Acta Sci. Math., 40 (1978), 111—120

Построение полугрупповой амальгамы, независимо вложимой в полугруппу

Л. МЕДЕШИ*

Полугрупповая амальгама *вкладывается независимо* в полугруппу, если в этой полугруппе независимы исходные полугруппы, составляющие данную амальгаму.

В настоящей работе изучаются свойства таких амальгам и в некоторых частных случаях (например, для некоторого гомоморфного образа всех упомянутых амальгам) дается полное описание.

Эта статья по существу есть продолжение статьи [6]. Мы предполагаем, что читатель знаком с [6] и используем определения и обозначения этой работы.

§ 1. Построение полугрупп, содержащих M-элементы

Пусть A слабо ассоциативная амальгама полугрупп A_ξ ($\xi\in\mathscr{I}$, где $\mathscr{I}$— некоторое множество индексов), которая может быть вложена в некоторую полугруппу B таким образом чтобы A_ξ ($\xi\in\mathscr{I}$) в ней являлись независимыми подполугруппами. Другими словами, амальгама A удовлетворяет условиям теоремы 3 в статье [6] и по теореме 2 (в [6]) обладает свойствами $\alpha-\vartheta$. Этими свойствами мы будем в дальнейшем неоднократно пользоваться.

Отбросим из $\mathscr{I}$ такие ундексы α, для которых A_α не обладает L-элементами (T-элементами, M-элементами). Полученные три множества обозначим соответственно через $\mathscr{I}_L$, $\mathscr{I}_T$, $\mathscr{I}_M$. В этих множествах определим *отношения* $\varrho_L, \varrho_T, \varrho_M$ следующим образом:

ϱ_L: $\alpha\varrho_L\beta$ ($\alpha, \beta\in\mathscr{I}_L$) $\Leftrightarrow$ существует L-элемент x, для которого $\alpha, \beta\in\bar{x}$,

ϱ_T: $\alpha\varrho_T\beta$ ($\alpha, \beta\in\mathscr{I}_T$) $\Leftrightarrow$ существует T-элемент t, для которого $\alpha, \beta\in\bar{t}$,

ϱ_M: $\alpha\varrho_M\beta$ ($\alpha, \beta\in\mathscr{I}_M$) $\Leftrightarrow$ существует такая (конечная) последовательность $\gamma_0=\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n=\beta$ ($\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\in\mathscr{I}_M$) для которой найдутся M-элементы $y_1, y_2, \dots, y_n$ со свойством: $\bar{y}_1=\langle\gamma_0, \gamma_1\rangle$, $\bar{y}_2=\langle\gamma_1, \gamma_2\rangle, \dots, \bar{y}_n=\langle\gamma_{n-1}, \gamma_n\rangle$.

Поступило 7. апреля 1977

* L. Megyesi

Очевидно, что ϱ_L, ϱ_T рефлексивны и симметричны. Транзитивность отношения ϱ_L следует из свойства β, а транзитивность отношения ϱ_T следует из ϑ. Таким образом, ϱ_L, ϱ_T и ϱ_M являются отношениями эквивалентности (для ϱ_M это очевидно). Следовательно, ϱ_L, ϱ_T и ϱ_M определяют разбиения. Обозначим ϱ_L-классы через P_i ($i \in \mathscr{I}_P$), ϱ_T-классы через Q_j ($j \in \mathscr{I}_Q$), ϱ_M-классы через R_k ($k \in \mathscr{I}_R$) ($\mathscr{I}_P$, $\mathscr{I}_Q$, $\mathscr{I}_R$ — некоторые (подходящие) множества индексов). Мощность множеств P_i, Q_j, R_k записываем так $|P_i|$, $|Q_j|$, $|R_k|$. В дальнейшем пусть L_α, M_α, T_α обозначают соответственно множества всех L-, M-, T-элементов из A_α ($\alpha \in \mathscr{I}$) и $D_\alpha = A_\alpha \setminus (L_\alpha \cup T_\alpha)$.

Далее, пусть $K_{\alpha\beta} = A_\alpha \cap A_\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathscr{I}$), M^l- и M^r-компоненты $K_{\alpha\beta}$ в A_α будем называть M-компонентами и ее L-, M^l-, M^r-, T-компоненты в A_α обозначать через L, $M_{\alpha\beta}$, $M_{\beta\alpha}$, T. Значит $M_{\alpha\beta} = \langle y \mid y$ — M-элемент и $\hat{y} = (\alpha, \beta)\rangle$, $M_{\beta\alpha} = \langle y \mid y$ — M-элемент, $\hat{y} = (\beta, \alpha)\rangle$.

Лемма 1. *Если ϱ_M-класс R_k содержит такое α, что A_α обладает T-элементом, то R_k содержится в некотором ϱ_T-классе.*

Доказательство. Достаточно показать следующее: если y — M-элемент и $\bar{y} = \langle \alpha, \beta \rangle$ и A_α содержит T-элемент то содержит и A_β. А это утверждение следует из свойства η.

Лемма 2. *Пусть R_k ϱ_M-класс; $\alpha, \beta \in R_k$.*

1) *Если $M_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ то существует разбиение $F_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}^{(\alpha)} \cup V_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$ такое, что $ux = x$, $vx \in T$, $uM_{\alpha\beta} \subseteqq M_{\alpha\beta}$, $vM_{\alpha\beta} \subseteqq T$ при всех $u \in U_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$, $v \in V_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$, $x \in F_{\alpha\beta}$ и элементы множества $N_{\alpha\beta}^{(\alpha)} = U_{\alpha\beta}^{(\alpha)} M_{\alpha\beta}$ являются правыми нулями в полугруппе $L \cup M_{\alpha\beta} \cup U_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$.*

2) *Если $M_{\beta\alpha} \neq \emptyset$, то существует разбиение $F_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha}^{(\alpha)} \cup V_{\beta\alpha}^{(\alpha)}$ такое, что $xu = x$, $xv \in T$, $M_{\beta\alpha} u \subseteqq M_{\beta\alpha}$, $M_{\beta\alpha} v \subseteqq T$ при всех $u \in U_{\beta\alpha}^{(\alpha)}$, $v \in V_{\beta\alpha}^{(\alpha)}$, $x \in F_{\alpha\beta}$ и элементы множества $N_{\beta\alpha}^{(\alpha)} = M_{\beta\alpha} U_{\beta\alpha}^{(\alpha)}$ являются левыми нулями в полугруппе $L \cup M_{\beta\alpha} \cup U_{\beta\alpha}^{(\alpha)}$.*

3) *Если $U_{\alpha\beta}^{(\alpha)} \neq \emptyset$ и $U_{\alpha\beta}^{(\beta)} \neq \emptyset$ (аналогично $U_{\beta\alpha}^{(\alpha)} \neq \emptyset$ и $U_{\beta\alpha}^{(\beta)} \neq \emptyset$) то $N_{\alpha\beta}^{(\alpha)} = N_{\alpha\beta}^{(\beta)}$ (соответственно, $N_{\beta\alpha}^{(\alpha)} = N_{\beta\alpha}^{(\beta)}$) состоит из одного элемента, который является нулем в $L \cup M_{\alpha\beta}$ (соответственно, в $L \cup M_{\beta\alpha}$).*

Доказательство. Пусть R_k — ϱ_M-класс, и $\alpha, \beta \in R_k$. Предположим, что $M_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Доказательство в случае $M_{\beta\alpha} \neq \emptyset$ аналогично. Из теоремы 2.8 в [3] следует, что $uy \in T \cup M_{\alpha\beta}$ для всех $u \in F_{\alpha\beta}$, $y \in M_{\alpha\beta}$. Так как при всех $x \in F_{\alpha\beta}$

$$(1) \qquad ux = u(yx) = (uy)x = \begin{cases} x & \text{если} \quad uy \in M_{\alpha\beta} \\ \in T & \text{если} \quad uy \in T, \end{cases}$$

то для элемента $u \in F_{\alpha\beta}$ или $uM_{\alpha\beta} \subseteqq M_{\alpha\beta}$ и тогда $ux = x$ при всех $x \in F_{\alpha\beta}$ (обозначим множество таких элементов u через $U_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$) или $uM_{\alpha\beta} \subseteqq T$ и тогда $ux \in T$ при всех $x \in F_{\alpha\beta}$ (такие элементы u образуют множества $V_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$). Если $uy \in M_{\alpha\beta}$ т. е. $u \in U_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$, $y \in M_{\alpha\beta}$, то $uy = (wu)y = w(uy)$ при любых $w \in L \cup M_{\alpha\beta} \cup U_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$. Отсюда следует, что элементы множества $N^{(\alpha)}_{\alpha\beta}\in U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}$ являются правыми нулями в $L\cup M_{\alpha\beta}\cup U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}$. Легко проверяется, что $L\cup M_{\alpha\beta}\cup U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}$ является полугруппой.

Аналогично доказывается, что элементы $N^{(\beta)}_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}U^{(\beta)}_{\alpha\beta}$ являются левыми нулями в полугруппе $L\cup M_{\alpha\beta}\cup U^{(\beta)}_{\alpha\beta}$. Отсюда следует, что в случае $U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}\neq\emptyset$ $U^{(\beta)}_{\alpha\beta}\neq\emptyset$ множества $N^{(\alpha)}_{\alpha\beta}$ и $N^{(\beta)}_{\alpha\beta}$ совпадают и состоят только из одного элемента, который является нулем в $L\cup M_{\alpha\beta}$.

Замечание. В случае $M_{\alpha\beta}\neq\emptyset$ $M_{\beta\alpha}\neq\emptyset$ из леммы 2 следует, что либо $F_{\alpha\beta}=$ $=V^{(\alpha)}_{\alpha\beta}=V^{(\alpha)}_{\beta\alpha}$ (т. е. $U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}=U^{(\alpha)}_{\beta\alpha}=\emptyset$), либо $F_{\alpha\beta}=U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}=U^{(\alpha)}_{\beta\alpha}=\langle a\rangle$, т. е. $F_{\alpha\beta}$ состоит из одного элемента a. Этот последний случай возможен только тогда, когда $K_{\alpha\beta}$ является особой р. е. и. подполугруппой в A_α (это доказано в 2.1 в статье [4]). (Определение особой р. е. и. подполугруппы см. в §2.) Таким образом, этот случай не может иметь места, если A_α содержит только один T-элемент. Из леммы 2 вытекает следующая

Теорема 1. *Пусть A — слабо ассоциативная амальгама двух полугрупп A_α, A_β; независимо вложимая в некоторую полугруппу. Если A содержит M-элементы и не более чем один T-элемент то возможны следующие случаи:*

1) В A нет T-элемента. $M_{\beta\alpha}=\emptyset$ и $L\cup M_{\alpha\beta}$ полугруппа с нулем O_M, $F_{\alpha\beta}$ полугруппа правых нулей, $F_{\beta\alpha}$ полугруппа левых нулей и имеют место соотношения: $xz=O_M$, $zy=O_M$ при всех $z\in M_{\alpha\beta}$, $x\in F_{\alpha\beta}$, $y\in F_{\beta\alpha}$.

2) A содержит один T-элемент. Этот элемент: 0 является нулем и в A_α и в A_β. Возможны следующие случаи:

а) $(F_{\alpha\beta}\cup M_{\beta\alpha})(F_{\alpha\beta}\cup M_{\alpha\beta})=0$, $(F_{\beta\alpha}\cup M_{\alpha\beta})(F_{\beta\alpha}\cup M_{\beta\alpha})=0$.

б) $M_{\alpha\beta}\neq\emptyset$, $M_{\beta\alpha}=\emptyset$, $(F_{\beta\alpha}\cup M_{\alpha\beta})F_{\beta\alpha}=0$, $F_{\alpha\beta}=U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}\cup V^{(\alpha)}_{\alpha\beta}$ $(U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}\cap V^{(\alpha)}_{\alpha\beta}=\emptyset)$ где $ux=x$, $vx=0$, $uM_{\alpha\beta}\subseteq M_{\alpha\beta}$, $vM_{\alpha\beta}=0$ при всех $u\in U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}$, $v\in V^{(\alpha)}_{\alpha\beta}$, $x\in F_{\alpha\beta}$ и элементы множества $N^{(\alpha)}_{\alpha\beta}=U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}$ являются правыми нулями в $L\cup M_{\alpha\beta}\cup U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}$.

в) $M_{\alpha\beta}\neq\emptyset$, $M_{\beta\alpha}=\emptyset$. Имеют место разбиения $F_{\alpha\beta}=U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}\cup V^{(\alpha)}_{\alpha\beta}$, $F_{\beta\alpha}=U^{(\beta)}_{\alpha\beta}\cup V^{(\beta)}_{\alpha\beta}$ такие, что $ux=x$, $vx=0$, $vM_{\alpha\beta}=0$ при всех $x\in F_{\alpha\beta}$, $u\in U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}$, $v\in V^{(\alpha)}_{\alpha\beta}$; и $yu=y$, $yv=0$, $M_{\alpha\beta}v=0$ при всех $y\in F_{\beta\alpha}$, $u\in U^{(\beta)}_{\alpha\beta}$, $v\in V^{(\beta)}_{\alpha\beta}$. Далее, $L\cup M_{\alpha\beta}$ обладает нулем O_M и $U^{(\alpha)}_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}=O_M$, $M_{\alpha\beta}U^{(\beta)}_{\alpha\beta}=O_M$.

Дальнейшие свойства L-, M-элементов во всех случаях следуют из их определений, или из свойств $*$-связки. Остальные возможности получаются из приведенных выше из соображений двойственности.

Лемма 3. *Если ϱ_M-класс R_k состоит не только из двух индексов, то каждая $K_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta\in R_k)$ может содержать не более чем одну M-компоненту и существуют подмножества $R^{(l)}_k$, $R^{(r)}_k$ класса R_k $(R_k=R^{(l)}_k\cup R^{(r)}_k;\ R^{(l)}_k\cap R^{(r)}_k=\emptyset)$ такие, что для всех $M_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta\in R_k)$ имеет место $\alpha\in R^{(l)}_k$, $\beta\in R^{(r)}_k$.*

Доказательство. Пусть $\alpha,\beta\in R_k$. Если в $K_{\alpha\beta}$ две M-компоненты $M_{\alpha\beta}$, $M_{\beta\alpha}$ непусты, то R_k состоит только из индексов α, β. Действительно, если $M_{\alpha\gamma}\neq\emptyset$

($\gamma\in R_k$), то существование элементов $y\in M_{\beta\alpha}$ и $z\in M_{\alpha\gamma}$, для которых по определению $\hat{y}=(\beta,\alpha)$ $\hat{z}=(\alpha,\gamma)$, противоречит свойству γ. Предположим, что A_α содержит M-компоненту в $K_{\alpha\beta}$ и в $K_{\alpha\xi_1}$, $K_{\alpha\xi_2}$, ... ($\alpha,\beta,\xi_1,\xi_2,\ldots\in R_k$). Если в $K_{\alpha\beta}$ подполугруппа $M_{\alpha\beta}\neq\emptyset$, то другими M-компонентами в A_α будут $M_{\alpha\xi_1}$, $M_{\alpha\xi_2}$, ... (согласно γ) и в этом случае $\alpha\in R_k^{(l)}$; если же $M_{\beta\alpha}\neq\emptyset$ в $K_{\alpha\beta}$, то остальные M-компоненты в A_α — $M_{\xi_1\alpha}$, $M_{\xi_2\alpha}$, ... т. е. $\alpha\in R_k^{(r)}$.

Лемма 4. *Пусть R_k — ϱ_M-класс, для которого $|R_k|\geqq 3$ и пусть $A_\alpha(\alpha\in R_k)$ такая полугруппа, которая содержит более одной M-компоненты.*

1) *Множество D_α обладает*

а) или разбиением таким $D_\alpha=U_\alpha^{(l)}\cup V_\alpha^{(l)}$ (если $\alpha\in R_k^{(l)}$), что $M_\alpha\subseteqq U_\alpha^{(l)}$, $ux=x, vx\in T, lx=x, yl=y$ для всех $u\in U_\alpha^{(l)}, v\in V_\alpha^{(l)}, l\in L_\alpha, x\in D_\alpha, y\in V_\alpha^{(l)}\cup(U_\alpha^{(l)}\setminus M_\alpha)$;

б) или таким разбиением $D_\alpha=U_\alpha^{(r)}\cup V_\alpha^{(r)}$ (если $\alpha\in R_k^{(r)}$), что $M_\alpha\subseteqq U_\alpha^{(r)}$, $xu=x, xv\in T, xl=x, ly=l$ для всех $u\in U_\alpha^{(r)}, v\in V_\alpha^{(r)}, l\in L_\alpha, x\in D_\alpha, y\in V_\alpha^{(r)}\cup(U_\alpha^{(r)}\setminus M_\alpha)$.

2) *Множество $M_{\alpha\beta}$ (или $M_{\beta\alpha}$) только в том случае состоит не более чем из одного элемента если A_β содержит только одну M-компоненту (именно $M_{\alpha\beta}$ или $M_{\beta\alpha}$) и одновременно $F_{\beta\alpha}F_{\beta\alpha}\subseteqq T$, (т. е. $U_{\alpha\beta}^{(\beta)}=U_{\beta\alpha}^{(\beta)}=\emptyset$).*

3) *L-компонента для всех пересечений $K_{\varrho\sigma}=A_\varrho\cap A_\sigma$ ($\varrho,\sigma\in R_k$) одна и та же L_k $(=L_\alpha)$. L-компонента пересечений $K_{\varrho\xi}$ ($\varrho\in R_k$, $\xi\in\mathscr{I}$, $\xi\bar{\in}R_k$) является подмножеством L_k. Далее, $M_{\alpha\beta}L_k\subseteqq M_{\alpha\beta}$ (и аналогично $L_kM_{\beta\alpha}\subseteqq M_{\beta\alpha}$) ($\beta\in R_k$) для всех непустых M-компонент $M_{\alpha\beta}$ ($M_{\beta\alpha}$) в A_α.*

Доказательство. Пусть $\alpha,\beta\in R_k$; $|R_k|\geqq 3$. Пусть A_α полугруппа, которая содержит более одной M-компоненты. Можно предположить, что $\alpha\in R_k^{(l)}$ и в силу леммы 3 можно считать что в A_α существуют M-компоненты $M_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\gamma}$ ($\beta,\gamma\in R_k$). Применим лемму 2. Так как $za=a$ при $z\in M_{\alpha\beta}\cup M_{\alpha\gamma}$ и $a\in A_\alpha\setminus(K_{\alpha\beta}\cup K_{\alpha\gamma})$, то $M_{\alpha\gamma}\subset U_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$, $M_{\alpha\beta}\subset U_{\alpha\gamma}^{(\alpha)}$. Следовательно $M_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\gamma}$ является полугруппой правых нулей, и $N_{\alpha\beta}^{(\alpha)}=M_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\gamma}^{(\alpha)}=M_{\alpha\gamma}$. Пусть $U_\alpha^{(l)}=M_{\alpha\beta}\cup U_{\alpha\beta}^{(\alpha)}=M_{\alpha\gamma}\cup U_{\alpha\gamma}^{(\alpha)}$ и $V_\alpha^{(l)}=V_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$, тогда согласно лемме 2 и определению L-компоненты выполняются все требования утверждения 1. (Равенства $lx=x$, $yl=y$ ($x\in D_\alpha$, $y\in V_\alpha^{(l)}\cup(U_\alpha^{(l)}\setminus M_\alpha)$) получаются только при $x\in L$, но из утверждения 3 будет следовать $L=L_\alpha$.)

Рассмотрим теперь те условия, при которых $M_{\alpha\beta}$ состоит более чем из одного элемента. В этом случае $U_{\alpha\beta}^{(\beta)}=\emptyset$ так как согласно утверждению 3 леммы 2 из $U_{\alpha\beta}^{(\beta)}\neq\emptyset$ следует, что $M_{\alpha\beta}=N_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$ состоит только из одного элемента. Как мы доказали выше, если в A_β есть не только одна M-компонента то $U_{\alpha\beta}^{(\beta)}\neq\emptyset$. Отсюда вытекает второе утверждение леммы.

Для 3) мы покажем, что L-компонента пересечения $K_{\varrho\tau}$ является подмножеством L-компоненты $K_{\varrho\sigma}$, если $M_{\varrho\sigma}\neq\emptyset$ ($\varrho,\sigma\in R_k$, $\tau\in\mathscr{I}$, $\tau\neq\sigma$). Пусть x — L-элемент, $x\in K_{\varrho\tau}$. Если $x\bar{\in}K_{\varrho\sigma}$, то для всякого $z\in M_{\varrho\sigma}$ имеем $zx=x$ (так как z — M-элемент) и $zx=z$ (так как x — L-элемент и $z\bar{\in}K_{\varrho\tau}$). Отсюда следует, что L-компонента $K_{\alpha\beta}$ и $K_{\alpha\gamma}$ если $M_{\alpha\beta}\neq\emptyset$, $M_{\alpha\gamma}\neq\emptyset$ ($\alpha,\beta\in R_k$), одна и та же полугруппа: L_k, и L-компонента $K_{\beta\gamma}$ является подмножеством L_k. С другой стороны, $L_k \subseteqq K_{\alpha\beta} \cap K_{\alpha\gamma}$, т. е. L_k — подмножество L-компоненты $K_{\beta\gamma}$. Значит L_k совпадает с L-компонентой $K_{\beta\gamma}$ (независимо от того, что имеет $K_{\beta\gamma}$ M-компоненту или нет). Из этих рассуждений вытекает утверждение 3. ($M_{\alpha\beta} L_k \subseteqq M_{\alpha\beta}$ следует из свойств $*$-связки.)

§ 2. Особые р. е. и. подполугруппы

Определение. Р. е. и. подполугруппа K полугруппы S называется *особой* р. е. и. подполугруппой в S, если T-компонента полугруппы K не является двусторонним идеалом в S.

Доказанная в статье [4] теорема 1.4. дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы р. е. и. подполугруппа K являлась в S особой. В частности, доказывается, что если K — особая р. е. и. подполугруппа в S, то M^l- и M^r-компонента подполугруппы K непусты, и $S \setminus K$ состоит только из одного элемента. Если $S \setminus K = a$, то возможны два случая: или $a^2 = a$ или a^2 содержится в T-компоненте K (см. § 5. в [4]).

Далее, из того, что р. е. и. подполугруппа $K_{\alpha\beta} = A_\alpha \cap A_\beta$ в A_α является особой, не следует что $K_{\alpha\beta}$ особая и в A_β (пример 5 в [5]).

Если $K_{\alpha\beta}$ особая и в A_α, и в A_β, то возможен каждый из следующих случаев: $(A_\alpha \setminus K_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} = a,\ A_\beta \setminus K_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha} = b)$

1) $a^2 = a, \quad b^2 = b,$
2) $a^2 = a, \quad b^2 \in T,$
3) $a^2 \in T, \quad b^2 = b,$
4) $a^2 \in T, \quad b^2 \in T$ (примеры 2, 3, 4 в [5]).

Определение. Пусть $K_{\alpha\beta} = A_\alpha \cap A_\beta$ особая р. е. и. подполугруппа в A_α и пусть $a = F_{\alpha\beta}$. Назовем *T^*-компонентой* (и обозначим через T^*) множество всех элементов t из T-компоненты подполугруппы $K_{\alpha\beta}$, для которых $w_1 t w_2 \in T$ для всех слов w_1, w_2 из элементов $a \cup F_{\beta\alpha}$ (одно из слов w_1 или w_2 может быть пустым). Множество $T \setminus T^*$ будем называть $(T \setminus T^*)$-компонентой полугруппы $K_{\alpha\beta}$ в A_α.

Теорема 2. *Пусть A слабо ассоциативная амальгама двух полугрупп A_α, A_β, независимо вложимая в некоторую полугруппу и пусть $K_{\alpha\beta} = A_\alpha \cap A_\beta$ особая р. е. и. подполугруппа в A_α. Если T^*-компонента подполугруппы $K_{\alpha\beta}$ непуста, то она является двусторонним идеалом и в A_α, и в A_β.*

Доказательство. Достаточно показать, что если $t \in T^*$, $x \in A_\alpha \cup A_\beta$ то $xt \in T^*$. Очевидно, что $xt \in T^*$, если $x = a = F_{\alpha\beta}$ или $x \in F_{\beta\alpha}$. Пусть $x \in K_{\alpha\beta}$, и рассмотрим w_1xtw_2, где w_1, w_2 слова элементов $a\cup F_{\beta\alpha}$. Если w_1 пустое, то утверждение следует из свойств $*$-связки. Пусть c — последний элемент в слове w_1. Так как $K_{\alpha\beta}$ р. е. и. подполугруппа, то или $cx=c$, или $cx\in K_{\alpha\beta}$. Продолжая этот процесс, получаем: или w_1x является первой частью w_0 слова w_1 и в этом случае очевидно, что $w_1xtw_2=w_0tw_2\in T$, или $w_1x\in K_{\alpha\beta}$, и так как $tw_2\in T$, то из свойств $*$-связки следует, что $w_1xtw_2\in T$.

Лемма 5. *Если $K_{\alpha\beta}$ особая р. е. и. подполугруппа в A_α, то T-элементы пересечения $K_{\alpha\beta}\cap K_{\alpha\xi}$ $(\alpha, \beta, \xi\in\mathscr{I})$ необходимо принадлежат T^*-компоненте полугруппы $K_{\alpha\beta}$.*

Доказательство. Пусть t — T-элемент, для которого $t\in K_{\alpha\beta}\cap K_{\alpha\xi}$, и $a=F_{\alpha\beta}$, $b\in F_{\beta\alpha}$. Из определения амальгамы следует, что $a\bar{\in} K_{\alpha\xi}$ и поэтому $at\in K_{\alpha\xi}$. Очевидно, что $at\in K_{\alpha\beta}$, тогда $at\in K_{\alpha\beta}\cap K_{\alpha\xi}$. Если $K_{\alpha\beta}$ и в A_β особая р. е. и. подполугруппа, то аналогично получается $bt\in K_{\alpha\beta}\cap K_{\alpha\xi}$. Предположим, что $K_{\alpha\beta}$ не является особой в A_β. Если $b\bar{\in} K_{\alpha\xi}$, то по определению T-компоненты $bt\in K_{\alpha\xi}$. Если $b\in K_{\alpha\xi}$, то из свойств $*$-связки следует, что $bt\in K_{\alpha\xi}$. Отсюда $bt\in K_{\alpha\beta}\cap K_{\alpha\xi}$. Лемма 3 показывает, что в $K_{\alpha\xi}$ могут существовать только L- и T-элементы, и очевидно, что at, bt — T-элементы. Аналогично доказывается, что ta, tb — T-элементы в $K_{\alpha\beta}\cap K_{\alpha\xi}$. Повторение этого процесса дает нам следующее: для любых слов w_1 и w_2 из элементов $a\cup F_{\beta\alpha}$ имеем: w_1tw_2 — T-элемент в $K_{\alpha\beta}\cap K_{\alpha\xi}$. Следовательно, $t\in T^*$.

Замечание. В статье [5] приводятся примеры 2 и 3, в которых T^* пусто, и примеры 4 и 5, в которых T^* непусто.

§ 3. Построение полугруппы всех L-элементов полугрупп $A_\xi(\xi\in P_i)$

Следуя работе [1], введем следующее:

Определение. Будем говорить что полугруппа S разлагается в *последовательно аннулирующее объединение* подполугрупп $S_\xi(\xi\in\mathscr{I})$, если эта совокупность $S_\xi(\xi\in\mathscr{I})$ линейно упорядочена при помощи индексов, причем выполнены следующие условия:

1) $\bigcup\limits_{\xi\in\mathscr{I}} S_\xi=S$,

2) для любых $x\in S_\varrho$, $y\in S_\sigma$ $(\varrho<\sigma;\ \varrho,\sigma\in\mathscr{I})$ имеет место $xy=yx=x$,

3) если $\varrho<\sigma$ и $S_\varrho\cap S_\sigma\neq\emptyset$, то ϱ,σ соседние элементы упорядоченного множества $\mathscr{I}$, далее пересечение $S_\varrho\cap S_\sigma$ может состоять только из одного элемента, который является в S_ϱ единицей, а в S_σ нулем.

Введем еще следующее:

Определение. Пусть S полугруппа с единицей e. Будем говорить, что единица e *неприсоединена* (к полугруппе S), если существуют отличные от e элементы $a, b \in S$, для которых $ab=e$.

Замечание. Если $xy=e$ и $x \neq e$, $y \neq e$, где $x, y \in S$ и e — единица в S, то элементы x, y порождают бициклическую полугруппу в S или нетривиальный гомоморфный образ бициклической полугруппы, которая, как известно, может быть только циклической группой (см. леммы 1.31, 1.32 в [2]).

Теорема 3. *Пусть A слабо ассоциативная амальгама полугрупп A_ξ ($\xi \in \mathscr{I}$), независимо вложимая в некоторую полугруппу. Пусть P_i — ϱ_L-класс индексов, и L^* — множество всех L-элементов $\bigcup\limits_{\eta \in P_i} A_\eta$. Тогда L^* является последовательно аннулирующим объединением полугрупп S_ϱ ($\varrho \in \mathscr{J}$. где $\mathscr{J}$ некоторое линейно упорядоченное множество), и имеют место следующие утверждения:*

1) *Для всякого $\mu \in \mathscr{J}$ существует по крайней мере одна такая полугруппа $A_\alpha (\alpha \in P_i)$, что $L_\alpha = \bigcup\limits_{\varrho \geqq \mu} S_\varrho$ и обратно, в каждой полугруппе A_ξ множество L_ξ представимо в виде $L_\xi = \bigcup\limits_{\varrho \geqq \tau} S_\varrho$ для некоторого $\tau \in \mathscr{J}$.*

2) *Если S_ϱ, S_σ содержит общий элемент: O_σ ($\varrho < \sigma$; $\varrho, \sigma \in \mathscr{J}$ и ϱ, σ соседние), то O_σ является неприсоединенной к S_ϱ единицей.*

3) *Если в A_α ($\alpha \in P_i$) полугруппа $\{B_\alpha\}$, порожденная множеством $B_\alpha = A_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\xi \in \mathscr{I} - \langle\alpha\rangle} K_{\alpha\xi}$ содержит и L-элежент (в этом сучае $M_\alpha = \emptyset$), то $\{B_\alpha\}$ может содержать только один L-элемент, а именно — нуль множества $L_\alpha = \bigcup\limits_{\varrho \geqq \mu} S_\varrho$ (который содержитя в S_μ) и является неприсоединенной к $\{B_\alpha\}$ единицей.*

Доказательство. Пусть P_i — ϱ_L-класс, L^* — множество всех L-элементов $\bigcup\limits_{\xi \in P_i} A_\xi$. Из свойства β следует, что для $x_1, x_2 \in L^*$ либо $\bar{x}_1 \subseteqq \bar{x}_2$, либо $\bar{x}_2 \subseteqq \bar{x}_1$. Поэтому можно разбить множество L^* на такие подмножества S_ϱ^* ($\varrho \in \mathscr{J}$), что каждое S_ϱ^* может иметь только такие L-элементы, которые содержится в точно тех же полугруппах из $A_\xi (\xi \in \mathscr{I})$ и совокупность $S_\varrho^* (\varrho \in \mathscr{J})$ линейно упорядочена при помощи индексов, таким образом, что в случае $\varrho < \tau$ ($\varrho, \tau \in \mathscr{J}$) $\bar{x} \subset \bar{y}$ (но $\bar{x} \neq \bar{y}$) при всех $x \in S_\varrho^*$, $y \in S_\tau^*$. Из β следует, что $xy=yx=x$ если $x \in S_\varrho^*$, $y \in S_\tau^*$ ($\varrho < \tau$; $\varrho, \tau \in \mathscr{J}$). Это же свойство β показывает, что для всех $x_1, x_2 \in S_\varrho^*$ произведение $x_1 x_2 \in S_\sigma$ где $\sigma \geqq \varrho$ ($\sigma \in \mathscr{J}$). Предположим, что существует η, для которого $\varrho < \eta < \sigma$. Так как $\varrho < \eta$, то $zx_1 = x_1$, $x_2 z = x_2$ при всех $z \in S_\eta^*$, значит $zx_1x_2 = x_1x_2z = x_1x_2$ далее, из $\eta < \sigma$ следует $zx_1x_2 = x_1x_2z = z$. Это противоречие показывает, что либо $\sigma = \varrho$, либо σ и ϱ соседние элементы из $\mathscr{J}$. Если $x_1, x_2 \in S_\varrho^*$ и $x_1x_2 = O_\sigma \in S_\sigma^*$ ($\varrho < \sigma$ и ϱ, σ соседние в $\mathscr{J}$), то O_σ является нулем в S^*_σ, так как для всякого $y \in S^*_\sigma$ имеет место $yx_1 = x_1$, $x_2 y = x_2$, т. е. $yx_1x_2 = x_1x_2y = x_1x_2$ и одновременно $O_\sigma x = xO_\sigma = x$ при всех $x \in S^*_\varrho$ (в силу $\varrho < \sigma$).

Теперь определим полугруппу S_ϱ ($\varrho \in \mathscr{I}$) следующим образом:

а) $S_\varrho = S^*_\varrho$ если S^*_ϱ полугруппа,

б) $S_\varrho = S^*_\varrho \cup O_\sigma$ (где ϱ, σ соседние в $\mathscr{I}$; $\varrho < \sigma$) и O_σ является нулем в S^*_σ и неприсоединенной единицей в полугруппе $S_\varrho = S^*_\varrho \cup O_\sigma$.

Легко проверяется, что L^* разлагается в последовательно аннулирующее объединение подполугрупп S_ϱ ($\varrho \in \mathscr{I}$) и все требования утверждения 1 и 2 выполняются.

Пусть теперь $A_\alpha (\alpha \in P_i)$ — полугруппа и $B_\alpha = A_\alpha \setminus \bigcup_{\xi \in \mathscr{I} - \langle \alpha \rangle} K_{\alpha\xi}$. Из (1) следует, что в случае $M_\alpha \neq \emptyset$ полугруппа $\{B_\alpha\}$, порожденная множеством B_α, не содержит L-элементов. Предположим, что $M_\alpha = \emptyset$ и существуют элементы a, b из B_α, для которых произведение $ab \in L_\alpha$. Очевидно, что ab является нулем в L_α (так как $la = a$, $bl = b$, следовательно, $lab = abl = ab$ при всех $l \in L_\alpha$). Если $L_\alpha = \bigcup_{\varrho \geqq \mu} S_\varrho$ (для некоторого $\mu \in \mathscr{I}$), то $ab = O_\mu \in S_\mu$. Так как O_μ L-элемент, поэтому $ab = O_\mu$ является единицей в $\{B_\alpha\}$. Очевидно, что O_μ — неприсоединена к $\{B_\alpha\}$.

§ 4. Построение амальгамы полугрупп, содержащих не более одного T-элемента

Определение. Пусть A — амальгама полугрупп A_ξ ($\xi \in \mathscr{I}$). Амальгаму A^* будем называть *сокращенной* амальгамой данной амальгамы A, если A^* содержит:

1) все L- и M-элементы амальгамы A,

2) все элементы, входящие только в одну из полугрупп A_ξ ($\xi \in \mathscr{I}$),

3) все T-элементы, которые в особой р. е. и. подполугруппе $K_{\alpha\beta}$ в A_α принадлежат $(T \setminus T^*)$-компоненте ($\alpha, \beta \in \mathscr{I}$),

(при этом действия для этих элементов сохраняются),

4) по одному новому элементу, который является общим нулем для всех A_ξ ($\xi \in Q_j$) для каждого ϱ_T-класса Q_j.

Очевидно, что сокращенная амальгама действительно является амальгамой. Из теоремы 2, леммы 5 и из теоремы 1.4 в [2] следует:

Теорема 4. *Сокращенная амальгама является гомоморфным образом исходной амальгамы. Если слабо ассоциативная амальгама удовлетворяет условиям теоремы 3 в* [6], *то и ее сокращенная амальгама также удовлетворяет этим условиям.*

Рассмотрим теперь амальгамы, в которых каждая полугруппа может содержать не более одного T-элемента. Легко показать, что эти амальгамы совпадают с такими сокращенными амальгамами, в которых ни одно пересечение $K_{\alpha\beta}$ не является особой р. е. и. подполугруппой ни в A_α, ни в A_β.

Приведем две теоремы, которые вытекают из вышеуказанной части работы.

Теорема 5. *Пусть A — слабо ассоциативная амальгама полугрупп $A_\xi (\xi \in \mathcal{I})$, независимо вложимая в некоторую полугруппу, и которая в пересечениях полугрупп $A_\xi (\xi \in \mathcal{I})$ содержит только M- и L-элементы. Тогда для произвольной полугруппы A_α $(\alpha \in \mathcal{I})$ имеет место одно из следующих утверждений:*

1) A_α не содержит M-элементов (т. е. $M_\alpha = \emptyset$). (Описание построения полугруппы A_α следует из теоремы 3)

2) A_α содержит M-элементы, которые все входят в $K_{\alpha\beta} = A_\alpha \cap A_\beta$ (т. е. $\alpha, \beta \in R_k$, $|R_k| = 2$) (Описание построения полугрупп A_α, A_β см. в пункте 1 теоремы 1. Непустые пересечения $K_{\alpha\xi}$, $K_{\beta\xi}$ $(\xi \in \mathcal{I}, \xi \neq \alpha, \beta)$ содержат только L-элементы (см. теорему 3)).

3) $\alpha \in R_k$, для которого $|R_k| \geqq 3$. $A_\alpha \setminus L_\alpha$ (допускается и $L_\alpha = \emptyset$) является полугруппой правых (или левых) нулей, и имеет место $la = al = a$ при всех $a \in A_\alpha \setminus L_\alpha$, $l \in L_\alpha$. Каждое пересечение $K_{\alpha\xi} (\xi \in \mathcal{I})$ имеет вид: или $K_{\alpha\xi} = a_\xi \cup L_\alpha$ (где $a_\xi \in A_\alpha \setminus L_\alpha$) и в этом случае $A_\xi \setminus L_\alpha$ является полугруппой левых (соответственно правых) нулей, или $K_{\alpha\xi} = L_\xi$, где $L_\xi \subseteqq L_\alpha$.

Теорема 6. *Пусть A — слабо ассоциативная амальгама полугрупп A_ξ $(\xi \in \mathcal{I})$, независимо вложимая в некоторую полугруппу, каждая полугруппа A_ξ которой содержит не более одного T-элемента. Тогда для произвольной полугруппы A_α $(\alpha \in \mathcal{I})$ имеет место одно из следующих утверждений:*

1) Подмножество $\bigcup\limits_{\xi \in \mathcal{I} - \langle\alpha\rangle} K_{\alpha\xi}$ полугруппы A_α может содержать

а) только L-элементы,

б) один T-элемент и L-элементы,

в) M- и L-элементы.

(Описание см. в теоремах 3,5.)

2) $\alpha \in R_k$ где $|R_k| = 2$, $R_k = \langle \alpha, \beta \rangle$; A_α, A_β содержит один T-элемент: 0. Описание построений полугрупп A_α, A_β см. в теореме 1 в пункте 2. (Непустые пересечения $K_{\alpha\xi}$, $K_{\beta\xi}$ $(\xi \in \mathcal{I}, \xi \neq \alpha, \beta)$ содержат 0 и L-элементы (см. теорему 3).)

3) $\alpha \in R_k$, где $|R_k| \geqq 3$. В A_α находится T-элемент 0, который является нулем. A_α содержит одну M-компоненту $M_{\alpha\beta}$, $(M_{\beta\alpha})$ $(\beta \in R_k)$, которая является полугруппой левых (правых) нулей. Имеет место $xx_1 = 0$, $lx = xl = x$, $xy = 0$, $yx = x$, $yl = y$, $L_\alpha M_{\alpha\beta} \subseteqq M_{\alpha\beta}$ при всех $x, x_1 \in F_{\alpha\beta} = A_\alpha \setminus K_{\alpha\beta}$, $y \in M_{\alpha\beta}$, $l \in L_\alpha$, (или соответственно $xx_1 = 0$, $lx = xl = x$, $yx = 0$, $xy = x$, $ly = y$, $M_{\beta\alpha} L_\alpha \subseteqq M_{\beta\alpha}$ при всех $x, x_1 \in F_{\alpha\beta}$, $y \in M_{\beta\alpha}$, $l \in L_\alpha$). (Допускается и $L_\alpha = \emptyset$.)

$K_{\alpha\beta} \doteq L_\alpha \cup M_{\alpha\beta} \cup 0$ (или соответственно $K_{\alpha\beta} = L_\alpha \cup M_{\beta\alpha} \cup 0$) и A_β — такая полугруппа, построение которой описано в пункте 4.

Другие пересечения: $K_{\alpha\xi} \doteq L_\alpha \cup 0$, если $\xi \in R_k$; и $K_{\alpha\xi} \subseteq L_\alpha \cup 0$ если $\xi \in \mathscr{I}$, $\xi \bar{\in} R_k$.

4) *$\alpha \in R_k$, где $|R_k| \geqq 3$, В A_α находится T-элемент 0, который является нулем. Существует разбиение множества $D_\alpha = U_\alpha^{(l)} \cup V_\alpha^{(l)}$ где $D_\alpha = A_\alpha \setminus (L_\alpha \cup 0)$ такое, что $M_\alpha \subseteq U_\alpha^{(l)}$ и $ux = x$, $lx = x$, $vx = 0$, $yl = y$ при всех $u \in U_\alpha^{(l)}$, $v \in V_\alpha^{(l)}$, $x \in D_\alpha$, $l \in L_\alpha$, $y \in V_\alpha^{(l)} \cup (U_\alpha^{(l)} \setminus M_\alpha)$ (или разбиение $D_\alpha = U_\alpha^{(r)} \cup V_\alpha^{(r)}$ такое, что $M_\alpha \subseteq U_\alpha^{(r)}$, $xu = x$, $xl = x$, $xv = 0$, $ly = y$ при всех $u \in U_\alpha^{(r)}$, $v \in V_\alpha^{(r)}$, $x \in D_\alpha$, $l \in L_\alpha$, $y \in V_\alpha^{(r)} \cup (U_\alpha^{(r)} \setminus M_\alpha)$).*

Если $\beta \in R_k$, то либо

а) *$K_{\alpha\beta} = L_\alpha \cup M_{\alpha\beta} \cup 0$ (или соответственно $K_{\alpha\beta} = L_\alpha \cup M_{\alpha\beta} \cup 0$) имеет место включение $M_{\alpha\beta} L_\alpha \subseteq M_{\alpha\beta}$ ($L_\alpha M_{\beta\alpha} \subseteq M_{\beta\alpha}$) и если $M_{\alpha\beta}$ ($M_{\beta\alpha}$) состоит не только из одного элемента, то A_β — такая полугруппа, построение которой описано в пункте 3, либо*

б) *$K_{\alpha\beta} \doteq L_\alpha \cup 0$.*

Если $\xi \in \mathscr{I}$, $\xi \bar{\in} R_k$, то $K_{\alpha\xi} \subseteq L_\alpha \cup 0$.

Замечание 1. Во всех случаях для L-элементов некоторого пересечения $K_{\alpha\beta}$ нужно иметь в виду теорему 3, дающую соответствующие построения.

Замечание 2. Теоремы 1, 3, 5, 6 дают метод, позволяющий строить амальгамы удовлетворяющие условиям теоремы 3 в [6] в многочисленных случаях.

Литература

[1] А. М. Кауфман, Последовательно уничтожающиеся суммы ассоциативных систем, *Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена*, **88** (1949), 145—165.

[2] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, Мир (Москва, 1972).

[3] Е. С. Ляпин, Единично идеальные подполугруппы полугрупп, *Матем. зап. Уральск. ун-та*, **7** (1970), 119—128.

[4] Л. Медеши, Расширение полугрупп при помощи разделяющейся единично идеальной подполугруппы, *Современная алгебра*, **2** (1974), 72—97.

[5] Л. Медеши, Две проблемы расширения полугрупп, *Современная алгебра*, **2** (1974), 98—108.

[6] Л. Медеши, О вложении полугрупп в полугруппу, в которой исходные полугруппы являются независимы, *Acta Sci. Math.*, **39** (1977), 329—340.

BOLYAI INTÉZET
ARADI VÉRTANÚK TERE 1
6720 SZEGED, HUNGARY