

SZEDERKÉNYI ANTALNÉ-TÜSKE MAGDOLNA

Szeged

## A racionális számok kivonásának tanításáról

„Minden megoldott probléma szabállyá vált,  
amely később más problémák megoldására szol-  
gált.”

(R. Descartes)

Az általános iskolai nevelés és oktatás tervében, a „Célok és feladatok”-ban a következőket olvashatjuk:

„A matematikatanítás célja a tanulók bevezetése a valóságos világ legáltaláno-  
sabb értelemben vett térformáinak és mennyiségi viszonyainak tudományába, *alkal-  
mazásra* képes, korszerű matematikai műveltség nyújtása, a matematikát kedvelő, be-  
csülő, értő, ismerő és *használni* tudó fiatalok nevelése.”

Tapasztalataink szerint nem minden tanuló tudja a megszerzett ismereteket alkal-  
mazni. Néha jobb képességű tanulóval is előfordul, hogy egy-egy feladatot elvileg  
jól megold, de megoldás közben a racionális számokkal hibásan számol, s ennek  
következtében a probléma megoldatlan marad. Különösen nehezen tanulják meg a  
gyerekek a kivonást a racionális számok körében. Joggal vetődik fel a kérdés: Mi  
lehet ennek az oka? Ha megtaláljuk az okot, akkor pedig: hogyan lehet könnyíteni  
a tanulást, szilárdabbá tenni az ismereteket?

Sokoldalú szemléltetés, sok gyakorlás szükséges ahhoz, hogy minden tanuló hibát-  
lanul tudjon racionális számot kivonni racionális számból.

A racionális szám fogalmával, a racionális számokkal végzett műveletekkel az  
oktatás és nevelés terve szerint a következő megosztásban találkoznak a tanulók:

A pozitív törtekkel már másodikban, a negatív szám fogalmával harmadik osz-  
tályban ismerkednek.

A 4. osztályosok már megkeresik az egyes racionális számok helyét a számege-  
nyesen is, beszélnek a számok abszolút értékéről, összehasonlítják a racionális számo-  
kat nagyságuk szerint, de ezek az ismeretek még nem tartoznak a törzsanyaghoz.

Az 5. osztályos követelmények között találjuk, még mindig nem a törzsanyagban,  
a negatív számok összeadását, kivonását. Ekkor még szabad a tanulóknak eszközo-  
kat használni, melyek segítségével végezhetik a negatív szám hozzáadását vagy  
kivonását.

A 6. osztályban már törzsanyag az alapműveletek végzése racionális számokkal,  
de még egész számokkal és könnyen szemléltethető törtekkel végeztessük a mű-  
veleteket.

A 7. osztályban újra foglalkozunk a racionális számokkal, illetve a velük végez-  
hető műveletekkel.

A racionális számok kivonását a megelőző években különböző módokon ismer-  
ték meg a tanulók, ezért a 7. osztályban az egyik fontos feladatunk az ismeretek  
szintetizálása.

Cikkünkben összefoglaljuk mindazokat a lehetőségeket, amelyek alapján taníthatjuk a kivonást a racionális számok halmazában. Ezt a teljesség igénye nélkül teszünk. Leírjuk, hogy gyakorlatban hogyan tudtuk ezt megvalósítani.

1. Pozitív számok körében akkor és csak akkor végezhető el a kivonás, ha a kisebbítendő nagyobb a kivonandónál. Tehát ha  $a > 0$  és  $b > 0$ , akkor  $a > b$  esetén  $a - b > 0$  és fordítva.

Ismerik a tanulók a különbség változásának mindkét tag (kisebbitendő és kivonandó) szerinti monotonitását is. Ezt a szabályszerűséget kiterjesztve juthatunk el a különbség meghatározásához (értelmezéséhez) olyan esetekben is, ahol a számok tetszőleges racionális számok. Ezt a kifejezést didaktikai okokból több lépésben végzzük. A következő példákön láthatunk egy ilyen többlépcsős kiterjesztést.

A különbség változását vizsgálva:

a) monoton csökkenést tapasztalunk, ha a kisebbítendő változatlan, a kivonandó pedig mindig ugyanannyival nő, illetve;

b) monoton növekedést tapasztalunk, ha a kisebbítendő változatlan és a kivonandót csökkentjük;

c) ha pedig a kisebbítendőt csökkentjük és a kivonandó változatlan a különbség csökkenését tapasztaljuk.

$$\begin{aligned} \text{a) } & (+4) - (+1) = (+3) \\ & (+4) - (+2) = (+2) \\ & (+4) - (+3) = (+1) \\ & (+4) - (+4) = 0 \\ & (+4) - (+5) = (-1) \\ & (+4) - (+6) = (-2) \end{aligned}$$

Pozitív szám kivonása a kisebbítendőnek a kivonandó abszolút értékével való csökkentését jelenti.

$$\begin{aligned} \text{b) } & (+4) - (+3) = (+1) \\ & (+4) - (+2) = (+2) \\ & (+4) - (+1) = (+3) \\ & (+4) - 0 = (+4) \\ & (+4) - (-1) = (+5) \\ & (+4) - (-2) = (+6) \end{aligned}$$

Ennek alapján azt mondhatjuk, hogy negatív szám kivonása a kisebbítendőnek a kivonandó abszolút értékével való növelését jelenti.

$$\begin{aligned} \text{c) } & (+4) - (-2) = (+6) \\ & (+3) - (-2) = (+5) \\ & (+2) - (-2) = (+4) \\ & (+1) - (-2) = (+3) \\ & 0 - (-2) = (+2) \\ & (-1) - (-2) = (+1) \\ & (-2) - (-2) = 0 \\ & (-3) - (-2) = (-1) \\ & (-4) - (-2) = (-2) \end{aligned}$$

Negatív számból negatív számot vonunk ki.

Megjegyzés: a sort máshol is kezdhetjük. Szerkeszthetünk még egy sort a negatív számból pozitív szám kivonására is.

$$\begin{aligned} \text{Pl.: } & (-3) - (-2) = (-1) \\ & (-3) - (-1) = (-2) \\ & (-3) - 0 = (-3) \\ & (-3) - (+1) = (-4) \end{aligned}$$

A sort mindegyik esetben addig folytathatjuk, amíg a tanulók fel nem ismerik az összefüggést.

2. Megvizsgáltatjuk a tanulókkal azt is, hogy a kapott különbséget és a kivonandót összeadva a kisebbítendőt kapjuk.

pl.:  $(+2) - (-2) = (+4)$      $(+4) + (-2) = (+2)$   
 vagy  $(-3) - (-2) = (-1)$      $(-1) + (-2) = (-3)$

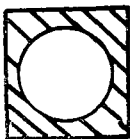
Tehát arra következtethetünk, hogy a monotonitási szabály érvényességének kiterjesztésével értelmezett kivonás fordított művelete az összeadásnak a racionális számok halmazán is.

Példáinkat csak az egész számok köréből vettük, de pl.:  $\frac{1}{2}$ -del,  $\frac{3}{4}$ -del való változtatással is eljárhatunk.

Véleményünk szerint, ha elegendő példát látnak a tanulók, képesek ebből is az algoritmus rögzítésére, de önmagában ez az értelmezés verbalizmushoz vezethet.

3. A tanulók számára nagyon szemléletes és meggyőző, ha a *kivonás* szó helyett az *elvétele* szót használjuk, és a következő szemléltető eszközt, az ún. számlapokat alkalmazzuk. Háromféle számlapunk van:

a) Lyukas négyzet, egy 6 cm oldalú négyzetből 4 cm átmérőjű körlapot kivesszünk.

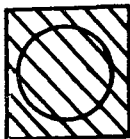


Ennek a lapnak az értéke:  $-1$  („ $-1$  lap”-nak is nevezhetjük).

b) Az előbbi négyzetből kivett 4 cm átmérőjű körlap, ennek az értéke  $+1$  ( $+1$  lap).

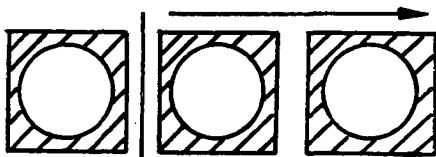


c) Négyzetlap, a lyukas négyzet és a körlap együtt, ennek az értéke 0. (Nulla lap.)



Ennek az egyszerű eszköznek a segítségével a következő módon szemléltethetjük a negatív számok kivonását:

a) A  $(-3) - (-2)$  kivonás elvégzése úgy történik, hogy felhelyezünk a vastáblára 3 db lyukas négyzetet ( $-1$  lapot), ez a kisebbítendő ( $-3$ ). A kivonandó ( $-2$ ), tehát egyszerűen leveszünk 2 db lyukas négyzetet, a különbség a táblán marad, ez 1 lyukas négyzet, a kivonás eredménye tehát  $(-1)$ .

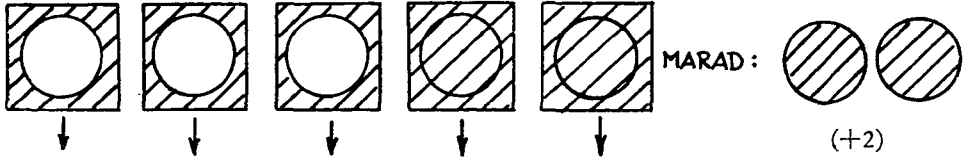


$$(-3) - (-2) = (-1)$$

b) A  $(-3) - (-5)$  értékének kiszámítása a számlapok segítségével szintén könnyű, ha az összeadás tanításakor felelevenítettük azt a tényt, hogy bármely racionális számhoz 0-t adva, magát a számot kapjuk eredményül. 5 lyukas négyzetet,  $(-5)$ -öt csak úgy tudunk elvenni, ha előbb 2 négyzetet (nulla lapot) teszünk a kisebbítendőnek megfelelő 3 lyukas négyzet mellé. (Ezzel a kisebbítendő nem változott.)

Most 5 lyukas négyzetet,  $(-5)$ -öt elveszünk, a táblán marad két körlap,  $(+2)$ . Ez a kivonás eredménye.

$$(-3) + 0 + 0$$



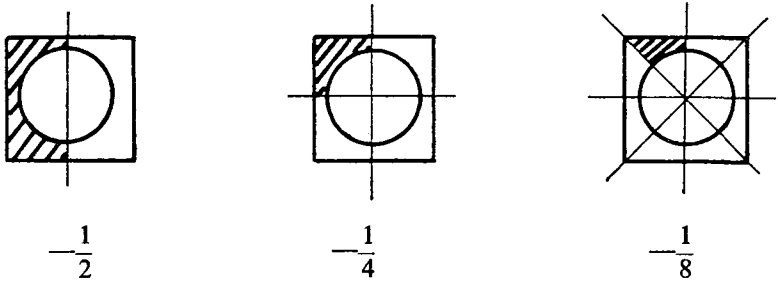
$$(-3) - (-5) = (+2)$$

c) Pozitív számból negatív szám kivonásának szemléltetése a b) esethez hasonlóan történik, ekkor annyi nulla lapot teszünk a kisebbítendő mellé, ahány  $(-1)$  lapot kell majd elvenni.

Az így kapott eredmények helyességét összeadás végzésével ellenőrizhetjük.

*Megjegyzés:* az eszközzel maguk a tanulók is manipulálhatnak. Minden tanulóval kartonból, vagy régi füzet fedeléből 10–15 db 3 cm oldalú négyzetet készítünk. A gyakorlati foglalkozáson 20 mm-es lyukasztóval (15 mm-es is jó) körlapokat vágatunk ki a négyzetekből. Borítékban magukkal hordják a gyerekek.

Ezt az eszközt főleg 5. és 6. osztályban használhatjuk, mivel a negatív törtek szemléltetése csak nehézkesen történhet. Elvileg lehetséges bármely tört szemléltetése, de csak felek, negyedek, nyolcadok esetén alkalmas erre ez az eszköz.



$$-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{8}$$

Tapasztalatunk szerint a gyerekek jobban elsajátítják így a negatív számok kivonásának végrehajtását, mint a vagyon-adósság cédulákkal.

4. Racionális számok összeadását számegyenesen való lépegetéssel is értelmeztük. Aszerint léptünk az első összeadandó helyétől a növekedés vagy a csökkenés irányába a második összeadandó abszolút értékének megfelelő hosszúságú szakasszal, hogy a második összeadandó pozitív vagy negatív volt-e.

Ha tanulóink már megértették, hogy negatív szám kivonása (elvétele) a kisebbítendőnek a szám abszolút értékével való növelését jelenti, akkor a kivonások elvégzését ábrázolhatjuk számegyenesen is.

Az összeadásra és kivonásra készített ábráink együttes elemzése után tudjuk csak a tanulókkal megfogalmaztatni, hogy negatív szám kivonása ugyanazt eredményezi, mint a vele egyenlő abszolút értékű pozitív szám hozzáadása. Innen már csak egy kis lépés azt beláttatni, hogy bármely racionális szám kivonását úgy végezzük, hogy az ellentettjét (vele egyező abszolút értékű ellenkező előjelű számot) hozzáadjuk a kisebbítendőhöz.

Ennek a többféle értelmezésnek (interpretálásnak) a szintézisét sikerült egy hallgatói bemutató tanításon megvalósítanunk.

Itt közöljük még ennek a tanítási órának a bő vázlatát és a lapozható táblára tervezett „tábla képé”-t.

Ezt az anyagot 7. osztályban az *Alapműveletek racionális számokkal* témakörön belül a 2. órában, a felső tagozatot tekintve a témakörnek kb. a 30. órájában tanítottuk.

Felhasználtuk a 7. osztályos ideiglenes tankönyvet és a „Munkalapok”-at, amelyet az általános iskolai matematikatanítási kísérlethez (7. osztály) készített az 1. sz. Gyakorló Általános Iskola matematika munkaközössége.

*A tanítás helye, ideje:* Juhász Gyula Tanárképző Főiskola 1. sz. Gyakorló Általános Iskolája, 7. a., 1979. november 16/1.

*Témakör:* Alapműveletek racionális számokkal.

*Tanítási egység:* Racionális szám kivonása.

*Az óra feladatai:*

*didaktikai:* Negatív szám kivonásának értelmezése. Racionális szám kivonásának bemutatása számegyenesen és számlapok segítségével. Annak bemutatása, hogy a kivonás racionális számok körében is az összeadás fordított művelete.

*képzési:* Számok helyének kijelölése a számegyenesen. A különbség változtatása, racionális szám kivonásának gyakoroltatása.

*nevelési:* Megfigyelőképesség, összehasonlító képesség és a logikus gondolkodás fejlesztése. Önálló, pontos, ütemes munkára való nevelés. A tanulói munka folyamatos ellenőrzése és értékelése során a gyermekek aktivizálása, gyengébb képességű tanulók sikerélményhez való juttatása.

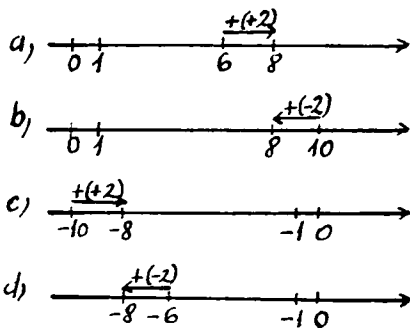
*Óratípus:* vegyes.

*Eszközök:* Írásvetítő, applikációs tábla, munkalap, számlapok.

*Tanít:* Tüske Magdolna, IV. évfolyam, matematika–fizika szak.

*Szakvezető:* Szederkényi Antalné.

Didaktikai mozzanatok, az óra felépítése	Az óra menete	Módszer, eszköz, munkaformák
Óra eleji teendők	I. a) Óra eleji teendők (jelentés, felszerelés előkészítése)	Írásvetítő alkalmazása. Ellenőrzés.
Ismeretanyag felelevenítése	b) Ideiglenes tankönyv 108. oldal 3. feladata. A házi feladat ellenőrzése.	
Ismétlés	II. Az elmúlt órán racionális számok hozzáadásáról tanultunk. Feladatokon keresztül ismétljük át a racionális számok hozzáadásáról tanultakat! ... a táblánál, a többiek pedig a füzetben dolgoznak.	
Ismeretanyag számonkérése	a) $(+6) + (+2) = 6 + 2 = 8$ b) $(+10) + (-2) = 10 - 2 = 8$ c) $(-10) + (+2) = -10 + 2 = -8$ d) $(-6) + (-2) = -6 - 2 = -8$	Utasítás, számonkérés. Ellenőrzés, rávezetés az esetleges hibára, javíttatás.



Individualizált munka. Szemléltetés számegegyenesen.

Ellenőrzés

- Milyen változtatást jelent pozitív szám hozzáadása? (növelést)  
 - Milyen változtatást jelent negatív szám hozzáadása? (csökkentést)

A felelő munkájának ellenőrzése.

Értékelés, motiváció.

Szintetizálás

III. Az 5. és 6. osztályban már tanultunk a racionális szám kivonásáról, a mai órán rögzítjük a szerzett tapasztalatokat.  
*Racionális szám kivonása*

Célkitűzés, a cím felírása

A füzetbe írjátok le a következő feladatokat egymás alá! (\*) (\*\*)

Tényanyag gyűjtése

e)  $(+8) - (+2) = +6 = (+8) + (-2)$   
 f)  $(+8) - (-2) = +10 = (+8) + (+2)$   
 g)  $(-8) - (+2) = -10 = (-8) + (-2)$   
 h)  $(-8) - (-2) = -6 = (-8) + (+2)$

Utasítás.

Szemléltetés applikációval.

Ábrázolás számegegyenesen.

Oldjuk meg ezeket a feladatokat a számlapok segítségével, s írjuk a megfelelő egyenlőséghez a végeredményeket! (L.\* oszlop)

Elemzés

$(+8) + [(+2) + (-2)] = +8$   
 $a + 0 = a$

A számlapoknál használjuk fel.

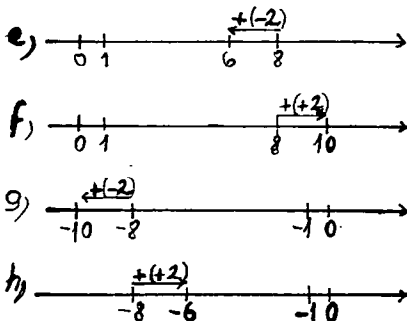
Hogyan juthatunk el az egyes esetekben a számegegyenesen a kisebbítendő helyétől a különbség helyéig? Jelöld nyilakkal! Milyen racionális számok hozzáadását mutatják a nyilak?

Tanulói manipuláció.

Mágneses táblán való bemutatás.

Bemutatás. A kivonási eljárás megsejtetése.

Tábla + füzet.



A feladat szemléltetése számegegyenesen.

Összehasonlítás

A kivonást mindegyik esetben összeadással helyettesítettük. Írjuk be ezeket az összefüggéseket az egyenlőségek megfelelő helyére! (L. \*\* oszlopban)

- Hasonlítsuk össze a műveleti jeleket az előzőekkel!

Általánosítás

Hogyan írhatjuk fel a racionális szám kivonását?

(Ellentettjét hozzáadjuk)

- Milyen változtatást jelent (pozitív) negatív szám kivonása?

Vizsgálj az összeadási és a kivonási sorozat egyes soraiban szereplő számokat! (kivonás ellenőrzése, kivonás az összeadás fordított művelete)

A 30. munkalap 1. táblázatába az  $a-b$  különbségeket írátk be.

Csak a  $-1$ -gyel kezdődő sorig és oszlopig töltsétek ki!

1. csoport - 1. oszlop

6. csoport - 6. oszlop

Figyelmesen dolgozzatok, amelyik csoportban mindenki elkészült, onnan valaki felírja a fóliára az oszlopában levő számokat.

Konkrét tények elemzése

Kivonás ellenőrzése, összehasonlítás

Tapasztalatszerzés, írásbeli rögzítés.

a b	+5	+4	+3	+2	+1	0	-1	-1
+5	0	1	2	3	4	5	6	7
+4	-1	0	1	2	3	4	5	6
+3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
+2	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
+1	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
0	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
-1	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
-2	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

Tények elemzése, összehasonlítás

Milyen szabályosságot tudtok megfigyelni az egyes oszlopokban szereplő különbségek esetében?

- Folytasd az 1. oszlop kitöltését a megfigyelt szabályosság alapján! Hasonló módon töltsd ki az első hat oszlopot!

- Hogyan folytathatnánk a táblázat kitöltését? Most a sorokban szereplő számokat figyeljétek meg!

- Mit változtattunk abban az esetben, mikor a sorokba írtuk be a különbségeket?

- Mit változtattunk abban az esetben, mikor az oszlopokba írtuk be a különbségeket?

- Hogyan vonunk ki racionális számot?

- Milyen változtatást jelent (pozitív) negatív szám kivonása?

V. Önállóan oldjátok meg a munkalap 30/2. b), c), d) feladatát!

b)  $(+1,4) - (-5,3) = +6,7$

c)  $0 - (+3) = -3$

d)  $0 - (-4) = +4$

A különbség változásainak vizsgálata

Elemzés

Megszilárdítás

Alkalmazás

Értékelés

VI. Házi feladat: tankönyv 112/4. kérdés 113/2. feladat

Lényegkiemelés, visszacsatolás.

Frontális osztálymunka.

Felszólítás, irányítás.

A munka beosztása.

Csoportmunka a munkalapban. Aktivizálás. Ellenőrzés és értékelés a munka folyamán.

Írásvetítő alkalmazása.

Utasítás. Egyéni munka. Írásvetítő alkalmazása.

Frontális osztálymunka.

Individualizált munka. Ellenőrzés, értékelés.

Az osztály és egyes tanulók órai munkájának értékelése. Motiváció.

## Tábla képe

A lapozható tábla feleléskor

	$(+6) + (+2) = 6 + 2 = 8$	
	$(+10) + (-2) = 10 - 2 = 8$	
	$(-10) + (+2) = -10 + 2 = -8$	
	$(-6) + (-2) = -6 - 2 = -8$	

A tábla a kivonás tanításakor

	$(+8) - (-2) = (+6) = (+8) + (+2)$	
	$(+8) - (+2) = (+6) = (+8) + (-2)$	
	$(-8) - (-2) = (-6) = (-8) + (+2)$	
	$(-8) - (+2) = (-10) = (-8) + (-2)$	

SZABÓ LAJOS  
Makó

## A helytörténet felhasználása a történelem tanításában

A szocialista nevelés nélkülözhetetlen része a szocialista hazafiságra és internacionalizmusra nevelés. A nevelés ezen területének megvalósításában a történelem tanításának kiemelkedő szerepe van. A történelem tanítása alkalmával ismerik meg tanulóink „... népünk anyagi és kulturális javakat termelő munkáját, a haladásért vívott harcának főbb eseményeit, azok okait, következményeit”. [1]

A hazaszeretet kialakításának egyik fontos része a szülőföld, a lakóhely múltjának megismerése, „felderítése” a tanulók által. Jelentős szerepet kapnak a helytörténeti séták, kirándulások. Ezek nagy mértékben növelhetik a tanítási óráink hatékonyságát.

Makónak sajnos kevés helytörténeti emléke maradt, ez azonban nem mentesíthet egyetlen történelemtanárt sem a város múltjának bemutatásától. Egyik alapvető követelmény, hogy a *tananyaghoz kapcsolódjanak* a helytörténeti séták. Egy kicsit távolabb is tekinthetünk, és Csongrád megye, Szeged jelesebb műemlékei, múzeumi gyűjteményeinek megtekintése is segíti munkánkat.