Acta Sci. Math., 40 (1978), 327—345

Über Schreiersche Gruppenerweiterungen und ihre Kommutatorgruppen

R. QUINKERT

Gegenstand dieser Arbeit sind Untersuchungen zur Bestimmung der Kommutatorgruppe vorgegebener Erweiterungen G von M mit $\mathcal{G}$ und zur Konstruktion solcher Erweiterungen mit vorgegebener Gruppe M als Kommutatorgruppe. In diesem Zusammenhang spielen allgemeine Aussagen über Erweiterungen von M mit einem direkten Produkt $\mathcal{G}=\times\mathcal{G}_\lambda$ beliebiger bzw. zyklischer Gruppen $\mathcal{G}_\lambda$ eine Rolle, die den Sätzen II und III der grundlegenden Arbeit [6] von O. Schreier entsprechen. Wir zeigen, daß beim Auftreten unendlicher zyklischer Gruppen die in Satz III von [6] angegebenen Bedingungen nicht ausreichen und geben für beide Fälle kürzere Beweise.

§ 1. Einleitung

Eine Gruppe G heißt Erweiterung einer Gruppe M mit einer Gruppe $\mathcal{G}$, wenn es Homomorphismen μ und Γ gibt, so daß die Sequenz

$$E \to M \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{G} \to E$$

exakt ist. Ist G mit dem Normalteiler $M=\{\alpha, \beta, \dots\}$ und der Faktorgruppe $G/M=\mathcal{G}=\{A, B, \dots\}$ vorgegeben, so lassen sich nach Wahl eines Repräsentantensystems $\{r_A\}_{A\in\mathcal{G}}$ von G nach M die Elemente von G auf genau eine Weise in der Form $r_A\alpha$ mit $A\in\mathcal{G}$, $\alpha\in M$ schreiben. Für die Multiplikation gilt dann

$$(1.1)\qquad (r_A\alpha)\cdot(r_B\beta) = r_{AB}[A, B]\alpha^{\varphi(B)}\beta$$

mit dem Parametersystem

$$[A, B] = r_{AB}^{-1} r_A r_B \in M, \quad \alpha^{\varphi(B)} = r_B^{-1}\alpha r_B \in M.$$

Normieren wir noch das Repräsentantensystem bezüglich der Einselemente gemäß

Eingegangen am 16. Mai 1977.

$r_E=\varepsilon$, so gilt bekanntlich (vgl. etwa [5]) für alle $A, B, C \in \mathcal{G}$; $\alpha, \beta \in M$

$$[A, E] = [E, B] = \varepsilon; \quad \alpha^{\varphi(E)} = \alpha; \quad \varepsilon^{\varphi(B)} = \varepsilon, \tag{1.2}$$

$$(\alpha\beta)^{\varphi(B)} = \alpha^{\varphi(B)}\beta^{\varphi(B)}, \tag{1.3}$$

$$\alpha^{\varphi(BC)}[B, C] = [B, C]\alpha^{\varphi(B)\varphi(C)}, \tag{1.4}$$

$$[A, BC][B, C] = [AB, C][A, B]^{\varphi(C)}. \tag{1.5}$$

Umgekehrt ergibt zu vorgegebenen Gruppen M und $\mathcal{G}$ jedes diesen Gleichungen genügende Parametersystem $[A, B]$: $\mathcal{G}\times\mathcal{G}\to M$, $\alpha^{\varphi(B)}$: $M\times\mathcal{G}\to M$ eine Erweiterung von M mit $\mathcal{G}$, nämlich $\mathcal{G}\circ M=\{(A,\alpha)\mid A\in\mathcal{G}, \alpha\in M\}$ mit der (1.1) entsprechenden Multiplikation und $\mu: M\to\mathcal{G}\circ M$ gemäß $\alpha\to(E,\alpha)$ sowie $\Gamma: \mathcal{G}\circ M\to\mathcal{G}$ gemäß $(A,\alpha)\to A$.

Wir bezeichnen stets mit $\mathbf{A}(M)$ bzw. $\mathbf{I}(M)$ die Gruppe aller bzw. der inneren Automorphismen einer beliebigen Gruppe M; für den durch $\beta\in M$ bestimmten inneren Automorphismus $\alpha\to\beta^{-1}\alpha\beta$ schreiben wir $\mathcal{I}(\beta)$.

In § 2 geben wir zunächst mit den Formeln (2.1) und (2.2) den Kommutator zweier Elemente $r_A\alpha$, $r_B\beta$ einer Erweiterung G von M mit $\mathcal{G}$ explizit mit Hilfe des zugehörigen Parametersystems an. Dann wenden wir uns dem Problem zu, die Kommutatorgruppe G' von G zu bestimmen, falls $\mathcal{G}$ abelsch ist. Nach Satz 2.1 gilt dann $M\supseteq G'\supseteq M'$, und G' kann über M' (sogar rein multiplikativ) durch die Elemente $[B, A]^{-1}[A, B]$ (2.3) und $\alpha^{-1}\alpha^{\varphi(B)}$ (2.4) erzeugt werden. Dabei genügt es sogar, A, B und α je ein multiplikatives Erzeugendensystem von $\mathcal{G}$ bzw. M durchlaufen zu lassen, wie wir in Satz 2.2 zeigen. Für den Fall, daß sowohl M als auch $\mathcal{G}$ endliche abelsche Gruppen sind, wird dieses Ergebnis von O. Schreier [7, Satz 2] unter Verwendung der in [6] entwickelten Theorie (vgl. hier § 3, § 4) und weiterer Hilfsmittel bewiesen.

Um zu untersuchen, welche Rolle die Elemente $\alpha^{-1}\alpha^{\varphi(B)}$ bei der Erzeugung von G' spielen, definieren wir in Anlehnung an L. Kaloujnine [4] eine von einer Automorphismenmenge $\mathfrak{A}\subseteq\mathbf{A}(M)$ abhängige Untergruppe $K(M, \mathfrak{A})$ von M, die wir in Hilfssatz 2.3 näher kennzeichnen. Für $\mathfrak{A}=\mathbf{I}(M)\cup\{\varphi(B)\mid B\in\mathcal{G}\}$ gilt $M\supseteq G'\supseteq K(M, \mathfrak{A})\supseteq M'$, und $K(M, \mathfrak{A})$ ist genau der von den Elementen $\alpha^{-1}\alpha^{\varphi(B)}$ über M' erzeugte Bestandteil der Kommutatorgruppe G' einer Erweiterung G von M mit $\mathcal{G}$. Daraus gewinnen wir in Satz 2.4 bzw. Folg. 2.5 hinreichende Bedingungen dafür, daß eine vorgegebene Erweiterung $G'=M$ erfüllt bzw. zu einer Gruppe M Erweiterungen G mit $G'=M$ existieren. Diese Problemstellung tritt bei der Untersuchung von Ringen mit nichtkommutativer Addition auf (vgl. H. J. Weinert [8], [9]), worauf wir an anderer Stelle näher eingehen wollen. Als weitere Anwendung dieser Überlegungen kennzeichnen wir in Satz 2.6 alle Erweiterungen G einer beliebigen zyklischen Gruppe M mit einer beliebigen zyklischen Gruppe $\mathcal{G}$, für die $G'=M$ gilt.

Die folgenden beiden Paragraphen geben eine allgemeine Theorie von Gruppenerweiterungen G von M mit $\mathscr{G}$, wobei $\mathscr{G}$ das (diskrete) direkte Produkt beliebiger bzw. zyklischer Gruppen $\mathscr{G}_\lambda$ ist. Unsere zusammenfassenden Sätze 3.1 bzw. 4.2 entsprechen im wesentlichen den Sätzen II bzw. III von O. SCHREIER [6]. Allerdings reichen die dort in Satz III formulierten Bedingungen nicht aus, um die ausgesprochenen Behauptungen beim Auftreten unendlicher zyklischer Gruppen $\mathscr{G}_\lambda$ zu gewährleisten. Wir zeigen dies im Anschluß an Satz 4.2 und verweisen auch für nähere Einzelheiten auf den Text. Es sei noch erwähnt, daß nach Hilfssatz 4.1 in jeder Gruppe mit Hilfe des Kommutators $\langle y, x\rangle$ die Kommutatoren beliebiger Potenzen von y und x explizit angegeben werden können. Als Anwendung zeigen wir schließlich in Folg. 4.3, daß jede abelsche Gruppe M Kommutatorgruppe einer geeigneten Erweiterung G von M ist.

Herrn Prof. Dr. H. J. Weinert darf ich für seine Anregungen zu dieser Arbeit und manchen Hinweis zur Verbesserung und Vereinfachung herzlich danken.

§ 2. Die Kommutatorgruppe einer Gruppenerweiterung

In jeder Erweiterung G von M mit $\mathscr{G}$ gilt für den Kommutator zweier Elemente

$$\langle r_A\alpha, r_B\beta\rangle = \alpha^{-1}(\beta^{\varphi(A)})^{-1}\langle r_A, r_B\rangle\alpha^{\varphi(B)}\beta \tag{2.1}$$

wie sofort aus

$$(r_A\alpha)^{-1}(r_B\beta)^{-1}r_A\alpha r_B\beta = \alpha^{-1}\cdot r_A^{-1}\beta^{-1}r_A\cdot r_A^{-1}r_B^{-1}r_Ar_B\cdot r_B^{-1}\alpha r_B\cdot\beta$$

folgt. Dabei liegt in (2.1) höchstens der Faktor $\langle r_A, r_B\rangle$ nicht in M, und wir erhalten aus $\langle r_A, r_B\rangle = r_A^{-1}r_B^{-1}r_{AB}r_{AB}^{-1}r_Ar_B$ und

$$r_{AB} = r_{BA\langle A,B\rangle} = r_Br_Ar_{\langle A,B\rangle}[A,\langle A,B\rangle]^{-1}[B,A\langle A,B\rangle]^{-1}$$

$$\langle r_A, r_B\rangle = r_{\langle A,B\rangle}[A,\langle A,B\rangle]^{-1}[B,A\langle A,B\rangle]^{-1}[A,B]. \tag{2.2}$$

Genau für abelsche Gruppen $\mathscr{G}$ geht (2.2) für alle $A, B\in\mathscr{G}$ über in

$$\langle r_A, r_B\rangle = [B,A]^{-1}[A,B]\in M. \tag{2.3}$$

Andere spezielle Kommutatoren ergeben sich in der Form

$$\langle\alpha, r_B\rangle = \alpha^{-1}r_B^{-1}\alpha r_B = \alpha^{-1}\alpha^{\varphi(B)} = \langle r_B,\alpha\rangle^{-1}, \tag{2.4}$$

$$\langle r_A,\beta\rangle = r_A^{-1}\beta^{-1}r_A\beta = (\beta^{\varphi(A)})^{-1}\beta = \langle\beta, r_A\rangle^{-1}, \tag{2.5}$$

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta. \tag{2.6}$$

Satz 2.1. *Es sei G eine Erweiterung von M mit einer abelschen Gruppe $\mathscr{G}$. Dann besteht die Kommutatorgruppe G' von G aus allen Produkten von Elementen* (2.3), (2.4) *und* (2.6), *d. h. es gilt* $M \supseteqq G' \supseteqq M'$ *und* G' *ist die kleinste* M' *und alle Kommutatoren* (2.3) *und* (2.4) *enthaltende Unterhalbgruppe von* M. *Die gleiche Aussage gilt mit* (2.5) *anstelle von* (2.4).

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß jeder Kommutator (2.1) ein solches Produkt ist. Bis auf einen Faktor aus M' folgt aber aus (2.1)

$$\langle r_A\alpha, r_B\beta\rangle \equiv \langle\alpha, r_B\rangle\langle\beta^{-1}, r_A\rangle\langle r_A, r_B\rangle \quad (M')$$

bzw.

$$\langle r_A\alpha, r_B\beta\rangle \equiv \langle r_B, \alpha^{-1}\rangle\langle r_A, \beta\rangle\langle r_A, r_B\rangle \quad (M').$$

Für die bereits angekündigte Verschärfung dieses Satzes, die wir nur mit (2.3) und (2.4) formulieren, nennen wir eine Teilmenge $\mathfrak{M}(\mathscr{G})$ einer beliebigen Gruppe $\mathscr{G}$ ein multiplikatives (oder Halbgruppen-) Erzeugendensystem von $\mathscr{G}$, wenn jedes Element von $\mathscr{G}$ Produkt endlich vieler Elemente aus $\mathfrak{M}(\mathscr{G})$ ist.

Satz 2.2. *Es sei* G *eine Erweiterung von* M *mit einer abelschen Gruppe* $\mathscr{G}$ *und* $\mathfrak{M}(\mathscr{G})$ *bzw.* $\mathfrak{M}(M)$ *je ein multiplikatives Erzeugendensystem von* $\mathscr{G}$ *bzw.* M. *Dann besteht die Kommutatorgruppe* G' *von* G *aus allen Produkten folgender Elemente:*

(2.3)′ $\quad \langle r_X, r_Y\rangle$ *mit* $X, Y \in \mathfrak{M}(\mathscr{G})$,

(2.4)′ $\quad \langle \xi, r_X\rangle$ *mit* $\xi \in \mathfrak{M}(M)$, $X \in \mathfrak{M}(\mathscr{G})$,

(2.6) $\quad \langle \alpha, \beta\rangle$ *mit* $\alpha, \beta \in M$.

Beweis. Ein beliebiges Element aus G' sei nach Satz 2.1 Produkt von Elementen (2.3), (2.4) und (2.6). Wir zeigen als erstes, daß man alle Faktoren (2.3) durch Faktoren (2.3)′ ersetzen kann. Es gilt für beliebige $A, B, C, D \in \mathscr{G}$:

$$\begin{aligned}
\langle r_{AB}, r_{CD}\rangle &= r_{AB}^{-1} r_{CD}^{-1} r_{AB} r_{CD} = \\
&= [A,B] r_B^{-1} r_A^{-1} [C,D] r_D^{-1} r_C^{-1} r_A r_B [A,B]^{-1} r_C r_D [C,D]^{-1} = \\
&= [A,B][C,D]^{\varphi(A)\varphi(B)} r_B^{-1} r_A^{-1} r_D^{-1} r_C^{-1} r_A r_B r_C r_D ([A,B]^{-1})^{\varphi(C)\varphi(D)} [C,D]^{-1} = \\
&= [C,D]^{\varphi(AB)}[A,B](r_B^{-1} r_A^{-1} r_D^{-1} r_A r_D r_B)(r_B^{-1} r_D^{-1} r_{BD})(r_{BD}^{-1} r_A^{-1} r_C^{-1} r_A r_C r_{BD}) \cdot \\
&\quad \cdot (r_{BD}^{-1} r_B r_D)(r_D^{-1} r_B^{-1} r_C^{-1} r_B r_C r_D)[C,D]^{-1}([A,B]^{-1})^{\varphi(CD)} = \\
&= [C,D]^{\varphi(AB)}[A,B]\langle r_A, r_D\rangle^{\varphi(B)}[D,B]^{-1}\langle r_A, r_C\rangle^{\varphi(BD)} \cdot \\
&\quad \cdot [B,D]\langle r_B, r_C\rangle^{\varphi(D)}[C,D]^{-1}([A,B]^{-1})^{\varphi(CD)}.
\end{aligned}$$

Diese Faktoren aus M können nun modulo M' beliebig vertauscht werden, und man erhält damit

$$\begin{aligned}
\langle r_{AB}, r_{CD}\rangle \equiv\ & \langle r_A, r_C\rangle\langle r_A, r_D\rangle\langle r_B, r_C\rangle\langle r_B, r_D\rangle\langle r_A, r_C\rangle^{-1}\langle r_A, r_C\rangle^{\varphi(BD)} \cdot \\
& \cdot \langle r_A, r_D\rangle^{-1}\langle r_A, r_D\rangle^{\varphi(B)}\langle r_B, r_C\rangle^{-1}\langle r_B, r_C\rangle^{\varphi(D)} \cdot \\
& \cdot [C,D]^{-1}[C,D]^{\varphi(AB)}[A,B]([A,B]^{-1})^{\varphi(CD)} \quad (M').
\end{aligned}$$

Wir können also annehmen, daß unser Produkt nur noch Faktoren der Form (2.3)′, (2.4) und (2.6) enthält. Weiter sind $\alpha^{\varphi(AB)}$ und $\alpha^{\varphi(A)\varphi(B)}$ nach (1.4) kongruent modulo M'; damit gilt für $\alpha\in M$; $A, B\in\mathfrak{G}$

$$\langle\alpha, r_{AB}\rangle = \alpha^{-1}\alpha^{\varphi(AB)} \equiv \alpha^{-1}\alpha^{\varphi(A)}(\alpha^{\varphi(A)})^{-1}\alpha^{\varphi(A)\varphi(B)} \quad (M')$$

und wir können die Faktoren (2.4) zunächst durch Faktoren der Form $\langle\alpha, r_X\rangle$ mit $\alpha\in M$, $X\in\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ ersetzen. Die Reduktionsmöglichkeit auf Faktoren (2.4)′ folgt nun aus

$$(\alpha\beta)^{-1}(\alpha\beta)^{\varphi(X)} \equiv \alpha^{-1}\alpha^{\varphi(X)}\beta^{-1}\beta^{\varphi(X)} \quad (M').$$

Aus Satz 2.1 folgt zunächst unmittelbar, daß für eine Erweiterung G von M mit abelscher Faktorgruppe jedenfalls dann $G'=M'$ gilt, wenn alle Automorphismen $\varphi(B)$, $B\in\mathfrak{G}$ in $\mathbf{I}(M)$ liegen und das Faktorensystem gemäß $[A, B]=[B, A]$ symmetrisch gewählt werden kann. Insbesondere treten also vollständige Gruppen M mit $M\supset M'$ nie als Kommutatorgruppen auf.

Wir wollen nun allgemeiner untersuchen, welchen Beitrag die Kommutatoren (2.4) bzw. (2.5) zur Kommutatorgruppe G' einer Erweiterung G von M mit $\mathfrak{G}$ liefern. In Anlehnung an [4] definieren wir dazu für eine beliebige Gruppe M und eine (nichtleere) Automorphismenmenge $\mathfrak{A}\subseteq\mathbf{A}(M)$ als $K(M, \mathfrak{A})$ die Untergruppe von M, die von allen Elementen der Form

$$\alpha^{-1}\alpha^{\varphi} \quad \text{mit} \quad \alpha\in M,\ \varphi\in\mathfrak{A} \tag{2.7}$$

erzeugt wird. Ersichtlich gilt $K(M, \mathbf{I}(M))=M'$, und für

$$\mathfrak{A} = \mathbf{I}(M)\cup\{\varphi(B)\,|\,B\in\mathfrak{G}\},\quad G \text{ Erweiterung von } M \text{ mit abelschem } \mathfrak{G} \tag{2.8}$$

gilt $M\supseteq G'\supseteq K(M, \mathfrak{A})\supseteq M'$, wobei $K(M, \mathfrak{A})$ gerade der von M' und den Kommutatoren (2.4) erzeugte Bestandteil von G' ist.

Hilfssatz 2.3. a) *$K(M, \mathfrak{A})$ ist stets Normalteiler von M und der Durchschnitt aller Untergruppen H von M mit der Eigenschaft*

$$(\alpha H)^{\varphi} = \alpha H \quad \text{für alle} \quad \alpha\in M,\ \varphi\in\mathfrak{A}. \tag{2.9}$$

M. a. W.: $H=K(M, \mathfrak{A})$ ist der kleinste Normalteiler von M, so daß alle $\varphi\in\mathfrak{A}$ auf der Faktorgruppe M/H den identischen Automorphismus induzieren.

b) *Aus $\mathfrak{A}\supseteq\mathbf{I}(M)$ folgt $K(M, \mathfrak{A})=K(M, \langle\mathfrak{A}\rangle)$ für die von $\mathfrak{A}$ erzeugte Untergruppe $\langle\mathfrak{A}\rangle$ von $\mathbf{A}(M)$.*

c) *Für $\mathfrak{A}\supseteq\mathbf{I}(M)$ besteht $K(M, \mathfrak{A})$ aus allen Produkten mit Faktoren aus M' und der Form $\xi^{-1}\xi^{\varphi}$ mit $\varphi\in\mathfrak{A}$ und ξ aus einem beliebigen multiplikativen Erzeugendensystem $\mathfrak{M}(M)$ von M (vgl. (2.4)′).*

Beweis. a) Die Normalteilereigenschaft folgt mit $\alpha, \beta\in M$, $\varphi\in\mathfrak{A}$ sofort aus

$$\beta^{-1}(\alpha^{-1}\alpha^{\varphi})\beta = (\alpha\beta)^{-1}(\alpha\beta)^{\varphi}\cdot(\beta^{-1}\beta^{\varphi})^{-1}\in K(M, \mathfrak{A}).$$

Weiter erfüllt eine Untergruppe H von M genau dann (2.9), wenn zu beliebigen $\alpha \in M$, $\varphi \in \mathfrak{A}$ stets ein $\gamma \in H$ mit $\alpha^{\varphi} = \alpha\gamma \in \alpha H$ existiert. Für $H = K(M, \mathfrak{A})$ ist dies nach Definition erfüllt. Ist umgekehrt H eine Untergruppe mit (2.9), so folgt $\alpha^{-1}\alpha^{\varphi} = \alpha^{-1}\alpha\gamma = \gamma \in H$, also $K(M, \mathfrak{A}) \subseteq H$.

b) Für $\varphi, \varphi' \in \mathfrak{A}$ gilt $\alpha^{-1}\alpha^{\varphi\varphi'} = \alpha^{-1}\alpha^{\varphi}(\alpha^{\varphi})^{-1}(\alpha^{\varphi})^{\varphi'}$ und

$$\alpha^{-1}\alpha^{(\varphi^{-1})} \equiv \beta^{-1}\beta^{\varphi} \ (M') \quad \text{mit} \quad \beta^{-1} = \alpha^{(\varphi^{-1})},$$

wobei $\mathfrak{A} \supseteq \mathbf{I}(M)$, also $K(M, \mathfrak{A}) \supseteq M'$, nur bei dem φ^{-1} betreffenden Teil verwendet wurde.

c) Wegen $K(M, \mathfrak{A}) \supseteq M'$ lassen sich zunächst alle Inversen von Elementen der Form (2.7) gemäß $(\alpha^{-1}\alpha^{\varphi})^{-1} \equiv \alpha(\alpha^{-1})^{\varphi}$ (M') als Produkte mit Faktoren aus M' und der Form (2.7) gewinnen, und $(\alpha\beta)^{-1}(\alpha\beta)^{\varphi} \equiv \alpha^{-1}\alpha^{\varphi} \cdot \beta^{-1}\beta^{\varphi}$ (M') gestattet die Zurückführung auf Faktoren der Form $\xi^{-1}\xi^{\varphi}$.

Für die folgenden Aussagen setzen wir $\mathfrak{A} \supseteq \mathbf{I}(M)$ voraus, lassen aber offen, ob $\mathfrak{A}$ gemäß (2.8) durch eine Erweiterung G von M mit $\mathscr{G}$ vorgegeben ist (ersichtlich hängt dann $\mathfrak{A}$ nur von der Automorphismenklassengruppe dieser Erweiterung ab) oder ob wir umgekehrt zu geeignetem $\mathfrak{A}$ eine Erweiterung G von M konstruieren wollen.

Satz 2.4. *Es sei M eine Gruppe und $\mathbf{I}(M) \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathbf{A}(M)$.*

a) *Erfüllt der Index $[M\colon M'] = 2$, so gilt stets $K(M, \mathfrak{A}) = M'$.*

b) *Gilt $[M\colon M'] > 2$ und existiert zu jedem Paar $\mu, \varkappa \in M \setminus M'$ mit $\mu \not\equiv \varkappa$ (M') ein Automorphismus $\varphi \in \mathfrak{A}$ mit $\mu^{\varphi} \equiv \varkappa$ (M'), m. a. W., wirkt $\mathfrak{A}$ transitiv auf $(M/M') \setminus M'$, dann gilt $K(M, \mathfrak{A}) = M$.*

c) *Gilt $[M\colon M'] < \infty$ und existiert ein $\varphi \in \mathfrak{A}$ mit $\mu^{\varphi} \not\equiv \mu$ (M') für alle $\mu \in M \setminus M'$, m. a. W., enthält $\mathfrak{A}$ einen für M/M' fixpunktfreien Automorphismus, dann gilt $K(M, \mathfrak{A}) = M$.*

Beweis. a) Ersichtlich gilt $M'^{\varphi} = M'$ und $(M \setminus M')^{\varphi} = M \setminus M'$ für alle $\varphi \in \mathbf{A}(M)$.

b) Wir setzen $K(M, \mathfrak{A}) = H$ und wenden den Hilfssatz an. Aus $M' = H$ folgt wegen $\mu H \neq \varkappa H$ sofort der Widerspruch $\mu H = (\mu H)^{\varphi} = \mu^{\varphi} H = \varkappa H$. Für $M' \subset H \subset M$ wählen wir $\mu \in H$, $\varkappa \in M \setminus H$; dann gilt $\mu \not\equiv \varkappa$ (M') und mit $\mu H = H \neq \varkappa H$ erhalten wir den gleichen Widerspruch. Also folgt $H = K(M, \mathfrak{A}) = M$.

c) Aus $\mu \not\equiv \varkappa \cdot (M')$ folgt $\mu^{-1}\mu^{\varphi} \not\equiv \varkappa^{-1}\varkappa^{\varphi}$ (M'), da das Gegenteil $\varkappa\mu^{-1} \equiv (\varkappa\mu^{-1})^{\varphi}$ (M') ergeben würde, was nach der Voraussetzung über φ nur für $\varkappa\mu^{-1} \in M'$, also $\mu \equiv \varkappa$ (M') möglich wäre. Damit bildet aber $\mu \to \mu^{-1}\mu^{\varphi}$ Elemente verschiedener Nebenklassen modulo M' auf Elemente verschiedener Nebenklassen ab. Aus $[M\colon M'] < \infty$ folgt die Behauptung.

Für eine gegebene Erweiterung G von M mit abelschem $\mathcal{G}$ ergeben b) bzw. c) dieses Satzes für $\mathfrak{A}$ gemäß (2.8) sofort hinreichende Kriterien für $G'=M$. Wir formulieren nur folgende Umkehrung:

Folgerung 2.5. *Es sei M eine Gruppe mit abelscher Automorphismengruppe. Genügen M' und $\mathfrak{A}=\mathbf{A}(M)$ den bei* b) *bzw.* c) *von Satz* 2.4 *formulierten Voraussetzungen, so tritt M als Kommutatorgruppe wenigstens einer Erweiterung G von M auf.*

Beweis. Es genügt, G als die faktorenfreie Erweiterung von M mit $\mathcal{G}=\mathfrak{A}=\mathbf{A}(M)$ und $\varphi(A)=A$ zu wählen. Aus $M\supseteqq G'\supseteqq K(M,\mathfrak{A})\supseteqq M'$ und $M=K(M,\mathfrak{A})$ folgt $G'=M$.

Als Beispiel für spezielle Anwendungen untersuchen wir noch Erweiterungen G einer zyklischen Gruppe $M=\langle\xi\rangle\cong\mathbf{Z}_m$ der Charakteristik m mit einer zyklischen Gruppe $\mathcal{G}=\langle X\rangle\cong\mathbf{Z}_n$ der Charakteristik n. Für jede ganze Zahl a sei $\bar{a}\equiv a\ (n)$ und $\bar{a}\in\{0,1,\dots,n-1\}$ für $n\neq 0$. Wie üblich wählen wir als Parametersystem

$$(2.10)\qquad [X^a,X^b]=\begin{cases}\varepsilon & \text{falls}\quad n=0\quad\text{oder}\quad \bar{a}+\bar{b}<n\neq 0\\ \nu & \text{falls}\quad \bar{a}+\bar{b}\geqq n\neq 0,\end{cases}$$

$$\alpha^{\varphi(X^b)}=\alpha^{\varphi(X)^{\bar{b}}}=\alpha^{\mathscr{A}^{\bar{b}}},$$

wobei $\varphi(X)=\mathscr{A}\in\mathbf{A}(M)$ durch die Wahl von k in $\xi^{\mathscr{A}}=\xi^k$ festgelegt ist $\big(k=\pm 1$ für $m=0$, $(k,m)=1$ für $m\neq 0\big)$. Für $n\neq 0$ gilt dabei

$$(2.11)\qquad \nu^{\mathscr{A}}=\nu\quad\text{und}\quad \mathscr{A}^n=\mathscr{I}(\nu),\quad\text{also}\quad \mathscr{A}^n=\mathrm{id}_M.$$

Satz 2.6. *Es sei G Erweiterung einer zyklischen Gruppe $M=\langle\xi\rangle\cong\mathbf{Z}_m$ mit einer zyklischen Gruppe $\mathcal{G}=\langle X\rangle\cong\mathbf{Z}_n$. Für $m=0$ bzw. $2|m$ gilt stets $G'\subset M$, während für $2\nmid m$ genau folgende Erweiterungen G mit $G'=M$ existieren:*

a) *Für $n=0$ alle G mit einem $k\in\{1,\dots,m\}$, welches neben $(k,m)=1$ auch $(k-1,l-1,m)=1$ für $kl\equiv 1\ (m)$ erfüllt.*

b) *Für $n\neq 0$ alle G mit $\nu=\varepsilon$ und einem $k\in\{1,\dots,m\}$, welches $(k,m)=(k-1,m)=1$ und $k^n\equiv 1\ (m)$ erfüllt.*

Bemerkung. Im Falle $2\nmid m$ erfüllt $k=m-1$ die Bedingung a) stets und die Bedingung b) für $2|n$; dagegen braucht für $2\nmid n$ je nach Wahl von m und n kein k mit b) zu existieren.

Beweis. Da M abelsch und das Faktorensystem symmetrisch ist, wird G' nach Satz 2.2 nur von den Faktoren (2.4)′ erzeugt. Für $m=0$ kommen dafür höchstens $\xi^{-1}\xi^{\pm 1}$ und $\xi\xi^{\mp 1}$ in Frage, woraus schon $G'\subset M$ folgt. Für $m\neq 0$, $n=0$ handelt es sich bei (2.4)′ um die Faktoren $\xi^{-1}\xi^k$ und $\xi^{-1}\xi^l$, also gilt $G'=M$ genau für $(k-1,l-1,m)=1$, was wegen $(k,m)=(l,m)=1$ für $2|m$ nicht möglich ist. Für

$m \neq 0$, $n \neq 0$ tritt in (2.4)′ nur $\zeta^{-1}\zeta^k$ auf, d. h. $G' = M$ gilt genau für $(k-1, m) = 1$. Wegen $(k, m) = 1$ entfällt wieder $2|m$, und für b) haben wir alle Parametersysteme mit $(k, m) = (k-1, m) = 1$ zu bestimmen. Sei $v = \zeta^y$; aus (2.11) folgt dann $ky \equiv y$ (m), also $(k-1)y \equiv 0$ (m) und damit $v = \varepsilon$. Der zweite Teil von (2.11) ist mit $k^n \equiv 1$ (m) gleichwertig.

Insbesondere ist nach Satz 2.6 jede endliche zyklische Gruppe M ungerader Ordnung Kommutatorgruppe einer geeigneten Erweiterung; wir werden später (vgl. Folg. 4.3) sehen, daß diese Aussage für jede abelsche Gruppe M zutrifft.

Für Potenzen $m = p^x$ und $n = p^y$ einer ungeraden Primzahl p sind die Bedingungen $k^n \equiv 1$ (m) und $(k-1, m) = 1$ aus Satz 2.6b) unverträglich, denn aus

$$k^{p^y} \equiv 1 \ (p^x), \quad \text{also} \quad k^{p^y} \equiv 1 \ (p)$$

folgt $k \equiv 1$ (p) und damit $(k-1, p^x) \neq 1$. Dies zeigt (vgl. auch [7], Satz 6):

Folgerung 2.7. *Es sei G Erweiterung einer zyklischen Gruppe M der Ordnung $m = p^x$ mit einer zyklischen Gruppe $\mathscr{G}$ der Ordnung $n = p^y$ für eine beliebige Primzahl p. Dann gilt $G' \subset M$.*

§ 3. Gruppenerweiterungen mit einem direkten Produkt

Es sei G eine Erweiterung von M mit $\mathscr{G}$ und $\mathscr{G}$ das (diskrete) direkte Produkt $\mathscr{G} = \times \mathscr{G}_\lambda$ von Untergruppen $\mathscr{G}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Dann enthält G in natürlicher Weise Erweiterungen $G_\lambda = \Gamma^{-1}(\mathscr{G}_\lambda)$ von M mit $\mathscr{G}_\lambda$, und wir werden Parametersysteme von $M \to G \to \mathscr{G}$ soweit als möglich auf Parametersysteme der Erweiterungen $M \to G_\lambda \to \mathscr{G}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ zurückführen. Wir betrachten zunächst den Fall $\mathscr{G} = \mathscr{G}_i \times \mathscr{G}_j$, wobei wir die Indexmenge $\Lambda = \{i, j\}$ gemäß $i < j$ ordnen. Wir schreiben $A_\lambda, B_\lambda, \ldots$ jeweils für Elemente aus $\mathscr{G}_\lambda$ und $A = A_i A_j = A_j A_i, \ldots$ für Elemente aus $\mathscr{G}$. Für beliebig gewählte Repräsentanten $r_{A_\lambda} \in G_\lambda \subseteq G$ $(r_E = \varepsilon)$ definieren wir Repräsentanten von $M \to G \to \mathscr{G}$ gemäß

$$r_A = r_{A_i A_j} = r_{A_i} r_{A_j}, \quad i < j. \tag{3.1}$$

Das zugehörige Parametersystem

$$[A, B], \quad \alpha^{\varphi(B)} \quad \text{von} \quad M \to G \to \mathscr{G} \tag{3.2}$$

enthält dann die (1.2) bis (1.5) erfüllenden Parametersysteme

$$[A_\lambda, B_\lambda], \quad \alpha^{\varphi(B_\lambda)} \quad \text{von} \quad M \to G_\lambda \to \mathscr{G}_\lambda. \tag{3.3}$$

Weiter gilt wegen (3.1) für $i < j$ stets $[A_i, B_j] = \varepsilon$, während

$$[A_j, B_i] = r_{A_j B_i}^{-1} r_{A_j} r_{B_i} = (r_{B_i} r_{A_j})^{-1} r_{A_j} r_{B_i} = \langle r_{A_j}, r_{B_i} \rangle, \quad i < j \tag{3.4}$$

gerade der Kommutator der Repräsentanten ist. Aus

$$r^{-1}_{A_iA_jB_iB_j}r_{A_iA_j}r_{B_iB_j} = r^{-1}_{A_jB_j}r^{-1}_{A_iB_i}r_{A_i}r_{A_j}r_{B_i}r_{B_j}$$

ergibt sich folgende Zurückführung des Faktorensystems (3.2)

$$(3.5) \qquad [A_iA_j, B_iB_j] = [A_i, B_i]^{\varphi(A_jB_j)}[A_j, B_j][A_j, B_i]^{\varphi(B_j)}, \quad i<j$$

und entsprechend des Automorphismensystems (3.2)

$$(3.6) \qquad \alpha^{\varphi(B_iB_j)} = \alpha^{\varphi(B_i)\varphi(B_j)}, \quad i<j$$

auf (3.3), wobei nur die Bestandteile (3.4) zusätzlich auftreten. Letztere sind Abbildungen der Produktmenge $\mathcal{G}_j \times \mathcal{G}_i$ in M und genügen (zusammen mit den Bestandteilen von (3.3) und natürlich für alle $\alpha \in M$; $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda \in \mathcal{G}_\lambda$) folgenden Beziehungen

$$\text{I} \qquad \alpha^{\varphi(B_i)\varphi(B_j)}[B_j, B_i] = [B_j, B_i]\alpha^{\varphi(B_j)\varphi(B_i)}, \quad i<j;$$

$$\text{II} \qquad [A_j, B_iC_i][B_i, C_i] = [B_i, C_i]^{\varphi(A_j)}[A_j, C_i][A_j, B_i]^{\varphi(C_i)}, \quad i<j;$$

$$\text{III} \qquad [A_jB_j, C_i][A_j, B_j]^{\varphi(C_i)} = [A_j, B_j][A_j, C_i]^{\varphi(B_j)}[B_j, C_i], \quad i<j.$$

Sie ergeben sich unmittelbar aus (1.4) und (3.6) bzw. (1.5) und (3.5) oder auch durch direktes Rechnen mit den Kommutatoren (3.4) in G; im Falle $|\Lambda|=2$ werden sie sich auch für die Umkehrung als hinreichend erweisen (vgl. Satz 3.1).

Im allgemeinen Falle definieren wir bezüglich einer willkürlich gewählten Ordnung $<$ der Indexmenge Λ analog wie oben

$$(3.1)' \qquad r_A \doteq r_{A_{\lambda1}A_{\lambda2}\dots A_{\lambda t}} = r_{A_{\lambda1}}r_{A_{\lambda2}}\dots r_{A_{\lambda t}}, \quad \lambda1<\lambda2<\dots<\lambda t.$$

Wegen $r_E=\varepsilon$ braucht dabei das A enthaltende Teilprodukt $\mathcal{G}_{\lambda1}\times\mathcal{G}_{\lambda2}\times\dots\times\mathcal{G}_\lambda$ von $\mathcal{G}=\times\mathcal{G}_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$ nicht minimal gewählt zu werden, und wir können jeweils endlich viele $A, B, \dots \in \mathcal{G}$ als Elemente des gleichen Teilproduktes ansehen. Zur Vereinfachung schreiben wir im folgenden $1, 2, \dots, t$ für jeweils geeignet auszuwählende Indizes $\lambda1<\lambda2<\dots<\lambda t$ aus Λ. Damit erhält man für das durch (3.1)′ festgelegte Parametersystem (3.2) wieder eine Zurückführung auf (3.3) und (3.4): Für $\alpha^{\varphi(B)}$ gilt unmittelbar

$$(3.6)' \qquad \alpha^{\varphi(B_1B_2\dots B_t)} = \alpha^{\varphi(B_1)\varphi(B_2)\dots\varphi(B_t)}.$$

Für $[A, B]$ erhält man aus (3.5) mit $\mathcal{G}_i=\mathcal{G}_1\times\dots\times\mathcal{G}_{t-1}$, $\mathcal{G}_j=\mathcal{G}_t$ zunächst

$$(3.7) \qquad \begin{aligned}[A, B] &= [A_1\dots A_{t-1}A_t, B_1\dots B_{t-1}B_t] = \\ &= [A_1\dots A_{t-1}, B_1\dots B_{t-1}]^{\varphi(A_tB_t)}[A_t, B_t][A_t, B_1\dots B_{t-1}]^{\varphi(B_t)}.\end{aligned}$$

Die bekannte Kommutatorbeziehung (etwa aus [3], III 1.2 durch Induktion)

$$(3.8) \qquad [A_t, B_1\dots B_{t-1}] = [A_t, B_{t-1}][A_t, B_{t-2}]^{\varphi(B_{t-1})}\dots[A_t, B_1]^{\varphi(B_2)\dots\varphi(B_{t-1})}$$

liefert dann für $[A, B]$ die rekursive Zurückführung

$$(3.5)' \qquad [A, B] = [A_1 \dots A_{t-1}, B_1 \dots B_{t-1}]^{\varphi(A_t B_t)}[A_t, B_t] \cdot$$
$$\cdot [A_t, B_{t-1}]^{\varphi(B_t)}[A_t, B_{t-2}]^{\varphi(B_{t-1})\varphi(B_t)} \dots [A_t, B_1]^{\varphi(B_2)\dots\varphi(B_t)}$$

auf (3.3) und die Kommutatoren $[A_j, B_i]$ von (3.4) für alle $i, j \in \Lambda$ mit $i<j$. Ersichtlich gelten jetzt I, II und III für alle Indexpaare dieser Art; für $|\Lambda| \geqq 3$ kommt dazu noch für alle $i, j, k \in \Lambda$

$$\text{IV} \quad [A_k, B_j][A_k, C_i]^{\varphi(B_j)}[B_j, C_i] = [B_j, C_i]^{\varphi(A_k)}[A_k, C_i][A_k, B_j]^{\varphi(C_i)}, \quad i<j<k.$$

Beide Seiten von IV reduzieren sich nämlich sofort auf $r_{A_k}^{-1} r_{B_j}^{-1} r_{C_i}^{-1} r_{A_k} r_{B_j} r_{C_i}$. Wir erinnern daran, daß für unendliche Indexmengen Λ stets $1, 2, \dots, t$ stellvertretend für geordnete endliche Teilsysteme $\lambda 1 < \lambda 2 < \dots < \lambda t$ steht und formulieren (vgl. [6], Satz II):

Satz 3.1. *Es sei M eine beliebige Gruppe und $\mathcal{G} = \times \mathcal{G}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ ein (diskretes) direktes Produkt. Dann hat jede Erweiterung G von M mit $\mathcal{G}$ ein Parametersystem $[A, B]$, $\alpha^{\varphi(B)}$, welches sich gemäß (3.5)' und (3.6)' zurückführen läßt auf Parametersysteme $[A_\lambda, B_\lambda]$, $\alpha^{\varphi(B_\lambda)}$ je einer Erweiterung G_λ von M mit $\mathcal{G}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ und Abbildungen $[A_j, B_i]$ der Produktmenge $\mathcal{G}_j \times \mathcal{G}_i$ in M $(i, j \in \Lambda,\ i<j)$, welche den Bedingungen I—IV genügen. Umgekehrt entsteht auf diese Weise stets ein Parametersystem $[A, B]$, $\alpha^{\varphi(B)}$ einer Erweiterung G von M mit $\mathcal{G}$.*

Beweis. Wir haben nur noch die Umkehrung zu zeigen. Dazu ordnen wir jeder Gruppe $\mathcal{G}_\lambda = \{E_\lambda, A_\lambda, B_\lambda, \dots\}$ eine gleichmächtige Menge $\bar{\mathcal{G}}_\lambda = \{r_{E_\lambda}, r_{A_\lambda}, r_{B_\lambda}, \dots\}$ zu, so daß alle $\bar{\mathcal{G}}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ und $M = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \dots\}$ paarweise disjunkt sind. Wir erzeugen eine Halbgruppe G von der Vereinigungsmenge aller $\bar{\mathcal{G}}_\lambda$ und M mit den definierenden Relationen (jeweils für alle auftretenden Elemente):

(R_0) $r_{E_\lambda} = \varepsilon$, (R_{00}) $r_{A_\lambda}\varepsilon = r_{A_\lambda}$,

(R_1) $\alpha\beta = \gamma$ (Multiplikation in M),

(R_2) $\alpha r_{A_\lambda} = r_{A_\lambda}\alpha^{\varphi(A_\lambda)}$, (R_3) $r_{A_\lambda} r_{B_\lambda} = r_{A_\lambda B_\lambda}[A_\lambda, B_\lambda]$,

(R_4) $r_{A_j} r_{B_i} = r_{B_i} r_{A_j}[A_j, B_i]$, $i<j$.

Zur Lösung des Wortproblems (vgl. [1], Theorem 9.3) legen wir die direkten Schritte für alle Relationen von links nach rechts fest und zeigen:

a) *Kann ein Wort W der zugehörigen freien Halbgruppe durch je einen direkten Schritt S_1 bzw. S_2 in Worte W_1 bzw. W_2 übergeführt werden, so gibt es ein Wort W', in welches W_1 und W_2 durch jeweils endlich viele direkte Schritte übergeführt werden können* (Beweis s. u.).

Damit läßt sich jedes Element der Halbgruppe G auf genau eine Weise in der Form

(3.9) $$r_{A_{\lambda 1}} r_{A_{\lambda 2}} \dots r_{A_{\lambda t}} \alpha, \quad \lambda 1 < \lambda 2 < \dots < \lambda t$$

(Worte der Form $r_{A_{\lambda 1}} \dots r_{A_{\lambda t}}$ und α eingeschlossen) schreiben. Aufgrund unserer Relationen und wegen (1.2) ist ε Einselement von G und jedes erzeugende Element invertierbar, also G Gruppe. Wir lassen nun in der Schreibweise (3.9) wieder das Auftreten zusätzlicher Faktoren $\varepsilon = r_{E_\lambda}$ zu und erhalten mit der oben eingeführten Abkürzung für die auftretenden Indizes gemäß

(3.10) $$r_{A_1} r_{A_2} \dots r_{A_t} \alpha \to (A_1 A_2 \dots A_t, \alpha)$$

eine Bijektion von G auf die Produktmenge $(\times \mathscr{G}_\lambda) \times M$. Unseren Beweis beendet der Nachweis von

b) *Für die Multiplikation in G gilt*

(3.11) $$\begin{aligned} &r_{A_1} r_{A_2} \dots r_{A_t} \alpha \cdot r_{B_1} r_{B_2} \dots r_{B_t} \beta = \\ &= r_{A_1 B_1} r_{A_2 B_2} \dots r_{A_t B_t} [A_1 \dots A_t, B_1 \dots B_t] \alpha^{\varphi(B_1 \dots B_t)} \beta \end{aligned}$$

mit den bei (3.5)′ *und* (3.6)′ *definierten* $[A, B]$ *und* $\alpha^{\varphi(B)}$.

Nachweis von a) Wir brauchen nur die Fälle zu diskutieren, wo die direkten Schritte S_1 und S_2 nicht in beiden Reihenfolgen angewendet werden können und so von W über W_1 bzw. W_2 zum gleichen Wort W' führen. Solche „kollidierenden" Fälle beziehen sich nach der Form unserer Relationen jeweils auf ein Teilwort w von W, welches aus 2 oder 3 erzeugenden Elementen besteht. Wir beginnen mit den schwierigeren Fällen: Für

$$w = r_{A_\lambda} r_{B_\lambda} r_{C_\lambda} = \begin{cases} r_{A_\lambda B_\lambda} [A_\lambda, B_\lambda] r_{C_\lambda} & \text{nach } (R_3) \text{ links} \\ r_{A_\lambda} r_{B_\lambda C_\lambda} [B_\lambda, C_\lambda] & \text{nach } (R_3) \text{ rechts} \end{cases}$$

führen Schritte mit (R_2) und (R_3) oben und (R_3) unten wegen (1.5) zu

$$r_{A_\lambda B_\lambda C_\lambda} [A_\lambda B_\lambda, C_\lambda][A_\lambda, B_\lambda]^{\varphi(C_\lambda)} = r_{A_\lambda B_\lambda C_\lambda} [A_\lambda, B_\lambda C_\lambda][B_\lambda, C_\lambda].$$

Beim Auftreten von r_{E_λ} kommen noch Schritte mit (R_0) in Frage, wobei (R_{00}), (R_1) und (R_2) wegen (1.2) leicht die erwünschten Gleichheiten liefern; entsprechende Überlegungen sind auch im folgenden beim Auftreten von r_{E_λ} anzustellen. Mit $i < j$ für

$$w = r_{A_j} r_{B_i} r_{C_i} = \begin{cases} r_{B_i} r_{A_j} [A_j, B_i] r_{C_i} & \text{nach } (R_4) \text{ links} \\ r_{A_j} r_{B_i C_i} [B_i, C_i] & \text{nach } (R_3) \text{ rechts} \end{cases}$$

führen Schritte mit (R_2), (R_4), (R_3) und (R_2) oben und (R_4) unten wegen II zu

$$r_{B_i C_i} r_{A_j} [B_i, C_i]^{\varphi(A_j)} [A_j, C_i][A_j, B_i]^{\varphi(C_i)} = r_{B_i C_i} r_{A_j} [A_j, B_i C_i][B_i, C_i].$$

Entsprechendes gilt für $w=r_{A_j}r_{B_j}r_{C_i}$ mit III. Mit $i<j<k$ für

$$w = r_{A_k}r_{B_j}r_{C_i} = \begin{cases} r_{B_j}r_{A_k}[A_k, B_j]r_{C_i} & \text{nach } (\mathrm{R}_4) \text{ links} \\ r_{A_k}r_{C_i}r_{B_j}[B_j, C_i] & \text{nach } (\mathrm{R}_4) \text{ rechts} \end{cases}$$

führen Schritte mit (R_2), (R_4), (R_4) und (R_2) oben sowie (R_4), (R_2), (R_4) unten wegen IV zu

$$r_{C_i}r_{B_j}r_{A_k}[B_j, C_i]^{\varphi(A_k)}[A_k, C_i][A_k, B_j]^{\varphi(C_i)} = r_{C_i}r_{B_j}r_{A_k}[A_k, B_j][A_k, C_i]^{\varphi(B_j)}[B_j, C_i].$$

Damit sind alle kollidierenden Fälle mit Teilworten der Form $w=r_{A_\lambda}r_{B_\varkappa}r_{C_\mu}$ erschöpft. Mit anderen Teilworten der gleichen Länge ergeben sich im wesentlichen nur noch vier Fälle, die wir tabellarisch zusammenfassen:

Teilwort w	Typ des Schrittes links	rechts	Gleichheit ergibt sich mit Schritten vom Typ	wegen
$\alpha r_{A_\lambda}r_{B_\lambda}$	(R_2)	(R_3)	(R_2), (R_3); (R_2)	(1.4)
$\alpha r_{A_j}r_{B_i}$	(R_2)	(R_4)	(R_2), (R_4); (R_2)	I
$\alpha\beta r_{A_\lambda}$	(R_1)	(R_2)	(R_2); (R_2)	(1.3)
$\alpha\beta\gamma$	(R_1)	(R_1)	Assoziativität in M	

Nur beim Auftreten von r_{E_λ} bzw. ε ergeben sich bei diesen und weiteren Teilworten aus 3 oder 2 erzeugenden Elementen noch kollidierende Fälle mit Schritten vom Typ (R_0) oder (R_{00}), die jedoch ersichtlich trivial sind.

Nachweis von b) Mit mehrfacher Anwendung von (R_2), (R_4) und (R_3) gilt

$$\begin{aligned} & r_{A_1}\cdots r_{A_{t-1}}r_{A_t}\alpha r_{B_1}r_{B_2}\cdots r_{B_t}\beta = \\ &= r_{A_1}\cdots r_{A_{t-1}}r_{A_t}r_{B_1}r_{B_2}\cdots r_{B_t}\alpha^{\varphi(B_1)\cdots\varphi(B_t)}\beta = \\ &= r_{A_1}\cdots r_{A_{t-1}}r_{B_1}r_{A_t}r_{B_2}\cdots r_{B_t}[A_t, B_1]^{\varphi(B_2)\cdots\varphi(B_t)}\alpha^{\varphi(B_1)\cdots\varphi(B_t)}\beta = \ldots = \\ &= r_{A_1}\cdots r_{A_{t-1}}r_{B_1}\cdots r_{B_{t-1}}r_{A_tB_t}[A_t, B_t][A_t, B_{t-1}]^{\varphi(B_t)}[A_t, B_{t-2}]^{\varphi(B_{t-1})\varphi(B_t)}\ldots \\ & \ldots[A_t, B_1]^{\varphi(B_2)\cdots\varphi(B_t)}\alpha^{\varphi(B_1)\cdots\varphi(B_t)}\beta. \end{aligned}$$

Der Fall $t=1$ liefert unmittelbar die in § 1 formulierte „Umkehrung" des grundlegenden Satzes über Erweiterungen $M\to G\to\mathscr{G}$ als Induktionsanfang. Die Gültigkeit von (3.11) für $t-1$ liefert mit $\alpha=\beta=\varepsilon$

$$r_{A_1}\cdots r_{A_{t-1}}\cdot r_{B_1}\cdots r_{B_{t-1}} = r_{A_1B_1}\cdots r_{A_{t-1}B_{t-1}}[A_1\ldots A_{t-1}, B_1\ldots B_{t-1}].$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $r_{A_tB_t}$ und wenden rechts noch einmal (R_2) an, ergibt dies oben eingesetzt gerade (3.11) mit dem bei (3.5)′ und (3.6)′ definierten Parametersystem. Damit ist Satz 3.1 bewiesen.

§ 4. Gruppenerweiterungen mit einem direkten Produkt zyklischer Gruppen

In Fortsetzung von § 3 nehmen wir nun an, daß in $\mathscr{G}=\times\mathscr{G}_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$ jeder Faktor eine zyklische Gruppe $\mathscr{G}_\lambda=\langle X_\lambda\rangle$ der Charakteristik $n_\lambda\in\mathbf{N}_0$ ist. Sei G eine Erweiterung von M mit $\mathscr{G}$. Für beliebig gewählte Repräsentanten $r_{X_\lambda}=x_\lambda\in G_\lambda\subseteqq G$ definieren wir für $a\in\mathbf{Z}$

$$r_{X_\lambda^a}=x_\lambda^{\bar a} \quad \text{mit} \quad \bar a\equiv a\ (n_\lambda), \quad \bar a\in\{0,1,\dots,n_\lambda-1\} \quad \text{für} \quad n_\lambda\neq 0.$$

Wir schreiben sogleich $1,2,\dots,t$ für $\lambda 1<\lambda 2<\dots<\lambda t$ und erhalten aus (3.1)′

$$r_A=r_{X_1^{a_1}X_2^{a_2}\dots X_t^{a_t}}=x_1^{\bar a_1}x_2^{\bar a_2}\dots x_t^{\bar a_t}. \tag{4.1}$$

Die zugehörigen Parametersysteme (3.3) sind dann (vgl. (2.10)) gemäß

$$[X_\lambda^a, X_\lambda^b]=\begin{cases}\varepsilon & \text{falls} \quad n_\lambda=0 \quad \text{oder} \quad \bar a+\bar b<n_\lambda\neq 0\\ v_\lambda & \text{falls} \quad \bar a+\bar b\geqq n_\lambda\neq 0,\end{cases} \tag{4.2}$$

$$\alpha^{\varphi(X_\lambda^b)}=\alpha^{\varphi(X_\lambda)^{\bar b}}=\alpha^{\mathscr{A}_\lambda^{\bar b}} \tag{4.3}$$

durch je einen Automorphismus $\varphi(X_\lambda)=\mathscr{A}_\lambda$ von M und für $n_\lambda\neq 0$ durch Elemente $x_\lambda^{n_\lambda}=v_\lambda\in M$ bestimmt, wobei

$$v_\lambda^{\mathscr{A}_\lambda}=v_\lambda \quad \text{und} \quad \mathscr{A}_\lambda^{n_\lambda}=\mathscr{I}(v_\lambda) \quad \text{für} \quad n_\lambda\neq 0 \tag{$*$}$$

gilt. Auch die Kommutatoren (3.4) lassen sich auf jeweils einen, nämlich auf

$$[X_j, X_i]=\langle x_j, x_i\rangle=\gamma_{ji}\in M \quad \text{für alle} \quad i<j \tag{4.4}$$

zurückführen, wie sich aus folgender allgemeiner Aussage ergibt:

Hilfssatz 4.1. *Es seien x und y Elemente einer beliebigen Gruppe G. Die Formeln*

$$\langle y^{-1},x\rangle=\langle x,y\rangle^{\mathscr{I}(y^{-1})}, \quad \langle y,x^{-1}\rangle=\langle x,y\rangle^{\mathscr{I}(x^{-1})}, \quad \langle y^{-1},x^{-1}\rangle=\langle y,x\rangle^{\mathscr{I}(y^{-1})\mathscr{I}(x^{-1})}$$

lassen sich mit $\sigma,\tau\in\{1,-1\}$ *und* $\sigma^*=-1$ *für* $\sigma=-1$, *sonst* $\sigma^*=0$ *gemäß*

$$\langle y^\tau, x^\sigma\rangle=(\langle y,x\rangle^{\tau\sigma})^{\mathscr{I}(y)^{\tau^*}\mathscr{I}(x)^{\sigma^*}} \tag{4.5}$$

zusammenfassen. Damit kann der Kommutator beliebiger Potenzen von x und y mit positiven ganzen Zahlen a und b angegeben werden gemäß

$$\langle y^{\tau a}, x^{\sigma b}\rangle=\langle y^\tau, x^\sigma\rangle^{\sum_{r=1}^{a}\left(\sum_{s=0}^{b-1}\mathscr{I}(x^\sigma)^s\mathscr{I}(y^\tau)^{a-r}\right)}. \tag{4.6}$$

Bemerkung. Das Auftreten von Exponenten wie in (4.6) wird gerechtfertigt, indem man auf der Menge $\mathbf{T}(G)$ aller Abbildungen $\psi,\chi,\dots$ von G in G Addition und Multiplikation gemäß

$$g^{\psi+\chi}=g^\psi\cdot g^\chi, \quad g^{\psi\cdot\chi}=(g^\psi)^\chi \quad \text{für alle} \quad g\in G$$

definiert. Damit wird $(\mathbf{T}(G), +, \cdot)$ zu einem (linksdistributiven) Fastring mit ω $(g^{\omega}=e)$ als Nullelement, $\iota=\mathrm{id}_G$ als Einselement und $g^{-\psi}=(g^{\psi})^{-1}$; genau die Endomorphismen von G sind (auch von rechts) distributiv in $\mathbf{T}$ (vgl. [2], [10]). Für beliebige Elemente $\psi_s, \chi_r \in \mathbf{T}(G)$ gilt dann

$$\left(\sum_{s=1}^{b} \psi_s\right)\left(\sum_{r=1}^{a} \chi_r\right) = \sum_{r=1}^{a}\left(\sum_{s=1}^{b} \psi_s\right)\chi_r,$$

und falls alle χ_r distributiv in $\mathbf{T}(G)$ sind, weiter

$$= \sum_{r=1}^{a}\left(\sum_{s=1}^{b} \psi_s \chi_r\right).$$

Beweis. Wir zeigen (4.6) o. B. d. A. mit $\tau=\sigma=1$. Für $a=b=1$ reduziert sich der Exponent auf die identische Abbildung. Wir übergehen den Induktionsschluß nach b mit $a=1$ und geben nur die zweite Induktion nach a mit beliebigem b, indem wir von (4.6) ausgehend (unter Verwendung der Distributivität von $\mathscr{I}(y)$) berechnen:

$$\langle y^{a+1}, x^b\rangle = \langle y^a y, x^b\rangle = \langle y^a, x^b\rangle^{\mathscr{I}(y)}\langle y, x^b\rangle =$$

$$= \langle y, x\rangle^{\sum_{r=1}^{a}\left(\sum_{s=0}^{b-1} \mathscr{I}(x)^s \mathscr{I}(y)^{a-r}\right)\mathscr{I}(y)}\langle y, x\rangle^{\sum_{s=0}^{b-1} \mathscr{I}(x)^s} = \langle y, x\rangle^{\sum_{r=1}^{a+1}\left(\sum_{s=0}^{b-1} \mathscr{I}(x)^s \mathscr{I}(y)^{a+1-r}\right)}.$$

Da in der Erweiterung G von M mit $\mathscr{G}$ für $\mathscr{I}(x_\lambda)=\mathscr{I}(r_{X_\lambda})$ gerade $\mathscr{I}(x_\lambda)|M=\mathscr{A}_\lambda$ gilt, erhalten wir mit den oben eingeführten Kommutatoren (4.4) aus (4.5)

$$\text{(4.7)} \qquad [X_j^\tau, X_i^\sigma] = \gamma_{ji}^{\tau\sigma\mathscr{A}_j^{\tau^*}\mathscr{A}_i^{\sigma^*}}, \quad i<j,$$

wobei wir grundsätzlich verabreden, daß Exponenten τ, σ, ϱ bei X_λ^τ beide Werte aus $\{1, -1\}$ annehmen, falls $n_\lambda=0$ gilt, und sonst nur 1 zugelassen ist. Weiter folgt aus (4.5) und (4.6)

$$\text{(4.8)} \qquad [X_j^\tau, X_i][X_j^\tau, X_i^{n_i-1}]^{\mathscr{A}_i} = \gamma_{ji}^{\tau\mathscr{A}_j^{\tau^*}\sum_{s=0}^{n_i-1}\mathscr{A}_i^s}, \quad i<j,\ n_i \neq 0.$$

Wir bemerken, daß in solchen Formeln ein Exponent $\tau=-1$ wegen $\gamma^{-1}=\gamma^{-\iota}$ stets als Faktor $(-\iota)$ des Fastringelementes aufzufassen ist; man beachte $(-\iota)(\psi+\chi)=(-\iota)\psi+(-\iota)\chi$, $-(\psi+\chi)=-\chi+(-\psi)$.

Unser Ziel ist ein zu Satz 3.1 analoger Satz 4.2, in den außer den Bestimmungsstücken $\mathscr{A}_\lambda \in \mathbf{A}(M)$ und $v_\lambda \in M$ (für $n_\lambda \neq 0$) von Erweiterungen $M \to G_\lambda \to \mathscr{G}_\lambda = \langle X_\lambda\rangle$ nur noch Elemente $\gamma_{ji} \in M$ entsprechend (4.4) eingehen. Dafür geeignete Beziehungen zwischen diesen Bestimmungsstücken erhalten wir aus I—IV durch spezielle Wahl der dort auftretenden Elemente. Dabei berücksichtigen wir für jedes $\mathscr{G}_\lambda=\langle X_\lambda\rangle$ mit $n_\lambda=0$ neben X_λ zunächst auch X_λ^{-1}; mit den so entstehenden Formeln I** — IV** werden wir auch beim Beweis der Umkehrung arbeiten. Die Beschränkung auf positive Exponenten ergibt jeweils die Formeln I*—IV*, die im wesentlichen den in [6], Satz III angegebenen Bedingungen entsprechen. *Wir stellen daher auch sogleich fest, daß* I*—III* *wiederum* I**—III** *implizieren; dagegen ist* IV* *schwächer als* IV** *und für den angestrebten Satz* 4.2 *nicht ausreichend,* wie sich aus einem diesbezüglichen Gegenbeispiel zu Satz III aus [6] ergeben wird.

Aus I folgt mit $B_i = X_i^\sigma$, $B_j = X_j^\tau$ wegen (4.7)

$$\mathrm{I}^{**} \qquad \mathscr{A}_j^\tau \mathscr{A}_i^\sigma = \mathscr{A}_i^\sigma \mathscr{A}_j^\tau \mathscr{I}(\gamma_{ji}^{\tau\sigma \mathscr{A}_j^{\tau *} \mathscr{A}_i^{\sigma *}}), \quad i < j.$$

Diese Aussage für alle Kombinationen der Exponenten ist mit

$$\mathrm{I}^{*} \qquad \mathscr{A}_j \mathscr{A}_i = \mathscr{A}_i \mathscr{A}_j \mathscr{I}(\gamma_{ji}), \quad i < j$$

gleichwertig, wie sich aus der Anwendung von (4.5) auf die Automorphismengruppe $\mathbf{A}(M)$ und $\mathscr{I}(\gamma)^{\mathscr{I}(\mathscr{A})} = \mathscr{A}^{-1} \mathscr{I}(\gamma) \mathscr{A} = \mathscr{I}(\gamma^{\mathscr{A}})$ ergibt.

Aus II folgt mit $A_j = X_j^\tau$, $B_i = X_i^{n_i - 1}$, $C_i = X_i$ wegen (4.8)

$$\mathrm{II}^{**} \qquad v_i = v_i^{\mathscr{A}_j^\tau} \gamma_{ji}^{\tau \mathscr{A}_j^{\tau *} \sum_{s=0}^{n_i - 1} \mathscr{A}_i^s}, \quad i < j, \ n_i \neq 0.$$

Wir werden zeigen, daß bei Gültigkeit von I* auch hier aus

$$\mathrm{II}^{*} \qquad v_i = v_i^{\mathscr{A}_j} \gamma_{ji}^{\sum_{s=0}^{n_i - 1} \mathscr{A}_i^s}, \quad i < j, \ n_i \neq 0$$

der noch in II** enthaltene Fall mit $\tau = -1$ folgt. Folgende Umformung

$$(\mathrm{II}^{*}) \qquad v_i^{\mathscr{A}_j} = v_i (\gamma_{ji}^{-1})^{\sum_{r=1}^{n_i} \mathscr{A}_i^{n_i - r}} = v_i \gamma_{ji}^{\sum_{s=n_i-1}^{0} - \mathscr{A}_i^s}$$

von II* zeigt nach Anwendung von $\mathscr{A}_j^{-1}$, daß unsere Behauptung aus

$$(4.9) \qquad \gamma_{ji}^{(\sum_{s=k}^{0} - \mathscr{A}_i^s) \mathscr{A}_j^{-1}} = \gamma_{ji}^{-\mathscr{A}_j^{-1} (\sum_{s=0}^{k} \mathscr{A}_i^s)}$$

für $k = n_i - 1$ folgt. Wir weisen (4.9) induktiv für alle $k \in \mathbf{N}_0$ nach, wobei $k = 0$ trivial ist. Für $k+1$ lautet (4.9) leicht umgeformt

$$(4.10) \qquad \gamma_{ji}^{-\mathscr{A}_i^{k+1} \mathscr{A}_j^{-1}} \cdot \gamma_{ji}^{(\sum_{s=k}^{0} - \mathscr{A}_i^s) \mathscr{A}_j^{-1}} = \gamma_{ji}^{-\mathscr{A}_j^{-1} (\sum_{s=0}^{k} \mathscr{A}_i^s)} \gamma_{ji}^{-\mathscr{A}_j^{-1} \mathscr{A}_i^{k+1}}.$$

Wegen I* und (4.6), angewendet auf $\mathbf{A}(M)$, ist der von dem Element (4.9) bestimmte innere Automorphismus von M gerade der Kommutator $\langle \mathscr{A}_j^{-1}, \mathscr{A}_i^{k+1} \rangle$, woraus (4.10) folgt.

Analog ergibt sich aus III mit $A_j = X_j^{n_j - 1}$, $B_j = X_j$, $C_i = X_i^\sigma$

$$\mathrm{III}^{**} \qquad v_j^{\mathscr{A}_i^\sigma} = v_j \gamma_{ji}^{\sigma \mathscr{A}_i^{\sigma *} \sum_{r=1}^{n_j} \mathscr{A}_j^{n_j - r}}, \quad i < j, \ n_j \neq 0,$$

was bei Gültigkeit von I* bereits wieder aus

$$\text{III}^* \qquad v_j^{\mathscr{A}_i} = v_j \gamma_{ji}^{\sum_{r=1}^{n_j} \mathscr{A}_j^{n_j - r}}, \quad i < j, \ n_j \neq 0$$

folgt. Den Beweis erspart die Bemerkung, daß II* (vgl. (II*)) und III* und entsprechend die Fälle mit $\tau = -1$ bzw. $\sigma = -1$ durch Vertauschung der Indizes i und j auseinander hervorgehen, wobei $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}^{-1}$ zu setzen ist, im Einklang mit $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle^{-1}$. (Man beachte aber, daß für $i<j$ stets $\gamma_{ji} = \langle x_j, x_i \rangle = [X_j, X_i]$, im allgemeinen aber $\gamma_{ji}^{-1} = \gamma_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle \neq [X_i, X_j]$ gilt.) Auf diese Weise steht bei [6], Satz III die Bedingung III* mit $i \neq j$ für III* und II* mit $i<j$.

Schließlich ergibt IV mit $A_k = X_k^{\varrho}$, $B_j = X_j^{\tau}$, $C_i = X_i^{\sigma}$ wegen (4.7)

$$\text{IV}^{**} \quad \gamma_{kj}^{\varrho\tau\mathscr{A}_k^{\varrho*}\mathscr{A}_j^{\tau*}} \gamma_{ki}^{\varrho\sigma\mathscr{A}_k^{\varrho*}\mathscr{A}_i^{\sigma*}\mathscr{A}_j^{\tau}} \gamma_{ji}^{\tau\sigma\mathscr{A}_j^{\tau*}\mathscr{A}_i^{\sigma*}} = \gamma_{ji}^{\tau\sigma\mathscr{A}_j^{\tau*}\mathscr{A}_i^{\sigma*}\mathscr{A}_k^{\varrho}} \gamma_{ki}^{\varrho\sigma\mathscr{A}_k^{\varrho*}\mathscr{A}_i^{\sigma*}} \gamma_{kj}^{\varrho\tau\mathscr{A}_k^{\varrho*}\mathscr{A}_j^{\tau*}\mathscr{A}_i^{\sigma}}, \quad i<j<k.$$

Die auch bei Gültigkeit von I*—III* schwächere Aussage IV* mit $\sigma = \tau = \varrho = 1$ diskutieren wir später.

Satz 4.2. *Es sei M eine beliebige Gruppe und $\mathscr{G} = \times \mathscr{G}_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) ein (diskretes) direktes Produkt zyklischer Gruppen $\mathscr{G}_\lambda = \langle X_\lambda \rangle$ der Charakteristik n_λ. Dann hat jede Erweiterung G von M mit $\mathscr{G}$ ein Parametersystem, welches nach Satz* 3.1 *über* (4.2), (4.3) *und* (4.4) *durch Automorphismen $\mathscr{A}_\lambda \in \mathbf{A}(M)$, Elemente $v_\lambda \in M$ für $n_\lambda \neq 0$ und Elemente $\gamma_{ji} \in M$ ($\lambda, i, j \in \Lambda$; $i<j$) festgelegt ist, welche den Bedingungen* ($*$), I*—III* *und* IV** *genügen. Umgekehrt bestimmt jedes System dieser Art eine Erweiterung G von M mit $\mathscr{G}$, wobei G als Halbgruppe von M und Elementen x_λ^σ ($\lambda \in \Lambda$) mit $\sigma = \pm 1$ für $n_\lambda = 0$, $\sigma = 1$ für $n_\lambda \neq 0$ mit folgenden definierenden Relationen (jeweils für alle auftretenden Elemente) erzeugt wird:*

(R_0^*) $x_\lambda^\sigma x_\lambda^{\sigma'} = \varepsilon$ *für* $\sigma\sigma' = -1$, (R_{00}^*) $x_\lambda^\sigma \varepsilon = x_\lambda^\sigma$,

(R_1^*) $\alpha\beta = \gamma$ *(Multiplikation in M)*,

(R_2^*) $\alpha x_\lambda^\sigma = x_\lambda^\sigma \alpha^{\mathscr{A}_\lambda^\sigma}$, ($\mathrm{R}_3^*$) $x_\lambda^{n_\lambda} = v_\lambda$ *nur für* $n_\lambda \neq 0$,

(R_4^*) $x_j^\tau x_i^\sigma = x_i^\sigma x_j^\tau \gamma_{ji}^{\tau\sigma\mathscr{A}_j^{\tau*}\mathscr{A}_i^{\sigma*}}$, $i<j$.

Beweis. Es bleibt nur die Umkehrung zu zeigen. Zur Lösung des Wortproblems legen wir wieder die direkten Schritte für alle Relationen von links nach rechts fest. Aus dem sich anschließenden Nachweis des bei Satz 3.1 formulierten Kriteriums a) folgt, daß G eine Gruppe ist und sich jedes Element von G eindeutig in der Form

$$x_1^{\bar{a}_1} x_2^{\bar{a}_2} \dots x_t^{\bar{a}_t} \alpha \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \bar{a}_\lambda \in \mathbf{Z} & \text{für} \quad n_\lambda = 0 \\ \bar{a}_\lambda \in \{0, 1, \dots, n_\lambda - 1\} & \text{für} \quad n_\lambda \neq 0 \end{cases}$$

schreiben läßt, wobei wieder $1, 2, \dots, t$ für $\lambda 1 < \lambda 2 < \dots < \lambda t$ steht und wir bereits mehrfaches Auftreten des Einselementes ε zugelassen haben. Ersichtlich ist die Untergruppe M Normalteiler von G und $G/M \cong \mathscr{G} = \times \mathscr{G}_\lambda$.

Nachweis von a) Wir dürfen uns auf die „kollidierenden" Fälle beschränken, bei denen wenigstens zwei x_i, x_j mit verschiedenen Indizes $i<j$ beteiligt sind. Für

$$w = \alpha x_j^\tau x_i^\sigma = \begin{cases} x_j^\tau \alpha^{\mathscr{A}_j^\tau} x_i^\sigma & \text{nach } (\mathrm{R}_2^*) \text{ links} \\ \alpha x_i^\sigma x_j^\tau \gamma_{ji}^{\tau\sigma \mathscr{A}_j^{\tau*} \mathscr{A}_i^{\sigma*}} & \text{nach } (\mathrm{R}_4^*) \text{ rechts} \end{cases}$$

führen Schritte mit (R_2^*) und (R_4^*) oben und zweimal (R_2^*) unten zu

$$x_i^\sigma x_j^\tau \gamma_{ji}^{\tau\sigma \mathscr{A}_j^{\tau*} \mathscr{A}_i^{\sigma*}} \alpha^{\mathscr{A}_j^\tau \mathscr{A}_i^\sigma} = x_i^\sigma x_j^\tau \alpha^{\mathscr{A}_i^\sigma \mathscr{A}_j^\tau} \gamma_{ji}^{\tau\sigma \mathscr{A}_j^{\tau*} \mathscr{A}_i^{\sigma*}},$$

wobei die Gleichheit wegen I** gilt. Mit $n_i \neq 0$ gilt für

$$w = x_j^\tau x_i^{n_i} = \begin{cases} x_i x_j^\tau \gamma_{ji}^{\tau \mathscr{A}_j^{\tau*}} x_i^{n_i - 1} & \text{nach } (\mathrm{R}_4^*) \text{ links} \\ x_j^\tau v_i & \text{nach } (\mathrm{R}_3^*) \text{ rechts.} \end{cases}$$

Die mehrfache Anwendung von Schritten mit (R_2^*) und (R_4^*) und schließlich mit (R_3^*), (R_2^*) ergibt oben

$$x_i^{n_i} x_j^\tau \gamma_{ji}^{\tau \mathscr{A}_j^{\tau*} \sum_{s=0}^{n_i - 1} \mathscr{A}_i^s} = x_j^\tau v_i^{\mathscr{A}_j^\tau} \gamma_{ji}^{\tau \mathscr{A}_j^{\tau*} \sum_{s=0}^{n_i - 1} \mathscr{A}_i^s},$$

was mit $x_j^\tau v_i$ nach II** übereinstimmt. Entsprechendes gilt für $w = x_j^{n_j} x_i^\sigma$ mit $n_j \neq 0$ unter Verwendung von III**. Als nächstes betrachten wir für $n_i = 0$ mit $\sigma\sigma' = -1$

$$w = x_j^\tau x_i^\sigma x_i^{\sigma'} = \begin{cases} x_i^\sigma x_j^\tau \gamma_{ji}^{\tau\sigma \mathscr{A}_j^{\tau*} \mathscr{A}_i^{\sigma*}} x_i^{\sigma'} & \text{nach } (\mathrm{R}_4^*) \text{ links} \\ x_j^\tau \varepsilon & \text{nach } (\mathrm{R}_0^*) \text{ rechts.} \end{cases}$$

Hier erhalten wir oben nach Schritten mit (R_2^*), (R_4^*), (R_0^*), (R_2^*) und (R_1^*) wegen $\sigma^* + \sigma' = \sigma'^*$

$$x_i^\sigma x_j^\tau x_i^{\sigma'} \gamma_{ji}^{\tau\sigma \mathscr{A}_j^{\tau*} \mathscr{A}_i^{\sigma'*}} = x_j^\tau \gamma_{ji}^{\tau\sigma' \mathscr{A}_j^{\tau*} \mathscr{A}_i^{\sigma'*} + \tau\sigma \mathscr{A}_j^{\tau*} \mathscr{A}_i^{\sigma'*}} = x_j^\tau \varepsilon.$$

Die analoge Überlegung für $w = x_j^\tau x_j^{\tau'} x_i^\sigma$ mit $n_j = 0$ und $\tau\tau' = -1$ benötigt am Ende

$$\gamma_{ji}^{\tau\sigma \mathscr{A}_j^{\tau*} \mathscr{A}_i^{\sigma*} \mathscr{A}_j^{\tau'} + \tau'\sigma \mathscr{A}_j^{\tau'*} \mathscr{A}_i^{\sigma*}} = \varepsilon,$$

was leicht aus I** folgt. Schließlich führen mit $i<j<k$ für

$$w = x_k^\varrho x_j^\tau x_i^\sigma = \begin{cases} x_j^\tau x_k^\varrho \gamma_{kji}^{\varrho\tau \mathscr{A}_k^{\varrho*} \mathscr{A}_j^{\tau*}} x_i^\sigma & \text{nach } (\mathrm{R}_4^*) \text{ links} \\ x_k^\varrho x_i^\sigma x_j^\tau \gamma_{ji}^{\tau\sigma \mathscr{A}_j^{\tau*} \mathscr{A}_i^{\sigma*}} & \text{nach } (\mathrm{R}_4^*) \text{ rechts} \end{cases}$$

Schritte mit (R_2^*), (R_4^*), (R_4^*), (R_2^*) oben und mit (R_4^*), (R_2^*), (R_4^*) unten genau auf die mit $x_i^\sigma x_j^\tau x_k^\varrho$ multiplizierte Gleichung IV**. Damit sind (abgesehen von dem trivialen Fall $x_j^\tau x_i^\sigma \varepsilon$) alle zu betrachtenden Möglichkeiten erschöpft.

Bemerkung. In dem zu Satz 4.2 analogen (und nur für endliche zyklische Gruppen $\mathscr{G}_\lambda$ bewiesenen) Satz III von [6] treten sechs Bedingungen (a)—(f) auf. Die ersten drei entsprechen $\mathscr{A}_\lambda \in \mathrm{A}(M)$ und $(*)$. Bedingung (d) entspricht I* mit $i \neq j$ $(\gamma_{ij} = \gamma_{ji}^{-1})$, also I* in zwei ersichtlich gleichwertigen Versionen. Bedingung (e) entspricht III* mit $i \neq j$, also wie oben bereits festgestellt II* und III*. Bedingung (f) läuft auf

$$\text{IV*} \qquad \gamma_{kj}\gamma_{ki}^{\mathscr{A}_j}\gamma_{ji} = \gamma_{ji}^{\mathscr{A}_k}\gamma_{ki}\gamma_{kj}^{\mathscr{A}_i}, \quad i < j < k$$

hinaus, allerdings wird (f) in [6] für $i \neq j, j \neq k, k \neq i$ formuliert, enthält also sechs Bedingungen statt einer für jedes Tripel aus Λ. Wir werden zeigen:

i) *Jede dieser sechs Bedingungen impliziert jeweils die fünf anderen.*

ii) *Beim Auftreten unendlicher zyklischer Gruppen reichen die Bedingungen* $(*)$, I*—IV* *(also die Bedingungen* (a)—(f) *in* [6]*) nicht aus, um die Existenz einer Erweiterung G von M mit* $\mathscr{G}$ *zu gewährleisten, so daß* $\alpha x_\lambda = x_\lambda \alpha^{\mathscr{A}_\lambda}$ (R_2^*) *und* $x_j x_i = x_i x_j \gamma_{ji}$ (R_4^*) *gilt.*

Beweis von i) Multiplizieren wir IV* für ein beliebiges Tripel $i \neq j, j \neq k, k \neq i$ unter Beachtung von $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}^{-1}$ usw. von links mit $\gamma_{ij}^{\mathscr{A}_k}$ bzw. γ_{jk} und von rechts mit γ_{ij} bzw. $\gamma_{jk}^{\mathscr{A}_i}$, ergibt sich

$$\gamma_{ij}^{\mathscr{A}_k}\gamma_{kj}\gamma_{ki}^{\mathscr{A}_j} = \gamma_{ki}\gamma_{kj}^{\mathscr{A}_i}\gamma_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{ki}^{\mathscr{A}_j}\gamma_{ji}\gamma_{jk}^{\mathscr{A}_i} = \gamma_{jk}\gamma_{ji}^{\mathscr{A}_k}\gamma_{ki}.$$

Dies sind gerade die aus IV* bei den Permutationen (ij) bzw. (jk) hervorgehenden Formeln, was schon alles zeigt.

Beispiel zu ii) Man wähle $\Lambda = \{1, 2, 3\}$, $\mathscr{G}_\lambda = \langle X_\lambda \rangle$ mit $n_\lambda = 0$, als Normalteiler $M = S_3$, alle Automorphismen $\mathscr{A}_\lambda$ identisch und

$$\gamma_{21} = (132), \quad \gamma_{31} = (123), \quad \gamma_{32} = (12).$$

Dann sind alle Forderungen $(*)$, I*, II*, III* trivialerweise erfüllt, und es gilt IV** für $\sigma = \tau = \varrho = 1$, also IV* und nach i) auch [6] (f) gemäß

$$\gamma_{32}\gamma_{31}\gamma_{21} = (12)(123)(132) = (132)(123)(12) = \gamma_{21}\gamma_{31}\gamma_{32}.$$

Dagegen ist IV** z. B. für $\sigma = \tau = 1$, $\varrho = -1$ wegen

$$(13) = (12)^{-1}(123)^{-1}(132) \neq (132)(123)^{-1}(12)^{-1} = (23)$$

nicht erfüllt. Wendet man Satz 4.2 bzw. Satz III von [6] trotzdem an, um auf die angegebene Weise aus den Elementen von M und Elementen x_1, x_2, x_3 eine Gruppe G als Erweiterung von M mit $\mathscr{G}_1 \times \mathscr{G}_2 \times \mathscr{G}_3$ zu erzeugen, ergibt sich aus folgendem Vergleich

$$x_3^{-1}x_2x_1 = x_3^{-1}x_1x_2\gamma_{21} = x_1x_3^{-1}\gamma_{31}^{-1}x_2\gamma_{21} = x_1x_2x_3^{-1}\gamma_{32}^{-1}\gamma_{31}^{-1}\gamma_{21} = x_1x_2x_3^{-1}(13),$$

$$x_3^{-1}x_2x_1 = x_2x_3^{-1}\gamma_{32}^{-1}x_1 = x_2x_1x_3^{-1}\gamma_{31}^{-1}\gamma_{32}^{-1} = x_1x_2x_3^{-1}\gamma_{21}\gamma_{31}^{-1}\gamma_{32}^{-1} = x_1x_2x_3^{-1}(23)$$

der Widerspruch (13)=(23); die in [6] angegebenen Bedingungen gewährleisten also nicht die Konstruktion einer Gruppe G mit $G \supseteqq M$.

Folgerung 4.3. *Jede abelsche Gruppe M ist Kommutatorgruppe einer geeigneten Erweiterung G von M.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}(M)$ ein (multiplikatives) Erzeugendensystem von M. Wir wählen eine Indexmenge Λ so, daß jedes Element $\xi \in \mathfrak{M}(M)$ in der Form $\xi = \gamma_{ji}$ mit $i, j \in \Lambda$, $i < j$ geschrieben werden kann. Mit den so gewählten Elementen $\gamma_{ji} \in M$ bestimmen wir nach Satz 4.2 eine automorphismenfreie Erweiterung G von M mit dem direkten Produkt $\mathscr{G} = \times \mathscr{G}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ unendlicher zyklischer Gruppen, wobei alle Bedingungen $(*)$ und I*—III* entfallen und IV** für paarweise kommutative Elemente und nur identischen Automorphismen trivial wird. Da die Elemente γ_{ji} gemäß (R_4^*) die Kommutatoren $\langle x_j, x_i \rangle$ erzeugender Elemente x_j, x_i von G sind, folgt $G' = M$ (vgl. auch Satz 2.2).

Literaturverzeichnis

[1] P. M. Cohn, *Universal algebra*, Harper & Row (1965).
[2] A. Fröhlich, Distributively generated nearrings. I, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **8** (1958), 76—99.
[3] B. Huppert, *Endliche Gruppen*. I, Springer (1967).
[4] L. Kaloujnine, Über gewisse Beziehungen zwischen einer Gruppe und ihren Automorphismen, *Ber. Math. Tagung Berlin* (1953), 164—172.
[5] L. Rédei, *Algebra*. I (Leipzig 1959, Budapest—London 1967).
[6] O. Schreier, Über die Erweiterung von Gruppen. I, *Monatsh. Math. Phys.*, **34** (1926), 165—180.
[7] O. Schreier, Über die Erweiterung von Gruppen. II, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **4** (1926), 321—346.
[8] H. J. Weinert, Ringe mit nichtkommutativer Addition. I, *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, **77** (1975), 10—27.
[9] H. J. Weinert, Ringe mit nichtkommutativer Addition. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **26** (1975), 295—310.
[10] H. J. Weinert, Related representation theorems for rings, semirings, nearrings and semi-nearrings by partial transformations and partial endomorphisms, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **20** (1976—77), 307—315.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT CLAUSTHAL
ADOLF RÖMER STR. 2A
3392 CLAUSTHAL-ZELLERFELD, BRD