Acta Sci. Math., 50 (1986), 125—131

Toeplitz-Kriterien für Klassen von Matrixabbildungen zwischen Räumen stark limitierbarer Folgen

EBERHARD MALKOWSKY

1. Allgemeine Sätze

In [1] haben wir in Verbindung mit stark limitierbaren Folgen als Verallgemeinerung der Räume w_p $(0<p<\infty)$ von MADDOX [2] die Räume $[\tilde{C}]$ für alle $\alpha>0$ definiert, wobei $[\tilde{C}]$ mit den Bezeichnungen von [1] für die folgenden Mengen geschrieben worden ist: $(0<p<\infty)$

$$[\tilde{C}_\alpha]^p := \left\{x\in s \mid \text{Es gibt ein } l\in\mathbf{C} \text{ mit } \left(\|(x-le)^{(\nu)}(\alpha;\, p)\|_p\right)_\nu \in c_0\right\},$$

$$[\tilde{C}_\alpha]_0^p := \left\{x\in s \left| \left(\|x^{(\nu)}(\alpha;\, p)\|_p\right)_\nu \in c_0\right.\right\} \quad \text{und} \quad [\tilde{C}_\alpha]_\infty^p := \left\{x\in s \left| \left(\|x^{(\nu)}(\alpha;\, p)\|_p\right)_\nu \in l_\infty\right.\right\},$$

versehen mit der p-Norm für $0<p<1$ bzw. der Norm für $1\leq p<\infty$

$$\|x\|_{[\tilde{C}]} := \left\|\left(\|x^{(\nu)}(\alpha;\, p)\|_p\right)_\nu\right\|_\infty \quad \text{für alle} \quad x\in[\tilde{C}]$$

(s. [1], Definition 2.1, Definition 2.2).

Weiter haben wir in einigen Fällen Toeplitz-Kriterien für Klassen (X, Y) unendlicher komplexer Matrizen erhalten, die den Folgenraum X in den Folgenraum Y abbilden, wobei entweder $X=[\tilde{C}]$ oder $Y=[\tilde{C}]$.

Hier wollen wir Toeplitz-Kriterien für (X, Y) in dem Fall herleiten, in dem $X=[\tilde{C}]$ und $Y=[\tilde{C}]$. Wir benutzen dabei immer die in [1] eingeführten Bezeichnungen. Es seien stets $\alpha, \beta>0$.

Wir beweisen zunächst drei allgemeine Resultate, aus denen unter anderem die Toeplitz-Kriterien für die Klasse $([\tilde{C}_\alpha]^p, [\tilde{C}_\beta]^1)$ folgen.

Satz 1.1. *Sei X ein vollständiger r-normierter Teilraum von s. Gilt $X^\dagger\subset X^*$, so folgt:* $A\in(X, [\tilde{C}_\alpha]_\infty^1)\Leftrightarrow M(\dagger, \alpha)<\infty$, *wobei*

$$M(\dagger, \alpha) := \sup_{\mu\in\mathbf{N}_0}\left\{\max_{N_\mu\subset N^{(\mu)}} \left\|\left((1/A^\alpha_{2^\mu-1}) \sum_{n\in N_\mu} A^{\alpha-1}_{2^{\mu+1}-n}\, a_{nk}\right)_k\right\|^\dagger\right\} < \infty \quad (\alpha>0).$$

Eingegangen am 10. November 1983.

Beweis. Es gelte $A\in(X,[\tilde{C}_\alpha]^1_\infty)$. Dann existiert $A_n(x):=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k$ für alle $x\in X$ und für alle $n\in\mathbf{N}$, d. h. $(a_{nk})_k\in X^\dagger$ für alle $n\in\mathbf{N}$, und wegen $X^\dagger\subset X^*$ folgt $A_n\in X^*$ für alle $n\in\mathbf{N}$. Für alle $\mu\in\mathbf{N}_0$ und für alle $N_\mu\subset N^{(\mu)}$ setzen wir

$$B^\alpha_{N_\mu}:=(1/A^\alpha_{2^\mu-1})\sum_{n\in N_\mu}A^{\alpha-1}_{2^{\mu+1}-n}A_n \quad\text{und}\quad b^\alpha_{N_\mu,k}:=(1/A^\alpha_{2^\mu-1})\sum_{n\in N_\mu}A^{\alpha-1}_{2^{\mu+1}-n}a_{nk} \quad (k=1,2,\ldots).$$

Sei $\mu\in\mathbf{N}_0$ beliebig. Dann gilt für alle $N_\mu\subset N^{(\mu)}$ und für alle $x\in S_X$ wegen $B^\alpha_{N_\mu}\in X^*$

$$|B^\alpha_{N_\mu}(x)|=\Big|\sum_{k=1}^{\infty}b^\alpha_{N_\mu,k}x_k\Big|\leqq\|B^\alpha_{N_\mu}\|$$

und daher $\|(b^\alpha_{N_\mu,k})_k\|^\dagger\leqq\|B^\alpha_{N_\mu}\|$ für alle $N_\mu\subset N^{(\mu)}$, also für alle $\mu\in\mathbf{N}_0$:

$$\|(b^\alpha_{N'_\mu,k})_k\|^\dagger:=\max_{N_\mu\subset N^{(\mu)}}\|(b^\alpha_{N_\mu,k})_k\|^\dagger\leqq\|B^\alpha_{N''_\mu}\|:=\max_{N_\mu\subset N^{(\mu)}}\|B^\alpha_{N_\mu}\|.$$

Wegen $A\in(X,[\tilde{C}_\alpha]^1_\infty)$ gilt für alle $x\in X$

$$\varlimsup_{\mu\to\infty}|B^\alpha_{N''_\mu}(x)|\leqq\varlimsup_{\mu\to\infty}\big\|((A_n(x))^{(\mu)}(\alpha;\,1))_n\big\|_1\leqq\big\|(A_n(x))_n\big\|_{[C]}<\infty.$$

Mit dem Satz von Banach—Steinhaus (s. [3], Satz 12, S. 115, bzw. [2], S. 286) folgt

$$\sup_{\mu\in\mathbf{N}_0}\|(b^\alpha_{N'_\mu,k})_k\|^\dagger=M(\dagger,\alpha)\leqq\sup_{\mu\in\mathbf{N}_0}\|B^\alpha_{N''_\mu}\|<\infty.$$

Umgekehrt gelte $M(\dagger,\alpha)<\infty$.

Seien $n\in\mathbf{N}$ und $x\in X$ beliebig. Dann gibt es ein $\mu_n\in\mathbf{N}_0$ mit $n\in N^{(\mu_n)}$. Wähle $N_{\mu_n}:=\{n\}$. Wegen $M(\dagger,\alpha)<\infty$ und der Definition von $\|\cdot\|^\dagger$ existiert dann

$$(1/A^\alpha_{2^{\mu_n}-1})A^{\alpha-1}_{2^{\mu_n}+1-n}A_n(x)$$

und damit auch $A_n(x)$ für alle $n\in\mathbf{N}$ und für alle $x\in X$. Sei $x\in X$ beliebig. Dann gilt für alle $\mu\in\mathbf{N}_0$ und für alle $N_\mu\subset N^{(\mu)}$

$$|B^\alpha_{N_\mu}(x)|\leqq\|(b^\alpha_{N_\mu,k})\|^\dagger\|x\|^{1/r}\leqq\max_{N_\mu\subset N^{(\mu)}}\|(b^\alpha_{N_\mu,k})_k\|^\dagger\|x\|^{1/r}=:M(\mu)\|x\|^{1/r}$$

und damit für alle $\mu\in\mathbf{N}_0$ mit einer bekannten Ungleichung (s. [4], S. 33)

$$\big\|((A_n(x))^{(\mu)}(\alpha;\,1))_n\big\|_1\leqq4\cdot\max_{N_\mu\subset N^{(\mu)}}|B^\alpha_{N_\mu}(x)|\leqq4\cdot M(\mu)\|x\|^{1/r},$$

d. h.

(1.1) $$\big\|(A_n(x))_n\big\|_{[C]}=\big\|(\|((A_n(x))^{(\mu)}(\alpha;\,1))_n\|_1)_\mu\big\|_\infty\leqq$$
$$\leqq\sup_{\mu\in\mathbf{N}_0}4\cdot M(\mu)\|x\|^{1/r}=4\cdot M(\dagger,\alpha)\cdot\|x\|^{1/r}<\infty.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 1.2. *Sei X ein vollständiger r-normierter Teilraum von s mit Basis $(e^{(k)})_k$. Dann gilt für alle* $\alpha>0$

$$A\in(X,[\tilde{C}_\alpha]^1)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{(i)} & M(\dagger,\alpha)<\infty \quad (M(\dagger,\alpha) \text{ wie in Satz 1.1})\\ \text{(ii)} & (a_{nk})_n\in[\tilde{C}_\alpha]^1 \text{ für alle } k=1,2,\dots.\end{cases}$$

Beweis. Wie im Beweis von Satz 1.1 in [1] folgt $X^\dagger\subset X^*$. Es gelte $A\in(X,[\tilde{C}_\alpha]^1)$. Wegen $[\tilde{C}_\alpha]^1\subset[\tilde{C}_\alpha]^1_\infty$ folgt $A\in(X,[\tilde{C}_\alpha]^1_\infty)$ und daher (i) mit Satz 1.1. Weiter ist $(A_n(x))_n\in[\tilde{C}_\alpha]^1$ für alle $x\in X$, d. h. insbesondere gilt für jedes $x=e^{(k)}\in X$ $(k=1,2,\dots)$ $(A_n(e^{(k)}))_n=(a_{nk})_n\in[\tilde{C}_\alpha]^1$.

Umgekehrt seien (i) und (ii) erfüllt. Aus (i) folgt wie im Beweis von Satz 1.1 die Existenz von $A_n(x):=\sum_{k=1}^\infty a_{nk}x_k$ für alle $x\in X$ und für alle $n\in\mathbf{N}$. Wegen (ii) gibt es zu jedem $k=1,2,\dots$ ein $a_k\in\mathbf{C}$ mit

$$\lim_{\mu\to\infty}\left\|\left((a_{nk}-a_k)^{(\mu)}(\alpha;\,1)\right)_n\right\|_1=0. \tag{1.2}$$

Es gilt dann $(a_k)_k\in X^\dagger$. Denn: Sei $x=\sum_{k=1}^\infty x_k e^{(k)}\in X$ beliebig; sei $\varepsilon>0$ gegeben. Wähle $k_0\in\mathbf{N}$ so groß, daß für alle l, $m>k_0$ $(m>l)$ mit

$$x^{(l,m)}:=\sum_{k=l}^m x_k e^{(k)} \quad \text{gilt} \quad \|x^{(l,m)}\|<\left(\varepsilon/(4\cdot M(\dagger,\alpha)+1)\right)^r.$$

Wähle nun $\mu_0\in\mathbf{N}_0$, so daß für alle $\mu\geqq\mu_0$ gilt $1-1/A^\alpha_{2^\mu-1}>0$. Dann gilt für alle l, $m>k_0$ $(m>l)$ und für alle $\mu>\mu_0$ mit $S_\mu:=\sum_{k=l}^m\left(\|((a_k-a_{nk})^{(\mu)}(\alpha,1))_n\|_1|x_k|\right)$ und der Ungleichung aus [4], S. 33

$$\left(1-(1/A^\alpha_{2^\mu-1})\right)\left|\sum_{k=l}^m a_kx_k\right|=(1/A^\alpha_{2^\mu-1})\sum_{n=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}-1}A^{\alpha-1}_{2^{\mu+1}-n}\left|\sum_{k=l}^m a_kx_k\right|\leqq$$

$$\leqq\left\|\left(\left(\sum_{k=l}^m a_kx_k\right)^{(\mu)}(\alpha;\,1)\right)_n\right\|_1\leqq\sum_{k=l}^m\left\|\left((a_k-a_{nk})^{(\mu)}(\alpha;\,1)\right)_n\right\|_1|x_k|+$$

$$+4\cdot\max_{N_\mu\subset N^{(\mu)}}\left|(1/A^\alpha_{2^\mu-1})\sum_{n\in N_\mu}A^{\alpha-1}_{2^{\mu+1}-n}\sum_{k=l}^m a_kx_k\right|\leqq$$

$$\leqq S_\mu+4\cdot\max_{N_\mu\subset N^{(\mu)}}\left\|\left((1/A^\alpha_{2^\mu-1})\sum_{n\in N_\mu}A^{\alpha-1}_{2^{\mu+1}-n}a_k\right)_k\right\|^\dagger\|x^{(l,m)}\|^{1/r}<S_\mu+\varepsilon.$$

Mit (1.2) erhalten wir $\lim_{\mu\to\infty}S_\mu=0$, d. h. es gilt für alle l, $m>k_0$ $(m>l)$

$$\left|\sum_{k=l}^m a_kx_k\right|=\lim_{\mu\to\infty}\left(1-(1/A^\alpha_{2^\mu-1})\right)\left|\sum_{k=l}^m a_kx_k\right|\leqq\varepsilon.$$

Also konvergiert $\sum_{k=1}^\infty a_kx_k$ für alle $x\in X$, d. h. $(a_k)_k\in X^\dagger$. Wegen $X^\dagger\subset X^*$ gilt

$f_a \in X^*$ mit $f_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$. Sei $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{(k)} \in X$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $k_0 \in \mathbf{N}$ so groß, daß für $r_0(x) := \sum_{k=k_0+1}^{\infty} x_k e^{(k)}$ gilt

$$\|r_0(x)\|^{1/r} < \frac{\varepsilon}{2(4 \cdot M(\dagger, \alpha) + 2\|f_a\|) + 1}.$$

Wähle $\mu_0 \in \mathbf{N}_0$, so daß für alle $\mu > \mu_0$

$$\Big\|\Big(\Big(\sum_{k=1}^{k_0} (a_{nk} - a_k) x_k\Big)^{(\mu)}(\alpha;\ 1)\Big)_n\Big\|_1 < \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad 1/A^{\alpha}_{2^{\mu}-1} < 1.$$

Dann gilt für alle $\mu > \mu_0$ mit der Ungleichung aus [4], S. 33:

$$\begin{aligned}\Big\|\Big((A_n(x) - f_a(x))^{(\mu)}(\alpha;\ 1)\Big)_n\Big\|_1 &\leqq \Big\|\Big(\Big(\sum_{k=1}^{k_0} (a_{nk} - a_k) x_k\Big)^{(\mu)}(\alpha;\ 1)\Big)_n\Big\|_1 + \\ &+ \Big\|\Big((A_n(r_0(x)))^{(\mu)}(\alpha;\ 1)\Big)_n\Big\|_1 + \Big\|\Big((f_a(r_0(x)))^{(\mu)}(\alpha;\ 1)\Big)_n\Big\|_1 < \\ &< \varepsilon/2 + (4 \cdot M(\dagger, \alpha) + 2 \cdot \|f_a\|)\,\|r_0(x)\|^{1/r} < \varepsilon,\end{aligned}$$

d. h. $(A_n(x))_n \in [\tilde{C}_\alpha]^1$ für alle $x \in X$. Damit ist der Satz bewiesen.

Man erhält sofort:

Korollar 1.1. *Sei X ein vollständiger r-normierter Teilraum von s mit Basis $(e^{(k)})_k$. Dann gilt für alle* $\alpha > 0$

$$A \in (X, [\tilde{C}_\alpha]^1_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & M(\dagger, \alpha) < \infty \quad (M(\dagger, \alpha) \text{ wie in Satz } 1.1) \\ \text{(ii)} & (a_{nk})_n \in [\tilde{C}_\alpha]^1_0 \text{ für alle } k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

2. Toeplitz-Kriterien für Matrizenklassen bei den Räumen $[\tilde{C}]$

Wir wenden nun die Ergebnisse aus Kapitel 1 an. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen setzen wir:

$$M(p;\ \alpha) := \sup_{\mu \in \mathbf{N}_0} \Big\{\max_{N_\mu \subset N^{(\mu)}} \Big\|\Big((1/A^{\alpha}_{2^{\mu}-1}) \sum_{n \in N_\mu} A^{\alpha-1}_{2^{\mu+1}-1-n} a_{nk}\Big)_k\Big\|_q\Big\} \quad \text{für} \quad 0 < p \leqq \infty,$$

wobei

$$\text{(2.1)} \qquad q := \begin{cases} \infty & \text{für} \quad 0 < p \leqq 1 \\ p/(p-1) & \text{für} \quad 1 < p < \infty \\ 1 & \text{für} \quad p = \infty; \end{cases}$$

$$M(\alpha, p;\ \beta) := \sup_{\mu \in \mathbf{N}_0} \Big\{\max_{N_\mu \subset N^{(\mu)}} \Big\|\Big((1/A^{\beta}_{2^{\mu}-1}) \sum_{n \in N_\mu} A^{\beta-1}_{2^{\mu+1}-1-n} a_{nk}\Big)_k\Big\|_{([\tilde{C}_\alpha]^p_\infty)^\dagger}\Big\}$$

für $0 < p < \infty$.

Wir erhalten Sätze, die für alle $\alpha>0$, $\beta>0$ Toeplitz-Kriterien zwischen folgenden Räumen angeben:

(a) aus Räumen absolut limitierbarer Folgen in Räume stark beschränkter bzw. stark limitierbarer Folgen:

Satz 2.1. $A\in(l_p,[\tilde{C}_\alpha]^1_\infty)\Leftrightarrow M(p;\alpha)<\infty$ *für* $0<p\leqq\infty$.

Und im weiteren stets für alle p mit $0<p<\infty$:

Satz 2.2. $A\in(l_p,[\tilde{C}_\alpha]^1_0)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{(i)} & M(p;\alpha)<\infty\\ \text{(ii)} & (a_{nk})_n\in[\tilde{C}_\alpha]^1_0 \quad \textit{für alle} \quad k=1,2,\ldots.\end{cases}$

Satz 2.3. $A\in(l_p,[\tilde{C}_\alpha]^1)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{(i)} & M(p;\alpha)<\infty\\ \text{(ii)} & (a_{nk})_n\in[\tilde{C}_\alpha]^1 \quad \textit{für alle} \quad k=1,2,\ldots.\end{cases}$

(b) aus Räumen stark beschränkter Folgen in Räume stark beschränkter Folgen:

Satz 2.4. $A\in([\tilde{C}_\alpha]^p_\infty,[\tilde{C}_\beta]^1_\infty)\Leftrightarrow M(\alpha,p;\beta)<\infty$.

(c) aus Räumen stark limitierbarer Folgen in Räume stark beschränkter bzw. stark limitierbarer Folgen:

Satz 2.5. $([\tilde{C}_\alpha]^p_0,[\tilde{C}_\beta]^1_\infty)=([\tilde{C}_\alpha]^p,[\tilde{C}_\beta]^1_\infty)=([\tilde{C}_\alpha]^p_\infty,[\tilde{C}_\beta]^1_\infty)$.

Satz 2.6. $A\in([\tilde{C}_\alpha]^p_0,[\tilde{C}_\beta]^1_0)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{(i)} & M(\alpha,p;\beta)<\infty\\ \text{(ii)} & (a_{nk})_n\in[\tilde{C}_\beta]^1_0 \quad \textit{für alle} \quad k=1,2,\ldots.\end{cases}$

Satz 2.7. $A\in([\tilde{C}_\alpha]^p_0,[\tilde{C}_\beta]^1)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{(i)} & M(\alpha,p;\beta)<\infty\\ \text{(ii)} & (a_{nk})_n\in[\tilde{C}_\beta]^1 \quad \textit{für alle} \quad k=1,2,\ldots.\end{cases}$

Satz 2.8. $A\in([\tilde{C}_\alpha]^p,[\tilde{C}_\beta]^1_0)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{(i)} & M(\alpha,p;\beta)<\infty\\ \text{(ii)} & (a_{nk})_n\in[\tilde{C}_\beta]^1_0 \quad \textit{für alle} \quad k=1,2,\ldots\\ \text{(iii)} & \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{nk}\right)_n\in[\tilde{C}_\beta]^1_0.\end{cases}$

Satz 2.9. $A\in([\tilde{C}_\alpha]^p,[\tilde{C}_\beta]^1)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{(i)} & M(\alpha,p;\beta)<\infty\\ \text{(ii)} & (a_{nk})_n\in[\tilde{C}_\beta]^1 \quad \textit{für alle} \quad k=1,2,\ldots\\ \text{(iii)} & \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{nk}\right)_n\in[\tilde{C}_\beta]^1.\end{cases}$

(d) aus Räumen gewöhnlich limitierbarer Folgen in Räume stark limitierbarer Folgen:

Satz 2.10. $A\in(c_0,[\tilde{C}_\alpha]^1_0)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{(i)} & M(1;\alpha)<\infty\\ \text{(ii)} & (a_{nk})_n\in[\tilde{C}_\alpha]^1_0 \quad \textit{für alle} \quad k=1,2,\ldots\end{cases}$

Satz 2.11. $A\in(c_0,[\tilde{C}_\alpha]^1)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{(i)} & M(1;\alpha)<\infty\\ \text{(ii)} & (a_{nk})_n\in[\tilde{C}_\alpha]^1 \quad \textit{für alle} \quad k=1,2,\ldots.\end{cases}$

Satz 2.12. $A\in(c,[\tilde{C}_\alpha]_0^1) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & M(1;\,\alpha)<\infty \\ \text{(ii)} & (a_{nk})_n\in[\tilde{C}_\alpha]_0^1 \quad \textit{für alle} \quad k=1,2,\ldots \\ \text{(iii)} & \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\right)_n\in[\tilde{C}_\alpha]_0^1. \end{cases}$

Satz 2.13. $A\in(c,[\tilde{C}_\alpha]^1) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & M(1;\,\alpha)<\infty \\ \text{(ii)} & (a_{nk})_n\in[\tilde{C}_\alpha]^1 \quad \textit{für alle} \quad k=1,2,\ldots \\ \text{(iii)} & \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\right)_n\in[\tilde{C}_\alpha]^1. \end{cases}$

Bemerkung. Satz 2.9 enthält im Fall $\alpha=\beta=1$ einen bekannten Satz von KUTTNER und THORPE [5] (Satz 1).

Beweis der Sätze 2.1 bis 2.13. Wegen $l_p^*\cong l_p^\dagger=l_q$ $\left(0<p<\infty;\right.$ mit q wie in $\left.(2.1)\right)$ und $l_\infty^\dagger\subset l_\infty^*$ folgt Satz 2.1 aus Satz 1.1, und da weiter $(e^{(k)})_k$ für $0<p<\infty$ eine Basis für l_p ist, folgen die Sätze 2.2 bzw. 2.3 aus Korollar 1.1 bzw. Satz 1.2.

Im folgenden sei stets $0<p<\infty$. Wegen $([\tilde{C}_\alpha]_\infty^p)^\dagger\subset([\tilde{C}_\alpha]_\infty^p)^*$ (s. [1], (3.1)) folgen die Sätze 2.4 und 2.5 aus Satz 1.1, und da $([\tilde{C}_\alpha]_0^p)^\dagger\cong([\tilde{C}_\alpha]_0^p)^*$ (s. [1], Satz 3.1 (b)) und $(e^{(k)})_k$ eine Basis für $[\tilde{C}_\alpha]_0^p$ ist (s. [1], Satz 2.1 (b)), folgen die Sätze 2.6 bzw. 2.7 aus Korollar 1.1 bzw. Satz 1.2.

Die Notwendigkeit der Bedingungen der Sätze 2.8 und 2.9 ist klar. Die Hinlänglichkeit der Bedingungen von Satz 2.9 ergibt sich wie folgt: Aus (ii) und (iii) folgt: zu jedem $k=1,2,\ldots$ gibt es ein $a_k\in\mathbf{C}$ mit

$$\lim_{\mu\to\infty}\left\|\left((a_{nk}-a_k)^{(\mu)}(\beta;\,1)\right)_n\right\|_1=0, \tag{2.2}$$

und es gibt ein $a\in\mathbf{C}$ mit

$$\lim_{\mu\to\infty}\left\|\left(\left(a-\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\right)^{(\mu)}(\beta;\,1)\right)_n\right\|_1=0. \tag{2.3}$$

Aus (i) und (ii) folgt weiter

$$(a_k)_k\in([\tilde{C}_\alpha]^p)^\dagger, \tag{2.4}$$

und es gibt ein $M\in\mathbf{R}$ mit

$$\sup_{\mu\in\mathbf{N}_0}\left\{\max_{N_\mu\subset N^{(\mu)}}\left\|\left((1/A_{2^\mu-1}^\beta)\sum_{n\in N_\mu}A_{2^{\mu+1}-n}^{\beta-1}a_k\right)_k\right\|_{([\tilde{C}_\alpha]_\infty^p)^\dagger}\right\}\leqq M. \tag{2.5}$$

Für alle $x\in[\tilde{C}_\alpha]^p$ und für alle $n\in\mathbf{N}$ schreiben wir

$$A_n(x)-l\left(a-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\right)-\sum_{k=1}^{\infty}a_kx_k=\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk}-a_k)(x_k-l)+l\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}-a\right), \tag{2.6}$$

wobei $l\in\mathbf{C}$ mit $\lim_{\nu\to\infty}\|(x-le)^{(\nu)}(\alpha;p)\|_p=0$, a_k aus (2.2) $(k=1,2,\ldots)$ und a aus

(2.3). Wegen (i) existiert $A_n(x)$ für alle $n\in\mathbf{N}$, wegen (iii) existiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ für alle $n\in\mathbf{N}$, und es ist $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}-a)_n\in[\tilde{C}_\beta]_0^1$, und wegen (2.4) existieren $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ und wegen $le\in[\tilde{C}_\alpha]_0^p$ auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nach Satz 2.6 gilt wegen (2.2), (2.5) und (i) mit $\tilde{A}=(\tilde{a}_{nk})_{n,k}:=(a_{nk}-a_k)_{n,k}$:

$$\tilde{A}\in([\tilde{C}_\alpha]_0^p, [\tilde{C}_\beta]_0^1).$$

Da $x-le\in[\tilde{C}_\alpha]_0^p$ ist, existiert $\tilde{A}_n(x-le)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk}-a_k)(x_k-l)$ für alle $n\in\mathbf{N}$, und es gilt $(\tilde{A}_n(x))_n\in[\tilde{C}_\beta]_0^1$. Aus (2.6) folgt daher

$$(A_n(x)-(l(a-\sum_{k=1}^{\infty} a_k)+\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k))_n\in[\tilde{C}_\beta]_0^1,$$

d. h. $(A_n(x))_n\in[\tilde{C}_\beta]^1$.

Die Hinlänglichkeit der Bedingungen von Satz 2.8 ergibt sich genau wie im Fall von Satz 2.9 mit $a_k=0$ $(k=1, 2, \ldots)$ und $a=0$.

Da $c_0^*\cong c_0^+=l_1$ und $(e^{(k)})_k$ eine Basis für c_0 ist, folgen die Sätze 2.10 bzw. 2.11 aus Korollar 1.1 bzw. Satz 1.2.

Die Notwendigkeit der Bedingungen der Sätze 2.12 und 2.13 ist klar. Die Hinlänglichkeit der Bedingungen der Sätze 2.13 und 2.12 ergibt sich ähnlich wie im Fall der Sätze 2.9 und 2.8.

Literatur

[1] E. Malkowsky, Toeplitz-Kriterien für Matrizenklassen stark limitierbarer Folgen, *Acta Sci. Math.*, **48** (1985), 297—313.

[2] I. J. Maddox, On Kuttner's Theorem, *J. London Math. Soc.*, 43 (1968), 285—290.

[3] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press (Cambridge, 1970).

[4] A. Peyerimhoff, Über ein Lemma von Herrn H. C. Chow, *J. London Math. Soc.*, 32 (1957), 33—36.

[5] B. Kuttner, B. Thorpe, Matrix Transformations of Strongly Summable Series, *J. London Math. Soc.* (2), **11** (1975), 195—206.

MATHEMATISCHES INSTITUT
JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT
IHERINGSTR. 6
6300 GIESSEN, BRD