IV. MŰVÉSZET

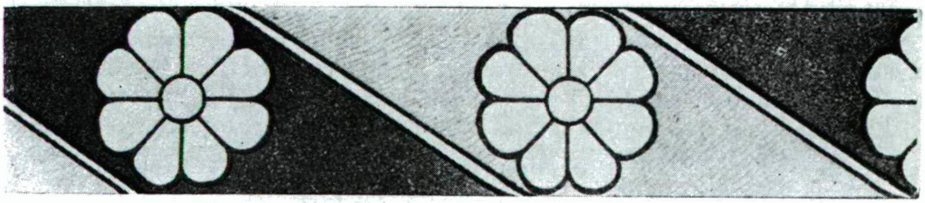
AZ ORNAMENTUMOK ÉS AZ ALGEBRAI CSOPORTOK

Írta: BODA KRISZTINA — SZENDREI JÁNOS

Az ember ősidőktől fogva díszíti használati tárgyait, majd később szinte minden alkotását. Bármerre fordulunk, épületeken, képzőművészeti alkotásokon, környezetünk használati tárgyain megtalálható a díszítményelemek bizonyos együttese. Ezek a természet jelenségeinek leegyszerűsítésével, abszrakciójával születtek. Már az ősközösség idején létrejöttek úgynevezett elemi ornamensek, különféle varázsjelek, később megjelent a fonat vagy kötélminta, és a díszítőelemek népenként és koronként egyre gazdagodtak, a természettől elszakadva helyet adtak a képzelet által szült díszítményeknek.

A díszítmény egy elemét *ornamens*nek nevezzük, az ebből kialakuló mintát *ornamentum*nak. Az *ornamentika* első közelítésében valamely kor, nép vagy egy tárgy ornamentumainak összessége. Zádor Mihály szerint „ornamentikának nevezzük azt a művészi produktumot, mely a maga sajátos eszközeivel szervesen kapcsolódik egy képzőművészeti alkotás, illetve egy használati tárgy művészi feladatának, a társadalom valóságának minél tökéletesebb kifejezéséhez. Az ornamentika a feladatát a legősibb időben már jórészt kialakult és az egyes korokban bővülő ornamensekből (ékítményekből) alkotott ornamentumok (díszítmények), részben közvetlenül ábrázoló, részben absztrakt jellegű dialektikus ellentéteken át kibontakozó kompozíciói útján tölti be. Az ornamentum alkalmazkodik a díszített mű anyagához, technikájához, konstrukciójához és formájához, de nem azonos ezek elemeivel. A díszített objektum és az ornamentumok kapcsolata kölcsönös, együtt kell keletkeznie, és egyik sem tölti be feladatát a másik nélkül." [1]

Az ornamenseket mindig valamilyen elv szerint helyezték el. Ugyanazon ornamenset sokszor egymás mellé téve egyenlő távolságra egy szalagszerű mintát nyer-

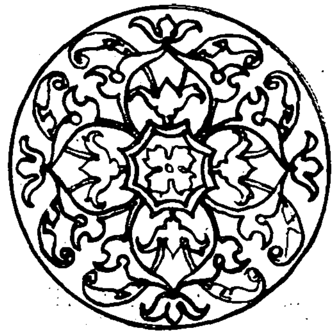


1. ábra

tek, hasonlót a kisiskolások füzeteiben megtalálható „sordíszhez". Az így létrejött ornamentumokat nevezzük *szalagornamentumok*nak. Az 1. ábrán látható szalagornamentum pl. virágokból mint ornamensekből épül fel.

Az ornamenseket gyakran egy középpont körül koncentrikus körök mentén helyezték el. Így keletkeztek az ún. *centrikus ornamentumok*. A 2. ábrán látható tál díszítése is ilyen. Ezen is megfigyelhető a centrikus ornamentumok jellegzetessége: ha valaki titokban 180°-kal elfordítaná, nem vennénk észre semmilyen változást, minden a helyén maradt.

Az egész síkot, pl. a falat vagy mennyezetet is beboríthatjuk úgy, ha az ornamenseket a tekintett síkban nemcsak egymás mellé, hanem egymás fölé is tesszük. Így kapjuk a *terülő ornamentumokat* (3—10. ábra) [2].



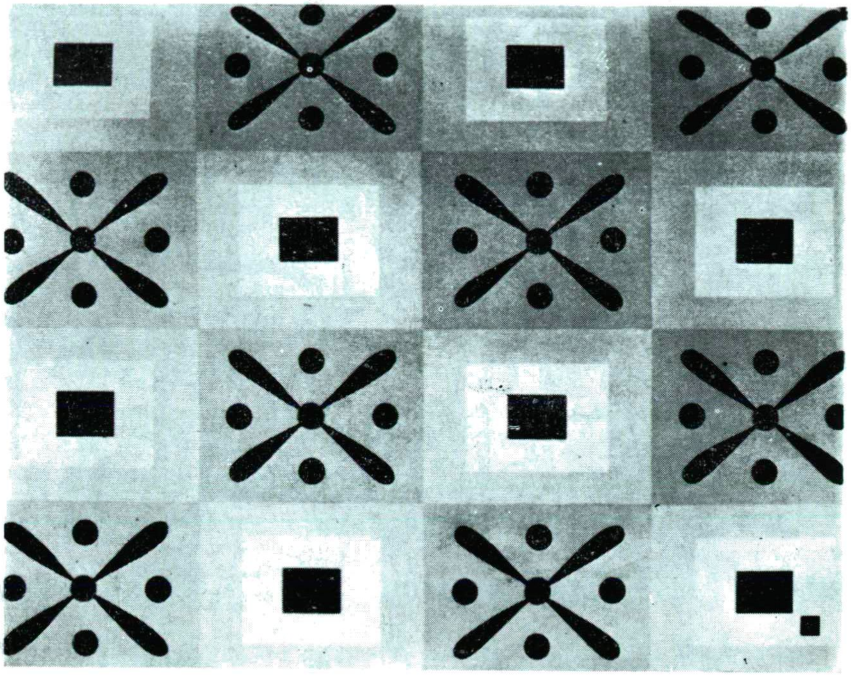
2. ábra

Nagyon sok ornamentumot megvizsgálva észrevehetjük, hogy valamennyiben van egy közös vonás: a díszítőelemek rendezetten, szabályosan helyezkednek el. Ha most eltekintünk attól, hogy mit ábrázolnak ezek az elemek, előttünk marad a váz, amely éppen azt mutatja meg, hogy milyen elv szerint helyezte el az alkotó az egyes díszítményeket. Például a 4. ábra felépítése a következő: a köröket egymás mellé, majd egymás fölé rajzolta az alkotója. A körök középpontjait összekötve négyzeteket kapunk. A váz tehát egy négyzetrács. A rácspontokba pedig olyan ornamens került, amely maga is szimmetrikus, így az ábrán több szimmetriatengelyt is találunk. Több, egymástól különböző ornamentumnak is lehet ugyanolyan a váza. Például a 7/*a* és 7/*b* ábrán található ornamentumok stílusa, kora és eredete különböző, de az ornamens — az egyiken egy repülő madár, a másikon egy virág — ugyanúgy helyezkedik el. Így merült fel a kérdés, vajon lehet-e az ornamentumokat aszerint osztályozni, hogy milyen elv szerint lettek elhelyezve, milyen a vázuk.

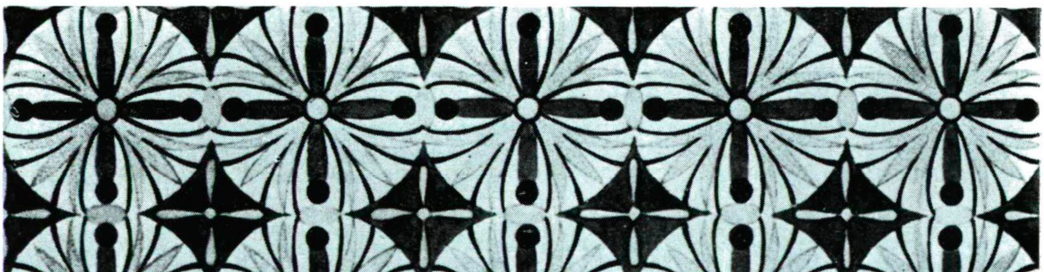
Ettől a ponttól kezdve a matematika segítségével tudunk továbbhaladni. Az ornamentumokon, illetve ezek vázán olyan leképezéseket, transzformációkat hajtunk végre, amelyek eredményeképpen az ornamentum önmagával fedésbe kerül. Ezek a transzformációk egy algebrai struktúrát alkotnak, amit *csoport*nak neveznek.

A csoportelmélet segítségével az ornamentumoknak egy új osztályozása valósítható meg; függetlenül attól, hogy mit ábrázol, vagy melyik korban készült a díszítés, szemben az eddigi ókori, román, gótikus stb. korok szerinti vagy — a mértani, növényi, figurális — alak szerinti osztályozással.

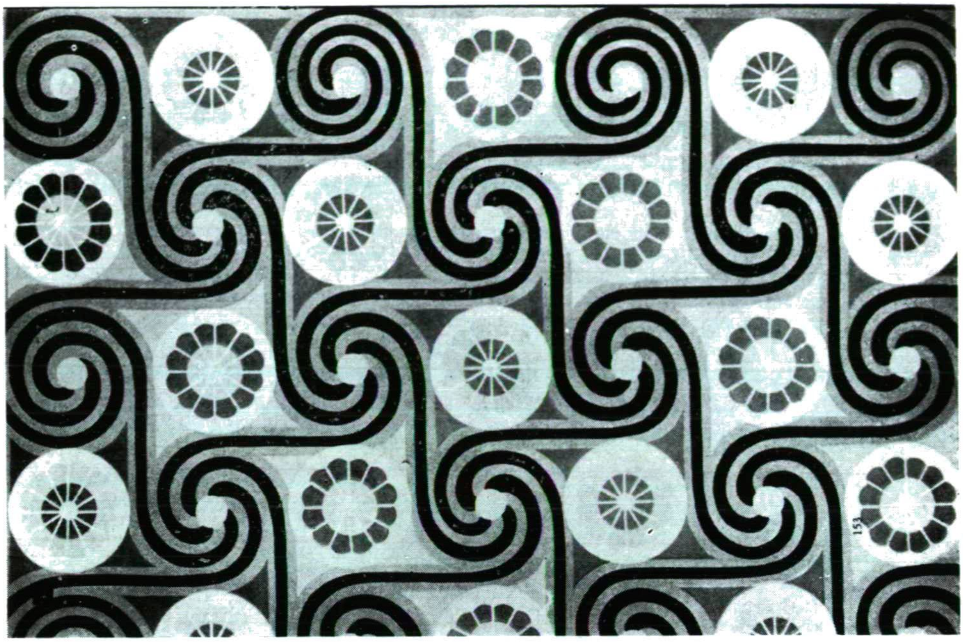
Ez pedig annak a következménye, hogy a legtöbb ornamentum egy vagy több elem szabályos, szimmetrikus elrendezése.



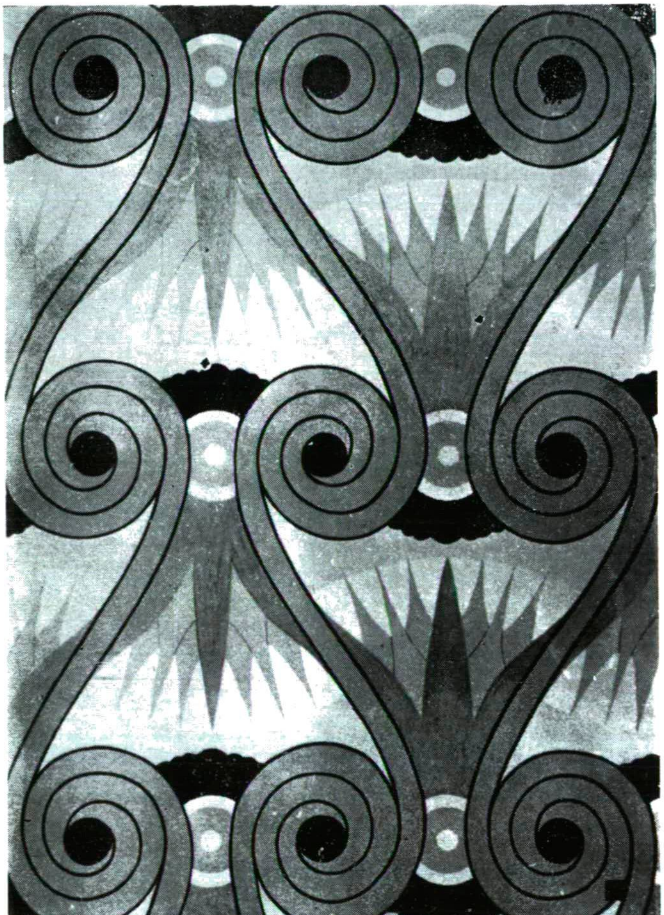
3. ábra



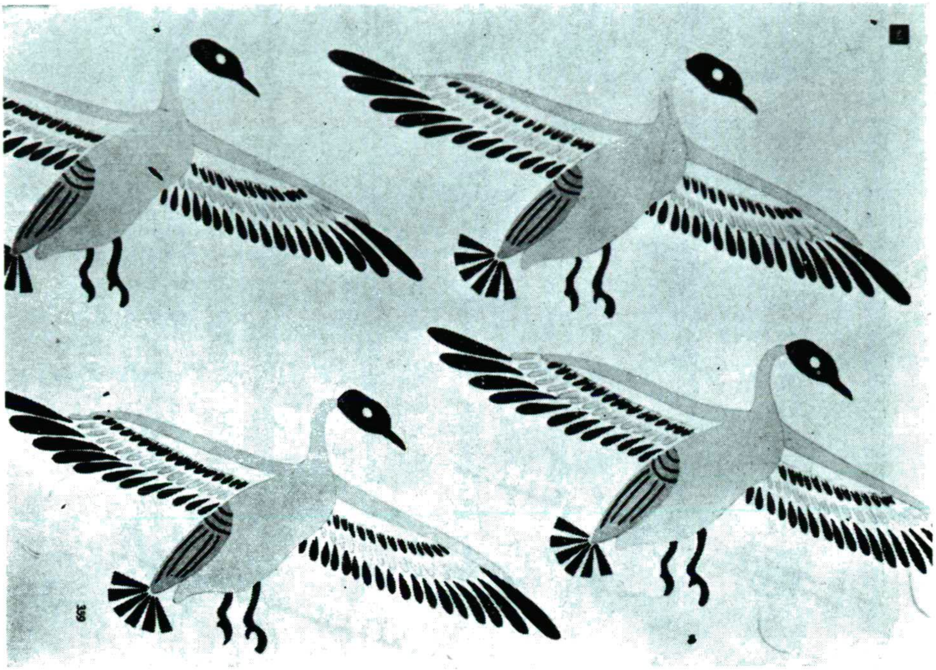
4. ábra



5. ábra

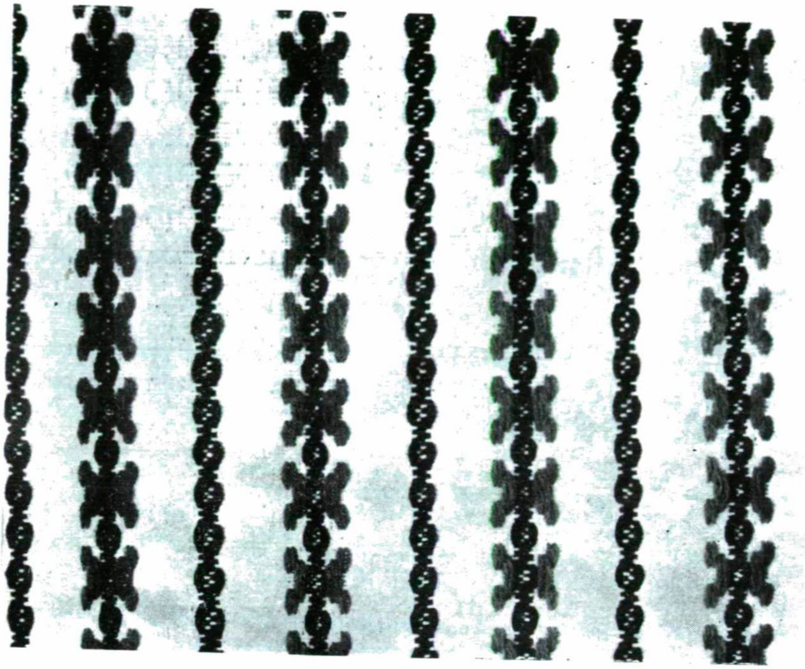


6. ábra

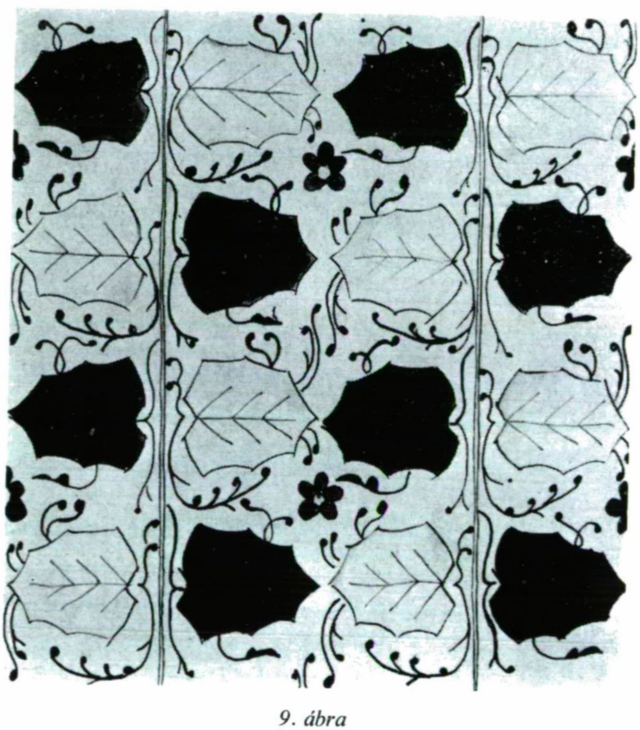


7a. ábra

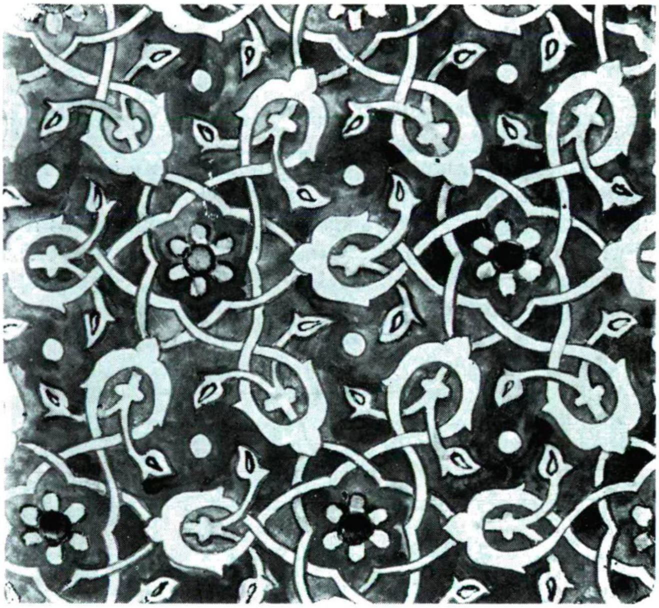
7b. ábra



8. ábra



9. ábra



10. ábra

1. A síkrácsok

Jelöljön Φ egy transzformációt, s azt, hogy a Φ transzformáció az egyik alakzat P pontjának a másik alakzat P' pontját felelteti meg, így jelöljük:

$$\Phi(P)=P'.$$

Két alakzat között nagyon sok ilyen transzformáció létesíthető, ezek közül most csak azokról beszélünk, amelyeknél bármely két pont távolsága megegyezik a képpontok távolságával, azaz

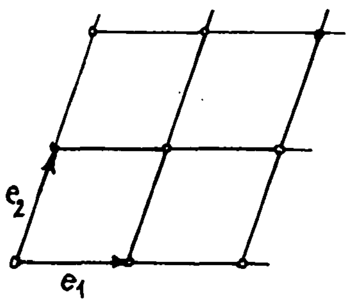
$$PQ=\Phi(P)\,\Phi(Q).$$

Ezek a transzformációk az egybevágóságok. Az egybevágósági transzformációk közül az alábbiakra lesz szükségünk:

1. Az eltolás
2. Az elforgatás
3. A pontra való tükrözés vagy centrális szimmetria
4. Egyenesre való tükrözés vagy tengelyes szimmetria.

A transzformációk ismeretében térjünk rá az egyes váztípusok ismertetésére.

A legegyszerűbb váz az egy egyenes mentén egymástól egyenlő távolságra elhelyezkedő pontok összesége: a pontsor. Két (egymást metsző egyenesen levő) pontsorból ún. síkrácsot hozhatunk létre a következő módon: a két pontsor egyenesét úgy helyezzük el a síkon, hogy bizonyos szögben messék egymást, és a metszéspontjuk mindkét pontsornak egy eleme legyen. Mindkét pontsor további elemein át a másik egyenessel párhuzamosokat húzunk. Az így kapott metszéspontok összességét síkrácsnak nevezzük. (11. ábra.)



11. ábra

A vektorok nyelvén a pontsor egy tetszőleges e_1 vektor egész számú többszöröseiből áll:

$$xe_1 \qquad (x \text{ egész szám}).$$

A síkrácsot pedig az $e_1 \neq e_2$ vektorok

$$x_1e_1+x_2e_2 \qquad (x_1,\, x_2 \text{ egész szám})$$

lineáris kombinációi határozzák meg. [3]

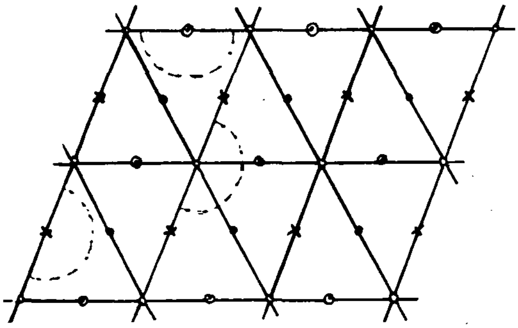
Vannak a síkrácsnak olyan transzformációi, amelyek a síkrácsot önmagára képezik le. Az ilyen tulajdonságú egybevágósági transzformációkat a síkrács szimmetriáinak nevezzük. Például a 11. ábrán eltolással elérhető, hogy a síkrács önmagával fedésbe kerül.

Tekintsük a sikrács szimmetriái közül azokat, amelyek a sík mozgásai. A sík minden mozgása egy eltolás vagy egy forgás által származtatható. A következő esetek lehetségesek:

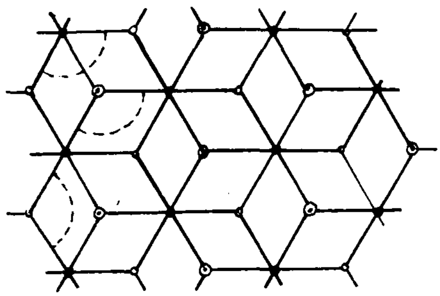
1. Forgatás nincs megengedve, és kétféle irányban végezhetünk eltolást. Nyilvánvaló, hogy akár az egyik, akár a másik pontsor egyenese irányában eltolhatjuk az egész síkrácsot úgy, hogy az ismét önmagával fedésbe kerüljön (11. ábra.)

2. Ha a síkrácson nemcsak eltolást végezhetünk, hanem forgatást is, akkor nem mindegy, hogyan helyezkednek el a rácspontok, és nem lehet akármilyen szöggel elforgatni. Igaz az, hogy csak olyan $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatások lehetségesek, melyre $n = 2, 3, 4, 6$ és 2π szög egy teljes körülfordulásnak, azaz 360°-nak felel meg.

a) Így ha az $n=2$ esetben a forgásszög $\frac{2\pi}{2} = 180°$, és a rács a 12. ábra szerint alakul.



12. ábra

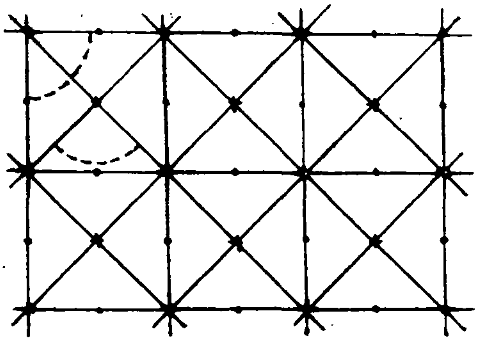


13. ábra

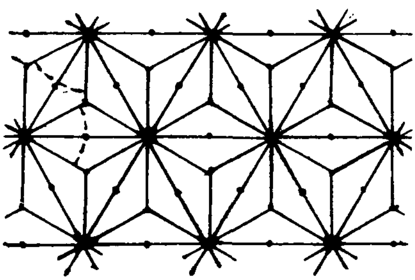
b) $n=3$ esetén a forgásszög $\frac{2\pi}{3} = 120°$ és a rács alakját a 13. ábra mutatja.

c) $n=4$ esetén a forgásszög $\frac{2\pi}{4} = 90°$ (14. ábra.)

d) $n=6$ esetén a forgásszög $\frac{2\pi}{6} = 60°$ (15. ábra).



14. ábra



15. ábra

2. Az ornamentumok szimmetriái és a csoportok

Egy ornamentum szimmetriájának nevezzük az ornamentum önmagára való egybevágó leképezését. Ez szoros kapcsolatban van az eddig tárgyalt síkrácsok szimmetriáival.

Ha a tükrözéseket is hozzávesszük az eddig tárgyalt leképezésekhez, újabb csoportokat kapunk. Így a síkban ötféle mozgást, illetve szimmetriacsoportot különböztettünk meg; ha ehhez a tengelyes tükrözést is hozzávesszük, 12 újabb csoportot nyerünk, összesen tehát 17-et. (A sikornamentumok tárgyalásánál ezeket fel fogjuk sorolni.)

A bevezetésben már szó volt róla, hogy az ornamentumok új osztályozása a csoportelmélet segítségével történik. [4]

Az algebrában *csoport*nak nevezünk egy olyan G halmazt,

a) amelynek elemei között értelmezve van egy művelet, amit a $+$ jellel jelölünk, azaz ha $a, b \in G$, akkor $a+b = c \in G$.

b) ez a művelet asszociatív, azaz
$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

c) létezik a csoportnak neutrális eleme, azaz olyan 0 eleme, amely bármely csoportelemhez hozzáadva magát az elemet adja eredményül:
$$a+0 = 0+a = a$$

d) létezik minden a elemnek inverze, azaz olyan bármely a elemhez van olyan a' elem, amelyre
$$a+a' = a'+a = 0$$

Az ilyen a' elemet így jelöljük: $-a$.

Tekintsük most az ornamentum szimmetriáinak a halmazát. A művelet pedig legyen ezen egybevágósági transzformációk egymás utáni végrehajtása. Az ornamentum (és így a síkrács) szimmetriáinak halmaza erre a műveletre nézve csoportot alkot. Ennek bizonyításához azt kell belátni, hogy teljesülnek-e az előbb említett követelmények.

3. Terülő ornamentumok

A terülő ornamentum olyan alakzat az euklideszi síkban, amely egy síkrács eltolásai által keletkezik egy elemi alakzatból (ornamensből) kiindulva. A sík azon egybevágóságainak csoportja, mely az ornamentumot önmagára képezi le, az ornamentum szimmetriacsoportja.

Az említett 17 különböző ornamentális szimmetria úgy jön létre, hogy az eddig ismertetett síkrácsok pontjainak helyébe egy pontra, illetve egy vagy több egyenesre szimmetrikus ornamenseket helyezünk. Induljunk ki egy teljesen aszimmetrikus alakzatból:

1. A tekintett alakzatot a 11. ábrán található síkrács rácspontjaiba téve egy olyan típusú ornamentumot kapunk, mint a 7a., 7b. ábrán levő. Egyetlen végrehajtható egybevágósági transzformáció az eltolás (16. ábra).

Ha a szimmetriacsoportnak egy eleme az e_1 vektorral való eltolás, akkor nyilván eleme az e_1+e_1, azaz a $2e_1$ vektorral való eltolás is.

Egyszerűen belátható, hogy

$$\ldots, -2e_1 - e_1, 0e_1 e_1, 2e_1, 3e_1, \ldots, ne_1, \ldots$$

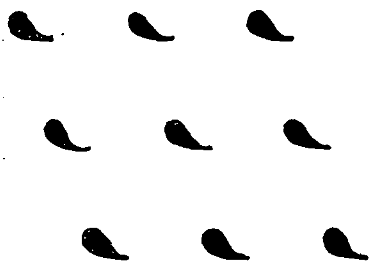
a szimmetriacsoport elemei. Ez a halmaz az egész szimmetriacsoportnak egy ciklikus részcsoportja. Az e_2 irányban való eltolásnál ugyanígy létrejön egy ciklikus részcsoport.

2. Tükrözzük a tekintett aszimmetrikus alakzatot a csúcspontjára, és tekintsük ezt az elemi ornamenst.

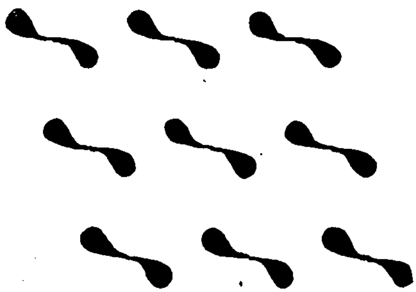
A kapott alakzat már centrálszimmetrikus. Ezt az ornamenst az előbbi síkrácsba helyezve egy újtípusú ornamentumot kapunk, ugyanis bármely pontja körül 180°-kal elforgatható úgy, hogy önmagával ismét fedésbe kerül. (17. ábra.)

Az ornamentum szimmetriacsoportjának elemei tehát az eltolások és a 180°-os forgatások, valamint ezek egymásutánja.

Az eredeti aszimmetrikus alakzatból úgy is szimmetrikus formák hozhatók létre, ha őt egy, a csúcspontján áthaladó tengelyre tükrözzük.

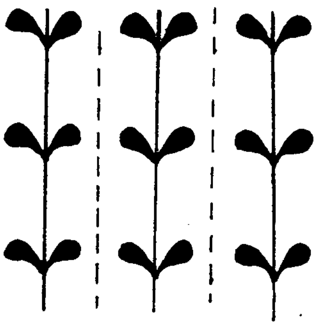


16. ábra



17. ábra

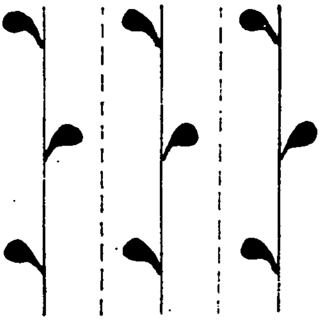
3. Egy derékszögű síkrácsba helyezve ezt az ornamenst, egy olyan ornamentumot kapunk, amelynek végtelen sok egymással párhuzamos tükörtengelyek van. (18. ábra.)



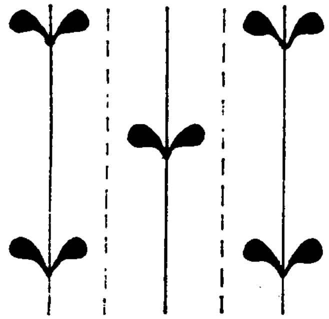
18. ábra

4. Az eredeti alakzatot most a 19. ábra szerint helyezzük el egy derékszögű síkrácsba. Az ábra bizonyos szabályosságot mutat, itt úgynevezett csúszótükörtengelyek lépnek fel (a tengelyre való tükrözés után fél egységnyi távolságra eltolást is végzünk.)

5. A rács olyan derékszögű rács, amelyhez az egyes négyzetek átlóinak a metszéspontjai is hozzátartoznak rácspontokként (kárórács). Ebbe a 3. pont előtt konstruált alakzatot elhelyezve olyan ornamentumot kapok, ahol a tengely és csúszótükörtengelyek váltakoznak. (20. ábra.)



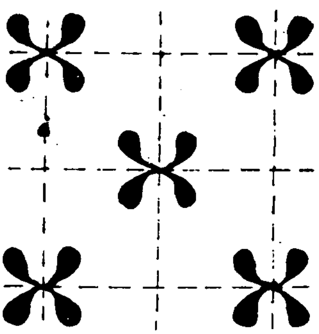
19. ábra



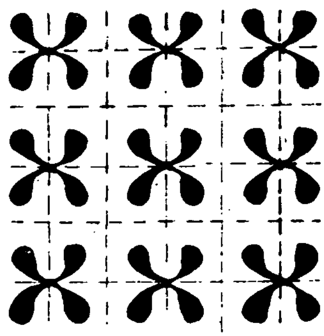
20. ábra

6. Ha az aszimmetrikus alakzatot két, egymással merőleges tengelyre is tükrözzük, akkor az így keletkezett ornamens centrumán két egymással merőleges tengely halad át. A kárórácsba helyezve ugyanezek lesznek az egész ornamentum szimmetriatengelyei (21. ábra).

7. Ugyanezt az ornamenst derékszögű rácsba helyezve olyan ornamentumot kapunk, ahol a rácspontok között is haladnak tükörtengelyek. (22. ábra.)



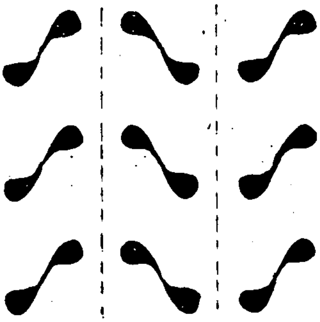
21. ábra



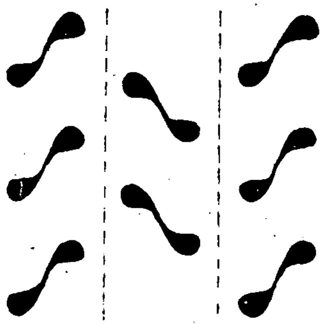
22. ábra

8. Tekintsük ismét a 2. pontbeli ornamenst. Helyezzük egy derékszögű rácsba a 23. ábra szerint. Ekkor a rácspontok között tükörtengelyek vannak, és minden második egy csúszótükörtengelynek is felfogható. (23. ábra.)

9. Az előbbi ábra minden második oszlopát egy fél egységgel eltolva minden egyes tengely csúszótükörtengellyé válik. (24. ábra.)



23. *ábra*



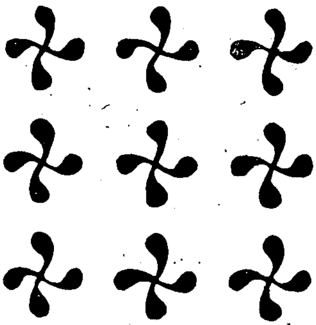
24. *ábra*

10. Az eredeti alakzatot forgassuk most el 90°-kal, majd 180°-kal, majd 270°-kal. Az így kapott ornamens forgásszimmetrikus, azaz egy 90°-os elforgatás során önmagába megy át. A derékszögű rács pontjaiba helyezve az ornamentumnak a következő szimmetriái lesznek:

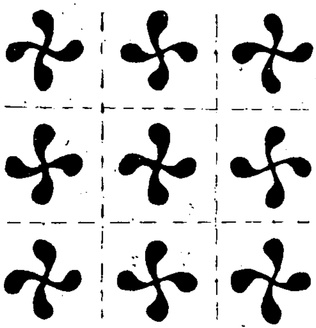
a) eltolás;
b) bármely rácspont körüli 90°-os forgatás;
c) s ezek tetszőleges sorrendben történő egyszeri vagy többszöri végrehajtása. (25. ábra.)

11. Helyezzük el az előbbi ornamenst a derékszögű rácsba a következőképpen:
a) elhelyezzük az elsőt tetszőlegesen,
b) a következő helyre az ornamens tükörképét tesszük.

Az egész ornamentumban így a rácspontok között haladó egyenesek lesznek az egyedüli tükörtengelyek. (26. ábra.)



25. *ábra*



26. *ábra*

12. Ha a 7. csoportban az összes alakzatot a rácspontokat összekötő egyenesekre mint tengelyekre tükrözzük, az elemi ornamens egy érdekes alakzat lesz (olyan, melynek 4 szimmetriatengelye van, és az egész ornamentum tükörtengelyeihez az előzőkön kívül még a 45°-os szögben haladó egyenesek is csatlakoznak. (27. ábra). 45°-kal elforgatva a rács rákórács.

13. Az eredeti aszimmetrikus alakzatot 120°-kal, majd 240°-kal elforgatva az így nyert alakzatot egy hatszögű rácsba helyezve (13. ábra szerint) olyan ornamentumot kapunk, amelyben az összes lehetséges szimmetriák a következők:

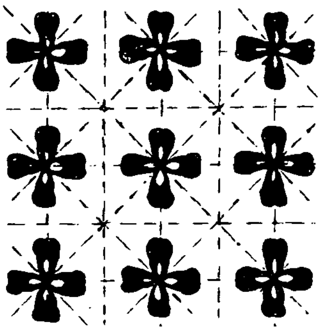
a) eltolás;

b) 120°-os forgatás;

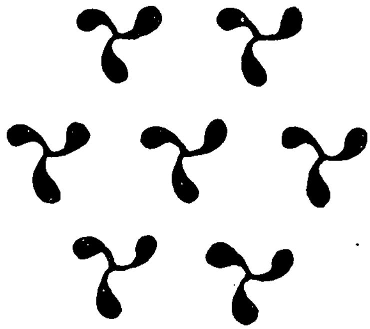
c) ezek tetszőleges sorrendben történő egyszeri vagy többszöri végrehajtása. (28. ábra.)

14. Az előbbi ornamensekből a 8. pontban látott módon új ornamenst kapunk. A rácsba téve ezeket a rácspontokon áthaladó egyenesek tükörtengelyek lesznek, az ezekkel párhuzamosan haladók pedig csúszótükörtengelyek. (29. ábra.)

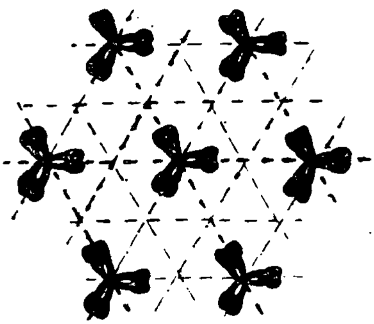
15. A 11. pontban kialakult ornamenst más helyzetben tesszük a rácsba. Így a tükörtengelyek a rácsot alkotó szabályos háromszögek magasságvonalai. (30. ábra.)



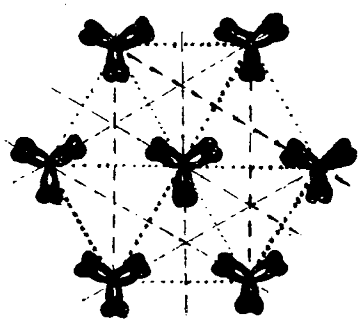
27. ábra



28. ábra



29. ábra



30. ábra

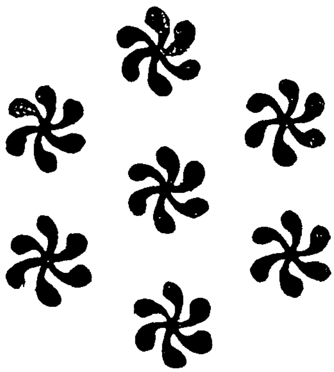
16. Az eredeti alakzaton most 60°-os forgatásokat végzünk. Ha ezt a hatszögű rácsba helyezzük, az ornamentum szimmetriái:

a) eltolás;

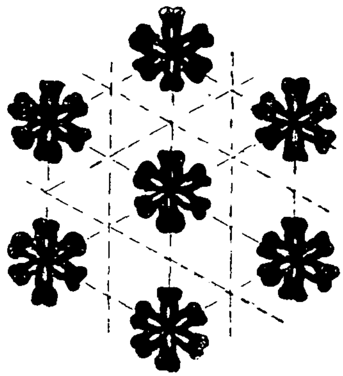
b) 60°-os forgatás;

c) ezek tetszőleges sorrendben történő egyszeri vagy többszöri végrehajtása. (31.ábra.)

17. Ismét a 8. pontban látott módszert alkalmazva az új ornamentumban 6 tengelysereget kapok, melyek mindegyike tükör- és csúszótükörtengely. Ebben a csoportban tehát az előbbi forgatásokon kívül még hatféle tükrözés is végezhető. (32. ábra.)



31. ábra



32. ábra

Látható, hogy egyetlen alakzatból kiindulva tükrözések, forgatások, eltolások segítségével az ornamentumoknak 17 elrendezési lehetősége van. A valóságban megtalálható ornamentumok végtelen sokasága abból ered, hogy a kiindulás, amely a mi aszimmetrikus alakzatunknak felel meg, végtelen sokféle lehet. Matematikai szempontból azonban mindegyik az előbb felsorolt esetek valamelyike.

Könnyen ráismerhetünk pl. a *7/a, 7/b* ábrákon az első csoportra. A 3. ábrán látható ornamentum szimmetriacsoportja megegyezik a 6. esettel. (A kárórács-pontok az X alakú ábrák középpontjai.) A 4. ábra a 12. esetnek, az 5. ábra a 10. esetnek, a 6. ábra a 8. esetnek, a 10. ábra a 13. esetnek felel meg. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha az egyes csoportokban előírt egybevágósági transzformációkat végrehajtjuk az egyes ornamentumokon. Hasonló módon lehet bármilyen terülő ornamentumot a fent említett 17 eset valamelyikébe (de csak egybe!) besorolni.

A lehetséges terülő ornamentumoknak egy új osztályozása mellett ezen az úton arra is rámutattunk, hogy egy alakzatból hogyan készíthető el az összes lehetséges terülő ornamentum.

JEGYZETEK

[1] Zádor Mihály, Az ornamentika és az épületornamentika néhány elméleti kérdése. Budapest, 1956, Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Tudományos Közleményei 2. köt. 3. sz. 26.

[2] Fortová—Samalová, P., Das ägyiptische Ornament. Text. v. Vilinková. Praha, 1963.

[3] Hilbert, D.—Cohn—Vossen, S., Anschauliche Geometrie. Berlin, 1932.

[4] Speiser, A., Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Berlin, 1927.

ОРНАМЕНТЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

К. Бода—Я. Сендреи

Орнаменты можно классицифировать с учётом эпохи и формы. Большинство орнаментов состоит из регулярно повторяющихся, расположенных в определённом порядке, элементов — орнаментаций. Мы можем рассматривать только порядок расположения орнаментаций, не обращая внимания на орнамент в целом. Опираясь на теорию группы, можно наметить 17 возможных разновидностей расположения орнаментаций в плоскости Таким образом, возможна ещё одна классификация орнаментов. Зная одну разновидность орнаментаций предсказать другие.

ORNAMENTE UND ALGEBRAISCHE GRUPPEN

Von *K. Boda—J. Szendrei*

Die Ornamente (Verzierungen der Gegenstände) können nach Epochen und nach ihrer Form klassifiziert werden. Da aber die meisten Ornamente als ordnungsgemässe Verteilungen der Verzierungselemente erscheinen, so können wir von den einzelnen Verzierungen absehen und bloss die Anordnung untersuchen. Mit Hilfe der Gruppentheorie kann man zeigen, dass die Verzierungselemente auf der Ebene genau 17 Möglichkeiten der Anordnung haben. So ist es durchzuführen, die Ornamente auf einem neuen Grund zu gruppieren. Weiterhin — diesen Anordnung folgend — können alle mögliche Ornamente auf der Ebene, die aus einer gegebenen Formation zu bilden sind, gegeben werden.