Acta Sci. Math. 47 (1984), 465—470

Über numerische Wertebereiche und Spektralwertabschätzungen

A. RHODIUS

0. Einleitung

Numerische Wertebereiche für lineare Operatoren in Hilberträumen werden seit den Arbeiten [4], [15] von F. HAUSDORFF und O. TOEPLITZ untersucht. G. LUMER [9] und F. L. BAUER [2] führten numerische Wertebereiche für Banachraum-Operatoren ein. Nach J. P. WILLIAMS [16] ist das Spektrum jedes stetigen Endomorphismus eines Banachraumes eine Teilmenge der abgeschlossen Hülle des Bauerschen numerischen Wertebereiches.

Die abgeschlossene Hülle des numerischen Wertebereiches von Lumer enthält im allgemeinen nur das approximative Punktspektrum. In der vorliegenden Note werden mit Hilfe von zu Halbnormen gehörenden Wertebereichen Einschließungsmengen für Teile des Spektrums angegeben. Diese Resultate können als Verallgemeinerungen der Sätze von Williams und Lumer auf in halbnormierten Räumen wirkende Operatoren aufgefaßt werden. Als Anwendungsmöglichkeiten ergeben sich Spektralwerteinschließungen für Hilbertraum-Operatoren, für Integraloperatoren mit stochastischen Kernen ebenso wie Ergebnisse für diskrete Markovprozesse bezüglich ihres asymptotischen Verhaltens.

1. Begriffe und Bezeichnungen

Es sei E ein Vektorraum über dem Körper C der komplexen Zahlen, p eine Halbnorm auf E und $T: E \to E$ ein Endomorphismus von E. Ferner bezeichne S_p die Einheitssphäre $\{x \in E: p(x)=1\}$ und $D_p(x)$ die Menge der Stützfunktionale:

$$D_p(x) = \{f \in E': f(x) = 1, \quad |f(y)| \leq p(y) \quad (y \in E)\} \ (x \in S_p).$$

Eingegangen am 22. Februar 1983.

Für die Abbildung $Q_p: S_p \to \mathfrak{P}(E')$ der Einheitssphäre S_p in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(E')$ gelte $\emptyset \neq Q_p(x) \subseteqq D_p(x)$ $(x \in S_p)$.

Die Menge

$$V_{Q_p}(T) = \{f(Tx):\ f \in Q_p(x),\quad x \in S_p\}$$

heißt numerischer Wertebereich von T bezüglich Q_p. (Vgl. [11].) Da für die zugelassenen Abbildungen Q_p die konvexe Hülle von $V_{Q_p}(T)$ mit der konvexen Hülle von $V_{D_p}(T)$ übereinstimmt, ist $\sup\{|\lambda|: \lambda \in V_{Q_p}(T)\}$ unabhängig von der speziellen Abbildung Q_p. Die Größe

$$v_p(T) = \sup\{|\lambda|:\ \lambda \in V_{D_p}(T)\}$$

heißt numerischer Radius des Endomorphismus T.

Unter dem Spektrum $\sigma(T)$ verstehen wir stets das algebraische Spektrum des Endomorphismus T, das heißt, die komplexe Zahl λ gehört genau dann zu $\sigma(T)$, wenn $T-\lambda I$ keine bijektive Abbildung von E ist. Im Falle stetiger Endomorphismen in Banachräumen ist das algebraische Spektrum bekanntlich genau das topologische Spektrum. Für eine Norm p bezeichnet man als approximatives Punktspektrum a.p.$\sigma(T)$ die Menge aller $\lambda \in C$, für die eine Folge (x_n) aus S_p mit $\lim_{n\to\infty} p((T-\lambda I)x_n)=0$ existiert.

Ist F eine invarianter Unterraum des Endomorphismus T, so bezeichne $T_{|F}$ die Einschränkung von T auf F. So bezeichnet zum Beispiel $T_{|F_p}$ die Einschränkung eines stetigen Endomorphismus T von (E, p) auf den Nullraum $F_p = \{x \in E: p(x)=0\}$.

2. Die Spektraleigenschaften numerischer Wertebereiche

Satz 1. *Es sei T ein stetiger Endomorphismus des vollständigen halbnormierten Raumes (E, p). Dann gilt*

$$\sigma(T) \setminus \sigma(T_{|F_p}) \subseteqq \overline{V_{D_p}(T)}.$$

Beweis. Mit E/F_p bezeichnen wir den Quotientenraum von E nach $F_p = \{x \in E: p(x)=0\}$ und mit $[x]$ die Restklasse $x+F_p$ modulo F_p. Durch die Beziehung $\|[x]\| = p(x)$ $(x \in E)$ ist eine Norm auf E/F_p definiert; $(E/F_p, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum. Da F_p bezüglich T invarianter Teilraum von E ist, wird durch T eine lineare Abbildung T_{F_p} (die sogenannte Quotientenabbildung) von E/F_p in sich induziert. $T_{F_p}[x]=[y]$ genau dann, wenn $Tx \in [y]$ gilt.

Da die stetigen Linearformen $f \in E'$ auf jeder Restklasse modulo F_p konstant sind, wird durch die Vorschrift $(jf)[x] = f(x)$ $(f \in E',\ x \in E)$ eine Abbildung j von E' in $(E/F_p)'$ definiert. Die Abbildung j ist eine eineindeutige, bezüglich der Supremumsnormen isometrische Abbildung von E' auf $(E/F_p)'$. Es gilt

$$V_{D_{\|\cdot\|}}(T_{F_p}) = \{f^*(T_{F_p}[x]) : f^* \in D_{\|\cdot\|}([x]),\ [x] \in S_{\|\cdot\|}\} =$$
$$= \{(jf)([Tx]) : f \in D_p(x),\ x \in S_p\} = \{f(Tx) : f \in D_p(x),\ x \in S_p\} = V_{D_p}(T).$$

Für den stetigen Endomorphismus T_{F_p} des Banachraumes $(E/F_p, \|\cdot\|)$ gilt nach einem Satz von WILLIAMS [16]

$$\sigma(T_{F_p}) \subseteqq \overline{V_{D_{\|\cdot\|}}(T_{F_p})} = \overline{V_{D_p}(T)}.$$

Andererseits ergibt sich leicht die für invariante Teilräume bekannte Beziehung $\sigma(T) \subseteqq \sigma(T_{|F_p}) \cup \sigma(T_{F_p})$ (siehe z. B. [7]), so daß die Behauptung folgt.

Satz 2. *Es sei T ein stetiger Endomorphismus der halbnormierten Raumes (E, p). Es sei L eine Menge komplexer Zahlen derart, daß für jedes $\lambda \in L$ eine Folge (x_n) existiert mit $\lim_{n\to\infty} p((T-\lambda I)x_n)=0$ und nicht $\lim_{n\to\infty} p(x_n)=0$. Dann gilt $L \subseteqq \overline{V_{Q_p}(T)}$.*

Beweis. Für $\lambda \in L$ existieren nach Voraussetzung eine Folge (x_n) aus E und ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $\lim_{n\to\infty} p((T-\lambda I)x_n)=0$ und $p(x_n) \geqq \varepsilon_0$ $(n \in N)$. Dann gilt mit $y_n = x_n/p(x_n)$ die Beziehung $p((T-\lambda I)y_n) \to 0$. Für jedes $f_n \in Q_p(y_n)$ folgt

$$f_n(Ty_n) = f_n(T-\lambda I)y_n) + \lambda f_n(y_n) \to \lambda,$$

also gilt $\lambda \in \overline{V_{Q_p}(T)}$.

Satz 3. *Es sei T ein stetiger Endormorphismus des normierten Raumes $(E, \|\cdot\|)$ in sich. F sei ein bezüglich T invarianter abgeschlossener Unterraum von $(E, \|\cdot\|)$ und $\tilde{p}(z) = \inf_{y\in F} \|y+z\|$ $(z \in E)$. Dann gilt*

$$a.p.\sigma(T) \setminus a.p.\sigma(T_{|F}) \subseteqq \overline{V_{Q_{\tilde{p}}}(T)}.$$

Beweis. Für $\lambda \in L := \text{a.p.}\sigma(T) \setminus \text{a.p.}\sigma(T_{|F})$ existiert eine Folge (x_n) mit $\|x_n\| = 1$, $\|(T-\lambda I)x_n\| \to 0$ und nicht $\tilde{p}(x_n) \to 0$. Denn aus $\tilde{p}(x_n) \to 0$ folgt die Existenz einer Folge (y_n) aus F mit $\|x_n - y_n\| \to 0$, damit ergäbe sich aus der Stetigkeit von T zusammen mit $\|(T-\lambda I)x_n\| \to 0$ die Beziehung $\|(T-\lambda I)y_n\| \to 0$; da $\|y_n\| \to 1$ gilt, würde sonst λ zu $\text{a.p.}\sigma(T_{|F})$ gehören. Da T auch bezüglich $\tilde{p}$ stetig ist, sind für $T, L, \tilde{p}$ alle Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt, womit die Behauptung folgt.

3. Anwendungen

3.1. Hilbertraum-Operatoren. Es sei T ein stetiger Endomorphismus des Hilbertraumes E; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ seien voneinander verschiedene Eigenwerte von T mit zugehörigen Eigenvektoren $x_1, x_2, \ldots, x_l$ $(Tx_i = \lambda_i x_i,\ i = 1, 2, \ldots, l)$. Wir setzen

$$\Sigma = \{f \in E \colon \|f\| = 1, \quad (x_i, f) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l)\},$$

und

$$p(x) = \sup \{|(x,f)|:\ f \in \Sigma\} \quad (x \in E).$$

Dann gilt offensichtlich

$$V_{D_p}(T) = \{(Tx,f):\ f \in \Sigma,\ x \in E,\ (x,f) = p(x) = 1\}.$$

Hilfssatz 1. $V_{D_p}(T) = \{(Tx, x): \|x\| = 1,\ (x, x_i) = 0\ (i = 1, 2, \dots, l).\}$

Beweis. Wir zeigen, daß zu jedem $(Tx,f) \in V_{D_p}(T)$ ein $z \in E$ existiert, für das $\|z\| = 1$, $z \perp \mathscr{L}(x_1, x_2, \dots, x_l)$ und $(Tx, f) = (Tz, z)$ gelten. Da $F_p = \mathscr{L}(x_1, \dots, x_l)$ als endlichdimensionaler Teilraum von E abgeschlossen ist, existiert zu x genau ein Paar (x_0, z) mit $x_0 \in F_p$, $z \perp F_p$ und $x = x_0 + z$. Da F_p bezüglich T invariant ist, gilt $(Tz, z) = (Tx - Tx_0, z) = (Tx, z)$.

Andererseits folgen aus $x - z \in F_p$ die Beziehungen $p(z) = (z, f) = 1$. Aus $z/\|z\| \in \sum$ ergibt sich $\|z\| = |(z, z/\|z\|)| \leqq p(z)$ und somit $\|z\| = p(z) = 1$. Wegen $1 = (z, f) \leqq \|z\| \|f\| = 1$ gilt $f = z$, was noch zu zeigen war.

Satz 4. *Es gilt*

$$\sigma(T) \setminus \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\} \subseteqq \overline{\{(Tx, x): \|x\| = 1,\ (x, x_i) = 0,\quad i = 1, 2, \dots, l\}}.$$

Beweis. Die Halbnorm p ist die kanonische Halbnorm von $(E, \|\cdot\|)$ bezüglich des Unterraumes $\mathscr{L}(\{x_1, \dots, x_l\}) = F_p$. Damit ist (E, p) vollständig und T bezüglich der Halbnorm p stetig, so daß Satz 1 zusammen mit Hilfssatz 1 die Behauptung liefert.

3.2. Integraloperatoren mit stochastischen Kernen. Es sei $(X, \mathscr{B}, \mu)$ ein Maßraum mit dem positiven Maß μ und $B = B(X, \mathscr{B})$ die Menge der komplexwertigen $\mathscr{B}$-meßbaren beschränkten Funktionen auf X. Wir betrachten den Operator $T: B \to B$ mit

$$(Tx)(t) = \int_X H(t, s)\, x(s)\, d\mu(s) \quad (x \in B,\ t \in X).$$

Dabei sei H eine reellwertige $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$-meßbare Funktion auf $X \times X$ und erfülle die Bedingungen

$$H(t, s) \geqq 0, \int_X H(t, s)\, d\mu(s) = 1 \quad (t, s \in X).$$

Bezüglich der Supremumsnorm $\|x\| = \sup\limits_{s \in X} |x(s)|$ ist der Raum $(B, \|\cdot\|)$ vollständig, der Operator T ist beschränkt mit $\|T\| = 1$. Der mit der Oszillationshalbnorm $p(x) = \sup\limits_{t, t' \in X} |x(t) - x(t')|$ versehene Raum (B, p) ist vollständig. Der Integraloperator T ist bezüglich p stetig mit

$$p(T) = \frac{1}{2} \sup_{t, t' \in X} \int_X |H(t, s) - H(t', s)| \, d\mu(s).$$

(Siehe [10], [13]).

Satz 5. *Für jede zur Oszillationshalbnorm p gehörende Daulitätsabbildung Q_p gilt*

$$a.p.\sigma(T) \setminus \{1\} \subseteqq \overline{V_{Q_p}(T)}.$$

Beweis. Wir benutzen Satz 2 und setzen $L = \text{a.p.}\sigma(T) \setminus \{1\}$. Für $\lambda \in L$ existiert eine Folge (x_n) mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(T - \lambda I)x_n\| \to 0$. Es folgt $p((T - \lambda I)x_n) \to 0$. Andererseits gilt nicht $p(x_n) \to 0$; denn aus $p(x_n) \to 0$ und $\|x_n\| = 1$ folgt die Existenz einer konstanten Funktion c mit $\|x_n - c\| \to 0$ und somit aus der Stetigkeit des Operators T (bezüglich $\| \cdot \|$) die Gleichung $Tc = \lambda c$, also $\lambda = 1$.

Als Folgerung von Satz 5 ergibt sich für alle $\lambda \in \text{a.p.}\sigma(T) \setminus \{1\}$ die Abschätzung $|\lambda| \leqq v_p(T)$. Diese Ungleichung stellt eine Verschärfung der von E. Hopf [5], Bauer—Deutsch—Stoer [3], Anselone—Lee [1], Rhodius [10] angegebenen Abschätzungen für die von 1 verschiedenen Eigenwerte von T dar. In [12] ist eine Darstellung des numerischen Radius $v_p(T)$ in Abhängigkeit vom Kern H und dem Maß μ angegeben.

3.3. Homogene Markovketten mit allgemeinen Zustandsräumen. Jede homogene Markovkette $(X_n)_{n \in N}$ mit dem meßbaren Raum $(X, \mathscr{B})$ als Zustandsraum ist durch eine Übergangswahrscheinlichkeit P auf $(X, \mathscr{B})$ und eine Anfangsverteilung p auf $\mathscr{B}$ bestimmt. Es gelten $P(X_{n+1} \in A | X_n) = P(X_n, A)$ $(n \in N,\ A \in \mathscr{B})$ und $P(X_0 \in A) = p(A)$ $(A \in \mathscr{B})$. Die Markovkette heißt stark ergodisch, wenn eine Wahrscheinlichkeitsverteilung Q auf $\mathscr{B}$ derart existiert, daß

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{t \in X, A \in \mathscr{B}} |P(X_m \in A | X_0 = t) - Q(A)| = 0.$$

Um die Eigenschaft der starken Ergodizität durch das Verhalten numerischer Wertebereiche zu charakterisieren, wird der Übergangswahrscheinlichkeit P ein Endomorphismus T des Raumes $B = B(X, \mathscr{B})$ der komplexwertigen $\mathscr{B}$-meßbaren beschränkten Funktionen auf X zugeordnet:

$$(Tx)(t) = \int_X x(s) P(t, ds) \quad (x \in B).$$

T ist bezüglich der Oszillationshalbnorm $p(x) = \sup_{t, t' \in X} |x(t) - x(t')|$ $(x \in B)$ stetig, und es gilt

$$p(T) = \sup_{t, t' \in X, A \in \mathscr{B}} |P(t, A) - P(t', A)|$$

(siehe [14]); $1 - p(T)$ ist also der zur Übergangswahrscheinlichkeit P gehörende Ergodizitätskoeffizient. Da (B, p) vollständig ist, ist Satz 1 anwendbar, und es gilt wegen $T1 = 1$ die Beziehung

$$\sigma(T)\setminus\{1\} \subseteq \overline{V_{D_p}(T)}.$$

Aufgrund der letzten Inklusion kann mit Sätzen über die Konvergenz von Potenzen linearer Operatoren (siehe z. B. [6], [8]) folgende Aussage bewiesen werden (siehe [14]).

Satz 6. *Die homogene Markovkette* $(X_n)_{n\in N}$ *ist genau dann stark ergodisch, wenn eine natürliche Zahl* m *existiert, so daß der numerische Radius* $v_p(T^m)$ *kleiner als* 1 *ist.*

Als Folgerung dieses Satzes erhält man unmittelbar die für homogene Markovketten bekannte Äquivalenz von starker und schwacher Ergodizität und eine Charakterisierung der starken Ergodizität durch den Ergodizitätskoeffizienten (siehe [14]).

Literatur

[1] P. M. Anselone and J. W. Lee, Spectral properties of integral operators with nonnegative kernels, *Linear Algebra Appl.*, **9** (1974), 67—87.

[2] F. L. Bauer, On the field of values subordinate to a norm, *Numer. Math.*, **4** (1962), 103—111.

[3] F. L. Bauer, E. Deutsch und J. Stoer: Abschätzungen für die Eigenwerte positiver linearer Operatoren, *Linear Algebra Appl.*, **2** (1969), 275—301.

[4] F. Hausdorff, Der Wertevorrat einer Bilinearform, *Math. Z.*, **3** (1919), 314—316.

[5] E. Hopf, An inequality for positive linear integral operators, *J. Math. Mech.*, **12** (1963), 683—692.

[6] J. J. Koliha, Power Convergence and Pseudoinverses of Operators in Banach Spaces, *J. Math., Anal. Appl.*, **48** (1974), 446—469.

[7] H. P. Lotz, Über das Spektrum positiver Operatoren, *Math. Z.*, **108** (1968), 15—32.

[8] G. R. Luecke, Norm convergence of T^n, *Canad. J. Math.*, **29** (1977), 1340—1344.

[9] G. Lumer, Semi-inner-product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **100** (1961), 29—43.

[10] A. Rhodius, Eine Eigenwertabschätzung für Integraloperatoren mit stochastischen Kernen, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **18** (1977), 183—193.

[11] A. Rhodius, Über zu Halbnormen gehörende numerische Wertebereiche linearer Operatoren, *Math. Nachr.*, **86** (1978), 181—185.

[12] A. Rhodius, Numerische Wertebereiche linearer Operatoren und Einschließungsmengen für die nichttrivialen Eigenwerte von Integraloperatoren mit stochastischen Kernen, *Beiträge Anal.*, **14** (1979), 47—61.

[13] A. Rhodius, Ergodizität inhomogener Markovketten und numerische Wertebereiche, *Wiss. Z. PH 'K.F.W. Wander' Dresden*, **3** (1980), 47—60.

[14] A. Rhodius, A characterization of strong ergodicity by means of numerical ranges, in: *Proc. Conference Topology and Measure III* (GDR 1980), vol. 2 (Greifswald 1982), 229—233.

[15] O. Toeplitz, Das algebraische Analogon zu einem Satz von Fejér, *Math. Z.*, **2** (1918), 187—197.

[16] J. P. Williams, Spectra of products and numerical ranges, *J. Math. Anal. Appl.*, **17** (1967), 214—220.

SEKTION MATHEMATIK
PH „K. F. W. WANDER" DRESDEN
806 DRESDEN, PSF 365, DDR