СВОБОДНЫЕ СУММЫ МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫХ ГРУПП

А. Г. КУРОШ (Москва)

Профессору Л. Редеи к его шестидесятилетию

Введение

Группы с мультиоператорами введены в работе Хиггинса [1]. Именно, группа G, аддитивно записанная, хотя не обязательно коммутативная, называется группой с системой мультиоператоров Ω или, короче, Ω-группой, если всякий оператор $\omega \in \Omega$ является n-арной алгебраической операцией, заданной в G, $n \geqq 1$, причем выполняется требование

$$00 \ldots 0\omega = 0.$$

К числу Ω-групп принадлежат группы, кольца, а также группы и кольца с операторами. Это понятие весьма хорошо приспособлено, видимо, для того, чтобы служить носителем теорий, объединяющих те параллельные ветви теории групп и теории колец, которые связаны с понятием ядра гомоморфизма и поэтому не могут быть распространены на произвольные универсальные алгебры.

Группы с данной системой мультиоператоров Ω составляют примитивный класс универсальных алгебр. Можно говорить, следовательно, о свободных Ω-группах и ставить, в частности, вопрос об их Ω-подгруппах. Как известно, соответствующий вопрос для свободных групп с операторами (в обычном смысле слова) очень труден: в работе С. Т. Завало [2] описаны допустимые подгруппы свободных групп с группой операторов, причем эти подгруппы уже не обязаны быть свободными.

В случае Ω-групп операторы более сложные, т. е. n-арные, а не только унарные, но зато тождественные соотношения много проще. Оказывается, что в теорию Ω-групп можно перенести не только теорему Нильсена-Шрейера о подгруппах свободных групп, но и теорию свободных разложений. Именно это составляет содержание настоящей работы.

При проведении доказательств мы используем соответствующие результаты из теории групп без операторов, отсылая читателя к гл. 9 книги автора [3]. Несомненно, что можно было бы дать и независимое изложение теории, т. е. вывести из нее в качестве следствий указанные результаты о свободных группах и свободных произведениях групп без операторов.

Последний параграф работы посвящен рассмотрению аналогичных вопросов для Ω-групп с абелевой аддитивной группой; кольца принадлежат к числу именно таких Ω-групп. Теория идет здесь не так далеко, как в общем случае, так как для прямых разложений абелевых групп не существует столь исчерпывающей теории, как для свободных разложений некоммутативных групп.

§ 1.

Рассматриваем систему мультиоператоров Ω, которая на протяжении всей работы будет считаться фиксированной. Запись $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$ будет всегда означать, что ω — некоторый n-арный оператор из Ω.

Группа G, аддитивно записанная, будет называться частичной Ω-группой, если в ней уже определены элементы $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$ для некоторых упорядоченных систем элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и некоторых операторов $\omega \in \Omega$. При этом предполагается, что для всякого n-арного оператора $\omega \in \Omega$ элемент $00 \ldots 0\omega$ уже определен; причем

$$(1) \qquad 00 \ldots 0\omega = 0.$$

Всякая группа без мультиоператоров может рассматриваться как частичная Ω-группа, если для всех $\omega \in \Omega$ положить справедливость равенства (1).

Если дана Ω-группа G, то подгруппа U группы G будет в общем случае лишь частичной Ω-группой. Если же U само является Ω-группой, т. е. замкнуто относительно всех операторов из Ω, то оно будет называться Ω-подгруппой Ω-группы G. Ясно, что пересечение любой системы Ω-подгрупп само будет Ω-подгруппой, а поэтому можно говорить об Ω-подгруппе, порожденной данным множеством элементов. С другой стороны, подгруппа U Ω-группы G будет называться чистой подгруппой, если элемент $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in U$, принадлежит к U лишь в том случае, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Пусть дана частичная Ω-группа G_0. Ω-группа G будет называться ее свободным Ω-замыканием, если 1. $G \supseteq G_0$ и Ω-подгруппа, порожденная в Ω-группе G множеством G_0, совпадает с G; 2. группа G является свободной суммой группы G_0 и свободной группы, систему свободных образующих которой составляют всевозможные элементы вида $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$, кроме таких элементов этого вида, что все $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G_0$ и элемент $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$ был уже в G_0 определен.

Теорема 1. Для всякой частичной Ω-группы G_0 свободное Ω-замыкание существует и с точностью до Ω-изоморфизма, тождественного на G_0, определено однозначно.

Введем сперва одно обозначение. Если H — произвольная частичная Ω-группа, то через H' будем обозначать частичную Ω-группу, строящуюся следующим образом: группа H' является свободной суммой группы H и свободной группы, имеющей системой свободных образующих множество всевозможных таких символов $a_1a_2 \ldots a_n\omega$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in H$, $\omega \in \Omega$, которые в самой частичной Ω-группе H еще не определены; элементы $a_1a_2 \ldots a_n\omega$ определены в H' естественным образом тогда и только тогда, когда все $a_1, a_2, \ldots, a_n \in H$.

Приступим теперь к доказательству теоремы. Рассмотрим возрастающую последовательность частичных Ω-групп

(2) $$G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n \subset \ldots,$$

где

(3) $$G_n = G'_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Ясно, что объединение G этой последовательности будет Ω-группой и служит искомым свободным Ω-замыканием для G_0.

Пусть, с другой стороны, $\overline{G}$ будет произвольное свободное Ω-замыкание для G_0. Положим $\overline{G}_0 = G_0$ и φ_0 — тождественное отображение $\overline{G}_0$ на G_0. Пусть в $\overline{G}$ уже выбраны частичные Ω-подгруппы $\overline{G}_i$ для $i = 0, 1, \ldots, n-1$, причем $\overline{G}_i \subset \overline{G}_j$ при $i < j$, и установлены продолжающие друг друга Ω-изоморфизмы $\varphi_i \colon \overline{G}_i \longleftrightarrow G_i$, где G_i из (2). Тогда через $\overline{G}_n$ обозначим подгруппу группы $\overline{G}$, порождаемую подгруппой $\overline{G}_{n-1}$ и всеми теми элементами вида $a_1a_2 \ldots a_n\omega$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \overline{G}_{n-1}$, которые не содержатся в $\overline{G}_{n-1}$. Из определения свободного Ω-замыкания и (3) следует, что существует Ω-изоморфное отображение $\varphi_n \colon \overline{G}_n \longleftrightarrow G_n$, продолжающее отображение φ_{n-1}. Так как $\overline{G}$ является объединением возрастающей последовательности

$$\overline{G}_0 \subset \overline{G}_1 \subset \cdots \subset \overline{G}_n \subset \ldots,$$

то теорема доказана.

§ 2.

Теорема 2. Если Ω-группа G является свободным Ω-замыканием частичной Ω-группы G_0, то всякая Ω-подгруппа U Ω-группы G будет свободным Ω-замыканием подгруппы U', являющейся свободной суммой пересечения $U_0 = U \cap G_0$, некоторых пересечений вида $U \cap (-g+G_0+g)$, $g \in G$ (причем для всякого ненулевого пересечения этого вида сопряженная с ним в U подгруппа входит в рассматриваемое свободное разложение для U'), и, наконец, некоторой свободной группы. Подгруппа U' является при этом такой частичной Ω-группой, что элемент $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$ определен в ней лишь в том случае, если $a_1, a_2, \ldots, a_n \in U_0$ и указанный элемент уже был определен в G_0.

В силу определения свободного Ω-замыкания группа G является свободной суммой группы G_0 и бесконечных циклических групп с образующими $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$, кроме тех, что $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G_0$ и элемент $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$ уже был в G_0 определен. На основании теоремы о подгруппах свободной суммы (свободного произведения) групп для подгруппы U существует разложение в свободную сумму некоторых пересечений вида $U \cap (-g+G_0+g)$, $g \in G$ (причем войдет, в частности, и пересечение $U_0 = U \cap G_0$ и имеет место утверждение, высказанное в формулировке теоремы в скобках), и некоторых бесконечных циклических подгрупп. Среди них войдут, как входящие в исходное свободное разложение для G, все бесконечные циклические подгруппы, порожденные элементами $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in U$, кроме тех, что $a_1, a_2, \ldots, a_n \in U_0$ и элемент $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$ уже был определен в G_0, т. е. уже содержится в U_0.

Все, кроме этих последних, свободные слагаемые из полученного нами свободного разложения для U порождают подгруппу U', являющуюся их свободной суммой и, как частичная Ω-группа, удовлетворяющую тому, что высказано в формулировке теоремы. Больше того, U будет свободным Ω-замыканием для U', если мы покажем, что Ω-подгруппа $\bar{U}'$, порожденная в Ω-группе G множеством U', совпадает с U.

Для доказательства построим в G последовательность подгрупп (2) со свойством (3). Пусть уже доказано, что пересечение $U_n = U \cap G_n$ содержится в $\bar{U}'$ — для $n=0$ это очевидно. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n \in U$ и $a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in U_{n+1}$, то $a_1, a_2, \ldots, a_n \in U_n \subset \bar{U}'$, а поэтому и элемент $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$ содержится в Ω-подгруппе $\bar{U}'$. Следовательно $U_{n+1} \subset \bar{U}'$, т. е. $\bar{U}' = U$. Теорема доказана.

§ 3.

Возьмем свободную группу F_0 с системой свободных образующих N и положим, что для всех операторов ω из заданной системы мультиоператоров Ω в F_0 выполняются равенства (1). Свободное Ω-замыкание F группы F_0 будет называться **свободной Ω-группой**, а множество

N — ее системой свободных образующих. Подгруппа F_0 будет, следовательно, чистой в F.

Ясно, что свободные Ω-группы действительно являются свободными в классе всех Ω-групп, рассматриваемом как примитивный класс универсальных алгебр: всякое отображение множества N в произвольную Ω-группу H можно продолжить, притом единственным способом, до Ω-гомоморфизма F в H.

Теорема 3. Мощность системы свободных образующих является инвариантом свободной Ω-группы.

Действительно, пусть в свободной Ω-группе F выбраны две системы свободных образующих, N и N'. Положим

$$\{N\}=F_0, \quad \{N'\}=F'_0.$$

Эти обе подгруппы являются чистыми, а поэтому группа F представляется в виде свободной суммы любой из них и одной и той же третьей подгруппы, а именно свободной подгруппы, имеющей системой свободных образующих множество всевозможных элементов вида $a_1a_2\ldots a_n\omega$ для любых $\omega\in\Omega$ и любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n\in F$, которые не все равны нулю. Отсюда следует, что свободные группы F_0 и F'_0 изоморфны между собой.

Теорема 4. Всякая Ω-подгруппа U свободной Ω-группы F сама является свободной Ω-группой.

Действительно, по теореме 2 U будет свободным Ω-замыканием подгруппы U', которая будет в нашем случае чистой и, ввиду теоремы о подгруппах свободных групп, свободной.

Теорема доказана. Очевидно, что если система мультиоператоров Ω не является пустой, то в свободной Ω-группе с одним образующим можно найти свободные Ω-подгруппы с бесконечным множеством свободных образующих.

§ 4.

Если дано семейство Ω-групп H_i, $i\in I$, то свободная сумма G_0 этих групп,

$$G_0=\sum_{i\in I}{}^{*} H_i,$$

будет частичной Ω-группой: элемент $a_1a_2\ldots a_n\omega$ определен в ней тогда и только тогда, если все элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ принадлежат к одной и той же подгруппе H_i. Свободное Ω-замыкание G этой частичной Ω-группы мы будем называть **свободной Ω-суммой** заданных Ω-групп $H_i, i \in I$, и записывать в виде

$$G = \sum_{i \in I}{}^{*}_{\Omega} H_i$$

или, в случае конечного числа свободных слагаемых, в виде

$$G = H_1 \overset{*}{_{\Omega}} \cdots \overset{*}{_{\Omega}} H_n.$$

Из этого определения немедленно вытекают следующие свойства:

1. Пусть Ω-группа G является свободным Ω-замыканием частичной Ω-группы G_0 и пусть

$$G_0 = \sum_{i \in I}{}^{*} H_i.$$

Предположим, что если элемент $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$ определен в G_0, то все элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ содержатся в одной и той же подгруппе H_i и сам элемент $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$ принадлежит к этой же подгруппе H_i. Тогда Ω-группа G будет свободной Ω-суммой свободных Ω-замыканий частичных Ω-подгрупп H_i, $i \in I$.

Отсюда следует

2. Свободная Ω-группа F с системой свободных образующих N является свободной Ω-суммой свободных Ω-групп с одним образующим, а именно порожденных всеми элементами из N.

3. Если

$$G = \sum_{i \in I}{}^{*}_{\Omega} A_i \tag{4}$$

и если

$$A_i = \sum_{j \in J_i}{}^{*}_{\Omega} B_{ij}, \quad i \in I,$$

то

$$G = \sum_{i \in I, j \in J_i}{}^{*}_{\Omega} B_{ij}. \tag{5}$$

Разложение (5) будет называться **продолжением** разложения (4).

4. Если

$$G = \sum_{i \in I}{}^{*}_{\Omega} A_i$$

и если множество индексов I представлено как объединение непересекающихся подмножеств $I_s, s \in S$, то

$$G = \sum_{s \in S}{}^{*}_{\Omega} B_s,$$

где

$$B_s = \sum_{i \in I_s}{}^{*}_{\Omega} A_i.$$

5. Если

$$G=\sum_{i\in I}{}^{*}_{\Omega} A_i$$

и если заданы Ω-гомоморфизмы φ_i Ω-групп A_i в некоторую Ω-группу H, то существует, притом единственный, Ω-гомоморфизм $\varphi\colon G\to H$, совпадающий на A_i с φ_i, $i\in I$.

§ 5.

Теорема 5. Всякая Ω-подгруппа U свободной Ω-суммы Ω-групп H_i, $i\in I$, является свободной Ω-суммой ненулевых пересечений $U\cap H_i$, $i\in I$, свободных Ω-замыканий некоторых своих чистых подгрупп вида $U\cap(-g+H_i+g)$, $g\in G$, $i\in I$ (причем для всякого ненулевого пересечения такого вида свободное Ω-замыкание подгруппы, сопряженной с ним в U, входит в рассматриваемое свободное разложение для U) и, наконец, некоторой свободной Ω-группы.

В самом деле, пусть

$$G=\sum_{i\in I}{}^{*}_{\Omega} H_i$$

и пусть

$$G_0=\sum_{i\in I}{}^{*} H_i.$$

По теореме 2 подгруппа U будет свободным Ω-замыканием подгруппы U', являющейся свободной суммой пересечения $U\cap G_0$, некоторых подгрупп вида $U\cap(-g+G_0+g)$, $g\in G$, и свободной подгруппы. По теореме о подгруппах свободной суммы пересечение $U\cap G_0$ является свободной суммой ненулевых пересечений $U\cap H_i$, $i\in I$, некоторых подгрупп вида $U\cap(-g_0+H_i+g_0)$, $g_0\in G_0$, и некоторой свободной группы. Аналогичные свободные разложения существуют и для подгрупп $U\cap(-g+G_0+g)$.

Мы получаем новое свободное разложение для U', причем, в силу теоремы 2 и определения G_0 как частичной Ω-группы, U' будет такой частичной Ω-группой, что элемент $a_1a_2\ldots a_n\omega$ определен в ней тогда и только тогда, если все элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ принадлежат к одному и тому же пересечению $U\cap H_i$, причем элемент $a_1a_2\ldots a_n\omega$ принадлежит тогда к этому же пересечению. Отсюда, ввиду свойства 1, следует основное утверждение теоремы. Что же касается утверждения, высказанного в скобках, то оно вытекает из справедливости соответствующего утверждения в теореме 2 и в теореме о подгруппах свободной суммы групп без мультиоператоров.

§ 6.

Напомним, что идеал A Ω-группы G есть такой нормальный делитель группы G, что для любых $\omega \in \Omega$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n \in G$ имеет место включение

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)\omega \in b_1 b_2 \ldots b_n\omega + A. \tag{6}$$

Отметим еще одно свойство свободных Ω сумм:

6. Если $G = A \overset{*}{_\Omega} B$, то Ω-группа B Ω-изоморфна Ω-фактор-группе G по идеалу $\bar{A}$, порожденному A.

Для доказательства построим в G, как в свободном Ω-замыкании частичной Ω-группы $G_0 = A * B$, последовательность (2). Пусть уже доказано, что всякий элемент из G_k лежит в одном смежном классе по $\bar{A}$ с некоторым элементом из B — для $k=0$ это очевидно. Для того, чтобы доказать это утверждение для $k+1$, достаточно показать это для элемента вида $x_1 x_2 \ldots x_n\omega$, где $x_i \in G_k$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Однако, по индуктивному предположению

$$x_i = \bar{a}_i + \bar{b}_i, \quad \bar{a}_i \in \bar{A}, \quad b_i \in B, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

после чего остается воспользоваться включением (6). С другой стороны, $\bar{A} \cap B = 0$ ввиду 5.

Теорема 6. Если даны два свободных Ω-разложения Ω-группы G,

$$G = \sum_{i \in I}{}^{*}_{\Omega} A_i = \sum_{j \in J}{}^{*}_{\Omega} B_j, \tag{7}$$

то для них можно построить такие продолжения, слагаемые которых взаимно однозначно соответствуют друг другу, причем соответствующие слагаемые или совпадают — они имеют тогда вид $A_i \cap B_j$, — или являются свободными Ω-замыканиями сопряженных между собою чистых подгрупп, или же, наконец, являются изоморфными свободными Ω-группами.

В самом деле, мы получим искомые продолжения, если разложим на основании теоремы 5 всякое A_i, $i \in I$, относительно второго из разложений (7), всякое B_j, $j \in J$, — относительно первого из этих разложений, а затем разумным образом объединим слагаемые, являющиеся свободными Ω-группами. Всякое ненулевое пересечение $A_i \cap B_j$ войдет при этом свободным слагаемым в каждое из указанных продолжений.

С другой стороны, в первое [второе] продолжение входят также свободные Ω-замыкания некоторых чистых подгрупп вида $A_{i\alpha} = A_i \cap$

$\cap(-g+B_j+g)$ [соответственно вида $B_{j\beta}=B_j\cap(-g'+A_i+g')$]. Однако $B_{j\beta}$ сопряжено с пересечением $A_i\cap(g'+B_j-g')$, но, по теореме 5, в первое из рассматриваемых продолжений входит в качестве свободного слагаемого свободное Ω-замыкание некоторой сопряженной с этим пересечением подгруппы $A_{i\alpha}$. Так как эти рассуждения можно обратить и так как подгруппа $A_{i\alpha}$ не может быть сопряжена ни с какой другой подгруппой этого же вида и ни с каким пересечением вида $A_i\cap B_j$ — они входят свободными слагаемыми в одно и то же свободное разложение группы G, — то мы получаем взаимно однозначное соответствие и между рассматриваемыми свободными слагаемыми второго вида.

Наконец, объединения свободных слагаемых рассмотренных двух видов, взятые в каждом из продолжений, порождают в G один и тот же идеал. Отсюда следует, по свойству 6, что объединения свободных слагаемых из этих продолжений, являющихся свободными Ω-группами, Ω-изоморфны между собой. *Теорема доказана.*

§ 7.

Ω-группа G с абелевой аддитивной группой будет называться ΩA-группой. Аналогично определяется частичная ΩA-группа.

ΩA-группа G будет называться свободным ΩA-замыканием частичной ΩA-группы G_0, если 1. $G\supseteqq G_0$ и Ω-подгруппа, порожденная в G множеством G_0, совпадает с G; 2. группа G является прямой суммой группы G_0 и свободной абелевой группы, базу которой составляют всевозможные элементы вида $a_1a_2\dots a_n\omega$, где $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$, кроме таких, что все $a_1, a_2, \dots, a_n\in G_0$ и элемент $a_1a_2\dots a_n\omega$ был уже в G_0 определен.

Как и в § 1, доказывается

Теорема 1'. Для всякой частичной ΩA-группы G_0 свободное ΩA-замыкание существует и с точностью до Ω-изоморфизма, тождественного на G_0, определено однозначно.

Теорема 2'. Если ΩA-группа G является свободным ΩA-замыканием частичной ΩA-группы G_0, то всякая Ω-подгруппа U ΩA-группы G будет свободным ΩA-замыканием прямой суммы пересечения $U\cap G_0$ и некоторой свободной абелевой подгруппы.

Доказательство проходит по тому же плану, как и в § 2, но используется, понятно, не теорема о подгруппах свободного произведения, а следующее утверждение, доказываемое по существу так же, как теорема о подгруппах свободной абелевой группы в книге [3]:

Если абелева группа G является прямой суммой абелевой группы G_0 и свободной абелевой группы с базой M, то всякая подгруппа U группы G является прямой суммой пересечения $U \cap G_0$ и некоторой свободной абелевой группы, к базе которой принадлежит, в частности, всякий элемент из M, содержащийся в U.

Свободное ΩA-замыкание F свободной абелевой группы F_0 с базой N, причем для всех $\omega \in \Omega$ в F_0 выполняются равенства (1), называется свободной ΩA-группой, а множество N — ее системой свободных образующих.

Как и в § 3, доказываются теоремы:

Теорема 3'. Мощность системы свободных образующих является инвариантом свободной ΩA-группы.

Теорема 4'. Всякая Ω-подгруппа свободной ΩA-группы сама является свободной ΩA-группой.

Остается справедливым и замечание, что если система мультиоператоров Ω не является пустой, то в свободной ΩA-группе с одним образующим можно найти свободные ΩA-подгруппы с бесконечным множеством свободных образующих.

Литература

[1] P. J. Higgins, Groups with multiple operators, *Proc. London Math. Soc.*, **6** (1956), 366—416.

[2] С. Т. Завало, Операторные Γ-свободные группы, Мат. сборник, **33** (1953), 399—432.

3] А. Г. Курош, Теория групп, 2-е изд. (Москва, 1953).

(Поступило 31/I 1960 г.)