Pythagoras tantétele

Tanítás a polgári fiúiskola IV. osztályában.

II. rész.

A tétel további taglalása és begyakorlása.

1. *A házi feladat számonkérése.* a) A tanulók házi feladatul használt rajzpapiros tiszta oldalára elkészítették »A cselekvés iskolája« 7.—8. számának 323. oldalán felrajzolt 6. ábrát.

Egy tanuló beszámol az ábra elkészítésének módjáról. — Egy másik tanuló megállapítja, hogy az 1—4 jelzésű derékszögű háromszögek átfogóival formált idom négyzet. (Az oldalak egyenlők; a szögek derékszögek, mert a csúcsoknál fekvő 3 szög közül kettő mindig egy-egy derékszögű háromszög két hegyes szöge; — ezek összege 2 R° s így a harmadik szög mind a négy csúcsnál csak derékszög lehet.)

Most a tanulók ollóikkal levágják a kapott idom 1, 2, 3 és 4 jelzésű derékszögű háromszögeit. (Azokat egymásra helyezik, hogy egybevágóságukat ezáltal is demonstrálják.)

A levágás után ABCEF szabálytalan ötszöget kapták. Most ehhez a szabálytalan idomhoz a tanulók hozzáillesztik először az 1 és 2 jelzésű derékszögű háromszöget. Felismerik, hogy a kapott szabálytalan hatszög az EC és az AF oldalakkal, tehát a derékszögű háromszög befogóival rajzolt két négyzet összege.

Viszont ha az ABCEF szábálytalan ötszöghöz a 3 és 4 jelzésű derékszögű háromszöget illesztik hozzá, akkor a kapott ABCD négyzettel a derékszögű háromszög átfogójára rajzolt négyzet formálódott ki.

Eszerint a derékszögű háromszög átfogójára rajzolt négyzet területe a derékszögű háromszög két befogójára rajzolt négyzet területével egyenlő (Az igazság felismerésére jó, ha a kivágott ábrarészek fenti csoportosítását néhány tanulóval még külön elvégeztetjük.)

b) A tanulók beszámolnak a második házi feladatról is. — 6 cm-es és 8 cm-es befogókkal, majd 4·5 cm-es és 6 cm-es befogókkal derékszögű háromszögeket rajzoltak. A megszerkesztett háromszögek átfogóját megmérték s azt 10 cm-nek, illetőleg 7·5 cm-nek találták. Eszerint a befogókra rajzolt négyzet területe az első esetben 36 cm^2 és 64 cm^2, az átfogóra rajzolt négyzeté pedig 100 cm^2. (36 cm^2 + 64 cm^2 = 100 cm^2.) A második esetben pedig a befogókra rajzolt négyzet területe 20·25 cm^2 és 36 cm^2, az átfogóra rajzolt négyzeté pedig 56·25 cm^2. (20·25 cm^2 + 36 cm^2 = 56·25 cm^2.) A szerkesztések Pythagoras tételét igazolták.

A feladatokban az átfogóra nézve racionális értékeket kaptunk, ami a felvett adatokból következik. 6, 8 és 10, majd 4.5, 6 és 7·5 (*2.3,* *2.4* és *2.5* illetőleg 2·5.*3*, 2·5.*4* és 2·5.*5*) Pythagoreus számok.

c) A számbavett két házi feladat után szerkesszenek a tanulók még egy derékszögű háromszöget, pl. 5 cm-es és 7 cm-es befogókkal. Mérjék le most is az átfogót; azt 8·6 cm-nek találják. Igazolják be most is Pythagoras tantételét. $5^2 = 25$, $7^2 = 49$ és $8{\cdot}6^2 = 73{\cdot}96$. A példa esetében az átfogó négyzete 0·04-dal kevesebb, mint a két befogó négyzetnek az összege ($5^2+7^2 \sim 8{\cdot}6^2$; $25+49 \sim 73{\cdot}96$). A tanulóknak ez esetben csak azt mondhatjuk, hogy az átfogó a valóságban 8 cm 6 mm-nél valamicskével nagyobb, de a milliméter további részeit papírvonalzónkkal már nem tudtuk lemérni. (Jelezzük, hogy a mai órán erre a feladatra még visszatérünk, amikor számításaink erre a kérdésre majd világosabb feladatot adnak.)

A fentiekből világos, hogy Pythagoras tantételét bármelyik derékszögű háromszögre felírhatjuk.

A felírásnál használjuk fel algebrai ismereteinket is. Eszerint, ha a derékszögű háromszög két befogóját *a* és *b*-vel, az átfogóját *c*-vel jelöljük, a tétel algebrai alakja:
$a^2 + b^2 = c^2$, vagy ami ugyanaz $c^2 = a^2 + b^2$ lesz.

2. *A probléma további taglalása, illetőleg begyakorlása.*
a) Pythagoras tantételének segítségével a két befogó megadott hosszából az átfogó hosszát szerkesztés, illetőleg mérés nélkül is meghatározhatjuk.

Mert ha: $a^2 + b^2 = c^2$, illetőleg $c^2 = a^2 + b^2$, akkor eddigi algebrai ismereteik alapján $\sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Olvassuk le ez utóbbi egyenlőség értelmét. A derékszögű háromszög átfogójának hosszát megkapjuk, ha a két befogó négyzeteinek összegéből négyzetgyököt vonunk.

Vizsgáljuk meg e tétel segítségével a fenti szerkesztéssel elvégzett feladatokat.
$a = 6$ m, $b = 8$ cm, $c = X$ cm. Számítás alapján:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10\,;$$

c hossza a szerkesztés alapján is 10 cm volt.
$a = 4{\cdot}5$ cm, $b = 6$ cm, $c = X$ cm. Számítás alapján:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4{\cdot}5^2 + 6^2} = \sqrt{20{\cdot}25 + 36} = \sqrt{56{\cdot}25} = 7{\cdot}5\,;$$

c hossza a szerkesztés (mérés) alapján is 7·5 cm volt.
$a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $c = X$ cm. Számítás alapján:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} \sim 8{\cdot}6\,;$$

c hossza a szerkesztés alapján is 8·6 cm volt. $\sqrt{74}$ irracionális szám, azért $5^2 + 7^2 \sim 8{\cdot}6^2$.

b) Szerkesszünk derékszögű háromszöget 12·5 cm-es átfogóból és 7·5 cm-es befogóból.

A szerkesztés kétféleképpen végezhető el: a 7·5 cm-es befogó egyik végére állított merőlegest a befogó másik végéből a 12·5 cm-es átfogó hosszával lemetsszük; vagy a 12·5 cm-es átfogónak, mint kör-átmérőnek felezési pontjából az átmérő fölé félkört rajzolunk s az átmérő egyik végéből a kör kerületét a 7·5 cm-es befogó hosszával lemetsszük. Lemérés után a derékszögű háromszög másik befogója mindkét esetben 10 cm lesz.

Szerkesszünk továbbá derékszögű háromszöget 11 cm-es átfogóból és 8·8 cm-es befogóból.

A szerkesztést az előbbiek alapján elvégezve, a lemért befogót 6·6 cm-nek találjuk.

Az első esetben a derékszögű háromszöget az átfogóból és a kisebbik befogóból szerkesztettük meg s lemérés útján a nagyobbik befogót kerestük meg, — a második esetben az adott átfogóból és a nagyobbik befogóból a kisebbik befogót határoztuk meg szerkesztés útján.

Pythagoras tantételének segítségével azonban a derékszögű háromszög átfogójának és egyik befogójának adott hosszából a másik befogó hosszát szerkesztés (illetőleg mérés) nélkül közvetlenül is meghatározhatjuk.

Ha ugyanis:

$$a^2+b^2=c^2, \text{ akkor } a^2=c^2-b^2 \text{ és } \sqrt{a^2} = \sqrt{c^2-b^2},$$

$$a=\sqrt{c^2-b^2}, \text{ illetőleg ha: } a^2+b^2=c^2, \text{ akkor } b^2=c^2-a^2 \text{ és}$$

$$\sqrt{b^2}=\sqrt{c^2-a^2}, b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

Leolvasva a fenti két egyenlőség értelmét: a derékszögű háromszög egyik befogójának hosszát megkapjuk, ha az átfogó négyzetéből a másik befogó négyzetét levonjuk és az így kapott különbségből négyzetgyököt vonunk.

Vizsgáljuk meg e két tétel segítségével az előbbi, szerkesztéssel elvégzett feladatokat.

$c=12·5$ cm, $a=7·5$ cm, $b=X$ cm. Számítás alapján:

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{12{\cdot}5^2-7{\cdot}5^2}=\sqrt{156{\cdot}25-56{\cdot}25}=\sqrt{100}=10.$$

A nagyobbik befogó (b) hossza a szerkesztés alapján is 10 cm volt. Vagy ha: $c=11$ cm, $b=8·8$ cm, $a=X$ cm. Számítás alapján:

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{11^2-8{\cdot}8^2}=\sqrt{121-77{\cdot}44}=\sqrt{43{\cdot}56}=6{\cdot}6.$$

A kisebbik befogó (a) hossza a szerkesztés szerint is 6·6 cm volt.

Még egy feladat: Szerkesszünk derékszögű háromszöget 10 cm-es átfogóból és 7 cm-es befogóból. Mérjük le a kapott háromszög másik befogóját, mérés után azt 7·1 cm-nek találtuk. $7^2=49$; $10^2=100$, $7{\cdot}1^2=50{\cdot}41$, azért $49+50{\cdot}41 \sim 100$. A példa esetében az átfogó négyzete 0·59 cm²-rel több, mint a két befogó négyzetének összege. A valóságban a mérés útján megállapított nagyobbik befogó 7·1-nél valamicskével nagyobb, de a milliméter további részeit lemérni nem tudtuk. Erre, ha a fenti feladatot számítással végezzük, azonnal feladatot kapunk.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{100 - 49} = \sqrt{51} = 7{\cdot}14\ldots.$$

A szerkesztés alapján b hossza 7·1 cm volt. $\sqrt{51}$ irracionális szám, azért $7^2 + 7{\cdot}1^2 \sim 10^2$.

3. *Gyakorlati problémák.* a) Egy 3·7 m hosszú létra úgy van a falhoz támasztva, hogy alsó része a faltól 1·2 m távolságra van. Milyen magas a fal? (3·5 m.)

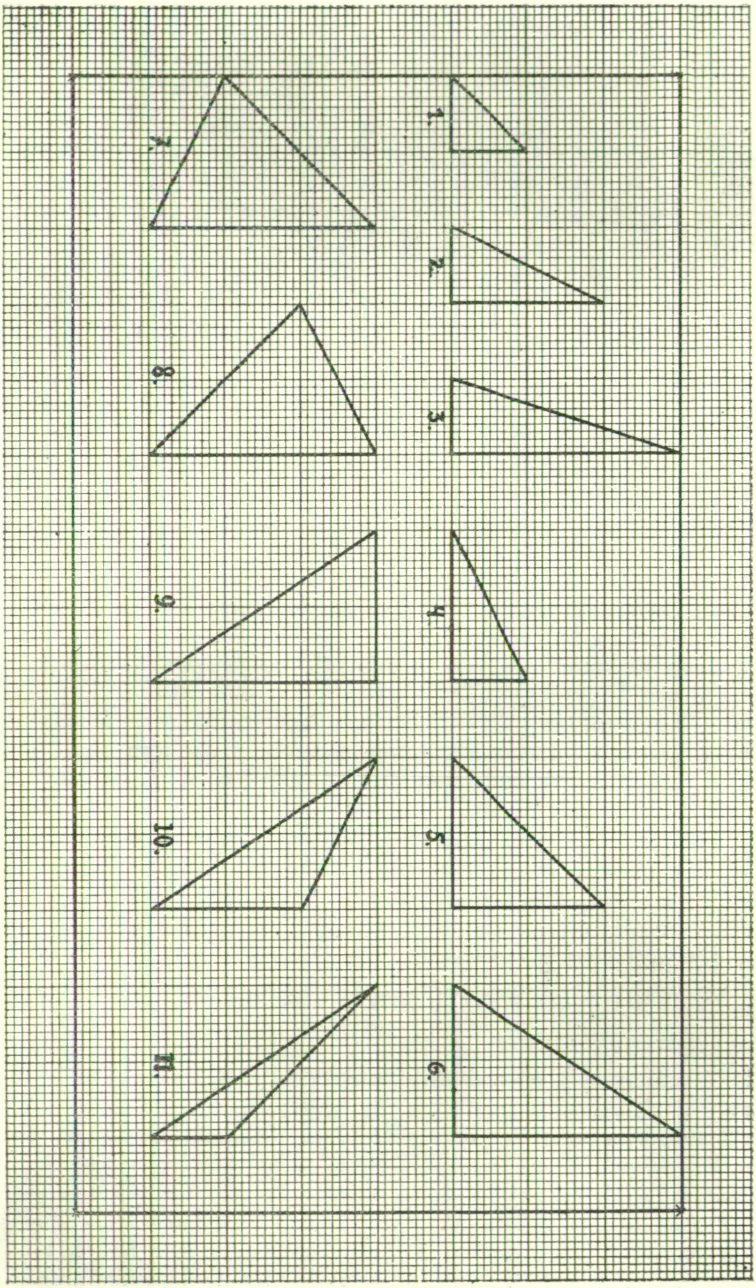
b) A 25 fokból álló lépcső egyes fokai 13·5 cm magasak és 18 cm szélesek. Mekkora a lépcső mellé illesztendő korlát hossza? $(22{\cdot}5 . 25 = \frac{2250}{4}$ cm $= 562{\cdot}5$ cm $= 5$ m $62{\cdot}5$ cm.) Rajz!

c) Egy 25 cm-es szakasz fölé, mint kör-átmérő fölé félkört rajzoltunk. Az átmérő egyik végéből 15 cm-es távolsággal a félkör kerületét lemetsszük. A metszéspontot az átmérő másik végével összekötjük. Derékszögű háromszöget kaptunk. Számítással határozzuk meg a derékszögű háromszög még ismeretlen oldalát. (A számítás eredményét méréssel is ellenőrizzük.) Most húzzuk meg a háromszög magasságát. A magasság az átfogót két szakaszra osztja. Ezek a befogóknak az átfogókon lévő projekciói. *Mérjük* meg a magasságot. Ezután *számítással* határozzuk meg a két projekció hosszát. Mutassuk meg, hogy azok összege 25 cm. Igazoljuk be *próbaszámítással,* hogy a magasság négyzete a két projekció szorzatával egyenlő; továbbá, hogy bármelyik befogó négyzete az egész átfogónak és a kérdéses befogónak az átfogón lévő projekciójának a szorzatával egyenlő. (A kérdéses befogó 20 cm; a magasság 12 cm; a projekciók 9 és 16 cm.)

d) Rajzoljuk be milliméterpapír füzeteinkbe a következő (1—11) ábrákat. Számítsuk ki ezen idomok kerületét. (Pl. 1. ábránál: $k = 1 + 1 + \sqrt{2} = 1 + 1 + 1{\cdot}4 = 3{\cdot}4$; $\sqrt{2} = 1{\cdot}414\ldots$ megközelítő értékéből itt az 1·4 értéknek van gyakorlatilag értelme. A b) ábránál: $2 + 3 + \sqrt{13} = 2 + 3 + 3{\cdot}6 = 8{\cdot}6$. — A 10. ábránál: $2 + \sqrt{5} + \sqrt{13} = \ldots\ldots$ stb.) (Ábra a 438. oldalon.)

4. *Házi feladat.*

5. *Megjegyzések a szaktanár részére.* Pythagoras nevét a róla elnevezett tétel halhatatlanná tette. A Pythagoras tételnek ma már számtalan bizonyítása van, W. Lietzmann: Der pytagoreische Lehrsatz c. művében 96 ismert bizonyításról emlékezik meg. Mindig érdekes probléma volt három olyan racionális egész számot keresni, melyekre nézve érvényes Pythagoras tantétele. Az ilyen számok »*pythagorasi számok*« név alatt ismeretesek. Az egyptomiak és a babiloniaik már Kr. e. több mint két ezer év előtt tudták, hogy 3, 4, 5 egységnyi oldalakkal biró háromszögek derékszögüek. A harpedonapták (kötélfeszítők) a 12 (3 + 4 + 5)


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.

egyenlő egységre beosztott kötéllel már ezen az alapon állítottak elő derékszöget. A számok tulajdonságainak vizsgálata közben Pythagoras azonban rájött, hogy van más olyan hármas számcsoport is, mely a $3^2 + 4^2 = 5^2$ összefüggést mutatja. Nevezetesen rájött arra, hogy egymásután következő négyzetszámok különbségei sorban a páratlan számokat adják:

1	4	9	**16**	**25**	36	49	64	81	100	121	**144**	**169**	196	225...
3	5	7	**9**	11	13	15	17	19	21	23	**25**	27	29	

s így a felső sor két egymásután következő négyzetszámához úgy kaphatjuk meg a harmadik négyzetszámot, hogy a páratlan számok alsó sorából azokat választjuk ki, melyek szintén négyzetszámok: $16 + 9 = 25$, $(4^2 + 3^2 = 5^2)$; $144 + 25 = 169$, $(12^2 + 5^2 = 13^2)$; $49 + 576 = 625$, $(7^2 + 24^2 = 25^2)$ stb. Ezen összefüggések megállapitására Pythagoras általános képletet is adott, így, ha az egyik befogó mindig páratlan szám, akkor annak általános alakja $2k + 1$ és ez esetben a másik befogó $2(k^2 + k)$, az átfogó pedig $2(k^2 + k) + 1$ lesz, $(k > 1)$. Amiből az következnék, hogy Pythagoras csak azokat a derékszögű háromszögeket ismerte, melyekben az áfogó a nagyobbik befogónál egy egységgel nagyobb.

Manapság viszont mindazokat a háromszögeket pythagorasi háromszögeknek nevezzük, melyeknek oldalai racionális egész számok.

Ilyen pythagorasi számokat a következő képletek alkalmazásával kaphatunk: $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$, $c = x^2 + y^2$, amely képletekbe azok az egész számok helyettesítendők, melyek megfelelnek a következő három kikötésnek: 1. $x > y$; 2. x és y-nak ne legyen közös osztója; 3. x és y egyidejűleg nem lehet páratlan szám.

(A tétel bizonyitása szakkönyvekben megtalálható.) [1]

Ilyen alapon a következő pythagorasi számtáblázathoz juthatunk:

x	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9	10
y	1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6	1	3	5	7	2	4	1
a	3	5	15	7	21	9	35	11	45	33	13	63	55	39	15	77	65	99
b	4	12	8	24	20	40	12	70	28	56	84	16	48	80	112	36	72	20
c	5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85	65	73	89	113	85	97	101

Kétségtelen továbbá, hogy egy már adott pythagorasi számcsoporthoz mindig találhatunk ujabb számcsoportokat, ha azoknak egy tetszőleges egész számú többszörösét vesszük; (mert: ha $a^2 + b^2 = c^2$, akkor $(ap)^2 + (bp)^2 = (cp)^2$. Végül megjegyezhetjük, hogy pythagorasi számcsoportokat még a következő képlet alapján is kaphatunk: n, $\frac{n^2-1}{2}$, $\frac{n^2-1}{2} + 1$, ahol n 1-nél nagyobb páratlan szám.

Kratofil Dezső.

---

[1] Dr. Mikola Sándor: Matematikai szünórák. I. r. Kiss József: Mennyiségtan III. rész.