynoms (1) im Kreisinnern

$$|z| < 1 + \frac{\operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|)}{|a_n|} \tag{13}$$

liegen. Sie gehören also erst recht dem Kreisinnern

$$|z| < 1 + \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_n|}$$

an. Herr LIPKA stellt nun die Frage, wann alle Nullstellen des Polynoms (1) schon im Kreisinnern

$$|z| < 1 + \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_k|}{|a_n|}, \qquad (0 \leqq k < n-1) \tag{14}$$

liegen und leitet eine hinreichende Bedingung dafür ab.[6]) Eine Verschärfung seines Satzes ist enthalten in dem folgenden

Satz II. *Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Wurzeln der Gleichung*

$$f(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0 \qquad (a_n \neq 0) \tag{15}$$

geordnet nach wachsenden Absolutbeträgen:

$$|z_1| \leqq |z_2| \leqq \ldots \leqq |z_{n-1}| \leqq |z_n|,$$

und k eine ganze Zahl,

$$0 \leqq k < n-1.$$

Wenn

$$\frac{n-k-1}{\dfrac{1}{|z_{k+1}|} + \dfrac{1}{|z_{k+2}|} + \ldots + \dfrac{1}{|z_{n-1}|}} \geqq \frac{1}{\left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{\frac{k}{n-1}}}, \tag{16}$$

---

[5]) ST. LIPKA, Über die Abgrenzung der Wurzeln von algebraischen Gleichungen, *diese Acta*, **3** (1927), S. 73—80.

[6]) a. a. O., Satz I., S. 73.

oder wenn

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{n-k-1}{\dfrac{1}{|z_{k+1}|}+\dfrac{1}{|z_{k+2}|}+\dots+\dfrac{1}{|z_{n-1}|}} \geqq \dfrac{a}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}, \\ |z_{k+1}|\cdot|z_{k+2}|\dots|z_{n-1}| \geqq \dfrac{1}{a^k}, \quad \left(0<a<\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{\frac{n-k-1}{n-1}}\right) \end{cases}$$

so liegen alle Wurzeln im Kreisinnern

$$(18)\qquad |z|<1+\frac{|a_0|+|a_1|+\dots+|a_k|}{|a_n|}.$$

Die Ungleichung (16) ist insbesondere erfüllt, wenn höchstens k Wurzeln (nämlich $z_1, z_2, \dots, z_k$) im Kreisinnern

$$|z|<\frac{1}{\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{\frac{k}{n-1}}}$$

liegen. Ersetzt man hierin die rechte Seite durch die für $0\leqq k<n-2$ größere, für $k=n-2$ ebenso große Zahl $\dfrac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}$, so ergibt sich der Satz des Herrn LIPKA.

Beweis:[7]) Wir setzen zunächst nur

$$(19)\qquad \frac{n-k-1}{\dfrac{1}{|z_{k+1}|}+\dfrac{1}{|z_{k+2}|}+\dots+\dfrac{1}{|z_{n-1}|}} \geqq \frac{a}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}, \qquad (a>0)$$

voraus und schreiben $f(z)$ in der Form

$$f(z)=g(z)\,.\,h(z),$$

wo

$$(20)\quad \begin{cases} g(z)\equiv a_n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_k)(z-z_n)\equiv \\ \qquad\qquad \equiv \alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\dots+\alpha_{k+1}z^{k+1}, \\ h(z)\equiv(z-z_{k+1})(z-z_{k+2})\dots(z-z_{n-1})\equiv \\ \qquad\qquad \equiv \beta_0+\beta_1 z+\beta_2 z^2+\dots+\beta_{n-k-2}z^{n-k-2}+z^{n-k-1}, \end{cases}$$

so daß die absolut größte Nullstelle von $g(z)$ mit der absolut größten Nullstelle von $f(z)$ identisch ist. Dann ist $|\beta_0|>0$ und

$$(21)\qquad a_\mu=\alpha_\mu\beta_0+\alpha_{\mu-1}\beta_1+\dots+\alpha_0\beta_\mu, \qquad (\mu=0,1,\dots,n)$$

wobei

---

[7]) Der Grundgedanke des Beweises rührt von Herrn LIPKA her.

$$\alpha_\varrho = 0, \text{ wenn } \varrho > k+1\,; \quad \beta_\varrho = 0, \text{ wenn } \varrho > n-k-1,$$

und

$$\alpha_{k+1} = a_n, \quad \beta_{n-k-1} = 1.$$

Aus (21) folgt

$$(22) \quad \begin{cases} |\alpha_0| \cdot |\beta_0| = |a_0|, \\ |\alpha_1| \cdot |\beta_0| - |\alpha_0| \cdot |\beta_1| \leqq |a_1|, \\ |\alpha_2| \cdot |\beta_0| - |\alpha_1| \cdot |\beta_1| - |\alpha_0| \cdot |\beta_2| \leqq |a_2|, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |\alpha_\nu| \cdot |\beta_0| - |\alpha_{\nu-1}| \cdot |\beta_1| - \ldots - |\alpha_2| \cdot |\beta_{\nu-2}| - \\ \qquad - |\alpha_1| \cdot |\beta_{\nu-1}| - |\alpha_0| \cdot |\beta_\nu| \leqq |a_\nu|, \end{cases}$$

wobei $0 \leqq \nu \leqq k < n-1$ sei. Nach der Bemerkung zum Satze I' ist wegen der Ungleichung (19)

$$(23) \quad |\beta_0| - |\beta_1| a - |\beta_2| a^2 - \ldots - |\beta_\tau| a^\tau \geqq 0 \quad (\tau = 0, 1, \ldots, n-k-1).$$

Wir multiplizieren die Ungleichungen (22) der Reihe nach mit $1, a, a^2, \ldots, a^\nu$ und addieren. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} &|\alpha_\nu| \cdot |\beta_0| a^\nu + |\alpha_{\nu-1}| (|\beta_0| - |\beta_1| a) a^{\nu-1} + \ldots + \\ &\quad + |\alpha_0| \cdot (|\beta_0| - |\beta_1| a - |\beta_2| a^2 - \ldots - |\beta_\nu| a^\nu) \leqq \\ &\qquad \leqq |a_0| + |a_1| a + \ldots + |a_\nu| a^\nu \qquad (0 \leqq \nu \leqq k). \end{aligned}$$

Wegen (23) sind die Koeffizienten von $|\alpha_\nu|, |\alpha_{\nu-1}|, \ldots, |\alpha_0|$ alle nichtnegativ. Die Ungleichung bleibt daher richtig, wenn wir die Summe auf der linken Seite durch den ersten Summanden ersetzen. Wir erhalten so:

$$(24) \quad |\alpha_\nu| \leqq \frac{1}{|\beta_0|} \left(|a_\nu| + \frac{|a_{\nu-1}|}{a} + \frac{|a_{\nu-2}|}{a^2} + \ldots + \frac{|a_0|}{a^\nu} \right) \quad (0 \leqq \nu \leqq k).$$

Wenn nun

$$(25) \quad |\beta_0| \geqq 1, \ |\beta_0| a \geqq 1, \ |\beta_0| a^2 \geqq 1, \ldots, \ |\beta_0| a^k \geqq 1,$$

so ist

$$|\alpha_\nu| \leqq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_\nu| \leqq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_k|, \quad (0 \leqq \nu \leqq k)$$

und daher auch

$$(26) \quad \operatorname{Max}(|\alpha_0|, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_k|) \leqq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_k|.$$

Nach dem oben angeführten Satze von CAUCHY liegen alle Nullstellen von $g(z)$ und daher auch von $f(z)$ in dem Kreisinnern

$$(27) \quad |z| < 1 + \frac{\operatorname{Max}(|\alpha_0|, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_k|)}{|\alpha_{k+1}|},$$

also wegen (26) und $\alpha_{k+1} = a_n$ auch im Kreisinnern (18).

Die Bedingungen (25) reduzieren sich auf

$$(28)\quad |\beta_0| = |z_{k+1}|\cdot|z_{k+2}|\ldots|z_{n-1}| \geqq \operatorname{Max}\left(1, \frac{1}{a^k}\right) = \begin{cases} 1 & (a \geqq 1), \\ \dfrac{1}{a^k} & (0 < a < 1). \end{cases}$$

Wir zeigen jetzt, daß für

$$(29)\qquad a \geqq \left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{\frac{n-k-1}{n-1}}$$

die Ungleichung (28) aus der Ungleichung (19) folgt. Diese ergibt nämlich wegen der Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem harmonischen Mittel positiver Zahlen

$$|\beta_0| = |z_{k+1}|\cdot|z_{k+2}|,\ldots|z_{n-1}| \geqq$$

$$(30)\quad \geqq \left(\frac{n-k-1}{\frac{1}{|z_{k+1}|} + \frac{1}{|z_{k+2}|} + \cdots + \frac{1}{|z_{n-1}|}}\right)^{n-k-1} \geqq \left(\frac{a}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}\right)^{n-k-1}.$$

Nun ist $0 \leqq k < n-1$. Für $a \geqq 1$ ist daher die rechte Seite von (30) nicht kleiner als 1, also (28) stets eine Folge von (30). Für $0 < a < 1$ folgt (28) aus (30) dann, wenn

$$\left(\frac{a}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}\right)^{n-k-1} \geqq \frac{1}{a^k},$$

woraus sich für a die Ungleichung (29) ergibt. Für die Werte von a, welche der Ungleichung (29) genügen, läßt sich die Ungleichung (19) durch (16) ersetzen. Für die Werte von $a > 0$, für die (29) nicht gilt, ist $\operatorname{Max}\left(1, \frac{1}{a^k}\right) = \frac{1}{a^k}$.

Damit ist Satz II vollständig bewiesen.

4. Dem letzten Satz ähnlich ist

Satz III. *Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Wurzeln der Gleichung*

$$(31)\qquad f(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

geordnet nach wachsenden Absolutbeträgen:

$$|z_1| \leqq |z_2| \leqq \ldots \leqq |z_{n-1}| \leqq |z_n|,$$

und k eine ganze Zahl,

$$0 \leqq k < n-1.$$

Wenn

$$(32)\qquad \frac{n-k-1}{\frac{1}{|z_{k+2}|} + \frac{1}{|z_{k+3}|} + \cdots + \frac{1}{|z_n|}} \geqq \frac{1}{\left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{\frac{k}{n-1}}},$$

oder wenn

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{n-k-1}{\dfrac{1}{|z_{k+2}|}+\dfrac{1}{|z_{k+3}|}+\dots+\dfrac{1}{|z_n|}} \geqq \dfrac{a}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}, \\[2ex] |z_{k+2}|\,.\,|z_{k+3}|\dots|z_n| \geqq \dfrac{1}{a^k}, \quad \left(0<a<\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{\frac{n-k-1}{n-1}}\right) \end{cases}$$

so liegen mindestens $k+1$ Wurzeln im Kreisinnern

$$(34)\qquad |z|<1+\frac{|a_0|+|a_1|+\dots+|a_k|}{|a_n|}.$$

Die Ungleichung (32) ist insbesondere erfüllt, wenn höchstens $k+1$ Wurzeln (nämlich $z_1, z_2, \dots, z_{k+1}$) im Kreisinnern

$$|z|<\frac{1}{\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{\frac{k}{n-1}}}$$

liegen.

Der Beweis des Satzes III läßt sich fast wörtlich ebenso führen, wie der des Satzes II. Nur hat man jetzt $f(z)$ gemäß

$$f(z)=g_1(z)\,.\,h_1(z)$$

zu zerlegen, wo

$$g_1(z)\equiv a_n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{k+1})\equiv$$
$$\equiv \alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\dots+\alpha_{k+1}z^{k+1},$$
$$h_1(z)\equiv \quad (z-z_{k+2})(z-z_{k+3})\dots(z-z_n)\equiv$$
$$\equiv \beta_0+\beta_1 z+\beta_2 z^2+\dots+\beta_{n-k-2}z^{n-k-2}+z^{n-k-1}$$

Der einzige wesentliche Unterschied gegenüber dem Beweise des Satzes II liegt darin, daß jetzt nicht mehr die absolut größte Nullstelle von $g_1(z)$ auch zugleich die absolut größte Nullstelle von $f(z)$ ist, sondern nur die absolut größte unter den $k+1$ Nullstellen $z_1, z_2, \dots, z_{k+1}$ von $f(z)$. Man kann daher nur von diesen Nullstellen aussagen, daß sie im Kreisinnern (34) liegen.

5. Im Falle $k=0$ lassen sich die Voraussetzungen des Satzes II weitgehend abschwächen. Man erhält so einen Satz, der für $j=n$ in folgendem Satze enthalten ist:

Sind $z_1, z_2, \dots, z_n$ die Wurzeln der Gleichung (31), *geordnet nach wachsenden Absolutbeträgen, und gilt*

$$|z_1|\,.\,|z_2|\dots|z_{j-1}|\,.\,|z_{j+1}|\dots|z_n|\geqq 1, \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

so liegen mindestens j dieser Wurzeln im abgeschlossenen Kreisinnern

$$|z| \leqq \frac{|a_0|}{|a_n|}$$

$\left(\text{also erst recht im Kreisinnern } |z| < 1 + \frac{|a_0|}{|a_n|}\right)$.

Denn aus $1 \leqq |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_{j-1}| \cdot |z_{j+1}| \ldots |z_n|$ folgt

$$|z_j| \leqq |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_{j-1}| \cdot |z_j| \cdot |z_{j+1}| \ldots |z_n| = \frac{|a_0|}{|a_n|}.$$

Aus Satz III ergibt sich (für $k = n-2$) der Satz von FEKETE,[8]) daß *die Gleichung* (31) *im Kreisinnern*

$$|z| < 1 + \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-2}|}{|a_n|}$$

mindestens $n-1$ Wurzeln hat, ferner folgende Verschärfung eines Satzes von LIPKA:[9])

Die Gleichung (31) *hat mindestens $k+1$ Wurzeln im Innern des Kreises um den Nullpunkt vom Radius*

$$\varrho = \operatorname{Max} \left\{ \frac{1}{\left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{\frac{k}{n-1}}}, \quad 1 + \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_k|}{|a_n|} \right\},$$

wobei k eine ganze Zahl bedeutet,

$$0 \leqq k < n-1.$$

Mindestens eine Wurzel der Gleichung (31) liegt also stets im Kreisinnern

$$|z| < 1 + \frac{|a_0|}{|a_n|}.$$

§ 3. Eine verwandte Fragestellung.

6. Der zu Beginn des § 2 angeführte Satz von CAUCHY legt die Frage nahe, *wann alle Nullstellen des Polynoms* (1) *schon im Kreisinnern*

---

[8]) Vgl. LIPKA, a. a. O., S. 78.

[9]) LIPKA, a. a. O., Satz II, S. 77. Dort steht $\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}$ an Stelle von $\frac{1}{\left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{\frac{k}{n-1}}}$.

$$|z| < 1 + \frac{\operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_k|)}{|a_n|} \qquad (0 \leqq k < n-1) \tag{36}$$

liegen. Hierüber beweisen wir das folgende Gegenstück des Satzes II bei dieser Fragestellung:

Satz IV. *Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Wurzeln der Gleichung*

$$f(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

geordnet nach wachsenden Absolutbeträgen:

$$|z_1| \leqq |z_2| \leqq \ldots \leqq |z_{n-1}| \leqq |z_n|,$$

und k eine ganze Zahl,

$$0 \leqq k < n-1.$$

Ferner sei z_0 die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$z^{n-1} - \left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{n-k-1} \cdot (z^k + z^{k-1} + z^{k-2} + \ldots + 1) = 0, \tag{37}$$

so daß

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt[n-k-1]{2} - 1 \leqq \left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{\frac{n-k-1}{n-1}} \leqq \\ \leqq z_0 < 1 + \left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{n-k-1} \leqq \sqrt[n-k-1]{2} \leqq 2, \end{aligned} \tag{38}$$

wo das erste Gleichheitszeichen nur für $k = 0$ und $k = n-2$, das zweite nur für $k = 0$, die übrigen nur für $k = n-2$ gelten.

Wenn

$$\frac{n-k-1}{\frac{1}{|z_{k+1}|} + \frac{1}{|z_{k+2}|} + \ldots + \frac{1}{|z_{n-1}|}} \geqq \frac{z_0}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}, \tag{39}$$

oder wenn

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{n-k-1}{\frac{1}{|z_{k+1}|} + \frac{1}{|z_{k+2}|} + \ldots + \frac{1}{|z_{n-1}|}} \geqq \frac{a}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}, \\ &|z_{k+1}| \cdot |z_{k+2}| \ldots |z_{n-1}| \geqq 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{1}{a^k}, \quad (0 < a < z_0) \end{aligned} \right. \tag{40}$$

so liegen alle Wurzeln von $f(z) = 0$ im Kreisinnern

$$|z| < 1 + \frac{\operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_k|)}{|a_n|}. \tag{41}$$

Die Ungleichung (39) ist insbesondere erfüllt, wenn höchstens k Wurzeln im Kreisinnern

$$|z| < \frac{z_0}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}$$

liegen.

B e w e i s. Wir setzen zunächst wieder nur die Ungleichung (19) voraus, zerlegen $f(z)$ wie beim Beweise des Satzes II und erhalten bei Verwendung derselben Bezeichnungen wie dort wieder die Ungleichungen (24). Nun ist wegen $a > 0$ für $0 \leqq \nu \leqq k$

$$|a_\nu| + \frac{|a_{\nu-1}|}{a} + \frac{|a_{\nu-2}|}{a^2} + \dots + \frac{|a_0|}{a^\nu} \leqq$$

$$\leqq \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^\nu}\right) \cdot \operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_\nu|) \leqq$$

$$\leqq \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^k}\right) \cdot \operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_k|).$$

Die Ungleichungen (24) gehen also in

$$|\alpha_\nu| \leqq \frac{1}{|\beta_0|}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^k}\right) \cdot \operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_k|)$$
$$(0 \leqq \nu \leqq k)$$

über, so daß

$$\operatorname{Max}(|\alpha_0|, |\alpha_1|, \dots, |\alpha_k|) \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{|\beta_0|}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^k}\right) \cdot \operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_k|) \tag{42}$$

ist. Somit wird

$$\operatorname{Max}(|\alpha_0|, |\alpha_1|, \dots, |\alpha_k|) \leqq \operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_k|), \tag{43}$$

sobald

$$|\beta_0| = |z_{k+1}| \cdot |z_{k+2}| \dots |z_{n-1}| \geqq 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^k},$$

d. h. sobald auch die zweite Ungleichung (40) mit $a > 0$ gilt. Dann liegen wegen (43) und $\alpha_{k+1} = a_n$ nach dem Satze von CAUCHY (§ 2, (13)) alle Nullstellen von $g(z)$, also auch von $f(z)$ im Kreisinnern (41).

Wir zeigen jetzt, daß für $a \geqq z_0$ die zweite Ungleichung (40) aus der ersten folgt. Aus dieser erhält man nämlich auf gleiche Weise wie im Beweise des Satzes II wieder

$$|\beta_0| \geqq \left(\frac{a}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}\right)^{n-k-1}$$

Hieraus folgt die zweite Ungleichung (40) dann, wenn

$$\frac{a^{n-k-1}}{\left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{n-k-1}} \geqq 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^k} \qquad (a > 0). \tag{44}$$

In (44) ist, wenn wir darin a als veränderlich ansehen, für $a>0$ die rechte Seite eine monoton abnehmende, die linke eine monoton zunehmende Funktion von a. Die kleinste positive Zahl a, die einer Ungleichung der Gestalt (44) genügt, ist daher die einzige positive Wurzel z_0 der Gleichung

$$(45)\qquad z^{n-k-1}=\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{n-k-1}\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^k}\right),$$

d. h. der Gleichung (37).

Wir leiten jetzt die Ungleichungen (38) ab. Verkleinern (bezw. vergrößern) wir die rechte Seite von (45), so erhalten wir eine Gleichung, deren einzige positive Wurzel kleiner (bezw. größer) als z_0 ist. Nun ist für $z>0$ und $k>0$ $\frac{1}{z^k}$ kleiner, für $z>1$ $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-1}$ größer als die Summe rechts in (45). Somit ist die Wurzel $\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{\frac{n-k-1}{n-1}}$ der Gleichung

$$(46)\qquad z^{n-k-1}=\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{n-k-1}\frac{1}{z^k}$$

für $0<k<n-1$ kleiner als z_0, für $k=0$ ebenso groß; die positive Wurzel ζ_0 der Gleichung

$$(47)\qquad z^{n-k-1}-z^{n-k-2}=\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{n-k-1}$$

größer als z_0. Es ist $\zeta_0>1$, da für $z>1-\frac{1}{n-k-1}$ die linke Seite der Gleichung (47) monoton zunimmt und für $0<z<1$ negativ ist. Anderseits bestätigt man leicht, daß

$$\zeta_0\leqq 1+\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{n-k-1}\leqq\sqrt[n-k-1]{2}\leqq 2,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $k=n-2$ gilt.

7. Das Gegenstück des Satzes III bei der gegenwärtigen Fragestellung lautet:

Satz V. *Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Wurzeln der Gleichung*

$$(48)\qquad f(z)\equiv a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n=0\qquad (a_n\neq 0)$$

geordnet nach wachsenden Absolutbeträgen:

$$|z_1|\leqq|z_2|\leqq\ldots\leqq|z_{n-1}|\leqq|z_n|,$$

und k eine ganze Zahl,

$$0 \leqq k < n-1.$$

Ferner sei z_0 die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$z^{n-1} - \left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{n-k-1} \cdot (z^k + z^{k-1} + z^{k-2} + \ldots + 1) = 0 \tag{49}$$

Wenn

$$\frac{n-k-1}{\frac{1}{|z_{k+2}|} + \frac{1}{|z_{k+3}|} + \ldots + \frac{1}{|z_n|}} \geqq \frac{z_0}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}, \tag{50}$$

oder wenn

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{n-k-1}{\frac{1}{|z_{k+2}|} + \frac{1}{|z_{k+3}|} + \ldots + \frac{1}{|z_n|}} \geqq \dfrac{a}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}, \\ |z_{k+2}| \cdot |z_{k+3}| \ldots |z_n| \geqq 1 + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} + \ldots + \dfrac{1}{a^k}, \quad (0 < a < z_0) \end{array} \right. \tag{51}$$

so liegen mindestens $k+1$ Wurzeln von $f(z) = 0$ im Kreisinnern

$$|z| < 1 + \frac{\operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_k|)}{|a_n|}. \tag{52}$$

Die Ungleichung (50) ist insbesondere erfüllt, wenn höchstens $k+1$ Wurzeln im Kreisinnern

$$|z| < \frac{z_0}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}$$

liegen.

Der Beweis ist ganz analog zum Beweise des Satzes IV. Nur ist jetzt $f(z)$ so zu zerlegen, wie es beim Beweise des Satzes III geschehen ist.

8. Aus Satz V folgt schließlich noch:

Die Gleichung (48) *hat mindestens $k+1$ Wurzeln im Innern des Kreises um den Nullpunkt vom Radius*

$$r = \operatorname{Max}\left\{\frac{z_0}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}, \quad 1 + \frac{\operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_k|)}{|a_n|}\right\},$$

wobei k eine ganze Zahl ist,

$$0 \leqq k < n-1$$

und z_0 die positive Wurzel der Gleichung (49) *bedeutet.*

Prag, Anfang Juli 1933.

(Eingegangen am 11. Juli 1933.)

Über die alternierende Gruppe.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

Die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ von n Elementen ist im Falle $n>4$ bekanntlich einfach. Das bedeutet soviel: ist $\mathfrak{G}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{A}_n$, so wird $\mathfrak{G}$ entweder gleich $\mathfrak{A}_n$, oder gleich der Einheitsgruppe ausfallen. Einige der vorhandenen Beweise suchen eine solche Substitution S von $\mathfrak{G}$ zu bestimmen, die möglichst wenig Elemente umsetzt.[1]) Die folgende Beweisanordnung gehört auch zu diesem Typus, der Punkt **1.** weist Vereinfachungen auf, die Punkte **2.** und **3.** sind bekannt.

1. Es soll also S möglichst wenig Elemente umsetzen. Zwei Fälle sind denkbar. Vorerst enthält S einen Zyklus von wenigstens 3 Elementen. Da $\mathfrak{A}_n$ eine S bestehend aus einem einzigen Zyklus von 4 Elementen nicht besitzt,[2]) hat S vom Grenzfalle $S=(123)$ abgesehen, die folgende Gestalt

$$S=(123\ldots)\ldots, \tag{1}$$

wo an Stelle von ... Elemente sein können. Bei geeigneter Bezeichnung enthält S jedenfalls noch die Elemente 4, 5. Es kann zweitens S aus lauter Zyklen von 2 Elementen bestehen. Vom Grenzfalle $S=(12)(34)$ abgesehen, hat S dann die Gestalt

$$S=(12)(34)\ldots, \tag{2}$$

---

[1]) Vgl. z. B. E. NETTO, *Vorlesungen über Algebra*, Bd. 2 (Leipzig, 1900), S. 310; B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, Bd. 1 (Berlin, 1930), S. 144—145; L. E. DICKSON—E. BODEWIG, *Höhere Algebra* (Leipzig und Berlin, 1929), S. 187—189.

[2]) Will man diese Tatsache nicht anwenden, so kann man folgenderweise schließen. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ enthält mit $S=(1234)$ auch $S^2=(13)(24)$, also eine Substitution, bestehend aus zwei Zyklen von 2 Elementen. Diese Möglichkeit wird im Laufe des Beweises behandelt.

wo bei geeigneter Bezeichnung S noch jedenfalls das Element 5 enthält. Transformieren wir durch $\sigma = (345)$, so wird im Falle (1) bzw. (2)

$$\sigma^{-1} S \sigma = (124\ldots)\ldots \neq S, \text{ bzw. } \sigma^{-1} S \sigma = (12)(45)\ldots \neq S.$$

Beide Substitutionen vertauschen 1 gegen 2, somit setzt in beiden Fällen die Substitution

$$S^{-1}(\sigma^{-1} S \sigma) \neq E$$

weniger Elemente um als S, was gegen die Voraussetzung ist. Es bleiben für S nur die Grenzfälle möglich, im zweiten Falle transformieren wir wieder durch $\sigma = (345)$, es wird

$$\sigma^{-1}(12)(34)\sigma = (12)(45), \quad S^{-1}(\sigma^{-1} S \sigma) = S(\sigma^{-1} S \sigma) = (354).$$

2. Ist also die Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Einheitsgruppe verschieden, so enthält sie eine Substitution bestehend aus einem einzigen Zyklus von 3 Elementen, z. B. $S = (123)$. Sehr einfach kann man $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_n$ beweisen.[3] Bedeutet nämlich $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ eine beliebige Permutation von $123\ldots n$, so enthält $\mathfrak{A}_n$ eine der Substitutionen

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \ldots n \\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \ldots n \\ a_2 a_1 a_3 \ldots a_n \end{pmatrix}.$$

Da die Relationen

$$\varphi^{-1} S \varphi = (a_1 a_2 a_3), \quad \psi^{-1} S \psi = (a_2 a_1 a_3), \quad (a_2 a_1 a_3)^2 = (a_1 a_2 a_3)$$

bestehen, enthält $\mathfrak{G}$ die Substitution $(a_1 a_2 a_3)$. (Es ist hier nur $n > 2$ vorausgesetzt.) Die Gruppe $\mathfrak{G}$ enthält jede Substitution von $\mathfrak{A}_n$, da im Falle, daß a, b, c, d verschieden sind,

$$(ab)(ac) = (abc), \quad (ab)(cd) = (ab)(ac)(ac)(cd) = (abc)(adc)$$

ausfallen.

3. Ist $\mathfrak{S}_n$ die symmetrische Gruppe von n Elementen, so besitzt $\mathfrak{S}_n$ im Falle $n > 4$ nur $\mathfrak{A}_n$ als eigentliche invariante Untergruppe. Der Beweis kann aus den Vorigen entnommen werden.

(Eingegangen am 7. September 1933.)

[3] Vgl. O. Perron, *Algebra* (Berlin und Leipzig, 1927), Bd. 2, S. 119—121.

Ein neuer Beweis eines Satzes von Minkowski.

Von Georg Hajós in Budapest.

Ich werde einen Beweis eines Satzes von Minkowski liefern, der meines Wissens einfacher ist als die bisher bekannten Beweise. Der Satz lautet:[1])

Besitzt ein konvexer, bezüglich des Anfangspunktes O symmetrischer Bereich 𝔅 in der Ebene des rechtwinkligen Koordinatensystems einen Inhalt größer als 4, *so enthält 𝔅 einen von O verschiedenen Gitterpunkt als inneren Punkt.*

Beweis. Wir legen auf die Ebene ein mit den Achsen paralleles Quadratnetz mit der Maschenweite 2. Wir bringen die Netzquadrate samt den in ihnen enthaltenen Teilen von 𝔅 durch Parallelverschiebung mit einander in Deckung. Da der Gesamtinhalt dieser Teile größer als 4 ist, so gibt es mindestens zwei unter ihnen, die sich nach der Verschiebung wenigstens teilweise überdecken. Ein innerer Punkt der sich überdeckenden Teile bestimmt zwei solche Punkte P und Q des ursprünglichen Bereiches 𝔅, die sich nach der Verschiebung decken. P und Q sind dann solche innere Punkte von 𝔅, deren Koordinatendifferenzen gerade Zahlen sind. 𝔅 enthält infolge der Symmetrie auch den zu Q bezüglich O zentralsymmetrischen Punkt Q', ferner, wegen der Konvexität, auch den Mittelpunkt G der Strecke PQ' als innere Punkte. Da nun die Koordinaten von G gleich den Hälften der entsprechenden Koordinatendifferenzen von P und Q sind, so ist dieser innere Punkt G von 𝔅 ein Gitterpunkt.

---

[1]) H. Minkowski, *Diophantische Approximationen* (Leipzig, 1907), S. 29.

Der Beweis gilt nach unmittelbaren Änderungen auch für den n-dimensionalen Raum und liefert den folgenden allgemeineren Satz von MINKOWSKI:[2])

Besitzt ein konvexer, bezüglich des Anfangspunktes O symmetrischer Bereich $\mathfrak{B}$ *im n-dimensionalen Koordinatenraum einen Inhalt größer als* 2^n, *so enthält* $\mathfrak{B}$ *einen von O verschiedenen Gitterpunkt (d. h. einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten) als inneren Punkt.*

(Eingegangen am 7. November 1932.)

---

[2]) H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen* (Leipzig, 1896), S. 76.

Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene.

Von B. von Kerékjártó in Szeged (Ungarn).

Unter demselben Titel hat neulich Herr E. Sperner einige Untersuchungen veröffentlicht.[1]) Da die Arbeit von Herrn Sperner zu Mißverständnissen Anlaß geben könnte, scheint es mir notwendig einige Punkte aufzuklären.

In §§ 1—3 beabsichtigt Herr Sperner einen Ersatz für den klassischen Translationssatz von Brouwer zu geben; er beweist nämlich, daß es zu jeder fixpunktfreien, den Umlaufssin erhaltenden topologischen Abbildung der Ebene auf sich für jeden Punkt der Ebene ein diesen Punkt enthaltendes *maximales freies Gebiet*[2]) konstruiert werden kann.[3]) Dieser Satz hat mit dem Brouwerschen Translationssatz nichts zu tun, wie ich es durch zwei Bemerkungen erklären werde. *Erstens* bildet das Gebiet, begrenzt von den Linien

$$y=\pm 1, \quad -1 \leqq x \leqq 1,$$
$$x=\pm\frac{1}{2}+\frac{y}{2}\sin\frac{1}{1-|y|}, \quad -1<y<1,$$

ein maximales freies Gebiet für die Parallelverschiebung $x'=x+1$, $y'=y$; es ist das topologische Bild eines Parallelstreifens; dessen Existenz besagt aber garnichts über die Struktur der Abbildung. *Zweitens* gilt derselbe Satz für irgendeinen nicht invarianten Punkt

1) *Hamburger Mathematische Einzelschriften*, 14. Heft (1933), S. 1–47.

2) Unter einem *freien Gebiet* wird ein solches Gebiet verstanden, welches mit seinem Bild keinen Punkt gemeinsam hat; unter einem *maximalen* ein solches, welches in keinem freien Gebiet als echter Teil enthalten ist.

3) Eine im *Zentralblatt für Mathematik*, 7 (1933), S. 231 erschienene Besprechung des Spernerschen Aufsatzes identifiziert sogar irrtümlicher Weise diesen Satz mit dem Translationssatz von Brouwer!

einer beliebigen topologischen Abbildung des n-dimensionalen Raumes auf sich, und kann etwa folgendermaßen bewiesen werden. Sei P_1 der gegebene nicht invariante Punkt, den nehmen wir als Anfangspunkt eines Koordinatensystems; seien $P_1, P_2, \ldots$ die rationalen Punkte des Raumes. Um P_1 nehmen wir die Kugel K_1 mit größtem Radius, deren Inneres ein freies Gebiet ist. Sei P_{α_2} der Punkt mit kleinstem Index, der im Innern von K_1 liegt; um P_{α_2} legen wir die Kugel K_2 mit größtem Radius von der Art, daß die im Innern von K_1+K_2 liegenden Punkte ein freies Gebiet bilden; usw. Das erhaltene Gebiet ist ein maximales freies Gebiet, das den gegebenen Punkt P_1 enthält.

Für den dreidimensionalen Raum gibt es aber kein Analogon zum Brouwerschen Translationssatz. Die folgende fixpunktfreie, den Umlaufssinn erhaltende Abbildung kann in keiner Hinsicht als mit einer Translation verwandt angesehen werden:

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = \begin{cases} z \text{ für } x^2+y^2 \geqq 1, \\ z+(x^2+y^2-1) \text{ für } x^2+y^2 \leqq 1 \end{cases}$$

(x, y, z cartesische Koordinaten).

Im Äußeren des Zylinders $x^2+y^2=1$ ist die Abbildung sogar involutorisch.

Bei dem Translationssatz von BROUWER ist die Tatsache am wichtigsten, daß ein maximales freies Gebiet derart konstruiert werden kann, daß sein Rand von *einfachen offenen Linien* gebildet wird.

Projiziert man die Ebene stereographisch auf eine Kugel, so erhält man eine den Umlaufssinn erhaltende Abbildung der Kugel auf sich mit einem einzigen Fixpunkt U. Das Translationsfeld von BROUWER wird als ein maximales freies Gebiet erscheinen, dessen Rand aus zwei durch den Punkt U laufenden *einfachen geschlossenen Kurven* besteht.

In einer Arbeit habe ich den *Brouwerschen Translationssatz* und den *Poincaréschen Fixpunktsatz* mittels einer einheitlichen Methode bewiesen[4]); die Konstruktion, die ich angebe, versichert, daß das erhaltene maximale freie Gebiet auf der Kugel von einfachen geschlossenen Kurven berandet wird; so verstehe ich unter einem *Transformationsfeld* ein solches maximales freies Gebiet,

[4]) B. DE KERÉKJÁRTÓ, The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré, *diese Acta*, 4 (1928), p. 86—102.

von welchem zufolge meiner Konstruktion feststeht, daß seine Berandung aus einfachen geschlossenen Kurven besteht. Über ein solches Transformationsfeld kann man im Falle einer beliebigen geschlossenen orientierbaren Fläche einige allgemeine Resultate bestimmen, worauf ich demnächst zurückkehren werde; so die folgenden Sätze: ein Transformationsfeld bestimmt auf der Fläche höchstens zwei Restgebiete; wenn es auf der Fläche zwei Restgebiete ohne gemeinsamen Randpunkt bestimmt, so ist das Transformationsfeld, ebenso wie das von den iterierten Bildern des Transformationsfeldes gebildete Gebiet, einem ebenen Kreisring homöomorph.

Der Begriff eines freien Gebietes, das in keinem freien Gebiet als echter Teil enthalten ist, wurde bereits in der ersten Veröffentlichung von BROUWER über diesen Gegenstand[5]) als nutzlos bei seite gestellt; da BROUWER für seine Konstruktion die allgemeinen Kontinua benutzte, versuchte er den genannten Begriff durch einen effektiveren zu ersetzen. (Vgl. a. a. O. [5]), insbesondere S. 107.)

In § 4 seiner Arbeit gedenkt Herr SPERNER sich neuen Fragen zuzuwenden, indem er eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür bestimmt, daß eine topologische Abbildung der Ebene einer Parallelverschiebung homöomorph sei. In 1925 habe ich diese Frage gelöst, im Anschluß an eine Untersuchung der Bahnkurven von eingliedrigen kontinuierlichen Gruppen der Ebene.[6]) Mein Satz lautet:

Eine topologische, den Umlaufssinn erhaltende Abbildung der Ebene auf sich ist dann und nur dann einer Parallelverschiebung homöomorph, wenn sie fixpunktfrei ist und ihre Potenzen eine (im Sinne der sphärischen Metrik) gleichmäßig stetige Folge von Transformationen bilden.

Die Bedingung, die Herr SPERNER — offenbar unabhängig von meiner Arbeit — gefunden hat ist die: *Jedes beschränkte Gebiet soll höchstens endlich viele von seinen iterierten Bildern treffen.*

---

[5]) L. E. J. BROUWER, Over één-éénduidige continue transformaties van oppervlakken in zichzelf (2-de mededeeling), *Verslag Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam*, 1909, p. 106—117.

[6]) B. DE KERÉKJÁRTÓ, On a geometrical theory of continuous groups. I. Families of path-curves of continuous one-parameter groups of the plane, *Annals of Math.*, (2) 27 (1925), p. 105—117.; vgl. insbesondere p. 117.

Aus der Spernerschen Bedingung folgt die meinige auf die folgende, fast evidente Weise. Sei ε eine beliebige positive Zahl; sei G das Gebiet bestehend aus allen Punkten der Ebene, deren sphärischer Abstand von dem unendlichfernen Punkt U größer als $\varepsilon/2$ ist. Seien $k = k_1, k_2, \ldots, k_r$ diejenigen Exponenten, für welche $t^k(G)$ und G sich treffen. Die anderen Bilder $t^l(G)$ $(l \neq k_1, k_2, \ldots, k_r)$ treffen G nicht, liegen also in der $\varepsilon/2$-Umgebung von U, sie haben also sphärische Durchmesser $< \varepsilon$. Sei P ein beliebiger Punkt von G, sei $\delta > 0$ so gewählt, daß die δ-Umgebung von P bei $t^{k_1}, t^{k_2}, \ldots, t^{k_r}$ in Gebiete von sphärischem Durchmesser $< \varepsilon$ übergehe. Für die so bestimmte Zahl δ ist also folgende Bedingung der gleichmäßigen Stetigkeit erfüllt: wenn Q ein beliebiger Punkt ist, dessen Abstand von P kleiner als δ ist, so ist für jedes n der sphärische Abstand von $t^n(P)$ und $t^n(Q)$ kleiner als ε.

Die von Herrn SPERNER gefundene Charakterisierung der Parallelverschiebungen ist also mit der meinigen äquivalent. Ich muß jedoch betonen, daß die Spernersche Bedingung an und für sich wertvoll ist und für weitere Zwecke angewendet werden kann, insbesondere wenn man sie auf hinreichend kleine Gebiete beschränkt. Die Bemerkung von Herrn SPERNER (a. a. O. [1]), S. 3–4) laut deren die Abbildungen einer einfach transitiven kontinuierlichen Gruppe der Ebene seiner Bedingung genügen, nebst dem eleganten Beweis, ist ebenfalls interessant. Der von mir aufgestellten schwächeren Bedingung betreffend die gleichmäßige Stetigkeit der Potenzen (indem man dieselbe mit Hilfe des Umgebungsbegriffes formuliert) genügen die Abbildungen einer beliebigen einfach transitiven kontinuierlichen Gruppe.

Mein in 1925 gegebener Beweis stützt sich auf die ihm vorangehenden Resultate über kontinuierliche Gruppen, und auf den Brouwerschen Translationssatz. Auf den folgenden Seiten gebe ich einen anderen, unabhängigen Beweis, der im Grundgedanken mir seit fast derselben Zeit bekannt war. Die Mitteilung dieses Beweises scheint mir deshalb wünschenswert, da der Spernersche Beweis unnötigerweise kompliziert ist.

Definitionen und Hilfssätze.

Sei t eine topologische Abbildung der Ebene auf sich mit erhaltendem Umlaufssinn und ohne Fixpunkt.

Unter einem *freien Bogen* verstehen wir einen einfachen Bogen, der mit seinem Bild keinen Punkt gemein hat.

Unter einem *Translationsbogen* verstehen wir einen einfachen Bogen AA', dessen Endpunkt A' Bild des Anfangspunktes A ist, und welcher mit seinem Bild außer A' keinen Punkt gemein hat.

Die bei den Potenzen $t^n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ entstehenden Bilder eines Translationsbogens bilden eine Kurve, die als *Bahnkurve* bezeichnet wird.

1. *Durch jeden Punkt, und auch durch jeden freien Bogen läßt sich ein Translationsbogen, also auch eine Bahnkurve legen.*

Beweis (nach TERASAKA[7])). Um jeden Punkt des freien Bogens PQ legen wir den Kreis mit Radius ϱ; ihre inneren Punkte bilden ein Gebiet g_ϱ mit lauter erreichbaren Randpunkten. Wenn $\varrho\,(>0)$ sehr klein ist, trifft g_ϱ sein Bild g'_ϱ nicht; für einen hinreichend großen Wert von ϱ trifft g_ϱ sein Bild g'_ϱ. Es gibt also einen Wert von ϱ, für welchen g_ϱ und g'_ϱ wenigstens einen Randpunkt A', aber keinen inneren Punkt gemein haben. Sei A das inverse Bild von A'; verbinden wir A mit P, und Q mit A' durch Bögen in g_ϱ, die mit PQ zusammen einen einfachen Bogen AA' bilden; AA' ist ein Translationsbogen, der den vorgelegten freien Bogen PQ als Teil besitzt.

2. *Jede Bahnkurve ist eine einfache* (d. h. doppelpunktfreie) *Kurve.*

Für den Beweis dieses Satzes mittels Arcusvariation, s. BROUWER[8]), KERÉKJÁRTÓ[9]); einen anderen Beweis gibt SPERNER[10]).

3. *Die iterierten Bilder $P, P^1, P^2, \ldots$ eines beliebigen Punktes P konvergieren gegen Unendlich.*[11])

---

[7]) H. TERASAKA, Ein Beweis des Brouwerschen ebenen Translationssatzes, *Japanese Journal of Math.*, **7** (1930), S. 61—69; vgl. insbesondere S. 62.

[8]) L. E. J. BROUWER, Beweis des ebenen Translationssatzes, *Math. Annalen*, **72** (1912), S. 37—54; vgl. Satz 1, auf S. 38.

[9]) vgl. meine unter [4]) zitierte Arbeit, theorem 1, auf S. 90. Dort beweise ich nur, daß ein Translationsbogen AA' und seine bei t und t^2 entstehenden Bilder $A'A^2$ und A^2A^3 zusammen einen einfachen Bogen AA^3 bilden; für meine dortige Methode ist nämlich der weitere Verlauf der Bahnkurve belanglos. Der auf S. 90 gegebene Beweis, wörtlich angewendet, ergibt aber auch den Satz, daß n aufeinander folgende Bilder eines Translationsbogens einen einfachen Bogen bilden, m. a. W. daß die Bahnkurve keinen Doppelpunkt hat.

[10]) vgl. die unter [1]) zitierte Arbeit, Satz 4., auf S. 9.

[11]) s. die unter [8]) zitierte Arbeit von BROUWER, Satz 8., S. 45.

B e w e i s. Wäre nämlich Q ein im Endlichen liegender Häufungspunkt der Folge, so legen wir in einer hinreichend kleinen Umgebung von Q einen freien Bogen, der durch zwei Punkte P^k und P^l der Folge läuft; durch diesen legen wir einen Translationsbogen AA'; das Bild desselben bei t^{k-l} würde den Bogen AA' treffen in Widerspruch zu 2.

Charakterisierung der ebenen Parallelverschiebungen.

Projizieren wir die Ebene stereographisch auf die Einheitskugel, so entspricht der Abbildung t eine Abbildung der Kugel mit einem einzigen Fixpunkt U.

Unter dem *sphärischen Abstand* von zwei Punkten der Ebene verstehen wir den sphärischen Abstand der ihnen auf der Kugel entsprechenden Punkte.

Nehmen wir an, daß *die Potenzen der Abbildung t eine gleichmäßig stetige Folge bilden.* Darunter verstehen wir folgendes: zu jedem Punkt $P(\neq U)$ und zu jeder positiven Zahl ε läßt sich eine positive Zahl δ bestimmen von der Art, daß für einen beliebigen Punkt Q, dessen Abstand von P kleiner als δ ist, und für jedes n, die Bilder P^n und Q^n einen sphärischen Abstand $<\varepsilon$ voneinander haben.

Unter dieser Bedingung ergeben sich die folgenden Sätze.

4. *Jede Bahnkurve ist eine einfache offene Linie in der Ebene* (d. h. nach Hinzufügung von U eine einfache geschlossene, durch den Fixpunkt U laufende Kurve auf der Kugel).

Wäre nämlich $Q(\neq U)$ ein nicht zur Bahnkurve $\varkappa$ gehöriger Punkt, gegen den Punkte von $\varkappa$ konvergieren, so sei AA' ein Translationsbogen von $\varkappa$, und sei $\varepsilon > 0$ der (sphärische) Abstand des Bogens AA' von der Punktmenge Q^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Sei $\delta > 0$ so gewählt, daß für jeden Punkt P, für welchen $(P, Q) < \delta$, auch $(P^n, Q^n) < \varepsilon$ sei, für jedes n. Sei dann P ein Punkt der Bahnkurve, im Abstand $<\delta$ von Q, und sei P^n das zum Bogen AA' gehörige iterierte Bild von P; P^n und Q^n sind in einem Abstand $>\varepsilon$ voneinander, was ein Widerspruch ist.

Daraus folgt unmittelbar:

5. *Die iterierten Bilder eines beliebigen freien Bogens konvergieren gegen den einzigen Punkt U.*

Nach 1. legen wir durch den freien Bogen λ eine Bahnkurve $\varkappa$; sie ist laut 4. eine einfache geschlossene Kurve durch den Punkt U. Auf ihr liegen sämtliche Bilder λ^n; diese sind paarweise fremd, und liegen auf $\varkappa$ in der natürlichen Reihenfolge. Ein Limespunkt der Bögen λ^n ist ein Fixpunkt von t, so daß er notwendig mit U identisch ist.

6. *Seien $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ endlich viele Bahnkurven, paarweise ohne gemeinsamen Punkt. Durch einen beliebigen Punkt $P (\neq U)$, welcher nicht auf $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ liegt, läßt sich eine Bahnkurve $\varkappa$ konstruieren, die $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ nicht trifft.*

Das von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ bestimmte, den Punkt P enthaltende Gebiet G geht bei t in sich selbst über, enthält also den Punkt $P' = t(P)$. Sei $w : Q(\lambda)$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ ein Bogen, der $P = Q(0)$ und $P' = Q(1)$ verbindet, und die Kurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ nicht trifft; sei $\vartheta (> 0)$ sein Abstand von den Kurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$. Wählen wir die positive Zahl $\varrho (< \vartheta)$ hinreichend klein, so daß der Kreis um P mit Radius ϱ und dessen Bild sich nicht treffen.

Bezeichne g_τ das Gebiet bestehend aus den Punkten, deren Abstand vom Teilbogen $0 \leqq \lambda \leqq \tau$ von w kleiner als ϱ ist. Für $\tau = 0$ sind g_τ und sein Bild g'_τ fremd, für $\tau = 1$ treffen sie sich. Es gibt also einen Wert von τ, für welchen das Gebiet g_τ und sein Bild g'_τ mindestens einen (notwendig erreichbaren) Randpunkt A', aber keinen inneren Punkt gemein haben. Verbinden wir das inverse Bild A von A' mit A' in g_τ durch einen Bogen AA', so erhalten wir einen Translationsbogen, der die Bahnkurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ nicht trifft; auch die von AA' erzeugte Bahnkurve $\varkappa$ kann also die Bahnkurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ nicht treffen.

7. Sei D der Bereich bestehend aus denjenigen Punkten, deren Abstand vom Fixpunkt U größer oder gleich η ist. Bezeichne 2ε den kleinsten Abstand eines veränderlichen Punktes von D von seinem bei t entstehenden Bildpunkt.

Seien $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ drei Bahnkurven, die durch D laufen. Setzen wir voraus, daß $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ in D einen Abstand $< 2\varepsilon$ voneinander haben, m. a. W., daß es je einen in D liegenden Punkt von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ gibt, deren Abstand $< 2\varepsilon$ ist. Sei ferner auch der Abstand von $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ in D kleiner als 2ε. Nun beweisen wir folgende Behauptung:

7.1 *Eine von den drei Bahnkurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ trennt die beiden anderen voneinander.*

Verbinden wir in D je einen Punkt von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ (bzw. von $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$) in ihrem Zwischengebiet durch einen Bogen λ_1 (bzw. λ_3) vom Durchmeßer $<2\varepsilon$, der keinen weiteren Punkt mit $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ gemein hat. [Wenn aber etwa λ_1 die Kurve $\varkappa_3$ trifft, so nehmen wir zwei solche Teilbögen λ_1' und λ_3' von λ_1, deren Endpunkte auf $\varkappa_1$ und $\varkappa_3$, bzw. auf $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ liegen und die keinen anderen Punkt mit $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ gemein haben: in der folgenden Überlegung ersetzen wir dann λ_1 und λ_3 durch λ_1' und λ_3', und vertauschen die Rolle von $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$]. λ_1 und λ_3 sind freie Bogen. Wenn $\varkappa_2$ die Bahnkurven $\varkappa_1$ und $\varkappa_3$ nicht voneinander trennt, so werden im Zwischengebiet von $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ eine Hälfte $\varkappa_2^*$ von $\varkappa_2$ und die Bahnkurve $\varkappa_1$ voneinander durch λ_3 getrennt. Unter den iterierten Bildern von λ_1 gibt es unendlich viele, deren auf $\varkappa_2$ liegende Endpunkte zu $\varkappa_2^*$ gehören; alle diese treffen den Bogen λ_3, in Widerspruch zu 5.

8. Sei $P_1, \ldots, P_k$ eine endliche Folge von Punkten in D, die in D ε-dicht liegen (jeder Kreis vom Radius ε, dessen Mittelpunkt zu D gehört, soll mindestens einen der Punkte P_i in seinem Innern enthalten); seien ferner $P_{k+1}, \ldots, P_l$ Punkte auf dem Rande von D, die auf dem Rande von D ε-dicht liegen. Konstruieren wir (laut des Satzes 6.) der Reihe nach die Bahnkurve $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_l$, sodaß $\varkappa_i$ durch den Punkt P_{α_i} läuft und die Bahnkurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{i-1}$ nicht trifft; P_{α_i} bezeichne den Punkt mit kleinstem Index, der zu keiner der Bahnkurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{i-1}$ gehört. — Wenn ein Punkt Q von D im Abstand gleich ε von $\varkappa_i$ liegt, so gibt es einen Punkt P_j im Abstand $<\varepsilon$ von Q, und also eine durch P_j laufende, von $\varkappa_i$ verschiedene Bahnkurve $\varkappa_j$, deren Abstand von $\varkappa_i$ in D kleiner als 2ε ist.

Laut des Satzes 7.1 lassen sich also die Bahnkurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_l$ umnumeriert in eine solche Folge $\varkappa_{-r}, \varkappa_{-r+1}, \ldots, \varkappa_{r-1}, \varkappa_r$ ordnen, daß $\varkappa_{i-j}$ und $\varkappa_{i+j'}$ voneinander durch $\varkappa_i$ getrennt werden. Je zwei aufeinander folgende Kurven $\varkappa_i$ und $\varkappa_{i+1}$ haben in D einen Abstand $<2\varepsilon$; sie können also durch einen in ihrem Zwischengebiet und zugleich in D verlaufenden Bogen λ_i vom Durchmesser $<2\varepsilon$ verbunden werden; λ_i ist ein freier Bogen. Natürlich läßt sich dann ein beliebiger Punkt von $\varkappa_i$ mit einem Punkt von $\varkappa_{i+1}$ durch einen freien Bogen im Zwischengebiet von $\varkappa_i$ und $\varkappa_{i+1}$ verbinden, nämlich in dem Teilgebiet desselben, welches durch zwei sukzessive Bilder von λ_i bestimmt ist.

9. Modifizieren wir $\varkappa_r$ (und $\varkappa_{-r}$) auf die folgende Weise. Sei b ein Bogen des Randes von D, dessen Endpunkte zu $\varkappa_r$ gehören und welcher im Inneren von $\varkappa_r$ (d. h. in dem von $\varkappa_r$ bestimmten, die anderen Kurven $\varkappa_i$ nicht enthaltenden Gebiet) liegt. Durch diesen Bogen b, dessen Durchmesser laut Konstruktion kleiner als ε ist, der also ein freier Bogen ist, ersetzen wir den zwischen denselben Endpunkten liegenden Teilbogen b^* von $\varkappa_r$; und durch die Bilder von b, die Bilder von b^*. Indem wir diese Modifizierung für jeden Bogen b durchführen (wir dürfen annehmen, daß deren Anzahl endlich ist[12])), entsteht eine Bahnkurve, die wir wieder mit $\varkappa_r$ (bzw. $\varkappa_{-r}$) bezeichnen; diese hat keinen Punkt im Inneren von D, liegt also im Abstand $<\eta$ von U. Auch die modifizierte Kurve $\varkappa_r$ und $\varkappa_{r-1}$ lassen sich durch einen freien Bogen in ihrem Zwischengebiet in D verbinden.

10. Ersetzen wir η durch $\eta_1 = \eta/2$; D_1 und ε_1 sollen die analogen Bedeutungen haben, wie in 7. Die zum Innern von $\varkappa_r$, bzw. von $\varkappa_{-r}$ gehörenden Teilbereiche von D_1 bedecken wir mit Punkten, ε_1-dicht; durch diese legen wir Bahnkurven $\varkappa_{r+1}, \varkappa_{r+2}, \dots, \varkappa_{r_1}$, bzw. $\varkappa_{-r-1}, \varkappa_{-r-2}, \dots, \varkappa_{-r'_1}$, die einander und $\varkappa_r$, $\varkappa_{-r}$ nicht treffen. Wieder modifizieren wir $\varkappa_{r_1}$ und $\varkappa_{-r'_1}$, wie in 9., usw.

11. Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir eine in beiden Richtungen unendliche Folge von Bahnkurven $\dots, \varkappa_{-n}, \varkappa_{-n+1}, \dots$ $\varkappa_{n-1}, \varkappa_n, \dots$ folgender Eigenschaft: sie sind paarweise fremd; $\varkappa_i$ trennt $\varkappa_{i-j}$ und $\varkappa_{i+j'}$ voneinander; $\varkappa_n$ konvergiert gegen den einzigen Punkt U (für $n \to \infty$, und für $n \to -\infty$); $\varkappa_n$ und $\varkappa_{n+1}$ können durch einen freien Bogen λ_n in ihrem Zwischengebiet verbunden werden. Indem wir die Bögen λ_n so wählen, daß die auf $\varkappa_n$ liegenden Endpunkte von λ_{n-1} und λ_n zusammenfallen, erhalten wir in $\Sigma \lambda_n = a$ eine durch den Punkt U laufende einfache geschlossene Kurve, die mit ihrem Bild a' außer U keinen Punkt gemeinsam hat. *Die Kurven a und a' beranden ein Translationsfeld, dessen iterierte Bilder die ganze Kugelfläche bedecken.*

Damit ist bewiesen, daß die Abbildung t einer gewöhnlichen Parallelverschiebung $x' = x+1$, $y' = y$ homöomorph ist.

Szeged, den 6. Dezember 1933.

(Eingegangen am 20. Dezember 1933.)

---

[12]) vgl. B. von Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie* (Berlin, 1923), S. 89.

Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen.

Von B. VON KERÉKJÁRTÓ in Szeged (Ungarn).

Zweck der vorliegenden Arbeit ist die linearen Abbildungen, d. h. die allgemeinsten eineindeutigen konformen Abbildungen der Kugelfläche auf sich selbst topologisch zu charakterisieren.

Ein früher von mir bewiesener Satz, von welchem ich in der vorangehenden Arbeit[1]) einen neuen Beweis mitteile, liefert die topologische Bestimmung der parabolischen linearen Abbildungen.

Die hyperbolischen und die loxodromischen Abbildungen sind alle untereinander homöomorph. Wenn T eine beliebige hyperbolische und T' irgend eine hyperbolische oder loxodromische Abbildung bedeutet, so gibt es eine topologische Abbildung S der Kugelfläche auf sich selbst, so daß $T'=S^{-1}TS$ ist. Nehmen wir an, daß T und T' dieselben Fixpunkte $z=0$ und $z=\infty$ haben, und für beide $z=\infty$ der Attraktionspunkt sei; das ist mittels linearer Transformationen zu erreichen. Ist dann erstens

$$T\colon\ z'=\varrho z \text{ und } T'\colon\ z'=\varrho e^{i\theta}z \qquad (\varrho>1),$$

so sei

$$S\colon\ z'=e^{i\theta\frac{\log|z|}{\log\varrho}}.z;$$

ist zweitens

$$T\colon\ z'=\varrho z \quad (\varrho>1) \quad \text{und} \quad T'\colon\ z'=\varrho' z \quad (\varrho'>1),$$

so sei

$$S\colon\ z'=|z|^{\frac{\log\varrho'}{\log\varrho}}.e^{i\operatorname{arc}z};$$

in beiden Fällen ergibt sich $T'=S^{-1}TS$.

1) B. VON KERÉKJÁRTÓ, Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene, *diese Acta*, **6** (1934), S. 226—234.

Die linearen Abbildungen haben die Eigenschaft, daß die Potenzen der Abbildung in jedem nicht invarianten Punkt (bei elliptischen Abbildungen auch in den Fixpunkten) gleichmäßig stetig sind. Wir formulieren die folgende

Bedingung der Regularität. *Eine topologische Abbildung t der Kugelfläche auf sich selbst heißt regulär im Punkte P, wenn die Potenzen von t in P gleichmäßig stetig sind;* m. a. W. wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine solche positive Zahl δ gibt, daß für einen beliebigen Punkt Q, dessen Abstand von P kleiner als δ ist, die bei t^n entstehenden Bilder der Punkte P und Q einen Abstand kleiner als ε voneinander haben, für $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Die Invarianz der Regularitätsbedingung topologischen Abbildungen gegenüber leuchtet ein. — Wir bemerken, daß die Bedingung mit Hilfe des Umgebungsbegriffes auf die folgende Weise formuliert werden kann. Bedeute P^n den bei der Abbildung t^n entstehenden Bildpunkt von P, und $\{P^n\}$ die Menge der Punkte P^n $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ein Umgebungssystem $\{U^n\}$ von $\{P^n\}$ wird auf die folgende Weise erklärt. Zu jedem Runkt R der Menge $\{P^n\}$ und ihrer Ableitung ordnen wir eine beliebige Umgebung V_R zu; wir erklären U^n als die Vereinigungsmenge derjenigen Umgebungen V_R, die den Punkt P^n enthalten. Die Abbildung t ist regulär im Punkte P, wenn es zu jedem Umgebungssystem $\{U^n\}$ von $\{P^n\}$ eine solche Umgebung U^* von P angegeben werden kann, daß für jeden in U^* enthaltenen Punkt Q, und für jedes n der bei t^n entstehende Bildpunkt Q^n von Q zu U^n gehört. — Für unsere Betrachtung verwenden wir jedoch die zuerst gegebene Form der Bedingung.

Solche Punkte, für welche die obige Bedingung nicht erfüllt ist, nennen wir *singuläre* Punkte.

Wir beweisen den folgenden

Satz. *Eine topologische Abbildung der Kugelfläche auf sich selbst mit erhaltendem Umlaufssinn ist dann und nur dann einer linearen Abbildung homöomorph, wenn sie abgesehen von höchstens endlich vielen Punkten überall regulär ist.*

Die Abbildung ist einer elliptischen, parabolischen, bzw. hyperbolischen Abbildung homöomorph, jenachdem die Anzahl der singulären Punkte gleich Null, eins, bzw. zwei ist.

§ 1. Elliptische Abbildungen.

1. Sei t eine topologische, den Umlaufssinn erhaltende Abbildung der Kugelfläche auf sich selbst. Nach einem bekannten Satze von BROUWER[2]) hat t wenigstens einen Fixpunkt A. Nehmen wir an, daß A ein regulärer Punkt ist.

Sei ε_1 eine positive Zahl von der Art, daß die ε_1-Umgebung von A keinen singulären Punkt enthält. Bezeichne δ_1 eine positive Zahl, die der Zahl ε_1 laut der Regularitätsbedingung für den Punkt A entspricht; wir werden hierfür die Bezeichnung $\delta_1 = \varphi(\varepsilon_1, A)$ verwenden. Sei ε_2 eine andere positive Zahl, kleiner als δ_1 und bezeichne $\delta_2 = \varphi(\varepsilon_2, A)$. Wenn P einen beliebigen solchen Punkt bedeutet, der im Kreisring $R(\varepsilon_2, \delta_1)$ liegt — (darunter verstehen wir, daß sein Abstand von A zwischen ε_2 und δ_1 liegt) — so befindet sich für jedes n das bei t^n entstehende Bild P^n von P im Kreisring $R(\delta_2, \varepsilon_1)$. Wenn also c eine solche einfache geschlossene Kurve ist, die im Kreisring $R(\varepsilon_2, \delta_1)$ verläuft und die Randkreise desselben voneinander trennt, so liegt, für jedes n, das bei t^n entstehende Bild c^n von c im Kreisring $R(\delta_2, \varepsilon_1)$ und trennt die beiden Randkreise desselben. Unter dem Innern der Kurve c^n wollen wir das von c^n bestimmte, den Punkt A enthaltende Gebiet verstehen.

Die Kreisfläche vom Radius δ_2 um A liegt im Innern jeder Kurve des Systems $\{c^n\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Das von dem System $\{c^n\}$ bestimmte, den Punkt A enthaltende Gebiet bezeichnen wir mit D, seinen Rand mit γ. Weil das System $\{c^n\}$ bei t in sich übergeht, und da ferner A ein Fixpunkt ist, so geht das Gebiet D bei t in sich selbst über, sein Rand γ *ist also ein bei t invariantes Kontinuum.*

2. Wir werden beweisen, daß γ *im Kleinen zusammenhängend ist.*

2. 1 Wenn γ im Punkte P nicht im Kleinen zusammenhängend ist, so gibt es eine positive Zahl ϱ und eine Folge gegen P konvergierender Punkte $P_1, P_2, \ldots$ von γ von der Art, daß jedes Teilkontinuum von γ, welches die Punkte P und P_i enthält, einen Durchmesser größer als 12ϱ hat. Bezeichne $\varkappa_P$, bzw. $\varkappa_{P_i}$ die Menge der Punkte von γ, die mit P bzw. mit P_i durch ein solches Teil-

---

[2]) siehe z. B.: B. VON KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie* (Berlin 1923), S. 193.

kontinuum von γ verbunden werden können, welches keinen Punkt im Äußern des Kreises $C(P, 6\varrho)$ besitzt. [$C(P, 6\varrho)$ soll den Kreis vom Mittelpunkt P und vom Radius 6ϱ bezeichnen.]

Unter den Kontinua $\varkappa_{P_i}$ gibt es unendlich viele verschiedene; sonst wäre nämlich ein Kontinuum $\varkappa_{P_\alpha} = \varkappa_{P_\beta} = \ldots$ mit $\varkappa_P$ identisch, also würde das Kontinuum $\varkappa_P$ vom Durchmesser $\leqq 12\varrho$ beide Punkte P und P_α enthalten, gegen Annahme. Jedes Kontinuum $\varkappa_{P_i}$ hat mindestens einen Punkt Q_i auf dem Kreis $C(P, 6\varrho)$. Die Punkte $Q_1, Q_2, \ldots$ haben wenigstens einen Häufungspunkt Q, der notwendig auf dem Kreis $C(P, 6\varrho)$ liegt. Q ist ein Punkt des Kontinuums $\varkappa_P$, da laut des Schoenflies—Zorettischen Satzes[3]) die Grenzmenge von $\varkappa_{P_1}, \varkappa_{P_2}, \ldots$ ein Kontinuum, also eine Teilmenge von $\varkappa_P$ ist. Wählen wir eine Teilfolge der Punkte Q_i, die auf dem Kreise monoton gegen den Punkt Q konvergiert; wir bezeichnen sie weiter mit denselben Indizes. Von einem gewissen Index ab (welchen wir gleich 1 annehmen dürfen) liegen sämtliche Punkte P_i in der ϱ-Umgebung des Punktes P; die entsprechenden Kontinua $\varkappa_{P_i}$ treffen den Kreis $C(P, \varrho)$. Bezeichnen wir mit λ_{Q_i}, bzw. λ_Q die Menge der Punkte, die mit Q_i, bzw. mit Q durch ein solches Teilkontinuum von γ verbunden werden können, dessen Punkte sämtlich zum abgeschlossenen Kreisring $R(P; \varrho, 6\varrho)$ gehören; λ_{Q_i}, bzw. λ_Q ist ein Teilkontinuum von $\varkappa_{P_i}$, bzw. von $\varkappa_P$.

Für jedes $i > 1$ trennen die Kontinua λ_{Q_1} und λ_{Q_i} im Kreisring $R(P; \varrho, 6\varrho)$ die Kontinua $\lambda_{Q_{i-1}}$ und λ_Q voneinander. Sei b derjenige von den Kontinua λ_{Q_1} und λ_{Q_i} bestimmte Bogen des äußeren Kreises, der den Punkt Q_{i-1} enthält. Sei b_1 ein Bogen des inneren Kreises, dessen Endpunkte und nur diese zu λ_{Q_1} bzw. zu λ_{Q_i} gehören. Das Kontinuum $\lambda_{Q_1} + b_1 + \lambda_{Q_i}$ und der Bogen b haben genau zwei Punkte gemein. Das vom Kontinuum $\lambda_{Q_1} + b_1 + \lambda_{Q_i}$ bestimmte einfach zusammenhängende unbeschränkte Gebiet enthält beide Kontinua $\lambda_{Q_{i-1}}$ und λ_Q; b ist ein Querschnitt dieses Gebietes, welcher die Kontinua $\lambda_{Q_{i-1}}$ und λ_Q voneinander trennt. Also werden im Kreisring die Kontinua $\lambda_{Q_{i-1}}$ und λ_Q voneinander durch die Kontinua λ_{Q_1} und λ_{Q_i} getrennt.

Auf jedem der Kontinua λ_{Q_i} wählen wir einen Punkt S_i, der von P den Abstand 3ϱ hat. Sei S ein Häufungspunkt der Folge

[3]) vgl. B. von Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, S. 38.

S_i, von welchem wir annehmen, daß die Folge gegen S konvergiert. S gehört zu λ_Q und hat von P den Abstand 3ϱ. Von einem gewissen Index ab liegen sämtliche Punkte S_i im Innern des Kreises $C(S, 2\varrho)$. Für jeden solchen Wert von i *werden die Punkte* S *und* S_{i-1} *in der von* $C(S, 2\varrho)$ *berandeten abgeschlossenen Kreisfläche voneinander durch das Kontinuum* λ_{Q_i} *getrennt.*

2\. 2 Bezeichne ϑ eine beliebig kleine positive Zahl; über ihre Wahl werden wir später (2. 5) verfügen, einstweilen nehmen wir nur an, daß sie kleiner als $\varrho/2$ ist.

Für hinreichend großes i haben S_{i-1} und S einen Abstand kleiner als ϑ. Da S_{i-1} und S zum Rand γ des Gebietes D gehören, gibt es in beliebig kleinen, zu λ_{Q_i} fremden Umgebungen dieser Punkte je einen zu D gehörigen Punkt H_1 und H_2. Die Punkte H_1 und H_2, von denen wir annehmen, daß sie voneinander und von S um weniger als ϑ entfernt sind, werden in der von $C(S, 2\varrho)$ berandeten abgeschlossenen Kreisfläche voneinander durch λ_{Q_i} getrennt. Sei w_1 die geradlinige Strecke H_1H_2 und sei w ein in D liegender Weg mit denselben Endpunkten. Wir dürfen annehmen, daß w und w_1 außer den Endpunkten keinen gemeinsamen Punkt haben. Sonst ersetzen wir w durch einen solchen Teil, dessen Endpunkte und nur diese zur Strecke w_1 gehören und durch λ_{Q_i} in der Kreisfläche voneinander getrennt werden; die Strecke w_1 ersetzen wir durch die zwischen den Endpunkten des gewählten Teiles von w liegende Strecke.

2\. 3 Das einfache Polygon $w+w_1$ zerlegt die Ebene in zwei Gebiete. Es gibt im Innern und im Äußern des Polygons $w+w_1$ wenigstens je einen solchen Punkt G_1, bzw. G_2 von λ_{Q_i}, welche auf dem Kreis $C(S, 2\varrho)$ liegen. Um das einzusehen, setzen wir einen H_1 und H_2 in der von $C(S, 2\varrho)$ berandeten Kreisfläche verbindenden Weg W aus Teilen des Weges w und des Kreises $C(S, 2\varrho)$ zusammen, welcher keinen Punkt im Äußern (bzw. im Innern) des Polygons $w+w_1$ besitzt. Wir dürfen annehmen, daß w nur endlich viele Punkte mit dem Kreis $C(S, 2\varrho)$ gemein hat. Umlaufen wir w vom Punkt H_1 ausgehend bis zum ersten zum Kreis gehörigen Punkt; von da aus umlaufen wir denjenigen Bogen des Kreises, der zum Innern des Polygons gehört, bis zum nächsten zu w gehörigen Punkt; von da aus den im Innern des Kreises liegenden Weg von w bis zum nächsten zum Kreis gehörigen Punkt, usf., bis wir nach H_2 gelangen. Da der Weg W die Punkte H_1 und H_2 in der von

$C(S, 2\varrho)$ berandeten Kreisfläche verbindet, trifft er das Kontinuum λ_{Q_i}; die zu w gehörigen Teile von W sind zu λ_{Q_i} fremd, folglich muß ein zu W gehöriger, also im Innern des Polygons $w+w_1$ liegender Bogen des Kreises $C(S, 2\varrho)$ einen Punkt G_1 von λ_{Q_i} enthalten. Genau so zeigt man, daß $C(S, 2\varrho)$ und λ_{Q_i} einen im Äußern des Polygons $w+w_1$ liegenden gemeinsamen Punkt G_2 besitzen.

2.4 Da G_1 zum Rand γ des durch das System $\{c^n\}$ bestimmten Gebietes D gehört, gibt es zu einer beliebig kleinen Umgebung von G_1 mindestens eine Kurve c^r des Systems $\{c^n\}$, welche einen Punkt in dieser Umgebung besitzt. Insbesondere gibt es also eine Kurve c^r des Systems, die einen im Innern des Polygons $w+w_1$ liegenden und von G_1 um weniger als $\varrho/2$ entfernten Punkt F besitzt. Der Punkt G_2 liegt im Innern der Kurve c^r oder auf c^r. Wenn wir also die Kurve c^r ausgehend vom Punkte F in einer oder in der anderen Richtung beschreiben, muß sie das Innere des Polygons $w+w_1$ verlassen, und da sie den im Innern von D liegenden Weg w nicht treffen kann, trifft sie beide Male die Strecke w_1. Seien M^r und N^r die ersten Schnittpunkte von c^r mit w_1, die man ausgehend von F in einer und in der anderen Richtung auf der Kurve c^r erreicht. Der Abstand der Punkte M^r und N^r ist kleiner als ϑ. Der Bogen von c^r, welcher von M^r und N^r bestimmt wird und den Punkt F enthält, hat einen Durchmesser größer als ϱ. Auch der Durchmesser des anderen Bogens $M^r N^r$ von c^r ist größer als ϱ; wenn wir nämlich einen Punkt von w im Äußern des Polygons $w+w_1$ und im Äußern des Kreises $C(S, 2\varrho)$ mit einem Punkt von $C(A, \varepsilon_1)$ verbinden, muß dieser Weg die Kurve c^r treffen, und da der Bogen $M^r F N^r$ im Innern des Polygons $w+w_1$ liegt, trifft er notwendig den anderen Bogen $M^r N^r$ von c^r.

Die Folgerung, die wir aus der Annahme abgeleitet haben, daß γ nicht im Kleinen zusammenhängend ist, fassen wir in der folgenden Aussage zusammen: *Für eine feste positive Zahl ϱ und für eine beliebig kleine positive Zahl ϑ gibt es eine Kurve c^r des Systems $\{c^n\}$, so daß zwei Punkte M^r und N^r von c^r einen Abstand kleiner als ϑ voneinander haben, und die Durchmesser der beiden durch M^r und N^r bestimmten Bögen von c^r größer als ϱ sind.* Wir werden bald sehen, daß diese Aussage widerspruchsvoll ist.

2.5 Da die Bedingung der Regularität für jeden Punkt der

Kurve c besteht, läßt sich nach einer geläufigen Anwendung des Heine—Borelschen Überdeckungssatzes für die gegebene positive Zahl ϱ eine solche positive Zahl δ bestimmen, daß zwei beliebige Punkte K und L von c, deren Abstand kleiner als δ ist, bei irgend einer Potenz t^r von t in zwei voneinander um weniger als ϱ entfernte Punkte K^r und L^r übergehen.

Zu der Zahl δ bestimmen wir eine solche positive Zahl η, daß wenn K und L zwei beliebige voneinander um weniger als η entfernte Punkte von c sind, einer der durch K und L bestimmten Bögen von c vom Durchmesser kleiner als δ sei.

Schließlich bestimmen wir eine positive Zahl ϑ $(<\varrho/2)$ von der Art, daß wenn zwei beliebige Punkte K und L von c bei einer Potenz t^r von t in zwei voneinander um weniger als ϑ entfernte Punkte K^r und L^r übergehen, der Abstand der Punkte K und L kleiner als η sei.

2.51 Die Existenz einer positiven Zahl ϑ der genannten Art wird durch die folgende Überlegung nachgewiesen. Nehmen wir im Gegensatz zu unserer Behauptung an, daß es eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$, Punkte K_i und L_i von c, und zugehörige Exponenten r_i von der folgenden Art gibt: für jedes i ist der Abstand $(K_i, L_i) \geqq \eta$ und der Abstand $(K_i^{r_i}, L_i^{r_i}) < \vartheta_i$. Durch wiederholte Auswahl von Teilfolgen erhalten wir eine solche Teilfolge, die wir wieder mit denselben Zeichen bezeichnen, daß die Punkte K_i gegen einen Punkt K von c, die Punkte L_i gegen einen Punkt L von c, und die Punkte $K_i^{r_i}$, sowie auch die Punkte $L_i^{r_i}$ gegen einen in $C(A, \varepsilon_1)$ enthaltenen, also notwendig regulären Punkt H konvergieren; der Abstand der Punkte K und L ist größer oder gleich η. Aus der Regularität von K und L folgt, daß für hinreichend großes i die Abstände (K^{r_i}, H) und (L^{r_i}, H) beliebig klein sind; der Abstand (K, K_i) ist nämlich beliebig klein, also auch der Abstand $(K^{r_i}, K_i^{r_i})$; weil ferner der Abstand $(K_i^{r_i}, H)$ für hinreichend großes i beliebig klein ist, so ist auch der Abstand (K^{r_i}, H), ebenso auch (L^{r_i}, H) beliebig klein. Aus der Regularität des Punktes H folgt ferner, daß für hinreichend großes i, mit dem Abstand der Punkte K^{r_i} und H auch der Abstand ihrer bei t^{-r_i} entstehenden Bilder, d. h. der Punkte K und H^{-r_i} beliebig klein, also insbesondere kleiner als $\eta/2$ ist; Analoges gilt für L und H^{-r_i}. Daraus folgt, daß der Abstand $(K, L) \leqq (K, H^{-r_i}) + (H^{-r_i}, L) < \eta$ ist; das ist ein Widerspruch.

2.6 Bestimmen wir ϑ auf die in 2.5 vorgeschriebene Weise; zurückkehrend auf die Aussage von 2.4 ersehen wir, daß der Abstand der Punkte M^r und N^r kleiner als ϑ, also der Abstand ihrer bei t^{-r} entstehenden, zu c gehörigen Bildpunkte M und N kleiner als η ist; daraus folgt, laut der Bestimmung von η (2.5), daß einer der Bögen MN von c einen Durchmesser kleiner als δ hat; endlich ergibt sich laut der Bestimmung von δ (2.5), daß der Durchmesser eines Bogens M^rN^r von c^r kleiner als ϱ ist. Das steht in Widerspruch zu der Aussage von 2.4.

Somit haben wir bewiesen, daß γ im Kleinen zusammenhängend ist. Nach dem Hahn—Mazurkiewiczschen Satz folgt daraus, daß γ *eine stetige Kurve ist,* also, daß sie sich als eindeutiges stetiges Bild des Intervalles $0 \leqq x \leqq 1$ darstellen läßt.[4])

3. Wir beweisen zunächst, daß γ *auf der Kugel zwei Gebiete bestimmt.* Bezeichnen wir mit D_1 das von γ bestimmte Gebiet, welches das Äußere des Kreises $C(A, \varepsilon_1)$ enthält; wir nennen D_1 das Äußere von γ.

Sei R ein beliebiger Punkt, welcher weder zu γ noch zu D_1 gehört. Legen wir durch R einen einfachen Bogen PRQ, dessen Endpunkte P und Q zu γ gehören, und der keinen anderen Punkt auf γ besitzt.

Nach dem Schoenfliesschen Satz über ebene stetige Kurven ist jeder Punkt der Kurve γ allseitig erreichbar in jedem der durch γ bestimmten Gebiete.[4]) Verbinden wir also die Punkte P und Q durch einen in D verlaufenden einfachen Bogen. Trifft dieser Bogen den Bogen PRQ außer den Endpunkten, so gehört R zum Gebiet D. Wenn aber die beiden Bögen außer P und Q keinen Punkt gemeinsam haben, so bilden sie zusammen eine einfache geschlossene Kurve j, deren Punkte abgesehen von P und Q im Innern jeder Kurve des Systems $\{c^n\}$ liegen; auch das Innere der Kurve j gehört also zum Innern jeder Kurve des Systems $\{c^n\}$, also auch zum Gebiet D; auch in diesem Fall liegt also der Punkt R in D. Das Gebiet D nennen wir das Innere von γ.

Der Rand des Äußern von γ ist mit γ identisch. In beliebi-

---

[4]) Für einen einfachen Beweis des Hahn—Mazurkiewiczschen Satzes, sowie des unten angeführten Schoenfliesschen Satzes, vgl. B. von Kerékjártó, Über stetige Kurven, *Abhandlungen Math. Seminar Hamburg,* 4 (1925), S. 164—171.

ger Nähe irgend eines. Punktes von γ gibt es einen solchen Punkt, welcher zu einer Kurve c^r des Systems $\{c^n\}$ gehört; folglich gibt es in jeder Umgebung eines beliebigen Punktes von γ einen zum Äußern von c^r, also zu D_1 gehörigen Punkt.

Jeder Punkt von γ *ist erreichbar im Innern und im Äußern von* γ, nach dem zitierten Satz von SCHOENFLIES. Laut der *Schoenfliesschen Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes*[5]) ist also γ *eine einfache geschlossene Kurve.*

Sie ist bei t invariant und da ihr Inneres den Fixpunkt A enthält, wird also *die einfache geschlossene Kurve* γ *durch* t *mit erhaltendem Umlaufssinn auf sich selbst abgebildet.*

4. Wir untersuchen jetzt die von t erzeugte Abbildung einer aus regulären Punkten bestehenden einfachen geschlossenen Kurve γ, die von t mit erhaltendem Umlaufssinn auf sich selbst abgebildet wird.

4.1 *Wenn* t *auf* γ *einen Fixpunkt hat, so ist* t *auf* γ *die Identität.* Sonst sei λ ein von den Fixpunkten bestimmter Bogen von γ; die Endpunkte R und Q von λ (die auf γ zusammenfallen dürfen) sind invariant bei t, aber jeder innere Punkt P von λ geht in einen von ihm verschiedenen Punkt P^1 über. Die sukzessiven Bilder $P, P^1, P^2, \ldots$ eines beliebigen inneren Punktes P von λ konvergieren gegen einen Endpunkt R von λ; die invers sukzessiven Bilder $P^{-1}, P^{-2}, \ldots$ konvergieren gegen den anderen Endpunkt Q. Die beiden Endpunkte R und Q von λ sind singuläre Punkte von t, denn offenbar ist für diese Punkte die Bedingung der Regularität nicht erfüllt.

4.11 *Wenn* t *auf* γ *einen Fixpunkt hat, so ist* t *auf der ganzen Kugel die Identität.* Um einen beliebigen Punkt P von γ legen wir einen hinreichend kleinen Kreis c_1, der keinen singulären Punkt enthält, und konstruieren wir aus seinen sukzessiven Bildern eine invariante Kurve γ_1. Diese schneidet die Kurve γ, hat also mindestens einen invarianten Punkt; laut 4.1 sind dann alle Punkte von γ_1 invariant. Lassen wir den Radius von c_1 bis Null abnehmen; die den verschiedenen Kreisen c_1 entsprechenden invarianten Kurven γ_1 bedecken eine Umgebung von P überall dicht.[6]) Weil die Menge der Fixpunkte abgeschlossen ist, folgt daraus, daß die Abbildung t in einer vollen Umgebung eines

[5]) vgl. B. VON KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie*, S. 79.

[6]) vgl. die unter 5. gegebenen Betrachtungen.

beliebigen Punktes von γ die Identität ist. Nach dem Bewiesenen bildet die mit γ zusammenhängende Teilmenge der Fixpunktmenge von t eine offene Menge; da sie aber zugleich auch abgeschlossen ist, ist sie mit der ganzen Kugel identisch.

4.2 *Wenn t^n einen Punkt von γ in sich selbst überführt, so ist t eine n-periodische Abbildung der Kugelfläche auf sich selbst; sie ist also einer Drehung der Kugel um $\frac{2k\pi}{n}$ homöomorph* (k, n ganz).[7])

Wenden wir nämlich die Resultate 4.1 und 4.11 auf die Abbildung t^n an, die auf γ ebenfalls regulär ist.

4.3 *Wenn keine Potenz von t einen Fixpunkt auf γ besitzt, so ist die von t erzeugte Abbildung von γ auf sich der Drehung eines Kreises um $2\pi\alpha$ homöomorph, wo α eine irrationale Zahl bedeutet.*

Sei 2ε eine beliebig kleine positive Zahl, die kleiner ist, als der Durchmesser von γ. Sei $\eta > 0$ so gewählt, daß wenn M und N zwei beliebige, voneinander um weniger als η entfernte Punkte von γ sind, einer der durch M und N bestimmten Bögen von γ vom Durchmesser kleiner als ε sei; der andere Bogen MN von γ hat einen Durchmesser größer als ε. Sei schließlich $\delta > 0$ so gewählt, daß wenn zwei beliebige Punkte M und N von γ voneinander um weniger als δ entfernt sind, ihre bei t^n entstehenden Bilder M^n und N^n einen Abstand $< \eta$ voneinander haben.

Wenn P einen beliebigen Punkt von γ bedeutet, so sind seine sukzessiven Bilder $P^1, P^2, \ldots$ zufolge unserer Voraussetzung alle voneinander verschieden; sie haben mindestens einen Häufungspunkt Q. Es gibt also zwei Punkte P^k und P^l der Folge, die voneinander um weniger als δ entfernt sind. Für jedes n sind P^{k+n} und P^{l+n} um weniger als η voneinander entfernt, so daß einer der durch sie bestimmten Bögen von γ einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat. Sei etwa $k < l$, und $l - k = \nu$. Je zwei aufeinander folgende Punkte der Folge $P, P^\nu, P^{2\nu}, \ldots,$ sind um weniger als η voneinander entfernt. Unter dem Bogen $P^{r\nu}P^{(r+1)\nu}$ verstehen wir denjenigen durch diese Punkte bestimmten Bogen von γ, dessen Durchmesser kleiner als ε ist. Der Bogen $P^{r\nu}P^{(r+1)\nu}$ hat mit dem Bogen $P^{(r+1)\nu}P^{(r+2)\nu}$ außer $P^{(r+1)\nu}$ keinen Punkt gemein. In der

[7]) vgl. B. von Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie,* S. 223—224.

Folge $P, P^{\nu}, P^{2\nu}, \ldots$ gibt es einen Punkt $P^{r\nu}$ mit kleinstem Index $r\nu\,(>0)$, für welchen der Bogen $P^{r\nu}P^{(r+1)\nu}$ mit dem Bogen PP^{ν} einen Punkt gemein hat. Die Punkte $P, P^{\nu}, P^{2\nu}, \ldots, P^{r\nu}$ bedecken die Kurve ε-dicht: jeder Bogen von γ vom Durchmesser $>\varepsilon$ enthält mindestens einen der Punkte $P, P^{\nu}, \ldots, P^{r\nu}$. Da ε beliebig klein ist, folgt daraus, daß *die sukzessiven Bilder eines beliebigen Punktes von γ auf der Kurve γ überall dicht liegen.*

Wir bezeichnen als Bogen (PP^1) denjenigen durch P und P^1 bestimmten Bogen von γ, welcher den Punkt P^2 nicht enthält; sein bei t^n entstehendes Bild bezeichnen wir mit (P^nP^{n+1}). Unter dem Bogen (PP^n) verstehen wir die Summe der Bögen $(PP^1)+(P^1P^2)+\ldots+(P^{n-1}P^n)$; diese Bögen nennen wir die Komponenten von (PP^n). Wir sagen, daß *der Bogen (PP^n) die Kurve γ q-mal umkreist,* wenn (PP^n) genau q solche Komponenten hat, die P als inneren Punkt enthalten.

Die Zahl q ist von der Wahl des Punktes P unabhängig. Wäre nämlich Q ein Punkt von γ, für welchen der Bogen (QQ^n) die Kurve γ etwa $q-s$-mal $(s>0)$ umkreisen würde, so lassen wir einen veränderlichen Punkt R auf einem Bogen PQ der Kurve γ stetig von P bis Q laufen; da der Punkt R^n und also auch der Bogen (RR^n) sich mit R stetig ändert, gibt es einen Punkt R auf dem Bogen PQ, für welchen R mit R^n zusammenfällt; das ist ein Widerspruch gegen unsere Annahme.

Die durch die Zahl n eindeutig bestimmte nicht-negative Zahl q bezeichnen wir mit $f(n)$. Die Zahlfolge $\frac{f(1)}{1}, \frac{f(2)}{2}, \frac{f(3)}{3}, \ldots$ konvergiert gegen eine irrationale Zahl α, welche die zu γ gehörige *Rotationszahl* genannt wird. Die Abbildung von γ auf sich ist der Drehung eines Kreises um $2\pi\alpha$ homöomorph.[8])

5. Bezeichnen wir mit (c) die Schar der konzentrischen Kreise um den regulären Fixpunkt A. Sei ε eine solche positive Zahl, daß die Kreisfläche um A vom Radius ε keinen singulären Punkt

---

[8]) Die Definition der Rotationszahlen rührt von Poincaré her; eine einfache Betrachtung davon gibt H. Kneser, Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen, *Math. Annalen,* **91** (1924), S. 135—154., vgl. insbesondere S. 141—144. Siehe ferner G. D. Birkhoff, Surface transformations and their dynamical applications, *Acta Mathematica,* **43** (1920), S. 1—119; insbesondere S. 87—88.

enthält; sei $\delta = \varphi(\varepsilon, A)$. Zu jedem Kreis c, dessen Radius kleiner als δ ist, ordnen wir mittels der in 1 gegebenen Konstruktion eine bei t invariante einfache geschlossene Kurve γ zu; so erhalten wir eine Schar (γ).

Seien c und c_1 zwei Kreise der Schar (c), c_1 im Innern von c; seien γ und γ_1 die ihnen entsprechenden invarianten Kurven. Offenbar hat γ_1 keinen Punkt im Äußern von γ. Sei ϱ eine beliebig kleine positive Zahl; es läßt sich $\eta > 0$ so bestimmen, daß *wenn die Differenz der Radien von c und c_1 kleiner als η ist, jeder Punkt der Kurve γ_1 von der Kurve γ um weniger als ϱ entfernt ist.* Sei nämlich $\eta > 0$ eine solche Zahl, daß für einen beliebigen Punkt Q, der von irgend einem Punkt P von c einen Abstand $< \eta$ hat, die bei t^n entstehenden Bilder P^n und Q^n einen Abstand $< \varrho/2$ voneinander haben. Wenn die Differenz der Radien von c und c_1 kleiner als η ist, läßt sich eine topologische Beziehung zwischen den Punkten von c und c_1 derart angeben, daß je zwei einander entsprechende Punkte einen Abstand $< \eta$ haben; der Parameterabstand der Kreise c und c_1 ist also kleiner als η. Nach der Bestimmung von η folgt daraus, daß für jedes n der Parameterabstand der Kurven c^n und c_1^n kleiner als $\varrho/2$ ist. Sei Q_1 ein beliebiger Punkt von γ_1; in der $\varrho/4$-Umgebung von Q_1 gibt es einen Punkt P_1^r, der zu einer Kurve c_1^r des Systems $\{c_1^n\}$ gehört; es gibt dann einen Punkt P^r auf der Kurve c^r im Abstand $< \varrho/2$ von P_1^r; in der $\varrho/4$-Umgebung von P^r gibt es einen zum Äußern von c^r, also zum Äußern von γ gehörigen Punkt R. Der Abstand (Q_1, R) ist kleiner als ϱ; auf der Strecke Q_1R gibt es mindestens einen Punkt der Kurve γ.

Wenn c in einer sehr kleinen Umgebung von A enthalten ist, so liegt γ in derselben Umgebung von A, da die Punkte von γ zum Innern von c oder zu c gehören. Aus dem Bewiesenen folgt also, daß *die Schar (γ) eine Umgebung von A überall dicht bedeckt.*

5. 1 Sei γ_0 eine aus regulären Punkten bestehende einfache geschlossene Kurve, welche von t mit erhaltendem Umlaufssinn auf sich selbst abgebildet wird. Sei ε eine solche positive Zahl, daß alle Punkte der Kugel, deren Abstand von γ_0 nicht größer als ε ist, reguläre Punkte sind. Sei δ eine der Zahl ε laut der Regularitätsbedingung für die Kurve γ_0 entsprechende positive Zahl. Wenn c eine die Kurve γ_0 nicht treffende einfache geschlossene

Kurve ist, deren Punkte sämtlich im Abstand $< \delta$ von γ_0 liegen, so hat jeder Punkt von c^n einen Abstand $< \varepsilon$ von γ_0. Das System $\{c^n\}$ bestimmt ein die Kurve γ_0 enthaltendes invariantes Gebiet, dessen Rand nach den Betrachtungen von 1—3 eine bei t invariante einfache geschlossene Kurve γ ist.

Nehmen wir eine Schar (c) von einfachen geschlossenen Kurven c, die einander nicht treffen und in der δ-Umgebung von γ_0 verlaufen; γ_0 soll auch zur Schar gehören und (c) soll eine Umgebung von γ_0 überall dicht bedecken. Wir konstruieren zu jeder Kurve c der Schar (c) die zugehörige invariante Kurve γ; diese bilden eine Schar (γ), die in einer Umgebung von γ_0 überall dicht liegt.

Von der invarianten Kurve γ_0 ausgehend haben wir auf diese Weise eine sich nach beiden Seiten von γ_0 erstreckende Schar (γ) von invarianten Kurven konstruiert. Von den beiden äußeren Kurven der Schar (γ) ausgehend konstruieren wir weitere Scharen von invarianten Kurven, usw. Die Fortsetzung der Konstruktion kann nur dadurch gehemmt werden, daß die nacheinander konstruierten invarianten Kurven sich auf einen regulären Fixpunkt zusammenziehen, oder aber einem singulären Punkt nähern. (Weiteres darüber folgt in 8)

6. Von den in 5 konstruierten Scharen invarianter Kurven werden wir beweisen, daß *die zu den verschiedenen Kurven der Schar gehörigen Rotationszahlen einander gleich sind.* Wir beschränken uns auf den Fall, daß kein Punkt irgend einer Kurve γ bei einer Potenz t^n von t invariant ist; der andere Fall wurde unter 4. 2 bereits erledigt.

Sei γ eine beliebige Kurve der Schar. Zwecks einfacheren Ausdrucks setzen wir voraus, daß γ auf einer Halbkugel liegt, und verstehen wir unter dem Inneren von γ dasjenige durch γ bestimmte Gebiet, welches auf derselben Halbkugel liegt.

6. 1 Wir stellen γ als einen Kreis dar und schlagen um seinen Mittelpunkt O einen Kreis $C(O, 2\varepsilon)$ vom Radius 2ε, welcher im Innern von γ liegt. Sei P ein beliebiger Punkt von γ und sei $\delta = \varphi(\varepsilon, P)$. Sei γ_1 eine andere Kurve der Schar im Zwischengebiet von γ und $C(O, 2\varepsilon)$, die einen von P um weniger als δ entfernten Punkt P_1 besitzt. Für jedes n ist der Abstand $(P^n, P_1^n) < \varepsilon$.

Bestimmen wir eine solche positive Zahl ϑ, daß wenn zwei Punkte Q und R von γ (oder zwei Punkte Q_1 und R_1 von γ_1)

einen Abstand $< \vartheta$ haben, die bei t^n entstehenden Bilder Q^n und R^n (bzw. Q_1^n und R_1^n) so wenig voneinander entfernt sind, daß ein durch diese Punkte bestimmter Bogen von γ (bzw. von γ_1) vom Durchmesser $< \varepsilon$ ist.

6.2 Da die Punkte $P^1, P^2, \ldots$ auf γ überall dicht liegen, gibt es eine zunehmende Folge von ganzen Zahlen $0 < n_1 < n_2 < \ldots$, für welche die Punkte $P^{n_1}, P^{n_2}, \ldots$ gegen P konvergieren. Die mit denselben Exponenten gebildeten Punkte $P_1^{n_1}, P_1^{n_2}, \ldots$ von γ_1 haben mindestens einen Häufungspunkt Q. Es gibt also zwei Zahlen n_k und n_l von der Eigenschaft, daß die Punkte P^{n_k} und P^{n_l} voneinander um weniger als ϑ entfernt sind, ebenso auch die Punkte $P_1^{n_k}$ und $P_1^{n_l}$. Bezeichnen wir $n_k - n_l$ mit ν; aus der Bestimmung der Zahl ϑ ergibt sich, daß je zwei aufeinander folgende Punkte der Folge $P, P^\nu, P^{2\nu}, \ldots$, oder der Folge $P_1, P_1^\nu, P_1^{2\nu}, \ldots$ einen Bogen vom Durchmesser $< \varepsilon$ auf γ, bzw. auf γ_1 bestimmen.

6.3 Wenn die Rotationszahlen von γ und γ_1 für t^ν verschieden sind, so gibt es eine Zahl μ, für welche $P_1^{(\mu+1)\nu}$ auf dem Bogen $P_1 P_1^\nu$ liegt, der Bogen

$$PP^\nu + P^\nu P^{2\nu} + \ldots + P^{\mu\nu} P^{(\mu+1)\nu}$$

die Kurve γ q-mal ($q > 2$), und der Bogen

$$P_1 P_1^\nu + P_1^\nu P_1^{2\nu} + \ldots + P_1^{\mu\nu} P_1^{(\mu+1)\nu}$$

die Kurve γ_1 q_1-mal umkreist, wobei die Differenz der nichtnegativen ganzen Zahlen q und q_1 absolut größer als 2 ist. Wenn γ_1 den Kreis $C(O, 2\varepsilon)$ in ihrem Innern enthält, so setzen wir $q' = q_1$ bzw. $q' = -q_1$, jenachdem die Bögen PP^ν und $P_1 P_1^\nu$ auf den Kurven γ und γ_1 in bezug auf den Kreis $C(O, 2\varepsilon)$ denselben Umlaufssinn bestimmen, oder nicht; wenn das Innere von γ_1 den Kreis $C(O, 2\varepsilon)$ nicht enthält, setzen wir $q' = 0$.

Stellen wir irgend eine topologische Beziehung zwischen den Punkten von PP^ν und $P_1 P_1^\nu$ her, bei welcher P und P_1 einander entsprechen, ebenso P^ν und P_1^ν. Diese Beziehung übertragen wir auf die Bögen $P^{r\nu} P^{(r+1)\nu}$ und $P_1^{r\nu} P_1^{(r+1)\nu}$ mittels der Abbildung $t^{r\nu}$. Lassen wir einen veränderlichen Punkt M der Reihe nach die Bögen $PP^\nu, P^\nu P^{2\nu}, \ldots, P^{\mu\nu} P^{(\mu+1)\nu}$ umlaufen; der Arcus des Punktes M in bezug auf den Punkt O ändert sich dabei von 0 bis zu einem zwischen $2\pi q$ und $2\pi(q+1)$ liegenden Endwert. Der dem Punkt M entsprechende Punkt M_1 umläuft die Bögen

$P_1P_1^{\nu}, P_1^{\nu}P_1^{2\nu}, \ldots, P_1^{\mu\nu}P_1^{(\mu+1)\nu}$, sein Arcus ändert sich von 0 bis zu einem zwischen $\pi(2q'-1)$ und $\pi(2q'+1)$ liegenden Endwert. Da $|q'-q|>2$ ist, so ist der Unterschied der Endwerte größer als 2π, es gibt also einen Punkt M, für welchen der Arcusunterschied von M und M_1 gleich π ist. Diese Punkte M und M_1 sind um mehr als 4ε voneinander entfernt, denn zwischen ihnen liegt der Kreis $C(O, 2\varepsilon)$. Sei $P^{r\nu}P^{(r+1)\nu}$ derjenige Bogen, zu welchem der Punkt M gehört, so ist $(M, P^{r\nu})<\varepsilon$; der entsprechende Punkt M_1 gehört zum Bogen $P_1^{r\nu}P_1^{(r+1)\nu}$, es ist also $(M_1, P_1^{r\nu})<\varepsilon$. Nach 6. 1 ist auch $(P^{r\nu}, P_1^{r\nu})<\varepsilon$; daraus folgt $(M, M_1)<3\varepsilon$, was ein Widerspruch ist.

Somit haben wir gezeigt, daß die Rotationszahlen von γ und γ_1 für t^{ν} einander gleich sind. Die Rotationszahlen für t ergeben sich aus diesen durch Division mit ν. Es folgt, daß die Rotationszahlen von zwei benachbarten Kurven der Schar (γ), und also auch von allen Kurven der Schar (γ) einander gleich sind.

7. *Wenn der Abstand von zwei Kurven der* (unter 5 konstruierten) *Schar* (γ) *hinreichend klein ist, so ist ihr Parameterabstand beliebig klein.*

Sei γ eine Kurve der Schar (γ), und sei ε eine beliebig kleine positive Zahl. Bestimmen wir $\delta>0$ laut der Regularität zur Zahl ε für einen Punkt P der Kurve γ. Sei γ_1 eine andere Kurve der Schar, die einen von P um weniger als δ entfernten Punkt P_1 besitzt. Wir erklären eine Abbildung von γ auf γ_1 auf die folgende Weise. Für jedes n lassen wir dem Punkt P^n von γ den Punkt P_1^n von γ_1 entsprechen; der Abstand der Punkte P^n und P_1^n ist kleiner als ε. Da die Rotationszahlen von γ und γ_1 gleich sind, haben die Mengen $\{P^n\}$ und $\{P_1^n\}$ auf den Kurven γ, bzw. γ_1 dieselbe zyklische Ordnung; $\{P^n\}$, bzw. $\{P_1^n\}$ ist überall dicht auf γ, bzw. auf γ_1. Wir ergänzen die zwischen ihnen erklärte Beziehung für die ganze Kurve γ und γ_1, indem wir einem beliebigen Punkt Q von γ denjenigen Punkt Q_1 von γ_1 zuordnen, der in bezug auf die Punkte P_1^n dieselben Ordnungsrelationen hat, wie Q in bezug auf die Punkte P^n.[9]) Auf diese Weise entsteht eine topologische Beziehung zwischen den Punkten von γ und γ_1, wobei je zwei einander entsprechende Punkte im Abstand $\leq\varepsilon$ voneinander liegen.

---

[9]) vgl. B. VON KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie*, S. 40.

7. 1 Aus der in 7 bewiesenen Eigenschaft der Schar (γ) folgt, daß *die Schar* (γ) *einer Schar von konzentrischen Kreisen homöomorph ist.*[10])

8. Wenn die Abbildung t keinen singulären Punkt hat, so führt die in 5 gegebene Konstruktion zu einer Schar von invarianten Kurven, die die Kugelfläche bedeckt und sich auf zwei reguläre Fixpunkte A und B zusammenzieht. Die Schar läßt sich nach dem eben zitierten Satz auf die Schar der Parallelkreise einer Kugel topologisch abbilden. Vermittels dieser Abbildung geht die gegebene Abbildung t der Kugel auf sich in eine Drehung der Kugel um $2\pi\alpha$ über, wo α die in 4. 3 definierte Rotationszahl bedeutet. Dieses Resultat fassen wir mit dem in 4. 2 Bewiesenen zusammen, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

I. *Eine topologische Abbildung der Kugel auf sich mit erhaltendem Umlaufssinn, die keinen singulären Punkt hat, ist einer elliptischen linearen Transformation homöomorph.*

8. 1 Betrachten wir eine solche Abbildung t, die höchstens endlich viele singuläre Punkte hat. Die in 5 gegebene Konstruktion von Scharen invarianter Kurven läßt sich in beliebige Nähe eines singulären Punktes S fortsetzen. Wenn für eine beliebig kleine positive Zahl ε eine invariante Kurve γ ganz in der ε-Umgebung von S verlaufen würde, so wäre S kein singulärer Punkt. Wir setzen also voraus, daß es invariante Kurven γ gibt, deren Abstände vom singulären Punkt S beliebig klein sind, aber jede Kurve γ einen Punkt außerhalb der ε-Umgebung von S hat, wobei ε eine feste positive Zahl bedeutet. Wir setzen von den Kurven γ immer voraus, daß kein Punkt von γ bei irgend einer Potenz t^n von t invariant ist.

Sei $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eine Folge von Kurven der Schar, auf welchen liegende Punkte $P_1, P_2, \ldots$ gegen den singulären Punkt S konvergieren; seien $Q_1, Q_2, \ldots$ Punkte derselben Kurven, die gegen einen solchen regulären Punkt Q^* konvergieren, dessen Abstand von S größer oder gleich ε ist.

8. 11 Wir bezeichnen mit ϱ eine positive Zahl, die kleiner ist als $\varepsilon/4$. Sei $\delta > 0$ eine Zahl, die der Zahl $\varrho/2$ für den Punkt Q^* laut der Regularitätsbedingung entspricht. Von einem gewissen Index i ab, welchen wir gleich 1 annehmen dürfen, liegen die Punkte Q_i in der $\delta/2$-Umgebung von Q^*. Der Abstand der Punkte

10) B. von Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie,* S. 241—246.

(Q_1, Q_i) ist kleiner als δ, für $i = 2, 3, \ldots$ Ordnen wir für jedes n die Punkte Q_1^n und Q_i^n der Kurven γ_1 und γ_i einander zu, und erweitern diese Zuordnung zu einer topologischen Beziehung zwischen allen Punkten von γ_1 und γ_i; je zwei entsprechende Punkte der beiden Kurven haben einen Abstand $\leqq \varrho$ voneinander.

8. 12 Da die singulären Punkte bei t ineinander übergehen, gibt es einen Exponenten ν_1, für welchen t^{ν_1} jeden der singulären Punkte in sich überführt. Sei $\nu > 0$ der kleinste Exponent, für welchen t^ν den singulären Punkt S invariant läßt. Die bei den Abbildungen $t^{n\nu}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ entstehenden Bilder von Q_1 liegen auf γ_1 überall dicht; es gibt einen Index $\mu = k\nu$, für welchen Q_1^μ so nahe bei Q_1 liegt, daß einer der durch Q_1 und Q_1^μ bestimmten Bögen von γ_1 ganz in der ϱ-Umgebung von Q^* liegt. Die Punkte des Bogens $Q_i Q_i^\mu$ von γ_i $(i \geqq 2$, beliebig$)$ sind von den entsprechenden Punkten des Bogens $Q_1 Q_1^\mu$ um nicht mehr als ϱ entfernt; der Bogen $Q_i Q_i^\mu$ von γ_i liegt also in der 2ϱ-Umgebung von Q^*. Es gibt eine Zahl N, für welche der Bogen $Q_1 Q_1^\mu + Q_1^\mu Q_1^{2\mu} + \ldots + Q_1^{N\mu} Q_1^{(N+1)\mu}$ die Kurve γ_1 genau einmal umkreist, und der Punkt $Q_1^{(N+1)\mu}$ auf dem Bogen $Q_1 Q_1^\mu$ liegt. Da die Rotationszahlen von γ_1 und γ_i gleich sind, so gilt für jeden Index i die analoge Behauptung, nämlich, daß der Bogen $Q_i Q_i^\mu + Q_i^\mu Q_i^{2\mu} + \ldots + Q_i^{N\mu} Q_i^{(N+1)\mu}$ die Kurve γ_i genau einmal umkreist und der Punkt $Q_i^{(N+1)\mu}$ auf dem Bogen $Q_i Q_i^\mu$ liegt. Einer der Bögen $Q_i^{r\mu} Q_i^{(r+1)\mu}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, N)$ enthält den Punkt P_i; *der Punkt P_i geht bei einer der Abbildungen $1, t^{-\mu}, t^{-2\mu}, \ldots, t^{-N\mu}$ in einen von Q^* um weniger als 2ϱ entfernten Punkt über,* nämlich in einen Punkt des Bogens $Q_i Q_i^\mu$.

8. 13 Sei andererseits $\vartheta > 0$ eine solche positive Zahl, daß jeder Punkt R, dessen Abstand von S kleiner als ϑ ist, bei jeder der *endlichvielen* Abbildungen $1, t^{-\mu}, t^{-2\mu}, \ldots, t^{-N\mu}$, die sämtlich den Punkt S invariant lassen, in solche Punkte übergeht, die in der ϱ-Umgebung von S enthalten sind. Wenn i hinreichend groß ist, so gehört der Punkt P_i zu der ϑ-Umgebung von S; *die bei den Abbildungen $1, t^{-\mu}, t^{-2\mu}, \ldots, t^{-N\mu}$ entstehenden Bilder von P_i gehören also zu der ϱ-Umgebung von S.* Da der Abstand der Punkte Q^* und S größer als 4ϱ ist, steht dieses Ergebnis mit dem am Schluß von 8. 12 erhaltenen Resultat in Widerspruch.

Es stellte sich heraus, daß die Voraussetzung einer aus regulären Punkten bestehenden invarianten Kurve mit der Voraussetzung eines singulären Punktes unverträglich ist. Dieses Ergebnis sprechen wir im folgenden Satz aus:

8. 2 *Wenn eine topologische Abbildung t der Kugel auf sich mit erhaltendem Umlaufssinn und mit höchstens endlich vielen singulären Punkten einen regulären Punkt, oder eine aus regulären Punkten bestehende einfache geschlossene Kurve invariant läßt, so ist t überall regulär.*

Dieser Satz wird als Hilfssatz für die weiteren Betrachtungen angewendet. — Zunächst folgern wir daraus, daß eine den Umlaufssinn erhaltende topologische Abbildung der Kugel auf sich mit genau einem singulären Punkt S diesen Punkt S notwendig invariant läßt und außer S keinen anderen invarianten Punkt hat. Die Voraussetzungen meines Satzes betreffend die Charakterisierung der parabolischen Transformationen sind also erfüllt (s. die unter [1]) zitierte Arbeit); wir können den folgenden Satz aussprechen:

II. *Eine topologische Abbildung der Kugel auf sich mit erhaltendem Umlaufssinn, die genau einen singulären Punkt hat, ist einer parabolischen linearen Transformation homöomorph.*

§ 2. Hyperbolische Abbildungen.

1. Sei t eine den Umlaufssinn erhaltende topologische Abbildung der Kugelfläche auf sich, die endlich viele, aber mindestens zwei singuläre Punkte hat. Die singulären Punkte gehen bei t ineinander über, so daß bei einer gewissen Potenz t^{ν} von t jeder von ihnen invariant ist. Da t^{ν} mindestens zwei Fixpunkte hat, muß auch die Abbildung t mindestens zwei Fixpunkte haben.[11]) Nach § 1, 8. 2 kann weder t noch irgend eine Potenz von t einen regulären Punkt fest lassen; *bei t sind also mindestens zwei singuläre Punkte S_1 und S_2 invariant.*

2. *Wenn die Menge $\{P^n\}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ der sukzessiven Bilder eines regulären Punktes P einen regulären Punkt Q zu Häufungspunkt hat, so ist $\{P^n\}$ in sich dicht.*

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig; da Q regulär ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jeden Punkt R, für welchen der Abstand $(R, Q) < \delta$,

[11]) nach einem Korollar des Brouwerschen Translationssatzes; vgl. B. von Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, S. 199, Satz IV.

$(R^n, Q^n) < \varepsilon$ für jedes n besteht. Da Q ein Häufungspunkt von $\{P^n\}$ ist, gibt es ein P^k, so daß $(P^k, Q) < \delta$, folglich ist der Abstand ihrer bei t^{-k} entstehenden Bilder, d. h. der Abstand der Punkte P und Q^{-k} kleiner als ε. Sei ε_1 der Abstand von P und Q^{-k}, und sei $\varepsilon' < \varepsilon - \varepsilon_1$. Zufolge der Stetigkeit der Abbildung t^{-k} gibt es ein δ', so daß für jeden Punkt R, für welchem $(R, Q) < \delta'$, $(R^{-k}, Q^{-k}) < \varepsilon'$ ist. Es gibt nun mindestens einen von P^k verschiedenen Punkt P^l der Menge $\{P^n\}$, dessen Abstand von Q kleiner als δ' ist, so daß P^{l-k} in der ε'-Umgebung von Q^{-k}, also jedenfalls in der ε-Umgebung von P selbst liegt. Damit ist gezeigt, daß P ein Häufungspunkt von $\{P^n\}$ ist. Aus der Stetigkeit der Abbildung t^r folgt, daß P^r ein Häufungspunkt von $t^r\{P^n\} = \{P^n\}$ ist. Also ist die Menge $\{P^n\}$ in sich dicht.

2. 1 *Wenn der reguläre Punkt P kein Häufungspunkt der Folge $P^1, P^2, \ldots$ ist, so ist P auch kein Häufungspunkt der Folge $P^{-1}, P^{-2}, \ldots$.*

Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $(P^n, P) > \varepsilon$, für jedes $n > 0$. Sei $\delta > 0$ laut der Regularitätsbedingung zur Zahl ε für den Punkt P gewählt. Wäre $P^{-r} (r > 0)$ ein Punkt im Abstand kleiner als δ von P, so wären auch $t^r(P^{-r}) = P$ und $t^r(P) = P^r$ im Abstand $< \varepsilon$ voneinander, gegen Annahme.

3. Wir werden beweisen, daß es *mindestens einen solchen regulären Punkt P gibt, für welchen die Menge $\{P^n\}$ nur singuläre Punkte zu Häufungspunkten hat.*

3. 1 Sei c ein Kreis um den bei t invarianten singulären Punkt S_1 als Mittelpunkt, welcher S_1 von den anderen singulären Punkten trennt. Sein Bild bei t^n ist eine einfache geschlossene Kurve c^n von derselben Eigenschaft. Unter dem Innern von c bzw. von c^n verstehen wir das durch sie bestimmte, den Punkt S_1 enthaltende Gebiet.

3. 11 Wenn c' keinen Punkt im Äußern von c hat, — das werden wir mit dem Zeichen $c' \subset c$ ausdrücken, — so kann c' mit c doch nicht zusammenfallen, laut des Satzes 8. 2 von § 1; es gibt also einen regulären Punkt P von c, der nicht zu c' gehört; seine sukzessiven Bilder $P^1, P^2, \ldots$ liegen sämtlich im Innern von c', oder auf c'; P ist kein Häufungspunkt dieser Folge. Nach 2. 1 und 2 hat die Menge $\{P^n\}$ nur singuläre Punkte zu Häufungs-

punkten, so daß für diesen Fall die Behauptung 3 bewiesen ist. Ebenso erledigt sich der Fall $c \supset c'$.

3.2 Für das Weitere nehmen wir also an, daß jede einfache geschlossene Kurve, die S_1 von den anderen singulären Punkten trennt, ihr Bild *schneidet*. (Mit diesem Wort drücken wir aus, daß jede der beiden Kurven sowohl im Innern, wie auch im Äußern der anderen Kurve mindestens einen Punkt hat.)

Wir konstruieren ein den Punkt S_1 enthaltendes Kontinuum K, welches bei t^{-1} in eine Teilmenge von K übergeht.

Sei wieder c ein Kreis um S_1, welcher S_1 von den anderen singulären Punkten trennt; sei c' sein Bild. Der Rand des von c und c' bestimmten, den Punkt S_1 enthaltenden Gebietes ist eine einfache geschlossene Kurve c_1, welcher mindestens einen zu c gehörigen Punkt besitzt. Das Bild c_1' von c_1 schneidet c_1 und da $c_1 \subset c$, also auch $c_1' \subset c'$, so gehören sämtliche Schnittpunkte von c_1 und c_1' zu c. Der Rand c_2 des von c_1 und c_1' bestimmten, den Punkt S_1 enthaltenden Gebietes hat also mindestens einen Punkt auf c. Sei c_2' das Bild von c_2; wieder ergibt sich, daß c_2 und c_2' sich schneiden, und die Schnittpunkte zu c gehören, usf. Für die auf diese Weise erhaltenen Kurven bestehen die Beziehungen: $c \supset c_1 \supset c_2 \ldots$ und $c' \supset c_1' \supset c_2' \ldots$; ferner $c_{i+1} \subset c_i'$, für jedes i. Jede der Kurven $c_1, c_2, \ldots$ hat mindestens einen Punkt auf c.

Bezeichnen wir mit K (bzw. mit K') die Grenzmenge der von $c, c_1, c_2, \ldots,$ (bzw. von $c', c_1', c_2', \ldots$) berandeten inneren Bereiche.[12]) K ist ein Kontinuum, welches den Punkt S_1 und mindestens einen Punkt des Kreises c enthält. Die Restmenge des Kontinuums K auf der Kugel besteht aus einem (einfach zusammenhängenden) Gebiet; jeder zur Restmenge von K gehörige Punkt liegt nämlich, von einem gewissen Index ab, im Äußern der Kurven c_i. K' ist ein Kontinuum, welches den Punkt S enthält und auf der Kugel ein Restgebiet bestimmt. K ist eine Teilmenge von K', da für jedes $i: c_{i+1} \subset c_i'$ besteht. Das Bild von K bei t ist mit K' identisch.

3.21 Wenn K eine echte Teilmenge von K' ist, so sei P ein nicht zu K gehöriger Punkt von K'; seine bei den Potenzen $t^{-1}, t^{-2}, \ldots$ entstehenden Bilder gehören alle zu K, sie können

[12]) K ist übrigens der Durchschnitt der von den sukzessiven Bildern $c, c^1, c^2, \ldots$ berandeten inneren Bereiche; aus der im Text gegebenen Definition erhellt, daß K mindestens einen Punkt auf c besitzt.

also den Punkt P nicht zu Häufungspunkt haben. Nach 2 und 2.1 sind alle Häufungspunkte von $\{P^n\}$ singuläre Punkte; für diesen Fall ist die Behauptung 3 bewiesen.

3.3 Wenn K und K' identisch sind, so zeigen wir zunächst folgendes: *Sei P ein beliebiger Punkt der Kugel; die Menge $\{P^n\}$ kann auf der Kugel nicht überall dicht liegen.* Seien Q und R zwei reguläre Punkte, von denen Q zu K gehört, R nicht. Sei P ein regulärer Punkt, von welchem wir annehmen, daß $\{P^n\}$ auf der Kugel überall dicht liegt. Sei $2\varepsilon > 0$ der Abstand des Punktes R vom Kontinuum K und bezeichne $\delta > 0$ eine laut der Regularitätsbedingung der Zahl ε und dem Punkt Q entsprechende Zahl. Es gibt einen Punkt P^k, für welchen $(P^k, Q) < \delta$; für jedes n ist also $(P^{k+n}, Q^n) < \varepsilon$. Es gibt auch einen Punkt P^l, für welchen $(P^l, R) < \varepsilon$; für dieses l ist auch $(P^l, Q^{l-k}) < \varepsilon$, also $(R, Q^{l-k}) < 2\varepsilon$. Da aber Q^{l-k} wegen der Invarianz von K zu K gehört, widerspricht dies der Wahl von ε.

3.4 *Für jeden regulären Punkt P hat $\{P^n\}$ mindestens einen singulären Punkt zu Häufungspunkt.* Wenn nämlich P ein solcher regulärer Punkt ist, für welchen $\{P^n\}$ keinen singulären Häufungspunkt hat, so läßt sich eine aus regulären Punkten bestehende einfache geschlossene Kurve konstruieren, die bei einer Potenz von t mit erhaltendem Umlaufssinn in sich selbst übergeht. In diesem Fall ist also die Abbildung t überall regulär, laut § 1, 8.2.

Sei $2\varepsilon > 0$ größer als der Abstand der Menge $\{P^n\}$ von den singulären Punkten. Wählen wir $\delta > 0$ laut der Regularität zur Zahl ε für den Punkt P. In der δ-Umgebung von P gibt es einen Punkt P^r (laut 2); in einer noch kleineren Umgebung von P, welche zu ihrem bei t^r entstehenden Bild fremd ist, gibt es ein P^{kr} $(k > 0)$. Konstruieren wir einen durch die Punkte P und P^{kr} laufenden *Translationsbogen* β für die Abbildung t^r [13]) und betrachten wir die bei $t^r, t^{2r}, \ldots$ entstehenden Bilder $\beta^r, \beta^{2r}, \ldots$ desselben. Einer dieser Bogen trifft den Bogen β; sei etwa β^{kr} der erste solche. Beschreiben wir die von den Bogen $\beta, \beta^r, \beta^{2r}, \ldots, \beta^{kr}$ gebildete Kurve bis zum ersten solchen Punkt von β^{kr}, der zu β gehört, und lassen wir den zwischen diesem Punkt und dem Punkt P liegenden Teil des Bogens β fort; so erhalten wir eine einfache geschlossene Kurve c; in jedem der durch c bestimmten Gebieten

---

[13]) vgl. die unter [1]) zitierte Arbeit, S. 230.

gibt es mindestens einen Fixpunkt F_1 und F_2 von t^r.[14]) Betrachten wir das Kurvensystem $\{c, c^r, c^{2r}, \ldots, c^{-r}, c^{-2r}, \ldots\}$; jede Kurve des Systems trennt die Fixpunkte F_1 und F_2 voneinander. Zufolge der Wahl von δ liegen alle Kurven des Systems außerhalb der ε-Umgebungen der singulären Punkte. Das vom System $\{c^{nr}\}$ bestimmte, den Punkt F_1 enthaltende Gebiet wird also von einer aus regulären Punkten bestehenden einfachen geschlossenen Kurve berandet, welche bei t^r mit erhaltendem Umlaufssinn auf sich selbst abgebildet wird.

3.5 Für die weitere Betrachtung können wir also annehmen, daß für jeden regulären Punkt P die Menge $\{P^n\}$ mindestens einen singulären Häufungspunkt hat. Andererseits zeigt das in 3.2 konstruierte Kontinuum K, daß es zu jedem singulären Punkt S mindestens einen regulären Punkt P gibt, für welchen die Menge $\{P^n\}$ den Punkt S zu Häufungspunkt hat. Wenn der singuläre Punkt S bei t nicht invariant ist, ist er doch bei einer Potenz t^ν invariant; sei c ein hinreichend kleiner Kreis um S, der keinen anderen singulären Punkt enthält, und bezeichne K das vom System $\{c^{\nu n}\}$ bestimmte, den Punkt S enthaltende Kontinuum, welches bei t^ν invariant ist. Wenn P ein Punkt von K ist, gehört die Menge $\{P^{\nu n}\}$ zu K, sie kann also keinen von S verschiedenen singulären Häufungspunkt haben, und weil sie mindestens einen singulären Häufungspunkt hat, ist dieser notwendig mit S identisch.

Es gibt also entweder einen solchen regulären Punkt P, dessen sukzessive Bilder $\{P^n\}$ mindestens zwei verschiedene singuläre Häufungspunkte S_1 und S_2 haben; oder es gibt einen solchen regulären Punkt P, für welchen die Menge $\{P^n\}$ den Punkt S_1 zu Häufungspunkt hat, während es in beliebiger Nähe von P einen solchen regulären Punkt Q gibt, für welchen die Menge $\{Q^n\}$ einen von S_1 verschiedenen singulären Punkt S_2 zu Häufungspunkt hat. Vorausgesetzt in beiden Fällen, daß $\{P^n\}$ auch reguläre Punkte zu Häufungspunkten hat, gibt es in beliebiger Nähe von P eines von seinen sukzessiven Bildern P^r. Nach 3.3 ist $\{P^n\}$ auf der Kugel nicht überall dicht; es gibt also einen Punkt R in Abstand $> 2\varepsilon$ (> 0) von der Menge $\{P^n\}$. Wählen

[14]) L. E. J. Brouwer, Beweis des ebenen Translationssatzes, *Math. Annalen*, **72** (1912), S. 37—54., vgl. Satz 1. auf S. 38. — Vgl. auch die Fußnote [9]) meiner unter [1]) zitierten Arbeit.

wir $\delta = \varphi(\varepsilon, P)$, laut der Regularitätsbedingung; sei P^r eines von den sukzessiven Bildern von P in der δ-Umgebung von P, und sei Q ein Punkt auch im Abstand $< \delta$ von P, von der Art, daß $\{P^n\}$ den Punkt S_1 und $\{Q^n\}$ den Punkt S_2 zu Häufungspunkt hat. (Falls $\{P^n\}$ beide Punkte S_1 und S_2 zu Häufungspunkten hat, nehmen wir $Q = P$). Verbinden wir die Punkte P, Q und P^r durch einen einfachen Bogen β in der δ-Umgebung von P; betrachten wir die bei $1, t^r, t^{2r}, \ldots; t^{-r}, t^{-2r}, \ldots$ entstehenden Bilder von β. Diese bilden zusammen eine zusammenhängende Menge, deren Ableitung ein bei t^r invariantes Kontinuum $\varkappa$ ist. $\varkappa$ enthält beide Punkte S_1 und S_2; die ε-Umgebung von R ist aber fremd zu $\varkappa$.

Sei G ein durch $\varkappa$ bestimmtes Gebiet. Wenn die sukzessiven Bilder eines in G liegenden regulären Punktes R einen regulären Häufungspunkt haben, geht R bei einer genügend hohen Potenz t^{kr} von t^r (laut 2) in einen sehr nahe bei R, also insbesondere in G liegenden Punkt über, so daß G bei t^{kr} in sich selbst übergeht.

Bilden wir das einfach zusammenhängende Gebiet G auf eine einmal punktierte Kugelfläche topologisch ab. Wir nehmen also eine andere Kugel, von welcher wir einen Punkt S^* fortlassen, und bilden G auf dieselbe ab. Betrachten wir die Abbildung dieser Kugel auf sich, welche der Abbildung t^{kr} von G in sich entspricht. Die in G liegenden singulären Punkte, und keine anderen Punkte von G, gehen in singuläre Punkte der neuen Kugel über; außerdem ist S^* ein weiterer singulärer Punkt. *Die Abbildung der neuen Kugel hat also mindestens um einen singulären Punkt weniger als t.*

Wiederholen wir dieses Verfahren eine endliche Zahl von Malen, bis wir zu einer solchen Abbildung gelangen, die *nur einen singulären Punkt hat.* Diese Abbildung ist dann laut § 1, Satz II einer parabolischen Abbildung homöomorph; die sukzessiven Bilder eines beliebigen regulären Punktes bilden eine solche Menge, die nicht in sich dicht ist.

Zurückkehrend auf die ursprünglich gegebene Kugel und die Abbildung t, stellen wir fest, daß es einen regulären Punkt P und eine Zahl N gibt, so daß die Menge $\{P, P^N, P^{2N}, \ldots, P^{-N}, P^{-2N}, \ldots\}$ *nicht* in sich dicht ist. Nach dem in 2 Bewiesenen folgt daraus, daß diese Menge keinen regulären Häufungspunkt hat, also daß ihre Häufungspunkte sämtlich singuläre Punkte sind. Da die singulären Punkte bei $1, t, t^2, \ldots, t^{N-1}$ ineinander übergehen, so folgt aus der Stetigkeit dieser Abbildungen, daß für jedes $\nu = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, sämtliche Häufungspunkte der Menge $\{P^\nu, P^{\nu+N}, P^{\nu+2N}, \ldots, P^{\nu-N}, P^{\nu-2N}, \ldots\}$ singuläre Punkte sind. Addieren wir diese N Mengen, so erhalten wir die Menge $\{P, P^1, P^2, \ldots, P^{-1}, P^{-2}, \ldots\} = \{P^n\}$, für welche aus dem Obigen folgt, daß ihre Häufungspunkte sämtlich singuläre Punkte sind. Hiermit ist die Behauptung 3 bewiesen.

4. *Setzen wir zunächst voraus, daß für einen regulären Punkt P die sukzessiven Bilder $P^1, P^2, \ldots$ gegen einen einzigen* (singulären und invarianten) *Punkt S konvergieren. Wir zeigen, daß S ein Attraktionspunkt für t ist, m. a. W. daß die sukzessiven Bilder $Q^1, Q^2, \ldots$ irgend eines anderen regulären Punktes Q gegen denselben Punkt S konvergieren.*

Sei $3\varepsilon > 0$ beliebig, aber kleiner als der Abstand (P, S) und auch kleiner als der Abstand von S von den anderen singulären Punkten. Sei $\delta = \varphi(\varepsilon, P)$. Sei Q ein von P um weniger als δ entfernter Punkt. Da die Punkte $P^1, P^2, \ldots$ gegen S konvergieren, und der Abstand (P^n, Q^n) für jedes n kleiner als ε ist, so liegen sämtliche Punkte Q^n von einem gewissen Index ab in der 2ε-Umgebung von S. Wenn die Punkte $Q^1, Q^2, \ldots$ nicht gegen S konvergieren, so haben sie wenigstens einen Häufungspunkt R, der von S um weniger als 2ε entfernt, also ein regulärer Punkt ist. Laut des Satzes 2 wäre also die Menge $\{Q^n\}$ in sich dicht. Weil aber die Folge $Q^1, Q^2, \ldots$ den Punkt Q nicht zu Häufungspunkt hat, so folgt aus 2. 1, daß $\{Q^n\}$ nicht in sich dicht sein kann. Das ist ein Widerspruch.

Damit ist gezeigt, daß die Behauptung des Satzes 4 wenigstens für alle Punkte Q einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes P besteht.

Sei also R ein regulärer Punkt, der Häufungspunkt von solchen regulären Punkten Q ist, für welche die Behauptung 4 bereits bewiesen ist. Würden die sukzessiven Bilder $R^1, R^2, \ldots$ von R nicht gegen S konvergieren, so gäbe es Punkte R^k mit beliebig hohem Index k, deren Abstände von S größer als 2ε sind. Sei $\delta = \varphi(\varepsilon, R)$; laut Voraussetzung gibt es einen Punkt Q im Abstand $< \delta$ von R, dessen sukzessive Bilder gegen S konvergieren, also für genügend hohen Index k: $(Q^k, S) < \varepsilon$. Aus der Regularität von R ergibt sich $(R^k, Q^k) < \varepsilon$ und also $(R^k, S) < 2\varepsilon$, für alle genügend hohe Indizes k, gegen Annahme.

Daraus folgt, daß die Menge derjenigen regulären Punkte Q, deren sukzessive Bilder $Q^1, Q^2, \ldots$ gegen S konvergieren, in der Menge aller regulären Punkte eine offene und zugleich eine abgeschlossene Menge bildet, m. a. W., daß die zwei Mengen identisch sind. Damit ist der Satz 4 bewiesen; darin ist enthalten, daß *S der einzige Attraktionspunkt für t ist.*

5. *Sei P ein solcher regulärer Punkt, für welchen sämtliche Häufungspunkte der Menge $\{P^n\}$ singuläre Punkte sind.* (Nach 3 gibt es mindestens einen solchen Punkt P.) *Die Punkte $P^1, P^2, \ldots$ konvergieren gegen einen (singulären) Punkt S_1; die Punkte $P^{-1}, P^{-2}, \ldots$ konvergieren gegen einen von S_1 verschiedenen singulären Punkt S_2.*

Seien $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ die singulären Punkte. Einen solchen unter diesen Punkten, der Häufungspunkt von $P^1, P^2, \ldots$ ist, bezeichnen wir mit S_1. Da die singulären Punkte bei t ineinander übergehen, gibt es einen kleinsten Index k, für welchen $t^k(S_1) = S_1$ ist. Bestimmen wir eine positive Zahl 2ε auf die folgende Weise: erstens sollen die ε-Umgebungen $U_1, U_2, \ldots, U_\nu$ von $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ paarweise fremd sein; zweitens soll das bei t^k entstehende Bild $t^k(U_1)$ von U_1 zu $U_2, U_3, \ldots, U_\nu$ fremd sein (Letzteres ist zufolge der Stetigkeit von t^k in S_1 möglich).

Wenn n hinreichend groß ist, so liegen sämtliche Punkte $P^n, P^{n+1}, P^{n+2}, \ldots$ in den Umgebungen $U_1, U_2, \ldots, U_\nu$. Wenn P^r zu U_1 gehört, so liegt P^{r+k} in $t^k(U_1)$, und da $t^k(U_1)$ zu $U_2, U_3, \ldots, U_\nu$ fremd ist, gehört P^{r+k} sicher nicht zu $U_2, U_3, \ldots, U_\nu$, sondern zu U_1 selbst. Daraus folgt, daß mit P^r alle Punkte $P^{r+k}, P^{r+2k}, \ldots$ zu U_1 gehören, und also gegen S_1 konvergieren. Laut des Satzes 4 ist S_1 ein Attraktionspunkt für t^k.

Wäre aber $k > 1$, so sei etwa $t(S_1) = S_1'$. Die Punkte $P^{r+1}, P^{r+k+1}, P^{r+2k+1}, \ldots$ konvergieren gegen S_1', so daß S_1' ein weiterer Attraktionspunkt für t^k wäre. Das widerspricht dem Satz 4. Daraus folgt, daß $k = 1$, also daß S_1 bei t invariant und laut des Satzes 4 für t ein Attraktionspunkt ist.

Aus dem Bewiesenen folgt gleich, daß die Folge $P^{-1}, P^{-2}, \ldots$ gegen einen singulären Punkt konvergiert.

Nach der zu Anfang 3. 5 gemachten Bemerkung gibt es zu jedem singulären Punkt S_2 mindestens einen solchen regulären

Punkt P, für welchen die Menge $\{P^n\}$ den Punkt S_2 zu Häufungspunkt hat. Da die Punkte $P^1, P^2, \ldots$ gegen S_1 konvergieren, hat also die Menge $P^{-1}, P^{-2}, \ldots$ den Punkt S_2 zu Häufungspunkt, und nach dem obigen Beweis konvergiert sogar die Folge P^{-1}, $P^{-2}, \ldots$ gegen den Punkt S_2. Nach 4 folgt daraus, daß für jeden regulären Punkt Q die Folge $Q^{-1}, Q^{-2}, \ldots$ gegen S_2 konvergiert.

5. 1 Zugleich ergibt sich, daß *t außer S_1 und S_2 keine anderen singulären Punkte hat.* Für jeden regulären Punkt P ist nämlich die Ableitung der Menge $\{P^n\}$ mit dem Punktpaar (S_1, S_2) identisch.

6. Sei c eine einfache geschlossene Kurve, die die beiden singulären Punkte S_1 und S_2 voneinander trennt. Bezeichne 2ε eine beliebige positive Zahl, die kleiner ist, als der Abstand des Punktes S_1 von der Kurve c.

Ich behaupte, daß es einen Index $n\,(>0)$ gibt, für welchen die Kurve c^n und auch jede Kurve $c^{n+k}\,(k>0)$ ganz in der ε-Umgebung von S_1 verläuft; c und c^n haben dann keinen gemeinsamen Punkt. Wenn P ein beliebiger Punkt von c ist, so gibt es einen kleinsten Index ν, so daß alle Punkte $P^\nu, P^{\nu+1}, \ldots$ in der ε-Umgebung von S_1 liegen. Gäbe es keinen Index n von der Art, daß für jeden Punkt P von c die Punkte $P^n, P^{n+1}, \ldots$ sämtlich in der ε-Umgebung von S_1 liegen, so gibt es eine Folge von Punkten $P_1, P_2, \ldots$ von c, und zugehörige Indizes $\nu_1 < \nu_2 < \ldots$ von der Art, daß $P_1^{\nu_1}, P_2^{\nu_2}, \ldots$ sämtlich in Abstand $\geqq \varepsilon$ von S_1 liegen. Wir können annehmen, daß sämtliche Punkte $P_k^{\nu_k}$, bis auf endlich viele, von S_1 den Abstand ε haben. Sei nämlich P_0 ein Punkt von c und ν_0 ein solcher Index, daß sämtliche Punkte $P_0^{\nu_0}, P_0^{\nu_0+1}$, $P_0^{\nu_0+2}, \ldots$ zu der ε-Umgebung von S_1 gehören. Von einem gewissen Index k ab ist $\nu_k > \nu_0$; wenn der Abstand $(P_k^{\nu_k}, S_1) > \varepsilon$ ist, so schneidet das bei t^{ν_k} entstehende Bild des Bogens $P_0 P_k$ von c den Kreis $C(S_1, \varepsilon)$; es gibt also auf diesem Bogen von c einen Punkt $\bar{P}_k$, für welchen $(\bar{P}_k^{\nu_k}, S_1) = \varepsilon$ ist; wir ersetzen den Punkt P_k durch diesen Punkt $\bar{P}_k$ und bezeichnen ihn weiterhin mit P_k. Sei P ein Häufungspunkt der Folge $P_1, P_2, \ldots$; laut der Regularität von P läßt sich eine Zahl $\delta > 0$ für den Punkt P zur Zahl $\varepsilon/2$ bestimmen. Bezeichne ν den kleinsten Index, für welchen sämtliche Punkte $P^\nu, P^{\nu+1}, P^{\nu+2}, \ldots$ in der $\varepsilon/2$-Umgebung von S_1 liegen. Sei P_r ein Punkt der obigen Folge, der von P einen Abstand $<\delta$ hat, mit genügend hohem Index r, so daß die zugehörige Zahl $\nu_r > \nu$ sei. Zufolge der Regularität ist dann $(P_r^{\nu_r}, P^{\nu_r}) < \varepsilon/2$; weil ferner $\nu_r > \nu$, so ist $(P^{\nu_r}, S_1) < \varepsilon/2$, also $(P_r^{\nu_r}, S_1) < \varepsilon$, was ein Widerspruch ist.

Daraus folgt, daß *für eine bestimmte Zahl n (>0) die Kurve c^n und auch jede Kurve c^{n+k} ($k>0$) ganz in der ε-Umgebung von S_1 verläuft. Insbesondere konvergieren die Kurven $c^1, c^2, \ldots$ gegen den Punkt S_1.*

7. Unser nächster Zweck ist, *eine solche einfache geschlossene Kurve C* zu konstruieren, *deren bei t entstehendes Bild C^1 ganz im Innern von C liegt.*

7. 1 *Wir konstruieren eine einfache geschlossene Kurve γ, deren bei t entstehendes Bild γ^1 keinen Punkt im Äußern von γ hat.* Sei c eine einfache geschlossene Kurve, die die Punkte S_1 und S_2 voneinander trennt und bezeichne n den kleinsten Index, für welchen die Kurve c^n ganz im Innern von c liegt. Betrachten wir das von den Kurven $(c, c^1, \ldots, c^{n-1})$ bestimmte, den Punkt S_1 enthaltende Gebiet; sein Rand ist eine einfache geschlossene Kurve γ. Das Bild des Innern von γ ist dasjenige von den Kurven $(c^1, c^2, \ldots, c^n)$ bestimmte Gebiet, welches S_1 enthält; dieses ist ein Teilgebiet des Innern von γ, da c^n im Innern von c liegt. Also ist der Rand des von $(c^1, c^2, \ldots, c^n)$ bestimmten den Punkt S_1 enthaltenden Gebietes eine einfache geschlossene Kurve γ^1, die keinen Punkt im Äußern von γ hat. γ^1 ist das Bild von γ bei t.

7. 2 γ und γ^1 können gemeinsame Punkte haben. Sei ν der kleinste Index, für welchen γ^ν und γ keinen gemeinsamen Punkt haben; γ^ν liegt im Innern von γ. Aus der Beziehung $\gamma^1 \subseteq \gamma$ folgt: $\gamma^\nu \subset \gamma^{\nu-1} \subset \ldots \subset \gamma^1 \subset \gamma$. Die gemeinsamen Punkte von γ^1 und γ^ν bilden eine abgeschlossene Menge, die zu γ fremd ist. Wir können also eine endliche Anzahl von paarweise fremden Bögen b von γ^1 bestimmen von der folgenden Beschaffenheit: 1) kein Bogen b hat einen Punkt mit γ gemein; 2) jeder gemeinsame Punkt von γ^1 und γ^ν ist ein innerer Punkt eines Bogens b. Jeden Bogen b ersetzen wir durch einen einfachen Bogen b^*, der sehr nahe bei b verläuft, dieselben Endpunkte wie b hat, und so beschaffen ist, daß 1) b^* ganz im Innern von γ und bis auf Endpunkte ganz im Äußern von γ^1 verläuft, 2) die verschiedenen Bögen b^* zu je zwei fremd sind. Bezeichne β^1 die einfache geschlossene Kurve, die aus γ^1 durch Ersetzen der Bögen b durch die Bögen b^* ent-

steht. Laut Konstruktion bestehen dann die folgenden Beziehungen:

$$\gamma^1 \subset \beta^1 \subset \gamma; \quad \beta^1 \times \gamma^\nu = 0\,^{15}); \quad \beta^1 \times \gamma = \gamma^1 \times \gamma.$$

Bezeichne β^r das bei t^{r-1} entstehende Bild von β^1; aus den obigen Beziehungen folgt unmittelbar:

$$\beta^{\nu-1} \subset \gamma^{\nu-2} \subset \gamma \subset \beta; \quad \beta^{\nu-1} \times \gamma^{\nu-2} = \gamma^{\nu-1} \times \gamma^{\nu-2}.$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} \beta \times \beta^{\nu-1} &= \beta \times \gamma^{\nu-2} \times \beta^{\nu-1}, \text{ weil } \beta^{\nu-1} \subset \gamma^{\nu-2} \subset \beta; \\ &= \beta \times \gamma^{\nu-2} \times \gamma^{\nu-1}, \text{ weil } \gamma^{\nu-2} \times \beta^{\nu-1} = \gamma^{\nu-2} \times \gamma^{\nu-1}; \\ &= \beta \times \gamma^{\nu-1} = 0, \quad \text{ weil } \beta^1 \times \gamma^\nu = 0. \end{aligned}$$

Auf diese Weise haben wir eine einfache geschlossene Kurve β erhalten, für welche $\beta^1 \subset \beta$ und $\beta^{\nu-1} \times \beta = 0$ besteht. Indem wir das Verfahren, durch welches wir aus der Kurve γ die Kurve β konstruiert haben, wiederholt (höchstens $\nu-1$-mal) anwenden, erhalten wir schließlich eine Kurve C, für welche $C^1 \subset C$, und $C^1 \times C = 0$ ist.

8. Die sukzessiven Bilder $C^0, C^1, C^2, \ldots$ von $C = C^0$ konvergieren gegen S_1; die invers sukzessiven Bilder $C^{-1}, C^{-2}, \ldots$ gegen S_2.

Bilden wir die Kurven C^n topologisch auf die Kreislinien $|z| = 2^n$ der komplexen z-Ebene ab, so daß für jeden Punkt P von c alle Punkte der Menge $\{P^n\}$ in Punkte von gleichem Arcus übergehen. Ergänzen wir die Abbildungen von C und C^1 für ihr Zwischengebiet topologisch; sei P ein beliebiger zwischen C und C^1 liegender Punkt, z der ihm entsprechende Punkt in der z-Ebene; dem Punkt P^n ordnen wir dann den Punkt $2^n z$ der z-Ebene zu.

Mittels dieser topologischen Abbildung der Kugel auf die z-Ebene erweist sich die gegebene Abbildung t der Kugel auf sich als der Ähnlichkeitstransformation $z' = 2z$ homöomorph. Das Resultat dieses Paragraphen fassen wir im folgenden Satz zusammen:

III. *Eine topologische Abbildung der Kugel auf sich mit erhaltendem Umlaufssinn, die nur endlich viele, aber mindestens zwei singuläre Punkte hat, ist einer hyperbolischen linearen Transformation homöomorph.*

Szeged, 12. Januar 1934.

(Eingegangen am 14. Januar 1934.)

---

[15]) $A \times B$ bezeichne, wie üblich, die Menge der gemeinsamen Punkte der Mengen A und B.

Bibliographie.

Compositio Mathematica, Volumen 1, Fasciculus 1, Groningen, P. Noordhoff, 1934.

Nous venons de recevoir le premier fascicule d'un recueil nouveau, édité dans les Pays-Bas sous le titre ci-dessus et sous la direction de MM. BIEBERBACH, BROUWER, DE DONDER, JULIA et WILSON par un comité de rédaction composé de 47 géomètres des divers pays. Voici la liste des travaux imprimés dans le fascicule acteul: PAUL LÉVY, Sur la convergence absolue des séries de FOURIER; J. G. VAN DER CORPUT, Zur Methode der stationären Phase (erste Mitteilung: einfache Integrale); G. N. WATSON, Generating Functions of Class-Numbers; R. WAVRE, Sur les polydromies que présentent les potentiels newtoniens lorsqu'ils sont prolongés au travers des corps générateurs; GUSTAV DOETSCH, Summatorische Eigenschaften der Besselschen Funktionen und andere Funktionalrelationen, die mit der linearen Transformationsformel der Thetafunktion äquivalent sind; EINAR HILLE and J. D. TAMARKIN, A Remark on FOURIER Transforms and Functions Analytic in a Half-Plane; G. FUBINI, Sur la géometrie projective des réseaux plans; J. v. NEUMANN, Zum Haarschen Maß in topologischen Gruppen; T. LEVI-CIVITA, Terne di congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria; G. BOURION, Sur les zéros des polynomes-sections d'une série de TAYLOR; A. KHINTCHINE, Eine Verschärfung des Poincaréschen „Wiederkehrsatzes"; L. S. BOSANQUET and A. C. OFFORD, Note on FOURIER Series; ALFRED LOEWY, Anschauliche Interpretation eines linearen homogenen Differentialsystems.

David Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, erster Band: Zahlentheorie, XIV + 539 S., Berlin, J. Springer, 1932.

Die ganze mathematische Welt wird die Veranstaltung der Gesamtausgabe von Hilberts Werken mit Freude begrüßen, wegen ihrer grundlegenden Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik.

Der erste Band enthält Hilberts Werke über Zahlentheorie. Das Verzeichnis der in diesem Band abgedruckten Arbeiten möge hier stehen: 1. Über die Transzendenz der Zahlen e und π, 2. Zwei neue Beweise für die Zerlegbarkeit der Zahlen eines Körpers in Primideale, 3. Über die Zerlegung der Ideale eines Zahlkörpers in Primideale, 4. Grundzüge einer Theorie des Galoisschen Zahlkörpers, 5. Über den Dirichletschen biquadratischen Zahlkörper, 6. Ein neuer Beweis des Kroneckerschen Fundamentalsatzes über Abelsche Zahlkörper, 7. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper (sog. Zahlbericht), 8. Über die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper, 9. Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers, 10. Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper, 11. Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen (Waringsches Problem).

In einem Anhang gibt H. HASSE einen Überblick über die Entwicklung der Zahlentheorie bis in unsere Tage und zeigt, in welchem Maße diese Entwicklung durch das Hilbertsche Programm gefördert wird. Aus diesem vorzüglichen Artikel seien hier die folgenden Zeilen angeführt:

„Hilberts Arbeiten zur algebraischen Zahlentheorie stehen nicht nur rein zeitlich, sondern auch inhaltlich betrachtet an der Wende zweier Jahrhunderte. Sie heben einerseits mit klarem, aufs Große gerichtetem Blick die den Arbeiten der Zahlentheoretiker des alten Jahrhunderts zugrunde liegenden Probleme in großer Allgemeinheit heraus, behandeln sie in dieser Allgemeinheit mit großenteils neuartigen Methoden, die den früheren an Eleganz und Einfachheit weit überlegen sind, und werden so andrerseits richtungsweisend für die im neuen Jahrhundert einsetzende Entwicklung, die in den von HILBERT überall mit wundernswerter Weitsicht vorgezeichneten Bahnen zu einer abschließenden Behandlung dieses Problemkreises geführt hat."

B. v. K.

Sonderausgaben aus den Sitzungsberichten der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Klasse, Berlin, Verlag der Akademie der Wissenschaften, in Kommision bei Walter de Gruyter & Co.

Seit mehreren Jahren sind die in den *Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften* erscheinenen Arbeiten auch einzeln käuflich. Nachstehend die Liste der bisher eingegangenen Sonderausgaben.

L. BIEBERBACH und I. SCHUR, Über die Minkowskische Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen. — W. SÜSS, Lokale Kennzeichnung der Ellipsoide unter den Affinsphären. — G. HOHEISEL, Nullstellenanzahl und Mittelwerte der Zetafunktion. — A. HEYTING, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. — A. HEYTING, Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik (in zwei Mitteilungen). — L. BIEBERBACH, Bericht über das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. — E. REMBS, Unverbiegbare offene Flächen. — G. DOETSCH, Sätze von Tauberschem Charakter im Gebiet der Laplace- und Stieltjes-Transformation. — R. BRAUER und I. SCHUR, Zum Irreduzibilitätsbegriff in der Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen. — S. BOCHNER, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. — M. SADOWSKY, Ein elementarer Beweis für die Existenz eines abwickelbaren Möbiusschen Bandes und Zurückführung des geometrischen Problems auf ein Variationsproblem. — I. SCHUR, Gleichungen ohne Affekt. — O. SZÁSZ, Über einen Satz von HARDY und LITTLEWOOD. — A. WINTERNITZ, Über die affine Grundlage der Metrik eines Variationsproblems. — P. KOEBE, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen, sechste Mitteilung: Elementarsynthese der allgemeinen singularitätenbehafteten Raumformen endlicher Signatur. — F. LÖBELL, Einige Eigenschaften der Geraden in gewissen Clifford-Kleinschen Räumen. —

G. HOHEISEL, Primzahlprobleme in der Analysis. — A. BRAUER, Über Sequenzen von Potenzresten II. — W. SÜSS, Die Isoperimetrie der mehrdimensionalen Kugel. — A. SCHOLZ, Die Abgrenzungssätze für Kreiskörper und Klassenkörper. — W. FENCHEL, Bemerkungen über die im Einheitskreis meromorphen schlichten Funktionen. — A. HAMMERSTEIN, Über Entwicklungen nach orthogonalen Funktionen eines unendlichen Intervalls. — A. KORN, Über Reihenentwicklungen nach Besselschen Funktionen. — P. KOEBE, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen, siebente Mitteilung: Singularitätenbehaftete Absolutmessung Riemannscher Mannigfaltigkeiten; Kontinuitätsmethode. — J. E. HOFMANN und H. WIELEITNER, Die Differenzenrechung bei LEIBNITZ (mit Zusätzen von D. MAHNKE). — W. MAYER, Beitrag zur Differentialgeometrie l-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, die in euklidischen Räumen eingebettet sind. — G. HOHEISEL, Kurvenfelder bei Differentialgleichungen erster Ordnung. — N. WIENER und E. HOPF, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. — H. FREUDNTHAL, Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen. — E. HOPF, Über lineare Gruppen unitärer Operatoren im Zusammenhange mit den Bewegungen dynamischer Systeme. — P. KOEBE, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen, achte Mitteilung: Erweiterung der Aufbautheorie und der Metrisierungstheorie; Konvexformen und Konkavformen. — E. SCHMIDT, Über den Millouxschen Satz. — W. FELLER, Allgemeine Maßtheorie und Lebesguesche Integration. — H. REICHENBACH, Wahrscheinlichkeitslogik. — E. LANDAU, Über den Wienerschen neuen Weg zum Primzahlsatz. — H. GRÖTZSCH, Über zwei Verschiebungsprobleme der konformen Abbildung. — S. BOCHNER, Umkehrsätze für allgemeine Limitierungsverfahren. — C. CARATHÉODORY, Die Kurven mit beschränkten Biegungen. — I. SCHUR, Ein Beitrag zur elementaren Zahlentheorie. — D. FOG, Über den Vierscheitelsatz und seine Verallgemeinerungen. — A. HAMMERSTEIN, Über die Approximation von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher durch Polynome. — T. LEVI-CIVITA, Diracsche und Schrödingersche Gleichungen. — F. BEHREND, Über numeri abundantes II. — S. BOCHNER, Spektralzerlegung linearer Scharen unitärer Operatoren. — B. NEUMANN, Über ein gruppentheoretisch-arithmetisches Problem. — L. BIEBERBACH, Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variabeln, welche eine schlichte volumtreue Abbildung des R_4 auf einen Teil seiner selbst vermitteln. — H. GRÖTZSCH, Die Werte des Doppelverhältnisses bei schlichter konformer Abbildung. — R. RADO, Verallgemeinerung eines Satzes von VAN DER WAERDEN mit Anwendungen auf ein Problem der Zahlentheorie. — I. SCHUR, Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. — H. GRÖTZSCH, Über die Geometrie der schlichten konformen Abbildung (in zwei Mitteilungen). — G. HOHEISEL, Methodische Bemerkungen zur Theorie der linearen Integralgleichungen. — W. HUREWICZ, Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen cartesischer Räume. — H. SEIFERT, Verschlingungsinvarianten. — H. DAVENPORT, Über numeri abundantes. — G. AUMANN, Satz über das Verhalten von Polynomen auf Kontinuen.

Gerhard Kowalewski, Interpolation und genäherte Quadratur, eine Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, V + 146 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1932.

„Interpolation und genäherte Quadratur sind zwei große und wichtige Probleme, die den reinen und anwendenden Mathematiker in gleichem Maße interessieren." . . . „Es hat sich der Gebrauch eingebürgert, Interpolation und genäherte Quadratur im Rahmen der Differenzenrechnung zu behandeln. Daher findet man in den großen Darstellungen der Differential- und Integralrechnung nur kurze Andeutungen darüber." . . . „Ich löse die beiden Probleme ganz aus der Differenzenrechnung heraus und bringe die Ergebnisse auf eine neue Form, wodurch vor allem genauere Fehlerschätzungen ermöglicht werden." (Aus dem Vorwort.)

Das Buch behandelt, im Sinne des obigen Programms, die Newton-Lagrangesche Interpolationsformel sowie deren Grenzfälle bei Zusammenrücken der Interpolationsstellen, insbesondere das Taylorsche Theorem; ferner gewisse Quadraturformeln wie Trapezregel, Simpsonsche und Maclaurinsche Regel, Newtons „Lieblingsformel" und die allgemeine Newton-Cotessche Quadraturformel; schließlich die Euler-Maclaurinschen und Booleschen Entwicklungssätze nebst deren Anwendungen zur Herleitung von Quadraturformeln. Die Darstellung ist leicht verständlich; außer der Differential- und Integralrechnung werden nur die ersten Elemente der Integralgleichungstheorie vorausgesetzt. Es wird großes Gewicht auf die Integraldarstellungen und ϑ-Darstellungen („Einschließungssätze") der Fehlerglieder gelegt; manche dieser Darstellungen sind neu.

Man sucht aber im Buche vergebens eine Erörterung der Frage, ob die Interpolationspolynome bei unbegrenzter Verdichtung der Koinzidenzpunkte zur interpolierten Funktion konvergieren, und der entsprechenden Frage bei genäherter Quadratur. Man findet nur die kurze Andeutung: „Das so gewonnene Resultat" (die man erhält, wenn die Funktion bei gewissen Operationen durch das Interpolationspolynom ersetzt wird) „wird dann, so gesagt das mathematische Gefühl, von dem eigentlich gewünschten um so weniger abweichen, je enger sich das Polynom an die betrachtete Funktion anschließt, je zahlreicher und dichter die Koinzidenzen erscheinen. Liegen sie sehr dicht, so wird unser Auge die Bildkurve der Funktion und die Bildkurve des Polynoms überhaupt nicht mehr voneinander trennen können." (Auch dann nicht, wenn das Polynom zwischen den Koinzidenzpunkten wellenmäßig auf- und absteigt?) Diese Andeutung ist geeignet, die irrige Ansicht zu erwecken, die Konvergenzfragen seien immer in bejahendem Sinne zu beantworten. Dies stimmt bekanntlich nicht; und es handelt sich dabei nicht um pathologische Gegenbeispiele, die mit der Praxis nicht zu tun haben, die nur der finden kann, der unbedingt ein Gegenbeispiel sucht; seit mehreren Jahrzehnten weiß man vielmehr, auf Grund wichtiger Untersuchungen des führenden Forschers der angewandten Mathematik C. RUNGE, daß auch bei einer im Grundintervall regulären analytischen Funktion und bei äquidistanten Verteilung der Koinzidenzpunkte in einem Teil des Intervalles Divergenz stattfinden kann. (Ähnlich steht die Sache bei den „Elementarfällen" von Quadraturformeln; teilt man aber das Intervall und wendet sie für die Teilintervalle an, so konvergiert — unter naheliegenden Bedingungen — die Summe der Quadraturwerte bei unbegrenzter Verfeinerung der Teilung tatsächlich gegen den Integralwert.) Es handelt sich hierbei um einen Umstand, worum auch der Praktiker nicht uninteressiert ist. Es kommt zwar in der Praxis nie auf beliebig kleine Epsilons hinaus, so daß der Praktiker nur eine gute Fehlerabschätzung, nicht aber einen reinen Konvergenzbeweis verwenden kann. Aber auch der Praktiker will oft wissen, ob die gewählte Interpolationsmethode auch dann brauchbar bleibt, falls der Genauigkeit stärkere Ansprüche gestellt werden; diese Frage kann nur durch einen Konvergenzbeweis vollkommen beruhigend erledigt werden.

Eine schöne Probe für die Brauchbarkeit der Kowalewskischen Fehlerformeln würde sein, in der zweiten Auflage zu zeigen, wie sie sich auch bei Konvergenzuntersuchungen bewähren.

L. Kalmár.

P. W. Bridgman, Theorie der physikalischen Dimensionen, Ähnlichkeitsbetrachtungen in der Physik, deutsch von H. Holl, VI + 117 S, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1932.

In einem einleitenden Kapitel werden Beispiele — unter ihnen die bekannte Herleitung der Formel der Schwingungsdauer des einfachen Pendels aus Ähnlichkeitsbetrachtungen — behandelt, die dem Anfänger die Notwendigkeit und Benützbarkeit einer Dimensionsanalysis klarstellen und auf die hier auftauchenden Fragen hinzeigen.

Im Kapitel II wird die Definition der Grundgröße gegeben und dann aus dem Grundpostulat, daß die relativen Größen eine absolute Bedeutung besitzen sollen, hergeleitet, daß die Dimensionsformel, d. h. die Dimension einer abgeleiteten Größe immer die Form: eine Konstante multipliziert mit irgendwelchen Potenzen der Grundgrößen hat. Die Dimensionen einer Größe sind also keine absoluten Dinge, sondern sie sind verschieden je nach dem man das System der Grundgrößen, das Maßsystem, gewählt hat. Im Kapitel III wird dann die Verwendung der Dimensionsformeln beim Übergang zu neuen Einheiten besprochen.

Kapitel IV ist der Behandlung des Π-Theorems gewidmet, dessen Brauchbarkeit bei der Behandlung der Dimensionskonstanten und der Zahl der Grundeinheiten (Kapitel V) zum Ausdruck kommt.

In den folgenden Kapiteln (VI—VIII.) werden verschiedene Beispiele zur Dimensionsanalysis sowie Anwendungen auf Modellversuche in der Technik und in der theoretischen Physik ausführlich behandelt, die das Verständnis erleichtern und das Buch zu einer spannenden und lehrhaften Lektüre machen. Am Ende wird eine Sammlung von Aufgaben beigefügt, deren Ausarbeitung einem jeden zu raten ist, und in einem Anhang werden die Dimensionen der am häfigsten vorkommenden Größen zusammengestellt. Ein Sach- und Namenverzeichnis erhöht die Brauchbarkeit des Buches.

Möge das Buch im interessierten physikalischen Leserkreis einen so großen Beifall finden, wie es verdient.

F. Bukovszky.

Ludwig Bieberbach, Differentialgeometrie (Teubners math. Leitfäden, Band 31), VI + 140 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1932.

Das Büchlein gibt eine vorzügliche Einführung in die Differentialgeometrie der Kurven und Flächen. Es ist bemerkenswert, wie reicher Stoff in dem kleinen Buch in ausführlicher und leicht verständlicher Darstellung geboten wird. Eine konsequent angewendete Bezeichnungsweise, die bereits in der „Analytischen Geometrie" des Verfassers benutzt wurde, macht die Betrachtungen und die Formeln übersichtlich. Eine sehr geschickt zusammengestelle Formelsammlung befindet sich am Schluß. — Das Buch ist für ein erstes und doch gründliches Studium der Differentialgeometrie jedem Student der Mathematik aufs Wärmste zu empfehlen.

B. v. K.

Julio Rey Pastor, Teoria geométrica de la polaridad en las figuras de primera y segunda categoria, VIII + 294 pp., Madrid, Talleres Voluntad, 1929.

Dans le volume présent, oeuvre couronnée par l'Académie des Sciences à Madrid en 1912, l'auteur expose la théorie de la polarité dans l'esprit de la géometrie projective classique.

B. de K.

Reprinted by arrangement with the publishers
„KULTURA" Hungarian Trading Company
foor Books and Newspapers
Budapest, POB. 149.
Hungary

623427. Terv Nyomda