Acta Sci. Math., 54 (1990), 367—377

Sur l'unicité de la décomposition de Kato généralisée

MOSTAFA MBEKHTA

1. Introduction et préliminaires

Pour un opérateur (linéaire) fermé A dans un espace de Hilbert H on désignera par $D(A)$ le domaine, $R(A)$ l'image, $N(A)$ le noyau. Pour un couple (M, N) de sous-espaces fermés de $H, M+N$ désignera leur somme vectorielle; la notation $M\oplus N$ sera réservée au cas où, en plus, $M\cap N=\{0\}$. La restriction de A à M sera notée $A|M$.

T. KATO [1, Théorème 4] a montré que si A est *semi-Fredholm,* il existe (M, N) tel que

(a) $H=M\oplus N$,

(b) $A(M\cap D(A))\subseteqq M$ et, en posant $A_0=A|M$, $R(A_0)$ est fermé et $N(A_0^n)\subseteqq R(A_0)$ pour $\forall n\geqq 0$,

(c) $A(N)\subseteqq N\subseteqq D(A)$ et $A|N$ est *nilpotent* de degré d fini.

Cette décomposition de H est appelée *décomposition de Kato* associée à A. Kato a aussi remarqué que pour A *semi-Fredholm* telle décomposition de H est unique à un isomorphisme près.

J. P. LABROUSSE [2] a caractérisé tous les opérateurs qui admettent telle décomposition; ces opérateurs sont appelés *quasi-Fredholm.*

L'auteur a étudié [5] les opérateurs A qui admettent une *décomposition du type de Kato* où la condition (c) est remplacée par:

(c′) $$A(N)\subseteqq N\subseteqq D(A),\quad \text{et}\quad A|N \text{ est } \textit{quasi-nilpotent}.$$

Dans ce cas la décomposition (M, N) est appelée *décomposition de Kato généralisée* (D.K.G.) associée à A, et les opérateurs qui admettent telles décompositions sont appelés *pseudo-Fredholm.*

Si l'on peut choisir $M=H$ $(N=\{0\})$, A est dit *régulier* (voir [4], [6]).

Reçu le 4 novembre, 1987 et, en forme revue, le 2 janvier, 1989.

Pour des exemples et propriétés des opérateurs *pseudo-Fredholm* voir [5]. Disons toutefois que si l'on note par Φ, $s\Phi$, $q\Phi$, $p\Phi$ les ensembles des opérateurs de *Fredholm, semi-Fredholm, quasi-Fredholm* et *pseudo-Fredholm,* selon les cas, chacun de ces ensembles est strictement contenu dans le suivant. Remarquons aussi que l'ensemble des opérateurs *quasi-nilpotents* est inclus strictement dans l'ensemble des opérateurs *pseudo-Fredholm.*

Dans la suite on notera $K(A)$ le *coeur analytique* de A défini par:

$$K(A) = \{u \in H;\ \exists a > 0,\ \forall n > 0\ \exists v_n \in D(A) \text{ tels que } (1)\ v_0 = u \text{ et } Av_{n+1} = v_n,\ (2)\ \|v_n\| \leqq a^n \|u\|\ \forall n \geqq 0\}.$$

On notera aussi $H_0(A)$ la *partie quasi-nilpotente* de A, définie par:

$$H_0(A) = \{u \in D^\infty(A);\ \lim_{n\to\infty} \|A^n u\|^{1/n} = 0\} \quad \text{où} \quad D^\infty(A) = \bigcap_{n\geqq 0} D(A^n).$$

Remarque 1.1 ([3], [4]).

(a) $K(A)$ et $H_0(A)$ sont des sous-espaces de H non nécessairement fermés.

(b) $A(K(A)\cap D(A)) = K(A)$ et $A(H_0(A)) \subseteqq H_0(A) \subseteqq D(A)$.

(c) A *quasi-nilpotent* $\Rightarrow K(A) = K(A^*) = \{0\}$.

(d) A *quasi-nilpotent* $\Leftrightarrow H_0(A) = H$.

(e) Si A est *régulier,* alors $\overline{H_0(A)} = \overline{\bigcup_{n\geqq 0} N(A^n)} \subseteqq K(A)$.

Théorème 1.2. *Si A est un opérateur fermé, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *A régulier et $H_0(A)$ fermé,*

(ii) *$R(A)$ fermé et $H_0(A) = \{0\}$,*

(iii) *$R(A)$ fermé et $N(A) = \{0\}$,*

(iv) *A régulier et $\bigcup_{n\geqq 0} N(A^n)$ fermé.*

Démonstration.

(i)$\Rightarrow$(ii) voir [4, Théorème 2.11].

(ii)$\Rightarrow$(iii) évident car $N(A) \subseteqq H_0(A)$.

(iii)$\Rightarrow$(iv) $N(A) = \{0\}$ implique $\forall n \geqq 0$ $N(A^n) = \{0\}$, d'où $\bigcup_{n\geqq 0} N(A^n) = \{0\}$ et donc fermé.

(iv)$\Rightarrow$(i) *A régulier* et (iv) impliquement $\overline{H_0(A)} = \overline{\bigcup_{n\geqq 0} N(A^n)} = \bigcup_{n\geqq 0} N(A^n) \subseteqq H_0(A)$ donc $\overline{H_0(A)} = H_0(A)$, d'où (i).

Théorème 1.3 (voir [4, Théorème 1.6]). *Si A est un opérateur fermé, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\lambda \in \sigma(A)$ est isolé dans $\sigma(A)$ (spectre de A)*

(ii) *$H = K(A-\lambda I) \oplus H_0(A-\lambda I)$ et $H_0(A-\lambda I) \Leftrightarrow \{0\}$.*

2. Quelques propriétés des opérateurs pseudo-Fredholm

Lemme 2.1. *Soient* $A\in p\Phi$ *et* (M, N) *une* D.K.G. *associée à* A. *Soient* P_M *et* P_N *respectivement les projections sur* M *et* N *suivant la décomposition* $H=M\oplus N$. *Alors on a:*

(a) $AP_M\in q\Phi(1)$ (*si* $N\neq\{0\}$ *et* $M\neq\{0\}$),

(b) $K(A)=K(AP_M)$ *est fermé,*

(c) $H_0(A)=H_0(AP_M)$.

Démonstration.

(a) $N\subseteqq N(AP_M)$ implique que la restriction de AP_M à N est *nilpotente de degré* 1. d'autre part la restriction de AP_M à M est égale à $A|M$ et donc *régulière*.

(b) Il suffit de démontrer que $K(A)\subseteqq K(AP_M)$. Soient $u\in K(A)$ et $a>0$, $\{v_n\}_{n>0}$ de la définition de $K(A)$, alors $u=P_Mu+P_Nu=A^nv_n=(AP_M)^nv_n+(AP_N)^nv_n$ $\forall n>0$. Donc $\forall n>0$ $P_Mu=(AP_M)^nv_n$ et $P_Nu=(AP_N)^nv_n$. Montrons que P_Nu est nul. On a $\|P_Nu\|\leqq\|(AP_N)^n\|\,\|v_n\|\leqq\varepsilon^n a^n\|u\|$ dès que n est assez grand car AP_N est quasi-nilpotent et par conséquent $\|P_Nu\|=0$ ou encore $P_Nu=0$. D'où $\forall n>0$ $u=P_Mu=(AP_M)^nv_n$ ce qui implique que $u\in\bigcap_{n\geqq 0} R[(AP_M)^n]$. D'après (a) et en utilisant [3, Théorème 1.5.4; Corollaire 2.1.6] on en déduit que $u\in K(AP_M)$; par conséquent $K(A)=K(AP_M)$ est fermé.

(c) $N\subseteqq H_0(A)\Rightarrow H_0(A)=H_0(A)\cap M+N=H_0(A|M)+N$. De même,

$$N\subseteqq N(AP_M)\subseteqq H_0(AP_M)\Rightarrow H_0(AP_M)=H_0(AP_M)\cap M+N=$$

$$=H_0(A|M)+N=H_0(A).$$

Remarque 2.2. Le Lemme 2.1 implique que $\forall(M, N)$ D.K.G. associée à A, $K(A)\subseteqq M$ et $N\subseteqq H_0(A)$.

Lemme 2.3. *Soient* $A\in p\Phi$ *et* (M, N) *une D.K.G. associée à* A. *Alors* $R(A)+N=A(M\cap D(A))+N$ *est fermé dans* H.

Démonstration. $N\subseteqq D(A)\Rightarrow D(A)=M\cap D(A)+N\Rightarrow R(A)\subseteqq A(M\cap D(A))+A(N)\subseteqq A(M\cap D(A))+N$ donc $R(A)+N\subseteqq A(M\cap D(A))+N$. L'autre inclusion étant évidente, on a l'égalité.

Montrons que $A(M\cap D(A))+N$ est fermé. $H=M\oplus N\Rightarrow H$ est isomorphe à $M\times N$ et par conséquent $A(M\cap D(A))+N$ est isomorphe à $A(M\cap D(A))\times N$. Or $A(M\cap D(A))$ est fermé, d'où on déduit que $A(M\cap D(A))\times N$ est fermé et donc $A(M\cap D(A))+N$ est fermé.

Théorème 2.4. *Soit A un opérateur fermé de domaine dense dans* H. *Alors on a*

$$A\in p\Phi\Rightarrow A^*\in p\Phi.$$

Démonstration. Soient $A\in p\Phi$ et (M, N) une D.K.G. associée à A; on va montrer que $(N^\perp, M^\perp)$ est une D.K.G. associée à A^*. Remarquons d'abord que $H=M\oplus N\Rightarrow H=N^\perp\oplus M^\perp$.

(1) Montrons que $M^\perp\subseteqq D(A^*)$. Soient $u\in M^\perp$ et $v\in D(A)$. On a $v=P_M v+P_N v$, $v\in D(A)$ et $P_N v\in D(A)$ impliquent que $P_M v\in D(A)$. Donc $(Av, u)=(AP_M v, u)+$ $+(AP_N v, u)$ or $A(M\cap D(A))\subseteqq M\Rightarrow AP_M v\in M$. Et comme $u\in M^\perp$, on a $(AP_M v, u)=0$. Donc $(Av, u)=(AP_N v, u)$. $N\subseteqq D(A)\Rightarrow AP_N$ est borné, donc $|(Av, u)|\leqq\|AP_N\|\,\|v\|\,\|u\|$ d'où $u\in D(A^*)$.

(2) $A^*(M^\perp)\subseteqq M^\perp$ et $A^*(N^\perp\cap D(A^*))\subseteqq N^\perp$ car $A(N)\subseteqq N$ et $A(M\cap D(A))\subseteqq M$.

(3) Montrons que $A^*|M^\perp$ est *quasi-nilpotent*. Pour cela, montrons d'abord que

$$(P_{M^\perp})^* = P_N.$$

Soient $u\in H$ et $v\in H$,

$$\begin{aligned}((P_{M^\perp})^* u, v) &= (u, P_{M^\perp} v) = (P_M u+P_N u, P_{M^\perp} v) = \\ &= (P_M u, P_{M^\perp} v)+(P_N u, P_{M^\perp} v) = (P_N u, P_{M^\perp} v) = \\ &= (P_N u, (I-P_{N^\perp}) v) = (P_N u, v)-(P_N u, P_{N^\perp} v) = (P_N u, v)\end{aligned}$$

Donc $\forall u\in H$, $\forall v\in H$ $((P_{M^\perp})^* u, v)=(P_N u, v)$, c'est-à-dire

$$(P_{M^\perp})^* = P_N \quad \text{et} \quad P_{M^\perp} = (P_N)^*.$$

D'autre part, $(AP_N)^*=(P_N AP_N)^*=P_{M^\perp}A^*P_{M^\perp}=A^*P_{M^\perp}$. Or AP_N *quasi-nilpotent* entraîne que $(AP_N)^*$ est *quasi-nilpotent*, donc $A^*P_{M^\perp}$ est *quasi-nilpotent* d'où $A^*|M^\perp$ est *quasi-nilpotent*.

(4) Reste à montrer que $A^*|N^\perp$ est *régulier*. Le même raisonnement utilisé dans (3) montre que $(P_{N^\perp})^*=P_M$. Par le Lemme 2.1 (a) on a $AP_M\in q\Phi(1)$ et d'après [2, Proposition 3.3.4] on a $(AP_M)^*\in q\Phi(1)$. Donc $A^*P_{N^\perp}\in q\Phi(1)$ et comme $R(A^*|N^\perp)=R(A^*P_{N^\perp})$ on en déduit que $R(A^*P_{N^\perp})$ est fermé. Donc pour montrer (4) il suffit de montrer que

$$N(A^*|N^\perp)\subseteqq R(A^*P_{N^\perp}) \quad \text{car} \quad A^*P_{N^\perp}\in q\Phi(1).$$

$u\in N(A^*|N^\perp)=N(A^*)\cap N^\perp\Rightarrow u\perp(R(A)+N)$. Or d'après le Lemme 2.3, $R(A)+N=$ $=A(M\cap D(A))+N$ est fermé. Donc $u\in[A(M\cap D(A))+N]^\perp$. Or $N(AP_M)=$ $=N(A|M)+N\subseteqq R(A|M)+N\Rightarrow[A(M\cap D(A))+N]^\perp\subseteqq N(AP_M)^\perp$. Donc

$$u\in N(AP_M)^\perp = R((AP_M)^*)$$

qui est fermé car $(AP_M)^*\in q\Phi(1)$. Donc $u\in R(A^*P_{N^\perp})=R(A^*|N^\perp)$, d'où finalement $N(A^*|N^\perp)\subseteqq R(A^*|N^\perp)$ et donc

$$(N^\perp, M^\perp) \text{ est une D.K.G associée à } A^*.$$

Proposition 2.5. *Soit* $A \in p\Phi$ *avec* $D(A)$ *dense dans* H. *Alors on a*

$$H_0(A)^{\perp} = K(A^*).$$

Démonstration. Elle se déduit du Lemme 2.1 et [3, Proposition 2.3.2].

3. Sur l'unicité de la décomposition de Kato généralisée

Proposition 3.1. *Soient* (M_1, N_1) *et* (M_2, N_2) *deux* D.K.G. *associées à* A, *alors:* $\forall i=1,2$ $\forall j=1,2$ (M_i, N_j) *est une* D.K.G. *associée à* A.

Démonstration. Par hypothèse on a M_i et N_j invariants par A. Notons $A|M_i$ et $A|N_j$ respectivement la restriction de A à M_i et N_j. $A|M_i$ est *régulier* et $A|N_j$ est *quasi-nilpotent*, donc il reste à montrer que $H=M_i \oplus N_j$ pour $i=1,2$ et $j=1,2$. Si $i=j$ alors le résultat est vrai par hypothèse, si non, d'après la Remarque 2.2 on a $K(A) \subseteqq M_i$ et $N_j \subseteqq H_0(A)$. Remarquons que $\forall i=1,2$ $M_i \cap \cap H_0(A) = K(A) \cap H_0(A)$. L'inclusion «$\supseteqq$» est évidente. Montrons l'autre inclusion: $M_i \cap H_0(A) = H_0(A|M_i) \subseteqq K(A) \Rightarrow M_i \cap H_0(A) \subseteqq K(A) \cap H_0(A)$. D'où l'égalité. Montrons maintenant que $M_i \cap N_j = \{0\}$. On a $M_i \cap N_j \subseteqq M_i \cap H_0(A) \subseteqq K(A) \subseteqq M_j$. Donc $M_i \cap N_j \subseteqq M_j \cap N_j = \{0\}$ car (M_j, N_j) est une D.K.G.

Il reste à montrer que $H=M_i+N_j$; pour cela montrons que $\forall j=1,2$ $K(A)+ +H_0(A)=N_j+K(A)$. «$\supseteqq$» est évident car $N_j \subseteqq H_0(A)$. Inversement, $H_0(A)= =M_j \cap H_0(A)+N_j \subseteqq K(A)+N_j$ d'où $\forall j=1,2$ $H_0(A) \subseteqq K(A)+N_j$ et finalement $K(A)+H_0(A) \subseteqq K(A)+N_j$. D'où l'égalité cherchée. Donc:

$$H = M_i+N_i \subseteqq M_i+H_0(A) = M_i+K(A)+H_0(A) = M_i+K(A)+N_j = M_i+N_j.$$

Donc:

$$\forall i = 1,2 \quad \text{et} \quad \forall j = 1,2, \quad H = M_i \oplus N_j.$$

Soit $S \in B(H)$. On dira que S commute avec A si $S(D(A))=D(A)$ et $\forall u \in D(A)$ on a $ASu=SAu$.

Théorème 3.2. *La* D.K.G. *est unique à un isomorphisme près commutant avec* A.

Démonstration. 1) Montrons que si (M, N) est une D.K.G. associée à A alors $\forall S \in B(H)$ inversible et commutant avec A, $(S(M), S(N))$ est une D.K.G. associée à A.

En effet, $H=S(H)=S(M)+S(N)$ et d'autre part si $u \in S(M) \cap S(N)$ alors $\exists v \in M$ et $\exists w \in N$ tels que $u=Sv=Sw$. Ce qui implique $v=w$ car S est injectif. Donc $v=w \in M \cap N=\{0\}$ d'où $u=0$. Donc $H=S(M) \oplus S(N)$ et $S(M)$, $S(N)$ sont fermés.

Pour l'invariance remarquons que

$$S(D(A)) = D(A) \Rightarrow S(N) \subseteqq D(A) \quad \text{et} \quad S(M) \cap D(A) = S(M \cap D(A))$$

$$AS = SA \Rightarrow A(S(M) \cap D(A)) = A(S(M \cap D(A))) = S(A(M \cap D(A))) \subseteqq S(M)$$

et

$$A(S(N)) = S(A(N)) \subseteqq S(N).$$

Montrons que $A|S(N)$ est *quasi-nilpotent*. Tout d'abord on a $N \subseteqq H_0(A)$ et S, borné, commute avec A, impliquent $S(N) \subseteqq H_0(A)$. Comme $S(N)$ est fermé on en déduit que $A|S(N)$ est *quasi-nilpotent*.

Reste à montrer que $A_0 = A|S(M)$ est *régulier*. Pour cela montrons d'abord que $R(A_0) = A(S(M) \cap D(A))$ est fermé. Soit $u_n \in A(S(M) \cap D(A))$ tel que $u_n \to u$ dans H.

$u_n \in R(A_0) \Rightarrow \exists v_n \in M \cap D(A)$ tel que $u_n = ASv_n = SAv_n$. Or $S^{-1} \in B(H)$ donc $S^{-1}u_n \to S^{-1}u$ ce qui implique $Av_n \to S^{-1}u$. Et comme $A(M \cap D(A))$ est fermé on en déduit que $S^{-1}u \in A(M \cap D(A))$. Donc $\exists v \in M \cap D(A)$ tel que $S^{-1}u = Av$, d'où $u = SAv = ASv \in R(A_0)$.

Maintenant montrons que $\forall n \geqq 0$ $N(A_0^n) \subseteqq R(A_0)$. Pour $u \in N(A_0^n)$ on a $u \in S(M)$ et $A^n u = 0$, donc $\exists v \in M \cap D(A)$ tel que $u = Sv$. Or, $A^n Sv = 0 \Rightarrow SA^n v = 0 \Rightarrow A^n v = 0$ donc $v \in N(A^n) \cap M = N((A|M)^n) \subseteqq R(A|M)$ car $A|M$ est *régulier*. Donc $\exists w \in M \cap D(A)$ tel que $v = Aw$ d'où $u = Sv = SAw = ASw$ donc $u \in R(A_0)$.

2) Soient (M_1, N_1) et (M_2, N_2) deux D.K.G. associées à A, et soient P_{M_i}, P_{N_i} les projections sur M_i, N_i $(i = 1, 2)$ suivant la décomposition $H = M_i \oplus N_i$.

Posons $S = P_{M_2}P_{M_1} + P_{N_2}P_{N_1}$, il est clair que $S \in B(H)$. Vérifions que $S(D(A)) = D(A)$. Soit $u \in D(A)$. On a $u = P_{M_1}u + P_{N_1}u \Rightarrow P_{M_1}u \in D(A)$ et de même $P_{M_1}u = P_{M_2}P_{M_1}u + P_{N_2}P_{M_1}u$ et $P_{N_2}P_{M_1}u \in D(A) \Rightarrow P_{M_2}P_{M_1}u \in D(A)$. D'où $Su \in D(A)$ et donc

$$S(D(A)) \subseteqq D(A).$$

Montrons l'inclusion inverse, On a $N_2 \subseteqq D(A) \Rightarrow D(A) = M_2 \cap D(A) + N_2$. Soit $u \in D(A)$: alors $u = v + w$ avec $v \in M_2 \cap D(A)$ et $w \in N_2$. D'après la Proposition 3.1, $H = M_1 \oplus N_2$, donc $D(A) = M_1 \cap D(A) + N_2$ et $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in M_1 \cap D(A)$ et $v_2 \in N_2$. Donc, $v_1 = P_{M_1}v_1$ et $v \in M_2$. D'où $v = P_{M_2}v = P_{M_2}P_{M_1}v_1 + P_{M_2}v_2$. Or, $v_2 \in N_2 \Rightarrow P_{M_2}v_2 = 0$. Donc:

$$v = P_{M_2}P_{M_1}v_1 \quad \text{avec} \quad v_1 \in D(A). \tag{1}$$

De même, d'après la Proposition 3.1, $H = M_2 \oplus N_1$ donc $D(A) = M_2 \cap D(A) + N_1$. Or $w \in D(A)$ donc $w = w_1 + w_2$ avec $w_1 \in M_2 \cap D(A)$ et $w_2 \in N_1$. Donc $w = w_1 + P_{N_1}w_2$. Or, $w \in N_2 \Rightarrow w = P_{N_2}w = P_{N_2}w_1 + P_{N_2}P_{N_1}w_2 = P_{N_2}P_{N_1}w_2$ car $w_1 \in M_2$. Donc

$$w = P_{N_2}P_{N_1}w_2 \quad \text{avec} \quad w_2 \in N_1 \subseteqq D(A). \tag{2}$$

Alors (1) et (2)$\Rightarrow u=v+w=P_{M_2}P_{M_1}v_1+P_{N_2}P_{N_1}w_2$ avec $P_{N_2}P_{N_1}v_1=0$ et $P_{M_2}P_{M_1}w_2=0$. Donc $u=P_{M_2}P_{M_1}(v_1+w_2)+P_{N_2}P_{N_1}(w_2+v_1)=S(v_1+w_2)$ avec $v_1+w_2\in D(A)$ d'où $D(A)\subseteqq S(D(A))$ et par conséquent:

(3) $$S(D(A)) = D(A).$$

Remarquons que le même raisonnement montre que $\forall u\in H$ $\exists(v_1+w_2)\in H$ tel que $u=S(v_1+w_2)$ donc S est surjectif. L'invariance de M_i et N_i (pour $i=1, 2$), et (3) impliquent que S commute avec A.

Montrons que S est injectif. Soit $u\in N(S)\Rightarrow Su=0\Rightarrow P_{M_2}P_{M_1}u=-P_{N_2}P_{N_1}u\Rightarrow$ $P_{M_2}P_{M_1}u=0$ et $P_{N_2}P_{N_1}u=0$. D'où $P_{M_1}u\in N_2$ et $P_{N_1}u\in M_2$. Ce qui entrîane $P_{M_1}u\in N_2\cap M_1$ et $P_{N_1}u\in M_2\cap N_1$. Or d'après la Proposition 3.1 on a $N_2\cap M_1=M_2\cap N_1=\{0\}$ d'où $P_{M_1}u=0$ et $P_{N_1}u=0$ donc $u=P_{M_1}u+P_{N_1}u=0$ ou encore $N(S)=\{0\}$.

Finalement montrons que $S(M_1)=M_2$ et $S(N_1)=N_2$. Par définition de S on a $S(M_1)\subseteqq M_2$ et $S(N_1)\subseteqq N_2$. Soit maintenant $u\in M_2$; puisque $H=M_1\oplus N_2$ et, on a $u=v+w$ avec $v\in M_1$ et $w\in N_2$ donc $u=P_{M_2}u=P_{M_2}P_{M_1}v+P_{M_2}w$. Or, $w\in N_2\Rightarrow$ $\Rightarrow P_{M_2}w=0$; donc $u=P_{M_2}P_{M_1}v$, et $v\in M_1\Rightarrow P_{N_1}v=0$. Par conséquent $u=S(v)$ avec $v\in M_1$ donc $M_2\subseteqq S(M_1)$. Le même raisonnement montre que $N_2\subseteqq S(N_1)$ et donc que $S(M_1)=M_2$ et $S(N_1)=N_2$. Remarquons que les deux dernières égalités impliquent que S est surjectif. En effet $S(H)=S(M_1)+S(N_1)=M_2+N_2=H$, d'où la fin de la démonstration du Théorème.

Soit (M, N) une D.K.G. associée à A. On dira qu'elle est orthogonale si $M=N^{\perp}$.

Proposition 3.3 *Si* $A\in p\Phi$, *A admet au plus une* D.K.G. *orthogonale.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux D.K.G. orthogonales (M_1, N_1) et (M_2, N_2); donc $M_1=N_1^{\perp}$ et $M_2=N_2^{\perp}$. Montrons que $N_1=N_2$.

Soit $u\in N_2\subseteqq H=M_1\oplus N_1$, $u=u_1+u_2$ avec $u_1\in M_1$ et $u_2\in N_1$. Alors $u-u_2=$ $=u_1\in M_1\cap H_0(A)\subseteqq K(A)\subseteqq M_2=N_2^{\perp}$. Donc $u_2\perp u_1$ et $u-u_2\perp u$ (car $u\in N_2$). Donc $\|u_1\|^2=(u_1, u_1)=(u-u_2, u_1)=(u, u_1)-(u_2, u_1)=0$ d'où $u=u_2\in N_1$ et donc $N_2\subseteqq N_1$. Réciproquement, par symétrie des hypothèse on a $N_1\subseteqq N_2$. Done et $N_1 = N_2$ et $N_1^{\perp} = N_2^{\perp}$ et par consèquant $M_1 = M_2$.

Soit A un opérateur fermé de domaine dense dans H. On dira que la D.K.G. (M, N) associée à A est invariante par A^* si $N\subseteqq D(A^*)$, $A^*(N)\subseteqq N$ et $A^*(M\cap D(A^*))\subseteqq M$.

Proposition 3.4. *Si* (M, N) *est une* D.K.G. *associée à A, elle est orthogonale si et seulement si elle est invariante par* A^*.

Démonstration. «Seulement si.» Soit (M, N) une D.K.G. orthogonale associée à A; d'après la démonstration du Théorème 2.4 on a $M^{\perp}\subseteqq D(A^*)$, $A^*(M^{\perp})\subseteqq$

$\subseteq M^{\perp}$ et $A^*(N^{\perp}\cap D(A^*))\subseteq N^{\perp}$. Comme $N=M^{\perp}$ on déduit que (M, N) est invariante par A^*.

«Si.» Soit (M, N) une D.K.G. associée à A et invariante par A^*, alors $N\subseteq D(A^*)$, $A^*(N)\subseteq N$ et $A^*(M\cap D(A^*))\subseteq M$. D'autre part $A|M$ *régulier* et $A^*(M\cap D(A^*))\subseteq M$ impliquent que $A^*|M$ est *régulier*. De même $A|N$ *quasi-nilpotent* et $A^*(N)\subseteq$ $\subseteq N \Rightarrow A^*|N$ est *quasi-nilpotent*. D'où on déduit que (M, N) est une D.K.G. associée à A^*. Et d'après la démonstration du Théorème 2.4 on conclut que $(N^{\perp}, M^{\perp})$ est une D.K.G. associée à $A^{**}=A$ (car A est fermé).

Donc (M, N) et $(N^{\perp}, M^{\perp})$ sont deux D.K.G. associées à A. Par la Proposition 3.1, on en déduit que $(M, M^{\perp})$ est une D.K.G. associée à A d'où $M=N^{\perp}$.

Définition 3.5. Soit (M, N) une D.K.G. associée à A. On dit qu'elle est *non triviale* si $N\neq\{0\}$.

Théorème 3.6. *Soit A un opérateur fermé avec $D(A)$ dense dans H. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *A admet une* D.K.G. *non triviale unique,*

(ii) $0\in\sigma(A)$ *est isolé.*

Remarque. Pour démontrer le Théorème 3.6 on a besoin des résultats suivants.

Proposition 3.7. *Soit $A\in p\Phi$ avec $D(A)$ dense dans H et soit (M, N) une* D.K.G. *non triviale associée à A. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *N est unique,*

(b) $K(A)\cap N(A)=\{0\}$,

(c) $H_0(A)=N$,

(d) $H_0(A)$ *est fermé.*

Démonstration.

(a)$\Rightarrow$(b). Remarquons que $N\neq\{0\}\Rightarrow M^{\perp}\neq\{0\}$. En effet si $M^{\perp}=\{0\}$ alors $M=H$ et donc $N=\{0\}$. Soient $z\in M^{\perp}$ et $z\neq 0$. Supposons que $K(A)\cap N(A)\neq\{0\}$ et $x\in K(A)\cap N(A)$ avec $x\neq 0$. Soient $\{x_n\}_{n\geqq 0}$ et $a>0$ de la définition de $x\in K(A)$. $A\in p\Phi\Rightarrow K(A)$ est fermé, donc on peut choisir les x_n avec $n\geqq 1$ orthogonaux à $N(A|K(A))=K(A)\cap N(A)$. Les x_n étant ainsi choisis, posons:

$$N_z=\Big\{w\in H;\ w=v+\sum_{n\geqq 0}(A^n v, z)x_n \text{ avec } v\in N\Big\}.$$

N_z est bien défini. En effet, $v\in N\subseteq H_0(A)\Rightarrow v\in D(A^n)$ $\forall n\geqq 0$, d'autre part

$$\Big\|\sum_{n\geqq 0}(A^n v, z)x_n\Big\| \leqq \sum_{n\geqq 0}\|A^n v\|\,\|z\|\,\|x_n\| \leqq \|z\|\,\|u\|\sum_{n\geqq 0}a^n\,\|A^n v\|$$

et la dernière série est convergente car $v\in N\subseteq H_0(A)$. Remarquons aussi que

$N_z \subseteq D(A)$. En effet soit $w \in N_z$ alors $\exists w_j = v + \sum_{n=0}^{j} (A^n v, z) x_n$ tel que $w_j \to w$. $w_j \in D(A)$ car $N \subseteq D(A)$ et $x_n \in D(A)$ $\forall n \geqq 0$. En outre $Aw_j = Av + \sum_{n=0}^{j} (A^n v, z) Ax_n =$ $= Av + \sum_{n=1}^{j} (A^n v, z) x_{n-1}$ car $x_0 = u \in N(A)$ et $Ax_n = x_{n-1}$ par définition des x_n. Donc $Aw_j = Av + \sum_{n=0}^{j} (A^{n+1} v, z) x_n$ et le même raisonnement que plus haut montre que la suite $\{Aw_j\}$ est convergente et comme A est fermé on en déduit que $w \in D(A)$. D'autre part on vient de montrer que si $w = v + \sum_{n \geqq 0} (A^n v, z) x_n$ alors $Aw =$ $Av + \sum_{n \geqq 0} (A^{n+1} v, z)\, x_n = Av + \sum_{n \geqq 0} \big(A^n(Av), z\big)\, x_n$. Ceci montre que $A(N_z) \subseteq N_z$.

Montrons maintenant que $N_z \subseteq H_0(A)$. Soit $w \in N_z$ on a $A^k w = A^k v +$ $+ \sum_{n \geqq 0} \big(A^n(A^k v), z\big) x_n$. Par ailleurs $z \in M^\perp \subseteq H_0(A^*)$ (voir la démonstration du Théorème 2.4), donc $A^k w = A^k v + \sum_{n \geqq 0} \big(A^k v, (A^*)^n z\big) x_n$ ce qui implique

$$\|A^k w\| \leqq \|A^k v\| + \sum_{n \geqq 0} \|A^k v\|\, \|(A^*)^n z\|\, \|x_n\| \leqq \|A^k v\| + \|A^k v\|\, \|u\| \sum_{n \geqq 0} a^n \|(A^*)^n z\|.$$

$z \in H_0(A^*) \Rightarrow \sum_{n \geqq 0} a^n \|(A^*)^n z\| < \infty$, donc $\exists c > 0$ tel que $\|A^k w\| \leqq \|A^k v\| (1+c)$. D'où $\|A^k w\|^{1/k} \leqq \|A^k v\|^{1/k} (1+c)^{1/k} \to 0$ quand $k \to \infty$ car $v \in N \subseteq H_0(A)$. Donc $w \in H_0(A)$, c'est-à-dire $N_z \subseteq H_0(A)$.

Montrons que $H = M \oplus N_z$. Soit $u \in M \cap N_z$ alors $u = v + \sum_{n \geqq 0} (A^n v, z) x_n$ avec $v \in N$ ce qui implique que $u - \sum_{n \geqq 0} (A^n v, z) x_n = v \in M \cap N = \{0\} \Rightarrow v = 0$ et donc $u = 0$. D'autre part $H = M \oplus N \Rightarrow \forall u \in H$, $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in M$ et $u_2 \in N$. Donc on peut écrire

$$u = \Big(u_1 - \sum_{n \geqq 0} (A^n u_2, z)\, x_n\Big) + \Big(u_2 + \sum_{n \geqq 0} (A^n u_2, z)\, x_n\Big)$$

d'où $H = M + N_z$ et donc $H = M \oplus N_z$. Par conséquent on a montré que (M, N_z) est une D.K.G. associée à A. Comme par hypothèse N est unique on en déduit que $N = N_z$. Donc pour $u \in N_z$ on a $u = v + \sum_{n \geqq 0} (A^n v, z) x_n$ ce qui implique $u - v =$ $= \sum_{n \geqq 0} (A^n v, z) x_n \in N \cap M = \{0\}$. Alors $\sum_{n \geqq 0} (A^n v, z) x_n = 0$ donc $\big(\sum_{n \geqq 0} (A^n v, z) x_n, x\big) =$ $= 0$ et $\sum_{n \geqq 0} (A^n v, z)(x_n, x) = 0$. Puisque les x_n pour $n \geqq 1$ sont choisis dans $[K(A) \cap N(A)]^\perp$ et que $x \in K(A) \cap N(A)$ on en déduit que $(v, z) \|x\|^2 = 0$, ce qui implique $(v, z) = 0$ et ceci $\forall v \in N$ donc $z \in N^\perp$. Or $z \in M^\perp$ donc $z = 0$ (car $H = M \oplus$ $\oplus N \Rightarrow H = M^\perp \oplus N^\perp$). $M^\perp \neq \{0\} \Rightarrow \exists z \in M^\perp$ avec $z \neq 0$, donc $\exists N_z \neq N$ tel que (M, N_z) soit une D.K.G. associée à A, ce qui contredit l'hypothèse «N est unique». Par conséquent $x = 0$, d'où $K(A) \cap N(A) = \{0\}$.

(b)$\Rightarrow$(c). $H = M + N \Rightarrow H_0(A) = M \cap H_0(A) + N$ (car $N \subseteq H_0(A)$). Or $H_0(A) \cap$ $\cap M = H_0(A|M)$ et $N(A|M) = N(A) \cap M = K(A) \cap N(A)$. Donc l'hypothèse (b)$\Rightarrow$

$\Rightarrow N(A|M)=0$. D'autre part $A|M$ *régulier* $\Rightarrow R(A|M)$ est fermé. En appliquant le Théorème 1.2, on en déduit que $H_0(A|M)=\{0\}$ et donc que $H_0(A)=N$.

(c)$\Rightarrow$(d) évident car N est fermé.

(d)$\Rightarrow$(a) $\forall(M, N)$ D.K.G. associée à A, on a $H=M\oplus N$. Comme plus haut $H_0(A)=M\cap H_0(A)+N$ et $H_0(A)\cap M=H_0(A|M)$; $H_0(A)$ est fermé par hypothèse et comme M est fermé, on en dèduit que $H_0(A|M)$ est fermé comme intersection de deux fermés. D'après le Théorème 1.2 ($A|M$ étant *régulier*), on en déduit que $H_0(A|M)=\{0\}$ et donc $H_0(A)=N$. Ceci est vrai $\forall(M, N)$ D.K.G. associée à A, d'où l'unicité de N.

Proposition 3.8. *Soit* $A\in p\Phi$ *avec* $D(A)$ *dense dans* H *et soit* (M, N) *une* D.K.G. *non triviale associée à* A. *Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) M *est unique,*

(b) $K(A^*)\cap N(A^*)=\{0\}$,

(c) $H_0(A^*)=M^\perp$,

(d) $H_0(A^*)$ *est fermé.*

Démonstration. (M, N) est une D.K.G. associée à A implique que $(N^\perp, M^\perp)$ est une D.K.G. associée à A^* (voir Théorème 2.4). D'autre part $N\neq\{0\}\Rightarrow$ $\Rightarrow M^\perp\neq\{0\}$. Donc $(N^\perp, M^\perp)$ est une D.K.G. non triviale associée à A^*. Par un raisonnement analogue à celui de la Proposition 3.7 on en déduit l'équivalence entre (a), (b), (c) et (d).

Démonstration (du Théorème 3.6).

(i)$\Rightarrow$(ii). Soit (M, N) la D.K.G. non triviale associée à A, par hypothèse unique. Les Propositions (3.7) et (3.8) impliquent que $N=H_0(A)$ et $M^\perp=H_0(A^*)$. D'après la Proposition 2.5 on a $H_0(A^*)^\perp=K(A)$ donc $M^\perp=K(A)^\perp$ c'est-à-dire $M=K(A)$. D'où finalement $H=K(A)\oplus H_0(A)$ et $H_0(A)\neq\{0\}$. En utilisant le Théorème 1.3 on en déduit (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i). $0\in\sigma(A)$ est isolé, implique $H=K(A)\oplus H_0(A)$ et que $H_0(A)\neq\{0\}$ (voir Théorème 1.3). $(K(A), H_0(A))$ est une D.K.G. non triviale associée à A, montrons qu'elle est unique. Supposons qu'il existe une autre D.K.G. associée à A. $H_0(A)$ fermé$\Rightarrow H_0(A)=N$ (voir Proposition 3.7). Montrons maintenant que $M=K(A)$. L'inclusion «$\supseteq$» étant toujours vérifiée, il reste à montrer l'inclusion inverse. Soit $u\in M$, alors $u=u_1+u_2$ avec $u_1\in K(A)$ et $u_2\in H_0(A)$, d'où $u-u_1=$ $=u_2\in M\cap H_0(A)=M\cap N=\{0\}$ donc $u-u_1=0$. Ce qui implique que $u=u_1\in K(A)$ et que $M\subseteq K(A)$. Donc $M=K(A)$ et $N=H_0(A)$ et (i) est démontré.

Corollaire 3.9. *Soit* A *un opérateur fermé avec* $D(A)$ *dense dans* H. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) A *admet une* D.K.G. *non triviale unique,*

(2) $0\in\sigma(A)$ *est isolé,*

(3) $H=K(A)\oplus H_0(A)$ *et* $H_0(A)\neq\{0\}$,
(4) $A\in p\Phi$ *et* $K(A)\cap N(A)=\{0\}$ *et* $K(A^*)\cap N(A^*)=\{0\}$,
(5) $A\in p\Phi$ *et* $H_0(A)$, $H_0(A^*)$ *sont fermés*,
(6) A^* *admet une* D.K.G. *non triviale unique.*

Références

[1] T. KATO, Perturbation theory for nullity, deficiency, and other quantities of linear operators, *J. Anal. Math.*, **6** (1958), 261—322.

[2] J. P. LABROUSSE, Les opérateurs quasi-Fredholm, *Rend. Circ. Math. Palermo* (ser. II), **29** (1980), 161—258.

[3] M. MBEKHTA, *Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux*, Thèse de 3ème cycle, Université de Nice, 1984.

[4] M. MBEKHTA, Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux, *Glasgow Math. J.*, **29** (1987), 159—175.

[5] M. MBEKHTA, Décomposition de Kato généralisée, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **303** série I, N° 20 (1986), 979—982.

[6] M. MBEKHTA, Sur la théorie spectrale généralisée, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **306** série I (1988), 593—596.

DÉPARTEMENT DE MATH.
UNIVERSITÉ DE LILLE I
U.R.A., C.N.R.S. 751
59655. VILLENEUVE D'ASCQ XEDEX
FRANCE