Acta Sci. Math., 40 (1978), 157—161

Differentiations-Kompositionsringe

WINFRIED B. MÜLLER

In dieser Arbeit werden Differentiations-Kompositionsringe näher untersucht und einige grundlegende Eigenschaften dieser Algebren hergeleitet.

Um eine formale Differential-Rechnung für Ringe zu bekommen, führten Kolchin und Ritt (vgl. etwa [1]) den Begriff des „differential ring" ein. Das ist ein Ring R auf dem Derivationen δ definiert sind, d. h. Abbildungen $\delta: R \to R$, die für alle Elemente $a, b \in R$ die Bedingungen $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$ und $\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b)$ erfüllen. Da man jedoch in Ringen differenzierbarer Funktionen sehr viele Derivationen erhält, die nur sehr „weitläufig" mit der Differentiation von Funktionen in der Analysis verwandt sind, wurde in [3] ein schärferer Differentiations-Begriff für Kompositionsringe definiert. Es werden dabei Abbildungen von Kompositionsringen in sich betrachtet, die neben der Summen- und der Produktregel auch noch einer Abstraktion der aus der Analysis bekannten Kettenregel genügen.

Sei $\langle A, +, \cdot, \circ \rangle$ ein Kompositionsring im Sinne von Lausch-Nöbauer [2]. Es ist dann $\langle A, +, \cdot \rangle$ ein Ring, $\langle A, \circ \rangle$ eine Halbgruppe und es gelten für alle Elemente $f, g, h \in A$ die beiden Rechtsdistributivgesetze $(f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$ und $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$.

Definition. Ein Kompositionsring $\langle A, +, \cdot, \circ \rangle$ zusammen mit einer Abbildung $D: A \to A$ heißt ein *Differentiations-Kompositionsring*, falls für alle Elemente $f, g \in A$ die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

(S) $D(f+g) = D(f) + D(g)$,

(P) $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$,

(K) $D(f \circ g) = \big(D(f) \circ g\big) \cdot D(g)$.

Jede solche Abbildung D von A heißt dann eine Differentiation oder Derivation mit Kettenregel (kurz K-Derivation) von A.

Die Klasse aller Differentiations-Kompositionsringe bildet offenbar eine Varietät bezüglich der Operationenmenge $\{+, -, 0, \cdot, \circ, D\}$. Beispiele für

Differentiations-Kompositionsringe wurden in [3] gegeben. Dort wurde die Gesamtheit aller möglichen Differentiationen in einigen speziellen Kompositionsringen ermittelt. Wir leiten nun im folgenden Eigenschaften allgemeiner Differentiations-Kompositionsringe her.

Sei $\langle A, +, \cdot, \circ, D\rangle$ ein Differentiations-Kompositionsring. Eine nicht leere Teilmenge U von A heißt ein *Differentiations-Unterkompositionsring* von A, wenn $\langle U, +, \cdot, \circ, D\rangle$ wieder ein Differentiations-Kompositionsring ist.

Ein Element $c \in A$ heißt *Differentiationskonstante*, wenn $D(c)=0$.

Es gilt der folgende

Satz 1. *Die Differentiationskonstanten bilden einen Differentiations-Unterkompositionsring von A, dem das Einselement der Multiplikation angehört, sofern A ein Ring mit Einselement ist. Die Konstanten aus A bilden einen Differentiations-Unterkompositionsring des Differentiations-Kompositionsringes der Differentiationskonstanten.*

Beweis. Sei K_D die Menge der Differentiationskonstanten. Da $D(0)=0$ gilt, ist K_D nicht leer. Mit $f, g \in K_D$ folgt wegen $D(f-g)=D(f)-D(g)=0$, daß auch $f-g \in K_D$ ist. Wegen (P) ist auch $f \cdot g \in K_D$. Schließlich folgt $f \circ g \in K_D$ direkt aus (K). Klarerweise ist D aber auch eine Differentiation auf K_D. Besitzt A das Einselement 1, so folgt aus $D(1)=D(1\cdot 1)=D(1)+D(1)$, daß $D(1)=0$ gilt. Damit ist die erste Behauptung gezeigt.

Bezeichnet nun K die Menge der Konstanten aus A, das ist die Menge $\{a \in A \mid a \circ 0 = a\}$, so gilt für $a, b \in K$: $(a-b)\circ 0=(a\circ 0)-(b\circ 0)=a-b$, $(a\cdot b)\circ 0= =(a\circ 0)\cdot(b\circ 0)=a\cdot b$ und $(a\circ b)\circ 0=a\circ(b\circ 0)=a\circ b$. Da für alle $a\in K$ $D(a)= D(a\circ 0)=(D(a)\circ 0)\cdot D(0)=0 \in K$ folgt, bildet K einen Differentiations-Unterkompositionsring von A, und es gilt $K \subseteqq K_D$.

Wir zeigen nun, daß im allgemeinen K echt in K_D enthalten ist, es also Elemente in K_D gibt, die nicht in K liegen. Um alle Elemente von K_D zu bestimmen, muß man die Lösungen der „Differentialgleichung" $D(f)=0$ ermitteln. Dieses Problem dürfte jedoch selbst in den meisten Kompositionsringen, für die man die Gesamtheit aller möglichen Derivationen mit Kettenregel kennt (vgl. [3], [4]), sehr schwer zu lösen sein. Betrachten wir den Polynomring $R[x]$ in der Unbestimmten x über einem kommutativen Ring R mit Einselement. Durch Hinzunahme der Operation des Einsetzens von Polynomen wird $R[x]$ zu einem Kompositionsring. Nach [4] ist dann die Gesamtheit aller K-Derivationen in $R[x]$ durch die Abbildungen $\lambda \cdot \frac{d}{dx}$, λ Idempotente in R, gegeben, wobei $\frac{d}{dx}$ die Ableitung von Polynomen bezeichnet. Nun ist aber $\lambda \cdot \frac{d}{dx} f=0$ genau dann, wenn $\frac{d}{dx} f$ aus dem Annullator

$\alpha(\lambda)$ von λ ist. Da λ Idempotente aus R ist, gilt $R[x]=\lambda\cdot R[x]\oplus(1-\lambda)\cdot R[x]$, und für $a\in R[x]$ mit $a\cdot\lambda=0$ folgt $a=a_1+a_2$ mit $a_1\in\lambda\cdot R[x]$, $a_2\in(1-\lambda)\cdot R[x]$, also $a\cdot\lambda=a_1\cdot\lambda+a_2\cdot\lambda=a_1\cdot\lambda=a_1=0$. Daher gilt $\alpha(\lambda)=(1-\lambda)\cdot R[x]$. Es bleibt noch zu untersuchen, wann $\frac{d}{dx}f\in(1-\lambda)\cdot R[x]$ gilt. Für $\lambda=0$, D ist dann gleich der Nullabbildung, ist jedes $f\in R[x]$ in K_D. Für $\lambda=1$ und Charakteristik von R gleich n gilt $\frac{d}{dx}\,x^n=0$, wobei $x^n\notin K$. Ist die Charakteristik von R gleich ∞ (vgl. [5]), so gibt es ein $a\neq0$ aus R mit $n\cdot a=0$. Es ist dann $\frac{d}{dx}\,a\cdot x^n=0$. Ist jedoch die Charakteristik von R gleich 0, so ist für $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$, $a_n\neq0$, $n\geqq1$, stets $\frac{d}{dx}f(x)=na_nx^{n-1}+\ldots+a_1\neq0$. Also gilt in diesem Fall $K_D=K$. Für $\lambda\neq0$ und $\lambda\neq1$ gibt es stets Elemente in $(1-\lambda)\cdot R[x]$, die nicht in K liegen. Wir bekommen damit

Lemma 1. *Im Polynomring $\langle R[x],+,\cdot,\circ,D\rangle$ ist die Menge der Differentiationskonstanten genau dann gleich der Menge der Konstanten, wenn $D=\frac{d}{dx}$ ist und R die Charakteristik* 0 *hat.*

Nun zeigen wir

Lemma 2. *Ist $\langle A,+,\cdot,\circ,D\rangle$ ein Differentiations-Kompositionsring mit kommutativer Multiplikation, so sind alle Idempotenten $\lambda\in A$ Differentiationskonstante.*

Beweis. Sei $\lambda\in A$ mit $\lambda\cdot\lambda=\lambda$. Dann folgt $D(\lambda)=D(\lambda\cdot\lambda)=D(\lambda)\cdot\lambda+$ $+\lambda\cdot D(\lambda)=2\lambda\cdot D(\lambda)$, weiter $\lambda\cdot D(\lambda)=2\lambda\cdot D(\lambda)$, d. h. $\lambda\cdot D(\lambda)=0$ und damit auch $D(\lambda)=0$.

Als nächstes beweisen wir

Lemma 3. *Für die Differentiationskonstanten $f\in K_D$ gilt $D(f\cdot g)=f\cdot D(g)$ und $D(g\cdot f)=D(g)\cdot f$ für alle $g\in A$. Besitzt A ein (im Sinne von* [5]*) reguläres Element gegenüber der Multiplikation, so sind die Elemente von K_D durch jede dieser beiden Bedingungen charakterisiert.*

Beweis. Die erste Behauptung ist klar.

Gilt $D(f\cdot g)=f\cdot D(g)$, bzw. $D(g\cdot f)=D(g)\cdot f$, für alle $g\in A$, so folgt wegen (P) $D(f)\cdot g=0$, bzw. $g\cdot D(f)=0$. Ist nun g regulär, so gilt $D(f)=0$, also $f\in K_D$.

Unter dem *Differentiations-Linksannullator* N_A von A verstehen wir die Menge $N_A=\{f\in A\,|\,D(f\cdot g)=f\cdot D(g)$ für alle $g\in A\}$. Ganz analog wird der *Differentiations-Rechtsannullator* von A definiert.

Es gilt

Satz 2. *Der Differentiations-Linksannullator* N_A *ist ein Differentiations-Unterkompositionsring von* A.

Beweis. Wegen (P) ist $D(f\cdot g)=f\cdot D(g)$ für alle $g\in A$ gleichbedeutend damit, daß $D(f)\cdot g=0$ für alle $g\in A$, also $D(f)$ im Linksannullator von A liegt. Sicher ist $0\in N_A$. Wegen $D((f_1-f_2)\cdot g)=D(f_1\cdot g-f_2\cdot g)=D(f_1\cdot g)-D(f_2\cdot g)=f_1\cdot D(g)-$ $-f_2\cdot D(g)=(f_1-f_2)\cdot D(g)$ ist mit $f_1,f_2\in N_A$ auch $f_1-f_2\in N$. Ebenso liegt wegen $D((f_1\cdot f_2)\cdot g)=D(f_1\cdot(f_2\cdot g))=f_1\cdot D(f_2\cdot g)=(f_1\cdot f_2)\cdot D(g)$ auch $f_1\cdot f_2$ in N_A. Weiters gilt $D((f_1\circ f_2)\cdot g)=D(f_1\circ f_2)\cdot g+(f_1\circ f_2)\cdot D(g)=(D(f_1)\circ f_2)\cdot D(f_2)\cdot g+$ $+(f_1\circ f_2)\cdot D(g)=(f_1\circ f_2)\cdot D(g)$, also auch $f_1\circ f_2\in N_A$. Da $D(f)\cdot g=0$ für alle $f\in N_A$, folgt $D(D(f)\cdot g)=0$, und $D(f)\cdot D(g)=0$, gilt $D(D(f)\cdot g)=D(f)\cdot D(g)$, also ist mit f auch $D(f)$ aus N_A.

Bemerkung 1. Wie man ganz analog zeigt, bildet auch der Differentiations-Rechtsannullator von A einen Differentiations-Unterkompositionsring von A.

Bemerkung 2. Besitzt A ein reguläres Element gegenüber der Multiplikation, dann gilt $N_A=K_D$.

Das folgende Lemma benützt man bei der Ermittlung aller möglichen Differentiationen eines vorgegebenen Kompositionsringes.

Lemma 4. *Besitzt* A *ein neutrales Element* i *bezüglich der Komposition, so gilt:*

a) $D(i)$ *ist stets Idempotente in* A.

b) *Das Bild von* A *unter* D *liegt stets in* $A\cdot D(i)$.

c) *Gilt* $D(i)=0$, *so ist* D *die Nullabbildung.*

Beweis. Wegen $D(i)=D(i\circ i)=(D(i)\circ i)\cdot D(i)=D(i)\cdot D(i)$ ist $D(i)$ Idempotente aus A. Aus $D(f)=D(f\circ i)=D(f)\cdot D(i)$ für alle $f\in A$ folgt $D\colon A\to A\cdot D(i)$. Die Behauptung c) folgt sofort aus b).

Als nächstes zeigen wir

Satz 3. *Ist* A *ein Kompositionsring mit kommutativer Multiplikation und entsteht* A *durch Adjunktion der Elemente* $a_1,\dots,a_n$ *aus der Menge der Konstanten* K, *d. h.* $A=K[a_1,\dots,a_n]$, *so gibt es höchstens eine Differentiation* D *von* A *mit* $D(a_1)=$ $=b_1,\dots,D(a_n)=b_n$, *wobei die* $b_1,\dots,b_n$ *fest aus* A *vorgegeben sind.*

Beweis. Jedes Element $f\in A$ hat die Gestalt

$f=\sum c_{j_1\dots j_n}a_1^{j_1}\dots a_n^{j_n}$ mit $c_{j_1\dots j_n}\in K$. Wegen (S) und (P) gilt

$$D(f)=\sum D(c_{j_1\dots j_n}\cdot a_1^{j_1}\dots a_n^{j_n})=\sum c_{j_1\dots j_n}\cdot D(a_1^{j_1}\dots a_n^{j_n})=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum c_{j_1\dots j_n}\cdot a_1^{j_1}\dots a_{k-1}^{j_{k-1}}a_{k+1}^{j_{k+1}}\dots a_n^{j_n}\cdot D(a_k^{j_k})=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum c_{j_1\dots j_n}\cdot a_1^{j_1}\dots a_{k-1}^{j_{k-1}}a_{k+1}^{j_{k+1}}\dots a_n^{j_n}\cdot b_k\cdot j_k\cdot a_k^{j_k-1},$$

womit D festgelegt ist.

Bemerkung 3. Mit Hilfe von Satz 3 und Lemma 4 lassen sich leicht sämtliche K-Derivationen vom schon erwähnten Polynomring $A[x]$ bestimmen. Da für jede K-Derivation von $A[x]$ $D(x)$ eine Idempotente aus $A[x]$ ist und damit sogar in A liegt, muß man nur überprüfen, welche der Abbildungen $A[x] \to A[x]$, $f \to \lambda \cdot \frac{d}{dx} f$, λ Idempotente aus A, die Gesetze (S), (P) und (K) erfüllen.

Ist $\langle A, +, \cdot \rangle$ ein Körper, so nennen wir $\langle A, +, \cdot, \circ, D \rangle$ einen *Differentiations-Kompositionskörper*.

Es gilt

Satz 4. *In einem endlichen Differentiations-Kompositionskörper sind alle Elemente Differentiationskonstanten.*

Beweis. Ist die Ordnung des Körpers gleich der Primzahlpotenz p^e, so gilt für alle Elemente $f \in A$, daß $f^{p^e-1} = 1$ ist. Daraus folgt $D(f^{p^e-1}) = (p^e-1) \cdot f^{p^e-2} \cdot D(f) = D(1) = 0$, also $D(f) = 0$.

Folgerung. In jedem endlichen Differentiations-Kompositionskörper ist die einzige Differentiation die Nullabbildung.

Bemerkung 4. Bekanntlich ist jeder Kompositionsring isomorph zu einem Unterkompositionsring eines vollen Funktionenringes (vgl. [2]). Zur Bestimmung aller möglichen Differentiations-Kompositionsringe über einem Kompositionsring genügt es also, alle möglichen Differentiationen für volle Funktionenringe und ihre Unterkompositionsringe zu bestimmen. Da der volle Funktionenring über einem kommutativen Ring mit Einselement nach [4] nur die triviale Differentiation besitzt, also nur mit der Nullabbildung zu einem Differentiations-Kompositionsring gemacht werden kann, stellt sich die Frage, den größten Unterkompositionsring zu finden, in dem eine nicht-triviale Differentiation existiert. Die Lösung dieser Aufgabe müssen wir leider offen lassen.

Literatur

[1] E. R. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Academic Press (New York and London, 1973).

[2] H. Lausch and W. Nöbauer, *Algebra of Polynomials*, North-Holland Publ. Comp. (Amsterdam, 1973).

[3] W. B. Müller, Derivationen in Kompositionsalgebren, *Österr. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.*, Abt. II, 184 Bd., 5. bis 7. Heft, 239—245 (1975).

[4] W. Nöbauer, Derivationssysteme mit Kettenregel, *Monatshefte Math.*, 67 (1963). 36—49.

[5] L. Rédei, *Algebra I*, Pergamon Press (Oxford, 1967).

UBW KLAGENFURT
UNIVERSITÄTSSTRASSE 67
A-9010 KLAGENFURT, AUSTRIA