Acta Aci. Math., 43 (1981), 105—106

Korrektur und Ergänzung zu meiner Arbeit „Über Schreiersche Gruppenerweiterungen und ihre Kommutatorgruppen"

R. QUINKERT

Wir zeigen, daß entgegen einem fehlerhaften Beispiel in § 4 von [1] die im Zusammenhang mit Satz 4.2 in [1] auftretenden Bedingungen IV* und IV** (bei Gültigkeit einer ohnehin benötigten Bedingung I*) äquivalent sind. Da IV* eine Abschwächung von IV** ist. ergibt sich daraus eine Verschärfung des Satzes 4.2.

Es sei M eine beliebige Gruppe und $\mathcal{G}=\times\mathcal{G}_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$ ein (diskretes) direktes Produkt zyklischer Gruppen $\mathcal{G}_\lambda=\langle X_\lambda\rangle$ der Charakteristik n_λ. Dann hat nach [1], § 4 jede Schreiersche Erweiterung G von M mit $\mathcal{G}$ ein Parametersystem mit folgenden Bestimmungsstücken:

a) Die Automorphismen $\mathcal{A}_\lambda$ und, für $n_\lambda\neq 0$, die Faktoren $[X_\lambda, X_\lambda^{n_\lambda-1}]=v_\lambda\in M$ der in G enthaltenen Schreierschen Erweiterungen von M mit $\mathcal{G}_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$. Sie erfüllen

$$(*)\qquad v_\lambda^{\mathcal{A}_\lambda}=v_\lambda \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_\lambda^{n_\lambda}=\mathcal{I}(v_\lambda) \quad \text{mit} \quad \alpha\to\alpha^{\mathcal{I}(v_\lambda)}=v_\lambda^{-1}\alpha v_\lambda.$$

b) Bezüglich einer willkürlich gewählten linearen Ordnung $<$ von Λ für jedes Paar $i<j$ aus $\Lambda\times\Lambda$ ein Element $[X_j, X_i]=\gamma_{ji}\in M$.

Diese Elemente genügen für alle $\sigma, \tau, \varrho\in\{1, -1\}$ mit $\sigma^*=-1$ für $\sigma=-1$, sonst $\sigma^*=0$ (τ^*, ϱ^* entsprechend) den Gleichungen

$$\text{I}^{**}\qquad \mathcal{A}_j^{\tau}\mathcal{A}_i^{\sigma}=\mathcal{A}_i^{\sigma}\mathcal{A}_j^{\tau}\mathcal{I}\big(\gamma_{ji}^{\tau\sigma\mathcal{A}_j^{\tau^*}\mathcal{A}_i^{\sigma^*}}\big),\quad i<j,$$

weiteren Gleichungen II** und III** für alle $i<j$ und, falls $|\Lambda|\geqq 3$, noch

$$\text{IV}^{**}\qquad \gamma_{kj}^{\varrho\tau\mathcal{A}_k^{\varrho^*}\mathcal{A}_j^{\tau^*}}\gamma_{ki}^{\varrho\sigma\mathcal{A}_k^{\varrho^*}\mathcal{A}_i^{\sigma^*}\mathcal{A}_j^{\tau}}\gamma_{ji}^{\tau\sigma\mathcal{A}_j^{\tau^*}\mathcal{A}_i^{\sigma^*}}=\gamma_{ji}^{\tau\sigma\mathcal{A}_j^{\tau^*}\mathcal{A}_i^{\sigma^*}\mathcal{A}_k^{\varrho}}\gamma_{ki}^{\varrho\sigma\mathcal{A}_k^{\varrho^*}\mathcal{A}_i^{\sigma^*}}\gamma_{kj}^{\varrho\tau\mathcal{A}_k^{\varrho^*}\mathcal{A}_j^{\tau^*}\mathcal{A}_i^{\sigma}},$$
$$i<j<k.$$

Dabei tritt z. B. $\sigma=-1$ und damit $\sigma^*=-1$ nur auf, wenn $\mathcal{G}_i$ unendliche Ordnung hat. Für eine Erweiterung von M mit einem direkten Produkt $\mathcal{G}=\times\mathcal{G}_\lambda$ endlicher zyklischer Gruppen vereinfachen sich also I**—IV** erheblich, nämlich zu den aus ihnen für $\sigma=\tau=\varrho=1$ entstehenden Gleichungen I*—IV*.

Für den allgemeinen Fall zeigten wir im Beweis von Satz 4.2, daß auch *umgekehrt zu jedem System von Automorphismen $\mathcal{A}_\lambda$ von M, von Elementen $v_\lambda\in M$ für $n_\lambda\neq 0$ und von Elementen $\gamma_{ji}\in M$ $(\lambda, i, j\in\Lambda,\ i<j)$, welche den Bedingungen $(*)$ und* I**—IV** *genügen, eine Schreiersche Erweiterung von M mit $\mathcal{G}=\times\mathcal{G}_\lambda$ gehört.* Andererseits

Eingegangen am 30. Juli 1979, in umgearbeiter Form am 28. Juli 1980.

zeigten wir die Äquivalenzen I*⇔I**, II*⇔II** und III*⇔III** (die letzten beiden falls auch I* bzw. I** erfüllt ist) und gaben ein Beispiel, für welches $(*)$ und I*—IV*, aber nicht IV** erfüllt sein sollte. Daraus ergab sich unsere Formulierung der Kennzeichnung der Erweiterungen von M mit $\mathscr{G}=\times\mathscr{G}_\lambda$ in Satz 4.2 mit den Bedingungen $(*)$, I*—III* und IV**.

Dieses Beispiel verletzt jedoch, wie wir übersehen haben, auch die Bedingung I*, und in der Tat gilt nach der folgenden Proposition, daß bereits I* und IV* stets auch IV** implizieren. Damit läßt sich Satz 4.2 von [1] einfacher mit $(*)$, I*—IV* formulieren. In dieser Form entspricht er nach den in [1] durchgeführten Vergleichen (Seite 344 einschließlich i)) dem von O. Schreier in [2] angegebenen, jedoch nur für endliche $\mathscr{G}_\lambda$ bewiesenen Satz III. Die in [1] folgende Behauptung ii), daß im allgemeinen Fall eine Verschärfung der Bedingungen gemäß $(*)$, I*—III* und IV** erforderlich wäre, ist also falsch.

Proposition. *Automorphismen* $\mathscr{A}_\lambda$ *und Elemente* γ_{ji} *von* M $(\lambda, i, j\in\Lambda,\ i<j)$, *welche den Gleichungen* I* *und* IV* *genügen, erfüllen auch die Gleichungen* IV**.

Beweis. Die Anwendung von $\mathscr{A}_k^{-1}$ auf IV* ergibt

$$\gamma_{kj}^{\mathscr{A}_k^{-1}}\gamma_{ki}^{\mathscr{A}_j\mathscr{A}_k^{-1}}\gamma_{ji}^{\mathscr{A}_k^{-1}}=\gamma_{ji}\gamma_{ki}^{\mathscr{A}_k^{-1}}\gamma_{kj}^{\mathscr{A}_i\mathscr{A}_k^{-1}},\quad i<j<k.$$

Unter Verwendung der mit I* gleichwertigen Formel I** können wir hier

$$\mathscr{A}_j\mathscr{A}_k^{-1}=\mathscr{A}_k^{-1}\mathscr{A}_j\mathscr{I}(\gamma_{kj}^{\mathscr{A}_k^{-1}})\quad\text{und}\quad\mathscr{A}_i\mathscr{A}_k^{-1}=\mathscr{A}_k^{-1}\mathscr{A}_i\mathscr{I}(\gamma_{ki}^{\mathscr{A}_k^{-1}})$$

einsetzen und erhalten

$$\gamma_{kj}^{\mathscr{A}_k^{-1}}\gamma_{ki}^{\mathscr{A}_k^{-1}\mathscr{A}_j\mathscr{I}(\gamma_{kj}^{\mathscr{A}_k^{-1}})}\gamma_{ji}^{\mathscr{A}_k^{-1}}=\gamma_{ji}\gamma_{ki}^{\mathscr{A}_k^{-1}}\gamma_{kj}^{\mathscr{A}_k^{-1}\mathscr{A}_i\mathscr{I}(\gamma_{ki}^{\mathscr{A}_k^{-1}})}.$$

Das ergibt

$$\gamma_{ki}^{\mathscr{A}_k^{-1}\mathscr{A}_j}\gamma_{kj}^{\mathscr{A}_k^{-1}}\gamma_{ji}^{\mathscr{A}_k^{-1}}=\gamma_{ji}\gamma_{kj}^{\mathscr{A}_k^{-1}\mathscr{A}_i}\gamma_{ki}^{\mathscr{A}_k^{-1}},$$

woraus schließlich folgt

$$\gamma_{kj}^{-1\mathscr{A}_k^{-1}}\gamma_{ki}^{-1\mathscr{A}_k^{-1}\mathscr{A}_j}\gamma_{ji}=\gamma_{ji}^{\mathscr{A}_k^{-1}}\gamma_{ki}^{-1\mathscr{A}_k^{-1}}\gamma_{kj}^{-1\mathscr{A}_k^{-1}\mathscr{A}_i},$$

also IV** für $\varrho=-1$, $\sigma=\tau=1$. Auf die damit für $\varrho\in\{1,-1\}$, $\sigma=\tau=1$ gezeigte Formel IV** wendet man nun $\mathscr{A}_j^{-1}$ an und erhält nach ähnlicher Umformung IV** für $\varrho\in\{1,-1\}$, $\tau=-1$, $\sigma=1$. Damit gilt IV** für $\varrho,\tau\in\{1,-1\}$, $\sigma=1$, worauf man in einem dritten Schritt $\mathscr{A}_i^{-1}$ anzuwenden hat.

Literaturverzeichnis

[1] R. Quinkert, Über Schreiersche Gruppenerweiterungen und ihre Kommutatorgruppen, *Acta Sci. Math.*, **40** (1978), 327—345.

[2] O. Schreier, Über die Erweiterung von Gruppen I, *Monatsh. Math. Phys.*, **34** (1926), 165—180.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT CLAUSTHAL
ERZSTRASSE 1
D—3392 CLAUSTHAL—ZELLERFELD