Acta Sci. Math., 42 (1980), 325—330

# Factorisations régulières et sous-espaces invariants

RADU I. TEODORESCU

**1.** Soient $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}_*$ deux espaces de Hilbert complexes séparables, soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique contractive pure [1]) et soit $T$ l'opérateur qui lui est associé par

$$T^*(u\oplus v) = e^{-it}(u(e^{it})-u(0))\oplus e^{-it}v(t)$$

sur l'espace $\mathfrak{H}=\mathfrak{K}_+\ominus\mathfrak{G}$ où $\mathfrak{K}_+=H^2(\mathfrak{E}_*)\oplus(\Delta L^2(\mathfrak{E}))^-$, $\mathfrak{G}=\{\Theta u\oplus\Delta u\colon u\in H^2(\mathfrak{E})\}$ et $\Delta(t)=[I-\Theta^*(e^{it})\cdot\Theta(e^{it})]^{1/2}$.

Envisageons une factorisation $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ de $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$, où les facteurs $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ sont des fonctions analytiques contractives et soit $Z$ le prolongement à $(\Delta L^2(\mathfrak{E}))^-$ de l'opérateur isométrique $Z_0\colon \Delta L^2(\mathfrak{E})\to(\Delta_2L^2(\mathfrak{F}))^-\oplus(\Delta_1L^2(\mathfrak{E}))^-$ défini par $Z_0\colon \Delta v\to\Delta_2\Theta_1 v\oplus\Delta_1 v$, $v\in L^2(\mathfrak{E})$.

Rappelons que la factorisation $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ est dite régulière si $Z$ est un opérateur unitaire, *cf.* [H] ch. VII. On y trouve aussi les suivants résultats:

(a) A chaque sous-espace $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}$ invariant pour l'opérateur $T$ il correspond une factorisation régulière $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ telle que le sous-espace $\mathfrak{H}_1$ et son complément orthogonal $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_1$ ont les représentations suivantes:

(1) $\quad \mathfrak{H}_1=\{\Theta_2u\oplus Z^{-1}(\Delta_2u\oplus v)\colon u\in H^2(\mathfrak{F}),\ v\in(\Delta_1L^2(\mathfrak{E}))^-,\ \Theta_1^*u+\Delta_1v\perp H^2(\mathfrak{E})\}$,

(1') $\quad \mathfrak{H}_2=\{u\oplus Z^{-1}(v\oplus 0)\colon u\in H^2(\mathfrak{E}_*),\ v\in(\Delta_2L^2(\mathfrak{F}))^-,\ \Theta_2^*u+\Delta_2v\perp H^2(\mathfrak{F})\}$.

(b) Pour toute factorisation régulière $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ le sous-espace $\mathfrak{H}_1$ donné par la formule (1) est un sous-espace invariant pour $T$.

Nous rappelons aussi que si $S\in\mathscr{B}(\mathfrak{H})$ est un élément du commutant $\{T\}'=\{S\in\mathscr{B}(\mathfrak{H})\colon ST=TS\}$ alors (*cf.* [1]) il existe des fonctions analytiques bornées $\{\mathfrak{E}_*, \mathfrak{E}_*, A(\lambda)\}$, $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, A_0(\lambda)\}$, des fonctions mesurables bornées $B(\cdot)\colon \mathfrak{E}_*\to(\Delta\mathfrak{E})^-$, $C(\cdot)\colon(\Delta\mathfrak{E})^-\to(\Delta\mathfrak{E})^-$ liées par les équations

(2) $$A\cdot\Theta=\Theta\cdot A_0 \quad\text{et}\quad B\Theta+C\Delta=\Delta\cdot A_0$$

Reçu le 10 octobre 1979.

[1]) Pour toutes les notions qui ne sont pas explicitement définies ainsi que pour la notation utilisée *cf.* [H].

et telles qu'on ait $S=P_+Y|\mathfrak{H}$ où $P_+$ est la projection orthogonale de $\mathfrak{K}_+$ sur $\mathfrak{H}$ et $Y$ est l'opérateur dans $\mathfrak{K}_+$ ayant par rapport à la décomposition $\mathfrak{K}_+=$ $=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{G}$ la matrice

$$Y=\begin{bmatrix} A & O \\ B & C \end{bmatrix}.$$

Le but de cette Note est de déterminer des conditions sur un élément $S$ de $\{T\}'$ pour que le sous-espace $\mathfrak{H}_1$ soit invariant pour $S$. De même nous obtenons des conditions nécessaires pour que le sous-espace $\mathfrak{H}_1$ soit de la forme $\mathfrak{H}_1=(S\mathfrak{H})^-$ pour un $S\in\{T\}'$.

**2.** Dans ce paragraphe nous déterminons la structure de l'opérateur $S\in\{T\}'$ tel que le sous-espace $\mathfrak{H}_1$ soit invariant pour $S$. La factorisation $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ étant fixée nous considérerons le modèle fonctionnel, unitairement équivalent à celui dejà introduit, donné par

$$\mathbf{T}^*(u\oplus v_2\oplus v_1)=e^{-it}\big(u(e^{it})-u(0)\big)\oplus e^{-it}v_2(t)\oplus e^{-it}v_1(t)$$

sur l'espace $\mathbf{H}=\mathbf{K}_+\ominus\mathbf{G}$ où $\mathbf{K}_+=H^2(\mathfrak{E}_*)\oplus(\Delta_2L^2(\mathfrak{F}))^-\oplus(\Delta_1L^2(\mathfrak{E}))^-$ et $\mathbf{G}=$ $=\{\Theta u\oplus\Delta_2\Theta_1u\oplus\Delta_1u\colon u\in H^2(\mathfrak{E})\}$; le sous-espace $\mathbf{H}_1$ correspondant à $\mathfrak{H}_1$ est alors donné par

$$\mathbf{H}_1=\{\Theta_2u\oplus\Delta_2u\oplus v\colon\ u\in H^2(\mathfrak{F}),\ v\in(\Delta_1L^2(\mathfrak{E}))^-,\ \Theta_1^*u+\Delta_1v\perp H^2(\mathfrak{E})\}.$$

Dans ce cas, si l'on note

$$ZB=\begin{bmatrix} B_2 \\ B_1 \end{bmatrix} \quad\text{et}\quad ZCZ^{-1}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

l'opérateur $\mathbf{S}\in\{\mathbf{T}\}'$ correspondant à $S$ sera donné par $\mathbf{S}=\mathbf{P}_+\mathbf{Y}|\mathbf{H}$ où $\mathbf{P}_+$ est la projection orthogonale de $\mathbf{K}_+$ sur $\mathbf{H}$ et $\mathbf{Y}$ a la forme

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} A & O & O \\ B_2 & C_{11} & C_{12} \\ B_1 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \tag{3}$$

où

$$\begin{cases} A\Theta=\Theta A_0, \\ B_2\Theta+C_{11}\Delta_2\Theta_1+C_{12}\Delta_1=\Delta_2\Theta_1A_0, \\ B_1\Theta+C_{21}\Delta_2\Theta_1+C_{22}\Delta_1=\Delta_1A_0. \end{cases} \tag{2'}$$

Soit donc $\mathbf{S}=\mathbf{P}_+\mathbf{Y}|\mathbf{H}$ où $\mathbf{Y}$ est de forme (3). Rappelons le suivant

Lemme ([2] lemme 1). *Si le sous-espace* $\mathbf{H}_1$ *est invariant pour* $\mathbf{S}\in\{\mathbf{T}\}'$, *on a* $C_{12}=O$.

Nous allons prouver le suivant

Lemme 1. *Si le sous-espace* $\mathbf{H}_1$ *est invariant pour* $\mathbf{S}\in\{\mathbf{T}\}'$, *il existe une fonction analytique bornée* $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, F(\lambda)\}$ *telle que*

$$A\Theta_2 = \Theta_2 F \quad et \quad F\Theta_1 = \Theta_1 A_0. \tag{4}$$

Démonstration. Notons que $\mathbf{H}_1$ est invariant pour $\mathbf{S}\in\{\mathbf{T}\}'$ si

$$\mathbf{L} = \{\Theta_2 u \oplus \Delta_2 u \oplus v \colon u\in H^2(\mathfrak{F}),\ v\in(\Delta_1 L^2(\mathfrak{E}))^{-}\}$$

est invariant pour $\mathbf{Y}$ et dans ce cas seulement. Pour $u\in H^2(\mathfrak{F})$ on a $\Theta_2 u\oplus\Delta_2 u\oplus 0\in\mathbf{L}$ d'où $\mathbf{Y}(\Theta_2 u\oplus\Delta_2 u\oplus 0)\in\mathbf{L}$; il existe donc $w\in H^2(\mathfrak{F})$ tel que $A\Theta_2 u=\Theta_2 w$ et $B_2\Theta_2 u+ +C_{11}\Delta_2 u=\Delta_2 w$. On peut vérifier facilement que l'application $u\mapsto w$ est fermée donc continue et permute à la multiplication par $e^{it}$. Donc il existe une fonction analytique bornée $F(\lambda)$ telle que

$$A\Theta_2 = \Theta_2 F \quad \text{et} \quad B_2\Theta_2+C_{11}\Delta_2 = \Delta_2 F. \tag{4'}$$

Pour vérifier la deuxième relation (4) notons que la relation $A\Theta_2=\Theta_2 F$ obtenue auparavant implique $\Theta_2(F\Theta_1-\Theta_1 A_0)=O$. En tenant compte de la deuxième relation (2'), de (4') et $C_{12}=O$ on a $\Delta_2 F\Theta_1=B_2\Theta+C_{11}\Delta_2\Theta_1=\Delta_2\Theta_1 A_0$ d'où $\Delta_2(F\Theta_1-\Theta_1 A_0)=O$. Les relations $\Theta_2(F\Theta_1-\Theta_1 A_0)=O$ et $\Delta_2(F\Theta_1-\Theta_1 A_0)=O$ impliquent $F\Theta_1=\Theta_1 A_0$.

Ainsi nous avons démontré la nécessité dans la suivante

Proposition 1. *Soit* $\mathbf{H}_1$ *le sous-espace invariant correspondant à la factorisation* $\Theta=\Theta_2\Theta_1$; *supposons de plus que* $\Theta_1^*(e^{it})$ *est injectif pour presque tout* $t\in[0, 2\pi]$. *Pour que le sous-espace* $\mathbf{H}_1$ *soit invariant à* $\mathbf{S}=\mathbf{P}_+\mathbf{Y}|\mathbf{H}$ *où* $\mathbf{Y}$ *est donné par* (3), *il faut et il suffit que les suivantes conditions soient vérifiées*:

(i) $C_{12}=O$, (ii) *il existe une fonction analytique bornée* $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, F(\lambda)\}$, *telle que* $A\Theta_2=\Theta_2 F$ *et* $F\Theta_1=\Theta_1 A_0$.

Nous allons démontrer que les conditions (i) et (ii) sont aussi suffisantes pour que le sous-espace $\mathbf{H}_1$ soit invariant pour $\mathbf{S}$, sous l'hypothèse que $\Theta_1^*(e^{it})$ est injectif pour presque tout $t\in[0, 2\pi]$. Soit pour cela $\mathbf{S}=\mathbf{P}_+\mathbf{Y}|\mathbf{H}\in\{\mathbf{T}\}'$; d'après (i) nous obtenons pour $\mathbf{Y}$ une matrice de la forme

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} A & O & O \\ B_2 & C_{11} & O \\ B_1 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

Les relations (2') deviennent

$$\begin{cases} A\Theta = \Theta A_0, \\ B_2\Theta+C_{11}\Delta_2\Theta_1 = \Delta_2\Theta_1 A_0, \\ B_1\Theta+C_{21}\Delta_2\Theta_1+C_{22}\Delta_1 = \Delta_1 A_0. \end{cases} \tag{2''}$$

Mais d'après (ii) il existe une fonction analytique bornée $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, F(\lambda)\}$, telle que $A\Theta_2=\Theta_2 F$ et $F\Theta_1=\Theta_1 A_0$. Eu égard aussi à la deuxième relation (2″) on obtient $(B_2\Theta_2+C_{11}\Delta_2)\Theta_1=\Delta_2 F\Theta_1$; comme $\Theta_1^*(e^{it})$ est injectif il en résulte $B_2\Theta_2+C_{11}\Delta_2==\Delta_2 F$. Les relations $A\Theta_2=\Theta_2 F$ et $B_2\Theta_2+C_{11}\Delta_2=\Delta_2 F$ démontrées auparavant montrent que le sous-espace $\mathbf{L}$ est invariant pour $\mathbf{Y}$ donc $\mathbf{H}_1$ est invariant pour $\mathbf{S}$.

**3.** Dans la suite nous envisageons le cas où le sous-espace invariant $\mathbf{H}_1$ est de la forme $\mathbf{H}_1=(\mathbf{S}(\mathbf{H}))^-$ où $\mathbf{S}=\mathbf{P}_+\mathbf{Y}|\mathbf{H}\in\{\mathbf{T}\}'$; notons que dans ce cas $C_{12}=O$ car le sous-espace $\mathbf{H}_1$ est invariant pour $\mathbf{S}$. On a le suivant

Lemme 2. *Si* $\mathbf{S}(\mathbf{H})\subset\mathbf{H}_1$ *alors* $C_{11}=O$.

En effet soit $v_2\in(\Delta_2 L^2(\mathfrak{F}))^-$. Alors

$$\mathbf{S}\mathbf{P}_+(0\oplus v_2\oplus 0) = \mathbf{P}_+\mathbf{Y}\mathbf{P}_+(0\oplus v_2\oplus 0) = \mathbf{P}_+\mathbf{Y}(0\oplus v_2\oplus 0)$$

d'où $\mathbf{Y}(0\oplus v_2\oplus 0)\in\mathbf{L}$. Donc il existe $w\in H^2(\mathfrak{F})$ tel que $0\oplus C_{11}v_2=\Theta_2 w\oplus\Delta_2 w$ donc $\Theta_2 w=0$ et $\Delta_2 w=C_{11}v_2$. La relation $\Theta_2 w=0$ implique $\Delta_2 w=w$ donc $C_{11}\colon(\Delta_2 L^2(\mathfrak{F}))^-\to H^2(\mathfrak{F})$; comme de plus $C_{11}$ permute à la multiplication par $e^{it}$, on conclut que $C_{11}=O$.

Lemme 3. *Si* $\mathbf{S}(\mathbf{H})\subset\mathbf{H}_1$, *alors il existe une fonction analityque bornée* $\{\mathfrak{E}_*, \mathfrak{F}, \Phi(\lambda)\}$ *telle que* $A=\Theta_2\Phi$ *et* $B_2=\Delta_2\Phi$.

Démonstration. Soit $u\in H^2(\mathfrak{E}_*)$. On a $\mathbf{P}_+\mathbf{Y}(u\oplus 0\oplus 0)\in\mathbf{H}$ donc $\mathbf{Y}(u\oplus 0\oplus 0)==Au\oplus B_2u\oplus B_1u\in\mathbf{L}$; ainsi, il existe $w\in H^2(\mathfrak{F})$ tel que $Au=\Theta_2 w$ et $B_2u=\Delta_2 w$. L'application $\Phi\colon u\mapsto w$ est linéaire, continue et permute à la multiplication par $e^{it}$ donc il existe une fonction analytique bornée $\{\mathfrak{E}_*, \mathfrak{F}, \Phi(\lambda)\}$ telle que

$$A = \Theta_2\Phi \quad \text{et} \quad B_2 = \Delta_2\Phi.$$

Remarque 1. La fonction $\{\mathfrak{E}_*, \mathfrak{F}, \Phi(\lambda)\}$ vérifie la relation

$$\Phi\Theta = \Theta_1 A_0. \tag{5}$$

En effet vu que $C_{11}=O$ et $C_{12}=O$ les conditions $A\Theta=\Theta A_0$ et $B_2\Theta+C_{11}\Delta_2\Theta_1++C_{12}\Delta_1=\Delta_2\Theta_1 A_0$, impliquent $\Theta_2\Phi\Theta=\Theta_2\Theta_1 A_0$ et $\Delta_2\Phi\Theta=\Delta_2\Theta_1 A_0$, d'où (5).

Conséquence 1. *Si pour l'opérateur* $\mathbf{S}=\mathbf{P}_+\mathbf{Y}|\mathbf{H}\in\{\mathbf{T}\}'$ *on a* $\mathbf{S}(\mathbf{H})\subset\mathbf{H}_1$, *alors la matrice de* $\mathbf{Y}$ *a la forme*

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \Theta_2\Phi & O & O \\ \Delta_2\Phi & O & O \\ B_1 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

*où* $\Phi\Theta=\Theta_1 A_0$ *et* $B_1\Theta+C_{21}\Delta_2\Theta_1+C_{22}\Delta_1=\Delta_1 A_0$.

Lemme 4. *Si l'opérateur* $\mathbf{S}=\mathbf{P}_+\mathbf{Y}|\mathbf{H}\in\{\mathbf{T}\}'$ *vérifie la condition* $\mathbf{S}(\mathbf{H})=\mathbf{H}_1$, *alors*

$$H^2(\mathfrak{F}) = \Phi H^2(\mathfrak{E}_*)+\Theta_1 H^2(\mathfrak{E}). \tag{6}$$

Démonstration. La relation $\mathbf{P}_+\mathbf{Y}(\mathbf{H})=\mathbf{H}_1$ implique $\mathbf{Y}(\mathbf{K}_+)+\mathbf{G}=\mathbf{L}$; donc pour tout $u\in H^2(\mathfrak{F})$ il existe $u'\in H^2(\mathfrak{E}_*)$, $w'\in H^2(\mathfrak{E})$, $v_2\in(\Delta_2L^2(\mathfrak{F}))^-$ et $v_1\in(\Delta_1L^2(\mathfrak{E}))^-$ telles que

$$\mathbf{Y}(u'\oplus v_2\oplus v_1)+\Theta w'\oplus\Delta_2\Theta_1w'\oplus\Delta_1w' = \Theta_2u\oplus\Delta_2u\oplus 0.$$

Pour les premières deux composantes on a

$$\Theta_2(\Phi u'+\Theta_1w') = \Theta_2u \quad \text{et} \quad \Delta_2(\Phi u'+\Theta_1w') = \Delta_2u$$

d'où $u=\Phi u'+\Theta_1w'$ donc (6).

Remarque 2. La décomposition $u=\Phi u'+\Theta_1w'$ donnée par le lemme précédent n'est pas unique. En effet soit${}^0n$ $\in H^2(\mathfrak{E})$; vu que $\Phi\Theta=\Theta_1A_0$ on a

$$u = \Phi(u'+\Theta u_0)+\Theta_1(w'-A_0u_0).$$

Lemme 4'. *Si l'opérateur* $\mathbf{S}=\mathbf{P}_+\mathbf{Y}|\mathbf{H}\in\{\mathbf{T}\}'$ *vérifie la condition* $(\mathbf{S}(\mathbf{H}))^-=\mathbf{H}_1$, *alors*

$$H^2(\mathfrak{F}) = (\Phi H^2(\mathfrak{E}_*)+\Theta_1H^2(\mathfrak{E}))^-. \tag{6'}$$

Démonstration. En effet, vu que $\mathbf{H}_1=(\mathbf{P}_+\mathbf{Y}(\mathbf{K}_+))^-$ il en résulte que le sous-espace $\mathbf{P}_+\mathbf{Y}(\mathbf{K}_+)+\mathbf{G}$ est dense dans $\mathbf{H}_1\oplus\mathbf{G}$, donc $\mathbf{Y}(\mathbf{K}_+)+\mathbf{G}$ est dense dans $\mathbf{H}_1\oplus\mathbf{G}$. Soit $u\in H^2(\mathfrak{F})$; alors $\Theta_2u\oplus\Delta_2u\oplus0\in\mathbf{H}_1\oplus\mathbf{G}$. Donc pour tout $\varepsilon>0$ il existe $u'\oplus v_2\oplus v_1\in\mathbf{K}_+$ et $\Theta w\oplus\Delta_2\Theta_1w\oplus\Delta_1w\in\mathbf{G}$ tels que

$$\|\mathbf{Y}(u'\oplus v_2\oplus v_1)+(\Theta w\oplus\Delta_2\Theta_1w\oplus\Delta_1w)-(\Theta_2u\oplus\Delta_2u\oplus0)\| \leqq \varepsilon.$$

On a donc

$$\|\Theta_2(\Phi u'+\Theta_1w-u)\|^2+\|\Delta_2(\Phi u'+\Theta_1w-u)\|^2 \leqq \varepsilon^2$$

et par conséquent $\|\Phi u'+\Theta_1w-u\|\leqq\varepsilon$, d'où (6').

En combinant les lemmes 3 et 4' et la remarque 1 nous obtenons le

Theorème. *Soit $T\in\mathscr{B}(\mathfrak{H})$ une contraction complètement non-unitaire de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, dont la fonction caractéristique $\{\mathfrak{E},\mathfrak{E}_*,\Theta(\lambda)\}$ admet la factorisation régulière $\Theta=\Theta_2\Theta_1$, où les facteurs $\{\mathfrak{E},\mathfrak{F},\Theta_1(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{F},\mathfrak{E}_*,\Theta_2(\lambda)\}$ sont des fonctions analytiques bornées. Envisageons le sous-espace $\mathfrak{H}_1$ de $\mathfrak{H}$ invariant pour $T$ correspondant à cette factorisation. Si pour un opérateur $S\in\{T\}'$ on a $(S(\mathfrak{H}))^-=\mathfrak{H}_1$, il existe des fonctions analytiques bornées $\{\mathfrak{E}_*,\mathfrak{F},\Phi(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{G},\mathfrak{E},A_0(\lambda)\}$, telles que*

(i) $\Phi\Theta=\Theta_1A_0$ *et* (ii) $H^2(\mathfrak{F})=(\Phi H^2(\mathfrak{E}_*)+\Theta_1H^2(\mathfrak{E}))^-$.

**4.** Dans ce qui suit nous allons faire usage du théorème précédent pour démontrer la suivante

Proposition 2. *Soit $T\in\mathscr{B}(\mathfrak{H})$ le modèle fonctionnel dont la fonction caractéristique $\Theta(\lambda)$ est donnée par $\left\{\mathbf{C},\mathbf{C},\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda^2\right\}$. Il existe alors un sous-espace $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}$, invariant pour $T$, tel que $\mathfrak{H}_1\neq(S(\mathfrak{H}))^-$ pour tout $S\in\{T\}'$.*

Démonstration. En effet envisageons la factorisation

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\lambda^2 = \left[\frac{1}{2}\sqrt{3}\lambda \;\; \frac{1}{2}\lambda\right]\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\lambda\end{bmatrix}$$

qui est régulière d'après la prop. VII. 3.5 de [H], et soit $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}$ le sous-espace invariant, correspondant à cette factorisation. Envisageons un élément $S\in\{T\}'$ fixé. On a

$$S = P_+Y\Big|\mathfrak{H} = P_+\begin{bmatrix}A & 0\\ B & C\end{bmatrix}\Big|\mathfrak{H},$$

$A(\lambda)$: $H^2(\mathbf{C})\to H^2(\mathbf{C})$ étant une fonction analytique scalaire (dans ce cas $A=A_0$). Supposons que $\mathfrak{H}_1=(S(\mathfrak{H}))^-$; il existe alors une fonction $\Phi=\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{bmatrix}$ avec des fonctions analytiques scalaires $\Phi_i(i=1,2)$ telles que $\Phi\Theta=\Theta_1A_0$ où $\Theta_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\lambda\end{bmatrix}$.

En vertu de la relation $\Theta_1A_0=\Phi\Theta$ on a $A=\sqrt{3}\lambda\Phi_1=\lambda\Phi_2$, d'où $\Phi_2=\sqrt{3}\Phi_1$. Envisageons un élément $u_0\in H^2(\mathbf{C})$, $u_0\neq 0$, et l'élément $\tilde{u}_0=\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}u_0\in H^2(\mathfrak{F})$ où, dans ce cas, $\mathfrak{F}=\mathbf{C}^2$. Pour $u', u''\in H^2(\mathbf{C})$ quelconques, on aura

$$((\Phi u'+\Theta_1u''), \tilde{u}_0) = \left(\Phi_1u'+\frac{1}{2}\lambda u'', -u_0\sqrt{3}\right)+\left(\Phi_2\, u'+\frac{1}{2}\sqrt{3}\lambda u'', u_0\right) =$$

$$= \left((-\sqrt{3}\Phi_1+\Phi_2)u', u_0\right) = 0.$$

Donc $\tilde{u}_0(\neq 0)$ est orthogonal à $(\Phi H^2(\mathbf{C})+\Theta_1H^2(\mathbf{C}))^-$ et par conséquent la condition (ii) du théorème n'est pas vérifiée. Donc $\mathfrak{H}_1\neq(S(\mathfrak{H}))^-$ pour tout $S\in\{T\}'$.

## Bibliographie

[H] Béla Sz.-Nagy—Ciprian Foiaş, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, North Holland/Akadémiai Kiadó (Amsterdam—Budapest, 1970).

[1] Béla Sz.-Nagy—Ciprian Foiaş, On the structure of intertwining operators, *Acta Sci. Math.*, **35** (1973), 224—245.

[2] Radu I. Teodorescu, Factorisations régulières et sous-espaces hyperinvariants, *Acta Sci. Math.*, **40** (1978), 389—396.

[3] Radu I. Teodorescu, Factorisations régulières et sous-espaces invariants, *Preprint* no. 60/1979, INCREST, Bucureşti.

UNIVERSITÉ DE BRAŞOV
2200 BRAŞOV
ROMANIA