Acta Academiae Paedagogicae Szegediensis, 1987—1988.
Series Physica, Chemica, Mathematica, pp. 29—34.

К ВОПРОСУ О ВАРИАЦИОННОЙ ТЕОРИИ F-ПЛАНАРНЫХ КРИВЫХ

И. Н. КУРБАТОВА—Н. В. ЯБЛОНСКАЯ
Одесса

В последние десятилетия отечественными и зарубежными авторами обстоятельно исследовались всевозможные обобщения теории геодезических отображений аффинносвязных и римановых пространств. Пожалуй, наиболее широкое обобщение — так называемые F-планарные отображения пространств аффинной связности без кручения с аффинорной структурой — было предложено проф. Синюковым Н. С. и Микешем Й. [1]. В основу этой теории положено понятие F-планарных кривых [2], в свою очередь обобщающих геодезические линии. Классу F-планарных кривых, помимо геодезических, принадлежат также известные аналитически-планарные кривые на комплексных многообразиях [3], квазигеодезические линии в теории наблюдаемых [4] и др.

Изучение диффеоморфизмов многообразий, при которых заданные кривые переходят в кривые того или иного типа, представляет интерес не только для геометрии многообразий, но и с прикладной точки зрения. Так, например, в теории моделирования физических полей решается задача о возможности моделирования движения пробной частицы в одном поле ее движением в другом поле, причем траектории частицы в различных полях определяются их энергетическими режимами.

Очевидным является факт, что глобальные свойства, а также существование (или несуществование) упомянутых выше диффеоморфизмов многообразий во многом зависят от экстремальных свойств отображаемых кривых. Поэтому целью настоящей работы является изучение F-планарных кривых именно с вариационной точки зрения.

1. По определению [1], кривая $\gamma: x^h = x^h(1)$, $h = 1, 2, \ldots, n$, пространства аффинной связности без кручения A_n, отнесенного к системе координат $x^1, x^2 \ldots, \ldots, x^n$, в котором определена аффинорная структура $F_i^h(x) \neq a\delta_i^h$, где a — некоторый инвариант, называется F-планарной, если ее касательный вектор $\dot{x}^h(t)$ $(\neq 0)$ при параллельном перенесении вдоль нее остается в площадке, образованной касательным вектором $\dot{x}^h$ и вектором $F_\alpha^h \dot{x}^\alpha$. В соответствии с этим кривая γ является F-планарной тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\nabla_{\dot{x}} \dot{x}^h = \varrho_1(t)\dot{x}^h + \varrho_2(t) F_\alpha^h \dot{x}^\alpha,$$

где ϱ_1, ϱ — некторые (произвольные) функции параметра t, $\nabla_{\dot{x}}$ — ковариантная производная по связности A_n в направлении векторного поля $\dot{x}^h$. Через любую точку в каждом направлении проходит множество F-планарных кривых, зависящих от одной произвольной функции.

Прежде всего нам следовало бы подобрать соответствующую вариационную задачу таким образом, чтобы ее решениями являлись если не произвольные F-планарные кривые, то достаточно широкий их класс.

Пусть $(\mathbf{V}_n, g)$ — n-мерное риманово пространство, отнесенное к системе координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$; $P=(x_1^1, \ldots, x_1^n)$, $Q=(x_2^1, \ldots, x_2^n)$ — фуксированная пара точек; $\gamma: x^i=x^i(t)$, $a \geqq t \geqq b$ (с фиксированными a, b) — множество кривых, содержащих эти точки: $P=(x^i(a))=(x_1^i)$, $Q=(x^i(b))=(x_2^i)$.

Рассмотрим функционал вида

$$S[\gamma] = \int_P^Q (1/2\, g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \varrho(t) A_\alpha \dot{x}^\alpha)\, dt. \tag{1}$$

Не вдаваясь в подробности, отметим, что лагранжиан

$$L = 1/2\, g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \varrho(t) A_\alpha \dot{x}^\alpha$$

мы выбрали по аналогии с известным в электродинамике классическим действием для зарядов, движущихся в электромагнитном поле [5] (в этом случае A_α — вектор-потенциал электромагнитного поля, а фигурирующий далее в уравнениях Эйлера—Лагранжа объект $\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} = F_{ij}$ — тензор электромагнитного поля; функция $\varrho(t)$ выражает плотность распределения заряда в пространстве; второе слагемое под интегралом характеризует взаимодействие между частицами и полем).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Уравнения Эйлера-Лагранжа для экстремалей функционала (1) имеют вид:*

$$\ddot{x}^j + \Gamma^j_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -\varrho(t) F^j_\alpha \dot{x}^\alpha - \dot{\varrho}(t) A^j, \tag{2}$$

где $\Gamma^j_{\alpha\beta}$ — *симметрическая связность, согласованная с метрикой* g_{ij},

$$A^j = A_\alpha g^{\alpha j}, \quad F^j_i = g^{j\alpha} F_{\alpha i}, \quad F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}. \tag{3}$$

Доказательство проводится стандартным образом [6].

Итак, наше $\mathbf{V}_n$ наделено аффинорной структурой F_i^h, порожденной ковекторным полем A_i («вектором-потенциалом»), причем соответствующая 2-форма F_{ij} замкнута в силу (3).

Уравнения (2) определяют при $\varrho(t) \equiv 0$ (взаимодействия нет, т. е. частица не заряжена) — геодезические линии, при $\varrho(t) \equiv const$ (плотность распределения заряда в пространстве постоянна) — особый класс F-планарных кривых, в частности, в случае, когда F_i^j — комплексная структура — аналитически-планарные кривые.

Как известно, выполнение уравнений Эйлера-Лагранжа для экстремалей функционала $S[\gamma]$ является лишь необходимым условием того, что вдоль некоторой кривой γ функционал $S[\gamma]$ имеет минимум среди всех кривых, соединяющих точки P, Q. Достаточное условие (при выполнении необходимого) состоит в пложительной определенности квадратичной формы $G_\gamma(\xi, \xi)$, соответствующей билинейной форме) второй вариации)

$$G_\gamma(\xi, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial\lambda\, \partial\mu} S[\gamma + \lambda\xi + \mu\eta]_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda=0}},$$

определенной на векторных полях, заданных на кривой $\gamma(t)$ и орбаращющихся в нуль в точках $\gamma(a)=P$ и $\gamma(b)=Q$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Билинейная форма*

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\mu} S[\gamma+\lambda\xi+\mu\eta]_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0}} = G(\xi,\eta)$$

для

$$S = \int\limits_a^b \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + \varrho(t) A_\alpha \dot{x}^\alpha\right) dt$$

и любой экстремали $\gamma: x^i=x^i(t)$, $a\leqq t\leqq b$, *вдоль которой выполняются* (2), *имеет вид*

$$G_\gamma(\xi\eta) = -\int\limits_a^b (\nabla_{\dot{x}}^2\xi^i - R^i_{\alpha\beta\gamma}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\xi^\gamma + \varrho(t)(\underset{\xi}{L}F^i_\alpha)\dot{x}^\alpha + \dot{\varrho}(t)\underset{\xi}{L}A^i)\eta^m g_{im}\, dt =$$

$$= -\int\limits_a^b (J\xi)^i g_{ij}\eta^j\, dt, \tag{4}$$

где

$$(J\xi)^i = \nabla_{\dot{x}}^2\xi^i - R^i_{\alpha\beta\gamma}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\xi^\gamma + \varrho(t)\left(\underset{\xi}{L}F^i_\alpha\right)\dot{x}^\alpha + \dot{\varrho}(t)\underset{\xi}{L}A^i,$$

R^i_{jkl} — *тензор кривизны* $\mathbf{V}_n$, $\underset{\xi}{L}$ — *производная Ли вдоль векторного поля.*

Доказательство получается непосредственным вычислением второй вариации для лагранжиана $L=\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta+\varrho(t)A_\alpha\dot{x}^\alpha$ с учетом (2), (3).

Напомним, что векторное поле ξ вдоль экстремали γ идущей из P в Q, называется якобиевым, если оно есть решение уравнения Якоби $J\xi=0$ и обращается в нуль на концах P и Q.

Итак, поле Якоби вдоль экстремали (2) характеризуется уравнениями

$$\nabla_{\dot{x}}^2\xi^i - R^i_{\alpha\beta\gamma}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\xi^\gamma + \varrho(t)\left(\underset{\xi}{L}F^i_\alpha\right)\dot{x}^\alpha + \dot{\varrho}(t)\underset{\xi}{L}A^i = 0 \tag{5}$$

представляющих собою систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка и, следовательно, однозначно определяется значениями ξ и $\nabla_{\dot{x}}\xi$ в одной точке $(x^i(\mathrm{a}))$ кривой γ. Множество полей Якоби вдоль экстремали (2) функционала (1) есть, очевидно, векторное пространство над $\mathbf{R}$ размерности $2n$.

2. Возврашаясь к вопросу о кривых, вдоль которых функционал $S[\gamma]$ имеет минимум, сформулируем утверждение:

ТЕОРЕМА 3. Если A^i — киллингово векторное поле, то на достаточно малом интервале длин кривые (2) с уравнениями $x^i=x^i(t)$, $a\leqq t\leqq b$, дают минимум функционала (1) $S[\gamma]$ среди всех гладких кривых, соединяющих точки $P=(x^i(a))$ и $Q=(x^i(b))$.

Доказательство. Как мы уже говорили, условие минимальности экстремали $\gamma(t)$ функционала $S[\gamma)$ состоит в том, что квадратичная форма $G_\gamma(\xi,\xi)$ положительная для всех векторных полей ξ, обращающихся в нуль на концах.

Из (4) следует:

$$G_\gamma(\xi, \xi) = -\int_a^b (\nabla_{\dot x}^2 \xi^i - R^i_{\alpha\beta\gamma}\dot x^\alpha \dot x^\beta \xi^\gamma + \varrho(t)(\underset{\xi}{L}F^i_\alpha)\dot x^\alpha + \dot\varrho(t)\underset{\xi}{L}A^i) g_{ij}\xi^j\, dt.$$

Интегрирование по частям с учетом равенств $\xi(a)=\xi(b)=0$ дает нам:

$$G(\xi, \xi) = \int_a^b [\nabla_{\dot x}\xi^i g_{ij}\nabla_{\dot x}\xi^j + (R^i_{\alpha\beta\gamma}\dot x^\alpha \dot x^\beta \xi^\gamma + \nabla_{\nabla_{\dot x}\dot x}\xi^i - \varrho(t)(\underset{\xi}{L}F^i_\alpha)\dot x^\alpha - \dot\varrho(t)\underset{\xi}{L}A^i) g_{ij}\xi^j]\, dt.$$

Ввиду того, что A^i — вектор Киллинга и на основании (2) последние три слагаемых под интегралом дают нуль. Далее, для достаточно малого интервала длин Δl имеет место оценка [6]

$$\left|\int_a^b R^i_{\alpha\beta\gamma}\dot x^\alpha \dot x^\beta \xi^\gamma g_{ij}\xi^j\, dt\right| < c(\Delta l)\int_a^b \nabla_{\dot x}\xi^i g_{ij}\nabla_{\dot x}\xi^j\, dt,$$

где $c(\Delta l)$ — некоторая константа, зависящая от метрики g_{ij} и длины Δl, причем $c(\Delta l)\to 0$ $\Delta l\to 0$. Учитывая положительную определенность метрики g_{ij}, получаем $G_\gamma(\xi, \xi) > 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если векторное поле A^i порождает однопараметрическую группу движений, то несложно показать инвариантность лагранжиана $L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\dot x^\alpha \dot x^\beta + \varrho(t) A_\alpha \dot x^\alpha$ относительно этой группы. Следовательно, выполняется закон сохранения компоненты импульса вдоль поля A^i [6]

$$\frac{d}{dt}\left(A^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot x^\alpha}\right) = \frac{d}{dt}(A_\alpha \dot x^\alpha + \varrho(t) A_\alpha A^\alpha) = 0.$$

Это обстоятельство само по себе интересно, однако в рамках настоящей работы использоваться не будет.

3. Известным является факт, что поле Якоби вдоль геодезической в аффинносвязном пространстве $\mathbf{A}_n$, рассматриваемое как кривая в его касательном расслоении $\mathbf{TA}_n$, есть геодезическая относительно связности полного лифта [7].

В рассматриваемом случае также справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Поле Якоби вдоль экстермали функционала* (1) $\gamma: x^i = x^i(t)$, $a \leq t \leq b$, риманова пространства $\mathbf{V}_n, g)$, *рассматриваемое как кривая в его касательном расслоении* $\mathbf{TV}_n$ *с метрикой полного лифта* ${}^c g$, *и обратно.*

Доказательство. Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^{2n}, x^{n+1}, \ldots, x^{2n}$ — локальная система координат в $\mathbf{TV}_n$, индуцированная системой координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ в $\mathbf{V}_n$. Условимся в дальнейшем, что индексы $i, j, k, \alpha, \beta, \ldots$ принимают значения $1, 2, \ldots, n$, а прописные $T, J, A, B, \ldots$, — $1, 2, \ldots, 2n$. Если Γ — риманова связность многообразия $\mathbf{V}_n$ относительно (псевдо) римановой метрики g, то ${}^c\Gamma$ (полный лифт связности Γ) есть риманова связность в $\mathbf{TV}_n$ относительно (псевдо) римановой метрики ${}^c g$ (полного лифта метрики g) [7]. Напомним выражение компонент объекта связности ${}^c\Gamma$ в индуцированных координатах:

$$
\begin{gathered}
{}^c\Gamma^i_{jk} = {}^c\Gamma^{i+n}_{j,k+n} = {}^c\Gamma^{i+n}_{j+n,k} = \Gamma^i_{jk}, \\
{}^c\Gamma^{i+n}_{j+n,k+n} = {}^c\Gamma^i_{j,k+n} = {}^c\Gamma^i_{j+n,k} = {}^c\Gamma^i_{j+n,k+n} = 0, \\
{}^c\Gamma^{i+n}_{jk} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} x^{l+n},
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где Γ^i_{jk} — компоненты объекта связности $\mathbf{V}_n$ в локальных координатах $x^1, x^2, \ldots, \ldots, x^n$.

Нам понадобятся также полные лифты тензорного поля $F\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и векторного поля A из $\mathbf{V}_n$ в $\mathbf{TV}_n$ [7]:

$$
{}^cF = F^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j + \frac{\partial F^i_j}{\partial x^k} x^{k+n} \frac{\partial}{\partial x^{i+n}} \otimes dx^j + F^i_j \frac{\partial}{\partial x^{i+n}} \otimes dx^{j+n}, \tag{7}
$$

$$
{}^cA = A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial x^j} x^{j+n} \frac{\partial}{\partial x^{i+n}};
$$

С функционалом (1) на $\mathbf{V}_n$ естественным образом ассоциируется функционал на $\mathbf{TV}_n$

$$
\tilde{S}[\tilde{\gamma}] = \int_a^b \left(\frac{1}{2} g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B + \varrho(t) A_B \dot{x}^B\right) dt, \tag{8}
$$

где g_{AB} и A_B — полные лифты метрики g_{ij} и поля A_i из $\mathbf{V}_n$ в $\mathbf{TV}_n$, соответственно.

Вдоль экстремали $\tilde{\gamma}: x^I = x^I(t)$, $a \leqq t \leqq b$, функционала $\tilde{S}[\tilde{\gamma}]$ в $\mathbf{TV}_n$ по необходимости выполняются уравнения (2):

$$
\ddot{x}^I + \Gamma^I_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B = -\varrho(t) F^I_A \dot{x}^A - \dot{\varrho}(t) A^I, \tag{9}
$$

где

$$
F_{JI} = g_{JA} F^A_I, \quad F_{JI} = \frac{\partial A_J}{\partial x^I} - \frac{\partial A_I}{\partial x^J}.
$$

Поскольку для любой дифференциальной формы φ на $\mathbf{V}_n$ имеет место равенство [7]

$$
{}^c(d\varphi) = d({}^c\varphi),
$$

аффинор F^I_J в конечном счете есть полный лифт из $\mathbf{V}_n$ в $\mathbf{TV}_n$ аффинора F^I_J.

Учитывая (6), (7), запишем (9) в виде системы уравнений:

$$
\ddot{x}^i + \Gamma^i_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -\varrho(t) F^i_\alpha \dot{x}^\alpha - \dot{\varrho}(t) A^i, \tag{10}
$$

$$
\begin{gathered}
\ddot{x}^{i+n} + \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^\alpha} x^{\alpha+n} \dot{x}^j \dot{x}^k + 2\Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^{k+n} = \\
= -\varrho(t)\left(\frac{\partial F^i_\alpha}{\partial x^k} x^{k+n} \dot{x}^\alpha + F^i_\beta \dot{x}^{\beta+n}\right) - \dot{\varrho}(t) \frac{\partial A^i}{\partial x^\alpha} x^{\alpha+n}.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Отсюда видно, что экстремаль (9) в $\mathbf{TV}_n$ проектируется на экстремаль (2)$b\mathbf{V}_n$.

Далее, на основании (10)

$$\ddot{x}^{i+n}=\frac{\partial^2 x^{i+n}}{\partial x^j\partial x^k}\dot{x}^j\dot{x}^k-\frac{\partial x^{i+n}}{\partial x^j}\left(\Gamma^j_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta+\varrho(t)F^i_\alpha\dot{x}^\alpha+\dot{\varrho}(t)A^i\right)$$

и потому после несложных, но громоздких выкладок (11) могут быть представлены в форме

$$(\nabla_\beta\nabla_\alpha\xi^i-R^i_{\alpha\beta\gamma}\xi^\gamma)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta+\varrho(t)\big(\underset{\xi}{L}F^i_\alpha\big)\dot{x}^\alpha+\dot{\varrho}(t)\underset{\xi}{L}A^i=0, \tag{12}$$

где $\xi=(\xi^i)\overset{\text{def}}{=}(x^{i+n})$. Следовательно, $\xi^i(t)=x^{i+n}(t)$ есть поле Якоби вдоль экстремали (2) с уравнениями $x^i=x^i(t)$ в $\mathbf{V}_n$.

Обратно, если $\gamma: x^i=x^i(t)$, $a\leqq t\leqq b$, есть экстремаль функционала (1) на $\mathbf{V}_n$, а $\xi^i(t)$ — поле Якоби вдоль нее, то представляя (12) в виде (11), где $\xi^i(t)=x^{i+n}(t)$, получаем кривую $\tilde{\gamma}: x^I=x^I(t)$, $a\leqq t\leqq b$, в $\mathbf{TV}_n$, удовлетворяющую уравнениям (9) и, значит, являющуюся экстремалью функционала (8) на $\mathbf{TV}_n$. Теорема доказана.

Аналогия последнего утверждения с соответствующим утверждением для геодезических линий наводит на мысль о том, что ситуация, изложенная в Теореме 4, возможно, имеет место для экстремалей любого функционала и полей Якоби вдоль нее, однако проверка этого факта не входила в наши планы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Й. Микеш, Н. С. Синюков: О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности. — Изв. вузов. Матем, 1983, № 1, с 55—61.

[2] Н. С. Синюков: Геодезические отображения римановых пространств. — М. Наука, 1979. — 256. с.

[3] Д. В. Беклемишев: Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. — Итоги науки. Геометрия. М., ВИНИТИ АН СССР, 1963, с. 165—212.

[4] А. З. Петров: Моделирование физических полей. — В сб.: Гравитация и теория относительности. Казань, 1968, вып. 4—5, с. 7—21.

[5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифщиц: Механика. Электродинамика. — М.: Наука, 1969.

[6] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко: Современная геометрия. — М.: Наука, 1986.

[7] K. Yano, S. Kobayashi: Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles I. J. Math. Soc. Japan, vol. 18, №. 2, 1966. p. 194—210.

AZ F-PLANÁRIS GÖRBÉK VARÁCIÓS ELMÉLETÉNEK KÉRDÉSÉHEZ

I. N. KURBATOVA, N. V. JABLONSZKAJA

Jelen dolgozatban a szerzők egy olyan variációs feladatot vizsgálnak, amely az elektromágneses térben levő töltés mozgásának klasszikus leírását általánosítja. Bizonyos funkcionál görbéit kutatják. Kiderül, hogy azok bizonyos kiegészítő feltételek mellett speciális F-planáris görbéket alkotnak.

ZU DER VARIATIONSTHEORIE DER F-PLANAREN KURVEN

I. N. KURBATOWA, N. V. JABLONSKAJA

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer Variationsaufgabe, welche die bekannte, klassische Aufgabe bezüglich der Bewegung der Ladung im elektromagnetischen Feld generalisiert. Es werden die Extremalen vom gewissen Funktionale analysiert. Es stellt sich heraus, dass die unter bestimmten zusätzlichen Bedingungen spezielle F-planare Kurven bilden.