



UNIVERSITÀ DI PISA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA
ANNO ACCADEMICO 2011/2012

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Modelli per la valutazione di titoli soggetti a fallimento.

CANDIDATO:

Laura Gianfagna
laura.gianfagna@gmail.com

RELATORE:

Chiar.mo Prof. Maurizio Pratelli

CONTRORELATORE:

Chiar.mo Prof. Franco Flandoli

Alla mia famiglia.

*Non si può risolvere nessun problema partendo dagli stessi presupposti che lo
hanno creato.*
-Albert Einstein-

INDICE

1. <i>Introduzione.</i>	9
2. <i>Modelli per titoli a reddito variabile e modelli per titoli a reddito fisso.</i>	15
2.1 Scopo dei modelli matematici per la finanza.	15
2.2 Modello di Samuelson-Black-Scholes per attivi con rischio e modello di Dupire.	17
2.7 Costruzione della probabilità martingala.	18
2.10 Inconvenienti dei modelli di tipo Black-Scholes e modelli a volatilità stocastica.	19
2.14 Modelli stocastici per il mercato delle obbligazioni basati sul tasso a breve.	20
2.24 Appendice.	25
3. <i>I tassi storici.</i>	27
3.1 Definizione dei tassi di probabilità e di transizione.	27
3.6 Inconvenienti di un eventuale ‘metodo storico’	28
4. <i>I modelli strutturali.</i>	31
4.1 Premessa generale: l’ambiente di lavoro.	31
4.5 Espressione della probabilità di insolvenza nei modelli strutturali.	33
4.7 Il modello di Merton (1974).	34
4.7.1 Un modello per il valore di mercato degli attivi.	34
4.8.1 Caratterizzazione della probabilità di default.	36
4.9.1 Inconvenienti dei modelli strutturali di tipo Merton.	37
4.11 Evoluzione del modello di Merton: il modello di Zhou (1997).	38
4.12.1 Il valore di mercato degli attivi.	39
4.13.1 La probabilità di insolvenza.	40
4.15 Inconvenienti di tutti i modelli strutturali.	42
4.16 Appendice.	43
5. <i>Modelli in forma ridotta: i modelli basati sull’intensità’.</i>	49
5.1 Premessa.	49
5.2 Ipotesi e ossatura matematica del modello.	49
5.20 Dimostrazioni dei lemmi.	53
5.27 Costruzione del modello.	58
5.28 Calcolo della probabilità di insolvenza.	60
5.30 Il pricing dell’opzione suscettibile di fallimento.	61
5.33.1 Determinazione del prezzo nel caso di copertura zero.	64

5.37.1	Determinazione del prezzo nel caso di copertura parziale alla scadenza.	67
5.38.1	Determinazione del prezzo nel caso di copertura parziale all'insolvenza.	68
5.46	Cambio di misura.	70
5.46.1	Idea intuitiva e descrizione dello scopo della sezione.	70
5.50.1	Determinazione della densità e del compensatore.	72
5.56.1	Determinazione del pricing.	75
5.58	Inconvenienti dei modelli in forma ridotta.	75
5.59	Appendice.	77
6.	<i>Modelli ibridi: il modello di Duffie e Lando (2001).</i>	79
6.1	Premessa: giustificazione della scelta del modello.	79
6.2	Divario nel caso di mercato ad informazione incompleta.	80
6.4	Ipotesi e problema della liquidazione ottimale.	82
6.4.1	Ambiente di lavoro.	82
6.4.2	Ottimizzazione del patrimonio netto.	83
6.5.1	Soluzione del problema di ottimizzazione.	83
6.8	Il mercato delle obbligazioni ad informazione incompleta.	86
6.8.1	Modellizzazione della situazione.	86
6.8.2	Calcolo della distribuzione condizionale rispetto alla filtrazione parziale.	87
6.8.3	Calcolo della probabilità condizionale di sopravvivenza rispetto alla filtrazione parziale.	88
6.9	Introduzione nel modello dell'intensità di default.	88
7.	<i>Conclusioni e sviluppi futuri.</i>	91
	<i>Bibliografia</i>	94

1. INTRODUZIONE.

La presente trattazione costituisce la tesi magistrale dell'autrice.

Oggetto della presente tesi è la valutazione della probabilità di insolvenza dei titoli finanziari ad interesse fisso.

I titoli ad interesse fisso, comunemente, vengono ritenuti titoli che tutelano maggiormente gli acquirenti rispetto a titoli ad interesse variabile, come ad esempio le azioni, perché mettono al riparo i possessori dalle fluttuazioni dei tassi di interesse. Tuttavia, alla pari degli altri titoli, anche i titoli ad interesse fisso sono soggetti al rischio di non poter essere rimborsati alla scadenza; ciò potrebbe verificarsi in caso di fallimento della società o dello Stato emittente.

In un certo senso, proprio il fatto di dover ricorrere all'emissione di obbligazioni o titoli di debito è già un indice di difficoltà economiche da parte di chi emette il titolo, altrimenti non vi sarebbe necessità di ricorrere a finanziamenti esterni. Capita spesso però che società imprenditrici, e addirittura gli Stati Nazionali, per procurarsi liquidità, ricorrano a meccanismi di finanziamento.

Quando l'emittente è "virtuoso", il finanziamento accresce il valore dell'emittente stesso, ed in quel caso si generano flussi di cassa sufficienti a pagare gli interessi e a restituire il capitale. Talvolta però accade che, nonostante il finanziamento, la situazione economica dell'emittente non migliora, ed allora si potrebbe giungere alla dichiarazione di insolvenza.

E' evidente allora che per valutare la convenienza e le condizioni dell'acquisto di un titolo di credito, oltre alla forma del tasso di interesse, si deve valutare anche la situazione dell'emittente, cioè se, in base a determinati parametri, si possa stabilire la capacità di pagamento degli interessi e la restituzione del capitale alla scadenza. Minore è la ritenuta capacità di restituzione da parte dell'emittente, maggiore è il tasso di interesse che sarà preteso dall'acquirente per l'acquisto del titolo.

Il differenziale ¹ tra i tassi di interesse di titoli che si ritengono sicuri, perché provenienti da Stati che non possono fallire (che per l'Eurozona sono i titoli di Stato Tedeschi o *bund*) ed altri titoli provenienti da fonti meno sicure (ad esempio i BTP Italiani), riflette la valutazione che i mercati fanno del rischio connesso all'acquisto dei titoli più rischiosi.

Se l'intuizione è chiara, resta l'interesse concreto, da parte non del piccolo investitore ma delle Agenzie di Rating e dei grandi traders, di valutare quanto vale questo rischio, sulla base non solo delle stime storiche ma anche di modelli di evoluzione dell'andamento dei dati.

¹ Il cosiddetto *spread*, o divario.

La metodologia utilizzata è stata l'analisi dell'evoluzione logica e cronologica della teoria matematica volta a tale scopo; l'attenzione maggiore è rivolta ai due più importanti tipi di approccio al problema, che vanno sotto il nome di modelli strutturali e di modelli in forma ridotta. I modelli del primo tipo modellizzano la struttura e l'evoluzione degli attivi di chi emette il titolo. Essi si basano su una descrizione endogena della probabilità di insolvenza, che si verifica al raggiungimento di una certa soglia minima del valore degli attivi. I modelli del secondo tipo, al contrario, ricavano dal mercato non tutta la descrizione dei bilanci di una società, ma un solo tipo di dato; riveste particolare importanza il parametro della cosiddetta intensità del tempo di fallimento. Essi considerano completamente esogeno, e quindi imprevedibile, l'evento di fallimento.

Lo studio svolto ha evidenziato l'insufficienza della prima tipologia di modelli per l'obiettivo prefigurato; il motivo è duplice: da una parte, essi si servono di una descrizione totale del flusso di cassa dell'emittente, mentre, come è noto, gli istituti di credito possono tenere nascosta parte dei propri bilanci. Dall'altra, questi modelli non tengono conto della possibilità di fallimento per fattori esterni.

Sono stati elaborati modelli basati sull'intensità sfruttando le equazioni differenziali stocastiche per il tasso a breve di tipo Cox-Ingersoll-Ross; questi hanno permesso la valutazione delle probabilità di insolvenza nonché la determinazione del prezzo equo di opzioni di tipo 'call' esposte a rischio di mancata copertura. La stesura della tesi rispecchia l'iter formativo della ricerca. Nel primo capitolo vengono presentati i modelli per i tassi di interesse sulle obbligazioni 'usuali', cioè le obbligazioni che non prevedono possibilità di fallimento. Sono esposte nel secondo capitolo le definizioni dei tassi cosiddetti storici, che vengono utilizzati ad esempio nelle stime delle Agenzie di Rating; si evidenzia la necessità di modelli matematici per le probabilità di default e transizione tra le diverse classi di rating.

Segue poi lo studio dei modelli strutturali, nell'approccio 'capostipite' di Merton e in una evoluzione dovuta a Zhou. Entrambi i modelli vengono studiati e analizzati, ed applicati alla determinazione delle probabilità di insolvenza grazie alla modellizzazione del mercato degli attivi di bilancio della società che emette il titolo. Si giunge a conclusioni riguardo la necessità di ulteriori tipologie di modelli.

Il quarto capitolo è dedicato allo studio dei modelli in forma ridotta, ed alla elaborazione di modelli concreti basati sul parametro dell'intensità, che rappresenta proprio una sorta di quantificazione dell'intensità del rischio finanziario, come si avrà modo di constatare. Si passa così all'applicazione di questi ultimi per la determinazione delle probabilità di default e dei prezzi equi. A tal fine, l'approccio più diffuso in letteratura prevede un solo tipo di pricing valido per tutte le misure di probabilità equivalenti. Qui si segue una strada diversa: si fissa una probabilità, in ipotesi di assenza di arbitraggio del mercato, e si effettua lo studio completo delle tipologie di pricing di un titolo esposto a rischio di insolvenza, nella fattispecie pricing di titoli che: non prevedano alcuna copertura, prevedono rimborso parziale alla scadenza dell'opzione, prevedono rimborso parziale all'avvenimento di default. Si studia poi cosa succede per cambio di misura equivalente; si evidenziano i vantaggi di un tale studio.

Infine, la constatazione che, sebbene lo studio matematico indichi chiaramente quale è la strada da percorrere di preferenza, nella realtà i modelli strutturali (ed addirittura le stime basate sui tassi storici) sono ancora molto utilizzati dagli analisti. Si cerca quindi, nell'ultimo capitolo, un tentativo di coniugazione delle due famiglie di modelli strutturali e modelli in forma ridotta, nei modelli cosiddetti ibridi.

Un esempio di fattore esogeno che influenza sia i tassi di interesse che di cambio, è rappresentato dai risultati elettorali delle ultime elezioni politiche in Italia.

Andamento dello spread BTP-BUND (espresso in punti base) a ridosso della settimana delle elezioni politiche del 24 e 25 Febbraio 2013 in Italia.

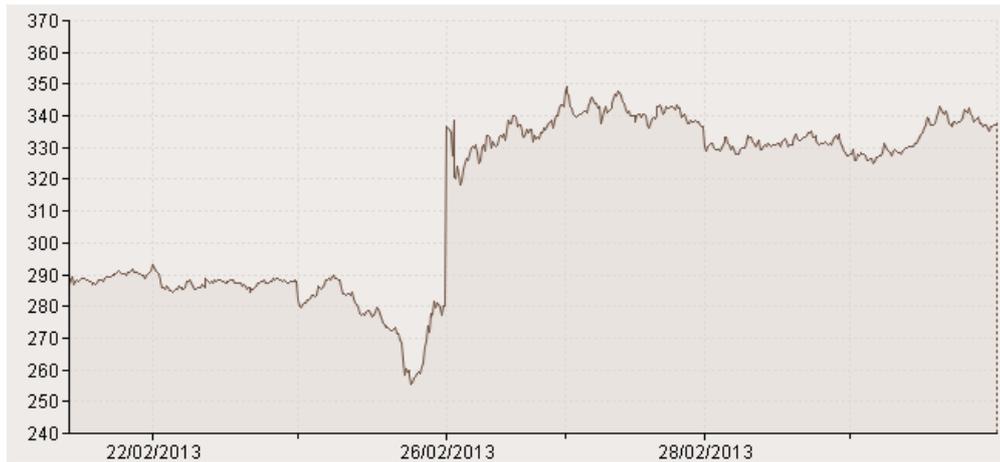


Fig. 1.1: Fonte: Il Sole 24 Ore.

Reperibile on-line alla pagina web:

finanza-mercati.ilsole24ore.comspread.phpQUOTE=sread-btp.

Andamento del tasso di cambio EURO/DOLLARO nel giorno 25 Febbraio 2013, con relativo commento.



Fig. 1.2: Fonte: xe.com.

Reperibile on-line alla pagina:

XE.com - EUR/USD Increasingly Volatile Amid Preliminary Italian Election Results.

The EURUSD extended decline and tested at session low of 1.3076. At the time of writing, the pair retraced to 1.3105.

THE TAKEAWAY: Centre-Left (pro-austerity, will take up Mario Monti's reforms) candidate P. Luigi Bersani on pace to win majority in lower house of parliament; however, Centre-Right (anti-austerity, vows to roll back Monti reforms) candidate and former Italian PM Silvio Berlusconi surging in senate elections. Why does this matter?

The EURUSD has had quite the volatile start to the week. After starting near 1.3180, the pair rallied up through 1.3300 on news that P. Luigi Bersani, the pro-austerity and Mario Monti-supported candidate, was well-positioned to see his party win a majority in the lower house of parliament.

While this news was continually priced in throughout the morning really, up through the US cash equity open at 09:30 EST/14:30 GMT the EURUSD was barely able to hold near 1.3300 as true results not just exit polling samples came out.

Thus far, a simple glance at the EURUSD intraday chart below tells all you need to know about further developments in the Italian elections: the anti-austerity candidate is surging at the wrong time. Silvio Berlusconi's party is winning in the upper house of parliament, meaning that a divided government is very likely. In Italy, the upper and lower houses share power equally; thus, a prime minister from the lower house is essentially dead-weight if the upper house doesn't comply.

2. MODELLI PER TITOLI A REDDITO VARIABILE E MODELLI PER TITOLI A REDDITO FISSO.

2.1 *Scopo dei modelli matematici per la finanza.*

I titoli di credito sono documenti destinati alla circolazione che attribuiscono il diritto ad una determinata prestazione. Nel caso di azioni ed obbligazioni, la prestazione consiste in un complesso di rapporti giuridici; a monte vi è un rapporto cosiddetto causale tra emittente (debitore) e primo prenditore (creditore o beneficiario), i quali decidono di fissare appunto nel titolo la prestazione dovuta dal primo al secondo.

La principale distinzione tra diverse categorie di titoli è quella riguardante il tipo di tassi di interesse che essi rilasciano al creditore.

Si distinguono quindi titoli a reddito fisso, ossia titoli che prevedono tasso di interesse prefissato e costante, e titoli ad interesse variabile. Esempi di titoli a reddito fisso possono essere i titoli di stato oppure i *bond* (obbligazioni). Titoli ad interesse variabile sono i titoli derivati (o opzioni), e le azioni (o *stock*).

Il mercato delle azioni consente, grazie al disallineamento dei prezzi, la presenza di arbitraggi¹, seppur di brevissima durata.

Chi sceglie di cautelarsi dalle fluttuazioni dei mercati, e quindi da improvvisi ribassi dei tassi di interesse, sceglie generalmente di investire in titoli a reddito fisso.

Tuttavia, la constatazione che non solo le imprese ma persino gli Stati possono fallire, comporta l'inesistenza di titoli 'sicuri'. Chi acquista un titolo del Tesoro o un bond societario, anche se sottoscrive un contratto giuridico, a causa dell'andamento generale dell'economia, non ha garantiti, nella pratica, né il rimborso del credito alla scadenza del titolo stesso, né il pagamento periodico degli interessi (le cedole o *coupon*).

Lo scopo dei modelli matematici per la finanza è cercare di 'prevedere' l'andamento dei mercati per tutelarsi dal numero maggiore possibile di situazioni eventuali.

Le opzioni danno al portatore un rendimento casuale per definizione: ad esempio, nel caso di opzioni di acquisto (o *call*)², il rendimento è dato dal prezzo dell'opzione alla data prefissata meno il costo di acquisto.

¹ Un arbitraggio è una scelta di strategia nella compravendita di titoli, che permette, partendo da un capitale iniziale nullo, di non perdere e di guadagnare con probabilità positiva.

² Le opzioni call sono contratti che danno il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare una certa cosa ad un certo prezzo in un preciso momento futuro.

Allora, per bilanciare il rendimento casuale di chi compra l'opzione, si pone subito il problema della valutazione del costo del titolo. Tale valutazione si compone di due fasi. La prima fase è il *pricing*, vale a dire la stima del prezzo equo del titolo: determinare il prezzo equo consiste nel calcolare, grazie a modelli matematici, quanto dovrebbe costare il titolo in un mercato privo di arbitraggi. La seconda fase è l'*hedging*, o copertura: chi emette il titolo ha il problema di studiare la copertura del rimborso allo scadere del titolo stesso.

Per i motivi che si dicevano sopra, essendo potenzialmente rischiosi anche i titoli a reddito fisso, ad essi si applicano spesso la terminologia e le metodologie di valutazione dei titoli ad interesse variabile: si parla di opzione, di pricing anche per bond soggetti a fallimento. Uno degli obiettivi di questa tesi è il pricing di tali bond. Quindi, si puntualizza, seppur con le terminologie prese in prestito dai titoli derivati, in questa tesi si studiano i titoli a reddito fisso. La distinzione che si fa è tra bond sicuri o meno, cioè tra obbligazioni la cui sicurezza è garantita (in un modello ideale o in casi di estrema certezza sull'emittente), e modelli di obbligazioni più reali, quelle soggette ad insolvenza.

Infine, i motivi per cui si studia il prezzo equo piuttosto che il prezzo in presenza di arbitraggi, che rifletterebbe meglio la situazione reale, sono i seguenti:

- Il prezzo equo è la vera determinazione del costo dell'opzione; il prezzo in presenza di arbitraggi si potrebbe ottenere a partire dal prezzo equo pur di sommare un opportuno processo: se si ipotizza che il prezzo equo sia la soluzione del problema 'omogeneo', il prezzo di arbitraggio potrebbe ricavarsi come somma di questo e di un particolare addendo 'di arbitraggio'.
- Per ottenere il prezzo in presenza di arbitraggi, bisognerebbe conoscere e modellizzare questi ultimi, il che è praticamente impossibile.
- In un mercato efficiente, la figura degli arbitraggisti³ tende a scomparire.

Fatta la scelta preliminare di uno spazio misurabile che modellizzi l'insieme degli eventi (i possibili stati dell'economia), e scelta su questo una misura di probabilità⁴ che carichi tutti i punti (cioè strettamente positiva sui singoletti), il primo teorema fondamentale dell'*asset pricing*⁵, a tempi continui, afferma che la condizione di assenza di arbitraggio è implicata dall'esistenza di una probabilità equivalente (o meglio di una classe di equivalenza di probabilità). Questa probabilità è chiamata probabilità *risk-neutral*, letteralmente probabilità neutrale al rischio, o talvolta probabilità martingala, per motivi che saranno chiari dalla sezione (2.7). Sotto questa probabilità, in media, gli attivi rischiosi si rivalutano, in base al tasso di interesse, quanto gli attivi senza rischio.

Grazie al paragone tra titoli a reddito variabile e titoli a reddito fisso soggetti a fallimento, non vi è dubbio che l'aggettivo 'rischiosi', che nel teorema era rivolto

³ Un arbitraggista è una figura che scommette su una compravendita di titoli sperando in forti profitti; cerca zone di mercato in cui sia possibile compiere degli arbitraggi e ci si infila con i suoi investimenti.

⁴ Chiamata probabilità originale.

⁵ O teorema di valutazione degli attivi.

alle opzioni, possa essere rivolto anche alle obbligazioni suscettibili di insolvenza. Quindi le ipotesi di partenza della tesi sono consistenti, cioè il problema è ben posto; con ciò si vuole dire che, se si assume l'ipotesi di esistenza di una probabilità risk-neutral, preoccupandosi in seguito di come trovarla a partire da una qualsiasi probabilità equivalente, si ha la garanzia di essersi posti nella condizione di mercato privo di arbitraggi. Non resta che mettersi all'opera. Preliminarmente, viene chiarito lo stato delle cose, con l'esposizione dei modelli per i titoli non soggetti a fallimento.

2.2 Modello di Samuelson-Black-Scholes per attivi con rischio e modello di Dupire.

In ordine cronologico, il seguente modello rappresenta la prima volta in cui si è arrivati, grazie al calcolo stocastico, ad una formula matematica precisa per il calcolo delle opzioni.

Sia dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, dotato di una filtrazione \mathcal{F} , e sia $W = (W_t)_{t \geq 0}$ un moto browniano standard rispetto a questa filtrazione. Per definizione di moto browniano standard, quindi, $W_0 = 0$.

Il modello prevede la presenza di un tasso di interesse $r > 0$ costante, ed una rivalutazione del capitale iniziale continuamente composta come funzione del tempo per i titoli ad interesse fisso. Questo vuol dire che, se si indica con B_t il valore di un titolo sicuro a reddito fisso all'istante $t > 0$, che vale 1 all'istante iniziale, si ha:

$$B_t \doteq e^{rt}, \quad t > 0. \quad (2.1)$$

Definizione 2.3: Si indichino, per ogni $t > 0$, con S_t^0 ed S_t il valore al tempo t di titoli ad interesse fisso e variabile rispettivamente⁶. Allora si prevede di modellizzare gli attivi nel seguente modo:

$$\begin{cases} S_t^0 = e^{rt} \\ dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \end{cases}$$

dove i parametri μ e σ vengono chiamati *drift* e *volatilità*, ed in generale dipendono dal mercato. Più precisamente, si potrà osservare che il modello dipende dal mercato soltanto attraverso il tasso di interesse r e la volatilità σ . Il problema verrà approfondito nella sezione (2.10).

Se si risolve l'equazione differenziale stocastica (2.3), si ricava per S_t la formula seguente:

$$S_t = S_0 \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t \right). \quad (2.2)$$

Definizione 2.4: Si definisca, per ogni $t > 0$, l'attivo attualizzato come:

$$\tilde{S}_t \doteq \frac{S_t}{B_t}; \quad (2.3)$$

⁶ In linguaggio da economisti, essi sono i valori dell'attivo aleatorio rispettivamente senza rischio o con rischio.

esso rappresenta la somma che, posseduta all'istante t , ed impiegata al tasso di interesse costante, restituisce il valore dell'attivo con rischio S_t all'istante t ; il coefficiente di attualizzazione è rappresentato dal bond.

Se si vuole la descrizione dell'evoluzione dell'attivo attualizzato invece che dell'attivo non attualizzato, le equazioni da considerare sono le seguenti:

Definizione 2.5:

$$\begin{cases} \tilde{S}_t = e^{-rt} S_t \\ d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \left((\mu - r)dt + \sigma dW_t \right), \end{cases}$$

dove r è il tasso di interesse costante.

Una piccola generalizzazione è costituita dal modello di Dupire; di seguito è formulata l'evoluzione, secondo tale modello, degli attivi con rischio.

Definizione 2.6: Nelle stesse notazioni precedenti, il modello di Dupire prevede la seguente equazione di evoluzione degli attivi:

$$dS_t = S_t \left(\mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \right). \quad (2.4)$$

Rispetto al modello di Black-Scholes (2.5), questo modello (2.6), nel caso $r(t)$, $\sigma(t)$ misurabili e limitati, ha il pregio di essere ancora completo (per tale definizione, si guardi la sezione (2.10)) come è il modello di Black-Scholes, ma riporta il problema di come scegliere la volatilità⁷. Inoltre, i calcoli sarebbero da svolgere attraverso le equazioni differenziali alle derivate parziali, e quindi non particolarmente stabili per risoluzioni numeriche al calcolatore.

2.7 Costruzione della probabilità martingala.

Si è già menzionato il fatto che, essere sotto probabilità martingala, implica la condizione di assenza di arbitraggio nel mercato.

Ci si può chiedere in che modo costruire una probabilità martingala.

Si cerca, nella pratica, la densità di probabilità che renda l'attivo aleatorio una martingala. Nel caso del modello della definizione (2.5), la costruzione di tale misura di probabilità procede nel seguente modo, che risulta particolarmente istruttivo ed utile studiare in vista di ciò che si farà nel capitolo sui modelli in forma ridotta.

Proposizione 2.8: Per un modello degli attivi di tipo Black-Scholes (definizione (2.5)), esiste una probabilità martingala equivalente P^* , ossia una probabilità che renda l'attivo aleatorio una martingala. Essa è definita dalla densità:

$$\frac{dP^*}{dP} = e^{\int_0^t \left(\frac{\mu-r}{\sigma} \right) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\mu-r}{\sigma} \right)^2 ds}. \quad (2.5)$$

⁷ Questo problema è affrontato nella sezione (2.10).

dim.

Nel modello dato dalla definizione (2.5), si ha che:

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \left((\mu - r)dt + \sigma dW_t \right). \quad (2.6)$$

Pertanto se $\mu = r$, allora \tilde{S}_t è una martingala. Questo però nella realtà non accade quasi mai.

Si scriva

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t^*, \quad (2.7)$$

dove

$$dW_t^* = dW_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) dt \quad (2.8)$$

e quindi

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) ds. \quad (2.9)$$

Scrivendo $d\tilde{S}_t$ in questo modo, si capisce subito come ottenere che sia una martingala (rispetto ad una qualche probabilità equivalente).

Infatti, per il teorema di Girsanov (2.27), si ha che, presa P^* tale che:

$$\frac{dP^*}{dP} = e^{\int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 ds}, \quad (2.10)$$

allora, sotto P^* , W_t^* è un processo di Wiener.

Dunque, il processo definito da \tilde{S}_t è una P^* -martingala locale. In realtà è una vera martingala per l'isometria di Itô e il teorema riportato in appendice (2.29) applicato con $p = 2$, dato che S_0 è uguale ad una costante, quindi in particolare $S_0 \in M^2$.

Osservazione 2.9: Nelle ipotesi della proposizione precedente, la probabilità martingala equivalente è anche unica. Da questo segue la completezza del mercato; questo concetto sarà meglio chiarito nella prossima sezione.

2.10 Inconvenienti dei modelli di tipo Black-Scholes e modelli a volatilità stocastica.

Nella formula (2.3), il parametro μ , che rappresenta quanto in fretta cresce l'azione, 'scompare' dall'equazione quando si passa a probabilità equivalente, e il drift è costituito solo dal tasso di interesse costante, che per ipotesi è noto sin dall'inizio.

Una conseguenza è che, in un mercato privo di arbitraggi, si può agire sul mercato. La volatilità, invece, rappresenta una misura dell'oscillazione dei prezzi, e riflette l'incertezza del mercato; essa è quindi un parametro che va ricavato dall'andamento del mercato finanziario. Questo costituisce un vero e proprio problema: il cosiddetto problema della scelta della volatilità.

A questo problema vi sono due principali soluzioni: la volatilità storica, che è una stima statistica basata sulle osservazioni dei dati passati, e la volatilità implicita, che è una ricostruzione che si effettua a partire dal valore delle opzioni

osservate sul mercato. Quest'ultima ricostruzione, presenta un fenomeno noto come *smile della volatilità*. Volendolo spiegare in poche parole, il sorriso della volatilità è costituito dal grafico positivo e convesso che modella la volatilità implicita. Il punto di minimo di quest'ultima si ha nel punto corrispondente al giorno attuale, dove si ha la cosiddetta opzione *at the money*. Invece, in tempi precedenti o successivi, non si ha una approssimazione tanto vicina alla realtà, e questo si riflette nella modellizzazione di opzioni 'sotto valore' (*in the money*) o 'fuori valore' (*out of the money*)⁸. A causa della non risoluzione del problema dello smile della volatilità, la strada dei modelli di tipo Black-Scholes, ed i tentativi di estensioni di questi come il modello di Dupire, definito in (2.6), furono abbandonati in favore di modelli a volatilità stocastica. L'inconveniente di questi ultimi, che sono più realistici, è però la perdita della completezza, il che comporta esistenza di diverse probabilità risk-neutral e quindi esistenza di diversi prezzi di non arbitraggio per lo stesso attivo. Queste nuove nozioni (prezzo di arbitraggio e mercato completo) sono di seguito definite.

Definizione 2.11: Si dice che un prezzo α è di arbitraggio per l'attivo X , se, introducendo nel mercato un nuovo attivo tale che all'istante iniziale sia uguale ad α ed all'istante finale sia uguale ad X , il mercato allargato costituito dagli attivi presenti prima più il nuovo attivo appena definito, non dà luogo ad arbitraggio.

Definizione 2.12: Un mercato si dice completo se ogni attivo aleatorio è replicabile, ossia esiste un portafoglio di scelte di valore iniziale pari ad X . Per il secondo teorema fondamentale dell'asset pricing, si ha, in tal caso, unicità della probabilità risk-neutral. In questo caso quindi c'è un solo prezzo equo sotto l'unica probabilità risk-neutral.

Altri modelli prevedono la modellizzazione 'simultanea' sia degli attivi con rischio che della volatilità. Un esempio è il seguente:

Definizione 2.13: Modello di Stein-Stein:

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t^1) \\ d\sigma_t = -S_t \left((\sigma_t - \vartheta) dt + k dW_t^2 \right), \end{cases}$$

dove ϑ, k sono parametri costanti, W_t^1, W_t^2 sono processi di Wiener indipendenti rispetto a due filtrazioni eventualmente distinte.

2.14 Modelli stocastici per il mercato delle obbligazioni basati sul tasso a breve.

Sia $T^* \in (0, +\infty)$ un istante temporale positivo prefissato.

Sia $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ uno spazio di probabilità che modella i possibili stati dell'economia e le loro probabilità. Siano dati su tale spazio di probabilità una filtrazione:

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T^*]}$$

⁸ Per maggiori approfondimenti, si rimanda alla sezione 7.7 di: T. Björk, 2004, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, second edition, Oxford University Press, New York.

e un processo di Wiener:

$$W = (W_t)_{t \in [0, T^*]}.$$

Sia, per un fissato $T \leq T^*$, $p(t, T)_{t \in [0, T]}$ un processo stocastico definito su tale spazio di probabilità.

Scelto lo spazio probabilizzato filtrato, per modellizzare le obbligazioni, il primo passo da fare, in quanto rappresenta il caso più semplice, è considerare bond con unico pagamento alla scadenza, cioè un'obbligazione che non rilasci periodicamente gli interessi da corrispondere.

Definizione 2.15: Si consideri un tempo $T \leq T^*$ che rappresenta la scadenza del titolo. Si definisce *zero coupon bond* un titolo a reddito fisso che non rilascia cedole. Si assume che esso venga venduto al prezzo $p(t, T)$ all'istante $0 \leq t \leq T$, per rilasciare somma 1 all'istante T .

Di conseguenza,

$$0 < p(t, T) < 1 \quad e \quad p(T, T) = 1.$$

Come funzione di t , infatti, ci si aspetta che il processo $p(t, T)$ sia molto irregolare, e vada quindi modellizzato come processo stocastico. Tuttavia, provare a modellizzare direttamente il prezzo equo dell'obbligazione, si rivela subito troppo contoso e poco pratico, dato che implicherebbe l'utilizzo di molti parametri da astrarre dai mercati; ad esempio, cosa può succedere nel caso di modellizzazione della volatilità è spiegato nella sezione (2.10).

Inoltre, con una modellizzazione del tipo:

$$dp(t, T) = p(t, T)[\alpha(t, T)dt + \beta(t, T)dW_t]$$

si dovrebbe poter garantire simultaneamente che $T \mapsto p(\omega, t, T)$ è \mathcal{C}^1 , e che $p(\omega, T, T) = 1$.

Quindi questa non è una buona strada e bisogna cambiare idea, basandosi su qualcosa di noto, come i tassi di interesse.

Per gli scopi della modellizzazione matematica, per i tassi di interesse si assume che:

- i tassi di interesse possano spaziare su un continuo di valori possibili;
- essi siano continuamente composti, piuttosto che linearmente composti;
- come ci si può aspettare, dipendano anch'essi dall'istante attuale t e dalla scadenza del titolo T .

Qui si vedranno i modelli basati sul cosiddetto *short rate*, di seguito definito.

Osservazione 2.16: Il processo di Wiener è sempre ad una dimensione: è irrisorio considerare dimensione del Wiener superiore ad 1 perché ci si può sempre ricondurre al caso unidimensionale.

Infatti, dati due processi di Wiener W_t^1, W_t^2 indipendenti, ed $\alpha(t), \beta(t)$ processi progressivamente misurabili sullo spazio filtrato $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, si può scrivere:

$$\alpha(t)dW_t^1 + \beta(t)dW_t^2 = \sqrt{(\alpha(t))^2 + (\beta(t))^2}dN_t$$

dove

$$N_t \doteq \int_0^t \left(\frac{\alpha(s)}{\sqrt{(\alpha(s))^2 + (\beta(s))^2}} dW_t^1 + \frac{\beta(s)}{\sqrt{(\alpha(s))^2 + (\beta(s))^2}} dW_t^2 \right). \quad (2.11)$$

La (2.11) è una martingala con traiettorie continue, ed ha variazione quadratica uguale a t ; allora per il teorema di Paul Levy è un processo di Wiener.

Definizione 2.17: Sullo spazio di probabilità di partenza $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, si definisce tasso a breve istantaneo il processo stocastico r definito, per ogni $0 \leq t \leq T$, da:

$$r(t) \doteq \lim_{T \rightarrow t^+} L(t, T + \Delta t), \quad (2.12)$$

dove $\Delta t \doteq T - t$ ed $L(t, T)$ è il tasso libor definito da:

$$L(t, T) \doteq \frac{1 - p(t, T)}{p(t, T)(T - t)}. \quad (2.13)$$

Definizione 2.18: Si prende come numerario abituale⁹ il processo definito, per ogni $0 \leq t \leq T$, da:

$$B_t \doteq e^{\int_0^t r(s) ds}. \quad (2.14)$$

L'ipotesi che dà la condizione di assenza di arbitraggio, che per brevità viene indicata come ipotesi di non arbitraggio, è la seguente:

Definizione 2.19: Ipotesi di non arbitraggio: esiste una probabilità Q equivalente a P tale che, sotto Q , per ogni scadenza T del titolo,

$$\left(\frac{p(t, T)}{B_t} \right)_{t \in [0, T]} \quad (2.15)$$

sia una martingala.

Osservazione 2.20: Dai prezzi $p(t, T)$ è possibile ricavare il tasso libor $L(t, T)$ (2.13) e viceversa dai tassi libor è possibile ricavare i prezzi. Il tasso a breve (2.12) si ricava dal tasso libor, ma non si torna indietro: noto $r(t)$, non è possibile ricostruire $p(t, T)$. Però, se esiste una probabilità martingala equivalente P^* , allora, grazie all'ipotesi della definizione (2.19),

$$\frac{p(t, T)}{B_t} = E^* \left[\frac{p(T, T)}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (2.16)$$

oppure:

$$p(t, T) = E^* \left[e^{-\int_0^t r(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.17)$$

⁹ Qui il termine numerario è preso come sinonimo di coefficiente di attualizzazione.

Al contrario di quanto accade in Black-Scholes, non è possibile caratterizzare direttamente la probabilità martingala equivalente P^* . Allora si hanno due possibilità: o si modella $r(t)$ sotto P e poi si ricava la densità $\frac{dP^*}{dP}$ via teorema di Girsanov, oppure si modella direttamente $r(t)$ sotto P^* . Questo stesso problema si verifica anche più avanti nella tesi nel capitolo sui modelli in forma ridotta. Sia qui che lì si segue la prima strada.

I modelli per i tassi a breve ci si aspetta che siano del tipo:

$$\begin{cases} dr(t) = \alpha(t, r(t))dt + \beta(t, r(t))dW_t \\ r(0) = r^*(0) \end{cases}$$

Ed infatti i modelli più noti di tassi a breve¹⁰ sono della forma seguente:

1. **Vasicek:**

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW_t \quad (a, b, \sigma \in \mathbb{R}, a > 0, \sigma > 0);$$

2. **Cox-Ingersoll-Ross:**

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t \quad (a, b, \sigma \in \mathbb{R}, a > 0, \sigma > 0);$$

3. **Hull-White:**

$$dr(t) = (b(t) - ar(t))dt + \sigma dW_t \quad (a > 0, \sigma > 0, b \text{ funz. det.});$$

4. **Ho-Lee:**

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma dW_t \quad (\sigma > 0, b \text{ funz. deterministica}).$$

Osservazione 2.21: Commenti.

Il modello Vasicek consente di avere tassi negativi! Quindi è da modificare. Nel modello CIR¹¹ la radice quadrata è ben definita solo se $r(t) > 0$. Occorre pertanto imporre delle condizioni sui coefficienti a, b, σ che garantiscano che le traiettorie del processo r siano sempre strettamente positive. Questa ipotesi si trova soddisfatta grazie alle conclusioni sulle diffusioni di Feller, di cui questi modelli sono un caso particolare. Se $ab > \frac{\sigma^2}{2}$, allora $r(t)$ non tocca mai lo 0 quasi certamente.

I primi due modelli non consentono l'inversione della curva dei rendimenti, cioè la calibrazione dei parametri sui dati, mentre i secondi due sì.

Nei casi Vasicek, CIR, c'è soluzione esplicita, e questa si ricava mediante equazioni differenziali alle derivate parziali. Un'idea per semplificare i calcoli è costituita dalla struttura a termine affine (*Affine Term Structure*) di Duffie.

¹⁰ Essi sono stati elaborati tra gli anni '70 e gli anni '90 del secolo scorso; sono classificati in base al nome degli autori.

¹¹ Abbreviazione di Cox-Ingersoll-Ross.

Definizione 2.22: Il modello ha una struttura a termine affine se $p(t, T)$ si può scrivere come:

$$p(t, T) = \exp(A(t, T) - B(t, T)r(t))$$

con A, B funzioni deterministiche continue e

$$A(T, T) = B(T, T) = 0.$$

Vale il seguente teorema.

Teorema 2.23: Si supponga che, sotto la probabilità \mathbb{Q} , il processo r soddisfi l'equazione differenziale stocastica:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW_t, \quad (2.18)$$

dove

$$\begin{cases} \mu(t, r(t)) = \alpha(t)r(t) + \beta(t) \\ \sigma(t, r(t)) = \sqrt{\gamma(t)r(t) + \delta(t)}, \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ funzioni deterministiche continue. Allora il modello ha struttura a termine affine.

2.24 Appendice.

Definizione 2.25: Un processo stocastico X definito su uno spazio di probabilità filtrato si dice di classe $M^2[0, T]$ se è progressivamente misurabile rispetto alla filtrazione data e:

$$E \left[\int_0^T X_s^2 ds \right] < +\infty. \quad (2.19)$$

Definizione 2.26: Un processo stocastico X definito su uno spazio di probabilità filtrato si dice di classe $\Lambda^2[0, T]$ se è progressivamente misurabile rispetto alla filtrazione e quasi certamente di quadrato integrabile su $[0, T]$, cioè:

$$P \left(\int_0^T X_s^2 ds < +\infty \right) = 1. \quad (2.20)$$

Teorema 2.27: (Teorema di Girsanov.)

Sullo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, siano dati due processi

$$H = (H_t)_{t \in [0, T]}, \quad L = (L_t)_{t \in [0, T]}$$

tali che: $H \in \Lambda^2[0, T]$, ed L_t sia soluzione di:

$$\begin{cases} dL_t = H_t L_t dW_t \\ L_0 = 1, \end{cases}$$

cioè L_t è dato da:

$$L_t = e^{\int_0^t H_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 ds}. \quad (2.21)$$

Se $E[L_T] = 1$ ¹², allora, presa una probabilità Q equivalente a P tale che

$$\frac{dQ}{dP} = L_T, \quad (2.22)$$

sotto Q , il processo

$$W_t^* = W_t + \int_0^t H_s ds \quad (2.23)$$

è un processo di Wiener.

Inoltre, se la filtrazione è quella generata dal moto browniano, allora tutte le probabilità equivalenti sono fatte in questo modo.

Definizione 2.28: (Condizione di Novikov.)

Nelle stesse notazioni del teorema precedente, se vale la condizione:

$$E[e^{\frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 ds}] < +\infty \quad (2.24)$$

allora il processo L è una martingala sotto la probabilità P .

¹² Questo accade ad esempio se L è limitato oppure vale la condizione di Novikov (definizione (2.28)), allora L_t è una martingala e quindi $E[L_T] = E[L_0] = 1$.

Teorema 2.29: Se un processo X è tale che X_0 misurabile rispetto a \mathcal{F}_0 , ed il drift e la volatilità sono processi stocastici che soddisfano delle opportune ipotesi di lipschitzianità, allora c'è esistenza forte e unicità forte per l'equazione differenziale stocastica che definisce un processo di Itô¹³. Se, per un certo $p \geq 1$, vale $E[|X_0|^p] < \infty$, allora:

$$E[\sup_{t \in [0, T]} |X_t|^p] < +\infty. \quad (2.25)$$

¹³ Definizione (4.21).

3. I TASSI STORICI.

Gli studi sulle insolvenze delle agenzie di rating sintetizzano le esperienze di inadempienza di chi emette un titolo di debito pubblico comparando i rating storici¹ di emittenti inadempienti con le classi di valutazioni di pubblici emittenti che non sono falliti.

Essi determinano i tassi di default basati su tutti i bond di una certa classe di valutazione, indipendentemente da quando sono stati emessi. Per questo tipo di valutazioni, quindi, si potrebbe dire che gli obbligazionisti sono ‘l’unità di misura’ del rating.

3.1 Definizione dei tassi di probabilità e di transizione.

Definizione 3.2: Il tasso storico marginale di default ad un anno, basato sull’intervallo di tempo $[Y_0, Y_1]$ ($Y_0 \leq Y_1 - t$) per un emittente con rating R è definito da:

$$d_R(t) \doteq \frac{\sum_{Y=Y_0}^{Y_1} M_R^Y(t)}{\sum_{Y=Y_0}^{Y_1} N_R^Y(t)} \quad (3.1)$$

dove $N_R^Y(t)$ è il numero di emittenti con rating R all’inizio dell’anno Y che non sono ‘falliti’ fino all’inizio dell’anno $Y+t-1$, mentre $M_R^Y(t)$ è il numero di emittenti con rating R all’inizio dell’anno Y che sono falliti nel t -esimo anno (ossia durante l’anno $Y+t-1$).

Con le stesse notazioni, il tasso storico marginale di sopravvivenza ad un anno, basato sull’intervallo di tempo $[Y_0, Y_1]$ (con $Y_0 \leq Y_1 - t$) per un emittente con rating R è definito da:

$$s_R \doteq 1 - d_R. \quad (3.2)$$

Si potrebbe quindi sintetizzare l’idea presente dietro queste definizioni come quella di rappresentare una sorta di media tra casi sfavorevoli su casi possibili (annuali) nell’arco di un intervallo di tempo $[Y_0, Y_1]$, per una certa classe di rating R .

Definizione 3.3: Il tasso storico cumulativo di default ad un anno, basato sull’intervallo di tempo $[Y_0, Y_1]$ (con $Y_0 \leq Y_1 - t$), è:

$$cd_R(t) \doteq 1 - cs_R(t), \quad (3.3)$$

dove $cs_R(t)$ è il tasso storico cumulativo di sopravvivenza ad un anno:

$$cs_R(t) \doteq \prod_{i=1}^t (1 - d_R(i)). \quad (3.4)$$

¹ Cioè le valutazioni di soggetti nella stessa classe di rating.

Questi tassi sostanzialmente sono rispettivamente la probabilità che un emittente valutato R fallisca (non fallisca nel caso di tasso storico di sopravvivenza) nell'arco di t anni.

Osservazione 3.4: Il tasso storico marginale di default a un anno, basato sulla cornice temporale

$$[Y_0, Y_1], \quad Y_0 \leq Y_1 - t,$$

coincide con il tasso storico cumulativo ad un anno, in formule:

$$d_R(1) = cd_R(1). \quad (3.5)$$

Infatti, si ha:

$$cd_R(1) = 1 - cs_R(1) = 1 - \prod_{i=1}^1 (1 - d_R(i)) = 1 - (1 - d_R(1)) = d_R(1).$$

Possiamo quindi chiamarli entrambi tasso di default storico ad un anno basato sulla cornice temporale $[Y_0, Y_1]$, $Y_0 \leq Y_1 - t$ oppure, *tout court*, tasso di default ad un anno se non ci interessa il riferimento temporale.

Definizione 3.5: Il tasso storico di transizione ad un anno, di passaggio dal rating R al rating R' , basato sull'intervallo di tempo $[Y_0, Y_1]$, per un emittente con rating R , è dato da:

$$tr_{R,R'} \doteq \frac{\sum_{y=Y_0}^{Y_1} M_{R,R'}(y)}{\sum_{y=Y_0}^{Y_1} N_R(y)}, \quad (3.6)$$

dove $N_R(y)$ è come sopra il numero di emittenti con rating R all'inizio dell'anno y , mentre $M_{R,R'}(y)$ è il numero di emittenti con rating R all'inizio dell'anno y e rating R' alla fine di quell'anno.

3.6 Inconvenienti di un eventuale 'metodo storico'

Le agenzie di rating devono periodicamente provvedere a pubblicare dati che servano come 'statistiche di default' aggiornate, fruibili e complete nel tempo. Al fine di mostrare quanto inappropriata possa essere una possibilità di stima delle probabilità di insolvenza basata sui tassi storici, sono di seguito enunciate alcune delle evidenti limitazioni di questo eventuale modo di procedere per definire le probabilità di default.

- I tassi di transizione e di default possono essere applicati solo a opzioni che hanno già un rating corrente; per quelle opzioni che non lo hanno ancora, devono essere utilizzati dei cosiddetti *key accounting ratios* cioè dei rapporti di valutazione più significativi. Questo implica che, per queste opzioni 'sfortunate' che sono valutate per la prima volta, il metodo di determinazione della prima valutazione, si potrebbe definire, in un certo

senso, 'preistorico', in quanto il modo di procedere è il seguente: i tassi più significativi, raccolti dalle informazioni di mercato, vengono comparati con i valori attesi di opzioni che hanno già un rating corrente, e poi da questa comparazione, per paragone, si ricava 'per somiglianza' la valutazione da assegnare alla nuova opzione.

- Usare le stime dei tassi storici di default come approssimazione per il futuro non prevede la possibilità di cogliere, dai mercati, l'importante informazione della volatilità (ossia la rapidità di cambiamento) dei tassi di default, soprattutto per classi di rating che hanno bassi livelli di valutazioni.

Tuttu questo è poco realistico: nella realtà, infatti, le probabilità di transizione e di default sono molto dinamiche nel tempo, e dipendono dalle condizioni economiche del momento. Pertanto, le rilevazioni storiche potrebbero non riflettere il corrente ambiente di credito.

- Alcuni parametri di valutazione, a dispetto del gran numero di osservazioni necessarie per effettuare le loro stime, hanno bassa rilevanza statistica.
- Il rating di un debitore è una stima troppo grezza della sua reale tipologia di debitore; si può osservare che in una classe di rating vi sono grandi variazioni dei tassi di default, e questo comporta che ogni classe di rating raccoglie una troppo ampia gamma di obbligazionisti.
- Le Agenzie di Rating sono abitualmente troppo lente nel modificare le valutazioni emesse. Di conseguenza, le probabilità medie di restare nella stessa classe di rating secondo il metodo storico sono sovrastimate.
- Se le Agenzie di Rating sovrastimano i tempi di permanenza di un emittente nella stessa classe di rating, esse di conseguenza devono sottostimare almeno alcune delle probabilità di transizione ad altri stati di credito.

In conclusione, per fornire delle stime, questo costituirebbe un metodo di valutazione troppo blando; quindi è necessario elaborare modelli alternativi.

Fig. 3.1: Le classi di valutazione delle principali Agenzie di Rating.

Moody's		Standard & Poor's		Fitch Ratings		Descrizione
Lungo Termine	Breve Termine	Lungo Termine	Breve Termine	Lungo Termine	Breve Termine	
Aaa	P-1	AAA	A-1+	AAA	F1+	"Prime" Massima sicurezza del capitale
Aa1		AA+		AA+		Rating alto. Qualità più che buona
Aa2		AA		AA		
Aa3		AA-		AA-		
A1	P-2	A+	A-1	A+	F1	Rating medio-alto. Qualità media
A2		A		A		
A3		A-		A-		
Baa1	P-3	BBB+	A-2	BBB+	F2	Rating medio-basso. Qualità medio-bassa
Baa2		BBB		BBB		
Baa3		BBB-		BBB-		
Ba1	Not Prime	BB+	B	BB+	B	Area di non-investimento Speculativo
Ba2		BB		BB		
Ba3		BB-		BB-		
B1		B+		B+		Altamente speculativo
B2		B		B		
B3		B-		B-		
Caa		CCC+		C		CCC
Ca	CCC	CCC	Estremamente speculativo			
C	CCC-		Rischio di perdere il capitale			
/	D	/	DDD	/	In perdita	
/			DD			
/			D			

Moody's

Aaa Livello minimo di rischio
Aa Debito di alta qualità
A Debito di buona qualità ma soggetto a rischio futuro
Baa Grado di protezione medio
Ba Debito con un certo rischio speculativo
B Debito con bassa probabilità di ripagamento
Caa/Ca Investimento ad alto rischio
C Realistico pericolo di insolvenza

Standard & Poor's

AAA Elevata capacità di ripagare il debito
AA Alta capacità di pagare il debito
A Solida capacità di ripagare il debito, che potrebbe essere influenzata da circostanze avverse
BBB Adeguata capacità di rimborso, che però potrebbe peggiorare
BB/B Debito prevalentemente speculativo
CCC/CC Debito altamente speculativo
D Società insolvente

4. I MODELLI STRUTTURALI.

4.1 Premessa generale: l'ambiente di lavoro.

Si considera un tempo massimale fissato $T^* \in \mathbb{R}$, $T^* > 0$, tale che la scadenza T dell'opzione (*maturity*) soddisfi $T \in [0, T^*]$, ed un soggiacente spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, dotato di una filtrazione \mathcal{F} , sulla quale si fanno le seguenti ipotesi: la filtrazione $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T^*]}$ rappresenti il complesso di tutte le informazioni disponibili ad ogni istante $t \in [0, T]$; si suppone inoltre che tale filtrazione soddisfi le condizioni abituali, vale a dire che \mathcal{F} è completa: $\mathcal{F}_0 \supseteq \mathcal{N}$, dove \mathcal{N} è la classe degli insiemi trascurabili rispetto ad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$:

$$\mathcal{N} = \{N \subset \Omega : \inf\{P(B); B \in \mathfrak{F}, N \subseteq B\} = 0\},$$

e continua a destra:

$$\forall t \in [0, T^*] \quad \mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}.$$

Tale spazio probabilizzato si suppone abbastanza 'ricco' da supportare i seguenti oggetti:

- un processo stocastico $r = (r_t)_{t \in [0, T]}$ che modella il tasso di interesse a breve termine;
- un processo stocastico \mathcal{F} -progressivamente misurabile $V = (V_t)_{t \in [0, T]}$ che modella il valore totale degli attivi dell'emittente;
- un processo stocastico \mathcal{F} -progressivamente misurabile $v = (v_t)_{t \in [0, T]}$ che modella un valore di soglia che serve a specificare l'istante di insolvenza;
- un attivo (più propriamente un passivo) aleatorio \mathcal{F}_T -misurabile X che rappresenta il debito da rimborsare alla scadenza $T \leq T^*$;
- un processo stocastico \mathcal{F} -progressivamente misurabile $A = (A_t)_{t \in [0, T]}$, a variazione finita¹ e tale che $A_0 = 0$, che modella i dividendi (cedole) periodicamente rilasciate ad intervalli temporali discreti o continuamente composti al possessore del titolo suscettibile di insolvenza;
- un attivo aleatorio di copertura \mathcal{F}_T -misurabile \tilde{X} che rappresenta la liquidazione di copertura rilasciata al momento dell'evento di default, se questo si verifica prima della scadenza T ;

¹ Definizione (4.18) in appendice.

- un processo stocastico di copertura \mathcal{F} -progressivamente misurabile $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ che modella il risarcimento di copertura al momento dell'evento di default, se questo si verifica prima della scadenza T .

Altre ipotesi sui processi appena definiti riguardano delle opportune condizioni di integrabilità, che si assumono di volta in volta soddisfatte nei calcoli che coinvolgono tali variabili aleatorie come integrandi.

In questo quadro matematico, è possibile modellizzare gli attivi che saranno studiati, come quintuple, della forma

$$(X, A, \tilde{X}, Z, \tau), \quad (4.1)$$

dove τ è una variabile aleatoria, a valori in $(0, +\infty)$, che rappresenta l'istante di insolvenza, ed è per questo motivo chiamato tempo aleatorio di default.

Per perseguire lo scopo di guardare sotto un'ottica unitaria le due grandi classi di modelli sopra menzionate e di seguito studiate, è importante adottare proprio la cornice matematica appena formalizzata: infatti, così facendo, i modelli strutturali e quelli in forma ridotta (dei quali saranno studiati nel prossimo capitolo quelli *Intensity-based*, o basati sull'intensità), differiscono 'soltanto' per il modo in cui l'evento di insolvenza, e quindi il tempo aleatorio di default τ , vengono trattati.

Nei modelli strutturali, l'evento di insolvenza è pensato come il superamento, al ribasso, della soglia minima v del valore degli attivi, di conseguenza si pone:

Definizione 4.2:

$$\tau \doteq \begin{cases} \inf\{t > 0 \mid t \in I, V_t < v_t\}, & \text{se } \{t > 0 \mid t \in I, V_t < v_t\} \neq \emptyset; \\ +\infty, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove I è un sottoinsieme misurabile dell'intervallo $[0, T]$.

Si ha che, se i due processi V e v sono supposti continui, τ è un tempo di arresto rispetto alla filtrazione \mathcal{F} , in quanto primo istante di ingresso nell'aperto $B := \{V_t - v_t < 0\} \subseteq [0, T]$; a maggior ragione sotto tali ipotesi τ risulta un \mathcal{F} -tempo d'arresto se nella sua definizione anziché il minore stretto c'è il \leq ; infatti τ è il primo istante di ingresso nel chiuso $C := \{V_t - v_t \leq 0\}$, e τ è non solo l'estremo inferiore ma il minimo dell'insieme $\{t > 0 \mid t \in I, V_t \leq v_t\}$.² Per la dimostrazione di queste affermazioni, si veda l'appendice.

Tenendo a mente questa cornice probabilistica, si passa, nella prossima sezione, al metodo vero e proprio per quello che interessa realmente calcolare, vale a dire le probabilità di default.

Si danno innanzitutto le seguenti definizioni.

Definizione 4.3: Si denota, per $T \in [0, T^*]$, con

$$(p_d(t, T))_{t \in [0, T]}$$

² Nel caso di primo istante di ingresso in un chiuso di un tempo aleatorio, non è necessaria l'ipotesi sulla continuità della filtrazione. Tuttavia si suppone di essere sempre sotto l'ipotesi di filtrazione continua a destra per poter passare indifferentemente dal tempo d'arresto definito col minore stretto a quello definito con il minore o uguale.

un processo stocastico su $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, a valori reali, \mathcal{F} -adattato, che rappresenta, istante per istante, la probabilità condizionale, rispetto alla σ -algebra \mathcal{F}_t , di insolvenza entro il tempo T .

Se l'evento di insolvenza viene pensato come cessazione istantanea di un contratto fino ad allora esistente, quale potrebbe essere per esempio una obbligazione, si può immediatamente comprendere l'utilità della seguente definizione 'duale':

Definizione 4.4: Si definisce probabilità condizionale al tempo t di sopravvivenza fino al tempo T (con $0 \leq t \leq T \leq T^*$):

$$(p_s(t, T))_{t \in [0, T]} \quad T \in [0, T^*]$$

quel processo stocastico su $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$ tale che $p_d(t, T) = 1 - p_s(t, T)$.

4.5 *Espressione della probabilità di insolvenza nei modelli strutturali.*

Un modello strutturale è così chiamato perché modella esplicitamente la struttura del capitale dell'opzione.³ Esso, nella sua forma basilare, prevede di considerare uno Stato, od una società, che si finanzia mediante un unico debito, e un unico capitale, in forma di titoli. Il titolo di debito è del tipo zero-coupon bond (cioè l'acquirente, per ipotesi, non riceve dividendi), con scadenza T , e rimborso di capitale X alla scadenza. Il titolo risulta solvibile alla scadenza se l'emittente è in grado di saldare il debito, vale a dire nel caso in cui il valore totale di mercato dei suoi attivi V_T , alla data di scadenza del titolo, è maggiore del capitale da rimborsare $X(T)$; viceversa il debito risulta insolubile se il tempo d'arresto della definizione (4.2) è anteriore alla scadenza T del titolo, cioè se si verifica la bancarotta prima della scadenza T dell'opzione. La conseguenza di questo ragionamento è che, in un modello ragionevole, si può prendere il processo dell'attivo aleatorio da rimborsare $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ come il processo che si era definito valore di soglia $v = (v_t)_{0 \leq t \leq T}$ nella sezione 4.1. Sulla base di queste considerazioni, si riformula l'espressione della probabilità di insolvenza nel modo seguente.

Definizione 4.6: La probabilità di insolvenza entro il tempo T , all'istante $t \leq T$, condizionata sulla base dell'informazione disponibile all'istante $t \leq T$, è definita come:

$$p_d(t, T) = P[V_T < X | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.2)$$

o, equivalentemente,

$$p_d(t, T) = P[V_T - X < 0 | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.3)$$

³ **Osservazione:** Ne discende che, se si vuole prevedere l'evoluzione dell'attivo aleatorio suscettibile di insolvenza, bisogna avere accesso a tutti i dati di bilancio che riguardano quell'opzione.

4.7 Il modello di Merton (1974).

L'approccio per modellizzare le probabilità di default basate sull'evoluzione degli attivi, o *asset-based model*, si fa comunemente risalire a Merton (*On the pricing for corporate debt: the risk structure of interest rates*, 1974)⁴.

Dalla definizione (4.2), segue che, una volta modellizzata l'evoluzione degli attivi, è possibile un calcolo più esplicito della probabilità di default. Allora si va a studiare un modello per gli attivi, che può essere, ad esempio, un modello basato su un moto browniano derivato, definito nel primo capitolo. Lo studio del modello per la descrizione dell'attivo aleatorio è l'argomento della prossima sottosezione; in quella successiva, si utilizzano i risultati trovati sugli attivi per esplicitare le probabilità di interesse.

4.7.1 Un modello per il valore di mercato degli attivi.

Il valore di mercato degli attivi, secondo la definizione postulata in (4.1), è modellizzato dal processo stocastico \mathcal{F} -adattato V ; nel modello in esame le sue traiettorie⁵ sono definite da:

$$(V(t))_{0 \leq t \leq T^*} \quad \text{con } dV(t) = V(t)(\mu_V dt + \sigma_V dW_V(t)), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.4)$$

$(V(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ è un processo di Itô⁶ lineare e continuo, la cui 'dinamica' è modellizzata da un moto browniano derivato dal moto browniano $W_V(t)$, avente drift μ_V e volatilità σ_V . I parametri di drift e volatilità dipendono dal processo V perché il moto browniano $W_V(t)$ ne dipende; per semplicità la volatilità si suppone costante⁷; il drift rappresenta il tasso atteso istantaneo di rendimento sull'opzione per unità di tempo, ed è sconosciuto.

Se si adotta questo modello per la dinamica degli attivi, è possibile ricavare un'espressione esplicita per V_T .

Proposizione 4.8: Il valore di mercato degli attivi, alla scadenza T dell'opzione sottoscritta, nel modello di Merton, è dato da

$$V(T) = V(t)e^{(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t) + \sigma_V(W_V(T) - W_V(t))} \quad (4.5)$$

dim.

Si riconosce che l'equazione differenziale stocastica (4.4) è quella di un modello di tipo Black-Scholes⁸. Si supponga di sapere che, per ogni t tale che $0 \leq t \leq T$, una soluzione dell'equazione della dinamica (4.4) esista e sia positiva. Allora se ne può prendere il logaritmo; ponendo per comodità di notazione $V_t \doteq V(t)$ e $W_t \doteq W_V(t)$, sia $Y_t \doteq \ln(V_t)$; allora si ha, grazie alla formula di Itô⁹, applicata

⁴ Esso fu proposto da Black e Scholes (1973) in uno studio seminariale sull'option pricing e fu in seguito specificato e meglio argomentato in un articolo di Merton (1974). Un primo embrione della teoria era già in Merton (1970), egli fu l'ispiratore dello stesso articolo di Black e Scholes con i quali collaborava da tempo: per tali motivi la paternità del modello è attribuita interamente a Merton. Una versione molto conosciuta è quella commercializzata da KMV-Moody's.

⁵ Definizione (4.17).

⁶ Si richiama la definizione di Processo di Itô in appendice, definizione (4.21).

⁷ volatilità

⁸ Si rimanda al capitolo 1.

⁹ Si utilizza la versione data in (4.22).

al processo V con funzione $F(x) \doteq \ln(x)$ di classe $C^\infty(0, +\infty)$, che

$$dY_t = \frac{1}{V_t}dV_t - \frac{1}{2} \frac{1}{V_t^2} d \langle V_t \rangle = \frac{1}{V_t}dV_t - \frac{1}{2} \frac{1}{V_t^2} V_t^2 \sigma_V^2 dt,$$

Dove la formula per la variazione quadratica del processo di Itô V_t è stata calcolata grazie alla formula (4.23). Si sostituisca adesso in questa espressione la formula (4.4) per dV_t ; si ottiene:

$$dY_t = \mu_V dt + \sigma_V dW_t - \frac{\sigma_V^2}{2} dt \quad (4.6)$$

Integrando si ottiene:

$$Y_t = Y_0 + \sigma_V W_t + (\mu_V - \frac{\sigma_V^2}{2})t, \quad \text{dove } Y_0 = \ln(V_0). \quad (4.7)$$

Prendendo adesso l'esponenziale $\tilde{V}_t \doteq e^{Y_t}$, si ha:

$$\tilde{V}_t = V_0 e^{\sigma_V W_t + (\mu_V - \frac{\sigma_V^2}{2})t}, \quad \tilde{V}_0 = V_0. \quad (4.8)$$

L'espressione per \tilde{V} (4.8) soddisfa l'equazione (4.4), infatti differenziando si trova:

$$d\tilde{V}_t = \tilde{V}_t [(\mu_V dt - \frac{\sigma_V^2}{2})dt + \sigma_V dW_t] + \frac{V_t}{2} \sigma_V^2 dt = \tilde{V}_t (\mu_V dt + \sigma_V dW_t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

La (4.8) è inoltre l'unica soluzione: supponendo di avere un'altra soluzione X_t della (4.4) con $X_0 = V_0$, si avrebbe che:

$$\frac{X_t}{\tilde{V}_t} = V_0^{-1} X_t e^{(-\mu_V dt + \frac{\sigma_V^2}{2})t - \sigma_V W_t} = V_0^{-1}$$

e quindi

$$d\left(\frac{X_t}{\tilde{V}_t}\right) = 0.$$

Allora le due soluzioni differirebbero per una costante; questa costante è nulla perché X e V coincidono quasi certamente; in realtà la coincidenza quasi ovunque è proprio la coincidenza $\forall \omega \in \Omega$ visto che nel modello di Merton si suppone V un processo a traiettorie continue, e si ha inoltre coincidenza per ipotesi in $t=0$. Si arriva alla formula desiderata per $V(T)$ applicando le formule (4.6), (4.7) alla differenza temporale $T-t$; si arriva alla:

$$V(T) = V(t) e^{\sigma_V (W_T - W_t) + (\mu_V - \frac{\sigma_V^2}{2})(T-t)}$$

che era quanto si voleva dimostrare.

Resta da verificare che l'ipotesi di positività di $V(t)$ è soddisfatta; ma a questa ipotesi è sempre possibile ricondursi. Si può ipotizzare infatti che, in un mercato 'normale', se il bilancio degli attivi è già negativo, allora non sia proprio possibile emettere l'obbligazione. Se inoltre si assume che $X > 0$, cioè che la somma X dovuta al creditore sia positiva, non si hanno problemi di esistenza di V nel caso di interesse, ovvero nel caso di studio della condizione $V(t) < X$. \square

4.8.1 Caratterizzazione della probabilità di default.

Grazie all'espressione esplicita di $V(T)$, si può ricavare una formula per la probabilità di default $p_d(t, T)$.

Teorema 4.9: Sia Φ l'operatore di distribuzione normale standard, cioè l'operatore definito da

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Allora la probabilità di default al tempo t relativo alla scadenza T dell'opzione sottoscritta, nel modello di Merton, è data da

$$p_d(t, T) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{X}{V(t)}\right) - (\mu_V dt - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}\right), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.9)$$

dim.

Per definizione di $p_d(t, T)$ (4.2)

$$p_d(t, T) = P[V(T) < X | \mathcal{F}_t]$$

per la formula (4.5) quest'ultima probabilità diventa:

$$= P\left[V(t)e^{(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t) + \sigma_V(W_V(T) - W_V(t))} < X | \mathcal{F}_t\right] =$$

per definizione di speranza condizionale:

$$= E\left[\mathbb{I}_{\{V(t)\exp[(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t) + \sigma_V(W_V(T) - W_V(t))] < X\}} | \mathcal{F}_t\right]$$

dove il simbolo \mathbb{I}_B denota la funzione indicatrice del boreliano B . A questo punto si ponga:

$$g(W, Z) \doteq \mathbb{I}_B, \quad B \doteq \{V(t)e^{(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t) + \sigma_V(W_V(T) - W_V(t))} < X\},$$

dove W è la variabile aleatoria definita da $W \doteq V(t)$, ed è \mathcal{F}_t -misurabile per l'ipotesi V adattato, e

$$Z \doteq e^{(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t) + \sigma_V(W_V(T) - W_V(t))}$$

è $\mathcal{F}_{(T-t)}$ -misurabile ed indipendente da \mathcal{F}_t grazie alle proprietà del moto browniano W . Allora si può applicare il lemma (4.24); si trova che

$$E\left[\mathbb{I}_{\{V(t)\exp[(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t) + \sigma_V(W_V(T) - W_V(t))] < X\}} | \mathcal{F}_t\right] = G(V(t))$$

dove

$$G(v) = E[g(v, Z)] = E\left[\mathbb{I}_{\{v \cdot \exp[(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t) + \sigma_V(W_V(T) - W_V(t))] < X\}}\right], \quad v \in \mathbb{R}.$$

Non resta che calcolare la funzione G.

Per definizione di speranza condizionale:

$$\begin{aligned} & E \left[\mathbb{I}_{\{v \cdot \exp[(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t) + \sigma_V(W_V(T) - W_V(t))] < X\}} \right] = \\ & = P \left[v \cdot \exp[(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t) + \sigma_V(W_V(T) - W_V(t))] < X \right] \end{aligned}$$

dividendo per v che si può supporre positiva senza perdita di generalità, in quanto sarà sostituita dal processo V che si può supporre positivo, e prendendo il logaritmo:

$$= P \left[(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t) + \sigma_V(W_V(T) - W_V(t)) < \ln\left(\frac{X}{v}\right) \right]$$

portando, all'interno del simbolo di probabilità, il primo addendo a destra:

$$= P \left[\sigma_V(W_V(T) - W_V(t)) < \ln\left(\frac{X}{v}\right) - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t) \right]$$

dividendo infine entrambi i membri per $\sigma_V\sqrt{T-t}$ (t è fissato):

$$= P \left[\frac{\sigma_V(W_V(T) - W_V(t))}{\sigma_V\sqrt{T-t}} < \frac{\ln\left(\frac{X}{v}\right) - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}} \right]$$

Poiché, ora che è stata divisa per $\sigma_V\sqrt{T-t}$, la variabile aleatoria a sinistra $\frac{\sigma_V(W_V(T) - W_V(t))}{\sigma_V\sqrt{T-t}}$ è diventata una Gaussiana standard, si ha:

$$= \Phi \left(\frac{\ln\left(\frac{X}{v}\right) - (\mu_V dt - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}} \right).$$

Per concludere si applica questo risultato trovato grazie al lemma, sostituendo V(t) a v. Si ottiene infine:

$$p_d(t, T) = \Phi \left(\frac{\ln\left(\frac{X}{V(t)}\right) - (\mu_V dt - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}} \right), \quad 0 \leq t \leq T$$

che era quanto si voleva dimostrare. \square

4.9.1 Inconvenienti dei modelli strutturali di tipo Merton.

Osservazione 4.10: Nei modelli strutturali, si è visto che il tempo aleatorio τ definito dalla (4.2) è un tempo di arresto rispetto alla filtrazione \mathcal{F}_t ; in particolare, ha lo stesso livello di misurabilità, rispetto alla σ -algebra \mathcal{F}_t , di quella del processo $V-v=V-X$. Siccome nella maggior parte dei modelli strutturali la filtrazione soggiacente è quella generata dal moto browniano standard $W = (W_t)_{0 \leq t \leq T}$:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(W_s; s \leq t) \quad (0 \leq t \leq T),$$

allora si avrà, nella maggior parte dei casi, che τ è un tempo di arresto *prevedibile*¹⁰. Più precisamente, quello che succede è che, sulla filtrazione browniana, non esistono tempi di arresto totalmente inaccessibili¹¹.

Questa proprietà implica che, nella cornice dell'approccio strutturale, si possa trovare una successione crescente di tempi d'arresto prevedibili che 'annunciano' l'evento di insolvenza¹²; in questo senso, l'evento di default può essere previsto con un certo grado di certezza. Questo potenziale vantaggio di avere una percentuale di previsione del default in realtà esclude i casi di eventi esogeni improvvisi o inaspettati, ed è quindi uno svantaggio dei modelli strutturali di tipo Merton.

4.11 Evoluzione del modello di Merton: il modello di Zhou (1997).

Risulta evidente che l'ipotesi che il processo di valore degli attivi V sia continuo costituisce una grossa limitazione del modello di Merton: ad esempio, la probabilità istantanea di insolvenza nell'istante finale è nulla. Per includere delle insolvenze inattese, l'idea è quella di considerare dei veri e propri processi con salti: i cosiddetti processi *jump diffusion*. Ne vengono fuori i modelli diffusivi a salto.

Per descrivere l'andamento dei salti, si suppone che gli istanti di salto siano scanditi da un processo di Poisson $(N_t)_{t \in [0, T]}$ (definito in appendice, definizione (4.29)) di intensità λ ; essi risultano così indipendenti tra loro, e il valore $\frac{1}{\lambda}$ rappresenta il tempo medio di attesa di un salto.

In questo modello si suppone che i salti abbiano ampiezze Z_j (riferimento alla formula (4.25)) che siano variabili aleatorie isonome ed identicamente distribuite, log-normali; si indichi con (I) questo insieme di ipotesi. Si può assumere inoltre che il processo di Wiener W_t , il processo dei prezzi V_t , ed il processo di Poisson N_t siano mutuamente indipendenti¹³.

Volendo tradurre queste ipotesi in un modello matematico, si avrà che il processo dei 'log-prezzi'

$$y_t \doteq \ln V_t$$

segue l'equazione differenziale stocastica:

$$dy_t = \mu dt + \sigma dW_t + J dN_t, \quad (4.10)$$

dove per semplicità di notazione si indica con J l'ampiezza¹⁴ del salto j -esimo; inoltre si può ipotizzare che μ, σ soddisfino le ipotesi di regolarità che serviranno e che si scopriranno a breve.

¹⁰ Si fa riferimento alla definizione (4.31) in appendice.

¹¹ Si fa riferimento alla definizione (4.32) in appendice.

¹² A tal riguardo, si anticipa che questo non varrà per i modelli di tipo Zhou, in cui la filtrazione, dovendo rendere adattato anche il processo di Poisson, non può essere quella generata dal moto browniano. Per approfondimento, si può consultare la sezione (4.15), e la proposizione (6.3), in cui viene spiegato meglio perché questo non vale in un modello di tipo Zhou.

¹³ Ossia sono mutuamente indipendenti le σ -algebre da essi rispettivamente generate.

¹⁴ Con ampiezza si intende la differenza di valore nella discontinuità del salto del processo V .

Osservazione 4.12: Ricapitolando, l'iter visto finora riguardo questo nuovo approccio è stato il seguente: uno compie dei ragionamenti plausibili a partire da considerazioni troppo restrittive sul modello precedente; in base a questi ragionamenti elabora un nuovo modello, che però non è direttamente un modello per il valore degli attivi; il modello elaborato è collegato a quello degli attivi mediante un diffeomorfismo $\mathcal{C}^\infty(0, +\infty)$; ora si vuole passare ad un modello per la dinamica degli attivi per poterne ricavare il modello dei prezzi e da lì la probabilità di insolvenza.

Una prima considerazione nella direzione di esplicitare V è che nel momento del salto j -esimo il valore degli attivi passa da V a e^J . La variazione del valore dei prezzi è quindi:

$$\Delta V = (e^J - 1)V. \quad (4.11)$$

In secondo luogo si può osservare che l'espressione (4.10) è la scrittura, in forma differenziale, di un processo di Itô 'generalizzato' $(y_t)_{t \in [0, T]}$; si fa riferimento con questa espressione alla definizione (4.33), che ha in più, rispetto ad un processo di Itô canonico, un termine di sommatoria di incrementi dipendente dal processo di Poisson $(N_t)_{t \in [0, T]}$; in questa corrispondenza $\mu = K$, $\sigma = H$. Ne segue che il processo V dei prezzi si può ottenere grazie alla formula di Itô generalizzata a semimartingale (4.34); è questo l'oggetto di studio della prossima sottosezione.

4.12.1 Il valore di mercato degli attivi.

Sia $y = (y_t)_{t \in [0, T]}$ il processo dei log-prezzi con dinamica data dalla (4.10); il valore di mercato degli attivi è il processo $V = (V_t)_{t \in [0, T]}$ definito da $V_t = e^{y_t}$, $t \in [0, T]$.

Proposizione 4.13: Il valore di mercato degli attivi al tempo $T \leq T^*$ nei modelli diffusivi con salti è dato da:

$$V_T = V_t \left(\prod_{j=N_t+1}^{N_T} e^{Z_j} \right) \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma(W_T - W_t)\right] \quad (4.12)$$

dim.

Si applica la formula di Itô (4.34) alla funzione

$$f(y) \doteq e^y; \quad (4.13)$$

si ottiene:

$$df(V_t) = \mu e^{V_t} dt + \frac{\sigma^2}{2} e^{V_t} dt + \sigma e^{V_t} dW_t + \Delta V dN_t. \quad (4.14)$$

Ricordando l'espressione (4.11), si ha quindi:

$$dV = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) V dt + \sigma V dW_t + V(e^J - 1) dN_t \quad (4.15)$$

espressione che si può scrivere anche come

$$\frac{dV}{V} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t + (e^J - 1) dN_t. \quad (4.16)$$

A questo punto si osserva che il modello per dV appena trovato ha gli stessi drift e volatilità del processo dei log-prezzi y . Poiché si vuole che i salti mantengano la stessa volatilità del processo iniziale, a priori può cambiare soltanto il drift μ . Come può cambiare il drift μ ? Se si vuole che $e^{-rt}V_t$ sia una martingala, dove r è il tasso a breve¹⁵, bisogna imporre che

$$E[dV - rVdt] = 0. \quad (4.17)$$

Sia m il nuovo drift, e si indichi con J una generica ampiezza di salto J_j . Nella (4.17) si sostituisca l'espressione (4.15): allora

$$E[dV - rVdt] = 0 \Leftrightarrow (m - r) + \lambda E[e^J - 1] = 0. \quad (4.18)$$

Allora il processo risk-neutral è

$$dV = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E[\exp(J) - 1] \right) dt + \sigma dW_t + J dN_t \quad (4.19)$$

e quindi il drift risk neutral è

$$m = \mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E[e^J - 1]. \quad (4.20)$$

A questo punto si integri la (4.10), in cui si sostituisca a μ il drift risk-neutral m ; si ottiene

$$\log V_t = \log V_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E[e^J - 1] \right) t + \sigma W_t + \sum_{j=1}^{N_t} J. \quad (4.21)$$

Da quest'ultima, si ricava per passaggio ad esponenziali:

$$V_t = V_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E[e^J - 1] \right) t + \sigma W_t + \sum_{j=1}^{N_t} J \right]. \quad (4.22)$$

Infine, scrivendo esplicitamente le espressioni che contengono i valori dei salti precedentemente abbreviati con J , si ricava, analogamente a quanto fatto nella sezione sul modello di Merton, a partire dalla formula (4.22), l'espressione per il valore al tempo finale degli attivi:

$$V_T = V_t \left(\prod_{j=N_t+1}^{N_T} e^{Z_j} \right) \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) \right]. \quad (4.23)$$

4.13.1 La probabilità di insolvenza.

Si vuole ottenere a questo punto un'espressione per le probabilità di default.

¹⁵ Si faccia riferimento al capitolo 1.

Teorema 4.14: La probabilità di insolvenza in un modello strutturale diffusivo a salti è data da:

$$p_d(t, T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{X}{V_t} \right) - n\eta - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sqrt{n\varrho^2 + \sigma^2(T-t)}} \right) \exp[-\lambda(T-t)] \frac{(\lambda(T-t))^n}{n!}. \quad (4.24)$$

dim.

Il primo passaggio prevede consiste nell'applicazione della definizione (4.2).

$$p_d(t, T) = P[V(T) < X | \mathcal{F}_t] \quad (4.25)$$

si vede immediatamente che quest'ultima probabilità condizionale è uguale a:

$$P[V(T) < X | \mathcal{F}_t] = P[\log V(T) < \log X | \mathcal{F}_t] \quad (4.26)$$

Fattorizzando adesso il membro di destra della (4.26) sui naturali, e grazie all'indipendenza mutua tra il moto browniano W , il processo di valore V , il processo di Poisson N , (si ricordi inoltre che per ogni t V_t è \mathcal{F}_t -misurabile):

$$P[\log V(T) < \log X | \mathcal{F}_t] = \sum_{n=0}^{+\infty} P[\log V(T) < \log X | \mathcal{F}_t, N_T - N_t = n] P[N_T - N_t = n].$$

A questo punto ci si ricorda dell'ipotesi (I): se le intensità dei salti

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$$

sono variabili aleatorie (per l'ipotesi (I) isonome ed identicamente distribuite) di legge $\mathcal{N}(\eta; \varrho^2)$, allora la distribuzione condizionale di $\log V(T)$ rispetto a $\{\mathcal{F}_t, N_T - N_t = n\}$ è gaussiana con legge:

$$\mathcal{N} \left(\log V(t) + n\eta + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t); n\varrho^2 + \sigma^2(T-t) \right).$$

Pertanto si ha:

$$P[\log V(T) < \log X | \mathcal{F}_t, N_T - N_t = n] P[N_T - N_t = n] = \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{X}{V_t} \right) - n\eta - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sqrt{n\varrho^2 + \sigma^2(T-t)}} \right)$$

Inoltre si aveva:

$$P[N_T - N_t = n] = \exp[-\lambda(T-t)] \frac{(\lambda(T-t))^n}{n!} \quad (4.27)$$

Allora mettendo insieme la (4.14) e la (4.27), dalla (4.14) si ottiene infine:

$$p_d(t, T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{X}{V_t} \right) - n\eta - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sqrt{n\varrho^2 + \sigma^2(T-t)}} \right) \exp[-\lambda(T-t)] \frac{(\lambda(T-t))^n}{n!} \quad (4.28)$$

che è quanto si voleva dimostrare. \square

4.15 Inconvenienti di tutti i modelli strutturali.

L'osservazione (4.10), valida per la gran parte dei modelli strutturali che sono basati sul moto browniano, come i modelli di Merton, non si applica ai modelli di Zhou: la filtrazione cui si fa riferimento nell'osservazione (4.10) non può essere quella generata dal moto browniano, in quanto deve rendere adattato anche il processo di Poisson¹⁶.

Quindi il modello di Zhou potrebbe essere una buona evoluzione dei modelli strutturali 'canonici'. Ma ci sono altri inconvenienti:

- L'evento di insolvenza è complicato da descrivere in sé per sé, in quanto troppo composito.
- La descrizione del valore degli attivi è lineare in linea teorica; nella pratica si hanno difficoltà legate ai numerosi dati da considerare.
- I principali fruitori di modelli per la valutazione di titoli, come ad esempio traders o agenzie di rating, nella maggior parte dei casi non possono avere conoscenza totale di tutti i bilanci di chi emette l'obbligazione; ad esempio le banche possono tenere nascosta parte dei loro bilanci. Non a caso, si hanno esempi di clamorosi fallimenti (come quello della Lehman Brothers del Settembre 2008), non minimamente previsti o preannunciati dalle società di rating proprio a causa dal fatto che la situazione più rischiosa era stata nascosta.

¹⁶ Ed infatti, accade quanto viene dimostrato nella proposizione (6.3).

4.16 Appendice.

Definizione 4.17: (Traiettoria di un processo stocastico.) Sia $X = (X_t)_{t \in T}$ un processo definito su $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ a valori in uno spazio misurabile (E, \mathcal{E}) ed avente T come insieme dei parametri. Con traiettoria del processo X relativa all'evento $\omega \in \Omega$ si intende l'applicazione da $T \rightarrow E$ che associa a $t \mapsto X_t(\omega)$.

Definizione 4.18: (Funzione a variazione finita.)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice a variazione limitata sull'intervallo $[a, b]$, e si scrive $f \in BV[a, b]$, se, quasi certamente,

$$\sup_{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n_{\pi}-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \right) < +\infty$$

dove con π si intendono partizioni dell'intervallo $[a, b]$ della forma

$$\pi = \{a \leq t_1 < \dots < t_{n_{\pi}} \leq b\}.$$

Proposizione 4.19: (Primo istante di ingresso in un aperto.) Siano dati uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$ con filtrazione continua a destra, un aperto $A \in \mathfrak{F}$, un processo $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ definito su $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$ a valori in uno spazio topologico, che sia continuo, continuo a destra oppure continuo a sinistra. Allora il tempo aleatorio

$$\tau_A : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$$

definito da

$$\tau_A \doteq \begin{cases} \inf\{t > 0 | X_t \in A\}, & \text{se } \{t > 0 | X_t \in A\} \text{ è non vuoto;} \\ +\infty, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

è un tempo di arresto rispetto alla filtrazione \mathcal{F} .

dim.

Bisogna verificare che $\forall t \in I$ con $I \subseteq [0, T]$ sottoinsieme misurabile, l'evento $\{\tau_A \leq t\}$ appartenga alla σ -algebra \mathcal{F}_t . Sia dunque $t_0 \geq 0$ un elemento di I fissato. Per definizione di τ_A si ha:

$$\begin{aligned} \{\tau_A \leq t_0\} &= \{\inf\{t \geq 0 | X_t \in A\} \leq t_0\} = \\ &= \{(\forall \varepsilon > 0) (\exists t \leq t_0 + \varepsilon) : X_t \in A\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{t \leq t_0 + \varepsilon} \{X_t \in A\} = \end{aligned}$$

grazie alla continuità del processo X

$$= \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{t \leq t_0 + \frac{1}{n}} \{X_t \in A\} = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{t \leq t_0 + \frac{1}{n}, t \in \mathbb{Q}} \{X_t \in A\}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che, fissati $n \in \mathbb{N}, t \in I$

$$\exists t_n \in \mathbb{Q}, t_n \rightarrow t, t_n \leq t_0 + \frac{1}{n} \quad t.c. \quad X_{t_n}(\omega) \rightarrow X_t(\omega)$$

per continuità, e dunque $X_{t_n} \in A$ e

$$\bigcup_{t \leq t_0 + \frac{1}{n}} \{X_t \in A\} = \bigcup_{t \leq t_0 + \frac{1}{n}, t \in \mathbb{Q}} \{X_t \in A\}$$

e quindi

$$\{\tau_A \leq t_0\} \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t_0}$$

in quanto intersezione numerabile di unione numerabile di eventi di \mathcal{F}_{t_0} , come si voleva dimostrare.

Proposizione 4.20: (Primo istante di ingresso in un chiuso.)

Siano dati uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, un chiuso $C \in \mathfrak{F}$, un processo $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ definito su $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$ a valori in uno spazio metrico (E, d) , che sia continuo. Allora il tempo aleatorio

$$\tau_C : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$$

definito da:

$$\tau_C \doteq \begin{cases} \inf\{t > 0 | X_t \in C\}, & \text{se } \{t > 0 | X_t \in C\} \text{ è non vuoto;} \\ +\infty, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

è un tempo di arresto rispetto alla filtrazione \mathcal{F} , e vale

$$\tau_C(\omega) = \min\{t > 0 | X_t(\omega) \in C\}.$$

dim.

Per la dimostrazione della seconda affermazione, si consideri un $\omega \in \Omega$ tale che l'insieme $\{t > 0 | X_t(\omega) \in C\}$ sia non vuoto. Allora, per definizione di estremo inferiore, esiste una successione decrescente $t_n(\omega) \downarrow \tau_C(\omega)$, e per continuità delle traiettorie del processo X si ha

$$X_{t_n(\omega)}(\omega) \rightarrow X_{\tau_C(\omega)}(\omega).$$

Adesso per la chiusura di C ,

$$X_{\tau_C(\omega)}(\omega) \in C,$$

come si voleva dimostrare.

Per la dimostrazione della seconda affermazione, sia $t_0 \geq 0$ un elemento di I fissato. Se $t_0 = 0$ allora

$$\{\tau_C \leq 0\} = \{X_0 \in C\} \in \mathcal{F}_{t_0}.$$

Altrimenti, grazie alla caratterizzazione come minimo, che si è appena dimostrata, si ha:

$$\begin{aligned} \{\tau_C \leq t_0\} &= \{\exists t \leq t_0 : X_t \in C\} = \\ &= \bigcup_{t \leq t_0} \{X_t \in C\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \leq t_0, t \in \mathbb{Q}} \{X_t \in C_{\frac{1}{n}}\} \end{aligned}$$

dove si è posto per definizione

$$C_\varepsilon \doteq \{x \in E \mid d(x, C) < \varepsilon\}.$$

L'ultima uguaglianza della catena si dimostra per doppia inclusione:

' \subseteq ': se $\omega \in \bigcup_{t \leq t_0} \{X_t \in C\}$, allora per continuità delle traiettorie di X

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists t_n \in \mathbb{Q}, t_n \leq t) \text{ t.c. } X_{t_n}(\omega) \in C_{\frac{1}{n}}$$

Viceversa

' \supseteq ': se $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \leq t_0, t \in \mathbb{Q}} \{X_t \in C_{\frac{1}{n}}\}$, allora per continuità delle traiettorie di X, dalla successione limitata $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di razionali tale che: $X_{t_n}(\omega) \in C_{\frac{1}{n}}$, è possibile estrarre una sottosuccessione

$$\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow t \Rightarrow X_{t_{n_k}}(\omega) \rightarrow X_t(\omega).$$

La tesi è che $X_t \in C$.

Ma $X_{t_{n_k}}(\omega) \in C_{\frac{1}{n_k}}$; allora $(\forall k \in \mathbb{N}) (\exists e_k(\omega) \in C)$ tale che:

$$d(X_{t_{n_k}}(\omega), e_k(\omega)) < \frac{2}{n_k}.$$

Siccome

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(X_{t_{n_k}}(\omega), X_t(\omega)) = 0,$$

si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} d(X_t(\omega), e_k(\omega)) &= \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} d(X_{t_{n_k}}(\omega), e_k(\omega)) + \lim_{k \rightarrow +\infty} d(X_{t_{n_k}}(\omega), X_t(\omega)) &= 0, \end{aligned}$$

si ha $X_t(\omega) \rightarrow e_k(\omega)$, e poiché C è chiuso $X_t(\omega) \in C$, come si voleva dimostrare.

Definizione 4.21: (Processo di Itô.) Un processo stocastico $(X_t)_{t \in [0, T]}$ su $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$ si dice processo di Itô se si può esprimere nella forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t K_s ds$$

dove i processi $(K_t)_{t \in [0, T]}$, $(H_t)_{t \in [0, T]}$, definiti su $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, sono di classe Λ^1 e Λ^2 rispettivamente, ossia progressivamente misurabili e tali che

$$\int_0^t |K_s| ds < +\infty \quad q.c.$$

e

$$\int_0^t |H_s|^2 ds < +\infty \quad q.c.$$

Proposizione 4.22: (Formula di Itô per martingale locali, senza la dipendenza dal tempo.)

Se $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ è un processo di Itô dato da

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

e $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 , allora

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) K_s ds + \int_0^t F'(X_s) H_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) ds$$

oppure

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) d \langle X_s \rangle$$

dove $\langle X_s \rangle$ è la variazione quadratica del processo X_s e con l'apice $F'(x)$ si denota la derivata rispetto alla variabile x .

Versione differenziale (si ricorda $\langle X_t \rangle = \int_0^t (H_s)^2 ds$):

$$dF(X_t) = F'(X_s) K_s ds + F'(X_s) H_s dW_s + \frac{1}{2} F''(X_s) (H_s)^2 ds$$

oppure

$$dF(X_t) = F'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} F''(X_t) d \langle X_t \rangle .$$

Proposizione 4.23: (Variazione quadratica di un processo di Itô.)

Se $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ è un processo di Itô dato da

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

allora $d \langle X_t \rangle = H_t^2 dt$.

Lemma 4.24: Siano dati uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, uno spazio misurabile (E, \mathcal{E}) , due σ -algebre indipendenti $\mathcal{G} \subset \mathfrak{F}$, $\mathcal{G}' \subset \mathfrak{F}$;

$X : (\Omega, \mathcal{G}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ misurabile e $\psi : (E \times \Omega, \mathcal{E} \times \mathcal{G}') \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ misurabile limitata. Allora

$$E[\psi(X, \cdot) | \mathcal{G}] = \Psi(X)$$

dove Ψ è definita da

$$\Psi(x) \doteq E[\psi(x, \cdot)], \quad x \in E.$$

Definizione 4.25: (Processo di Poisson.)

Sia $(Z_i)_{i \geq 1}$ una sequenza di variabili aleatorie indipendenti, identicamente distribuite esponenzialmente, di parametro λ , ossia aventi densità

$$\mathbb{I}_{x > 0} \lambda \exp(-\lambda x),$$

e sia per ogni n $S_n \doteq \sum_{i=1}^n (Z_i)_{i \geq 1}$. Si chiama processo di Poisson di intensità λ il processo $(N_t)_{t \in [0, T^*]}$ definito da

$$N_t \doteq \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}_{\{S_n \leq t\}}. \quad (4.29)$$

Proposizione 4.26: Si ha:

$$N_t = \sum_{n \geq 1} n \mathbb{I}_{\{S_n \leq t < t_{n+1}\}},$$

e N_t rappresenta il numero di punti della sequenza $(S_n)_{n \geq 1}$ che sono minori o uguali a t , cioè

$$S_n = \inf\{t \geq 0, N_t = n\}.$$

Infine, si ha:

$$P(N_t = n) = \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad (4.30)$$

$$E(N_t) = \lambda t, \quad (4.31)$$

$$\text{Var}(N_t) = \lambda t. \quad (4.32)$$

Osservazione 4.27: Se $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s; s \leq t)$, allora il processo di Poisson $(N_t)_{t \in [0, T^*]}$ è un processo ad incrementi indipendenti e stazionari, cioè, per ogni $s > 0$, $N_{t+s} - N_t$:

- è indipendente da \mathcal{F}_t ;
- ha legge uguale a quella di $N_s - N_0 = N_s$.

Definizione 4.28: (Processo di Itô generalizzato.) Si indica con tale espressione un processo stocastico $(X_t)_{t \in [0, T]}$ definito su $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$ che si può esprimere nella forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t K_s ds + \sum_{n \geq 1}^{N_t} \Delta X_i \quad (4.33)$$

dove i processi $(K_t)_{t \in [0, T]}$, $(H_t)_{t \in [0, T]}$, definiti su $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, sono di classe Λ^1 e Λ^2 rispettivamente.

Osservazione 4.29: A differenza del processo di Itô usuale definito in (4.21), il quale è una martingala locale, un processo di Itô ‘generalizzato’ risulta essere una semimartingala, ossia è un processo dato dalla somma di una martingala locale (la parte dei primi due addendi che rappresentano un processo di Itô usuale) ed un terzo addendo che è un processo adattato, cadlag, di classe BV-loc (cioè un processo che sia localmente di classe BV, riferimento alla definizione (4.18)).

Proposizione 4.30: (Formula di Itô per processi diffusivi con salto.)

Sia dato uno spazio probabilizzato filtrato $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, e sia $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ un processo di Itô generalizzato della forma seguente:

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t K_s ds + \sum_{i=1}^{N_t} \Delta X_i$$

con H, K di classe Λ^1, Λ^2 , rispettivamente.

Sia $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^{1,2}$, ossia \mathcal{C}^1 nella prima variabile, \mathcal{C}^2 nella seconda. Allora vale

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) K_s \right] ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) H_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t (H_s)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) + \sum_{0 \leq s \leq t} [f(\Delta X_s + X_{s-}) - f(X_{s-})] \Delta N_s;$$

oppure, in notazione differenziale,

$$df_t = \dot{f} + K f' dt + H f' dW_t + \frac{1}{2} H^2 f'' dt + [f(t, X_t + J) - f(t, X_t)] dN_t. \quad (4.34)$$

dove si è indicato con il punto la derivata rispetto al tempo, con l'apice la derivata posizionale.

Definizione 4.31: Su uno spazio $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, un tempo di arresto τ si dice prevedibile se esiste una successione crescente $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di tempi di arresto tali che, per ogni n , $\tau_n(\omega) < \tau(\omega)$ ed essi convergono a τ .

Accade che, se un processo stocastico $X = (X_t)$ definito sullo stesso spazio di probabilità è adattato ed a traiettorie continue, allora esso è prevedibile¹⁷.

Definizione 4.32: Su uno spazio $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, un tempo di arresto σ si dice totalmente inaccessibile se, per ogni τ tempo di arresto prevedibile, l'evento $\{\tau = \sigma\}$ è trascurabile.

Mentre la definizione di tempo di arresto prevedibile prevede una successione di tempi che 'annuncino' τ , un tempo di arresto totalmente inaccessibile può modellizzare bene un evento 'inatteso', cioè un evento che non possieda dei 'segnali premonitori'.

Definizione 4.33: Su uno spazio $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, un tempo di arresto τ si dice accessibile se esiste una successione di tempi di arresto prevedibili $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che il grafico di τ :

$$[\tau] \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\tau_n],$$

dove con grafico di un generico tempo di arresto τ si intende:

$$[\tau] \doteq \{(\omega, \tau(\omega)) | \tau(\omega) < +\infty\}.$$

Accade che ogni tempo di arresto ha una parte prevedibile ed una parte totalmente inaccessibile; per la precisione, per ogni tempo di arresto τ esistono due tempi di arresto τ_1, τ_2 che siano rispettivamente prevedibile e totalmente inaccessibile, e tali che:

$$[\tau] = [\tau_1] + [\tau_2].$$

¹⁷ Per ulteriori approfondimenti, si può consultare la sezione 9.1.3 del libro *Mathematical Methods for Financial Markets*, di Yor-Jeanblanc-Chesney, edizioni Springer.

5. MODELLI IN FORMA RIDOTTA: I MODELLI BASATI SULL'INTENSITA'.

5.1 Premessa.

I modelli in forma ridotta sono così chiamati perché, al contrario di quanto accade nei modelli strutturali, non prevedono una descrizione totale dei bilanci degli attivi, ma si concentrano sullo studio di cosa accade nell'istante di default. Nel capitolo sui modelli strutturali si è visto come la maggior parte di essi non è sufficiente a descrivere *quando* l'evento di default si verifichi; pertanto occorre proprio cambiare il punto di vista: ad esempio, si può iniziare a trattare l'insolvenza come evento completamente inatteso e casuale. Questo fa crollare tutto il pilastro dell'approccio strutturale: il tempo aleatorio τ (4.2) non è più un tempo di arresto, né quindi tantomeno prevedibile, rispetto alla filtrazione delle informazioni note, nello spazio di probabilità di partenza.

Il seguito del capitolo si occuperà di studiare un tipo particolare di modelli in forma ridotta, i cosiddetti modelli basati sull'intensità, cioè modelli che utilizzano un particolare processo positivo ed adattato rispetto ad una filtrazione più piccola di quella di partenza, il processo di intensità. La costruzione di un tale modello procede linearmente se si utilizzano delle particolari ipotesi matematiche che permettono di formulare i risultati che si costituiscono l'architettura portante, ed implicita, di un tipo basilare di modello basato sull'intensità. Il seguito è quindi così strutturato: dopo le sezioni sulle ipotesi e i risultati che da esse derivano, si procede con la costruzione del modello (quello che nel capitolo sui modelli strutturali era riassunto dall'espressione della probabilità di insolvenza (4.2)); da questo modello si procede al calcolo vero e proprio della probabilità di default in alcuni casi particolari in cui sono note soluzioni esplicite delle equazioni differenziali stocastiche che discendono dall'applicazione del modello considerato. Poi, viene presentata un'applicazione concreta delle probabilità così trovate, per il calcolo del pricing del rischio di insolvenza. Infine, lo studio del caso di passaggio a misura equivalente di probabilità e, da ultima, l'appendice contenente le dimostrazioni e le definizioni omesse, per brevità, nel corso dell'esposizione.

5.2 Ipotesi e ossatura matematica del modello.

Sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ si considerino due filtrazioni:

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T^*]},$$

$$\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T^*]},$$

con $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, che soddisfino le condizioni abituali, cioè complete e continue a destra. Esse rappresentano rispettivamente il flusso completo delle informazioni disponibili (il flusso delle informazioni del mercato), ed un flusso parziale, che permette di modellizzare situazioni di conoscenza incompleta dei dati.

Per definire la probabilità di default caratteristica di questo modello, in analogia con la probabilità definita in (4.2) per i modelli strutturali, occorrono le definizioni preliminari di istante aleatorio di default e funzione indicatrice di insolvenza.

Definizione 5.3: Si definisce istante aleatorio di insolvenza (o di *default*) una variabile aleatoria:

$$\tau_d : \Omega \rightarrow [0, +\infty], \quad (5.1)$$

che rappresenti l'istante casuale in cui può avvenire il fallimento di chi emette il titolo suscettibile di insolvenza.

Definizione 5.4: Si definisce funzione indicatrice di insolvenza (*default indicator function*) il processo stocastico $(\mathcal{F}_t \setminus \mathcal{G}_t)$ -adattato¹, definito, per ogni $\omega \in \Omega$, da:

$$H(t) \doteq \mathbb{I}_{\{\tau_d \leq t\}}. \quad (5.2)$$

Proposizione 5.5: La funzione indicatrice di insolvenza è una submartingala uniformemente integrabile².

dim.

Riportata e dimostrata nella proposizione (5.21), nella prossima sezione.

Corollario 5.6: Grazie alla decomposizione di Doob-Meyer (5.61), per ogni $t \in [0, T]$

$$H(t) = M(t) + A(t) \quad (5.3)$$

per opportuni processi M, A con le stesse proprietà come descritte nella definizione (5.61). Si osservi anche che nelle attuali ipotesi $A(t) = A(t \wedge \tau_d)$.

Adesso si può passare alla definizione della probabilità che interessa; lo scopo è quello di descrivere l'evoluzione delle probabilità di default senza definire l'esatto evento di default.

Definizione 5.7: Si definisce probabilità di insolvenza entro il tempo T , all'istante $t \leq T$, la probabilità condizionale:

$$p_d(t, T) \doteq E[H(T)|\mathcal{F}_t]. \quad (5.4)$$

Corollario 5.8: In conseguenza della proposizione (5.21) e del suo corollario (5.6), la (5.4) si può anche esprimere come:

$$p_d(t, T) = \mathbb{I}_{\{\tau_d \leq t\}} + E[A(T) - A(t)|\mathcal{F}_t], \quad t \in [0, T]. \quad (5.5)$$

¹ Cioè adattato rispetto alla filtrazione totale \mathcal{F} ma non rispetto alla filtrazione parziale \mathcal{G} .

² Per questa definizione, si veda l'appendice, definizione (5.60).

dim.

$$\begin{aligned}
p_d(t, T) &\doteq E[H(T)|\mathcal{F}_t] = \\
&= E[M(T) + A(T)|\mathcal{F}_t] = E[M(T)|\mathcal{F}_t] + E[A(T)|\mathcal{F}_t] \\
&= M(t) + E[A(T)|\mathcal{F}_t] = H(t) - A(t) + E[A(T)|\mathcal{F}_t] \\
&= H(t) + E[A(T) - A(t)|\mathcal{F}_t]. \square
\end{aligned}$$

Definizione 5.9: (Ipotesi (D1).)

Esiste un processo stocastico $\Lambda = (\Lambda_t)_{t \in [0, T^*]}$ \mathcal{G}_t -adattato, tale che

$$A(t) = \Lambda(t \wedge \tau_d), \quad (5.6)$$

dove $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T^*]}$ è una filtrazione parziale definita come ad inizio sezione ma quella tale che, per ogni $t \in [0, T^*]$,

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{H}_t = \sigma(\mathcal{H}_s; s \leq t).$$

Questo traduce l'idea che gli eventi in \mathcal{F}_t sono anche osservabili secondo \mathcal{G}_t se $\tau_d > t$; vale infatti il seguente lemma.

Lemma 5.10: (Lemma (1).) Per ogni $t \geq 0$, $(\forall A \in \mathcal{F}_t) (\exists B \in \mathcal{G}_t)$:

$$A \cap \{\tau_d > t\} = B \cap \{\tau_d > t\}. \quad (5.8)$$

dim.

L'enunciato, con dimostrazione, è il lemma (5.22) della prossima sezione.

Definizione 5.11: (Ipotesi (D2).) Poiché la probabilità di default, vista da un osservatore informato rispetto a \mathcal{G}_t^3 , soddisfa

$$0 < P[\tau_d \leq t | \mathcal{G}_t] < 1,$$

è possibile definire un processo di azzardo⁴ (*hazard process*) Γ nel modo seguente:

$$e^{-\Gamma(t)} \doteq P[\tau_d > t | \mathcal{G}_t]. \quad (5.9)$$

Proposizione 5.12: Il processo $X = (X(t))_{t \in [0, T]}$ definito da:

$$X(t) \doteq P[\tau_d > t | \mathcal{G}_t] \quad (5.10)$$

è una supermartingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}$; quindi X, e di conseguenza Γ , ammettono una modificazione continua a destra.

dim.

Segue subito dalla proposizione (5.21).

³ Nel senso descritto precedentemente di filtrazione vista come flusso di informazioni.

⁴ La definizione si trova in appendice (definizione 5.62).

Se il processo Γ è regolare abbastanza, più precisamente, se ha traiettorie continue a destra e dotate di limite a sinistra, allora esso coinciderà con il processo Λ sull'intervallo $[0, \tau_d]$, e quindi, in virtù della (5.6), anche con il processo compensatore Λ , come si evincerà dal corollario del lemma (5.25).

Lemma 5.13: (Lemma (2).) Per ogni $t \in [0, T]$, per ogni variabile aleatoria Y , vale:

$$E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y | \mathcal{F}_t] = \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} e^{\Gamma(t)} E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y | \mathcal{G}_t] \quad (5.11)$$

dim.

L'enunciato, con dimostrazione, è il lemma (5.23) della prossima sezione.

Lemma 5.14: (Lemma (3).) Per ogni $t \in [0, T]$, si ha che:

$$P[\tau_d > T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} E[e^{\Gamma(T) - \Gamma(t)} | \mathcal{G}_t], \quad (5.12)$$

$$P[t < \tau_d \leq T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} E[1 - e^{\Gamma(T) - \Gamma(t)} | \mathcal{G}_t], \quad (5.13)$$

ed inoltre il processo $\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} e^{\Gamma(t)}$ è una martingala rispetto alla filtrazione \mathcal{F} .

dim.

L'enunciato, con dimostrazione, è il lemma (5.24) della prossima sezione.

Definizione 5.15: (Ipotesi (D3).) Esiste un processo stocastico

$$\lambda = (\lambda(t))_{t \in [0, T]}$$

positivo, sommabile, adattato rispetto alla filtrazione \mathcal{G} , e tale che:

$$\Gamma(t) = \int_0^t \lambda(s) ds. \quad (5.14)$$

Questo processo λ si chiamerà processo di intensità⁵.

Lemma 5.16: (Lemma (4).) Il processo $N = (N(t))_{t \in [0, T]}$ definito da:

$$N(t) \doteq H(t) - \int_0^t \lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} ds = \mathbb{I}_{\{\tau_d < t\}} - \int_0^t \lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} ds \quad (5.15)$$

è una martingala rispetto alla filtrazione \mathcal{F} .

dim.

L'enunciato, con dimostrazione, è il lemma (5.25) della prossima sezione.

Corollario 5.17: Grazie all'unicità della decomposizione di Doob-Meyer, (5.61), si ha che:

$$\Lambda(t \wedge \tau_d) = \int_0^t \lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} ds \quad (5.16)$$

e quindi grazie alla (5.14),

$$\Lambda(t \wedge \tau_d) = \Gamma(t \wedge \tau_d). \quad (5.17)$$

⁵ Moralmente, esso è il processo che dà una sorta di intensità di rischio, perché coincide con la derivata destra di $\Gamma(t)$ nel punto T .

Definizione 5.18: (Ipotesi (D4).)

$$P[\tau_d > t | \mathcal{G}_\infty] = P[\tau_d > t | \mathcal{G}_t], \quad (5.18)$$

dove $\mathcal{G}_\infty \doteq \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{G}_t$.

Lemma 5.19: (Lemma (5).) Se il processo Γ è continuo, allora la variabile aleatoria:

$$\Phi \doteq \Gamma(\tau_d) \quad (5.19)$$

è una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1 ed indipendente da \mathcal{G}_∞ . Inoltre il tempo aleatorio dell'istante di default può essere caratterizzato come:

$$\tau_d = \inf\{t | \Gamma(t) \geq \Phi\}. \quad (5.20)$$

dim.

Dimostrazione (5.26) nella prossima sezione.

5.20 Dimostrazioni dei lemmi.

Proposizione 5.21: (La funzione indicatrice di insolvenza è una submartingala uniformemente integrabile⁶.)

dim.

L'istante aleatorio di default τ_d è un tempo di arresto rispetto alla filtrazione \mathcal{F} sullo spazio probabilizzato di partenza, poiché questa filtrazione rappresenta il totale del flusso delle informazioni di mercato. Pertanto il processo definito, per ogni parametro temporale $t \in [0, T]$, da $H(t) = \mathbb{I}_{\{\tau_d \leq t\}}$, è (\mathcal{F}_t) -adattato. Si ha poi che $H(t)=0$ oppure $H(t)=1$, e da questo segue subito che, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sup_t \int_{|H(t)| \geq a} |H(t)| dP < +\infty,$$

come si voleva dimostrare. \square

Lemma 5.22: (Lemma (1).)

Per ogni $t \geq 0$, $(\forall A \in \mathcal{F}_t) (\exists B \in \mathcal{G}_t)$:

$$A \cap \{\tau_d > t\} = B \cap \{\tau_d > t\}. \quad (5.21)$$

dim.

Si ponga, per ogni $t \geq 0$,

$$\mathcal{F}_t^* \doteq \{A \in \mathcal{F}_t : \exists B \in \mathcal{G}_t \text{ t.c. } (A \cap \{\tau_d > t\} = B \cap \{\tau_d > t\})\}.$$

Allora \mathcal{F}_t^* è una σ -algebra:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}_t^*$;
- $(A_1 \cap A_2) \cap \{\tau_d > t\} = A_1 \cap B_2 \cap \{\tau_d > t\} = (A_1 \cap \{\tau_d > t\}) \cap B_2 = (B_1 \cap B_2) \cap \{\tau_d > t\}$;

⁶ Per questa definizione, si veda l'appendice, definizione (5.60).

- $(A \cap \{\tau_d > t\} = B \cap \{\tau_d > t\}) \Rightarrow A^c \cap \{\tau_d > t\} = (\Omega - A) \cap \{\tau_d > t\} = B^c \cap \{\tau_d > t\};$

si conclude che è una σ -algebra per il criterio di Dinkin.

Inoltre, prendendo $B=A$, si vede che $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t^*$.

Si ha anche che $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t^*$. Infatti, poiché per ogni $A \in \mathcal{H}_t$ l'intersezione $A \cap \{\tau_d > t\}$ è uguale al vuoto oppure a $\{\tau_d > t\}$, basta prendere come B l'insieme \emptyset oppure Ω .

Poiché \mathcal{F}_t è la più piccola σ -algebra contenente \mathcal{G}_t e \mathcal{H}_t , si conclude che $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_t^*$, e questo conclude la dimostrazione. \square

Lemma 5.23: (Lemma (2).)

Per ogni $t \in [0, T]$, per ogni Y variabile aleatoria (misurabile rispetto ad \mathcal{F}_T), vale:

$$E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y | \mathcal{F}_t] = \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} e^{\Gamma(t)} E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y | \mathcal{G}_t] \quad (5.22)$$

dim.

Sia dato $A \in \mathcal{F}_t$. Allora per il lemma precedente esiste $B \in \mathcal{G}_t$ tale che

$$A \cap \{\tau_d > t\} = B \cap \{\tau_d > t\};$$

allora

$$\mathbb{I}_A \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} = \mathbb{I}_B \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}}. \quad (5.23)$$

Di conseguenza, si ha:

$$\int_A \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y P(\tau_d > t | \mathcal{G}_t) dP =$$

per la (5.23):

$$= \int_B \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y P(\tau_d > t | \mathcal{G}_t) dP =$$

per definizione di speranza condizionale:

$$= \int_B E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y | \mathcal{G}_t] P(\tau_d > t | \mathcal{G}_t) dP =$$

adesso poiché la variabile aleatoria $\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y$ è \mathcal{G}_t -misurabile e limitata,

$$= \int_B E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y | \mathcal{G}_t] P(\tau_d > t | \mathcal{G}_t) dP =$$

poiché la variabile aleatoria $\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}}$ è \mathcal{G}_t -misurabile:

$$= \int_B \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y | \mathcal{G}_t] dP =$$

ed infine per la (5.23):

$$= \int_B \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y | \mathcal{G}_t] dP;$$

da questo segue:

$$\begin{aligned} E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y P(\tau_d > t | \mathcal{G}_t) | \mathcal{F}_t] &= E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y | \mathcal{G}_t] | \mathcal{F}_t] = \\ &= \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y | \mathcal{G}_t] \end{aligned}$$

perché la variabile aleatoria $\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}}$ è \mathcal{F}_t -misurabile.

Poiché infine $P(\tau_d > t | \mathcal{G}_t)$ è \mathcal{F}_t -misurabile e vale la definizione (5.9), si ha:

$$E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y P(\tau_d > t | \mathcal{G}_t) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} e^{\Gamma(t)} E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y | \mathcal{G}_t].$$

che era quanto si doveva dimostrare. \square

Lemma 5.24: (Lemma (3).)

Per ogni coppia di tempi t, T con $t \leq T$, si ha che:

$$P[\tau_d > T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} E[e^{\Gamma(T) - \Gamma(t)} | \mathcal{G}_t], \quad (5.24)$$

$$P[t < \tau_d \leq T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} E[1 - e^{\Gamma(T) - \Gamma(t)} | \mathcal{G}_t], \quad (5.25)$$

ed inoltre il processo

$$L(t) \doteq \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} e^{\Gamma(t)} \quad (5.26)$$

è una martingala rispetto alla filtrazione \mathcal{F} .

dim.

Siano t, T tempi positivi qualsiasi con $t \leq T$, allora:

$$\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} = \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}}. \quad (5.27)$$

Allora, grazie alla (5.24) si ha:

$$P(\tau_d > T | \mathcal{F}_t) = E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} | \mathcal{F}_t] =$$

grazie al Lemma (2):

$$= \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} e^{\Gamma(t)} E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} | \mathcal{G}_t] =$$

per la formula di doppio condizionamento:

$$= \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} e^{\Gamma(t)} E[E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} | \mathcal{G}_T] | \mathcal{G}_t] =$$

e questo per la definizione (5.9)

$$= \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} e^{\Gamma(t)} E[e^{\Gamma(T)} | \mathcal{G}_t],$$

che dimostra la formula (5.24). La (5.25) si ottiene da questa osservando che:

$$\mathbb{I}_{\{t < \tau_d \leq T\}} = \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} - \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}}.$$

Per l'ultima affermazione, si vede subito, dalla (5.9) e dal fatto visto nell'ipotesi (D2) che $0 < P(\tau_d \leq t | \mathcal{G}_t) < 1$, che il processo definito dalla (5.26) è

(\mathcal{F}_t) -adattato ed integrabile. Anche la proprietà di martingala è verificata, dal momento che si ha:

$$\begin{aligned} E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} e^{\Gamma(T)} | \mathcal{G}_t] &= E[E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} | \mathcal{G}_T] e^{\Gamma(T)} | \mathcal{G}_t] = \\ &= E[E[e^{-\Gamma(T)} e^{\Gamma(T)} | \mathcal{G}_t]] = 1, \end{aligned}$$

e questo implica, per la formula (5.24), che:

$$E[L(T) | \mathcal{F}_t] = E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} e^{\Gamma(T)} | \mathcal{F}_t] =$$

e per il Lemma (2):

$$= \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} e^{\Gamma(t)} E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} e^{\Gamma(T)} | \mathcal{F}_t] = L(t),$$

come si doveva dimostrare. \square

Lemma 5.25: (Lemma (4).)

Il processo $N = (N(t))_{t \in [0, T]}$ definito da:

$$N(t) \doteq H(t) - \int_0^t \lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} ds = \mathbb{I}_{\{\tau_d < t\}} - \int_0^t \lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} ds \quad (5.28)$$

è una martingala rispetto alla filtrazione \mathcal{F} .

dim.

Grazie all'ipotesi (D3), il processo Γ è integrabile e (\mathcal{F}_t) -adattato e quindi (\mathcal{G}_t) -adattato. Allora il processo N è (\mathcal{G}_t) -adattato ed integrabile. Vale poi che:

$$\begin{aligned} E[N(T) | \mathcal{F}_t] &= E[\mathbb{I}_{\{\tau_d < T\}} - \int_0^T \lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} ds | \mathcal{F}_t] = \\ &= 1 - E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} | \mathcal{F}_t] - \int_0^t \lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} ds - \int_t^T E[\lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} | \mathcal{F}_t] ds = \end{aligned}$$

grazie al Lemma (2), si ottiene:

$$\begin{aligned} &= 1 - \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} E[e^{-\int_t^T \lambda(u) du} | \mathcal{G}_t] + \\ &\quad - \int_0^t \lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} ds - \int_t^T \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} e^{\int_0^t \lambda(u) du} E[\lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} | \mathcal{G}_t] ds. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Per doppio condizionamento della speranza all'interno dell'integrale, l'ultimo addendo della (5.29):

$$\int_t^T \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} e^{\int_0^t \lambda(u) du} E[\lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} | \mathcal{G}_t] ds =$$

è uguale a:

$$= \int_t^T \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} e^{\int_0^t \lambda(u) du} E[\lambda(s) E[\mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} | \mathcal{G}_s] | \mathcal{G}_t] ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} E \left[\int_t^T \lambda(s) e^{-\int_t^s \lambda(u) du} ds \middle| \mathcal{G}_t \right] = \\
&= \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} E [1 - e^{-\int_t^T \lambda(u) du} | \mathcal{G}_t],
\end{aligned}$$

e quindi, sostituendo quest'espressione trovata per l'ultimo addendo, nella formula (5.29), si ottiene che:

$$E[N(T) | \mathcal{F}_t] = 1 - \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} - \int_0^t \lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} ds = N(t),$$

e quindi il processo N è una martingala rispetto alla filtrazione \mathcal{F} , come si voleva dimostrare. \square

Lemma 5.26: (Lemma (5).) Se il processo Γ è continuo, allora la variabile aleatoria definita dalla formula (5.19) ossia:

$$\Phi \doteq \Gamma(\tau_d) \tag{5.30}$$

è una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1 ed indipendente da \mathcal{G}_∞ ⁷. Inoltre il tempo aleatorio dell'istante di default può essere caratterizzato come:

$$\tau_d = \inf\{t | \Gamma(t) \geq \Phi\}. \tag{5.31}$$

dim.

Grazie all'ipotesi (D4), ed alla definizione di Γ , vale che:

$$P(\tau_d > t | \mathcal{G}_\infty) = P(\tau_d > t | \mathcal{G}_t) = e^{-\Gamma(t)}.$$

Grazie all'ipotesi (D2), allora, $\Gamma(t)$ è continuo e non decrescente. Allora è possibile definirne l'inversa destra come:

$$\Gamma^{-1}(s) \doteq \inf\{t > 0 : \Gamma(t) > s\}. \tag{5.32}$$

Quindi, per definizione, si ha:

$$\Gamma(t) > s \Leftrightarrow t > \Gamma^{-1}(s) \text{ e } \Gamma(\Gamma^{-1}(s)) = s.$$

Di conseguenza, applicando questo risultato, si ha che:

$$P(\tau_d > s | \mathcal{G}_\infty) = P(\tau_d > \Gamma^{-1}(s) | \mathcal{G}_\infty) = e^{-\Gamma(\Gamma^{-1}(s))} = e^{-s}.$$

Quindi Φ è una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1, ed è indipendente da \mathcal{G}_∞ . Infine, per la (5.32) e con ragionamenti simili a quelli visti, e per la definizione di Φ , vale che:

$$\tau_d = \inf\{t > 0 : \Gamma(t) \geq \Gamma(\tau_d)\} = \inf\{t > 0 : \Gamma(t) \geq \Phi\},$$

come si doveva dimostrare. \square

⁷ La distribuzione esponenziale $\varepsilon(\lambda)$, con parametro $\lambda > 0$, ha funzione di densità di probabilità definita sui numeri reali positivi pari alla funzione esponenziale $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Quindi, la variabile aleatoria esponenziale del caso di interesse, poiché $\lambda = 1$, si ha $P(\Phi > x) = e^{-x}$

5.27 Costruzione del modello.

Per costruire un modello basato sull'intensità, stanti le ipotesi della sezione precedente, si procede per passi consecutivi; essi si svolgono 'a ritroso' rispetto alla costruzione delle ipotesi precedenti, come di seguito illustrato.

1. Si sceglie una filtrazione $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}$ che soddisfi le ipotesi abituali e tale che

$$\mathcal{G}_\infty = \sigma(\mathcal{G}_t; t \geq 0) \subset \mathfrak{F}.$$

Questa scelta corrisponderà verosimilmente al flusso delle informazioni acquisibili, il più delle volte parziali rispetto al flusso completo delle informazioni disponibili.

2. Si prende un processo positivo misurabile e (\mathcal{G}_t) -adattato tale che

$$\int_0^t \lambda(s) ds < +\infty \quad q.c. \quad \forall t \geq 0.$$

Questo sarà il processo di intensità.

3. Si prende una variabile aleatoria esponenziale Φ di parametro 1 ed indipendente da \mathcal{G}_∞ .

4. Si definisce il tempo aleatorio:

$$\tau_d \doteq \inf \left\{ t \mid \int_0^t \lambda(s) ds \geq \Phi \right\}^8,$$

con la convenzione $\tau_d = +\infty$ se l'insieme $\left\{ t \mid \int_0^t \lambda(s) ds \geq \Phi \right\}$ è vuoto.

5. Di conseguenza, per $t \leq T$,

$$P[\tau_d > T] = P \left[\int_0^T \lambda(s) ds < \Phi \mid \mathcal{G}_T \right] \quad (5.33)$$

e quest'ultima probabilità si può esprimere, condizionando per fattorizzazione, come:

$$P \left[\int_0^T \lambda(s) ds < \Phi \mid \mathcal{G}_t \right] = E \left[P \left[\int_0^T \lambda(s) ds < \Phi \mid \mathcal{G}_T \right] \mid \mathcal{G}_t \right]. \quad (5.34)$$

Inoltre, grazie all'indipendenza tra Φ e \mathcal{G}_T , che segue dalla ipotesi del punto [3.],

$$E \left[P \left[\int_0^T \lambda(s) ds < \Phi \mid \mathcal{G}_T \right] \mid \mathcal{G}_t \right] = E \left[\exp \left(- \int_0^T \lambda(s) ds \right) \mid \mathcal{G}_t \right]. \quad (5.35)$$

⁸ Questo corrisponde alla richiesta $\Gamma(t) \geq \Gamma(\tau_d)$.

6. Si fanno le seguenti due osservazioni: la prima è che questa probabilità trovata al punto [5.]:

$$P[\tau_d > T] = E \left[\exp \left(- \int_0^T \lambda(s) ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] \quad (5.36)$$

può essere fatta corrispondere proprio al processo di azzardo Γ che si voleva, infatti vale:

$$0 < P[\tau_d > T] < 1 \quad (5.37)$$

in quanto

$$P[\tau_d > T] = \exp \left[- \int_0^t \lambda(s) ds \right] \quad (5.38)$$

e quindi è compresa strettamente tra 0 e 1.

La seconda osservazione è che per la variabile aleatoria Φ , che nelle ipotesi era uguale a $\Gamma(\tau_d)$, vale effettivamente l'uguaglianza:

$$\Phi = \int_0^{\tau_d} \lambda(s) ds; \quad (5.39)$$

questa espressione può essere ricavata sostituendo un uguale nell'espressione (5.35), per la precisione:

$$E \left[P \left[\int_0^T \lambda(s) ds = \Phi \middle| \mathcal{G}_T \right] \middle| \mathcal{G}_t \right] = E \left[\exp \left(- \int_0^{\tau_d} \lambda(s) ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] \quad (5.40)$$

e quest'ultimo membro è uguale a:

$$E \left[\exp \left(- \int_0^{\tau_d} \lambda(s) ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] = \exp \left(- \int_0^{\tau_d} \lambda(s) ds \right) \quad (5.41)$$

visto che $\exp \left(- \int_0^{\tau_d} \lambda(s) ds \right)$ è \mathcal{G}_t -misurabile.

7. Si definisce

$$\mathcal{F}_t \doteq \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t, \quad (5.42)$$

dove $\mathcal{H}_t \doteq \sigma(\mathcal{H}_s, s \leq t)$. Allora le ipotesi (D1),(D2),(D3) sono soddisfatte per la scelta di:

$$\Lambda(t) \doteq \Gamma(t) = \int_0^t \lambda(s) ds, \quad (5.43)$$

e per avere che sia soddisfatta anche l'ipotesi (D4) basta osservare che:

$$\begin{aligned} P[\tau_d > T | \mathcal{G}_\infty] &= \\ &= P \left[\Phi > \int_0^T \lambda(s) ds \middle| \mathcal{G}_\infty \right] = \\ &= \exp \left[- \int_0^{\tau_d} \lambda(s) ds \right] = \\ &= P[\tau_d > T | \mathcal{G}_t]. \quad \square \end{aligned}$$

5.28 Calcolo della probabilità di insolvenza.

Quando, nella pratica, si vanno a calcolare le probabilità di default grazie alle caratterizzazioni (5.24), (5.25), fornite nel Lemma (3), si ha bisogno di conoscere chi è il processo di intensità λ definito in (5.14); detto in altre parole, occorre un modello, che sia possibilmente ben trattabile, per il processo λ .

L'idea che viene in mente è la seguente: siccome il membro di destra della formula (5.24) somiglia ad una valutazione sotto la probabilità risk-neutral di uno Zero Coupon Bond in termini di un processo basato sul tasso a breve (*short rate*), si prova ad adottare per il processo di intensità λ uno di tali modelli basati sul tasso a breve, per esempio il modello CIR⁹.

Una scelta possibile per λ è quella di prendere un modello radice-quadrata (*square-root process*), così chiamato grazie alla presenza della radice quadrata del processo di intensità nel coefficiente di diffusione (*drift*). Tale modello è molto diffuso in virtù del fatto che i prezzi delle opzioni sui bond¹⁰ sono espliciti: si vede adesso perché.

Proposizione 5.29: Siano W un moto browniano rispetto alla filtrazione $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}$, e $b \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ delle costanti. Si definisca il processo di intensità λ grazie all'equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} d\lambda(t) = (b + \beta\lambda(t))dt + \sigma\sqrt{\lambda(t)}dW(t) \\ \lambda(0) = 0 \end{cases}$$

Allora, la probabilità condizionale di insolvenza, dato un tale processo di intensità, è data dalla seguente espressione esplicita:

$$\begin{aligned} p_d(t, T) &= P[\tau_d \leq T | \mathcal{F}_t] = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } \tau_d \leq T, \\ 1 - \exp[-A(T-t) - B(T-t)\lambda(t)], & \text{se } \tau_d > T, \end{cases} \end{aligned}$$

dove

$$A(u) \doteq -\frac{2b}{\sigma^2} \log \left(\frac{2\gamma \exp(\gamma - \beta)\frac{u}{2}}{(\gamma - \beta)[\exp(\gamma u) - 1] + 2\gamma} \right), \quad (5.44)$$

$$B(u) \doteq \frac{2[\exp(\gamma u) - 1]}{(\gamma - \beta)[\exp(\gamma u) - 1] + 2\gamma}, \quad (5.45)$$

$$\gamma \doteq \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2}. \quad (5.46)$$

dim.

Dalla (5.25)

$$P[t < \tau_d \leq T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} E[1 - \exp[\Gamma(T) - \Gamma(t)] | \mathcal{G}_t], \quad (5.47)$$

dove

$$\Gamma(T) - \Gamma(t) = \int_0^T \lambda(s)ds - \int_0^t \lambda(s)ds = \int_t^T \lambda(s)ds. \quad (5.48)$$

⁹ Cox-Ingersoll-Ross, si veda il capitolo 2.

¹⁰ I cosiddetti *bond option prices*.

L'equazione di struttura a termine affine che permette di ricavare B , e di conseguenza A ¹¹, è data da:

$$\begin{cases} \partial_t B(t, T) = \alpha(t)B^2(t, T) - \beta(t)B(t, T) - 1 \\ B(T, T) = 0 \end{cases}$$

dove le funzioni deterministiche α, β che definiscono i coefficienti della (5.29) sono le stesse come definite nella formula (2.23). Valutata con i coefficienti dati dal drift e dalla volatilità del caso del modello CIR, ossia $\alpha(t) \equiv \frac{\sigma^2}{2}$, $\beta(t) \equiv \beta$, essa diventa:

$$\begin{cases} \partial_t B(t, T) = \frac{\sigma^2}{2} B^2(t, T) - \beta B(t, T) - 1 \\ B(T, T) = 0 \end{cases}$$

che è un'equazione di Riccati, ed ha quindi soluzione esplicita data da:

$$B(t, T) = \frac{2[e^{\gamma(T-t)} - 1]}{(\gamma - \beta)[e^{\gamma(T-t)} - 1] + 2\gamma},$$

dove

$$\gamma \doteq \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2}.$$

Per integrazione si ricava inoltre la formula per A :

$$A(t, T) = -\frac{2b}{\sigma^2} \log\left(\frac{2\gamma e^{(\gamma-\beta)\frac{(T-t)}{2}}}{(\gamma - \beta)[e^{\gamma(T-t)} - 1] + 2\gamma}\right). \quad (5.49)$$

Quindi le formule per B e per A sono dimostrate, a patto di prendere come $u = T - t$. \square

5.30 Il pricing dell'opzione suscettibile di fallimento.

Lo scopo di questa sezione è un utilizzo pratico del modello e delle ipotesi viste finora; più precisamente, si va a trattare l'operazione di attribuzione di un prezzo 'equo' all'opzione suscettibile di fallimento. Con prezzo equo di un'opzione suscettibile di fallimento si intende l'analogo del prezzo di non arbitraggio¹² per i bond non soggetti a fallimento, ossia, per la precisione, il valore atteso condizionale (condizionato rispetto all'essersi verificato o meno del default fino a quel momento) del capitale di restituzione scontato al tasso privo di rischio, sotto una qualsiasi probabilità equivalente alla probabilità risk-neutral.

Nell'assetto stocastico delle sezioni precedenti, in ipotesi di assenza di arbitraggio dei mercati, si trova una misura di probabilità Q equivalente alla misura originaria P , chiamata misura *risk-neutral*, sotto la quale è facile determinare il prezzo di un'opzione (non soggetta a fallimento) come il prezzo equo appena definito. La trattazione di questa sezione è volta, quindi, anche a mettere in luce come l'operazione di determinazione del prezzo equo nel senso di prezzo deciso sotto una probabilità risk-neutral sia possibile non solo per i bond 'sicuri' ma anche per quelli soggetti a fallimento.

¹¹ La definizione di struttura a termine affine è data dalla definizione (2.22).

¹² La definizione di prezzo di non arbitraggio si trova nel secondo capitolo, definizione (2.11).

Per fare tutto questo, si fissa innanzitutto la misura di probabilità (la probabilità risk-neutral), e si suppone di applicare il modello direttamente sullo spazio di probabilità risk-neutral¹³.

Osservazione 5.31: La scelta preliminare della probabilità è in un certo senso obbligata se si vuole applicare il modello basato sull'intensità costruito nella sezione (5.27); infatti, le ipotesi (D1),(D2),(D3) non sono preservate sotto un cambio di misura equivalente, perché sono condizioni che coinvolgono, direttamente o per via del concetto di martingala (che compare ad esempio nella decomposizione di Doob-Meyer), la misura P scelta. Tuttavia questa scelta non risulta restrittiva, ma anzi è vantaggiosa, per i motivi che saranno evidenziati nell'osservazione successiva.

Siano allora dati:

- Q =una misura di probabilità risk-neutral equivalente alla probabilità P.
- $r = (r(t))_{t \in [0, T]}$ = un processo che modella il tasso a breve¹⁴ adattato rispetto alla filtrazione \mathcal{G} .
- un processo di intensità $\lambda_Q = (\lambda_Q(t))_{t \in [0, T]}$ ¹⁵ positivo, misurabile, adattato rispetto alla filtrazione \mathcal{G} , tale che, per ogni $t \geq 0$,

$$\Gamma_Q(t) \doteq \int_0^t \lambda_Q(s) ds < +\infty \quad q.c. \quad (5.50)$$

Allora, prendendo Q al posto di P, $\Lambda_Q \doteq \Gamma_Q$ come Λ , Γ_Q come Γ , si è nelle ipotesi (D1),(D2),(D3) ed è possibile applicare in questa cornice i lemmi che vanno dal Lemma (1) fino al Lemma (4).

Si passa quindi alla determinazione del prezzo di uno zero coupon bond che potrebbe fallire.

Proposizione 5.32: Fissato un tasso di recupero¹⁶ costante $\delta \in (0, 1)$, si distinguono tre casi:

- (i.) Nessuna copertura: il flusso di cassa alla scadenza T dell'opzione è

$$\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}}.$$

- (ii.) Copertura parziale alla scadenza: il flusso di cassa alla scadenza T dell'opzione è

$$\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} + \delta \mathbb{I}_{\{\tau_d \leq T\}}.$$

¹³ Cioè lo spazio dotato della misura di probabilità risk-neutral.

¹⁴ Il tasso a breve r è il tasso di interesse, continuamente composto, al quale un'entità può prendere in prestito dei soldi in un periodo di tempo infinitesimamente breve a partire dall'istante t . Si rimanda al capitolo 2.

¹⁵ Che si suppone esistere.

¹⁶ Il tasso di recupero viene anche detto tasso di copertura.

(iii.) Copertura parziale all'insolvenza: il flusso di cassa dell'opzione è

$$\begin{cases} 1 & \text{all'istante } T \text{ se } \tau_d > T \\ \delta & \text{all'istante } \tau_d \text{ se } \tau_d \leq T. \end{cases}$$

In quest'ultimo caso quindi, in caso di avvenuta insolvenza, la perdita è $1 - \delta$.

Osservazione 5.33: La precedente distinzione in casi non ha alcun senso se non si fissa preliminarmente la misura di probabilità. Infatti il calcolo delle probabilità di default (e di conseguenza il pricing) dei tre casi enunciati dipende dal compensatore prevedibile Λ della decomposizione di Doob-Meyer; questo lo si evince bene dal punto [7.] della costruzione del modello (nella sezione (5.27)), in cui la definizione del compensatore (5.43) rappresenta la chiave di volta tra il processo di intensità (che dovrebbe rappresentare il dato osservabile nei mercati finanziari) e le ipotesi, che, grazie ai lemmi che esse permettono di dimostrare, consentono di far stare in piedi quella che è l'architettura matematica del modello elaborato.

Si suppone che vi siano almeno due possibili approcci al problema del pricing: una possibilità è quella di non mettersi nella situazione di probabilità risk-neutral, considerare direttamente il pricing per tutti i bond soggetti a fallimento con copertura di tipo (iii), ed elaborare formule generali per tali modelli. E' quello che si sarà costretti a fare quando, dalla probabilità risk-neutral, si vorrà considerare il pricing per cambio di misura equivalente.

Un'altra strada, seguita ad esempio da Filipović¹⁷, è la seguente. Si studia dapprima cosa succede sotto la misura di probabilità risk-neutral. Fissata la probabilità, è possibile operare le distinzioni sui tassi di copertura come visto nella proposizione (5.32). Questa distinzione risulta particolarmente utile nel caso si sia scelta, come misura, la probabilità risk-neutral; infatti, è possibile sfruttare appieno il modello, basato sul processo di azzardo che è 'direttamente osservabile', che è stato enucleato nella sezione (5.27). Dapprima, infatti, lo si utilizza nel caso (i) di copertura zero, che rappresenta un caso base (ed anche poco realistico), ma che ha il vantaggio di portare, grazie all'applicazione diretta del modello, a poter scegliere quale 'bond-modello' scegliere per il processo di intensità; e, grazie ad una scelta oculata di questo, di arrivare ad un calcolo diretto e concreto della formula per il pricing sotto questo modello¹⁸. Inoltre, l'ulteriore vantaggio è che, dopo aver visto il caso base, si passa facilmente al secondo caso (ii), ovvero quello che prevede copertura parziale alla scadenza; non solo! Adattare la costruzione del modello della sezione (5.27) anche all'ultimo caso (iii) di pricing di un bond che preveda copertura parziale all'insolvenza è possibile con poche modifiche, per la precisione occorre solo modificare di poco gli enunciati dei lemmi: Lemma (1) e Lemma (2). Ed allora si può capire come possa essere di gran lunga non solo più conveniente, ma anche più istruttivo, seguire la seconda strada; affinché però quest'ultima possibilità non escluda alcun caso, va discusso, in secondo luogo, cosa succede, e cosa ne è del modello, per cambi di misura equivalenti.

¹⁷ In 'Fixed Income Models', 2002.

¹⁸ Come si avrà modo di apprezzare a breve nella prossima sottosezione.

5.33.1 Determinazione del prezzo nel caso di copertura zero.

Se si modella l'evoluzione del tasso a breve $r = (r(t))_{t \in [0, T]}$, visto come processo stocastico sotto una misura di probabilità risk-neutral \mathbb{Q} , allora il prezzo al tempo t di uno zero coupon bond con scadenza T è dato da:

$$p_d(t, T) = E^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (5.51)$$

dove \mathcal{F} è la filtrazione naturale associata al processo r . Allora vale la seguente:

Proposizione 5.34: Il prezzo di arbitraggio $C(t, T)$ di uno zero coupon bond soggetto a fallimento, e senza alcuna copertura di rischio, è dato da:

$$C(t, T) = E^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \middle| \mathcal{F}_t \right]; \quad (5.52)$$

applicando il Lemma (2), si ottiene:

$$C(t, T) = \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} E^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T (r(s) + \lambda_{\mathbb{Q}}(s)) ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right]. \quad (5.53)$$

dim.

A partire dalla definizione:

$$C(t, T) = E^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

e grazie al lemma (5.23), che si applica ponendo:

$$Y \doteq \exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right),$$

si ha che:

$$\begin{aligned} & E^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ & = \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \exp \left(\int_0^t \lambda_{\mathbb{Q}}(s) ds \right) E^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \middle| \mathcal{G}_t \right] \end{aligned} \quad (5.54)$$

questa espressione ha già il grande vantaggio di tradurre il prezzo in una speranza condizionale rispetto a qualcosa che già si sa, quale è \mathcal{G}_t ; tuttavia se si prosegue nel calcolo, per fattorizzazione si ottiene:

$$= \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \exp \left(\int_0^t \lambda_{\mathbb{Q}}(s) ds \right) E^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) E^{\mathbb{Q}} [\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} | \mathcal{G}_T] \middle| \mathcal{G}_t \right]; \quad (5.55)$$

adesso, poiché

$$E^{\mathbb{Q}} [\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} | \mathcal{G}_T] = \exp[-\Gamma_{\mathbb{Q}}(T)],$$

dove

$$\Gamma_{\mathbb{Q}}(t) = \int_0^t \lambda_{\mathbb{Q}}(s) ds, \quad (5.56)$$

si ottiene che:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \exp\left(\int_0^t \lambda_Q(s) ds\right) E^Q \left[\exp\left(-\int_t^T r(s) ds\right) E^Q[\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} | \mathcal{G}_T] \middle| \mathcal{G}_t \right] = \\ = \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} E^Q \left[\exp\left(-\int_t^T (r(s) + \lambda_Q(s)) ds\right) \middle| \mathcal{G}_t \right]; \end{aligned}$$

in conclusione quindi,

$$C(t, T) = \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} E^Q \left[\exp\left(-\int_t^T (r(s) + \lambda_Q(s)) ds\right) \middle| \mathcal{G}_t \right],$$

come si voleva dimostrare. \square

Osservazione 5.35: Grazie a quest'ultima proposizione, si evince meglio cosa rappresenta nella pratica il processo di intensità; infatti, confrontando le formule (5.52) e (5.53), si scopre che determinare il prezzo di uno zero coupon bond soggetto a fallimento e senza copertura, basato sul tasso a breve r , risulta la stessa cosa che determinare il prezzo di uno zero coupon bond non soggetto a fallimento ma con tasso a breve maggiorato di λ_Q ; per avere ancora più chiara questa osservazione, ci si riferisca al corollario (5.37).

A questo punto per esplicitare meglio il prezzo dell'opzione serve un modello trattabile per il tasso a breve. Vale la seguente:

Proposizione 5.36: Se per il tasso a breve si sceglie il modello CIR, con parametri costanti $b \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, e W moto browniano rispetto alla filtrazione \mathcal{G}^{19} , vale a dire che la modellizzazione per r è fornita dall'equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW(t) \\ r(0) \geq 0 \end{cases}$$

e, prese due costanti $c_0, c_1 \geq 0$, si pone:

$$\lambda_Q \doteq c_0 + c_1 r(t), \quad (5.57)$$

allora il prezzo dell'opzione vale:

$$C(t, T) = \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \exp\left(-\tilde{A}(T-t) - \tilde{B}(T-t)r(t)\right) \quad (5.58)$$

dove

$$\tilde{A}(u) \doteq c_0 u - \frac{2b(1+c_1)}{\sigma^2} \log\left(\frac{2\tilde{\gamma} \exp(\tilde{\gamma} - \beta) \frac{u}{2}}{(\tilde{\gamma} - \beta)[\exp(\tilde{\gamma}u) - 1] + 2\tilde{\gamma}}\right), \quad (5.59)$$

$$\tilde{B}(u) \doteq (1+c_1) \frac{2[\exp(\tilde{\gamma}u) - 1]}{(\tilde{\gamma} - \beta)[\exp(\tilde{\gamma}u) - 1] + 2\tilde{\gamma}}, \quad (5.60)$$

$$\tilde{\gamma} \doteq \sqrt{\beta^2 + 2(1+c_1)\sigma^2}. \quad (5.61)$$

¹⁹ Sempre nel caso di probabilità risk-neutral Q .

dim.

I calcoli per questa derivazione di pricing sono noti e utilizzano i risultati della proposizione precedente²⁰.

Corollario 5.37: (Espressione del prezzo di uno zero coupon bond soggetto a fallimento in termini di uno senza rischio.)

Se $c_1 = 0$, e quindi, dalla (5.57), l'intensità λ_Q è costante, allora la formula (5.58) si esprime in termini della (5.29) come segue:

$$C(t, T) = \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \exp[-c_0(T-t)]P(t, T) \quad (5.62)$$

dove $P(t, T) = p_d(t, T)$ è il prezzo di uno zero coupon bond non soggetto a fallimento.

dim.

La formula per il prezzo (5.58) dà:

$$C(t, T) = \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \exp\left(-\tilde{A}(T-t) - \tilde{B}(T-t)r(t)\right)$$

dove bisogna sostituire 0 al posto di c_1 nelle seguenti formule:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &\doteq \sqrt{\beta^2 + 2(1+c_1)\sigma^2} = \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2} = \gamma, \\ \tilde{A}(u) &\doteq c_0u - \frac{2b(1+c_1)}{\sigma^2} \log\left(\frac{2\gamma \exp(\gamma - \beta)\frac{u}{2}}{(\gamma - \beta)[\exp(\gamma u) - 1] + 2\gamma}\right) = \\ &= c_0u - \frac{2b}{\sigma^2} \log\left(\frac{2\gamma \exp(\gamma - \beta)\frac{u}{2}}{(\gamma - \beta)[\exp(\gamma u) - 1] + 2\gamma}\right) = A(u), \\ \tilde{B}(u) &\doteq (1+c_1) \frac{2[\exp(\gamma u) - 1]}{(\gamma - \beta)[\exp(\gamma u) - 1] + 2\gamma} = \\ &= \frac{2[\exp(\gamma u) - 1]}{(\gamma - \beta)[\exp(\gamma u) - 1] + 2\gamma} = B(u). \end{aligned}$$

Allora risulta

$$\begin{aligned} C(t, T) &= \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \exp\left(-\tilde{A}(T-t) - \tilde{B}(T-t)r(t)\right) = \\ &= \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \exp[-c_0(T-t)] \exp\left(-A(T-t) - B(T-t)r(t)\right) = \\ &= \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \exp\left[-c_0(T-t)\right] P(t, T), \end{aligned}$$

come si doveva dimostrare. \square

²⁰ Si rimanda, per il dettaglio, all'articolo *A theory of Term Structures of Interest Rates*, di Cox-Ingorsoll-Ross, 1985

5.37.1 Determinazione del prezzo nel caso di copertura parziale alla scadenza.

Si sfrutta la seguente osservazione: la formula (5.32) si può esprimere come:

$$\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} + \delta \mathbb{I}_{\{\tau_d < T\}} = (1 - \delta) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} + \delta;$$

si può non tenere conto del caso $\tau_d = T$ in quanto $P(\tau_d = T) = 0$.

allora è possibile utilizzare i calcoli della sottosezione precedente: adottando gli stessi modelli, in virtù della formula (5.53), si ottiene per il prezzo la formula seguente.

Proposizione 5.38: (Prezzo di un bond soggetto a fallimento, con copertura parziale alla scadenza.)

Il prezzo di un bond soggetto a fallimento, con copertura parziale alla scadenza data da (5.32), è:

$$C(t, T) = (1 - \delta) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T (r(s) + \lambda_Q(s)) ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] + \delta P(t, T) \quad (5.63)$$

dove $P(t, T)$ è il prezzo di uno zero coupon bond non soggetto a fallimento.

dim.

Si osserva che si può scrivere:

$$\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} + \delta \mathbb{I}_{\{\tau_d \leq T\}} = (1 - \delta) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} + \delta.$$

Allora, la formula per il prezzo analoga a quella della definizione (5.52), diventa:

$$C(t, T) = E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) (1 - \delta) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} + \delta \middle| \mathcal{F}_t \right];$$

grazie al lemma (5.23), che si applica ponendo

$$Y \doteq \exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right),$$

si ha che

$$\begin{aligned} & E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) (1 - \delta) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} + \delta \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ & = (1 - \delta) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \exp \left(\int_0^t \lambda_Q(s) ds \right) E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \middle| \mathcal{G}_t \right] + \delta P(t, T) \end{aligned} \quad (5.64)$$

per fattorizzazione si ottiene:

$$\begin{aligned} & = (1 - \delta) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \exp \left(\int_0^t \lambda_Q(s) ds \right) E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) E^Q [\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \middle| \mathcal{G}_T] \middle| \mathcal{G}_t \right] \\ & \quad + \delta P(t, T); \end{aligned} \quad (5.65)$$

adesso, poiché

$$E^Q [\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \middle| \mathcal{G}_T] = \exp[-\Gamma_Q(T)],$$

dove

$$\Gamma_Q(t) = \int_0^t \lambda_Q(s) ds, \quad (5.66)$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} (1 - \delta) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} \exp\left(\int_0^t \lambda_Q(s) ds\right) E^Q \left[\exp\left(-\int_t^T r(s) ds\right) E^Q[\mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} | \mathcal{G}_T] \mid \mathcal{G}_t \right] + \\ + \delta P(t, T) = \\ = (1 - \delta) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} E^Q \left[\exp\left(-\int_t^T (r(s) + \lambda_Q(s)) ds\right) \mid \mathcal{G}_t \right] + \delta P(t, T); \end{aligned}$$

in conclusione quindi,

$$C(t, T) = (1 - \delta) \mathbb{I}_{\{\tau_d > T\}} E^Q \left[\exp\left(-\int_t^T (r(s) + \lambda_Q(s)) ds\right) \mid \mathcal{G}_t \right] + \delta P(t, T),$$

come si voleva dimostrare. \square

5.38.1 Determinazione del prezzo nel caso di copertura parziale all'insolvenza.

Per calcolare questo pricing sullo stile di quanto fatto finora, occorre modificare i Lemmi (1) e (2) ²¹; infatti cambia, oltre che la probabilità, che passa da P a Q²², l'enunciato del secondo, per la dimostrazione del quale occorre una leggera modifica anche del primo lemma. Tuttavia la loro dimostrazione è identica a quelle dei Lemmi (1) e (2). Essi vengono riformulati come di seguito illustrato.

Lemma 5.39: (Lemma (1').)

Per ogni $t \geq 0$, ($\forall A \in \mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{H}_t$) ($\exists B \in \mathcal{G}_\infty$):

$$A \cap \{\tau_d > t\} = B \cap \{\tau_d > t\}. \quad (5.67)$$

Lemma 5.40: (Lemma (2').)

Per ogni $t \in [0, T]$, per ogni variabile aleatoria Y, vale:

$$E^Q[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y | \mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{H}_t] = \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \exp(-\Gamma_Q(t)) E^Q[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} Y | \mathcal{G}_\infty], \quad (5.68)$$

dove Γ_Q è richiamata nella formula (5.56).

Al fine di trovare il prezzo di copertura all' insolvenza e il conseguente prezzo equo di un bond suscettibile di rischio che preveda una copertura parziale all'insolvenza, si sfruttano poi, rispettivamente, il Lemma (3) (5.24), che basta applicare senza modifiche al nuovo caso, e la stessa costruzione del modello basato sull'intensità della sezione (5.27), con le dovute modifiche, già viste, alla probabilità, che da P diventa Q, al processo di intensità, che da λ diventa λ_Q , ed infine al processo di azzardo, che da Γ diventa Γ_Q .

²¹ Visti nella sezione precedente o in appendice, riferimenti (5.22), (5.23)

²² Ma questo è ininfluente.

Lemma 5.41: La probabilità risk-neutral che l'evento di insolvenza avvenga prima di un certo istante u , condizionata sulla base di tutte le informazioni parziali disponibili nonché sull'informazione relativa all'essersi verificato o meno dell'evento di insolvenza, è data, in analogia con la formula (5.25), per ogni $t \leq u$, da:

$$Q[t < \tau_d \leq u | \mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{H}_t] = \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \left(1 - \exp\left[-\int_t^u \lambda_Q(s) ds\right] \right). \quad (5.69)$$

dim.

Grazie al Lemma (3) (5.24),

$$\begin{aligned} Q[t < \tau_d \leq u | \mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{H}_t] &= \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \exp\left[-\int_0^t \lambda_Q(s) ds\right] E^Q[\mathbb{I}_{\{t < \tau_d \leq u\}} | \mathcal{G}_\infty] \\ &= \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \exp\left(-\int_0^t \lambda_Q(s) ds\right) \left[\exp\left(-\int_0^t \lambda_Q(s) ds\right) - \exp\left(-\int_0^u \lambda_Q(s) ds\right) \right] = \\ &= \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \left(1 - \exp\left(-\int_t^u \lambda_Q(s) ds\right) \right), \end{aligned}$$

come si doveva dimostrare. \square

Corollario 5.42: Vale la formula:

$$\begin{aligned} E^Q \left[\exp\left(-\int_t^u r(s) ds\right) \delta \mathbb{I}_{\{t < \tau_d \leq T\}} | \mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{H}_t \right] &= \quad (5.70) \\ &= \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \lambda_Q(u) \exp\left(-\int_t^u \lambda_Q(s) ds\right) \mathbb{I}_{\{t \leq u\}} \end{aligned}$$

dim.

La formula (5.70) si ottiene, per differenziazione rispetto alla variabile u , dalla formula (5.69).

Proposizione 5.43: Per il prezzo di recupero all'insolvenza, che verrà indicato con π , e che è dato, per ogni $t < \tau_d \leq T$, dall'espressione:

$$\pi(t) = E^Q \left[\exp\left(-\int_t^T r(s) ds\right) \delta \mathbb{I}_{\{t < \tau_d \leq T\}} | \mathcal{F}_t \right], \quad (5.71)$$

vale:

$$\pi(t) = \delta \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \int_t^T E^Q \left[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \lambda_Q(u) \exp\left(\int_t^T (r(s) + \lambda_Q(s)) ds\right) | \mathcal{G}_t \right] du \quad (5.72)$$

dim.

Dalla (5.71), grazie alla formula fornita dal precedente corollario (5.70), si ha:

$$\begin{aligned} E^Q \left[\exp\left(-\int_t^T r(s) ds\right) \delta \mathbb{I}_{\{t < \tau_d \leq T\}} | \mathcal{F}_t \right] &= \\ &= E^Q \left[E^Q \left[\exp\left(-\int_t^u r(s) ds\right) \delta \mathbb{I}_{\{t < \tau_d \leq T\}} | \mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{H}_t \right] | \mathcal{F}_t \right] = \end{aligned}$$

adesso, poiché $\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}}$ è $(\mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{H}_t)$ -misurabile,

$$= \delta \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} E^Q \left[\int_t^T \exp \left(\int_t^u r(s) ds \right) \lambda_Q(u) \exp \left(\int_t^u \lambda_Q(s) ds \right) du \middle| \mathcal{F}_t \right] =$$

infine per il Lemma di Fubini-Tonelli, applicabile agli integrandi che sono positivi e misurabili, si ha l'ultima uguaglianza:

$$= \delta \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \int_t^T E^Q \left[\lambda_Q(u) \exp \left(\int_t^u (r(s) + \lambda_Q(s)) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] du;$$

questo per misurabilità può essere riscritto come:

$$= \delta \int_t^T E^Q \left[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \lambda_Q(u) \exp \left(\int_t^u (r(s) + \lambda_Q(s)) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] du =$$

e, grazie al Lemma (2) (5.23), applicato con

$$Y \doteq \lambda_Q(u) \exp \left(\int_t^u (r(s) + \lambda_Q(s)) ds \right),$$

si ottiene infine:

$$= \delta \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \int_t^T E^Q \left[\mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \lambda_Q(u) \exp \left(\int_t^u (r(s) + \lambda_Q(s)) ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] du,$$

che dà la tesi desiderata.

Corollario di questa proposizione è il seguente risultato.

Teorema 5.44: Il prezzo equo di un bond che fornisca una copertura parziale al verificarsi dell'insolvenza, basato su un'evoluzione del processo di intensità di tipo Cox-Ingersoll-Ross, è dato da

$$\tilde{C}(t, T) \doteq C_0(t, T) + \pi(t) \tag{5.73}$$

dove $C_0(t, T)$ è il prezzo di un bond senza rischio, e $\pi(t)$ è il prezzo di recupero all'insolvenza calcolato nella proposizione precedente.

dim.

Segue immediatamente dalla formula (5.32) e dalla proposizione precedente.

Osservazione 5.45: Questo corollario spiega perché i titoli emessi da Stati o società a rischio di fallimento devono avere tassi di interesse maggiori per compensare l'eventualità di insolvenza.

5.46 Cambio di misura.

5.46.1 Idea intuitiva e descrizione dello scopo della sezione.

Se si volesse fare un paragone con le scienze fisiche, si potrebbe dire che lo studio fatto fino ad ora sotto la misura di probabilità risk-neutral potrebbe

corrispondere alla descrizione delle diverse leggi del moto tutte in uno stesso sistema di riferimento, fissato a priori, che si potrebbe considerare il sistema di riferimento fisico inerziale²³. Il moto uniforme in tale riferimento corrisponderebbe così al pricing di bond senza rischio, oppure²⁴, cambiando di poco il tasso a breve, di bond soggetti a fallimento ma senza una prevista copertura o con parziale recupero alla scadenza; mentre invece, naturalmente, il moto accelerato corrisponderebbe ai bond soggetti a fallimento con copertura prevista al verificarsi del fallimento. In quest'ottica, la presenza o meno di un fattore di 'sconto di rischio' rispetto al tasso privo di rischio indicherebbe la presenza dell'accelerazione.

Restando in tali termini di paragone, in questa sezione in cui si discute il pricing sotto cambio di misura equivalente, si vuole studiare cosa succede alle leggi del moto se ci si pone in un sistema di riferimento non inerziale, ossia in un sistema uniformemente accelerato: è chiaro che la maggior parte del lavoro sarà risolta se si riesce a descrivere la trasformazione di coordinate da applicare per riportarsi al sistema inerziale: questo corrisponde a trovare una densità di probabilità grazie alla quale riportarsi alla probabilità risk-neutral, e maneggiare a quel punto martingale anziché submartingale; cioè, nella pratica, la densità permette di trovare il compensatore che 'trasforma' la funzione indicatrice di default (5.2) in una martingala; grazie a questo, è possibile poi applicare, con lievi modifiche, le stime di pricing implicitamente già viste finora *en passant*, ma che saranno meglio richiamate e specificate al momento opportuno²⁵.

Dopo aver definito in modo matematico rigoroso qual è il compensatore che si va a cercare, di cui qui è stato descritto intuitivamente lo scopo a parole, il primo passo da fare sarà dunque quello della 'ricerca della densità'.

L'assetto stocastico di cornice è lo stesso delle sezioni precedenti.

Osservazione 5.47: *Remind:* Sia P una misura di probabilità qualsiasi sullo stesso spazio misurabile (Ω, \mathfrak{F}) delle sezioni precedenti. Sempre nell'assetto stocastico delle sezioni precedenti, si è visto che se valgono le ipotesi (D1),(D2),(D3), allora il processo stocastico su $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ definito, per ogni $t \in [0, T]$, da:

$$M(t) \doteq H(t) - \int_0^t \lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} ds$$

è una martingala, sotto la probabilità P , rispetto alla filtrazione $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$.

Definizione 5.48: Si definisce μ un processo stocastico positivo, prevedibile rispetto alla filtrazione $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}$, e tale che

$$\int_0^t \lambda(s) \mu(s) ds < +\infty \quad q.c. \quad \forall t \in [0, T].$$

²³ Un sistema fisico di riferimento inerziale è, per definizione, un elemento della classe di equivalenza dei sistemi fisici in cui vale il primo principio della dinamica; ossia, è un sistema di riferimento caratterizzato dalla condizione che se un punto materiale libero, sottoposto ad una risultante nulla di forze, viene posto nel sistema in condizioni di quiete, esso rimarrà in condizioni di quiete.

²⁴ Come si è visto nello studio dei casi (i) e (ii)

²⁵ Ci si sta qui riferendo all'osservazione (5.52).

Definizione 5.49: Si definisce

$$\Lambda_Q(t) \doteq \int_0^t \lambda(s)\mu(s)ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (5.74)$$

dove μ è definito in (5.48).

Allora, si vuole costruire un misura di probabilità Q equivalente a P , tale che

$$\Lambda_Q(t \wedge \tau_d) \quad (5.75)$$

sia il compensatore di H , sotto Q , rispetto alla filtrazione $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$; vale a dire che si cerca la probabilità Q equivalente a P , tale che

$$M(t) \doteq H(t) - \Lambda_Q(t \wedge \tau_d) \quad (5.76)$$

sia una martingala, sotto la probabilità Q , rispetto alla filtrazione

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}.$$

Osservazione 5.50: Nel modello visto finora, il compensatore $\Lambda_Q(t \wedge \tau_d)$ era rappresentato dal processo di azzardo $\Gamma_Q(t)^{26}$, ma in generale questo è falso. Infatti è possibile trovare un controesempio²⁷ alla formula, che vale se si è nelle ipotesi (D1),(D2),(D3), ma non in generale, data da:

$$E^P[(I)_{\{\tau_d > s\}} Y | \mathcal{F}_t] = (I)_{\{\tau_d > s\}} E^P[Y \exp(\Lambda_Q(t) - \Lambda_Q(s)) | \mathcal{G}_t] \quad (5.77)$$

per ogni Y variabile aleatoria \mathcal{F}_T -misurabile.

5.50.1 Determinazione della densità e del compensatore.

Definizione 5.51: Si considerino due processi $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$, $U = (U_t)_{t \in [0, T]}$ a variazione finita²⁸, e aventi traiettorie continue a destra, definiti, per ogni $t \in [0, T]$, dalle formule seguenti:

$$\tilde{B}(t) \doteq \exp \left[\int_0^t (1 - \mu(s)) \lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} ds \right], \quad (5.78)$$

dove μ è stato definito in (5.48), e

$$U(t) \doteq \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} + \mu(\tau_d) \mathbb{I}_{\{\tau_d \leq t\}}; \quad (5.79)$$

detto a parole, il processo U vale 1 se l'insolvenza ancora non si è verificata, altrimenti vale $\mu(\tau_d)$.

²⁶ Riferimenti: (5.62) in appendice, oppure (5.9), lemma (5.26), punto [4] della sezione (5.27).

²⁷ Si veda S. Kusoka, *A remark on default risk models*, 1999.

²⁸ Definizione (4.18).

Osservazione 5.52: • Se il processo $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$, definito, per ogni $t \in [0, T]$, da:

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_u du\right), \quad (5.80)$$

dove $r = (r_t)_{t \in [0, T]}$ indica il tasso a breve, rappresenta il fattore di sconto di un bond non soggetto a fallimento, il processo \tilde{B} è l'analogo per i bond suscettibili di insolvenza.

- Il processo U invece rappresenta una 'generalizzazione' del processo X , il passivo aleatorio definito nella sezione (4.1): se si adottano le notazioni di tale sezione,

$$U(t) = X \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} + \tilde{X} \mathbb{I}_{\{\tau_d \leq t\}}, \quad (5.81)$$

dove $Z = \tilde{X} = \mu$ ed $X = 1$.

- Il prezzo equo per una quintupla (4.1), è dato, per ogni $t \in [0, T]$, da:

$$C(t, T) = B_t E^{Q^*} \left[\int_t^T B_s^{-1} dM_s | \mathcal{F}_t \right], \quad (5.82)$$

dove (B_t) è il fattore di sconto definito da (5.80), Q^* è la probabilità risk-neutral, il processo M è definito dalla formula (5.76).

Proposizione 5.53: Il processo $D = (D_t)_{t \in [0, T]}$, definito, per ogni $t \in [0, T]$, da:

$$D(t) \doteq \tilde{B}(t)U(t), \quad (5.83)$$

soddisfa:

$$D(t) = 1 + \int_0^t D(s^-)(\mu(s) - 1) dM_s, \quad (5.84)$$

dove $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ è il processo definito dalla formula (5.76).

dim.

Si utilizza la versione semplificata della formula di Itô per processi continui a destra con limite a sinistra data in appendice (proposizione (5.63)). Si ha:

$$[\tilde{B}, U](t) = \sum_{0 < s \leq t} \Delta \tilde{B}(s) \Delta U(s) = \sum_{0 < s \leq t} (\tilde{B}(s) - \tilde{B}(s^-)) (\Delta U(s) - \Delta U(s^-)) = 0,$$

perché \tilde{B} è continuo; inoltre si osserva che $U(t)$ si può scrivere in forma 'integrale' come:

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(s^-)(\mu(s) - 1) dH_s. \quad (5.85)$$

Allora si ha che:

$$D(t) = 1 + \int_0^t \tilde{B}(s^-) dU(s) + \int_0^t U(s^-) d\tilde{B}_s =$$

grazie alla formula di Itô proposizione (5.63)), alla definizione di \tilde{B} , ed alla formula (5.85),

$$D(t) = 1 + \int_0^t \tilde{B}(s^-) U(s^-) (\mu(s) - 1) dH_s +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t U(s^-) \tilde{B}(s) (1 - \mu(s)) \lambda(s) \mathbb{I}_{\{\tau_d > s\}} ds = \\
& = 1 + \int_0^t D(s^-) (\mu(s) - 1) dM_s,
\end{aligned}$$

come si doveva dimostrare. \square

Corollario 5.54: Poiché $D(s^-)$ è localmente limitato, allora, D è una P-martingala locale.

Corollario 5.55: Se $E[D(T)] = 1$, allora il processo $D = (D_t)_{t \in [0, T]}$ è una martingala sotto la probabilità P, ed è possibile definire una misura di probabilità Q equivalente a P su F_T data dalla densità:

$$\frac{dQ}{dP} \doteq D(T). \quad (5.86)$$

Teorema 5.56: Fissata una scadenza $T > 0$, se $E[D(T)] = 1$, allora il processo definito, per ogni $t \in [0, T]$, da:

$$\tilde{M}(t) \doteq H(t) - \Lambda_Q(t \wedge \tau_d) \quad (5.87)$$

è una martingala sotto la probabilità Q.

dim.

È sufficiente mostrare che \tilde{M} è una martingala locale sotto Q. Infatti Λ_Q è un processo crescente e continuo e dunque prevedibile; allora, per l'unicità data dal teorema di decomposizione di Doob-Meyer, esso è l'unico compensatore di H sotto Q, e, poiché H è uniformemente integrabile, tale sarà anche \tilde{M} . Affinché \tilde{M} è una martingala locale sotto Q è (necessario e) sufficiente dimostrare che $D\tilde{M}$ è una martingala locale sotto P.

Per dimostrare questo, si utilizza nuovamente la formula data nella proposizione (5.63).

Preliminarmente, si osserva che $H(0) = \Lambda_Q(0) = 0$ e quindi il primo addendo della formula è nullo; invece per l'ultimo vale:

$$[D, \tilde{M}](t) = \sum_{0 < s \leq t} \Delta D(s) \Delta \tilde{M}(s) =$$

poiché \tilde{M} ha solo un 'salto', per la precisione salta di 1 al tempo τ_d , e prima di τ_d non c'è salto, si ha che la sommatoria è non nulla solo nel caso in cui $\tau_d \leq t$, allora:

$$[D, \tilde{M}](t) = \Delta D(\tau_d) = \mathbb{I}_{\{\tau_d \leq t\}} =$$

questo è uguale a:

$$= D(\tau_d^-) (\mu(s) - 1) \mathbb{I}_{\{\tau_d \leq t\}} =$$

e dalla formula (5.84) della proposizione precedente si ottiene infine:

$$[D, \tilde{M}](t) = \int_0^t D(s^-) (\mu(s) - 1) dH_s. \quad (5.88)$$

Quindi, per $D\tilde{M}$ vale l'espressione:

$$D\tilde{M}(t) = \int_0^t D(s^-)d\tilde{M}(s) + \int_0^t \tilde{M}(s^-)dD(s) + [D, \tilde{M}](t) =$$

esplicitando il primo e l'ultimo addendo del membro di destra dell'equazione si ottiene:

$$\begin{aligned} &= \int_0^t D(s^-)dH(s) + \int_0^t D(s^-)dH(s) + \\ &+ \int_0^t \tilde{M}(s^-)dD(s) + \int_0^t D(s^-)(\mu(s) - 1)dH_s = \end{aligned}$$

e, semplificando, si ha infine:

$$= \int_0^t \tilde{M}(s^-)dD(s) + \int_0^t D(s^-)\mu(s)dM_s,$$

dove il processo M è stato definito sopra. Poiché M e D sono P -martingale, $D\tilde{M}$ è una martingala locale. \square

5.56.1 Determinazione del pricing.

Dopo lo studio della sottosezione precedente, si può finalmente affermare la proposizione seguente.

Proposizione 5.57: Il prezzo equo di uno zero coupon bond soggetto a fallimento è dato da:

$$C(t, T) = \mathbb{I}_{\{\tau_d > t\}} \tilde{B}_t E^Q \left[\int_t^T \tilde{B}_s^{-1} d\tilde{M}_s \middle| \mathcal{G}_t \right]. \quad (5.89)$$

dim.

Corollario del teorema (5.56), della formula (5.82), e di passaggi analoghi a quelli svolti nella proposizione (5.43). \square

5.58 Inconvenienti dei modelli in forma ridotta.

I modelli strutturali presentano alcuni svantaggi²⁹ che hanno portato allo sviluppo dei modelli in forma ridotta; questi ultimi, d'altra parte, per loro stessa definizione, presentano i seguenti aspetti svantaggiosi.

- I modelli in forma ridotta non si servono in alcun modo dei bilanci attivi di una società per determinare l'insolvenza del titolo di credito emesso; quindi si pongono sullo stesso grado di utilità sia per chi è estraneo alla società come gli investitori, sia per chi, come gli analisti finanziari, deve, ad esempio, determinare i prezzi, dall'interno della società ed è a conoscenza dei flussi di cassa di quest'ultima. In particolare anche chi ha accesso a tutti i bilanci dell'azienda non può in alcun modo trarre profitto da questa conoscenza, se sceglie di adottare un modello di questo genere.

²⁹ Tali inconvenienti sono stati esposti nella sezione (4.15).

- L'insolvenza avviene sempre come un evento imprevedibile: non si può avere una minima idea di quando è più probabile che accada.
- L'insolvenza, a priori, può non verificarsi anche quando l'azienda è già in una situazione di bilanci in perdita; si vorrebbe invece poter dare un peso probabilistico maggiore a questa situazione già rischiosa in partenza.

Dallo studio matematico si evince che dovrebbe quindi sorgere in modo 'naturale' l'esigenza di modelli più compositi, in grado di risolvere i problemi legati alle situazioni che sono state appena discusse. Questa considerazione matematica si riflette nella pratica: gli analisti finanziari, gli istituti di credito, le agenzie di rating, i traders, sviluppano ciascuno un suo modello, talvolta depositato come brevetto³⁰, tali altre variabile di volta in volta, a seconda del grado di importanza dei parametri agli occhi del fruitore del modello. Per questo motivo, può capitare che essi mettano insieme stime storiche, prassi prese dai modelli strutturali ed eventualità da modellizzare mediante l'approccio in forma ridotta. Sarà questo l'argomento del prossimo capitolo, in cui verrà presentato un modello 'ibrido'. Nell'ultimo capitolo, invece, si possono trovare i modelli di valutazione adottati dalle principali agenzie di rating³¹, e la percentuale di influenza che essi hanno nella formulazione delle stime³².

³⁰ Come è per esempio quello dell'agenzia KMVMoody's Investor Service.

³¹ in Tabella C.

³² in Tabella A.

5.59 Appendice.

Definizione 5.60: (Famiglia di variabili aleatorie uniformemente integrabili e processo stocastico uniformemente integrabile.)

Su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, una famiglia di variabili aleatorie $\{X_i\}_{i \in I}$ si dice uniformemente integrabile se

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sup_{i \in I} \int_{|X_i| \geq a} |X_i| dP = 0.$$

Un processo stocastico si dice uniformemente integrabile se tale è la famiglia delle sue variabili aleatorie al variare del parametro t nell'insieme dei tempi.

Proposizione 5.61: (Teorema di decomposizione di Doob-Meyer.) Su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, un processo stocastico $X = (X_t)_{t \geq 0}$ è una submartingala (rispettivamente supermartingala) di classe (D)³³ se e soltanto se, per ogni $t \geq 0$, si può scrivere:

$$X_t = M_t + A_t$$

(rispettivamente,

$$X_t = M_t - A_t),$$

dove M è una martingala uniformemente integrabile e A è un processo crescente prevedibile a variazione finita³⁴.

Definizione 5.62: (Processo di azzardo.)

Sia τ un tempo di arresto rispetto ad una certa filtrazione \mathcal{F} . Si indichi, per ogni t reale positivo, con

$$F_t = P(\tau \leq t | \mathcal{F}_t),$$

di modo che $1 - F_t = P(\tau > t | \mathcal{F}_t)$. Allora, come è noto dalla proposizione (5.21), F è una \mathcal{F} -submartingala limitata e non negativa. Quindi essa ammette una modificazione continua a destra e si può supporre di lavorare con quest'ultima. Allora si definisce processo di azzardo relativo a τ il processo stocastico Γ definito dalla formula:

$$1 - F_t = e^{\Gamma_t},$$

o equivalentemente dalla:

$$\Gamma_t = -\ln(1 - F_t)$$

per ogni $t > 0$.

Proposizione 5.63: (Formula di Itô per funzioni continue a destra a variazione finita.)

Siano date due funzioni continue $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Allora vale:

$$f(t)g(t) = f(0)g(0) + \int_0^t f(s^-)dg(s) + \int_0^t g(s^-)df(s) + [f, g](t) \quad (5.90)$$

³³ Un processo si dice di classe (D) se la famiglia di variabili aleatorie $\{X_\tau\}_\tau$, al variare di τ tempo di arresto finito, è uniformemente integrabile.

³⁴ La definizione di processo a variazione finita è la definizione (4.18).

dove

$$[f, g](t) = \sum_{0 < s \leq t} \Delta f(s) \Delta g(s), \quad \Delta f(s) \doteq f(s) - f(s^-). \quad (5.91)$$

6. MODELLI IBRIDI: IL MODELLO DI DUFFIE E LANDO (2001).

6.1 Premessa: giustificazione della scelta del modello.

Spesso, quando si vanno ad utilizzare i modelli nella pratica, può accadere che, per evitare gli inconvenienti propri di ogni particolare approccio, si tenta di operare prendendo spunto da ognuno di essi ed elaborando un nuovo modello 'ibrido'. Quello che si ottiene, è, di volta in volta, diverso tra i diversi analisti finanziari.

Allora, ciò che si vorrebbe attuare adesso, è un tentativo di coniugazione delle due grandi famiglie di modelli viste finora, così antitetiche tra loro, dei modelli strutturali e dei modelli in forma ridotta.

Come poter fare questo? E' possibile sviluppare un modello basato sui bilanci attivi di una società, che contempli allo stesso tempo fallimenti esogeni?

La risposta è affermativa, ed un esempio è fornito nell'articolo: *Term structures of credit spreads with incomplete accounting information*, di Darrell Duffie e David Lando (2001). Secondo quanto riportano gli autori, tale articolo costituisce il primo esempio, in letteratura, deputato allo scopo che qui ci si prefigge. Una prima constatazione del fatto che questo modello corrisponde ad una scelta mirata tra le tante proposte¹, si può avere dal ragionamento seguente.

Si è già avuto modo di osservare che i grandi traders e le agenzie di rating, nella maggior parte dei casi, non hanno accesso a tutti i bilanci dell'istituto finanziario che hanno sotto osservazione. Questo era uno dei motivi cardine per cui c'era bisogno di passare ad adottare i modelli in forma ridotta, essendo inutilizzabili e quindi inutili, invece, i modelli basati su una descrizione totale degli attivi della società che emette il titolo, quali sono i modelli strutturali.

Allora l'idea, tanto semplice quanto geniale, può essere quella di fornire una modellizzazione degli attivi partendo dal presupposto che l'osservatore abbia informazione incompleta riguardo ad essi; in altre parole, si modella il fatto che l'investitore non possa conoscere tutti i bilanci attivi della società emittente. Ed in effetti, in tale articolo, gli autori si prefiggono di studiare le implicazioni di un mercato ad informazione incompleta sulla struttura a termine dei tassi di credito sui bond societari.

Risulta poi evidente, all'intuizione, il fatto che, se non tutto è stato modellizzato come noto, allora nel modello in questione c'è ancora 'posto' per il caso, e per un evento di insolvenza imprevisto: quindi a livello intuitivo ci siamo. È

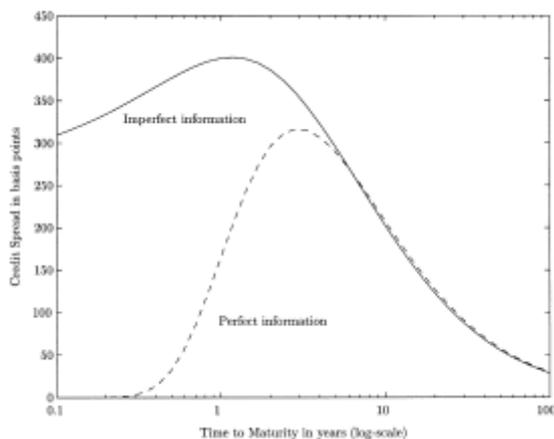
¹ Ad esempio: il modello multiperiodale (o multistato) di Jarrow-Lando-Turnbull (1997); il modello di Jarrow-Turnbull (1995), in cui il processo di fallimento è comparato ad un processo di cambio del tasso spot; il modello di Lando (1998), in cui il default è governato da un processo 'di Cox'; il modello di Schönbucher (1996), in cui si generalizza il modello Heath-Jarrow-Morton per la ricostruzione di fallimenti singoli e multipli.

questo ciò che si stava cercando. La prossima sezione, dà fondamento a questa intuizione, perché spiega il motivo per cui il nuovo modello è compatibile con un processo di intensità, e perché invece non lo era il modello di Zhou, e c'è stato proprio bisogno di questa nuova elaborazione.

6.2 Divario nel caso di mercato ad informazione incompleta.

Una conseguenza significativa dell'ipotesi di incompletezza dell'informazione riguarda la forma ed il valore dei divari dei tassi di interesse sui titoli. Nel caso di informazione completa (o perfetta), i differenziali di rendimento per i titoli 'che sopravvivono'² sono nulli alla scadenza del titolo stesso, poiché esso alla scadenza si estingue, e³ sono relativamente bassi, cioè vicini allo zero, man mano che ci si avvicina alla scadenza del titolo. All'inizio della sottoscrizione del titolo, quando non si conosce ancora l'evoluzione dei mercati, non vi è praticamente distinzione tra i titoli che sopravviveranno ed i titoli che falliranno, perché altrimenti questi ultimi non si sarebbero proprio sottoscritti sapendo di non fare un affare. Si può osservare questo andamento 'a campana' nel grafico tratteggiato riportato in figura (6.1).

Fig. 6.1: Andamento (espresso in punti base (punti percentuali)) del divario tra tassi di credito, in funzione della distanza temporale dalla scadenza, nei casi di informazione completa ed incompleta.



Nella realtà, questo andamento dei grafici è raramente riscontrato. Quello che comunemente si verifica è un andamento più somigliante a quello disegnato in figura (6.1) con tratto continuo; esso rappresenta il divario tra tassi di credito nel caso di informazione incompleta. Tale divario è strettamente positivo persino alla scadenza del titolo e man mano che ci si avvicina temporalmente alla scadenza stessa. Il motivo è che gli investitori non sanno se il default è vicino o meno, ed a quale livello degli attivi viene dichiarato il default: pertanto quest'ultimo può verificarsi allo stesso modo in un qualsiasi momento, anche in

² Cioè i titoli che non sono ancora falliti.

³ Si è tentati di dire, 'per continuità'.

prossimità della scadenza del titolo. È come il caso di passeggeri a bordo di un mezzo di trasporto che non si sa quando frenerà, e se frenerà in modo brusco, dovuto ad una causa esterna, od in modo progressivo prevedendo di fermarsi. Questo andamento in caso di informazione incompleta rappresenta un'ulteriore conferma del fatto che l'incertezza ed il rischio inneschino lo spread.

Si può rilevare poi, dal grafico, come la probabilità di insolvenza all'avvicinarsi della scadenza, come ci si può aspettare, si abbassi di un po', perchè vi è meno tempo a disposizione per il verificarsi dell'insolvenza; essa è comunque sempre positiva.

Da questo studio del grafico infine si può dedurre un criterio pratico di trasparenza di chi emette un titolo quando un investitore lo debba acquistare: se il grafico dell'andamento del divario, che viene prefigurato all'acquirente dalla società emittente, ha forma come quella tratteggiata, allora questo è poco realistico e ci si può aspettare che vi sia qualcosa che la società vuole tenere nascosto; se viceversa esso ha forma come quella della linea continua, questo indica già uno scenario più probabile delle cose, e quindi, potenzialmente, una maggiore trasparenza della società.

Se si pensa ai processi in forma ridotta, si può fare caso al fatto che l'esistenza della intensità di default è compatibile con una brusca caduta dei prezzi dei bond nel momento dell'insolvenza. Infatti, mentre fino ad un istante prima del default il prezzo è governato dal processo di intensità che è strettamente positivo, nell'istante preciso di default $t = \tau_d$ il prezzo equo di recupero all'insolvenza è nullo (dalla formula (5.71)), ed allora, in conseguenza della formula (5.73), il prezzo equo dell'obbligazione si può abbassare di molto. Questo si apprezza bene ancora una volta dal grafico rappresentato in figura (6.1): nel caso di informazione incompleta, se l'evento di insolvenza non si è ancora verificato, anche se vicinissimi alla scadenza del titolo, il divario è oltre i 300 punti base, e visto che alla scadenza del titolo il prezzo del titolo stesso è nullo, la caduta alla scadenza è dagli oltre trecento punti base a zero.

Al contrario, si vede che l'andamento a zero in prossimità della scadenza è molto meno discontinuo nel caso di informazione completa. Limitare piccoli divari di tasso quando si è lontani da zero, come è in quest'ultimo caso, è possibile in un modello strutturale, anche in un modello che preveda dei salti quale è quello di Zhou. Tuttavia, a meno che l'unica variazione del valore degli attivi non sia quella che avviene attraverso i salti, tale approccio non è compatibile con la presenza di un processo stocastico di intensità di default. Questo concetto viene chiarito meglio nella proposizione seguente, con cui si conclude la presente sezione.

Proposizione 6.3: Il processo di valore degli attivi V del modello di Zhou, definito dalla formula (4.22), non è, in generale, compatibile con un processo di intensità di default.

dim.

Il modello strutturale di Zhou è un modello ad informazione completa, perché, come in tutti i modelli strutturali, si assume che la filtrazione rappresenti il flusso di tutte le informazioni disponibili dal mercato. Pertanto, il tempo aleatorio di default, definito dalla espressione (5.1), è un tempo di arresto rispetto alla

filtrazione data sullo spazio probabilizzato di partenza. Affinché ad un tempo di arresto sia associata un'intensità, occorre che esso sia totalmente inaccessibile⁴. Infatti nei modelli in forma ridotta basati sul processo di intensità, il default avviene in modo del tutto improvviso ed imprevedibile, ed in particolare allora non può esistere alcuna sequenza di tempi aleatori che lo 'annuncino', cioè lo approssimo, dal basso, in probabilità. Invece, nel modello di Zhou, accade la seguente cosa. Il primo istante τ di passaggio del processo di valore V sotto il valore di soglia v prefissato⁵

$$\tau = \inf\{V_t \leq v\},$$

potrebbe coincidere con l'istante di un salto del processo di valore, ma anche con un generico istante di attraversamento continuo. Ma allora, se si pone, per ogni intero positivo n :

$$\tau_n \doteq \inf\{t > 0 : V_t \leq v + \frac{1}{n}\},$$

allora la probabilità che la successione $\{\tau_n\}_{n>0}$ converga a τ è strettamente positiva, perché il processo di valore è continuo a destra. Allora τ non è totalmente inaccessibile, e quindi non può avere associata un'intensità.

6.4 Ipotesi e problema della liquidazione ottimale.

6.4.1 Ambiente di lavoro.

Si suppone di lavorare in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{F}, P)$, sul quale è definito un moto browniano standard $W = (W_t)_{t \geq 0}$. Il processo V di valore degli attivi è definito da:

$$V_t \doteq e^{Z(t)}, \quad (6.1)$$

dove

$$Z_t = Z_0 + mt + \sigma W_t$$

con $\sigma > 0$ che rappresenta la volatilità ed m parametro reale che determina, nel seguente modo, il tasso atteso μ di crescita dell'attivo:

$$\mu = \frac{1}{t} \log \left(E \left[\frac{V_t}{V_0} \right] \right) = m + \frac{\sigma^2}{2}.$$

In prima ipotesi si suppone che il titolo sia gestito da proprietari di capitale che hanno informazione completa sui bilanci dell'azienda; vale a dire che la filtrazione \mathcal{F} è quella generata dal processo V .

Si assume che l'azienda generi flussi di cassa proporzionali al valore V , cioè in un fissato istante t tale spesa è data da δV_t per una certa costante δ positiva. Gli agenti di mercato operano in un contesto risk-neutral, e scontano i flussi di

⁴ La definizione di tempo di arresto totalmente inaccessibile è la definizione (4.32).

⁵ Si ricorda che, nei modelli strutturali, l'istante di default è modellizzato da questo primo istante in cui il valore tocca la soglia minima.

cassa ad un tasso di interesse di mercato costante $r > \mu$ ⁶.

In definitiva, si assume che, nell'istante t , il valore atteso del flusso di cassa, condizionale rispetto al valore attuale dei bilanci, sia dato da:

$$E \left[\int_t^{+\infty} e^{-r(s-t)} \delta V_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{\delta V_t}{r - \mu}. \quad (6.2)$$

6.4.2 Ottimizzazione del patrimonio netto.

Si suppone che l'unica scelta possibile per i proprietari della obbligazione⁷ sia quando liquidare, cioè pagare, il titolo.

Definizione 6.5: Si definisce politica di liquidazione un tempo di arresto:

$$\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty]. \quad (6.3)$$

Si sceglie poi un valore di liquidazione, che per semplicità viene assunto costante e pari a $\frac{\delta V_t}{r - \mu}$. Per chi ha emesso il titolo di debito, che d'ora in poi per brevità verrà indicato come azionista, il profitto del flusso di cassa, all'istante iniziale (tempo 0), proviene dalla liquidità ottenuta dalla vendita del titolo. Dopo questa distribuzione di liquidità, una volta scelta una politica di liquidazione e un tasso di interesse fisso per le cedole⁸, il valore iniziale del patrimonio netto dell'obbligazione vale:

$$F(V_0, C, \tau) = E \left[\int_0^\tau e^{-rt} (\delta V_t + (\vartheta - 1)C) dt \right], \quad (6.4)$$

dove $\vartheta \in (0, 1)$ è un tasso di spesa costante⁹.

Allora gli azionisti dovranno andare a scegliere la politica di liquidazione ottimale risolvendo il problema di ottimizzazione dato da:

$$S_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} F(V_0, C, \tau), \quad (6.5)$$

dove \mathcal{T} è l'insieme dei tempi di arresto rispetto alla filtrazione \mathcal{F} .

6.5.1 Soluzione del problema di ottimizzazione.

Quello che si dimostra, è la seguente cosa. Il valore ottimale del patrimonio netto, che al tempo t si assume essere uguale a

$$S_t = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}} E \left[\int_0^\tau e^{-r(s-t)} (\delta V_s + (\vartheta - 1)C) ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (6.6)$$

⁶ Qui si vuole dire che il tasso applicato per il calcolo dello sconto è costante. Lo sconto è la differenza tra il rimborso finale e il prezzo di acquisto del titolo; esso rappresenta la remunerazione per aver anticipato al venditore la somma da questi incassata. Nella restituzione anticipata di un prestito, lo sconto corrisponde ad una quota, in genere percentuale, sugli interessi che si sarebbero dovuti ancora pagare se non fosse intervenuta l'anticipazione del saldo δV_t .

⁷ Proprietario è il debitore del titolo, cioè chi lo emette.

⁸ Detto anche tasso di interesse nominale.

⁹ Il tasso di spesa è una sorta di percentuale fissa 'di commissione' sul servizio finanziario

è dato dalla soluzione:

$$S_t = w(V_t) \quad (6.7)$$

di una equazione differenziale stocastica di tipo Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$w'(v)\mu v + \frac{1}{2}w''(v)\sigma^2 v^2 - rw(v) = (1 - \vartheta)C - \delta v, \quad \text{per } v > V_B, \quad (6.8)$$

dove V_B è il valore di soglia degli attivi che, precedentemente nella trattazione, si era indicato con v . Adesso qui v gioca il ruolo del parametro che rappresenta il processo di valore V . L'equazione, quindi, si chiede che sia verificata finché il bilancio degli attivi ha valore totale strettamente superiore al valore di soglia V_B .

Le condizioni al bordo che si danno, sono invece:

$$\begin{cases} w(v) = 0, & v \leq V_B \\ w'(V_B) = 0. \end{cases}$$

Esse corrispondono all'intuizione che non sia più ottimale continuare a non liquidare il credito una volta che il patrimonio netto ha raggiunto il valore della liquidazione¹⁰

Per la precisione, si dimostra la seguente proposizione:

Proposizione 6.6: Si supponga $r > \mu$. Si definiscano:

$$v_B(C) \doteq \frac{(1 - \vartheta)C\gamma(r - \mu)}{r(1 + \gamma)\delta}, \quad (6.9)$$

dove

$$\gamma \doteq \frac{m + \sqrt{m^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}. \quad (6.10)$$

e

$$d(v, C) \doteq \left(\frac{v}{v_B(C)}\right)^{-\gamma} \frac{(1 - \vartheta)\delta v_B(C)}{r - \mu} + \frac{C}{r} \left[1 - \left(\frac{v}{v_B(C)}\right)^{-\gamma}\right] \quad (6.11)$$

Allora il problema di ottimizzazione (6.5) è risolto dal primo istante $\tau(v_B(C))$ in cui il processo di valore V diventa minore o uguale di $v_B(C)$. I valori che da questa soluzione si ricavano per il valore iniziale del patrimonio netto e del totale del debito, rispettivamente, sono dati da $w(V_0)$ e $d(V_0, C)$, dove la soluzione w dell'equazione differenziale stocastica (6.5.1) è data da $w(v) = 0$ per $v \leq v_B(C)$, e da:

$$w(v) = \frac{\delta v}{r - \mu} - \left(\frac{v}{v_B(C)}\right)^{-\gamma} \frac{\delta v_B(C)}{r - \mu} + \frac{(\vartheta - 1)C}{r} \left[1 - \left(\frac{v}{v_B(C)}\right)^{-\gamma}\right] \quad (6.12)$$

per $v > v_B(C)$.

dim.

¹⁰ L'ultima condizione, invece, è nota nella modellizzazione del valore di opzioni di tipo Americano con il nome di smooth-pasting condition.

Si vorrebbe verificare la proprietà che il tempo di arresto $\tau(v_B(C))$ sia una politica ottimale, cioè la (6.5):

$$S_0 = F(V_0, C, \tau(v_B(C))) \quad (6.13)$$

dove $S_0 = w(0)$. Si definisce allora un nuovo processo stocastico q , che sia ‘funzione di v ’, definito, per ogni t , da:

$$q_t = e^{-rt}w(V_t) + \int_0^t e^{-rs}(\delta V_s - (1 - \vartheta)C)ds. \quad (6.14)$$

Allora, per $v \leq V_B = v_B(C)$, si ha che q è una supermartingala uniformemente integrabile. Questo segue dal fatto che $w(v) = 0$ e $\delta v - (1 - \vartheta)C \leq 0$, grazie alla formula di Itô. Infatti, il processo q è \mathcal{F} -adattato ed integrabile. Inoltre, per $v \leq V_B = v_B(C)$, dalla condizione al bordo segue che $w(v) = 0$, ed allora la formula di Itô applicata a $w(V_t)$ diventa:

$$w(V_t) = w(V_0) + \int_0^t \mathbb{I}_{\{V_s > V_B\}} [w'(V_s)\mu V_s + \frac{1}{2}w''(V_s)\sigma^2 V_s^2]ds + \int_0^t w'(V_s)\sigma V_s dB_s. \quad (6.15)$$

Poiché $w'(v)$ è limitato, l’ultimo addendo di questa formula è una martingala, e nel caso di interesse, per $v \leq V_B = v_B(C)$, il secondo addendo ‘scompare’. Inoltre, dal momento che $\delta v - (1 - \vartheta)C \leq 0$ (questo segue dalla equazione (6.5.1)), nella formula (6.14) il secondo addendo è decrescente rispetto al tempo, perché ha derivata rispetto a t che è minore o uguale di zero, pertanto:

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^t e^{-rs}(\delta V_s - (1 - \vartheta)C)ds | \mathcal{F}_s\right] &\leq E\left[\int_0^s e^{-rs}(\delta V_s - (1 - \vartheta)C)ds | \mathcal{F}_s\right] \quad (6.16) \\ &= \int_0^s e^{-rs}(\delta V_s - (1 - \vartheta)C)ds, \end{aligned}$$

e questo Allora, per ogni possibile tempo di arresto τ , si ha $q_0 \geq E[q_\tau]$ e quindi:

$$E\left[\int_0^\tau e^{-rs}(\delta V_s - (1 - \vartheta)C)ds\right] \leq w(V_0) - E[e^{-rt}w(V_\tau)]. \quad (6.17)$$

Poiché w è non negativa, $w(V_0) \geq F(V_0, C, \tau)$, e il tempo ottimale $\tau = \tau(V_B)$ è quello che dà $w(V_\tau) = 0$ e l’uguaglianza nella (6.17), il che conferma l’ottimalità e quindi la tesi. \square

Osservazione 6.7: Da questa proposizione si può già iniziare ad osservare come tale modello sia ‘figlio’ dei modelli strutturali e dei modelli in forma ridotta: per adesso, si ha che un tempo aleatorio costituisce la politica di liquidazione ottimale, ma esso è anche un tempo di arresto e viene caratterizzato in base al raggiungimento di una certa soglia minima del valore degli attivi.

6.8 Il mercato delle obbligazioni ad informazione incompleta.

6.8.1 Modellizzazione della situazione.

Per vedere come, nel mercato secondario, si possa accertare il rischio di credito del titolo e dare una valutazione sui bond, si presenta il seguente ragionamento. Dopo l'emissione, chi investe in bond non è pienamente informato dello stato di bilancio del titolo. Essi sono a conoscenza della precedente proposizione, cioè possono sapere che, da parte di chi ha emesso il titolo di debito, il voler ottimizzare il patrimonio forzerà la società a liquidarlo quando il valore di bilancio degli attivi scende al di sotto di una certa soglia V_B , ma non può essere a conoscenza del processo di valore V direttamente. Si suppone pertanto che gli investitori possano ricevere informazioni parziali a determinati istanti temporali ordinati $t_i < t_{i+1}$ per $i \in \mathbb{N}$. Si assume che tali informazioni parziali, in un certo istante t dei tempi osservabili t_i , consistano nel riportare un'informazione disturbata¹¹ \hat{V}_t del vero valore degli attivi che è dato da V_t . Si assume che sia V_t che \hat{V}_t abbiano legge congiunta log-normale. Inoltre, senza perdita di generalità¹², si suppone che il logaritmo del processo di valore comunicato all'osservatore, che per comodità viene rinominato Y , si possa scrivere come:

$$Y_t \doteq \log \hat{V}_t = Z(t) + U(t) \quad (6.18)$$

dove $U(t)$ ha legge normale ed è indipendente da $Z(t)$.

Gli osservatori, oltre a conoscere le informazioni 'distorte' negli istanti di osservazione, possono sapere in qualsiasi momento¹³ se è stato liquidato il titolo o meno. In definitiva la filtrazione che rappresenta l'informazione potenzialmente conoscibile per un osservatore esterno alla società emittente è quella generata da:

$$\mathcal{H}_t = \sigma(\{Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_n), \mathbb{I}_{\{\tau(v_B(C)) \leq s\}} : 0 \leq s \leq t\}), \quad (6.19)$$

dove n è il più grande numero naturale tale che $t_n \leq t$ $\tau(v_B(C))$ è l'istante di liquidazione ottimale.

Per semplicità si assume che il patrimonio netto non possa essere commercializzato sui mercati, in modo da non avere problemi sulla filtrazione \mathcal{H} derivanti da una possibile asimmetria delle informazioni di quest'ultimo caso¹⁴. Sempre per semplicità, si assume che il tempo di possibile osservazione sia uno solo $t \doteq t_1$, $Y \doteq Y_1$ ¹⁵.

¹¹ Cioè di poco perturbata.

¹² L'ipotesi di indipendenza dell'addendo U dall'addendo Z che si fa sulla decomposizione seguente di $\log \hat{V}_t$ non è restrittiva sotto l'ipotesi di legge (congiunta) del blocco (V_t, \hat{V}_t) log-normale.

¹³ Anche se gli istanti di possibile osservazione sono discreti, si assume *a priori*, cioè prima della scelta dei possibili istanti di osservazione, che l'istante di liquidazione sia un avvenimento conoscibile anche da chi non è l'azionista che liquida il denaro.

¹⁴ Questa assunzione è poco realistica: in generale la liquidità ricevuta all'istante di vendita di un titolo serve proprio non ad arricchire la società ma a permetterne il reinvestimento nel mercato.

¹⁵ Per la generalizzazione al caso di multi-osservazione, si può consultare l'articolo *Term Structure of Credit Spread* di Duffie e Lando, 2001.

6.8.2 Calcolo della distribuzione condizionale rispetto alla filtrazione parziale.

Nelle ipotesi appena viste, ciò che si vuole fare adesso¹⁶ è calcolare la distribuzione condizionale di probabilità di V_t data la σ -algebra \mathcal{F}_t . Il metodo seguito¹⁷, procede attraverso un passaggio intermedio in cui si calcola la probabilità condizionale rispetto a Z , e non condizionata rispetto a tutto Y direttamente, che il minimo di Z_s per s compreso fra 0 e t sia strettamente positivo, sotto l'ipotesi che al tempo 0 Z_0 sia uguale ad un certo valore z_0 , e che al tempo t invece Z_t valga un certo valore x .

In formule, si cerca la probabilità $\psi(z_0, x, \sigma\sqrt{t})$ che

$$\min\{Z_s : 0 \leq s \leq t\} > 0.$$

Nella notazione della probabilità ψ , si può osservare che è presente la dipendenza dalla volatilità σ ¹⁸ attraverso il parametro $k = \sigma\sqrt{t}$, ma non è presente la dipendenza dal drift m .

La formula che si ottiene per questa probabilità ψ è la seguente:

$$\psi(z, x, k) = 1 - \exp\left(-\frac{2zx}{k^2}\right). \quad (6.20)$$

Poi, una volta noto il valore z_0 , e fissato $Z_0 = z_0$, si calcola la densità di probabilità b , condizionata rispetto all'osservazione:

$$Y_t = Z(t) + U(t),$$

del processo Z_t 'ucciso' al tempo di arresto τ in cui esso scende al di sotto di una certa soglia \underline{v} (che dipenderà dal valore di soglia prefissato desiderato su tutta l'osservazione distorta Y_t del processo V_t):

$$\tau \doteq \inf\{t > 0 : Z_t \leq \underline{v}\}.$$

Si indichi quest'ultima densità di probabilità appena definita con

$$b(\cdot|Y_t, z_0, t).$$

Allora si ha:

$$P(\tau > t|Y_t) = \int_{\underline{v}}^{+\infty} b(z|Y_t, z_0, t) dz, \quad (6.21)$$

ed infine, grazie alla formula di Bayes, si calcola la densità 'totale' cercata in partenza:

$$g(x|y, z_0, t) = \frac{b(x|y, z_0, t)}{\int_{\underline{v}}^{+\infty} b(z|Y_t, z_0, t) dz}. \quad (6.22)$$

L'espressione esplicita per $g(x|y, z_0, t)$ si può trovare nell'articolo sopra citato.

¹⁶ In vista di calcolare le probabilità condizionale rispetto alla σ -algebra delle 'informazioni distorte'.

¹⁷ Dovuto a Michael Harrison. Per ulteriori approfondimenti si consulti l'articolo *Term Structure of Credit Spread* di Duffie e Lando, 2001.

¹⁸ La volatilità, si ricorda, è un parametro che dà una indicazione della rapidità di cambiamento dei prezzi.

6.8.3 Calcolo della probabilità condizionale di sopravvivenza rispetto alla filtrazione parziale.

Dall'espressione trovata per la densità g , si vuole calcolare la probabilità di default, o equivalentemente, la probabilità di sopravvivenza del titolo $p(s, t) = P(\tau > t | \mathcal{H}_s)$ fino a qualche istante futuro $t > s$ ¹⁹.

Per $s < \tau$ si ha:

$$p(s, t) = \int_{\underline{v}}^{+\infty} (1 - (\pi(t - s, x - \underline{v})))g(x | Y_s, z_0, s)dx, \quad (6.23)$$

dove $\pi(s, x)$ denota la probabilità, che nota, che il primo passaggio di un moto browniano con drift μ e volatilità σ scenda sotto un livello minore di zero, a partire da un valore $x > 0$, entro l'istante temporale s .

6.9 Introduzione nel modello dell'intensità di default.

Dalla (6.23), essendo la probabilità di insolvenza espressa come integrale temporale, si vede che, nel modello, finora, se h è una costante positiva che tende a zero, allora nell'arco di h unità temporali questa probabilità va a zero; rispetto all'informazione che è possibile avere, non cambia questo andamento ma cambia il tasso con cui essa va a zero. Per esempio, nel caso di informazione perfetta, il processo Z è sicuramente adattato alla filtrazione totale \mathcal{F} , e se $\tau > t$ allora:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(\tau \leq t + h | \mathcal{F}_t)}{h} = \frac{\pi(h, Z_t - \underline{v})}{h} = 0 \quad q.c. \quad (6.24)$$

Si sarebbe tentati di concludere che così è anche nel caso di informazione incompleta, ma non è così. Esiste un limite ed è strettamente positivo, ed esso coincide, di fatto, con il processo λ di intensità del tempo τ , cioè il processo progressivamente misurabile, non negativo, associato al tempo di arresto τ rispetto alla filtrazione \mathcal{H} , che soddisfa

$$\int_0^t \lambda_s ds < +\infty \quad q.c.,$$

per tutti i tempi $t \geq 0$ tali che

$$\mathbb{I}_{\{\tau \leq t\}} - \int_0^{t \wedge \tau} \lambda_s ds < +\infty \quad q.c.,$$

sia una martingala²⁰.

Allora l'idea di collegamento tra i due approcci strutturale-forma ridotta è la seguente: dallo studio delle sezioni precedenti, si evince che per ogni coppia (ω, t) tale che $0 < t < \tau(\omega)$, la distribuzione condizionale di Z_t rispetto ad \mathcal{H}_t

¹⁹ La probabilità di insolvenza è 1- la probabilità di sopravvivenza.

²⁰ Si è già visto che l'intensità rappresenta una sorta di tasso locale di insolvenza, in quanto

$$P(\tau \in (t, t + dt] | \mathcal{H}_t) = \lambda_t dt.$$

ha una densità condizionale $f(t, \cdot, \omega)$ che è differenziabile con continuità; essa è nulla al bordo $\underline{v} = 0$, ed ha derivata destra $f_x(t, \underline{v}, \omega)$ che esiste ed è non nulla. Quello che si dimostra è la proposizione seguente:

Proposizione 6.10: Si definisca un processo stocastico λ che sia dato da

$$\begin{cases} \lambda_t = 0 & \text{per } t > \tau \\ \lambda_t(\omega) = \frac{1}{2}\sigma^2 f_x(t, \underline{v}, \omega) & \text{per } 0 < t \leq \tau. \end{cases}$$

Allora λ è un processo di intensità di τ .

La dimostrazione di questa proposizione è riportata nell'articolo sopra menzionato. Lo scopo di unire i due tipi di modelli è stato pienamente raggiunto ed in modo efficace per gli scopi prefissati. Con questo, si conclude la trattazione.

7. CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI.

A termine del presente lavoro, lo scopo che ci si era prefissato, ossia lo studio dei modelli matematici per valutare le probabilità di insolvenza dei titoli a reddito fisso emessi da società soggette a fallimento, è stato pienamente raggiunto, sebbene non si può dire di certo che sia del tutto completato, a causa delle enormi possibilità e soluzioni che si possono trovare, e a causa della enorme difficoltà, anche mediante l'aiuto della scienza matematica, che è la scienza del calcolo, del rigore logico, e delle soluzioni teoriche per eccellenza, di fornire metodi di valutazione attendibili e completi.

Man mano che si è proceduto nella stesura della tesi, ci si rendeva conto che la rapidità dei mutamenti sociali è una delle variabili che va ad aggiungersi a quelle più strettamente economiche, e che i modelli classici delle economie maggiormente sviluppate non sono esaustivi per prevedere i possibili sviluppi di una economia ormai globalizzata.

Le stesse agenzie di rating, come sopra si diceva, sono costrette a cambiare le classificazioni degli Stati e delle società emittenti i titoli con grande rapidità, allarmate a volta anche da mutamenti sociali degli stati, come ad esempio una marcata instabilità politica che non riesce ad assicurare un necessario rigore della politica economica dello Stato stesso.

In ogni caso, occorre iniziare a porsi il problema dell'elaborazione di altre tipologie di modelli, come quelle maggiormente utilizzate. Si spera che la strada logica della presente trattazione sia di valido aiuto ed interesse futuro in tale senso.

Fig. 7.1: Modelli di valutazione.

Fonte: La valutazione delle attività creditizie, di Charles Smithson e Gene D. Guill, WWW.RISK.NET PRIMAVERA 2004 RISK ITALIA pp. 37-39.

C. Modelli commerciali per la valutazione delle attività creditizie							
Fornitore	Nome del modello	Attività valutate	Approccio alla valutazione del flusso di cassa a rischio di default	Opzioni implicite valutate dal modello			
				Term-out	Rimborso anticipato	Draw option	Re-pricing
Algorithmics	Credit eValuator	Term loans, crediti rotativi, altri strumenti di credito ¹	Modello ibrido, multi-state del tipo Jarrow-Lando-Turnbull	✓	✓	✓	✓
KMV di Moody's	CreditMark	Term loans, crediti rotativi, e altri strumenti di credito	Modello strutturale – usa le EDF di MKMV basate sul mercato azionario, EDF di RiskCalc o probabilità di insolvenza implicite negli spread. Inserito in un quadro di valutazione che supporta l'uso dei prezzi di mercato dei prestiti secondari	✓	✓	✓	✓
Interval	Corporate Loan Pricing Model	Term loans e credito rotativo	Modello a forma ridotta – simulazione della migrazione del rating e algoritmo di sconto arbitrage free per valutare i flussi di cassa (contingenti)	✓ ²	✓		

1 Lettera di credito (garanzia), linee multi-option (qualsiasi combinazione di prestito a termine, credito rotativo, lettera di credito, obbligazioni, CDS)
2 Accordi di credito rotativo che si trasformano in un prestito a termine a una data predefinita.

Fig. 7.2: Modelli di valutazione.

Fonte: La valutazione delle attività creditizie, di Charles Smithson e Gene D. Guill, WWW.RISK.NET PRIMAVERA 2004 RISK ITALIA pp. 37-39.

A. Utilizzo dei metodi di valutazione		
Valutazione delle attività di credito con	% delle linee di credito	% del nozionale
Prezzi interni dei prestiti secondari	2,6	5,0
Prezzi dei prestiti secondari forniti da terzi	1,7	2,7
Curve degli spread CDS interne	16,3	40,2
Curve degli spread CDS fornite da terzi	2,0	5,5
Curve delle obbligazioni	2,3	3,7
Modelli di valutazione	75,1	43,0

BIBLIOGRAFIA

- [1]
- [2] Richard F. Bass. *Stochastic processes*, volume 33 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [3] Edward A. Bender. *An introduction to mathematical modeling*. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1978. A Wiley-Interscience Publication.
- [4] Tomasz R. Bielecki, Monique Jeanblanc, and Marek Rutkowski. Modeling and valuation of credit risk. In *Stochastic methods in finance*, volume 1856 of *Lecture Notes in Math.*, pages 27–126. Springer, Berlin, 2004.
- [5] Tomasz R. Bielecki, Monique Jeanblanc, and Marek Rutkowski. Pricing and trading credit default swaps in a hazard process model. *Ann. Appl. Probab.*, 18(6):2495–2529, 2008.
- [6] Tomasz R. Bielecki, Monique Jeanblanc, and Marek Rutkowski. Hedging of a credit default swaption in the CIR default intensity model. *Finance Stoch.*, 15(3):541–572, 2011.
- [7] Tomasz R. Bielecki and Marek Rutkowski. *Credit risk: modelling, valuation and hedging*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [8] Freddy Delbaen and Walter Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Ann.*, 300(3):463–520, 1994.
- [9] Darrell Duffie. *Stochastic calculus for finance* [book review of no 2049045; mr2057928]. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 46(1):165–174, 2009.
- [10] Darrell Duffie and David Lando. Term structures of credit spreads with incomplete accounting information. *Econometrica*, 69(3):633–664, 2001.
- [11] Darrell Duffie and Jun Pan. Analytical value-at-risk with jumps and credit risk. *Finance Stoch.*, 5(2):155–180, 2001.
- [12] Darrell Duffie, Jun Pan, and Kenneth Singleton. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68(6):1343–1376, 2000.
- [13] Damir Filipović. *Term-structure models*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2009. A graduate course.

- [14] F. Flandoli. *Dispense di Istituzioni di Probabilità*. Università di Pisa, 2012.
- [15] Monique Jeanblanc, Marc Yor, and Marc Chesney. *Mathematical methods for financial markets*. Springer Finance. Springer-Verlag London Ltd., London, 2009.
- [16] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [17] Shigeo Kusuoka and Takenobu Nakashima. A remark on credit risk models and copula. In *Advances in mathematical economics. Volume 16*, volume 16 of *Adv. Math. Econ.*, pages 53–84. Springer, Tokyo, 2012.
- [18] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, second edition, 2008.
- [19] David Lando. Modelling bonds and derivatives with default risk. In *Mathematics of derivative securities (Cambridge, 1995)*, volume 15 of *Publ. Newton Inst.*, pages 369–393. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [20] G. Letta. *Probabilità elementare*. Zanichelli, Pisa.
- [21] Robert C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell J. Econom. and Management Sci.*, 4:141–183, 1973.
- [22] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale methods in financial modelling*, volume 36 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [23] Mario Onorato and Edward I. Altman. An integrated pricing model for defaultable loans and bonds. *European J. Oper. Res.*, 163(1):65–82, 2005.
- [24] Philip E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Second edition. Version 2.1, Corrected third printing.
- [25] Bernd Schmid. *Pricing credit linked financial instruments*, volume 516 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Theory and empirical evidence.

Ringraziamenti.

Desidero ringraziare il Dipartimento di Matematica dell' Università di Pisa per le enormi possibilità che esso offre agli studenti, in termini di fiducia, di crescita, di disponibilità delle risorse e di tutto il corpo docente ed amministrativo.

Desidero ringraziare i miei genitori, per l'immensa fiducia in me riposta, e scusandomi con loro se non sono sempre stata come avrebbero desiderato. Ringrazio in particolar modo mia madre per i consigli fornitimi nella stesura della tesi. Ringrazio mia sorella per aver sopportato la mia assenza ed il sostegno mai mancato. Ringrazio mia zia per il supporto emotivo ed economico, ed il mio fidanzato per la pazienza mostratami.

Ringrazio tutti i miei Professori per avermi fatto diventare quella che sono, in particolar modo ringrazio il mio relatore Prof. Maurizio Pratelli, per aver costantemente seguito il mio lavoro di studio e stesura della tesi e della presentazione; ringrazio il mio controrelatore Prof. Franco Flandoli, per i suoi insegnamenti e per la stima dimostratami; ringrazio la mia relatrice di tesi triennale Prof. Francesca Acquistapace per quanto fatto in passato e la lettura della presente tesi, ed il Prof. Sergio Steffè per l'assistenza hardware e software fornitami quando ne avevo bisogno.

Ringrazio tutti i miei colleghi, in particolar modo Milena Rucci, per i preziosi suggerimenti in fase di tesi, e Valeria De Mattei, per i continui scambi di idee durante i corsi frequentati.

Ringrazio altresì la mia collega ed amica Daniela Quaranta, per il supporto di latex ed umano, Oscar Papini per la sua mai mancata disponibilità ed in particolar modo per la preparazione della presentazione in beamer, ed Irene Barbensi, Cristiano Ricci, Leonardo Robol e tutti coloro che mi hanno aiutato quando necessario con le diverse strategie informatiche.