Acta Sci. Math. 46 (1983), 55—58

Toleranzrelationen als Galoisverbindungen

H. J. BANDELT

Über Toleranzrelationen auf Verbänden ist schon einiges geschrieben worden, siehe etwa den Überblicksartikel [6] von Ivan Chajda. Ein jüngst verfaßter Aufsatz [8] von Gábor Czédli gibt mir einen Anlaß, die bereits bekannten Ergebnisse um den im Titel genannten Aspekt zu ergänzen. Ich weiß zwar nicht, ob durch Interpretation der Toleranzrelationen als gewisse Galoisverbindungen zwischen Idealverband und Filterverband erstere oder letztere besser verstanden werden; auf jeden Fall bleibt — wie eigentlich immer bei Galoisverbindungen — nicht viel zu beweisen.

Zur Erinnerung sei gesagt, daß mit einer Toleranzrelation ξ auf einem Verband L schlicht ein reflexiver und symmetrischer Unterverband von $L\times L$ gemeint ist. Bezüglich Inklusion geordnet bilden die Toleranzrelationen auf L einen Verband $\Xi(L)$, der in [3] näher betrachtet wurde. Eine Toleranzrelation ξ wird am besten durch ihre Blockstruktur verstanden; jede maximale Teilmenge B von L paarweise modulo ξ toleranter Elemente (also $B\times B\subseteq\xi$) heißt ein Block von ξ. Die von allen ξ-Blöcken erzeugten unteren Abschnitte und oberen Abschnitte bilden jeweils zueinander antiisomorphe Verbände von Idealen und Filtern (vgl. [8]). In der Tat wird diese Antiisomorphie durch eine Galoisverbindung zwischen Idealverband $\mathscr{I}(L)$ und Filterverband $\mathscr{F}(L)$ induziert. Es ist dann unschwer zu erkennen, daß der Toleranzverband $\Xi(L)$ isomorph ist zu einem gewissen Hauptfilter in dem Tensorprodukt von $\mathscr{I}(L)$ und $\mathscr{F}(L)$. Vielleicht bedarf noch das Tensorprodukt $M\otimes N$ vollständiger Verbände M und N einer Erklärung: Eine Galoisverbindung (σ, τ) zwischen M und N besteht aus (einander eindeutig bestimmenden) Abbildungen $\sigma\colon M\to N$ und $\tau\colon N\to M$, für die $y\leqq x\sigma$ mit $x\leqq y\tau$ gleichbedeutend ist. $M\otimes N$ besteht aus allen Galoisverbindungen (σ, τ) zwischen M und N, vertreten durch die Komponenten σ. $M\otimes N$ ist bezüglich der punktweisen Ordnung ein vollständiger Verband, der sich bekanntlich als Verband bestimmter unterer Abschnitte in $M\times N$ darstellen läßt (eine Menge A heißt unterer Abschnitt, wenn mit jedem $a\in A$ auch jedes $x\leqq a$ zu A gehört). Hier sind natürlich nur algebraische Verbände von Interesse:

Received March 9, 1982.

Hilfssatz. *Es seien M und N algebraische Verbände, sowie S und T die zugehörigen Halbverbände der kompakten Elemente. Das Tensorprodukt $M\otimes N$ ist isomorph zu dem (bzgl. Inklusion) geordneten System aller unteren Abschnitte H von $S\times T$, die den nachfolgenden Bedingungen genügen:*

(i) $S\times\{0\},\ \ \{0\}\times T\subseteq H$,

(ii) $(u\wedge x, v\vee y),\ (u\vee x, v\wedge y)\in H$ *falls* $(u, v),\ (x, y)\in H$.

Beweis. Wie mit Lemma 1.1 aus [1] gezeigt wurde, läßt sich $M\otimes N$ vermöge $(\sigma, \tau)\rightarrow\{(x, y)\in M\times N\,|\,y\leqq x\sigma\}$ identifizieren mit dem System der Scott-abgeschlossenen unteren Abschnitte G von $M\times N$, die $(0, 1)$, $(1, 0)$ und mit (u, v), (x, y) auch $(u\wedge x, v\vee y)$, $(u\vee x, v\wedge y)$ enthalten. Es ist klar, daß für jede Menge G mit diesen Eigenschaften die Menge $H=G\cap S\times T$ ein unterer Abschnitt von $S\times T$ ist, der (i) und (ii) genügt. Umgekehrt läßt sich jeder solchen Menge H der Scott-Abschluß $G=\bar{H}$ in $M\times N$ zuordnen; $\bar{H}$ besteht genau aus allen gerichteten Suprema (in $M\times N$) von Elementen aus H. Übliches Hantieren mit algebraischen Verbänden (vgl. [10]) führt hier zur Einsicht, daß $G\leftrightarrow H$ die gewünschte Isomorphie vermittelt.

Standardbeispiele algebraischer Verbände sind Idealverbände $\mathscr{I}(L)$ (bzw. Filterverbände $\mathscr{F}(L)$) irgendwelcher Verbände L. Die folgende Vereinbarung mag sich hier als sinnvoll erweisen: Die leere Menge zählt zu $\mathscr{I}(L)$ (bzw. zu $\mathscr{F}(L)$) genau dann, wenn L kein kleinstes (bzw. größtes) Element besitzt. Die Dedekind—MacNeille-Vervollständigung eines Verbandes L wird bekanntlich mittels einer Galoisverbindung $(\uparrow, \downarrow)$ zwischen $\mathscr{I}(L)$ und $\mathscr{F}(L)$ hergestellt; dabei werden einem Ideal I und einem Filter F von L der Filter $I^{\uparrow}$ der oberen Schranken von I und das Ideal $F^{\downarrow}$ der unteren Schranken von F zugeordnet. Eine beliebige Galoisverbindung (σ, τ) zwischen $\mathscr{I}(L)$ und $\mathscr{F}(L)$ werde tolerant genannt, wenn I^{σ} stets $I^{\uparrow}$ umfaßt (d. h. immer $F^{\downarrow}\subseteq F^{\tau}$ gilt). Die toleranten Galoisverbindungen bilden somit in dem Tensorprodukt $\mathscr{I}(L)\otimes\mathscr{F}(L)$ gerade den von $(\uparrow, \downarrow)$ erzeugten Hauptfilter.

Satz. *Für jeden Verband L sind der Toleranzverband $\Xi(L)$ und der Verband der toleranten Galoisverbindungen zwischen $\mathscr{I}(L)$ und $\mathscr{F}(L)$ isomorph.*

Beweis. Die kompakten Elemente von $\mathscr{I}(L)$ und $\mathscr{F}(L)$ außer der leeren Menge bilden einen Verband, der mit L bzw. dem zu L dualen Verband identifiziert werden kann. Offenbar ist eine Galoisverbindung (σ, τ) zwischen $\mathscr{I}(L)$ und $\mathscr{F}(L)$ genau dann tolerant, wenn für jedes Hauptideal $(x]$ der Filter $(x]^{\sigma}$ jeweils x enthält, d. h. wenn die Menge $\gamma=\{(x, y)\in L\times L\,|\,y\in(x]^{\sigma}\}$ eine reflexive Relation ist. Der Verband der toleranten Galoisverbindungen ist daher aufgrund des Hilfssatzes isomorph zum Verband $\Gamma(L)$ aller reflexiven Unterverbände γ von $L\times L$, für die mit $w\leqq x$, $(x, y)\in\gamma$, $y\leqq z$ stets $(w, z)\in\gamma$ gilt. Gemäß [2] ist vermöge $\gamma\rightarrow\gamma\cap\gamma^{-1}$ der Verband $\Gamma(L)$ isomorph zum Toleranzverband $\Xi(L)$.

Da das Tensorprodukt distributiver algebraischer Verbände wieder distributiv ist (siehe [1] oder [12]), folgt aus dem voranstehenden Satz sofort, daß Toleranzverbände distributiver Verbände stets distributiv sind (siehe [7], vgl. [4]).

Für endliche Verbände L ist der obige Satz schon als Lemma 3 in [2] erwähnt worden: Der Toleranzverband $\Xi(L)$ eines endlichen Verbandes L stimmt mit dem Verband der verbindungstreuen Subjektionen (im Sinne von [13], [14], [15]), d. h. der absteigenden residuierten Abbildungen (im Sinne von [5]) überein. Für eine gegebene Toleranzrelation ξ wird dabei durch die zugehörige verbindungstreue Subjektion σ jedes Element x abgebildet auf das kleinste Element $x\sigma$, das zu x tolerant modulo ξ ist. Allgemeiner ergibt sich hier für einen beliebigen Verband L: Die zu einer Tolreanzrelation ξ auf L gehörige Galoisverbindung (σ, τ) ordnet einem Ideal I den größten Filter $F=I^\sigma$ (bzw. einem Filter F das größte Ideal $I=F^\tau$) zu, so daß $I\cap F$ in einem Block von ξ enthalten ist. Umgekehrt liefert eine tolerante Galoisverbindung (σ, τ) vermöge $\{I\cap F | I=F^\tau,\ F=I^\sigma,\ I\cap F\neq\emptyset\}$ die Blöcke der zugehörigen Toleranzrelation ξ auf L. Rudimente dieser Beobachtung finden sich auch schon in [8] Theorem 2. Es mögen $\mathscr{I}^{\sigma\tau}(L)$ und $\mathscr{F}^{\tau\sigma}(L)$ die zueinander antiisomorphen Verbände aller Ideale der Form $I^{\sigma\tau}$ bzw. aller Filter der Form $F^{\tau\sigma}$ bezeichnen. Die voranstehende Beobachtung läßt sich dann auch wie folgt formulieren (und umfaßt somit [8] Theorem 1): Das System L/ξ aller Blöcke von ξ kann mit dem Unterverband $\{I\in\mathscr{I}^{\sigma\tau}(L) | I\cap I^\sigma\neq\emptyset\}$ von $\mathscr{I}^{\sigma\tau}(L)$ identifiziert werden; dieser Unterverband ist vermöge σ antiisomorph zu $\{F\in\mathscr{F}^{\tau\sigma}(L) | F^\tau\cap F\neq\emptyset\}$. Der sogenannte Faktorverband L/ξ von L modulo ξ erbt seine Verbandsstruktur also von dem vollständigen Verband $\mathscr{I}^{\sigma\tau}(L)$, wobei (σ, τ) die zugehörige Galoisverbindung ist. Die Art der Einbettung von L/ξ in $\mathscr{I}^{\sigma\tau}(L)$ ist auch schnell geklärt: Die Ideale $[x)^\tau$ und die Filter $(x]^\sigma$ liegen infimumdicht in $\mathscr{I}^{\sigma\tau}(L)$ bzw. $\mathscr{F}^{\tau\sigma}(L)$. Somit ist L/ξ supremum- und infimumdicht in $\mathscr{I}^{\sigma\tau}(L)$, d. h. $\mathscr{I}^{\sigma\tau}(L)$ ist die Dedekind—MacNeille-Vervollständigung von L/ξ.

Jeder endliche Verband kommt als Faktorverband eines endlichen distributiven Verbandes modulo einer Toleranzrelation vor, siehe [8] Theorem 3. Diese Tatsache leitet sich auch schon aus [11] Satz 7.2 ab: Jeder endliche Verband ist isomorph zum Skelett eines endlichen distributiven Verbandes. Das Skelett eines modularen Verbandes L endlicher Länge ist nämlich das Bild einer gewissen verbindungstreuen Subjektion auf L (siehe [11] Lemma 6.1), also der Faktorverband von L modulo einer kanonischen Toleranzrelation (vgl. [3] Theorem 3.1). Ich weiß allerdings nicht, ob auch im unendlichen Fall jeder Verband als Faktorverband eines distributiven Verbandes modulo einer Toleranzrelation auftritt.

Literatur

[1] H. J. Bandelt, The tensor product of continuous lattices, *Math. Z.*, **172** (1980), 89—96.

[2] H. J. Bandelt, Local polynomial functions on lattices, *Houston J. Math.*, **7** (1981), 317—325.

[3] H. J. Bandelt, Tolerance relations on lattices, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **23** (1981), 367—381.

[4] H. J. Bandelt, Tolerances on median algebras, *Czech. Math. J.* (im Druck).

[5] T. S. Blyth and M. F. Janowitz, *Residuation theory*, Pergamon Press (New York, 1972).

[6] I. Chajda, Recent results and trends in tolerances on algebras and varieties, *Finite algebra and multiple-valued logic* (Proc. Conf. Szeged, 1979), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **28**, North-Holland (Amsterdam, 1981); pp. 69—95.

[7] I. Chajda and B. Zelinka, Lattices of tolerances, *Časopis pěst. mat.*, **102** (1977), 10—24.

[8] G. Czédli, Factor lattices by tolerances, *Acta Sci. Math.*, **44** (1982), 35—42.

[9] G. Czédli and L. Klukovits, A note on tolerances of idempotent algebras, *Glasnik Mat. (Zagreb)*, **18** (38) (1983), 35—40.

[10] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, D. S. Scott, *A compendium of continuous lattices*, Springer-Verlag (Berlin, 1980).

[11] C. Herrmann, *S*-verklebte Summen von Verbänden, *Math. Z.*, **130** (1973), 255—274.

[12] Z. Shmuely, The tensor product of distributive lattices, *Algebra Universalis*, **9** (1979), 281—296.

[13] R. Wille, Eine Charakterisierung endlicher, ordnungspolynomvollständiger Verbände, *Arch. Math.*, **28** (1977), 557—560.

[14] R. Wille, A note on algebraic operations and algebraic functions of finite lattices, *Houston J. Math.*, **3** (1977), 593—597.

[15] R. Wille, Über endliche, ordnungsaffinvollständige Verbände, *Math. Z.*, **155** (1977), 103—107.

FACHBEREICH 6, UNIVERSITÄT OLDENBURG
2900 OLDENBURG, F. R. GERMANY