Acta Sci. Math., 50 (1986), 365—366

Представление полиномов Лагерра

О. В. ВИСКОВ

Пусть $D=d/dx$ — оператор дифференцирования и

(1) $$L_n^\alpha(x)=(1/n!)e^x x^{-\alpha}D^n[e^{-x}x^{n+\alpha}],\quad n=0,1,2,\ldots,$$

— обобщенные полиномы Лагерра (см. [1], 10.12). В настоящей заметке устанавливается справедливость следующего представления для полиномов $L_n^\alpha(x)$:

(2) $$L_n^\alpha(x)=(1/n!)x^{-n}e^x(x^2D+\alpha x+x)^n[e^{-x}].$$

Это соотношение является в известном смысле двойственным к формуле Родрига (1) и установленному в [2] представлению

(3) $$L_n^\alpha(x)=\big((-1)^n/n!\big)e^x(xD^2+\alpha D+D)^n[e^{-x}].$$

Отметим, что представление (3) в частном случае $\alpha=0$ было доказано Л. Б. Редеи [3].

Доказательство (2) можно было бы провести, опираясь на установленную в [2] операционную лемму и почти дословно следуя использованному там ходу рассуждений (с заменой оператора D оператором умножения на независимую переменную, и наоборот). Однако в настоящей заметке предлагается иное доказательство, основанное на единственности решения задачи Коши, для подходящего уравнения в частных производных.

В самом деле, хорошо известно [1], что

(4) $$\sum_{n\geqq 0}L_n^\alpha(x)t^n=(1-t)^{-\alpha-1}\exp\{xt/(t-1)\}.$$

Кроме того, ясно, что функция

$$u(t,x)=\sum_{n\geqq 0}(t^n/n!)(x^2D+\alpha x+x)^n[e^{-x}]$$

Поступило 5-ого февраля 1984.

дает решение задачи Коши

$$(5)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = x^2\frac{\partial u}{\partial x}+(\alpha+1)xu, \quad u|_{t=0} = e^{-x}.$$

С другой стороны, легко проверяется, что функция

$$u(t, x) = (1-xt)^{-\alpha-1}\exp\{x/(xt-1)\}$$

тоже является решением задачи Коши (5). Поэтому

$$(6)\qquad \sum_{n\geq 0}(t^n/n!)e^x(x^2D+\alpha x+x)^n[e^{-x}] = (1-xt)^{-\alpha-1}\exp\{x^2t/(xt-1)\}.$$

Сравнение (6) и (4) с учетом (2) завершает доказательство.

Литература

[1] Bateman Manuscript Project, *Higher Transcendental Functions*, vol. 2, McGraw-Hill (New York, 1953).

[2] О. В. Висков, О тождестве Л. Б. Редеи для полиномов Лагерра, *Acta Sci. Math.*, 39 (1977), 27—28.

[3] L. B. Rédei, An identity for Laguerre polynomials, *Acta Sci. Math.*, 37 (1975), 115—116.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА АН СССР
УЛ. ВАВИЛОВА 42
МОСКВА 117333, СССР