ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS DE ATTILA JÓZSEF NOMINATAE
ACTA IUVENUM
SECTIO SCIENTIAE NATURALIS, SERIES NOVA, TOMUS I.
SZEGED, HUNGARIA, 1987

GRÁFOK PARTÍCIÓI

HAJNAL PÉTER

BEVEZETÉS

Győri Ervin a VI. Magyar Kombinatorikai Kollokviumon (Eger, 1981) vetette fel a következő problémát: létezik-e olyan $f(s,t)$ szám, hogy tetszőleges $f(s,t)$-szeresen összefüggő gráf pontjait két nem üres S, T osztályba oszthatjuk úgy, hogy a S, illetve T osztály által feszített gráf s, illetve t-szeresen összefüggő legyen. Thomassen [1] cikkében és tőle függetlenül, vele egyidőben Szegedy Márió [2] is megoldotta a problémát. Thomassen megoldásában a következő $g(s,t)$ szám létezését is bebizonyítja: tetszőleges egyszerű gráf pontjai, amelyben minden pont foka legalább $g(s,t)$, feloszthatók két nem üres S, T osztályra úgy, hogy az osztályok által feszített gráfokban minden pont foka legalább s, illetve t legyen. Ezek után legyen $f(s,t)$, illetve $g(s,t)$ a minimális fenti tulajdonságú szám. Thomassen bizonyításából ezekre a függvényekre lineáris, de igen durva becslések adódtak. Ebben a dolgozatban ezeket az eredményeket fogjuk javítani és hasonló partíció problémát vizsgálunk. Egyik bizonyításunkhoz egy Mader által régebben vizsgált kérdésre is szükségünk lesz, amiben szintén erősítjük az eddigi eredményeket.

JELÖLÉSEK

Legyen G egy gráf, $V(G)$ pontjainak halmaza, $E(G)$ éleinek halmaza, S részhalmaza $V(G)$ halmaznak, $x,y \in V(G)$. Ekkor a következő jelöléseket vezetjük be: $G(S)$ az S által feszített részgráf; $e(S)$ a $G(S)$ gráf éleinek száma; $e(x,S)$ az xy élek száma, ahol $y \in S$; $e(xy)$ az xy élek száma; $d(S)$ a $G(S)$ gráf minimális fokszáma; $d(x)$ az x pont foka; $\{S,T\}$ partíció, ha $S\cap T=\emptyset$, $S\cup T=V(G)$ és $S,T\neq\emptyset$. Megjegyezzük, hogy G a 2.3. rész kivételével mindig egyszerű gráfot jelöl. $V(G)$-t és G-t nem mindig különböztetjük meg.

GRÁFOK PARTÍCIÓJA FOKSZÁM FELTÉTELEK MELLETT

A $g(s,t)$ függvény becslése

1. TÉTEL. *Ha $s\geq 4$, akkor $g(s,t)\leq t+2s-3$.*

BIZONYÍTÁS. Azt kell belátnunk, hogy ha G olyan egyszerű gráf, melyre $d(V(G))\geq t+2s-3$, akkor létezik olyan $\{S,T\}$ partíció, hogy $d(S)\geq s$ és $d(T)\geq t$.

Legyen S a következő tulajdonságú halmazok közül a minimális elemszámú, illetve ha több ilyen van, akkor az, amelyre $e(S)$ maximális:

$$\left.\begin{array}{l} e(S)>(s-1)\,|S|-\dfrac{s(s-1)}{2} \\ |S|\geq s \end{array}\right\}(*)$$

A fenti tulajdonságú S halmaz létezik, hiszen $V(G)$ ilyen. Ezek közül a minimális elemszámú biztos nem $V(G)$ ($t=1$ eset triviális, úgy feltehetjük, hogy $t\geq 2$), hiszen tetszőleges $x\in V(G)$-re:

$$d(V(G)\setminus\{x\})\geq t+2s-4,$$

azaz $(t\geq 2)$

$$e(V(G)\setminus\{x\})\geq\frac{t+2s-4}{2}|V(G)\setminus\{x\}|\geq(s-1)\,|V(G)\setminus\{x\}|.$$

Így a fenti S halmaz és $T=V(G)\setminus S$ egy $\{S,T\}$ partíciót ad. Belátjuk, hogy ez megfelelő partíció.

Először is megjegyezzük, hogy ha S $(*)$-nak eleget tevő halmaz, akkor $|S|\geq s+1$, hiszen $|S|=s$ esetén

$$e(S)>(s-1)s-\frac{s(s-1)}{2}=\frac{s(s-1)}{2}$$

lenne, ami nem lehet. Így ha S minimális $(*)$-nak eleget tevő halmaz, akkor minden $x\in S$-re $S\setminus\{x\}$ nem elégítheti ki $(*)$ első feltételét, azaz

(1) $$e(S\setminus\{x\})\leq(s-1)\,|S\setminus\{x\}|-\frac{s(s-1)}{2}.$$

Ezek után $d(S)\geq s$ könnyen adódik. Legyen x S-ben minimális fokszámú pont, és tegyük fel, hogy $d(x)<s$. Ekkor ezt kivéve S-ből

$$e(S\setminus\{x\})>(s-1)\,|S|-\frac{s(s-1)}{2}-(s-1)=(s-1)\,|S\setminus\{x\}|-\frac{s(s-1)}{2},$$

ami ellentmond (1)-nek.

Másrészt a minimális fokszámú x pontot kivéve S-ből:

(2) $$e(S)-d(S)\leq(s-1)\,|S\setminus\{x\}|-\frac{s(s-1)}{2}=(s-1)\,(|S|-1)-\frac{s(s-1)}{2}.$$

Azaz

$$\frac{|S|\,d(S)}{2}\leq e(S)\leq(s-1)\,(|S|-1)-\frac{s(s-1)}{2}+d(S).$$

Ebből adódik, hogy:

$$d(S)\leq(2s-2)\frac{|S|-1-\frac{s}{2}}{|S|-2}.$$

Tehát az $s\geq3$ esetben:

$$d(S)<2s-2,\text{ azaz } d(S)\leq 2s-3.$$

Ezek után belátjuk, hogy $T=V(G)-S$ pontjaiból kevés él megy S-hez. Legyen D a $V(G)-S$ pontjaiból S-hez vezető élek számának maximuma, és y az a pont, amelyből D él megy S-hez. Belátjuk, hogy $D\leq 2s-3$.

Két esetet vizsgálunk:

1. eset: $d(S)\leq 2s-4$. Ekkor $D>2S-3$ esetén, cseréljük ki S-ben x-et y-ra: kapjuk az S' halmazt. S'-ben az élszám nő, az elemek száma nem változik, tehát az új halmaz is eleget tesz $(*)$-nak. Így $e(S)$ maximalitására tett feltételünkkel ellentmondásra jutottunk. Ez $D\leq 2s-3$-t bizonyítja.

2. eset: $d(S)=2s-3$. Ha $D\geq 2s-1$, akkor a fenti módon x,y cseréje ismét ellentmondásra vezet. Ha $D=2s-2$, akkor ha találunk S-ben olyan $2s-3$-adfokú pontot, amely nincs összekötve y-nal, ismét elvégezhetjük y-nak és ennek cseréjét. Ha ilyen pontot nem találunk S-ben, akkor y-nak $2s-2$ szomszédján kívül S-ben minden pont foka legalább $2s-2$. Így

$$e(S) \geq \frac{(2s-2)(2s-3)+(|S|-(2s-2))(2s-2)}{2} = (s-1)(|S|-1).$$

De (2)-ből

$$e(S) \leq (s-1)(|S|-1) - \frac{s(s-1)}{2} + d(S) = (s-1)(|S|-1)+2s-3-\frac{s(s-1)}{2}.$$

Tehát

$$2s-3-\frac{s(s-1)}{2} \geq 0,$$

$$0 \geq s^2-5s+6=(s-2)(s-3).$$

Ez $s \geq 4$ miatt nem lehet. Tehát $D=2s-2$ is ellentmondásra vezetett, ami azt bizonyítja, hogy $D \leq 2s-3$. Így beláttuk, hogy T-ben minden pont foka legalább t. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Valójában a következő állítást láttuk be:

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen G egy gráf, amely minimális foka legalább $2s-1$ $(s \geq 4)$ és legyen S olyan ponthalmaz, hogy $|S|$ minimális és $e(S)$ maximális a $(*)$ feltétel mellett. Ekkor S, $V(G) \setminus S$ nem üres halmazok, S minden pontjának foka legalább s és $V(G) \setminus S$ minden pontjából legfeljebb $2s-3$ él megy S-hez.*

MEGJEGYZÉSEK

1. s, t felcserélésével adódik, hogy $g(s,t) \leq 2t+s-3$, azaz ha $\min(s,t) \geq 4$, akkor $g(s,t) \leq s+t-3+\min(s,t)$.

2. Egyszerűen kiolvasható a bizonyításból, hogy ha $s=3$, akkor $g(s,t) \leq t+4$ és ha $s=2$, akkor $g(s,t) \leq t+3$.

3. A K_{s+t+1} gráf mutatja, hogy $g(s,t) \geq s+t+1$. Összegezve eredményeinket,

ha $\min(s,t) \leq 4$, akkor $g(s,t)=s+t+1$,

ha $\min(s,t) \geq 5$, akkor $s+t+1 \leq g(s,t) \leq s+t+1+\min(s,t)-4$.

Algoritmus a partíció megkeresésére

A bizonyításban kijelölt S halmazról csak a következőket használtuk ki:

(1) S $(*)$ tulajdonságú,

(2) $x \in S$ esetén $S \setminus \{x\}$ nem $(*)$ tulajdonságú,

(3) $x \in S$, $y \notin S$ esetén $S \setminus \{x\} \cup \{y\}$-ban az élszám nem nő. Ez alapján, ha adott egy $s \geq 4$, t természetes szám és egy G gráf, amely-

re $d(V(G))\geq 2s+t-3$, akkor adhatunk egy algoritmust az $\{S,T\}$ partíció megkeresésére.

0. Legyen $S=V(G)$. $(|V(G)|=n)$

I. Ha van olyan $x\in S$, hogy $S\setminus\{x\}$ (*) tulajdonságú, akkor kezdjük újra az algoritmust az új $S=S\setminus\{x\}$ halmazzal az I. lépésnél.

Ha nincs ilyen $x\in S$, akkor folytassuk az algoritmust a II. lépésnél.

II. Ha van olyan $x\in S$ és $y\in V(G)\setminus S$, hogy $e(S\setminus\{x\}\cup\{y\})>e(S)$, akkor legyen $S=S\setminus\{x\}\cup\{y\}$ és kezdjük el újra az algoritmust az I. lépésnél.

Ha nincs ilyen (x,y) pár, akkor a fenti megjegyzésből $\{S,V(G)\setminus S\}$ megfelelő partíció.

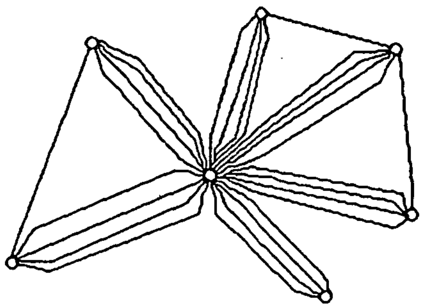
I. típusú javítást csak n-szer végezhetünk, míg II. típusút $\frac{n^2}{2}$-szer, így összesen $\frac{n^3}{2}$-szer végezhetünk javítást. I. típusúnál legfeljebb n pontot kell megvizsgálni, míg II. típusúnál legfeljebb $\frac{n^2}{4}$ (x,y) párt kell megnézni. Tehát összesen $O(n^5)$ vizsgálat kell.

Tetszőleges gráfok partíciója

Az eddigiekben feltettük, hogy a G gráf egyszerű. Ezt néhány résznél kihasználtuk, így a fenti bizonyítás nem vihető át változatlanul tetszőleges gráfokra. Például: a (*) által adott S halmazra $|S|\geq s+1$ általában nem igaz. (Itt kihasználtuk, hogy $e(S)\leq\frac{s(s-1)}{2}$.) Hasonlóan nem végezhető el egyszerűen a pontok cseréje sem. Ezek közül az első probléma kikerülhető a (*) feltétel módosításával, a második probléma viszont már nem. Általában nem is igaz az analóg tétel a megfelelő függvény létezésére, amit a következő gráf mutat (1. *ábra*).

Egy csillag minden élét meg g-száreztük és még "néhány" élt behúztunk. Ebben a középső pontot nem tartalmazó osztályban "kevés" él halad, így valóban nem létezik megfelelő partíció.

Bizonyos feltételek mellett azonban igaz lesz a megfelelő tétel tetszőleges gráfokra is. A következő tétel azt mutatja, hogy lényegében csak a fenti típusú ellenpélda lehet.



1. *ábra*

3. TÉTEL. *Ha egy hurokél nélküli G gráf minden ponjtjának foka legalább $2s+3t-3$ $(s \geq t \geq 3)$, $|V(G)|=n \geq 4$ és nincs olyan pont, amely $(s+t-2)(n-2)$ él kivételével minden élt lefog, akkor létezik olyan S,T partíció, hogy $d(S) \geq s$ és $d(T) \geq t$.*

BIZONYÍTÁS. Először megjegyezzük, hogy ha találunk olyan $S, T \subseteq V(G)$ nem üres diszjunkt halmazokat, hogy $d(S) \geq s$ és $d(T) \geq t$, akkor készen vagyunk, azaz létezik megfelelő partíció. Legyen ugyanis a fenti típusú halmaz-párok közül S,T az, amelyre $|S \cup T|$ maximális. Belátjuk, hogy ekkor $S \cup T = V(G)$. Tegyük fel, hogy $V(G) \setminus (S \cup T) = A \neq \emptyset$. Ekkor $S \cup A, T$ nem lehet megfelelő két halmaz; ez csak úgy lehet, ha egy $x \in A$-ra $e(x, S \cup A) \leq s$. Ekkor $S, T \cup \{x\}$ már a fenti feltételeknek megfelel és ez $|S \cup (T \cup \{X\})| > |S \cup T|$ miatt ellentmond $|S \cup T|$ maximalitásának. Tehát valóban létezik megfelelő partíció.

Még megjegyezzük azt is, hogy ha egy A halmazra $e(A) > (r-1)|A|$, akkor A tartalmaz olyan részgráfot, amely minden foka legalább r. Hiszen legyen $A_0 \subseteq A$ minimális elemszámú halmaz, melyre $e(A_0) > (r-1)|A_0|$. Ekkor $G(A_0)$ minden foka legalább r, mert más esetben létezne $x \in A_0$, hogy $e(A_0 \setminus \{x\}) > (r-1)|A_0 \setminus \{x\}|$.

Ezek után négy esetet vizsgálunk. (Legyen $s \geq t$.)

1. eset: Létezik x_1, x_2, x_3, x_4 négy különböző pont, úgy hogy $e(x_1, x_2) \geq s$ és $e(x_3, x_4) \geq t$. Ekkor az első megjegyzés alapján létezik megfelelő $\{S,T\}$ partíció.

2. eset: Létezik x_1, x_2, x_3 három különböző pont úgy, hogy $e(x_1, x_2)$, $e(x_2, x_3)$ és $e(x_3, x_1)$ is legalább s legyen. Ekkor ha létezik $x \in V(G) \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$, hogy $e(x, x_i) \geq t$ valamely $i \leq 3$-ra, ak-

kor az 1. esetre hivatkozva készen vagyunk. Ha nem létezik ilyen pont, akkor $e(x,\{x_1,x_2,x_3\}) \le 3t-3$. Így $S=\{x_1,x_2,x_3\}$, $T=V(G)\setminus S$ megfelelő partíciót ad, hiszen $d(T) \ge 2s+3t-3-(3t-3)=2s \ge t$.

3. eset: Létezik x_1, x_2 pont úgy, hogy $e(x_1,x_2) \ge s$, de az előző két eset egyike sem áll fenn. Ekkor x_1, x_2 egyikéhez nem mehet $V(G)\setminus\{x_1,x_2\}$ egy pontjából legalább s él. Legyen ez x_2. Ekkor x_1 által le nem fogott élek száma legalább $(s+t-2)(n-2)+1$, ezek közül x_2 maximum $(s-1)(n-2)$ élt fog le, hiszen $e(x_2,y) \le s-1$ minden $y \in V(G)\setminus\{x_1,x_2\}$-re. Így a $V(G)\setminus\{x_1,x_2\}$ halmazban legalább $(t-1)(n-2)+1$ él marad. Tehát a második megjegyzés alapján $V(G)\setminus\{x_1,x_2\}$-ben létezik T' részhalmaz, hogy $d(T') \ge t$ és az első megjegyzés alapján pedig T', $S'=\{x_1,x_2\}$ "felfújható" egy partícióvá.

4. eset: Nem létezik x_1, x_2 pont úgy, hogy $e(x_1,x_2) \ge s$. Ekkor legyen T_0 az $e(T_0) \ge (t-1)|T_0|$ feltétel mellett minimális elemszámú, illetve ha több ilyen van, akkor az a halmaz, amelyre $e(T_0)$ maximális. Belátjuk, hogy $\{T_0, S=V(G)\setminus T_0\}$ megfelelő partíció. $d(T_0) \ge t$ a második megjegyzésünkből adódik. Másrészt $3t-2 \ge d(T_0)$ is teljesül, hiszen más esetben tetszőleges $x \in T_0$ pont esetén $G(T_0\setminus\{x\})$ minden pontjának foka legalább $2t-1$ lenne, azaz $e(T\setminus\{x\}) > (t-1)|T_0\setminus\{x\}|$ teljesülne, ami ellentmond T_0 minimalitásának. Legyen x egy minimális fokú pont T_0-ban ($d(x,T_0) \le 3t-2$) és legyen $y \in S=V(G)\setminus T_0$ tetszőleges pont. Ekkor tudjuk, hogy $e(y,x) \le s-1$ és $e(y,T_0\setminus\{x\}\cup\{y\}) \le 3t-2$, hiszen más esetben x, y cseréje növelné az élszámot T_0-ban és ez ellentmond $e(T_0)$ maximalitásának. Ebből $e(y,S) \ge 2s+3t-3-(3t-2)-(s-1)=s$, így $d(S) \ge s$. Tehát $\{S,T_0\}$ valóban megfelelő partíció.

Ezzel a tétel állítását beláttuk.

GRÁFOK PARTÍCIÓJA ÖSSZEFÜGGÉSI FELTÉTELEK MELLETT

k-szorosan összefüggő részgráf létezése nagy élsűrűségű gráfokon

Ahhoz, hogy Győri Ervin problémáját vizsgálhassuk, szükségünk lesz a következő kérdés megválaszolására: egy n pontú gráfban hány él garantál k-szorosan összefüggő részgráfot. Mader [3], [4] cikkében vizsgálta a problémát és a következő eredményt bizonyítja.

4. TÉTEL (MADER). *Ha egy G egyszerű gráfban $e(G)>(2k-3)\times\times(|G|-(k-1))$ és $|G|\geq 2k-1$, akkor G tartalmaz k-szorosan összefüggő részgráfot.*

Ugyanebben a cikkében élesíti ezt az eredményt és belátja a következő tételt:

5. TÉTEL (MADER). *Ha egy G egyszerű gráfban $e(G)>(1+\frac{1}{\sqrt{2}})(k-1)(|G|-(k-1))=(1.7071k-1.7071)(|G|-(k-1))$ és $|G|$ elég nagy $(\geq c_k)$, akkor G tartalmaz k-szorosan összefüggő részgráfot.*

Ezt az eredményt fogjuk élesíteni. Először egy lemmát bizonyítunk, mely kis pontszám esetére érdekes:

6. LEMMA. *Legyen G egy gráf. Ha*

$$e(G)>\frac{|G|^2+(4k-7)|G|+(4k-2k^2)}{6}$$

és $|G|\geq k+1$, akkor G tartalmaz k-szorosan összefüggő részgráfot.

BIZONYÍTÁS. $|G|=n$-re vonatkozó teljes indukciót végzünk. $n=k+1$. Ekkor a feltételből

$$e(G)>\frac{(k+1)^2+(4k-7)(k+1)+4k-2k^2}{6}=\frac{3k^2+3k-6}{6}=\binom{k+1}{2}-1.$$

Tehát $G=K_{k+1}$, ami k-szorosan összefüggő.

$n\geq k+2$ és $k+1\leq n_0<n$ esetben már tudjuk az állítást. Indirekten tegyük fel, hogy G nem tartalmaz k-szorosan összefüggő részgráfot. Ekkor G sem k-szorosan összefüggő, azaz létezik G-ben $k-1$ elemű elvágó halmaz X. Ekkor $G\backslash X$ szétesik komponensekre. Az egyik komponens alaphalmaza X-szel feszítsen G_1 gráfot, a többi komponens alaphalmaza X-szel feszítsen G_2 gráfot. Legyen $|V(G_i)|=n_i$, ekkor $n_1+n_2=n+(k-1)$. Feltehetjük, hogy $n_1\geq n_2$, ekkor $n_1\geq\frac{n+(k-1)}{2}>k$. Feltehetjük ($n>n_1\geq k+1$ miatt), hogy G_1-re nem alkalmazható az indukciós feltevés.

$$e(G_1)\leq\frac{n_1^2+(4k-7)n_1+(4k-2k^2)}{6}.$$

$e(G_2)$-t is megbecsülhetjük: az X-en belüli $e(X)$ darab élen kívül csak $\binom{n_2}{2}-\binom{k-1}{2}$ él lehet (ha minden más él be van húzva), így

$$e(G_2)\le\binom{n_2}{2}-\binom{k-1}{2}+e(X).$$

A nyilvánvaló $e(G_1)+e(G_2)=e(G)+e(X)$ egyenlőséget felhasználva:

$$\frac{n_1^2+(4k-7)n_1+(4k-2k^2)}{6}+\binom{n_2}{2}-\binom{k-1}{2}+e(X)\ge e(G_1)+e(G_2)=$$

$$=e(G)+e(X)>\frac{n^2+(4k-7)n+(4k-2k^2)}{6}+e(X).$$

Rendezve: $\dfrac{(n_2-(k-1))(n_2+(k-1)-1)}{2}>\dfrac{(n-n_1)(n+n_1+4k-7)}{6}$.

Mivel $n-n_1=n_2-(k-1)>0$, ezért

$$3n_2+3k-6>n+n_1+4k-7.$$

Felhasználva, hogy $n=n_1+n_2-(k-1)$:

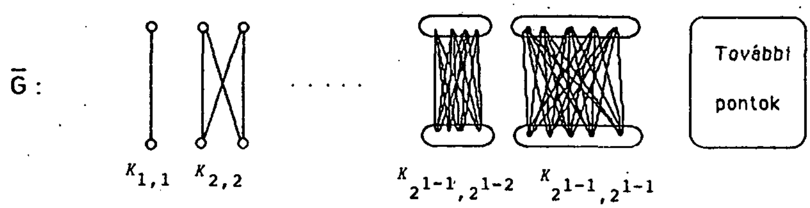
$$3n_2+3k-6>2n_1+n_2-(k-1)+4k-7,$$

$$n_2>n_1.$$

Ez ellentmond $n_1\ge n_2$-nek. Ez az ellentmondás az állítást igazolja.

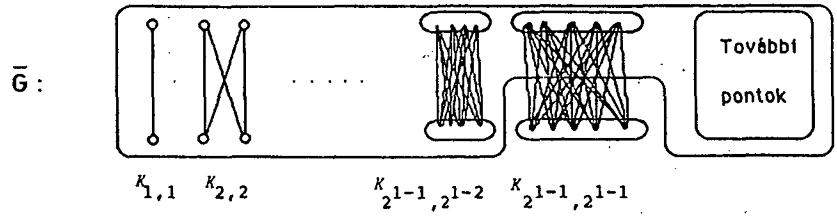
Megjegyezzük, hogy a $k+1\le n\le 2k-2$ szakaszon a fenti eredmény optimális, legalábbis az $n=k-1+2^{\ell}$ esetben, ahol $2^{\ell}-2\le k-1$ létezik n pontú $\dfrac{n^2+(4k-7)n+(4k-2k^2)}{6}$ élű G gráf, amely nem tartalmaz k-szorosan összefüggő gráfot.

A G gráfot komplementerével adjuk meg (2. *ábra*).



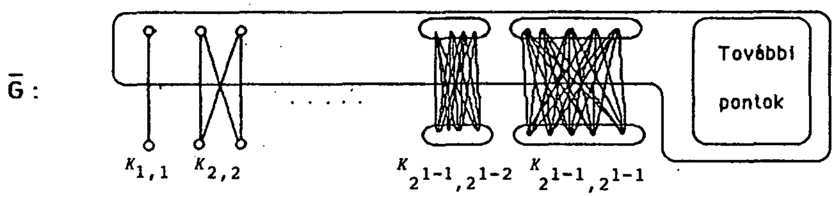
2. *ábra*

Belátjuk, hogy ez valóban nem tartalmaz k-szorosan összefüggő részgráfot. Legyen X a $K_{2^{\ell-1},2^{\ell-1}}$ pontjaitól különböző $k-1$ elemű ponthalmaz. Ez az eredeti G gráfban elvágja a két osztályt, tehát a lehetséges k-szorosan összefüggő gráf nem metszhet mindkét osztályba, azaz a rajzon lévő halmazba esik (3. *ábra*).



3. *ábra*

Ebben a részben $K_{2^{\ell-2},2^{\ell-2}}$ pontjaitól különböző $k-1$ elemű ponthalmaz szétvágja a két osztályt. A lehetséges k-szorosan összefüggő részgráf újra csak az egyik osztályba metszhet. Az eljárásunkat folytathatjuk és kapjuk, hogy az újra bejelölt részben kell lennie a részgráfnak (4. *ábra*).



4. *ábra*

Ennek a résznek az elemszáma: $n-2^{\ell-1}-\ldots-1=n-(2^{\ell}-1)=k$. Így nem tartalmazhat k-szorosan összefüggő részgráfot, tehát G sem.

G élszáma pedig: $\binom{n}{2}-[(2^{\ell-1})^2+\ldots+2^2+1]=\binom{n}{2}-\frac{(2^{\ell})^2-1}{3}=$

$$=\frac{n^2-n}{2}-\frac{(n-(k-1))^2-1}{3}=\frac{3n^2-3n-2n^2+4(k-1)n-2(k-1)^2+2}{6}=\frac{n^2+(4k-7)n+(4k-2k^2)}{6}.$$

Ezek után beláthatjuk a következő eredményt.

7. TÉTEL. *Ha egy G egyszerű gráfban* $e(G)>\{\frac{1}{4}\sqrt{6k^2-18k+16}+k-\frac{3}{2}\}(|G|-(k-1))$ *és* $|G|\geq(k-1)+\frac{1}{2}\sqrt{6k^2-18k+16}$, *ekkor G tartalmaz k-szorosan összefüggő részgráfot* $(k\geq3)$.

BIZONYÍTÁS. $|G|=n$-re vonatkozó teljes indukciót végzünk és két esetet vizsgálunk.

1. eset: $k-1+\sqrt{6k^2-18k+16} \geq n \geq k-1+\frac{1}{2}\sqrt{6k^2-18k+16} > k$.

Ekkor belátjuk, hogy $\{\frac{1}{4}\sqrt{6k^2-18k+16}+k-\frac{3}{2}\}(n-(k-1)) \geq$
$\geq \frac{n^2+(4k-7)n+(4k-2k^2)}{6} = \frac{(n-(k-1))^2+(6k-9)(n-(k-1))+3k^2-9k+8}{6}$.

Rendezve a bizonyítandó egyenlőtlenséget:

$0 \geq (n-(k-1))^2-\frac{3}{2}\sqrt{6k^2-18k+16}(n-(k-1))+3k^2-9k+8=[(n-(k-1))-$
$-\sqrt{6k^2-18k+16}][(n-(k-1))-\frac{1}{2}\sqrt{6k^2-18k+16}]=\{n-[k-1+\sqrt{6k^2-18k+16}]\}\times$
$\times\{n-[k-1+\frac{1}{2}\sqrt{6k^2-18k+16}]\}$. Tehát az egyenlőtlenség valóban teljesül a fenti értékekre és így a 3.1.3. lemmából adódik az állítás.

2. eset: $n \geq k-1+\sqrt{6k^2-18k+16}$. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Ekkor létezik $k-1$ elemű elvágó halmaz G-ben: X. Hasonlóan mint a 3.1.3. lemma bizonyításában, G_1, G_2 gráfokat nyerhetünk. Legyen most is $V(G_i)=n_i$, $n_1 \geq n_2$. Ekkor $n_1+n_2=n+(k-1)$.

így $n > n_1 \geq \frac{n+(k-1)}{2} \geq k-1+\frac{1}{2}\sqrt{6k^2-18k+16}$. Feltehetjük, hogy G_1-re nem

alkalmazható az indukciós feltétel: $e(G_1) \geq \{\frac{1}{4}\sqrt{6k^2-18k+16}+k-\frac{3}{2}\}\times$
$\times(n_1-(k-1))$.

Ezek után két alesetet vizsgálunk:

a) aleset: $n_2 \geq k-1+\frac{1}{2}\sqrt{6k^2-18k+16}$. Ekkor G_2-re is feltehetjük, hogy

$$e(G_2) \leq (\frac{1}{4}\sqrt{6k^2-18k+16}+k-\frac{3}{2})(n_2-(k-1)).$$

Ezt összeadva az $e(G_1)$-re vonatkozó egyenlőtlenséggel:

$$e(G) \leq e(G_1)+e(G_2) \leq (\frac{1}{4}\sqrt{6k^2+18k+16}+k-\frac{3}{2})(n-(k-1)).$$

Ez ellentmondás a feltétellel, ami az állítást igazolja.

b) aleset: $n_2 < k-1+\frac{1}{2}\sqrt{6k^2-18k+16}$. Ekkor nyilvánvalóan

$$e(G_2) \leq \binom{n_2}{2}-\binom{k-1}{2}+e(X).$$

Felhasználva, hogy $e(G)+e(X)=e(G_1)+e(G_2)$ és az $e(G)$-re tett feltételt:

$$[\frac{1}{4}\sqrt{6k^2-18k+16}+k-\frac{3}{2}](n_1-(k-1))+\binom{n_2}{2}-\binom{k-1}{2}+e(X) \geq$$

$$\geq e(G_1)+e(G_2)=e(G)+e(X)>[\tfrac{1}{4}\sqrt{6k^2-18k+16}+k-\tfrac{3}{2}]\times$$
$$\times(n-(k-1))+e(X).$$

Rendezve az egyenlőtlenséget:

$$[\tfrac{1}{4}\sqrt{6k^2-18k+16}+k-\tfrac{3}{2}]\,(n-n_1)<\frac{[n_2-(k-1)]\,[n_2+(k-1)-1]}{2}.$$

$n-n_1=n_2-(k-1)>0$-val osztva, 2-vel szorozva:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{6k^2-18k+16}+2k-3<n_2+(k-1)-1,$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{6k^2-18k+16}+k-1<n_2.$$

Ez a feltevésünkkel ellentmondásban van, ami az állítást igazolja. Ezzel a tételt beláttuk.

8. KÖVETKEZMÉNY. *Ha egy G egyszerű gráfban $e(G)\geq(1+\frac{\sqrt{6}}{4})kn=$ $=1.612kn$ és $|G|\geq k+1$ $(k\geq 3)$, akkor G tartalmaz k-szorosan összefüggő részgráfot.*

BIZONYÍTÁS. Egyszerűen adódik, hogy $(1+\frac{\sqrt{6}}{4})kn$ élszám nagyobb mind a 6. lemma által adott becslésnél a $k+1\leq n\leq k-1+$ $+\frac{1}{2}\sqrt{6k^2-18k+16}$ szakaszon, mind a 7. tételnél.

Az $f(s,t)$ függvény becslése

Ezek után rátérhetünk az $f(s,t)$ függvény becslésére. Tegyük fel, hogy G minden foka elég nagy. Ekkor kiválasztjuk azt a minimális elemszámú ponthalmazt, amely élsűrűsége s-szeresen összefüggő részgráfot biztosít és élszáma maximális. Ekkor a 2. fejezet alapján ezen részhalmazon kívül minden pont foka nagy lesz, így tartalmaz t-szeresen összefüggő részgráfot. Ezt a két diszjunkt részgráfot "felfújhatjuk" egy partícióvá, ha G $(s+t-1)$-szeresen összefüggő. A részletes bizonyítás:

9. TÉTEL. *Legyen G egy egyszerű gráf, amelynek minden fokszáma legalább $(2+\frac{\sqrt{6}}{2})(s+t)+2=3,2247(s+t)+2$ és $(s+t-1)$-szeresen összefüggő. Ekkor létezik G-nek $\{S,T\}$ partíciója úgy, hogy*

$G(S)$ és $G(T)$ s, illetve t-szeresen összefüggő gráf legyen $(s,t\geq 3)$.

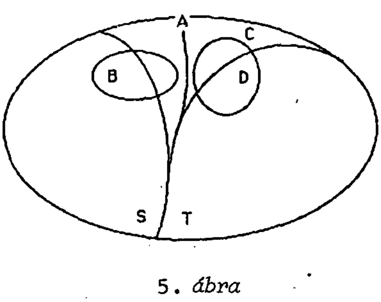
BIZONYÍTÁS. Válasszuk ki a következő $S_0 \subseteq V(G)$ ponthalmazt, amelyre $e(S_0) \geq (1+\frac{\sqrt{6}}{4})s|S_0|$ és $S_0 \neq \emptyset$ és S_0 minimális, ha pedig több ilyen részhalmaz van, akkor $e(S_0)$ maximális. Belátjuk, hogy $d(S_0) < (2+\frac{\sqrt{6}}{2})s+1$, hiszen más esetben tetszőleges $x \in S_0$-re $S_0 \setminus \{x\}$-ben minden pont foka legalább $(2+\frac{\sqrt{6}}{2})s$, azaz $e(S_0\setminus\{x\}) \geq$ $\geq (1+\frac{\sqrt{6}}{4})s|S_0\setminus\{x\}|$, ami ellentmond S_0 minimalitásának.

Ekkor $T_0 = V(G)\setminus S_0$ egy nem üres halmaz, és hogy az eddigi szokásos csere ne legyen lehetséges minden T_0-beli pont fokának legalább $(2+\frac{\sqrt{6}}{2})t$-nek kell lenni. Így $e(T_0) \geq (1+\frac{\sqrt{6}}{4})t|T_0|$.

Alkalmazva S_0 és T_0-ra a 3.1.5. következményt kapjuk, hogy létezik $T \subseteq T_0$ és $S \subseteq S_0$ halmazok, hogy $G(S)$ és $G(T)$ s, illetve t-szeresen összefüggőek legyenek.

Ezek után már Thomassen bizonyítását követhetjük. Legyenek S, T nem üres halmazok, melyre $S \cap T = 0$ és S, illetve T által feszített részgráf s, illetve t-szeresen összefüggő legyen (az előzőekből következik, hogy ilyen létezik) és $|S\cup T|$ maximális.

Belátjuk, hogy $S \cup T = V(G)$. Tegyük fel, hogy $A = V(G)\setminus(S\cup T)$ nem üres halmaz. Ekkor, mivel $\{S\cup A, T\}$ a fentieknek nem megfelelő partíció ($|S\cup T|$ maximális volt), ezért az $S\cup A$ által feszített gráf nem s-szeresen összefüggő, azaz tartalmaz s-1 elemű elvágó halmazt: B-t. $(S\cup A)\setminus B$-nek lesz A-ban komponense, ezt jelöljük C-vel (5. *ábra*).



5. *ábra*

Ekkor $\{S, T\cup C\}$ nem jó partíció, így $T\cup C$-ben létezik olyan D elvágó halmaz, amelyre $|D|\leq t-1$.

$B\cup D$ elvágó halmaz a G gráfban és $|B\cup D|\leq s+t-2$. Mivel G $(s+t-1)$-szeresen összefüggő gráf, ez ellentmondás. Ez az állítást és így a tételt bizonyítja.

MEGJEGYZÉSEK.

1. Ha $G\left[(2+\frac{\sqrt{6}}{2})(s+t)\right]+2$-szeresen összefüggő, akkor a 3.2.1. Tétel mindkét feltétele teljesül. Tehát ha $s,t\geq 3$, akkor

$$f(s,t)\leq\left[(2+\frac{\sqrt{6}}{2})(s+t)\right]+2.$$

2. A K_{s+t+1} példa mutatja, hogy

$$f(s,t)\geq s+t+1.$$

TOVÁBBI PROBLÉMÁK

A dolgozatban vizsgált problémák azonos típusúak voltak: egy gráfra jellemző számszerű értéket néztünk és azt vizsgáltuk, hogy mikor lehet a gráf pontjait szétvágni úgy, hogy a két rész által feszített gráfok ezen számszerű adata s $(\geq s)$, illetve t $(\geq t)$ legyen. Nézzük meg a felmerült problémákat a különböző feladatoknál.

Minimális fokszám

a) Nem tisztázott a $g(s,t)$ függvény pontos értéke. Thomassen cikkében a $g(s,t)=s+t+1$ sejtést mondja ki.

b) A kérdés felvethető irányított gráfok esetére is: létezik-e olyan $\vec{g}(s,t)$ szám, hogy minden olyan irányított G gráf pontjainak, amelynek minimális ki- és befoka is legalább $\vec{g}(s,t)$, létezzen olyan $\{S,T\}$ partíciója, hogy $G(S)$ és $G(T)$ gráf minden ki- és befoka legalább s, illetve legalább t legyen. Én nem ismerem a probléma megoldását.

Összefüggés.

Nem ismert az $f(s,t)$ függvény pontos értéke. Thomassen és Győri Ervin is kimondta a sejtést, hogy $f(s,t)=s+t+1$.

Maximális fokszám.

A megfelelő problémát Lovász László [5] teljesen megoldotta. A cikkben bebizonyítja a következő tételt:

Legyen G gráf, amelynek maximális foka legfeljebb k. Legyenek továbbá $s_1,\dots,s_\alpha$ nem negatív egész számok, amelyekre $s_1+s_2+\dots+s_\alpha=k-\alpha+1$. Ekkor létezik a G gráf $\{S_1,\dots,S_\alpha\}$ olyan partíciója, hogy a $G(S_i)$ gráf maximális foka legfeljebb s_i legyen (minden $i=1,\dots,\alpha$-ra).

Maximális út.

a) Poyan és Xuong vetette fel a következő problémát: legyen G egy gráf, amelyben a maximális út pontszáma: $s+t$. Igaz-e, hogy ekkor létezik $\{S,T\}$ partíció, hogy $G(S)$ és $G(T)$ gráfban a maximális út pontszáma s, illetve t legyen.

b) Felvethető a kérdés irányított gráfokra, irányított utakkal.

Kromatikus szám

Nagyon egyszerű belátni, hogy egy G gráfra, amely kromatikus száma $s+t$, létezik olyan $\{S,T\}$ partíció, hogy $\chi(G(S))=s$ és $\chi(G(T))=t$. Lovász László [6] vetette fel a következő kérdést: $s+t-1$ kromatikus gráfra, amely nem tartalmaz K_{s+t-1} részgráfot, létezik-e olyan $\{S,T\}$ partíció, hogy $G(S)=s$ és $G(T)=t$. A kérdés a legegyszerűbb $s=2$ esetben sincs tisztázva.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] C. Thomassen, Graph decomposition with constrains on the connectivity and minimum degree, *J. Graph Theory*, 7, 1983.

[2] Szegedy Márió, publikálatlan.

[3] W. Mader, Existenz n-fach Zusammenhängender Teilgraphen in Graphen genügend grossen Kantendichte, *Abh. Math. Sem. Hamburg Univ.*, 37, 1972.

[4] W. Mader, Extremal connectivity problems, *in: Infinite and Finite Sets* (ed. A. Hajnal, R. Rado and V. T. Sós), North Holland, 1975.

[5] L. Lovász, On decomposition of graphs, *Studia Sci. Math. Hung.*, 1, 1966.

[6] *Theory of graphs*, Proc. Coll. Tihany, Hungary, Ed. P. Erdös, G. Katona, Problem 2.

Hajnal Péter
tudományos munkatárs
JATE Analízis Tanszék
Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
6720