Acta Sci. Math., 52 (1988), 171—178

Sur un théorème de J. Bourgain

C. FINET

Introduction

J. Bourgain a démontré (voir [1] et [1']) que le dual de l'algèbre du disque a la propriété de Grothendieck. Nous étendons ce résultat aux algèbres séparables uniformes A sur un compact X telles que :

(1) Il existe une suite (φ_n) dans le spectre de A telle que pour tout n, φ_n ait une unique mesure représentante μ_n sur X (les mesures μ_n étant mutuellement singulières);

(2) Il n'y a pas de mesure non nulle dans $A^\perp$ qui soit orthogonale à toutes les mesures μ_n. (Où $A^\perp=\{\mu\in\mathscr{C}(X)' : \mu|_A=0\}$).

L'article comprend trois parties. La première consiste en des rappels notamment sur les algèbres uniformes. Nous nous intéressons à l'opérateur de conjugaison dans le cadre des algèbres dites « ω^*-de Dirichlet ». Dans la deuxième partie, nous établissons quelques propriétés de la projection de Riesz d'où nous tirons des conséquences analogues à celles obtenues par J. Bourgain dans [1]. La dernière partie de ce travail est consacrée à la démonstration du résultat principal et à quelques exemples et problèmes.

I. Rappels

Soient X, Y deux espaces de Banach. Notons $B(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y, $\Pi_p(X, Y)$ l'espace des opérateurs p-sommants de X dans Y et X' le dual de X. Rappelons la définition des algèbres « ω^*-de Dirichlet » (voir [2]).

Définition 1. Soit (X, μ) un espace de probabilité. On dit que A est une algèbre « ω^*-de Dirichlet » si A est une sousalgèbre de $L^\infty(\mu)$, contenant les constantes, telle que la mesure μ soit multiplicative sur l'algèbre A et $A+\bar{A}$ préfaiblement dense dans $L^\infty(\mu)$.

Reçu le 3 janvier, 1985.

Notons que si A est une algèbre uniforme sur X et μ l'unique mesure représentante de φ dans le spectre de A, alors A est une algèbre « ω^*-de Dirichlet ». Pour $p \in [1, +\infty[$, l'espace $H^p(\mu)$ est la fermeture de A dans $L^p(\mu)$, et $H^\infty(\mu)$ est la fermeture préfaible de A dans $L^\infty(\mu)$. Sur $L^p(\mu)$ $(1<p<\infty)$, on définit l'opérateur de conjugaison (noté « $\sim$ ») qui possède les principales propriétés de la transformée de Hilbert (« classique ») (voir [2]) : on commence par définir la conjuguée $\tilde{f}$ pour une fonction f dans $A+\bar{A}$: f s'écrit alors de façon unique : $f=f_1+C+\bar{f}_2$ avec $C\in \mathbf{C}$ et $f_1, f_2 \in A_0$ où $A_0=\{f\in A, \int f\,d\mu=0\}$). On pose $\tilde{f}=i\bar{f}_2-if_1$.

Définition 2. Pour chaque $p\in]1, \infty[$, il existe dans $L^p(\mu)$ un unique opérateur continu, que l'on appellera « opérateur de conjugaison », (et que l'on notera « $\sim$ »), qui coincide avec l'application « $\sim$ » définie précédemment sur $A+\bar{A}$.

Rappelons les principales propriétés de *l'opérateur de conjugaison :*

1. Si $1<p<\infty$, pour tout $f\in L^p(\mu)$, $f+i\tilde{f}\in H^p(\mu)$.
2. If existe une constante M telle que si $p\in]1, \infty[$ et $f\in L^p(\mu)$, on ait :

$$\|\tilde{f}\|_p \leqq Mpp' \|f\|_p \quad (\text{où } p' = (p/p-1)).$$

3. Si $f\in \operatorname{Re} L^\infty(\mu)$, alors $\exp t(f+i\tilde{f})\in H^\infty(\mu)$, pour tout $t\in \mathbf{R}$.

De plus, il existe ([2]) un unique opérateur « $\sim$ » défini sur $L^1(\mu)$ qui coincide avec « $\sim$ » définie sur $L^p(\mu)$ $(p>1)$ et de type faible (1—1).

II. Lemmes preparatoires

Dans ce qui suit (X, μ) est un espace de probabilité et A une algèbre « ω^*-de Dirichlet ». Nous définissons la projection de Riesz (notée R). Soient $p\in]1, \infty[$, et $f\in L^p(\mu)$, on pose :

$$R(f) = 2^{-1}\left(f+i\tilde{f}+\int f\right).$$

Des propriétés de l'opérateur de conjugaison, on déduit le lemme suivant.

Lemme 3. (1) *Soient $1<p<\infty$ et $p'=p/(p-1)$, si $\|R\|_p$ désigne la norme de la projection de Riesz considérée comme un opérateur sur $L^p(\mu)$, alors il existe une constante C (indépendante de p) telle que*

$$\|R\|_p \leqq Cpp'.$$

(2) *La projection de Riesz est de type faible* (1—1).

Mentionnons quelques propriétés faciles qui nous seront utiles par la suite.

Lemme 4. (a) *Pour tout* $f \in L^p(\mu)$ $(1<p<\infty)$, $\tilde{\tilde{f}} = -f + \int f$.
(b) *La conjuguée d'une constante est la fonction nulle.*
(c) *Soit* $1<p<\infty$, *pour tout* $f \in H^p(\mu)$, $R(f)=f$.

On aura aussi besoin du

Lemme 5. *Pour tous* f *et* $g \in L^2(\mu)$, *on a*

$$\int fRg = \int gR_-f, \tag{1}$$

où R_- *désigne la projection de Riesz négative :*

$$R_-(f) = 2^{-1}\left(f - i\tilde{f} + \int f\right).$$

Démonstration. Prouver l'égalité (1) revient à démontrer :

$$\int f\tilde{g} + g\tilde{f} = 0.$$

Supposons d'abord f et g dans $A+\bar{A}$ et à valeurs réelles. On peut écrire :

$$f = f_1 + \int f + \bar{f}_1 = 2\operatorname{Re} f_1 + \int f, \quad f_1 \in A_0\,;$$
$$g = 2\operatorname{Re} g_1 + \int g, \quad g_1 \in A_0.$$

Dès lors, $\tilde{f} = 2\operatorname{Im} f_1$ et $\tilde{g} = 2\operatorname{Im} g_1$. Ainsi,

$$\int f\tilde{g} + g\tilde{f} = \int \left(2\operatorname{Re} f_1 + \int f\right) 2\operatorname{Im} g_1 + \left(2\operatorname{Re} g_1 + \int g\right) 2\operatorname{Im} f_1$$
$$= \int 4(\operatorname{Re} f_1 \operatorname{Im} g_1 + \operatorname{Re} g_1 \operatorname{Im} f_1) = 4\int \operatorname{Im}(f_1 g_1) = 0.$$

On obtient alors facilement le résultat souhaité pour $f, g \in A+\bar{A}$. Par densité de $A+\bar{A}$ dans $L^2(\mu)$, l'égalité (1) est vérifiée pour tous $f, g \in L^2(\mu)$.

De la propriété de type faible (1—1) de R, on déduit le

Lemme 6. *Si* $f \in L^1(\mu)$, $\omega \in L^\infty_+(\mu)$, $0<\alpha<1$, *on a :*

$$\int |R_-(f)|^\alpha \omega \leqq C.(1-\alpha)^{-1} \|\omega\|_1^{1-\alpha} \|\omega\|_\infty^\alpha \|f\|_1^\alpha.$$

D'autre part, on a

Lemme 7. *Si* K *est un sous-ensemble mesurable de* X *et* $\varepsilon>0$, *alors il existe deux fonctions* φ *et* ψ *dans* $H^\infty(\mu)$ *telles que :*

(1) $|\varphi| + |\psi| \leqq 1$;

(2) $|\varphi(z) - 1/5| \leqq \varepsilon$ *pour* $z \in K$;

(3) $|\psi(z)| \leqq \varepsilon$ *pour* $z \in K$;

(4) $\|\varphi\|_1 \leqq C(\log \varepsilon^{-1})^2 \mu(K)$;

(5) $\|1-\psi\|_2 \leqq C(\log \varepsilon^{-1}) \mu(K)^{1/2}$.

Démonstration. Soit $\tau=1-(1-\varepsilon)\chi_K$, $\log\tau=(\log\varepsilon)\chi_K\in\operatorname{Re}L^\infty(\mu)$. Donc $f=\exp(\log\tau+i\widetilde{\log\tau})\in H^\infty(\mu)$ (propriété 3 de l'opérateur de conjugaison). L'opérateur de conjugaison est borné en norme L^2, ainsi :

$$\|1-f\|_2\leqq\|1-\tau\|_2+\|\log\tau\|_2\leqq(1+\log\varepsilon^{-1})\mu(K)^{1/2}.$$

On choisit $\varphi=5^{-1}(1-f)^2\in H^\infty(\mu)$. Soient $G=1-|\varphi|$ et $g=G\exp(i\widetilde{\log G})\in$ $\in H^\infty(\mu)$ puisque $\log G\in\operatorname{Re}L^\infty(\mu)$. On prend alors $\psi=f\cdot g\in H^\infty(\mu)$ et les cinq conditions sont remplies par les fonctions φ et ψ de $H^\infty(\mu)$.

Nous obtenons, dès lors, le même lemme de découpage que dans [1].

Lemme 8. *Il existe une constante C telle que pour toute fonction f dans* $L^1_+(\mu)$, $\int f=1$ *et* $0<\delta<1$, *il existe des scalaires positifs* (c_i) *et des suites* (θ_i), (τ_i) *de fonctions de* $H^\infty(\mu)$ *telles que :*

(1) $\|\theta_i\|_\infty\leqq C$; (4) $\sum c_i\|\tau_i\|_1\leqq C\cdot\delta^{-C}$;

(2) $\|\sum|\tau_i|\|_\infty\leqq C$; (5) $\int|1-\sum\theta_i\tau_i^2|f\leqq\delta.$

(3) $|\tau_i|f\leqq c_i$ *p.s.* ;

III. Le resultat principal

1. Nous étudions les opérateurs p-sommants définis sur des algèbres uniformes vérifiant les conditions 1, 2 citées dans l'introduction. Notons A une telle algèbre. Nous établissons le théorème de décomposition suivant :

Théorème 9. *Tout opérateur T p-sommant sur A* $(p\geqq1)$ *se décompose comme suit :* $T=T_1+T_2$ *où* T_1, T_2 *vérifient les propriétés suivantes :*

(1) $\pi_p(T_1)^p+\pi_p(T_2)^p\leqq\pi_p(T)^p$;

(2) *Il existe une suite d'opérateurs* $S_n:\mathscr{C}(X)\to A$ *telle que* (T_2S_n) *converge en norme* π_p *vers un opérateur* $\tilde{T}_2$ *vérifiant* $T_2=\tilde{T}_2\circ j$ *où j est l'injection canonique de A dans* $\mathscr{C}(X)$;

(3) *La première composante* T_1 *s'étend à* $H^\infty(m)$ *où m est une des mesures représentantes* μ_i.

Démonstration. 1) Comme T est p-sommant sur A $(p\geqq1)$, par le théorème de factorisation de Pietsch ([5]), il existe une mesure de probabilité μ sur X telle que pour tout $\varphi\in A$:

$$\|T(\varphi)\|\leqq\pi_p(T)\|\varphi\|_{L^p(\mu)}.$$

La mesure μ admet la décomposition de Lebesgue : $\mu=\mu_a+\mu_s$ avec $\mu_a\ll\alpha$ et $\mu_s\perp\alpha$ où

$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mu_n$. On a : $\mu_a = \sum_{n=1}^{\infty} h_n\mu_n$. Puisque μ_a n'est pas nul, on peut supposer $h_1\mu_1$ non nul. Soit $\sigma = \sum_{n=2}^{\infty} h_n\mu_n$. Il existe $L = \bigcup_{n\geqq 1} F_n$, F_n fermé tel que $\mu_1(L) = 0 = |\sigma+\mu_s|(X\setminus L)$. On applique alors le lemme de Forelli ([3]): il existe $(\psi_k)\subset A$ telle que $\|\psi_k\|_\infty \leqq 1$, (ψ_k) converge ponctuellement vers 0 dans L et (ψ_k) converge vers 1 (μ_1-presque partout). Dès lors, si on définit $T_1(\varphi) = \lim_{k\to\infty} T(\varphi\psi_k)$ et $T_2 = T - T_1$, on obtient :

$$\|T_1(\varphi)\| \leqq \pi_p(T)\|\varphi\|_{L^p(h_1\mu_1)}, \quad \|T_2(\varphi)\| \leqq \pi_p(T)\|\varphi\|_{L^p(\sigma+\mu_s)}. \tag{2}$$

Et donc :

$$\pi_p(T_1)^p + \pi_p(T_2)^p \leqq \pi_p(T)^p.$$

2) On désire étendre l'opérateur T_2 à tout l'espace $\mathscr{C}(X)$. Soit alors $F = \bigcup_n K_n$, K_n compact, $K_n \subset K_{n+1}$ tel que $\mu_s(X\setminus F) = 0 = \alpha(F)$. Puisque A est séparable et $A^\perp \subset L^1(\alpha)$, on peut définir une extension linéaire préservant la norme : $E_n : \mathscr{C}(K_n) \to A$ ([4]). Soit l'opérateur restriction : $R_n : \mathscr{C}(X) \to \mathscr{C}(K_n)$. On pose $S_n = E_n R_n$. Et on montre alors facilement que la suite $(T_2 S_n)$ converge en norme π_p.

3) De l'inégalité (2), on déduit que T_1 s'étend en un opérateur sur $H^\infty(h_1\mu_1)$ et donc en un opérateur sur $H^\infty(\mu_1)$.

Le théorème est ainsi démontré.

2. Le résultat principal de notre travail est le

Théorème 10. *Si une algèbre séparable uniforme A sur un compact X vérifie les deux conditions suivantes :*

(1) Il existe une suite (φ_n) dans le spectre de A telle que pour tout n, φ_n ait une unique mesure représentante μ_n sur X (les mesures μ_n sont mutuellement singulières);

(2) Il n'y a pas de mesure non nulle dans $A^\perp$ qui soit orthogonale à toutes les mesures μ_n.

Alors le dual de A a la propriété de Grothendieck, c'est-à-dire $B(A, l^1) = \Pi_2(A, l^1)$.

Démonstration. La démonstration du théorème est basée sur l'inégalité d'interpolation suivante.

Proposition 11. *Soit T 2-sommant sur A. Soient $2 < q < \infty$ et θ tels que*

$$\frac{1}{q'} = \theta + \frac{1-\theta}{2} \quad \left(q' = \frac{q}{q-1}\right).$$

Alors, pour tout $0 \leqq \varphi < \theta$, on a l'inégalité

$$i_q(T) \leqq C(\theta-\varphi)^{-1}\|T\|^\varphi \quad \pi_2(T)^{1-\varphi} \tag{A}$$

(où $i_q(T)$ désigne la norme q-intégrale de l'opérateur T).

Pour démontrer cette proposition, il suffit en fait ([1]) d'établir le lemme suivant.

Lemme 12. *Sous les hypothèses de la proposition et pour* $0<\delta<1$, *l'opérateur* T *a une décomposition* $T=I+S$ *où*

(1) I *est strictement q-intégral et*

$$i_q(I) \leqq \|R\|_2(\theta-\varphi)^{-1}\delta^{-C(1-\varphi)/2}\|T\|^{\varphi}\pi_2(T)^{1-\varphi}\,; \tag{B}$$

$$\|S\| \leqq C\|T\| \quad et \quad \pi_2(S) \leqq C\delta^{1/2}\pi_2(T). \tag{2}$$

Démonstration du lemme. En vertu du théorème 9, on peut identifier T avec sa composante T_1. Donc T s'étend à $H^\infty(m)$ (où m est une des mesures représentantes μ_i), il existe $f\in L^1_+(m)$, $\int f=1$ telle que pour tout $\varphi\in H^\infty(m)$, on ait

$$\|T(\varphi)\| \leqq \pi_2(T) \quad \|\varphi\|_{L^2(f\,dm)}.$$

Soient (c_i), (θ_i), (τ_i) les suites obtenues par application du lemme 8 à la fonction f et $0<\delta<1$. Définissons

$$I(\varphi) = T\big(\varphi \sum_i \theta_i\tau_i^2\big), \quad S = T-I.$$

On obtient ([1]) : $\|S\|\leqq C\|T\|$ et $\pi_2(S)\leqq C\cdot\delta^{1/2}\cdot\pi_2(T)$. On désire étendre I à $\mathscr{C}(X)$. Soit pour $\varphi\in A+\bar{A}$:

$$I(\varphi) = T\big(\sum_i \tau_i R(\theta_i\tau_i\varphi)\big),$$

$$\|I(\varphi)\| = \sup_F \Big|\int \big(\sum \tau_i R(\theta_i\tau_i\varphi)\big)F\Big|$$

pour $F\in L^1(m)$ tel que

$$\Big|\int \varphi F\,dm\Big| \leqq \|T\varphi\| \text{ pour tout } \varphi\in H^\infty(m).$$

On procède alors comme dans [1], $A+\bar{A}$ jouera dans ce cadre, le rôle de l'ensemble des polynômes trigonométriques. L'opérateur I s'étend à $\mathscr{C}(X)$ (densité de $A+\bar{A}$ dans $\mathscr{C}(X)$) et vérifie l'inégalité (B).

Revenons maintenant à la démonstration du théorème. Du théorème fondamental de Grothendieck $B(\mathscr{C}, l^1)=\Pi_2(\mathscr{C}, l^1)$ et de l'inégalité d'interpolation (A), nous obtenons l'équivalence des normes opérateur et 2-sommante pour les opérateurs de rang fini de A dans l^1. Puisque l^1 a la propriété d'approximation bornée, on obtient : $B(A, l^1)=\Pi_2(A, l^1)$.

3. Conséquences, exemples et problémes. Dans ce qui suit, A désignera une algèbre séparable uniforme vérifiant les conditions 1, 2 du théorème 10. Notons que l'on a démontré en fait le résultat suivant.

Corollaire 13. *Si* Y *est un espace de Banach ayant la propriété d'approximation bornée et tel que* $B(\mathscr{C}(X), Y)=\Pi_2(\mathscr{C}(X), Y)$ *alors* $B(A, Y)=\Pi_2(A, Y)$.

Corollaire 14. *Si Y est un espace de Banach de cotype 2 ayant la propriété d'approximation bornée, alors* $B(A, Y)=\Pi_2(A, Y)$.

Corollaire 15. *Si* $T\in\Pi_2(A, Y)$, *T s'étend en un opérateur $\tilde{T}$ sur $\mathscr{C}(X)$ tel que* $\|\tilde{T}\|\leqq C\|T\| \log(\Pi_2(T)/\|T\|)$.

Corollaire 16. *Tout opérateur de rang n sur A s'étend en un opérateur $\tilde{T}$ sur $\mathscr{C}(X)$ tel que* $\|\tilde{T}\|\leqq C(\log n)\|T\|$.

Corollaire 17. *Si X est un sous-espace de dimension n de A, complémenté par une projection P, X est un P_λ-espace avec* $\lambda\leqq C(\log n)\|T\|$.

Nous mentionnons quelques exemples d'algèbres vérifiant les hypothèses du théorème 10. Soit K un compact du plan complexe. $P(K)$ est l'algèbre uniforme des fonctions à valeurs complexes qui sont limites uniformes sur K de polynômes en z. $A(K)$ est l'algèbre des fonctions continues sur K et analytiques sur l'intérieur de K. $R(K)$ est l'algèbre des fonctions limites uniformes sur K de fonctions rationnelles avec pôles sur $\mathbf{C}/K$. Les algèbres suivantes (considérées sur leur frontière de Shilov) vérifient les hypothèses du théorème ([6]) : $P(K)$ pour tout compact K, $A(K)$ quand le complémentaire de K est connexe et $R(K)$ quand $R(K)$ est une algèbre de Dirichlet.

Remarque. Soient $0<r<R$ et $K_1=\{z\in\mathbf{C}\colon r\leqq|z|\leqq R\}$. $R(K_1)$ en tant qu'espace de Banach est isomorphe à l'algèbre du disque et le dual de $R(K_1)$ a la propriété de Grothendieck. Par contre, l'algèbre $R(K_1)$ ne vérifie par les hypothèses du théorème 10.

Problèmes. Si A a la propriété de Grothendieck et est isomorphe à sa c_0-somme directe, A' est de cotype 2. Il serait donc intéressant de savoir si, sous les hypothèses du théorème, l'algèbre A est isomorphe à sa c_0-somme directe.

Si A est une algèbre uniforme et μ une unique mesure représentante, l'espace $L^1(\mu)|_{H^1(\mu)}$ est-il de cotype 2 ?

Les résultats de J. Bourgain et ce travail conduisent à la question : tout opérateur 0-sommant de A (algèbre uniforme vérifiant les conditions du théorème 10) est-il nucléaire ?

Bibliographie

[1] J. Bourgain, Opérateurs sommants sur l'algèbre du disque, *Séminaire de Géométrie des espaces de Banach, Paris VII* (1982).

[1'] J. Bourgain, New Banach space properties of the disc algebra and H^∞, *Acta Math.*, **152** (1984), 1—48.

[2] I. I. Hirschman, Jr. et R. Rochberg, Conjugate function theory in weak* Dirichlet algebras *J. Funct. Anal.*, **16** (1974), 359—371.

[3] G. LUMER, *Algèbre de fonctions et espaces de Hardy*, Springer-Verlag (Berlin—Heidelberg—New York, 1968).
[4] A. PELCZYNSKI, *Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math.
[5] A. PIETSCH, Absolute p-summierende Abbildungen in normierten räumen, *Studia Math.*, **28** (1967), 333—353.
[6] P. WOJTASZCZYK, On weakly compact operators from some uniform algebras, *Studia Math.*, **64** (2) (1979), 105—116.

UNIVERSITÉ DE L'ETAT À MONS
FACULTÉ DES SCIENCES
AVENUE MAISTRIAU 15
7000 MONS BELGIQUE