Acta Sci. Math., 49 (1985), 365—385

Espaces de James généralisés et espaces de type E.S.A.

CATHERINE FINET

Introduction. A partir d'un espace engendré par une suite I.S. (« invariant under spreading » c'est-à-dire invariante par étalement, voir paragraphe 1), monotone inconditionnelle, A. BRUNEL et L. SUCHESTON ont construit dans [4] un espace de type E.S.A. (« equal signs additive ») défini comme suit:

Définition 1. Soit $(F, |\cdot|)$ un espace de Banach engendré par une suite (x_n) normalisée, I.S. monotone inconditionnelle, pour $a=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, posons:

$$M(a) = \sup_{\pi} \left|\left(\sum_{j\in I_1} a_j\right)x_1+\ldots+\left(\sum_{j\in I_k} a_j\right)x_k\right|$$

où π désigne l'ensemble de toutes les partitions de $\{1, \ldots, n\}$ en intervalles consécutifs disjoints: $I_1, \ldots, I_k$ $(1\leqq k\leqq n)$. L'espace engendré par (x_n) pour la norme M est de type E.S.A. (il sera noté G).

Nous allons établir que cet espace se rattache à une classe d'espaces de James.

Définition 2. [9] Soit $(F, |\cdot|)$ un espace de Banach engendré par une suite (x_n) basique, monotone, normalisée; pour une suite de réels $a=(a_1, a_2, \ldots)$ posons:

$$\|a\|_J = \sup \left|\sum_{k=1}^{n} (a_{p_{2k-1}} - a_{p_{2k}})x_k + a_{p_{2n+1}}x_{n+1}\right|$$

où le supremum est pris sur tous les naturels n et les suites croissantes d'entiers $p_1, \ldots, p_{2n+1}$.

L'espace de James généralisé J est l'espace de Banach de tous les a tels que $\|a\|_J$ est finie et $\lim_n a_n=0$.

Notons que si l'on choisit pour F l'espace l^2 et pour (x_n) sa base canonique, la définition 2 fournit l'espace de Banach J initialement introduit par R. C. JAMES [7]. P. G. CASAZZA et R. H. LOHMAN ont obtenu les résultats suivants [9]: La suite (e_n) des vecteurs unités est une suite basique dans J. Si (x_n) est symétrique

Reçu le 22 mars, 1983.

et complète (« boundedly complete ») dans F, (e_n) est une base de J. Si F est réflexif et (x_n) symétrique, « p-Hilbertienne sur des blocs » $(1<p<\infty)$ dans F, (e_n) est une base contractante (« shrinking ») de J et J est quasi-réflexif d'ordre 1.

Dans cet article, nous étendons ces résultats aux bases (normalisées, monotones) sous-symétriques. Nous étudions entre autres la question: quand la suite (e_n) est-elle une base de J? P. G. Casazza et R. H. Lohman y ont répondu mais de façon partielle en posant comme condition: (x_n) complète dans F. Nous avons voulu affiner ce résultat et nous sommes arrivés à la conclusion que (e_n) est également une base de J si (x_n) est équivalente à la base canonique de c_0. Nous montrons qu'en fait hormis ces deux cas (hypothèse de P. G. Casazza et R. H. Lohman et hypothèse citée ci-dessus) (e_n) n'est pas une base de J (théorème 1).

Nous supposons la base (x_n) de F sous-symétrique et nous smontrons que l'espace de James J associé est (lorsque (e_n) est une base de J) isomorphe à l'espace de A. Brunel et L. Sucheston G. Ceci précise donc l'affirmation de A. BRUNEL et L. SUCHESTON [4, introduction] selon laquelle on obtiendrait le dual de l'espace construit par R. C. JAMES [7] si l'on choisit pour la norme inconditionnelle de la définition 1 la norme de l^2.

Nous examinons cet espace G dans l'intention d'apporter une réponse aux questions suivantes: quand G est-il isomorphe à c_0, l^1?, quand contient-il un sous-espace isomorphe à c_0, l^p? Nous parvenons aux résultats: G est isomorphe à c_0 (respectivement l^1) si et seulement si F est isomorphe à c_0 (respectivement l^1). G contient c_0 si et seulement si F contient c_0.

Si F contient l^p, il en va de même pour G; mais nous ne savons pas si « G contient l^p » implique « F contient l^p ». Pour $p=1$: P. G. Casazza et R. H. Lohman ont imposé la condition: (x_n) est q-Hilbertienne sur des blocs $(1<q<\infty)$; ils en ont déduit que J a une base contractante. De notre côté, nous considérons la propriété $(\mathscr{P})$ pour une base (x_n): « toute suite basique bornée de blocs sur (x_n) converge en moyenne de Cesàro vers zéro »; et nous établissons le résultat suivant (théorème 4): si (x_n) a la propriété $(\mathscr{P})$ dans F, G a une base contractante: $(x'_n)_{n\geq 1}=$ $=(x_1, x_2, -x_1, \ldots, x_n-x_{n-1}, \ldots)$ et G est quasi-réflexif d'ordre 1 si de plus F ne contient pas c_0. La condition: « (x_n) est p-Hilbertienne sur des blocs $(1<p<\infty)$ » de P. G. Casazza et R. H. Lohman implique la nôtre: « (x_n) a la propriété $(\mathscr{P})$ ».

Nous étudions ces deux propriétés et nous montrons entre autres que

$(x_n)_{n\geq 1}$ a la propriété $(\mathscr{P})$ dans F si $(x'_n)_{n\geq 1}$ a la propriété $(\mathscr{P})$ dans G.

$(x_n)_{n\geq 1}$ a la propriété $(\mathscr{P})$ dans F implique

1⁰) F ne contient pas de sous-espace isomorphe à l^1 (la réciproque n'étant pas vraie);

2⁰) F a la propriété de Banach—Saks faible (la réciproque n'étant pas vraie).

Finalement, nous obtenons: (x_n) est p-Hilbertienne sur des blocs $(1<p\leq\infty)$ si

et seulement si (x_n) est B-convexe sur des blocs ou encore si et seulement si l^1 n'est pas finiment représentable en blocs dans (x_n).

En terminant cette introduction, nous avons à coeur de remercier chaleureusement Messieurs B. Beauzamy et G. Noël qui l'un par ses conseils, remarques et suggestions, l'autre par sa compréhension ont permis la réalisation de ce travail.

1. Préliminaires. Soit S l'espace vectoriel des suites réelles à support fini; nous rappelons qu'une base $(x_n)_{n\geqq 1}$ d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ est *monotone* si sa constante de base est 1; *monotone inconditionnelle* si pour tout A, B, ensembles finis de naturels, et pour tout $a\in S$, $A\subset B$ implique:

$$\Big\|\sum_{i\in A} a_i x_i\Big\| \leqq \Big\|\sum_{i\in B} a_i x_i\Big\|;$$

sous-symétrique si elle est inconditionnelle et si pour toute suite croissante d'entiers $(n_i)_{i\geqq 1}$, $(x_{n_i})_{i\geqq 1}$ est équivalente à $(x_n)_{n\geqq 1}$; *symétrique* si pour toute permutation π des entiers, $(x_n)_{n\geqq 1}$ est équivalente à $(x_{\pi(n)})_{n\geqq 1}$; *p-Hilbertienne sur des blocs* $(1\leqq p<\infty)$ s'il existe une constante K telle que pour toute suite basique bornée de blocs $(w_n)_{n\geqq 1}$ sur la base $(x_n)_{n\geqq 1}$ et toute suite $(a_n)_{n\geqq 1}$ de scalaires:

$$\Big\|\sum_{n=1}^{k} a_n w_n\Big\| \leqq (K\cdot\sup_n \|w_n\|)\Big(\sum_{n=1}^{k} |a_n|^p\Big)^{1/p} \quad (k = 1, 2, \ldots);$$

complète (« boundedly complete ») si pour toute suite de scalaires $(a_n)_{n\geqq 1}$ telle que le supremum $\sup_n\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big\|$ soit fini, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ converge; *k-contractante* (« k-shrinking ») avec k dans $\mathbf{N}$ si l'adhérence de l'espace engendré par les « applications coordonnées » dans le dual X^* de X est de codimension k; *contractante* (« shrinking ») si $(x_n)_{n\geqq 1}$ est 0-contractante, c'est-à-dire si l'adhérence de l'espace engendré par les « applications coordonnées » coïncide avec X^*.

Un espace de Banach X est *quasi-réflexif (d'ordre n)* si le plongement canonique de X dans son bidual X^{**} est de codimension finie (de codimension n). Soit $(x_n)_{n\geqq 1}$ une suite normalisée qui engendre un espace de Banach X. $(x_n)_{n\geqq 1}$ est de type I.S. (« invariant under spreading ») si pour tout $a\in S$ et pour toute suite strictement croissante d'entiers (k_i),

$$\Big\|\sum_i a_i x_i\Big\| = \Big\|\sum_i a_i x_{k_i}\Big\|;$$

$(x_n)_{n\geqq 1}$ est de type E.S.A. (« equal signs additive ») si pour tout $a\in S$ et pour tout entier $k\geqq 1$ tel que $a_k\cdot a_{k+1}\geqq 0$,

$$\Big\|\sum_i a_i x_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i + (a_k+a_{k+1})x_k + \sum_{i\geqq k+2} a_i x_i\Big\|.$$

2. Dans ce paragraphe nous rappelons et étudions certaines propriétés des suites E.S.A. Soient X un espace de Banach et $\|\cdot\|$ sa norme. On considère une suite normalisée $(x_n)_{n\geq 1}$ qui engendre X. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ est E.S.A., on sait que $(x_n)_{n\geq 1}$ est une base de X.

Proposition 1. *Si (x_n) est E.S.A.,*

1. *(x_n) est inconditionnelle si et seulement si X est isomorphe à l^1.*
2. *(x_n) n'est jamais faiblement convergente.*
3. *(x_n) est équivalente à la base sommante de c_0 si et seulement si X est isomorphe à c_0.*
4. *Il existe une constante K positive telle que pour tout naturel n, on ait: $\|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k x_k\|\leq K$ si et seulement si X est isomorphe à c_0.*

Démonstration. 1. Si (x_n) est inconditionnelle, il existe une constante C telle que pour tout $a\in S$, on ait:

$$\|\sum_n a_n x_n\| \geq C\|\sum_n |a_n| x_n\|.$$

Et donc, puisque (x_n) est E.S.A.:

$$\|\sum_n a_n x_n\| \geq C\sum_n |a_n|.$$

(x_n) est ainsi équivalente à la base canonique de l^1. D'autre part, si X est isomorphe à l^1, alors (x_n) (qui est I.S.) est équivalente à la base canonique de l^1 [2] et donc inconditionnelle.

2. La suite (x_n) étant basique, il suffit de montrer qu'elle ne converge pas faiblement vers zéro. Or, une suite I.S. tend faiblement vers zéro si et seulement si elle est basique inconditionnelle, non équivalente à la base canonique de l^1 [1].

3. L'espace c_0 possède exactement deux suites basiques I.S. non équivalentes= la base canonique et la base sommante; et la base canonique n'est pas E.S.A.

4. Supposons qu'il existe une constante K positive telle que pour tout naturel n, on ait: $\|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k x_k\|\leq K$; considérons alors la suite:

$$x_1' = x_1,\ x_2' = x_2 - x_1,\ x_3' = x_3 - x_2,\ \dots .$$

$(x_n')_{n\geq 1}$ est une base de X (de constante de base 1) [4]. On a: $x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i'$. Les suites (x_{2n}') et (x_{2n+1}') sont inconditionnelles [1]; elles sont donc, par hypothèse, toutes deux équivalentes à la base canonique de c_0. Ainsi pour tout $a\in S$:

$$\|\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x_i'\| \leq |a_1|\,\|x_1'\| + \|\sum_{i=1}^{+\infty} a_{2i} x_{2i}'\| + \|\sum_{i=1}^{+\infty} a_{2i+1} x_{2i+1}'\| \leq C \sup |a_i|,$$

On déduit de la basicité de la suite (x'_n) l'existence d'une constante K telle que pour tout $a \in S$

$$\Big\|\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x'_i\Big\| \geqq K \sup |a_i|.$$

(x'_n) est donc équivalente à la base caninoque de c_0 et (x_n) est équivalente à la base sommante de c_0.

Remarque. Le point 2 de la proposition entraîne que la suite (x_n) n'est jamais contractante et X n'est pas réflexif.

3. La norme M définie dans l'introduction possède les propriétés suivantes:

1. Si $a=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, alors $|a| \leqq M(a)$ et $\big|\sum_{i=1}^{n} a_i\big| \leqq M(a)$.

2. Soit $u_1=x_2-x_1, u_2=x_4-x_3, \ldots$. Si $a=\sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, on a: $\big|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\big| \leqq |a|$ puisque (x_n) est monotone inconditionnelle.

De la définition de la norme M et de la monotone inconditionnalité de (x_n), on déduit que ([4])

$$M(a) \leqq 2\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big|.$$

Ainsi $|a| \leqq M(a) \leqq 2|a|$. Et les normes M et $|\cdot|$ sont équivalentes sur l'espace engendré par les vecteurs $(u_i)_{i \geqq 1}$.

Notons que contrairement au modèle E.S.A. obtenu à partir d'un modèle étalé [5], l'espace G n'est pas finiment représentable dans $F=$ en effet si l'on prend pour F l'espace l^2, celui-ci est super-réflexif mais G n'est pas réflexif comme nous l'avons vu au paragraphe 2.

4. Passons maintenant aux espaces de James généralisés définis dans l'introduction. Soit (x_i) une base monotone normalisée de $(F, |\cdot|)$, si (x_i) est symétrique et complète, R. H. Lohman et P. G. Casazza ont montré [9] que (e_i) est alors une base de J. Ce résultat s'étend aux bases sous-symétriques.

D'autre part, on obtient facilement la

Proposition 2. *Si (x_i) est équivalente à la base canonique de c_0, alors (e_i) est une base de J.*

Preuve. Soit $\alpha=(\alpha_n) \in J$, considérons: $\alpha-P_k\alpha=(\alpha_i^{(1)})$

$$\|\alpha-P_k\alpha\|_J = \sup\Big|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{p_{2i-1}}^{(1)}-\alpha_{p_{2i}}^{(1)})x_i+\alpha_{p_{2n+1}}^{(1)} x_{n+1}\Big|.$$

(Ce supremum étant pris sur tous les n et les suites croissantes d'entiers (p_i)). Il existe une constante C telle que

$$\|\alpha-P_k\alpha\|_J \leqq C \sup_{i>k} |\alpha_i|$$

(puisque (x_i) est équivalente à la base canonique de c_0). Comme $\alpha \in J$, $\lim_n |\alpha_n|=0$ et $\|\alpha-P_k\alpha\|_J$ tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini. De plus, si (x_i) est équivalente à la base canonique de c_0, il existe deux constantes m et M telles que pour tout $a \in S$:

$$m \sup_i |a_i| \leqq \Big|\sum_i a_i x_i\Big| \leqq M \sup_i |a_i|.$$

De la définition de la norme dans J, on déduit qu'il existe une constante C telle que:

$$\Big\|\sum_i a_i e_i\Big\|_J \leqq C \sup_i |a_i|.$$

Et puisque (e_i) est une suite basique dans J, il existe une constante C_1 telle que:

$$\Big\|\sum_i a_i e_i\Big\|_J \geqq C_1 \sup_i |a_i|.$$

Ceci prouve que (e_i) est équivalente à la base canonique de c_0.

Cette démonstration montre aussi que:

Proposition 3. *Si F est isomorphe à c_0, alors J est isomorphe à c_0.*

Il suffit, en effet, de rappeler que F est isomorphe à c_0 si et seulement si (x_i) est équivalente à la base canonique de c_0 [6].

Nous verrons (proposition 4, paragraphe 6) qu'en fait F est isomorphe à c_0 si et seulement si J est isomorphe à c_0.

Théorème 1. *Soit (x_i) une base (normalisée, monotone) sous-symétrique de F; (e_i) est une base de J si et seulement si (x_i) est complète dans F ou équivalente à la base canonique de c_0.*

Démonstration. La condition suffisante se déduit immédiatement de ce qui précède.

Quant à la condition nécessaire = nous supposerons (x_i) I.S., monotone inconditionnelle. Considérons (a_i) une suite de scalaires qui converge vers zéro et telle que le supremum

$$\sup_n \Big|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big|$$

soit fini. Soit alors $a' = (0, a_1, 0, a_2, 0, \ldots)$. On a:

$$(1) \qquad \Big|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big| \leqq \Big\|\sum_{i=1}^n a_i e_{2i}\Big\|_J \leqq 3 \Big|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big|.$$

Puisque (e_i) est une base de J, la série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i e_{2i}$ converge vers a' (dans J), donc par la première inégalité de (1), la série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x_i$ converge dans F.

Nous avons ainsi montré que si (a_i) est une suite de scalaires convergeant vers zéro et telle que le supremum $\sup_n \left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right|$ soit fini, alors la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge dans F ce qui n'est possible que si (x_n) est complète ou équivalente à la base canonique de c_0. En effet, supposons que (x_n) ne soit pas équivalente à la base canonique de c_0; pour prouver que (x_n) est alors complète il suffit, par ce qui précède, de considérer le cas où (a_i) est une suite de scalaires ne convergeant pas vers zéro. Il existe alors une constante C et une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telles que pour tout naturel m, on ait:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_{n_k} x_{n_k}\right| > C\left|\sum_{k=1}^{m} x_{n_k}\right|$$

((x_n) étant inconditionnelle dans F). Ainsi, puisque (x_n) est I.S., on a:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_{n_k} x_{n_k}\right| > C\left|\sum_{k=1}^{m} x_k\right|.$$

Mais on a supposé (x_n) non équivalente à la base canonique de c_0, donc le supremum $\sup_m \left|\sum_{k=1}^{m} x_k\right|$ est infini puisque (x_n) est inconditionnelle. Et le supremum $\sup_m \left|\sum_{k=1}^{m} a_{n_k} x_{n_k}\right|$ est infini, il en est de même pour le supremum $\sup_m \left|\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right|$ ce qui achève la démonstration du théorème.

5. Dans ce paragraphe, nous établissons l'isomorphisme entre l'espace de Brunel et Sucheston G et un espace de James généralisé. Pour $a=(a_1, a_2, \ldots)$ une suite de salaires, soit

$$|||a|||_J = \sup \left|\sum_{i=1}^{n} (a_{p_i} - a_{p_{i+1}}) x_i\right|,$$

où le supremum est pris sur tous les naturels n et toutes les suites croissantes de naturels $p_1, \ldots, p_{n+1}$. Si l'on suppose (x_i) sous-symétrique, les normes $\|\cdot\|_J$ et $|||\cdot|||_J$ sont équivalentes.

Lemma 1. *Si $(x_i)_{i\geq 1}$ est une base sous-symétrique, alors la suite basique des vecteurs unités (e_i) de J est équivalente à la base $(x_i')_{i\geq 1}=(x_1, x_2-x_1, \ldots, x_n-x_{n-1}, \ldots)$ de G.*

Démonstration. Comme toujours, nous supposerons (x_i) I.S. monotone inconditionnelle, montrons que pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$:

$$M\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i'\Big) = |||(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)|||_J;$$

$$M\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_1'\Big) = M\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - x_{i-1})\Big) = M((a_1 - a_2)x_1 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)x_{n-1} + a_n x_n) =$$

(1)

$$= \sup \Big|(a_1 - a_{p_1})x_1 + \sum_{i=1}^{m} (a_{p_i} - a_{p_{i+1}})x_{i+1} + a_{p_{m+1}} x_{m+2}\Big|.$$

D'autre part:

(2) $$|||(a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)|||_J = \sup \Big|\sum_{i=1}^{i} (a_{q_i} - a_{q_{i+1}})x_i\Big|.$$

(Ce supremum peut être calculé en utilisant des indices q_i dans l'intervalle $[1, n+1]$).

Si dans l'égalité (1) le supremum est atteint pour une suite $p_1, p_2, \ldots, p_{m+1}$, soit alors $q_1 = 1$, $q_{i+1} = p_i$ $(i = 1, \ldots, m+1)$ et $q_{m+3} > n$, on obtient ainsi:

$$M\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i'\Big) \leqq |||(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)|||_J.$$

D'autre part, si le supremum est atteint dans (2) pour une suite $q_1, q_2, \ldots, q_{l+1}$

$$|||(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)|||_J = |(a_{q_1} - a_{q_2})x_1 + (a_{q_2} - a_{q_3})x_2 + \ldots + (a_{p_l} - a_{p_{l+1}})x_l|$$

avec $1 \leqq q_i \leqq n+1$.

Le supremum est atteint lorsque $q_1 = 1$ ((x_i) est monotone inconditionnelle). Si $q_{l+1} > n$, alors

$$|||(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)|||_J \leqq M\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i'\Big).$$

Sinon, comme (x_n) est monotone inconditionnelle, on a:

$$|||(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)|||_J \leqq |(a_1 - a_{q_2})x_1 + (a_{q_2} - a_{q_3})x_2 + \ldots + (a_{q_l} - a_{q_{l+1}})x_l + a_{q_{l+1}} x_{l+1}| \leqq$$

$$\leqq M\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i'\Big).$$

Ce qui achève la démonstration du lemme.

Ainsi est établi le

Théorème 2. *Soit (x_n) une base (normalisée) sous-symétrique de F. G est isomorphe à J lorsque (e_n) est une base de J.*

(C'est-à-dire si (x_n) est complète dans F ou équivalente à la base canonique de c_0.)

6. Nous allons maintenant étudier les questions suivantes: quand G est-il isomorphe à c_0 ou l^1? Dans ce qui suit, nous supposons la base (x_n), de F, I.S. monotone inconditionnelle.

Proposition 4. *G est isomorphe à c_0 si et seulement si F est isomorphe à c_0.*

Démonstration. D'après la proposition 1. (4), G est isomorphe à c_0 si et seulement si il existe une constante K positive telle que pour tout naturel n:

$$M\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i x_i\Big) \leqq K;$$

si et seulement si il existe une constante K positive telle que pour tout naturel n:

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i x_i\Big| \leqq K$$

(par l'équivalence des normes M et $|\cdot|$ sur $(x_{2i-1}-x_{2i})$);

si et seulement si il existe une constante K positive telle que pour tout naturel n:

$$(1) \qquad \Big|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big| \leqq K \sup |a_i|$$

(2) si et seulement si F est isomorphe à c_0

((1) implique (2) puisque (x_i) est basique).

Ce qui établit la proposition.

Passons maintenant à la caractérisation des espaces G isomorphes à l^1. La norme M est E.S.A., donc I.S., ainsi d'après [1], l'espace G est isomorphe à l^1 si et seulement si il existe $K>0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on ait:

$$\frac{1}{n} M\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i x_i\Big) \geqq K.$$

Par un raisonnement analogue à celui fait à la proposition précédente, on obtient la

Proposition 5. *G est isomorphe à l^1 si et seulement si F est isomorphe à l^1.*

7. Dans ce qui suit, nous nous intéressons au problème de la présence de sous-espaces isomorphes à l^p ou c_0 dans G et dans F. Il suffit, en fait, de considérer les sous-espaces engendrés par les suites de blocs consécutifs disjoints sur la base (x_n).

Lemme 2. *F contient un sous-espace isomorphe à c_0 si et seulement si on peut trouver une suite de blocs sur $(x_{2n-1}-x_{2n})$ dans G, équivalente à la base canonique de c_0.*

Démonstration. La condition suffisante est évidente. Maintenant, si F contient c_0, il existe une suite de blocs (u_n) sur (x_n) équivalente à la base canonique de c_0. Soit

$$u_n = \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} a_i x_i.$$

On considère alors

$$u'_n = \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} a_i (x_{2i-1} - x_{2i}).$$

De l'équivalence des normes M et $|\cdot|$ sur le sous-espace engendré par les vecteurs $(x_{2n-1}-x_{2n})_{n\geq 1}$ on déduit que la suite (u'_n) est bornée dans G, ainsi que l'existence d'une constante C positive telle que pour tout $b\in S$

$$M(\sum_i b_i u'_i) \leqq C\left|\sum_i b_i u'_i\right| \leqq 2C\left|\sum_i b_i u_i\right|.$$

La dernière inégalité résulte de l'inégalité triangulaire et de l'invariance par étalement de la suite (x_n). Donc il existe une constante K positive telle que

$$M(\sum_i b_i u'_i) \leqq K \sup |b_i| \quad \text{pour tout} \quad b\in S.$$

On a aussi

$$M(\sum_i b_i u'_i) \geqq \frac{1}{K} \sup |b_i|$$

car (u'_i) est une suite basique (suite de blocs construite sur la suite basique $(x_{2n}-x_{2n-1})$). Et (u'_i) est une suite basique de blocs bornée équivalente à la base canonique de c_0.

Théorème 3. *F contient un sous-espace isomorphe à c_0 si et seulement si G contient un sous-espace isomorphe à c_0.*

Démonstration. Le lemme 2 démontre la condition nécessaire. La condition est suffisante: si G contient c_0, il existe une suite basique de blocs (u_n) bornée dans G, équivalente à la base canonique de c_0. Soit

$$u_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} a_i x_i.$$

Il existe une constante K positive telle que pour tout $b\in S$:

$$\frac{1}{K} \sup_i |b_i| \leqq M(\sum_i b_i u_i) \leqq K \sup_i |b_i|.$$

Par définition de la norme M, il existe une suite d'entiers strictement croissante: $p_1=j_1^{(1)}<j_2^{(1)}<\ldots<j_{m_1+1}^{(1)}=p_2$ telle que:

$$M(u_1)=|(a_{j_1^{(1)}+1}+\ldots+a_{j_2^{(1)}})x_1+(a_{j_2^{(1)}+1}+\ldots+a_{j_3^{(1)}})x_2+\ldots$$
$$\ldots+(a_{j_{m_1}^{(1)}+1}+\ldots+a_{j_{m_1+1}^{(1)}})x_{m_1}|.$$

Posons alors

$$y_1=(a_{j_1^{(1)}+1}+\ldots+a_{j_2^{(1)}})x_1+\ldots+(a_{j_{m_1}^{(1)}+1}+\ldots+a_{j_{m_1+1}^{(1)}})x_{m_1}.$$

On a $M(u_1)=|y_1|$. Il existe une suite d'entiers $p_2=j_1^{(2)}<\ldots<j_{m_2+1}^{(2)}=p_3$ telle que

$$M(u_2)=|(a_{j_1^{(2)}+1}+\ldots+a_{j_2^{(2)}})x_1+\ldots+(a_{j_{m_2}^{(2)}+1}+\ldots+a_{j_{m_2+1}^{(2)}})x_{m_2}|.$$

Posons

$$y_2=(a_{j_1^{(2)}+1}+\ldots+a_{j_2^{(2)}})x_{m_1+1}+\ldots+(a_{j_{m_2}^{(2)}+1}+\ldots+a_{j_{m_2+1}^{(2)}})x_{m_1+m_2}.$$

On a par invariance par étalement $M(u_2)=|y_2|$. Par récurrence, on obtient pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ une suite d'entiers $j_1^{(n)}, j_2^{(n)}, \ldots, j_{m_n+1}^{(n)}$ strictement croissante telle que: $j_1^{(n)}=p_n$ et $j_{m_n+1}^{(n)}=p_{n+1}$ avec la propriété que, pour chaque n, si l'on pose

$$y_n=\sum_{k=1}^{m_n}\Big(\sum_{i=j_k^{(n)}+1}^{j_{k+1}^{(n)}}a_i\Big)x_{m_0+\ldots+m_{n-1}+k}\quad(\text{avec } m_0=0),$$

on a $M(u_n)=|y_n|$. On a évidemment pour tout $b\in S$:

$$\Big|\sum_i b_iy_i\Big|\leqq M\Big(\sum_i b_iu_i\Big).$$

Donc

$$\Big|\sum_i b_iy_i\Big|\leqq K\sup_i|b_i|.$$

(y_i) est une suite basique bornée de blocs donc

$$\Big|\sum_i b_iy_i\Big|\geqq M\sup_i|b_i|.$$

Donc (y_i) est équivalente à la base canonique de c_0.

Considérons maintenant le cas des sous-espaces isomorphes à l^p. Démontrons l'analogue du lemme 2.

Lemme 3. *F contient un sous-espace isomorphe à l^p $(1\leqq p<\infty)$ si et seulement si on peut trouver une suite basique de blocs sur $(x_{2n}-x_{2n-1})$ dans G équivalente à la base canonique de l^p $(1\leqq p<\infty)$.*

Démonstration. Un sens est trivial. D'autre part, s'il existe un $p\in[1,+\infty[$ tel que F contienne l^p, on peut trouver une suite normalisée de blocs (u_n) consécutifs disjoints sur (x_n) équivalente à la base canonique de l^p. Soit

$$u_n = \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} a_i x_i, \quad |u_n| = 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Il existe donc deux constantes m et M positives telles que pour tout $b \in S$:

$$m\Big(\sum_i |b_i|^p\Big)^{1/p} \leqq \Big|\sum_i b_i u_i\Big| \leqq M\Big(\sum_i |b_i|^p\Big)^{1/p}.$$

Considérons alors

$$u'_n = \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} a_i(x_{2i} - x_{2i-1}) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La suite (u'_n) est bornée dans G. Pour tout $s \in S$, on a:

$$M\Big(\sum_i b_i u'_i\Big) \geqq \Big|\sum_i b_i u'_i\Big|$$

(par définition de la norme M), ainsi comme (x_n) est monotone inconditionnelle dans F, on a aussi:

$$M\Big(\sum_i b_i u'_i\Big) \geqq \Big|\sum_i b_i u_i\Big|.$$

Donc pour tout $b \in S$:

$$M\Big(\sum_i b_i u'_i\Big) \geqq m\Big(\sum_i |b_i|^p\Big)^{1/p}.$$

Puisque les normes M et $|\cdot|$ sont équivalentes sur le sous-espace engendré par les vecteurs $(x_{2i} - x_{2i-1})$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $b \in S$:

$$M\Big(\sum_i b_i u'_i\Big) \leqq c\Big|\sum_i b_i u'_i\Big| \leqq 2c\Big|\sum_i b_i u_i\Big|.$$

Donc

$$M\Big(\sum_i b_i u'_i\Big) \leqq 2cM\Big(\sum_i |b_i|^p\Big)^{1/p}.$$

Ce qui montre bien que (u'_i) est une suite basique bornée de blocs dans G équivalente à la base canonique de l^p.

Nous abordons maintenant le problème suivant: si G contient l^1, F contient-il l^1? Soit (x_n) une base d'un espace de Banach F, nous dirons que (x_n) a la propriété $(\mathscr{P})$ si et seulement si toute suite bornée de blocs consécutifs disjoints sur (x_n) converge vers zéro en moyenne de Cesàro dans F.

Théorème 4. *Si (x_n) a la propriété $(\mathscr{P})$ dans F, alors la base $(x'_n)_{n \geqq 1} = (x_n - x_{n-1})_{n \geqq 1}$ est contractante dans G.*

Démonstration. Supposons au contraire que (x'_n) ne soit pas contractante dans G. Il existe alors $f \in G^*$, $\delta > 0$ et des blocs u_k consécutifs disjoints, normalisés tels que

$$u_k = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j x'_j \quad \text{et} \quad \forall k, \quad f(u_k) \geqq \delta.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} u_i\right) \geq \delta.$$

On peut supposer $\|f\| \leq 1$, ainsi pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a:

(1) $$M\left(\frac{1}{2^n}\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} u_i\right) \geq \delta.$$

Calculons pour n non nul:

$$\frac{1}{2^n} M\Big(\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} u_i\Big) = \frac{1}{2^n} M\big(a_{m_{2^n-1}+1}(x_{m_{2^n-1}+1} - x_{m_{2^n-1}}) +$$

$$+ a_{m_{2^n-1}+2}(x_{m_{2^n-1}+2} - x_{m_{2^n-1}+1}) + \ldots + a_{m_{2^{n+1}-1}}(x_{m_{2^{n+1}-1}} - x_{m_{2^{n+1}-1}-1})\big) =$$

$$= \frac{1}{2^n} M\big(-a_{m_{2^n-1}+1} x_{m_{2^n-1}} + (a_{m_{2^n-1}+1} - a_{m_{2^n-1}+2}) x_{m_{2^n-1}+1} +$$

$$+ (a_{m_{2^n-1}+2} - a_{m_{2^n-1}+3}) x_{m_{2^n-1}+2} + \ldots + (a_{m_{2^{n+1}-1}-1} - a_{m_{2^{n+1}-1}}) x_{m_{2^{n+1}-1}-1} +$$

$$+ a_{m_{2^{n+1}-1}} x_{m_{2^{n+1}-1}}\big).$$

Supposons que pour chaque n non nul, le supremum soit atteint pour une suite de naturels $p_1^{(n)}, \ldots, p_{l(n)+1}^{(n)}$ strictement croissante, alors:

$$\frac{1}{2^n} M\Big(\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} u_i\Big) = \frac{1}{2^n}\Big|-a_{p_1^{(n)}} x_1 + \sum_{i=1}^{l(n)} (a_{p_i^{(n)}} - a_{p_{i+1}^{(n)}}) x_{i+1} + a_{p_{l(n)+1}^{(n)}} x_{l(n)+2}\Big|.$$

On peut écrire:

$$\frac{1}{2^n} M\Big(\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} u_i\Big) = \frac{1}{2^n}\Big|\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} v_n^{(i)} + \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} w_i^{(n)} + a_{p_{l(n)+1}^{(n)}} x_{l(n)+2}\Big|.$$

Où chaque $v_i^{(n)}$ est 0 ou une somme de termes de la forme

$$\sum (a_{p_j^{(n)}} - a_{p_{j+1}^{(n)}}) x_{j+1}$$

avec chaque a_k provenant du même bloc u_i. Où chaque $w_i^{(n)}$ est 0 ou de la forme $-a_k x_j$ ou $(a_{p_j^{(n)}} - a_{p_{j+1}^{(n)}}) x_{j+1}$ avec les a_k provenant de deux blocs u_j différents.

Faisons varier n:

pour $n=1$, on obtient deux blocs consécutifs disjoints sur $(x_n) = v_2^{(1)}, v_3^{(1)}$ dont les coefficients proviennent de u_2 et u_3 respectivement, ainsi $|v_2^{(1)}| \leq M(u_2) = 1$ et $|v_3^{(1)}| \leq M(u_3) = 1$; pour $n=2$, on obtient quatre blocs consécutifs disjoints sur $(x_n) = v_4^{(2)}, v_5^{(2)}, v_6^{(2)}, v_7^{(2)}$ et $|v_i^{(2)}| \leq M(u_i) = 1$ pour $i = 4, \ldots, 7$.

Et ainsi de suite, pour un n quelconque non nul, on obtient 2^n blocs sur $(x_n)=$ $=v_{2^n}^{(n)}, v_{2^n+1}^{(n)}, \dots, v_{2^{n+1}-1}^{(n)}$ dont les coefficients proviennent respectivement de $u_{2^n}, u_{2^n+1}, \dots, u_{2^{n+1}-1}$, ainsi $|v_i^{(n)}|\leqq M(u_i)=1$ pour tout $i=2^n, \dots, 2^{n+1}-1$.

Formons la suite:

$$(v_2^{(1)}, v_3^{(1)}, v_4^{(2)}, v_5^{(2)}, v_6^{(2)}, v_7^{(2)}, \dots)$$

suite que nous noterons:

$$(v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, \dots)=(v_i)_{i\geqq 2}.$$

Comme (x_n) est invariante par étalement dans F, on peut supposer que les v_i sont des blocs consécutifs disjoints sur (x_n). La suite $(v_i)_{i\geqq 2}$ est bornée (par 1). De même, formons la suite

$$(w_2^{(1)}, w_3^{(1)}, w_4^{(2)}, w_5^{(2)}, w_6^{(2)}, w_7^{(2)}, \dots).$$

Nous la noterons:

$$(w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, \dots) = (w_i)_{i\geqq 2}.$$

Nous supposerons aussi que ces blocs sont consécutifs disjoints. Comme pour tout i et $k=m_{i-1}+1, \dots, m_i$

$$|a_k| \leqq M(u_i) = 1,$$

la suite $(w_i)_{i\geqq 2}$ est bornée (par 2). Par hypothèse, les suites $(v_i)_{i\geqq 2}$ et $(w_i)_{i\geqq 2}$ convergent en moyenne de Cesàro vers zéro, on peut donc trouver un naturel N tel que pour tout $n\geqq N$, on ait:

$$\frac{1}{2^{n+1}}\left|\sum_{i=2}^{2^{n+1}+1} v_i\right| \leqq \frac{\delta}{10}, \quad \frac{1}{2^{n+1}}\left|\sum_{i=2}^{2^{n+1}+1} w_i\right| \leqq \frac{\delta}{10}$$

et

$$\frac{1}{2^n}\left|a_{p_{l(n)}^{(n)}+1}\, x_{l(n)+2}\right| \leqq \frac{1}{2^n} \leqq \frac{\delta}{5}.$$

Ainsi:

$$\frac{1}{2^n}\left|\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} v_i^{(n)}\right| = \frac{1}{2^n}\left|\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} v_i\right|.$$

Et par la monotone inconditionnalité de (x_n) dans F, on a:

$$\frac{1}{2^n}\left|\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} v_i^{(n)}\right| \leqq \frac{1}{2^n}\left|\sum_{i=2}^{2^{n+1}+1} v_i\right|.$$

Et pour $n\geqq N$:

$$\frac{1}{2^n}\left|\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} v_i^{(n)}\right| \leqq \frac{\delta}{5}.$$

De même:

$$\frac{1}{2^n}\left|\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} w_i^{(n)}\right| = \frac{1}{2^n}\left|\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} w_i\right| \leqq \frac{1}{2^n}\left|\sum_{i=2}^{2^{n+1}+1} w_i\right|.$$

Et pour $n \geqq N$:

$$\frac{1}{2^n}\Big|\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} w_i^{(n)}\Big| \leqq \frac{\delta}{5}.$$

Ainsi, pour $n \geqq N$, on aurait

$$\frac{1}{2^n} M\Big(\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} u_i\Big) \leqq \frac{3\delta}{5}$$

ce qui contredit (1) donc (x_n') est une base contractante de G.

La méthode utilisée dans la démonstration du théorème 4 permet d'obtenir également des renseignements sur la présence de sous-espaces isomorphes à l^p $(1 \leqq p < \infty)$:

Théorème 5. *S'il existe un réel $p \in [1, +\infty[$ tel que toute suite bornée de blocs w_i consécutifs disjoints sur (x_n) a dans F la propriété suivante:*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1/p}\Big|\sum_{i=1}^{n} w_i\Big| = 0$$

alors, quel que soit $q \in [1, p]$, G ne contient aucun sous-espace isomorphe à l^q.

Démonstration. Supposons le contraire: il existerait un réel $q \in [1, p]$ et des blocs normalisés u_n dans G consécutifs disjoints, équivalents à la base canonique de l^q. On pourrait donc trouver deux constantes m, M positives telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$m \leqq M\Big(2^{-n/q} \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} u_i\Big) \leqq M. \tag{1}$$

On peut écrire:

$$2^{-n/q} M\Big(\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} u_i\Big) = 2^{-n/q}\Big|\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} v_i^{(n)} + \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} w_i^{(n)} + a_{p_{l(n)}^{(n)}+1}\, x_{l^{(n)}+2}\Big|.$$

où les $v_i^{(n)}$ et $w_i^{(n)}$ sont définis comme dans la démonstration du théorème 4.

On obtient, de même, deux suites bornées de blocs consécutifs disjoints sur (x_n):

$$(v_2^{(1)}, v_3^{(1)}, v_4^{(2)}, v_5^{(2)}, \ldots) = (v_i)_{i\geqq 2}, \quad (w_2^{(1)}, w_3^{(1)}, w_4^{(2)}, w_5^{(2)}, \ldots) = (w_i)_{i\geqq 2}.$$

Ainsi, par hypothèse, comme $q \leqq p$, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1/q}\Big|\sum_{i=2}^{n+1} v_i\Big| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^{-1/q}\Big|\sum_{i=2}^{n+1} w_i\Big| = 0.$$

On peut donc trouver un naturel N tel que pour tout $n \geqq N$, on ait

$$2^{-(n+1)/q}\Big|\sum_{i=2}^{2^{n+1}+1} v_i\Big| \leqq \frac{m}{10} \quad \text{et} \quad 2^{-(n+1)/q}\Big|\sum_{i=2}^{2^{n+1}+1} w_i\Big| \leqq \frac{m}{10}$$

et

$$2^{-n/q}|a_{p_{l(n)}^{(n)}+1}| \leqq \frac{m}{5}.$$

Ainsi:

$$2^{-n/q}\Big|\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} v_i^{(n)}\Big| \leqq 2^{-n/q}\Big|\sum_{i=2}^{2^{n+1}+1} v_i\Big|.$$

Pour $n \geqq N$:

$$2^{-n/q}\Big|\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} v_i^{(n)}\Big| \leqq 2^{1/q}\frac{m}{10} \leqq \frac{m}{5}, \quad 2^{-n/q}\Big|\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} w_i^{(n)}\Big| \leqq \frac{m}{5}.$$

Ainsi, pour $n \geqq N$, on aurait:

$$2^{-n/q} M\Big(\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} u_i\Big) \leqq \frac{3}{5} m.$$

Ce qui contredit (1).

Remarque. S'il existe un réel $p \in]1, +\infty[$, tel que (x_n) soit p-Hilbertienne sur des blocs dans F, (x_n) vérifie la condition:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1/q}\Big|\sum_{i=1}^{n} w_i\Big| = 0,$$

pour tout $q \in [1, p[$ et pour toute suite bornée de blocs (w_i) consécutifs disjoints sur (x_n).

Donc G ne contient aucun sous-espace isomorphe à l^q.

De la démonstration du théorème 2 de [4], on déduit le

Théorème 6. *Si (x_n) a la propriété $(\mathscr{P})$ dans F, alors (x_n) est une base 1-contractante de G.*

Démonstration. Soient dans $G^*, x_1^*, x_2^*, \ldots$ (respectivement $f_1, f_2, \ldots$) les fonctionnelles biorthogonales de $x_1, x_2, \ldots$ (respectivement $x_1', x_2', \ldots$). Puisque (x_n') est une base contractante de G (théorème 4), on a $G^* = \overline{\text{span}}\,\{f_n\}_{n\geqq 1}$, de plus (x_n) étant une base E.S.A. dans G, $(f_n)_{n\geqq 2}$ est une base E.S.A. de $\overline{\text{span}}\,\{f_n\}_{n\geqq 2}$ [4] et $(f_2, f_2-f_3, f_3-f_4, \ldots)$ est une suite basique [4]. Donc $(f_1, f_1-f_2, \ldots) = (f_1, x_1^*, \ldots)$ est une base de G^* ce qui signifie que (x_n) est 1-contractante dans G.

Théorème 7. *Si F ne contient pas de sous-espace isomorphe à c_0, si (x_n) a la propriété $(\mathscr{P})$ dans F, alors G est quasi-réflexif d'ordre* 1.

Démonstration. La première hypothèse faite sur F implique que (x_n) est complète et la seconde que (x_n) est 1-contractante donc G est quasi-réflexif d'ordre 1 [11].

Nous allons maintenant étudier la propriété $(\mathscr{P})$.

1. *Si (x_n) a la propriété $(\mathscr{P})$, F ne contient pas l^1.* Par contre, il existe des espaces ne contenant pas l^1 et dont la base n'a pas la propriété $(\mathscr{P})$. Nous donnons deux exemples; dans le premier, F est muni d'une base monotone inconditionnelle, dans le second d'une base symétrique,

Exemple 1. Soit F l'espace dual T de l'espace de TSIRELSON [8], les vecteurs unités (t_n) forment une base monotone inconditionnelle de T, celui-ci est réflexif, il ne contient donc pas l^1 et (t_n) n'a pas la propriété $(\mathscr{P})$ dans T (il existe en effet une constante C positive telle que pour tout k on ait

$$\Big\|\sum_{h=k+1}^{2k} w_k\Big\|_T \geqq C\cdot k$$

où (w_k) est une suite basique de blocs bornée sur (t_n)).

Exemple 2. Choisissons pour F l'espace Y dû à ALTSHULER [8] (obtenu en modifiant l'exemple de Tsirelson); les vecteurs unités (e_n) forment une base symétrique (constante de symétrie 1), Y est réflexif et (e_n) n'a pas la propriété $(\mathscr{P})$: par la proposition 3.b.4. de [8], on voit qu'il existe dans Y une suite basique de blocs (u_j) équivalente à la base (t_n) de T, ainsi

$$\frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{2n} u_j$$

ne tend pas vers zéro dans Y quand n tend vers l'infini.

Supposons (x_n) I.S. inconditionnelle dans F.

2. *Si (y_k) est une suite bornée de blocs sur (x_n) dans F, et si*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$$

converge dans F, alors c'est vers zéro. En effet, soit

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k;$$

on a $s_n - s_{2n} \to 0$,

$$|s_n - s_{2n}| = \left|\frac{1}{2n}\Big(\sum_{k=1}^{n} y_k - \sum_{k=n+1}^{2n} y_k\Big)\right|$$

et

$$|s_n - s_{2n}| \geqq \frac{C}{2n}\Big|\sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{k=n+1}^{2n} y_k\Big| = \frac{C}{2n}\Big|\sum_{k=1}^{2n} y_k\Big|$$

puisque (x_n) est inconditionnelle. Ainsi $s_{2n} \to 0$. Et

$$|s_n - s_{2n}| \geqq \frac{C}{2n}\Big|\sum_{k=1}^{2n+1} y_k - y_{2n+1}\Big| \geqq \frac{C(2n+1)}{2n}|s_{2n+1}| - \frac{C}{2n}\sup_n |y_n|.$$

Et $s_{2n+1} \to 0$.

3. Si (x_n') a la propriété $(\mathscr{P})$ dans G, (x_n') est contractante dans G.

Théorème 8. *Si (x_n') a la propriété $(\mathscr{P})$ dans G, (x_n) a la propriété $(\mathscr{P})$ dans F.*

Démonstration. Soit une suite normalisée de blocs dans F:

$$u_j = \sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} a_k x_k,$$

il existe une constante C positive telle que:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_j\right| \leqq \frac{C}{n} M\Big(\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} a_k(x_{2k-1}-x_{2k})\Big)\Big) \leqq \frac{C}{n} M\Big(\sum_{j=1}^{n} w_j\Big)$$

avec

$$w_j = \sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} a_k(x_{2k-1}-x_{2k}).$$

On peut considérer les w_j comme des blocs sur (x_n'), c'est une suite bornée dans G et

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_j\right| \to 0.$$

4. Si F est B-convexe, alors (x_n) a la propriété $(\mathscr{P})$; mais c_0 n'est pas B-convexe et cependant la base canonique de c_0 a la propriété $(\mathscr{P})$.

5. Si (x_n) a la propriété $(\mathscr{P})$ dans F, alors (x_n) a la propriété de Banach—Saks faible: en effet, soit (z_n) une suite dans F qui tend faiblement vers zéro, il existe alors une sous-suite (z_n') de (z_{n_n}) équivalente à une suite de blocs sur (x_n), ainsi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i'$$

tend vers zéro dans F. Mais l^1 a la propriété de Banach—Saks faible et la base canonique de l^1 n'a pas la propriété $(\mathscr{P})$.

P. G. Casazza et R. H. Lohman ont montré dans [9] que si (x_n) est une base symétrique, p-Hilbertienne « sur des blocs » dans F $(1 \leqq p < \infty)$ alors (e_n) est p-Hilbertienne « sur des blocs » dans J et donc (e_n) est une suite (basique) contractante dans J. Nous allons maintenant nous intéresser à la propriété: « être p-Hilbertienne sur des blocs » pour une base. Remarquons d'abord que si (x_n) est p-Hilbertienne sur des blocs pour un $p \in]1, +\infty[$ alors (x_n) a la propriété $(\mathscr{P})$.

Dans ce qui suit, nous supposerons toujours (x_n) I.S., monotone inconditionnelle. Les résultats obtenus s'étendent au cas des suites sous-symétriques. Nous aurons besoin de la notion de « B-convexité sur des blocs »:

Définition. Nous dirons que (x_n) est B-convexe sur des blocs si, et seulement si, il existe un naturel k (non nul), $\varepsilon\in]0, 1]$ tels que pour tout k-uple $(w_1, \ldots, w_k)$ de blocs consécutifs disjoints sur (x_n), on ait:

$$\Big|\sum_{i=1}^{k} w_i\Big| \leqq k(1-\varepsilon)\sup_i |w_i|.$$

Pour démontrer le théorème 9, nous utilisons la méthode de B. Maurey et G. Pisier dans [10]; les démonstrations de ce qui suit n'étant que des adaptations de celles de [10], nous n'en donnerons pas les détails.

Théorème 9. *Il existe $p\in]1, +\infty[$ tel que (x_n) est p-Hilbertienne « sur des blocs » si et seulement si (x_n) est B-convexe « sur des blocs ».*

Démonstration. Pour cela, nous définissons, pour tout entier k, le nombre λ_k comme la plus petite constante positive λ, vérifiant, pour tout k-uple $(w_1, \ldots, w_k)$ de blocs consécutifs disjoints sur (x_n)

$$\Big|\sum_{i=1}^{k} w_i\Big| \leqq \lambda\cdot k\cdot\sup_i |w_i|.$$

On a alors la

Proposition 6. (1) $\forall k\in\mathbf{N}_*$: $0\leqq\lambda_k\leqq 1$;
(2) $\forall k\in\mathbf{N}_*$: $\lambda_k\geqq 1/k$;
(3) $\forall n, k\in\mathbf{N}_*$: $(n+k)\lambda_{n+k}\leqq n\lambda_n+k\lambda_k$;
(4) $\forall n, m\in\mathbf{N}_*$: $n\leqq m\Rightarrow n\lambda_n\leqq m\lambda_m$.

De plus, l'application: $n\to\lambda_n$ est sous-multiplicative:

Lemme 4. $\forall k, n\in\mathbf{N}_*$: $\lambda_{nk}\leqq\lambda_n\lambda_k$.

Preuve. Soit $(w_j)_{1\leqq j\leqq nk}$ un nk-uple de blocs consécutifs disjoints sur (x_n). Pour chaque $i\in\{1, \ldots, n\}$, on pose

$$W_i = \sum_{(i-1)k<j\leqq ik} w_j.$$

Et

$$\Big|\sum_{j=1}^{nk} w_j\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{n} W_i\Big| \leqq n\lambda_n \sup_{1\leqq i\leqq n} |W_i| \leqq n\lambda_n k\lambda_k \sup_{1\leqq j\leqq nk} |w_j|.$$

Ce qui entraîne bien: $\lambda_{nk}\leqq\lambda_n\cdot\lambda_k$.

Remarque. De ce lemme, on déduit que (x_n) est B-convexe sur des blocs si et seulement si $\lambda_n\to 0$.

Lemme 5. *Si $\lambda_N=1/N^{1/p'}$ pour un entier $N>1$ et un réel p' dans $[1, +\infty[$ alors (x_n) est q-Hilbertienne sur des blocs pour tout $q<p$, où p est défini par $1/p+ +1/p'=1$.*

Preuve. Soit q (avec $q<p$) et soient $w_1, \ldots, w_l$ des blocs consécutifs disjoints sur (x_n). On pose:

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad A_k = \left\{ n: \left(\frac{\sum_i |w_i|^q}{N^{k+1}} \right)^{1/q} \leqq |w_n| \leqq \left(\frac{\sum_i |w_i|^q}{N^k} \right)^{1/q} \right\}.$$

Soit $|A_k|$ le cardinal de A_k. On a:

$$(\sum_i |w_i|^q)^{1/q} \geqq (\sum_{i \in A_k} |w_i|^q)^{1/q} \geqq |A_k|^{1/q} \frac{(\sum_i |w_i|^q)^{1/q}}{N^{(k+1)/q}}.$$

D'où: $|A_k| \leqq N^{k+1}$. Et $|A_k| \lambda_{|A_k|} \leqq N^{k+1} \lambda_{N^{k+1}} \leqq N^{k+1} (\lambda_N)^{k+1}$ (par la proposition 6. (4) et le lemme 4). Mais on a aussi:

$$|\sum_i w_i| \leqq \sum_{k=0}^{+\infty} |\sum_{i \in A_k} w_i| \leqq \sum_{k=0}^{+\infty} |A_k| \lambda_{|A_k|} \frac{(\sum_i |w_i|^q)^{1/q}}{N^{k/q}} \leqq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N^{k+1} N^{-(k+1)/q'}}{N^{k/q}} (\sum_i |w_i|^q)^{1/q},$$

$$|\sum_i w_i| \leqq \frac{N^{1/q}}{N^{1/q-1/p}} (\sum_i |w_i|^q)^{1/q}.$$

Ce qui achève la démonstration puisque on a alors pour tout $a \in S$

$$|\sum_i a_i w_i| \leqq C \sup |w_i| (\sum_i |a_i|^q).$$

Terminons la démonstration du théorème 9: d'après la remarque qui suit le lemme 4, (x_n) est B-convexe sur des blocs si et seulement si $\lambda_n \to 0$, donc si, et seulement si, il existe un réel p' tel que $\lambda_N = 1/N^{1/p'}$ pour un entier $N>1$. On applique le lemme 5 et on obtient le résultat annoncé. On peut aussi montrer la

Proposition 7. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) (x_n) *est B-convexe sur des blocs.*

(2) $\forall \lambda$ *fini, F ne contient pas de l_n^1 λ-uniformément sur des blocs de* (x_n).

(3) $\exists \lambda > 1$, *F ne contient pas de l_n^1 λ-uniformément sur des blocs de* (x_n).

Cette dernière assertion revient à dire que l^1 n'est pas finiment représenté en blocs dans (x_n).

Remarques. 1) Si F est B-convexe, alors (x_n) est B-convexe sur des blocs, mais c_0 n'est pas B-convexe et sa base canonique est B-convexe sur des blocs.

2) (x_n) est B-convexe sur des blocs dans F si et seulement si (e_n) est B-convexe sur des blocs dans J; mais F B-convexe n'implique pas J B-convexe (considérer $F=l^2$).

Bibliographie

[1] B. Beauzamy, Banach—Saks properties and spreading models, *Math. Scand.*, **44** (1979), 357—384.

[2] B. Beauzamy, Réitération de modèles étalés, Exposé 18, Séminaire d'Analyse fonctionnelle (1978—1979).

[3] B. Beauzamy, Sous-espaces de modèles étalés et structures cycliquement reproduites dans un espace de Banach, preprint.

[4] A. Brunel and D. Sucheston, Equal signs additive sequences in Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, **21** (1976), 286—304.

[5] A. Brunel and L. Sucheston, On *J*-convexity and some ergodic super-properties of Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **204** (1975), 79—90.

[6] S. Guerre et J. T. Lapreste, Quelques propriétés des modèles étalés sur les espaces de Banach, *Publications mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie*, **21** (1980).

[7] R. C. James, Bases and reflexivity of Banach spaces, *Ann. Math.*, **52** (1950), 518—527.

[8] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, B. 92, Springer-Verlag (Berlin, (1977).

[9] P. G. Casazza and R. H. Lohman, A general construction of spaces of the type of R. C. James, *Canad. J. Math.*, **27** (1975), 1263—1270.

[10] B. Maurey et G. Pisier, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, *Studia Math.*, **58** (1976), 45—90.

[11] I. Singer, Bases and quasi-reflexivity of Banach spaces, *Math. Ann.*, **153** (1964), 199—209.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE L'ETAT À MONS
AVENUE MAISTRIAU, 15,
7000 MONS, BELGIQUE