A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG TULAJDONSÁGAI

(5. osztály)

Témakör: A háromszög.
Oktatási cél: A háromszög és a derékszögű háromszög fogalmának kialakítása: oldalak nagysági viszonya, a szögek összege.
Nevelési cél: Ismeretek önálló megszerzésére való ösztönzés tanulói tevékenységek szervezésén és irányításán keresztül.
Szemléltető eszközök: Hurkapálcikák, négyzetlapok, téglalapok, rajzok.

A tanítás menete:

Az eszközök ellenőrzése: téglalap, négyzet, derékszögű vonalzó, olló. (Téglalap átellenes csúcsainál levő szögei pirosra, illetve kékre színezve!) Mivel új ismeret szerzése az óra súlyponti feladata, a számonkérés az aktuális ismétlés funkcióját tölti be. A síkidomok közül a négyzetről és a téglalapról tanultak már a gyerekek. A rájuk vonatkozó ismeretekből mindig csak problémánként idézzük fel azt, aminek a tudatba való hozása bizonyos mértékű irányítást adhat az új probléma, illetve feladat megoldásához.

I. probléma:

A legkevesebb oldalszámú sokszög (háromszög) körülhatárolása.

1. *A probléma előkészítése a feladatig.* Közöljük, hogy a téglalap és a négyzet teljesen körül van kerítve (táblai rajzon most is érzékeltetem), — tehát belsejéből kijutni nem lehet. Hogy ezt az erős körülkerítést jobban lássuk, rakjuk körül a négyzetet is és a téglalapot is hurkapálcikákkal. A táblára nehéz volna hurkapálcikákat felrakni, ezért a táblán ezt vastag krétavonallal jelöljük. Miután körülkerítettem, megkérdeztem: Mi helyett rajzoltuk körül a négyzetet és a téglalapot? Mit jelentenek a most meghúzott vonalak? Hány hurkapálcikára van szükség a négyzet és a téglalap körülkerítéséhez? Mi különbség van a négyzetet és a téglalapot körülhatároló pálcikák között?

Tehát a téglalap körülkerítéséhez is és a négyzet körülkerítéséhez is négy-négy darab hurkapálcika szükséges. Mind a két esetben egy hosszú hurkapálcikát négy darabra kellene törni, hogy körülkeríthessük a két idomot. Azt is látjuk, hogy a négyzetnél egyenlő darabokra kell törni a hosszú hurkapálcát, a téglalapnál pedig két egyenlő kisebb darabot, és két egyenlő nagyobb darabot kell letörnünk a körülkerítéshez.

2. *A feladat megjelölése:* Most az lesz a feladatotok, hogy az óra elején kapott hurkapálcika segítségével négynél kevesebb hurkapálcika darabbal kerítsetek körül egy részt az asztalotokon. Tehát mi lesz a feladat? Hány darab hurkapálcikával próbálkozhatunk tehát? — Mindenki érti tehát a feladatot. Még azt kell tudnotok, hogy a hurkapálcikadaraboknak nem kell egyenlőknek lenni. — Valaki elismétli a feladatot.

3. A tanulók próbálkozásai következnek ezután, amit a tanár figyelemmel kísér, hogy esetleg félreértések esetén egyéni, vagy egész osztálynak szóló kiegészítő útmutatást adjon.

4. A tanulók munkájának befejezése után a tapasztaltak számbavétele, értékelése, illetve elemzése következik, amit a következő kérdések alkalmazásával végezhetünk el:

— Kinek, hány hurkapálcika darabbal sikerült körülkeríteni egy részt az asztalon? (A 3-tól különbözőket javítjuk.)

— Hány hurkapálcika darabbal oldható meg a feladat?

— Minek felel meg ez a három hurkapálcika darab?

— Hány oldala van tehát az új idomnak? (Itt közöljük, hogy a most megismert síkidomnak a neve: háromszög.)

— Nézzük az oldalak találkozását is! — Hány csúcsa van tehát a háromszögnek?

— Minden csúcsnál (mutatom) mit találunk? — Hány szöge van a háromszögnek?

Tehát eljutottunk a háromszög fogalmához. Nem törekedtünk kötötten megfogalmazott definícióra, de a lényeges jegyeket megállapítottuk, s most összegezésképpen ezeket újra számba vehetjük azzal a kiegészítéssel, hogy az oldalaknak nem kell szükségképpen egyenlőknek lenniök.

Az új fogalom elmélyítése céljából az új idomot összevethetjük a korábban tanult idomokkal: a négyzettel és téglalappal. Ha az újonnan tanult, megismert idomot *háromszögnek* nevezzük, minek nevezhetjük a téglalapot és a négyzetet? Gondoljunk arra, hogy hány szöge van a háromszögnek és hány szöge van a négyzetnek és a téglalapnak. Következésképpen megállapíthatjuk, hogy *az idomokat aszerint nevezhetjük, hogy hány szögük van.*

A feladatmegoldás lezárásaként a tanulók végül azt a feladatot kapják, hogy mindenki figyelje meg a saját háromszögének *formáját, alakját,* mert felszólításra fel kell majd nekik rajzolni a táblára. Az egymás után következő felrajzolások után mindig azt kérdezzük, hogy van-e olyan háromszöge valakinek, amelyik nem hasonlít, vagy eltér a felrajzolttól. Az eredményekből azt a következtetést vonjuk le, hogy szinte annyiféle háromszög van a padokon, ahány tanuló van az osztályban. Ez természetes is, hiszen nem kötöttük meg, hogy mekkorák és milyenek legyenek a szögek és oldalak.

Ebből már sejthető a csoportosítás szükségessége, de nem utalunk rá, hanem egyszerűen azt jelentjük be, hogy érdekes eredményekhez juthatunk akkor is, ha nem hurkapálcikákkal alkotott háromszögeket vizsgálunk tovább, hanem más módon, másféleképpen.

II. probléma:

A derékszögű háromszög származtatása téglalapból, és ennek vizsgálata.

1. A feladat megjelölése és elvégzése.

A tanulók azt a feladatot kapják, hogy az otthon elkészített téglalapjukon húzzák meg a „piros" csúcsokat összekötő átlót, majd az átló mentén vágják ketté a téglalapot.

2. Az így nyert háromszög vizsgálata a következő kérdések alapján történhet, miközben megemlíthetjük azt is, hogy most a háromszögnek elsősorban a *szögei* érdekelnek bennünket.

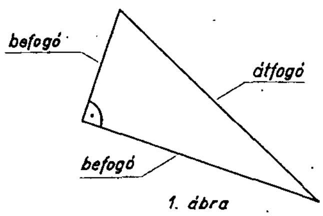
— Hogyan nevezhetjük az így nyert síkidomokat?

— Milyen típusú szögei vannak?

— Melyik a legnagyobb szöge?

Az ilyen típusú háromszögeket, *derékszögű háromszögeknek* nevezzük.

A fontos megállapítás rögzítése céljából felírjuk a táblára a megismert síkidom nevét, és felrajzoljuk általános alakban. (1. ábra.)



1. ábra

A tanulók is rajzolják az ábrát a nevelő útmutatása szerint, amelynek az a célja, hogy ne speciális helyzetben kerüljön rögzítésre az új síkidom. Az elkészült ábrán jelöljük a *befogókat* és az *átfogót.* Ezek az elnevezések különösebb értelmezést nem igényelnek.

Gyakorlásképpen azonban megkerestetjük a befogókat és az átfogókat a derékszögű vonalzójukon és a kapott derékszögű háromszögeken is. Ugyancsak gyakorlás célját szolgálja az a munka is, hogy az előbbi feladatban kirakott háromszöget alakítsák át szintén derékszögű háromszöggé.

III. probléma:

Annak igazolása, hogy a kapott *két háromszög egybevágó,* és hogy *a háromszögek szögeinek összege 180°.*

1. A tanulók azt a feladatot kapják, hogy a kapott két háromszöget helyezzék egymásra. Az egymásra helyezés módját a tanár előmutatja. Megállapítjuk, hogy a két háromszög fedi egymást, tehát egybevágó. — Itt a feladat elvégzése és a megállapítás megfogalmazása alig választható szét, mert a kettő együtt kölcsönösen nyilvánvalóvá teszi egymást a fogalmak ismert volta folytán.

2. Abból az előbbi két tényből, hogy a két háromszöget téglalapból vágtuk ki és hogy az így nyert két derékszögű háromszög egybevágó, következik az, hogy a derékszögű háromszög szögeinek összege 180°, illetve két derékszög.

A törvényszerűség beláttatása érdekében a következő elemző kérdéseket alkalmazhatjuk:

— Milyen szögei voltak az eredeti téglalapnak?

— Hány derékszöge volt?

— A szétvágás során hová kerültek ezek a szögek? És hogyan?

Tehát a két háromszöghöz kerültek, és így az egyik is és a másik is összegszerűen két-két derékszöget tartalmaz. De ebből az is következik, hogy két hegyesszög összegéből adódik a másik derékszög. Ezt az összefüggést még kétféleképpen is igazolhatjuk:

a) A négy hegyesszög a két „piros" derékszög szétvágásából adódott. Mivel a hegyesszögek is fedik egymást, nyilvánvaló, hogy a hegyesszögek összege is egyenlő a két háromszögben. Vagyis a két (piros) derékszöget egyenlően osztottuk meg a két háromszög között. Egyik-egyik háromszögben tehát a hegyesszögek összege: 90°.

b) Külön is megvizsgáljuk az egyik háromszöget a tétel szemléletes értelmezése végett. Mégpedig úgy, hogy a két hegyesszöget a derékszöggel fedésbe hozzuk azáltal, hogy ráhajtjuk.

Ezzel megoldottuk a tervezett feladatokat. Az a dolgunk lehet még, hogy a tanultak megerősítése céljából többé-kevésbé önálló gyakorlatot végzünk.

IV. probléma:

Gyakorlatok:

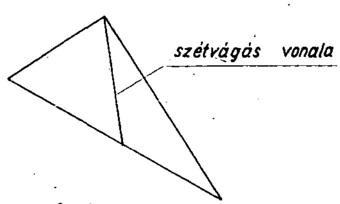
1. Szétvágatjuk a négyzetet is két derékszögű háromszögre. Az így kapott két derékszögű háromszögről először a korábbi megállapításokat ismételtetjük el, majd azt a fel-

adatot adjuk, hogy állapítsák meg, milyen különbségek találhatók a téglalapból és a négyzetből nyert derékszögű háromszögek között.

2. Próbáljanak meg *olyan háromszöget összeállítani, amelynek két derékszöge van.* Rövid kísérlet után megkérdezzük, hogy lehetséges-e ez, vagy miért nem lehetséges? Indoklásképpen arra kell emlékezniök a tanulóknak, hogy egy egyenesre bocsátott két merőleges egymással párhuzamos, tehát nem alkothatnak szöget. Továbbá, hogy a háromszögeknek három szögük van, és derékszögű háromszög esetén a szögek összege 180°, ami nem engedi meg, hogy két derékszög egy háromszögben szerepeljen.

V. probléma:

A házi feladat előkészítése és megjelölése. Az egyik derékszögű háromszög átfogóján kijelölünk egy pontot és összekötjük a derékszög csúcsával. (2. ábra.)



2. ábra

Milyen szögfajtákat találunk az így kapott két háromszögben?

A derékszögű háromszöget tehát szét tudjuk vágni nem derékszögű háromszögekre! A tulajdonképpeni feladat: A legutóbb kapott két háromszöget és a derékszögű háromszögeket is szét lehet vágni két-két derékszögű háromszögre egy egyenes mentén. Otthon ezt a vonalat húzzátok be a háromszögekbe.

Megjegyzés:

Az óra felépítése olyan, hogy a tanulók az átlagosnál nagyobb önálló szerepet kapnak. Ez szükségessé tesz olyan feladatok beiktatását, amelyre esetleg egyáltalán nem kerülhet sor, de szükség esetén jól illeszkedik az órába. Ilyen lenne az alább közölt versenyfeladat. Ezután pedig ismertetek olyan feladatot, amelynek problémamegoldásai a következő órákon is szerepelhetnek. Hogy mégis itt közlöm már, ennek célja az, hogy rámutassak, miként próbáljuk a szaktárgyi érdeklődését ébren tartani és erősíteni egy *témán* belül.

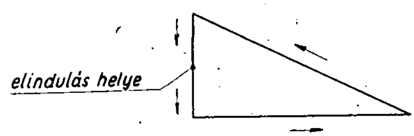
1. *Versenyfeladat.*

a) Megállok az osztállyal szemben és helyben elfordulok, amíg újra velük szembe nem kerülök. Kérdés: Hány fokkal fordultam el?

b) Körülkerülöm az asztalt. Kérdés: Most hány fokkal fordultam el?

c) A derékszögű háromszög mentén megyek körbe. Kérdés: Most mennyi az elfordulás?

Felvázolom a táblára az utamat. (3. ábra.)

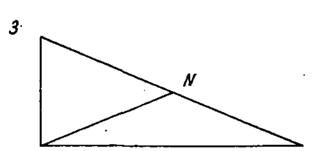


3. ábra

A gyerekek segítenek a hegyesszögek beírásánál. A beírás becslés és kiegészítés alapján történik. Kérdés: Hány fokot kell elfordulni egy-egy csúcsnál? Ha a válasz a beírt fokok mennyiségének, illetve összegének megnevezésével történik, adódik a probléma: Az előbb már láttuk, hogy 360°-ot kell elfordulni, a legutóbbi pedig csak 180°-ot mutat. Hogyan lehet ez?

2. A másik természetű feladat ismertetése előtt méréseket kell végezni az oldalak nagysági viszonyainak észrevétetésére. Mérési feladat: Egy-egy számmal jelezzük a legkisebb, a közepes, a legnagyobb oldalt (I—II—III). Ezt a három számot ráírják a háromszög megfelelő oldalára. Kérdés: Szabály-e, hogy az átfogó a legnagyobb? Tudná-e valaki bizonyítani a téglalap átlójának felhasználásával? Ha nem tudják, megelégszünk a sok azonos mérési eredmény valószínűségerejű következtetésével.

A tulajdonképpeni kérdés pedig így szól: Rajzoljátok meg egy derékszögű háromszöget fekvő helyzetben. Jelöljük meg a csúcsokat 1—2—3 számokkal. Az átfogó közepén pedig vegyünk fel egy pontot. Jelöljük N-nel. — (4. ábra.)



4. ábra

Az 1—2—3 és az N-nel jelölt helyeken lakások vannak. A számokkal jelöltben laknak az unokák, az N-nel jelöltben pedig lakik a nagymama. Az N-ből a háromszög kerületén vezetnek az utak az unokákhoz. De van egy út, amely az N-ből a derékszögnél levő 1-es számú lakáshoz vezet. Egy alkalommal a nagymama meg akarja látogatni unokáit, de úgy, hogy az utolsónál meg is alszik. Kérdések: Hány lehetősége van nagymamának? — A nagymama mennél kevesebbet szeretne gyalogolni. Melyik lehetőséget válassza? — A feladatot mérésekkel és bizonyításokkal is megoldhatjuk. Ki-ki azt választja, amelyiket akarja.

E két fő kérdés megoldása egész sor mellékproblémát, de nem mellékes problémát vet fel, és ezeken keresztül matematikus gondolkodásra nevel. Pl. észre kell venni, hogy 1N+N2 hossza = átló hossza, pedig nem esnek egyenesbe. Vagy: Ha nem az 1-el kezdi, akkor nem használhatja az N1 utat, mert a szomszédokhoz egyenes (törés nélküli) út is vezet. Ha a feladatot azzal bővítjük, hogy a nagymama hazamegy, akkor az esetek könnyebben áttekinthetők:

a) A nagymama vagy megteszi az egész kerületnyi utat=a+b+c.

b) Vagy az egyik befogó kimarad és helyette még egyszer belép az átfogó. Ez esetben jól látszik, hogy a+b+c kisebb, mint a+c+c és ez is kisebb mint b+c+c.

Tehát három különböző eset van, ugyanakkor bármelyiből megy is haza, még félátlónyi utat kell megtenni. Azaz: az egyenlőtlenségek ugyanúgy fennállnak. A két feladat megoldása azonos!

Mint látható, ez a feladat több, önmagában is érdekes problémákat tartalmaz. Szinte biztos, hogy ha egyáltalán sor is kerül a feladatra, akkor is csak legfeljebb egy-két kérdésre jut idő. A derékszögű háromszögek témakörén belül azonban a már ismertetett céllal mindig beiktatható egy-egy további kérdés. Esetleg otthonra is megjelölhető egyik-másik versenyfeladatnak.

Bálint József,
Eger, Tanárképző Főiskola