Acta Sci. Math., 48 (1985), 395—399

Об одной оценке ортогональных многочленов

Е. М. НИКИШИН

Профессору К. Тандори по случаю его 60-летия

Пусть

$$\sigma(e) = \int_e p(\Theta)\, d\Theta + \nu(e)$$

произвольная мера на $[0, 2\pi]$, имеющая бесконечное число точек роста. Здесь $p \in L_1[0, 2\pi]$, а ν-сумма скачков и сингулярной составляющей меры σ. Пусть

$$\Phi_n(z) = z^n + \ldots$$

последовательность ортогональных по мере σ многочленов:

$$\int_0^{2\pi} \Phi_n(e^{i\Theta}) \overline{\Phi_m(e^{i\Theta})}\, d\sigma(\Theta) = 0, \quad n \neq m.$$

Многочлены $\{\Phi_n(z)\}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

(1) $$\Phi_0 \equiv 1, \quad \Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \bar{a}_n \Phi_n^*(z)$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ и

$$\Phi_n^*(z) = z^n \bar{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right).$$

Числа $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют неравенствам:

(2) $$|a_n| < 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

и называются круговыми параметрами.

Обратно, если элементы последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют (2), то соотношения (1) определяют некоторую последовательность многочленов, которые будут ортогональными по некоторой мере σ, имеющей бесконечное число точек роста.

Поступило 12 июля 1984.

Одна из задач теории ортогональных многочленов заключается в изучении их свойств по заданным круговым параметрам. Аналогичная задача возникает в отношении меры σ.

В монографии [1] Я. Л. Геронимус доказывает, что условие Г. Сегё

$$\int_0^{2\pi} \ln p(\Theta)\, d\Theta > -\infty \tag{3}$$

и неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \tag{4}$$

эквивалентны. При выполнении неравенств (3), (4) нормировочные постоянные

$$\beta_n = \int_0^{2\pi} |\Phi_n(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta)$$

удовлетворяют соотнощениям:

$$\beta_{n+1} \leqq \beta_n, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta > 0$$

В [1] доказывается также, что если

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \tag{5}$$

то мера σ абсолютно непрерывна $(\nu=0)$, $p(\Theta)>0$, $p\in C[0, 2\pi]$ и

$$\sup_n \|\Phi_n(e^{i\theta})\|_{C[0,2\pi]} < \infty$$

В работе [2] Г. Бакстер усилил этот результат, показав эквивалентность условия (5) и

$$p(\Theta) > 0, \quad p(\Theta)\in A[0, 2\pi].$$

Здесь A $[0, 2\pi]$-класс функций с абсолютно сходящимся рядом Фурье, а $C[0, 2\pi]$-непрерывные на всей оси, 2π-периодические функции с равномерной нормой. Укажем также на работу [3] в этом же направлении.

В настоящей работе мы продолжаем эти исследования. Пусть заданы круговые параметры $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $|a_n|<1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Положим

$$\varepsilon_{k,n}(\Theta) = \sum_{\nu=k}^{n} a_\nu e^{i\nu\Theta}, \quad 0 \leqq k \leqq n.$$

Справедлива

Теорема 1. *Для всех* $\Theta\in[0, 2\pi]$ *имеет место оценка:*

$$\left|\ln|\Phi_n(e^{i\theta})|\right| \leqq C_1+C_2\sum_{k=0}^{n}|a_k|\,|\varepsilon_{k,n}(\Theta)|$$

где постоянные C_1, C_2 *не зависят от* n *и* Θ.

Из теоремы 1 получается

Следствие 1. *Если круговые параметры действительны и*

$$a_n\downarrow 0 \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2<\infty\right)$$

то мера σ *имеет вид:*

$$d\sigma = p(\Theta)d\Theta+\nu_0$$

где ν_0*-мера сосредоточенная в точке* 0.

Доказательство теоремы 1. Отправляясь от рекуррентного соотношения (1) легко получить равенство (см. [1])

$$\Phi_n^*(z) = \prod_{k=0}^{n}\left\{1-a_k z\frac{\Phi_k(z)}{\Phi_k^*(z)}\right\}.$$

Полагая $z=e^{i\theta}$ $(0\leqq\Theta\leqq 2\pi)$, получим

$$\Phi_n^*(e^{i\Phi}) = e^{in\theta}\overline{\Phi_n(e^{i\theta})}.$$

$$\overline{\Phi_n(e^{i\theta})}e^{in\theta} = \prod_{k=0}^{n-1}\left\{1-a_k e^{-i(k-1)\theta}\frac{\Phi_k(e^{i\theta})}{\overline{\Phi_k(e^{i\theta})}}\right\}.$$

Пусть

$$\Phi_k(e^{i\theta}) = |\Phi_k(e^{i\theta})|e^{i\lambda_k(\theta)}.$$

Функции $\lambda_k(\Theta)$ можно выбрать непрерывными на $[0, 2\pi]$. Все нули полинома $\Phi_k(z)$ лежат внутри единичного круга. Поэтому

$$\lambda_k(2\pi) = \lambda_k(0)+2\pi k.$$

Положим

$$g_k(\Theta) = k\Theta-\lambda_k(\Theta).$$

Тогда $g_k(\Theta)\in C[0, 2\pi]$ и $g_k(0)=g_k(2\pi)$. Имеем

$$|\Phi_n(e^{i\theta})|e^{ig_n(\theta)} = \prod_{k=0}^{n-1}\left\{1-a_k e^{-i(k-1)\theta}e^{2i\lambda_k(\theta)}\right\} = \prod_{k=0}^{n-1}\left\{1-a_k e^{i(k+1)\theta}e^{-2ig_k(\theta)}\right\}.$$

Из этого соотношения следует, что мы можем считать

(6) $$g_n(\Theta) = Im\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left\{1-a_k e^{i(k+1)\theta}e^{-2ig_k(\theta)}\right\}$$

где

$$-\ln(1-z) = z+\frac{z^2}{2}+\ldots, \quad |z|<1.$$

Из (6)

$$|g_{n+1}(\Theta)-g_n(\Theta)| \leqq \left|\ln\left\{1-a_n e^{i(n+1)\Theta} e^{-2ig_n(\Theta)}\right\}\right| \leqq C_1|a_n|$$

где C_1 не зависит от n и Θ. Таким образом

$$(7) \qquad |g_{n+1}(\Theta)-g_n(\Theta)| \leqq c_1|a_n|.$$

Далее

$$\ln|\Phi_n(e^{i\Theta})| = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{i(k+1)\Theta} e^{-2ig_k(\Theta)} + O\Big(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|^2\Big)$$

где постоянная в O не зависит от n и Θ. Пусть $0 \leqq k < n$, тогда

$$a_k e^{ik\Theta} = \varepsilon_{k,n}(\Theta)-\varepsilon_{k+1,n}(\Theta).$$

Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}[\varepsilon_{k,n}-\varepsilon_{k+1,n}]e^{-2ig_k} = \sum_{k=k}^{n-1}\varepsilon_{k,n}[e^{-2ig_k}-e^{-2ig_{k-1}}]+\varepsilon_{0,n}-\varepsilon_{n,n}e^{-2ig_{n-1}}.$$

Отсюда, используя (7), получим

$$\big|\ln|\Phi_n(e^{i\Theta})|\big| \leqq C_2\sum_{k=1}^{n-1}|\varepsilon_{k,n}(\Theta)|\,|a_{k-1}|+|\varepsilon_{0,n}(\Theta)|+$$

$$+|\varepsilon_{n,n}(\Theta)|+C_3 \leqq C_4+C_5\sum_{k=0}^{n}|a_k|\,|\varepsilon_{k,n}(\Theta)|.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство Следствия 1. Имеем

$$|\varepsilon_{k,n}(\Theta)| \leqq A|a_k|\left(\left|\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\right|+1\right)$$

где A не зависит от n и Θ. По теореме 1

$$\big|\ln|\Phi_n(e^{i\Theta})|\big| \leqq C_1\left|\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\right|+C_2.$$

Отсюда

$$(8) \qquad \frac{1}{|\Phi_n^*(e^{i\Theta})|^2} \leqq e^{+2C_1|\operatorname{ctg}\Theta/2|+2C_2}.$$

Далее используем соотношение (см. [1])

$$\frac{\beta_n d\Theta}{|\Phi_n^*(e^{i\Theta})|^2} \to d\sigma(\Theta), \quad \beta_n = \|\Phi_n\|^2_{L_2,\sigma}$$

в смысле слабой сходимости мер. (Имеется в виду, что $\nu_n \to \nu$ в слабом смысле, если

$$\int_0^{2\pi} f d\nu_n \to \int_0^{2\pi} f d\nu$$

для любой $f \in C[0, 2\pi]$). Как указывалось выше, при выполнении условия Г. Сегё,

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta, \quad 0 < \beta < \infty.$$

Поэтому в силу оценки (8) мера σ будет абсолютно непрерывна на интервале $(0, 2\pi)$. Следствие 1 доказано.

Замечание. Ясно, что утверждение следствия 1 остаётся справедливым, если $a_n \uparrow 0$. В обоих этих случаях на $[\delta, 2\pi-\delta]$ выполняются равномерные оценки:

$$\frac{1}{M_\delta} \leqq |\Phi_n(e^{i\theta})| \leqq M_\delta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Литература

[1] Я. Л. Геронимус, *Многочлены ортогональные на окружности и на отрезке*, Физматгиз, (М. 1958).

[2] G. Baxter, A convergence equivalence related to polynomials orthogonal on the unit circle, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **99** (1961), 471—487.

[3] Б. Л. Голинский, О предельной теореме Г. Сегё, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **35** (1981), 408—427.

СССР, МОСКВА 117234
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ