AZ IDEÁL FOGALMÁNAK EGY ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL

Írta: SZENDREI JÁNOS

A csoport- és gyűrűelmélet kezdeti stádiumában a két elmélet alapjai egymástól függetlenül jöttek létre. Később azonban a meglevő eredmények között számos analógiát fedeztek fel. Elegendő példaként említeni a csoport normálosztójának, illetve a gyűrű ideáljának a fogalmát. A két elmélet későbbi fejlődésében jelentős szerepük volt azoknak a vizsgálatoknak, amelyek az egyik elméletben meglevő fogalmaknak és eredményeknek a másik elméletre való átvitele, az analógiák megkeresése révén születtek. Ilyen példák: a gyűrűelméletben igen fontos szerepet betöltő radikálfogalomnak a csoportokra való átvitele; a csoportelméletben hasznos holomorf fogalmának gyűrűelméleti megfelelője. Az is előfordul, hogy az analóg fogalmak nem azonos szerepet játszanak a két elméletben, például a centrum fogalma. Az analóg fogalmakra vonatkozó tételek némelyike csak az egyik elméletben fogalmazható meg.

Az alábbiakban a csoportelméletben jelentős szerepet betöltő kvázinormálosztó fogalmának egy gyűrűelméleti analogonját vezetjük be.

A csoportelméletben a G csoport H_1, H_2 részcsoportját *permutálható*nak nevezik, ha

$$H_1 \cup H_2 = H_1 H_2 = H_2 H_1$$

teljesül, ahol $H_1 \cup H_2$ a H_1, H_2 részcsoportok által generált részcsoportot jelenti [4]. Ez más szóval azt jelenti, hogy a $H_1 \cup H_2$ minden eleme felírható H_1-beli és H_2-beli, illetve H_2-beli és H_1-beli elemek szorzataként.

A G csoportot *faktorizálható*nak nevezik, ha G-nek van olyan H_1, H_2 részcsoportja, hogy $G = H_1 H_2 = H_2 H_1$. Ezeket a csoportokat ORE [1] után többek között SZÉP [6, 7] és RÉDEI [2] vizsgálta.

SZÉP a faktorizálható csoportok gyűrűelméleti analogonjaként bevezette a következőt [8]: Az R gyűrűt *szétszedhető*nek nevezte, ha van olyan R_1 és R_2 részgyűrűje R-nek, amelyre teljesül a következő:

$$R^+ = R_1^+ + R_2^+, \quad R_1 \cap R_2 = 0,$$

ahol a betű jobb felső részén levő „+" jel az illető gyűrű modulusát jelenti.

Megjegyezzük, hogy az előbbi fogalom bevezethető úgy is, hogy elhagyjuk az $R_1 \cap R_2 = 0$ kikötést (SZENDREI [5]).

A permutálható részcsoportok analogonjaként bevezethető a következő definíció:

Az R gyűrű R_1, R_2 részgyűrűjét *összeadható*nak nevezzük, ha

$$(R_1 \cup R_2)^+ = R_1^+ + R_2^+,$$

ahol $R_1 \cup R_2$ jelenti az R_1, R_2 részgyűrűk által generált részgyűrűt.

A fenti definíciókból következik, hogy a G csoport tetszőleges normálosztója a G csoport bármely részcsoportjával permutálható, s az R gyűrű tetszőleges ideálja az R gyűrű bármely részgyűrűjével összeadható.

Csoportok esetén ismert a következő állítás [4]:

Ha H_1 és H_2 permutálható részcsoportjai G-nek, és K tetszőleges olyan részcsoportja G-nek, amelyre $K \supseteqq H_1$, akkor teljesül a

$$(H_1 \cup H_2) \cap K = H_1 \cup (H_2 \cap K)$$

moduláris azonosság.

Ennek az állításnak gyűrűelméleti analogonja a következő:

Ha R_1 és R_2 összeadható részgyűrűi R-nek, és S tetszőleges olyan részgyűrűje R-nek, amelyre $S \supseteqq R_1$, akkor teljesül az

$$(R_1 \cup R_2) \cap S = R_1 \cup (R_2 \cap S)$$

moduláris azonosság.

Ezt az állítást a következőképpen láthatjuk be. A bal oldal nyilvánvalóan tartalmazza a jobb oldalt, mivel ez a tartalmazási reláció minden hálóra teljesül. A fordított irányú tartalmazást így láthatjuk be: Legyen u eleme a bal oldalnak. Ekkor $u \in R_1 \cup R_2$ és $u \in S$. A feltevés miatt

$$u = r_1 + r_2 \qquad (r_1 \in R_1,\ r_2 \in R_2),$$

továbbá $S \supseteqq R_1$ miatt

$$u - r_1 = r_2 \in S.$$

Ennélfogva $r_2 \in R_2 \cap S$, ahonnan

$$u = r_1 + r_2 \in R_1 \cup (R_2 \cap S).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy a fenti azonosság jobb oldala tartalmazza a bal oldalt. A kétoldali tartalmazásból következik a moduláris azonosság fennállása.

A fenti állításokból következik, hogy *egy csoport normálosztóinak halmaza moduláris hálót alkot, s egy gyűrű ideáljainak halmaza szintén moduláris hálót alkot.*

A kvázinormálosztó fogalmát — amit Ore [1] vezetett be — a következőképpen definiálhatjuk:

A G csoportnak egy P részcsoportját kvázinormálosztónak nevezik, ha P a G minden részcsoportjával permutálható.

A kvázinormálosztónak megfelelő gyűrűelméleti fogalmat a következő definícióval adjuk meg:

Az R gyűrűnek egy Q részgyűrűjét q-ideálnak nevezzük, ha Q az R minden részgyűrűjével összeadható.

Nyilvánvaló, hogy — amint minden normálosztó kvázinormálosztó, úgy — minden ideál q-ideál.

Példák olyan q-ideálokra, amelyek nem ideálok:

Egy tetszőleges (nem egységelemes) gyűrűnek az egész számok gyűrűjével való egységelemes bővítésében az egész számok gyűrűje q-ideál.

A p^n ($n \geqq 4$) elemű véges test minden nem triviális résztestе q-ideál.

Ez utóbbi példa érdekessége az is, hogy a q-ideál az ideálnak olyan általánosítása, amely testek esetén nem csupán a triviális részstruktúrák valamelyike lehet.

Megjegyezzük, hogy STEINFELD [3] a kvázinormálosztónak egy másik gyűrűelméleti analogonját vezette be a következő módon:

Az R gyűrűnek egy M modulusát kváziideálnak nevezzük, ha

$$RM \cap MR \subseteqq M$$

teljesül.

A kváziideál fogalma is az ideál fogalmának az általánosítása, sőt az egyoldali ideál fogalmának is. A STEINFELD-féle kváziideál és a most bevezetett q-ideál lényegesen különbözik egymástól, amint ezt a következő példa is mutatja: Legyen E_2 az egész számok gyűrűje feletti 2×2 típusú teljes mátrixgyűrű. E_2-ben az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alakú mátrixok M halmaza STEINFELD-féle kváziideált alkot. Jelölje K a

$$\beta = \begin{pmatrix} b & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

alakú mátrixok gyűrűjét E_2-ben. Az $M \cup K$ részgyűrűnek $\beta\alpha$ nyilvánvalóan eleme, azonban $\beta\alpha \notin M^+ + K^+$. Tehát az M kváziideál nem q-ideál E_2-ben.

A bevezetett q-ideálra — bár a kvázinormálosztónak megfelelő gyűrűelméleti fogalom — nem minden kvázinormálosztóra vonatkozó tétel vihető át. Annak az állításnak a megfelelője, amely szerint a G csoport egy maximális kvázinormálosztója normálosztó, nem igaz, amint ezt az egységelemes gyűrűbővítésnél a faktorgyűrű (a fenti példánál az egész számok gyűrűje) mutatja.

IRODALOM

[1] ORE, O.: Structures and group theory I., *Duke Math. Journal*, 3 (1937), 149—173.
[2] RÉDEI, L.: Die Anwendung des schiefes Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für reine und angewandte Math.*, *188* (1950), 201—227.
[3] STEINFELD, O.: Über die Quasiideale von Ringen, *Acta Scientiarum Math.*, (1956), 170—180.
[4] SUZUKI, M.: Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups, Ergebnisse der Math., 1956.
[5] SZENDREI, J.: Egy gyűrűbővítés általánosítása, *Szegedi Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei*, 1964, 251—257.
[6] SZÉP, J.: Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen, *Commentarii Math. Helvetici*, *22* (1948), 31—33.
[7] SZÉP, J.: On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, *Acta Scientiarum Math.*, *12* (1950), 57—61.
[8] SZÉP, J.: Über eine neue Erweiterung von Ringen I., *Acta Scientiarum Math.*, *19* (1958) 51—62.

ОДНО ИЗ ОБОБЩЕНИЙ ПОНЯТИЯ ИДЕАЛА

Я. Сендреи

Подкольца R_1, R_2 (ассоциативного) кольца R называются слагаемыми, если $(R_1 \cup R_2)^+ = R_1^+ \cup R_2^+$, где $R_1 \cup R_2$ означает подкольцо, производное путём R_1, R_2. Если R_1, R_2 является слагаемым подкольцом, $S(\supseteqq R_1)$ же является любым подкольцом, то осуществляется модулярное тождество $(R_1 \cup R_2) \cap S = R_1 \cup (R_2 \cap S)$. Из этого вытекает, что структура идеалов кольца R модулярна. Подкольцо Q кольца R называется q-идеал, если складывается со всеми подкольцами R. Очевидно, что все идеалы являются q-идеалами. Понятие q-идеала является аналогом введённого ORE [1] понятия квазинормалделителя в теории колец. Интересный пример: В поле GALOIS GF (p^n) $(n \geqq 4)$ все не тривиальные подполя являются q-идеалами.

EINE VERALLGEMEINERUNG DES IDEALBEGRIFFS

Von

J. Szendrei

Die Unterringe R_1, R_2 eines (assoziativen) Ringes werden additivbar genannt, wenn $(R_1 \cup R_2)^+ = R_1^+ + R_2^+$, wobei $R_1 \cup R_2$ den durch R_1, R_2 erzeugten Unterring bezeichnet. Für additivbaren Unterringe R_1, R_2 und für einen beliebigen Unterring S $(\supseteqq R_1)$ gilt die Modularidentität

$$(R_1 \cup R_2) \cap S = R_1 \cup (R_2 \cap S),$$

woraus der folgende bekannte Satz folgt: Der Verband der Ideale von R ist modular. Ein Unterring Q von R wird ein q-Ideal genannt, wenn Q zu jedem Unterring von R additivbar ist. Es ist klar, dass jedes Ideal in R ein q-Ieeal ist. Der Begriff des q-Ideals ist ein ringtheoretisches Analogon des Begriffs des Quasinormalteilers in der Gruppentheorie, der von Ore [1] eingeführt wurde. Ein interessantes Beispiel: In einem Galoisfeld $GF(p^n)$ $(n \geqq 4)$ ist jeder nicht-triviale Unterkörper ein q-Ideal.