Acta Sci. Math., 51 (1987), 185—189

Выпуклые комбинации бесконечных матриц отображений

Л. И. ПОЛОЦКИЙ, М. В. САПИР, Л. А. СКОРНЯКОВ

Посвящается памяти А. П. Хуна

В работе обобщается на бесконечный случай известная теорема Биркгофа о представлении дважды стохастических матриц в виде выпуклой комбинации матриц перестановок ([1], с. 58, теорема 4.8). Этот результат можно рассматривать как еще одно решение 111 проблемы Биркгофа (ср. [3]—[6]). На бесконечный случай обобщается и теорема о представлении стохастической матрицы в виде выпуклой комбинации матриц отображений ([2], с. 493, лемма 5).

Если X и Y — некоторые непустые множества, то $(X\times Y)$-матрицей называется любое отображение A прямого произведения $X\times Y$ в множество действительных чисел. Под X-матрицей понимается $(X\times X)$-матрица. Для матрицы A через A^* обозначается транспонированная матрица, то есть $(Y\times X)$-матрица, определяемая условием $A^*(y, x)=A(x, y)$ для любых x из X и y из Y. Назовем $(X\times Y)$-матрицу квазистохастической матрицей веса α, если выполнены следующие условия:

$$(+)\quad A(x, y)\geqq 0 \quad \text{для любых } x \text{ из } X \text{ и } y \text{ из } Y;$$

$$(\mathrm{S})\quad \sum_y A(a, y) = \alpha \quad \text{для каждого } a \text{ из } X.$$

Квазистохастическая матрица веса 1 называется стохастической. По любому отображению β: $X\to Y$ можно построить $(X\times Y)$-матрицу $M(\beta)$, полагая

$$M(\beta)(X, Y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \beta(x) = y, \\ 0, & \text{если} \quad \beta(x) \neq y. \end{cases}$$

Эта матрица, очевидно, является стохастической. Матрицы вида $M(\beta)$ будем называть матрицами отображений. Квазистохастическая X-матрица A веса

Поступило 22 июня 1986 г.

α называется дважды квазистохастической матрицей веса α, если A^* также является квазистохастической матрицей веса α. Если при этом $\alpha=1$, то A называется дважды стохастической матрицей. Если β — это перестановка множества X, то $M(\beta)$, как нетрудно видеть, дважды стохастическая матрица. Она называется матрицей перестановки. Если $A, B, \ldots, D$ — $(X\times Y)$-матрицы, а $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ — положительные действительные числа, то матрица

$$F=\alpha A+\beta B+\ldots+\delta D \tag{1}$$

называется положительной комбинацией матриц $A, B, \ldots, D$. Если при этом $\alpha+\beta+\ldots+\delta=1$, то F называется выпуклой комбинацией этих матриц. Далее, если $A, B, \ldots, D$ — [дважды] квазистохастические $(X\times Y)$-матрицы, то и F будет такой же, а если комбинация выпуклая и матрицы [дважды] стохастические, то F — [дважды] стохастическая матрица. Последнее утверждение, очевидно, можно обратить: если F и $A, B, \ldots, D$ — [дважды] стохастические, то комбинация (1) выпуклая. Содержанием матрицы A назовем множество

$$\{\alpha | A(x,y)=\alpha, \quad \alpha\neq 0 \quad \text{для некоторых } x, y\},$$

то есть множество всех ненулевых чисел, содержащихся в A. Условимся для любых двух $(X\times Y)$-матриц A и B писать $A\leqq B$, если $B(x,y)=0$ влечет $A(x,y)=0$ для любых x, y.

Теорема 1. *[Дважды] стохастическая матрица является выпуклой комбинацией матриц [перестановок] отображений тогда и только тогда, когда ее содержание конечно.*

Теорема 1'. *[Дважды] квазистохастическая матрица является положительной комбинацией матриц [перестановок] отображений тогда и только тогда, когда ее содержание конечно.*

В силу сделанных выше замечаний теоремы 1 и 1' эвивалентны, поэтому мы будем доказывать только теорему 1'. Необходимость ее условия очевидна. Доказательству достаточности предпошлем три леммы.

Лемма 1. *Пусть A — [дважды] квазистохастическая $(X\times Y)$-матрица. Тогда найдется матрица [перестановки] отображения $M(\beta)$, для которой $M(\beta)\leqq A$.*

Доказательство. В случае, когда матрица A квазистохастическая, утверждение леммы очевидно: для любого x из X полагаем $\beta(x)$ равным одному из таких y, что $A(x,y)\neq 0$. Если же A дважды квазистохастическая, то применяем [7], с. 693, теорема 2.

Лемма 2. *Если содрежание [дважды] стохастической матрицы A конечно и состоит из рациональных чисел, то A представима в виде положительной комбинации матриц [перестановок] отображений.*

Доказательство. Матрица A представима в виде положительной комбинации матриц $B, C, \ldots, D$ тогда и только тогда, когда матрица nA представима в таком виде, где n — любое положительное число. Поэтому можно считать, что все числа в матрице A целые. Проведем индукцию по весу α матрицы A. База индукции тривиальна: при $\alpha=1$ матрица A сама является матрицей [перестановки] отображения. В силу леммы 1 найдется матрица [перестановки] отображения $M(\beta)$, такая, что $M(\beta)<A$. Разность $A-M(\beta)$ является [дважды] квазистохастической матрицей веса $\alpha-1$. Следовательно, по предположению индукции $A-M(\beta)$ представима в виде положительной комбинации матриц [перестановок] отображений. Отсюда вытекает, что и матрица A представима в таком виде. Лемма доказана.

Всюду далее множество действительных чисел R рассматривается как пространство над полем рациональных чисел Q. Пусть L подпространство в R, Z — базис в L, а P — подмножество из L. Тогда базис Z назовем допустимым для P, если Z состоит из положительных чисел и каждое число из P выражается через Z с положительными коэффициентами.

Лемма 3. *Пусть L — конечномерное подпространство пространства действительных чисел, P — конечное подмножество положительных чисел из L. Тогда в L найдется базис, допустимый для P.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по числу элементов в P. Если в P один элемент, то можно его дополнить до базиса в L положительными числами. Ясно, что полученный базис допустим для P. Пусть для некоторого множества P найден допустимый базис Z. Возьмем произвольное положительное число p из $L\setminus P$. Надо найти базис в L, допустимый для $P\cup\{p\}$. Имеем:

$$p=\sum_1^m \alpha_i a_i-\sum_1^n \beta_j b_j$$

для некоторых a_i, b_j из Z и положительных рациональных α_i, β_j. Пусть d — наименьший общий знаменатель чисел α_i, β_j ($1\leqq i\leqq m$, $1\leqq j\leqq n$). Можно считать, что базис Z выбран так, что число $\sum d\beta_j$ наименьшее из возможных. Надо доказать, что это число равно 0 и, следовательно, базис Z допустим для $P\cup\{p\}$. Пусть это не так. Поскольку $p>0$, имеем:

$$\sum d\alpha_i a_i > d\beta_1 b_1 \geqq b_1,$$

откуда

$$\sum d\alpha_i a_i/b_1 > 1.$$

Разумеется, существуют такие рациональные положительные числа π_i ($1 \leqq i \leqq m$), что $\pi_i < a_i/b_1$ и $k = \sum d\alpha_i\pi_i > 1$. Положим $\delta_i = \pi_i/k$. Тогда $\sum d\alpha_i\delta_i > 1, \delta_i < a_i/b_1$. Заменим каждое число a_i из Z на $a_i' = a_i - \delta_i b_1$. Получим новый базис Z' пространства L. Так как $\delta_i > 0$, то каждое число, выражающееся с положительными рациональными коэффициентами через Z, выражается через Z' также с положительными рациональными коэффициентами. Поэтому базис Z' допустим для P. Имеем далее:

$$p = \sum \alpha_i a_i' - \beta_1' b_1 - \beta_2 b_2 - \ldots - \beta_n b_n, \quad \text{где} \quad \beta_1' = \beta_1 - 1/d.$$

Сумма $d\beta_1' + d\beta_2 + \ldots + d\beta_n$ меньше суммы $\sum d\beta_j$. Поскольку $\beta_1 d \geqq 1$, то $\beta_1' \geqq 0$, а так как наибольший общий делитель d' чисел $\beta_1', \beta_2, \ldots, \beta_n$ не превосходит d, то сумма $d'\beta_1' + \sum_{i=2}^{n} d'\beta_i$ меньше суммы $\sum d\beta_i$, что противоречит выбору базиса Z. Лемма доказана.

Теперь у нас все готово для доказательства теоремы 1'. Возьмем [дважды] квазистохастическую X-матрицу A веса α с конечным содержанием P. Рассмотрим подпространство L, натянутое на множество P. В силу леммы 3 в L существует базис Z, допустимый для P. Обозначим через π_z проекцию L на подпространство, натянутое на элемент z из Z. Тогда $A = \sum_{z \in Z} \pi_z(A)$. Пусть π — одна из проекций π_z, $B = \pi(A)$. Поскольку базис Z допустим для P, все числа в матрице B положительные. Возьмем произвольный x из X. Поскольку

$$\sum_y B(x, y) = \pi\Big(\sum_y A(x, y)\Big) = \pi(\alpha) \quad \text{и} \quad \sum_y B(y, x) = \pi\Big(\sum_y A(y, x)\Big),$$

матрица B является [дважды] квазистохастической. Все элементы матрицы B принадлежат одномерному подпространству, натянутому на некоторый элемент z из Z. Поэтому $B = zB'$, где B' — [дважды] квазистохастическая матрица, содержание которой конечно и состоит из рациональных чисел. В силу леммы 2 матрица B представима в виде положительной комбинации матриц [перестановок] отображений F_{zi}. Следовательно, матрица A также представима в виде положительной комбинации матриц F_{zi} по всем z из Z и всем i, что и требовалось.

Теоремы 1' и 1 доказаны.

Замечание. Из цитированной выше теоремы Биркгофа о представимости любой дважды стохастической матрицы конечных размеров в виде выпуклой комбинации матриц перестановок нельзя извлечь никаких оценок числа слагаемых в этом представлении. Из доказательства теоремы 1' вытекает, что это число зависит от содержания матрицы, но не зависит от ее размеров. Действительно, пусть A — дважды стохастическая матрица с конечным содержанием P, L — подпространство, натянутое на P, а Z — допустимый базис для P. Пусть k — число элементов в P. При доказательстве теоремы 1' показано, что матрица A равна положительной комбинации не более, чем k дважды квазистохастических матриц, в которых все числа рациональны (и зависят только от P). Если же в дважды квазистохастической матрице B все числа рациональны и d — их наименьший общий знаменатель, то, как показывает доказательство леммы 2, число матриц перестановок, необходимых для представления B в виде положительной комбинации, не превосходит максимального числа матрицы dB, которое зависит от P, но не от размеров матрицы A.

В заключение авторы хотели бы поблагодарить У. Э. Кальюлайда, обратившего их внимание на работу [7].

Литература

[1] F.-J. Fritz, B. Huppert, W. Willems, *Stochastische Matrizen,* Springer-Verlag (Berlin—Heidelberg—New York, 1979).

[2] G. Hognas, Random semigroup asts on a finite set, *J. Austral. Math. Soc.,* 23 (1977), 481—498.

[3] J. R. Isbell, Birkhoff's problem 111, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 6 (1955), 217—218.

[4] D. G. Kendall, On infinite double stochastic matrices and Birkhoff's problem 111, *J. London Math. Soc.,* 35 (1960), 81—84.

[5] B. A. Rattray, J. L. Peck, Infinite stochastic matrices, *Trans. Roy. Soc. Canada,* Sec. 3, 49 (1955), 55—57.

[6] P. Reverz, A probabilistic solution of problem 111 of G. Birkhoff, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* 13 (1962), 187—198.

[7] H. Perfect, H. Mirsky, The distribution of positive elements in doubly-stochastic matrices, *J. London Math. Soc.,* 40 (1965), 689—698.

(М. В. С.)
БОТАНИЧЕСКАЯ 23—31
620 083 СВЕРДЛОВСК, СССР

(Л. А. С.)
МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХМАТ.
119 899 МОСКВА, СССР