Acta Sci. Math., 39 (1977), 329—340

О вложении полугрупп в полугруппу, в которой исходные полугруппы являются независимыми

Л. МЕДЕШИ*

§ 1. Введение

Понятие независимости подполугрупп было введено Е. С. Ляпиным в работах [5], [7]. Это понятие является естественным перенесением в теорию полугрупп условия, которому в теории групп удовлетворяют компоненты свободного произведения групп. Однако в отличие от теории групп, независимые подполугруппы могут пересекаться по любой полугруппе. Настоящая работа посвящена изучению следующей проблемы: При каких условиях полугрупповая амальгама (определение см. ниже) вкладывается в полугруппу так, чтобы в этой полугруппе данные полугруппы, которые составляют амальгаму, являлись независимыми подполугруппами? Основная теорема работ [5], [7] Е. С. Ляпина (которая приведена ниже) решает эту проблему в случае амальгамы двух полугрупп. В настоящей работе упомянутая теорема Е. С. Ляпина обобщается на случай произвольной амальгамы.

В теории полугрупп амальгамы являются наиболее изученными частичными группоидами. Проблема о вложении амальгамы в полугруппу представляется слишком трудной и далекой от разрешимости. Для некоторых частных случаев она исследовалась Хауи в работах [2], [3], [4]. Результаты Хауи существенно отличны от результатов настоящей работы.

Работа [8], Е. С. Ляпина была посвящена независимым полугрупповым продолжениям частичных группоидов. Проблема, рассматриваемая в настоящей статье является частью проблемы независимых полугрупповых продолжений частичных группоидов. Следуя работам [6], [8] мы введем следующие определения.

Поступило 7. апреля 1977.

* L. MEGYESI

Определение. Пусть $\{A_\xi\}_{\xi\in\mathscr{I}}$ — некоторая совокупность полугрупп ($\mathscr{I}$ — некоторое множество индексов), причем никакая A_α не содержится в объединении остальных A_ξ $(\xi\in\mathscr{I}\setminus\langle\alpha\rangle)$ и пусть действия в полугруппах A_ξ $(\xi\in\mathscr{I})$ согласованы между собой, т. е. из $ab=c$ в полугруппе A_ϱ и $ab=c'$ в полугруппе A_σ $(a, b, c\in A_\varrho;\ a, b, c'\in A_\sigma)$ всегда следует $c=c'$. Обозначим через A объединение множеств A_ξ $(\xi\in\mathscr{I})$ и определим в A частичное действие следующим образом: $ab=c$ $(a, b, c\in A)$ имеет место тогда и только тогда, если существует такой элемент $\eta\in\mathscr{I}$, что $a, b, c\in A_\eta$ и в полугруппе A_η $ab=c$. Определенный на множестве A частичный группоид называется *амальгамой* полугрупп $\{A_\xi\}_{\xi\in\mathscr{I}}$.

Определение. Будем говорить, что частичное действие в частичном группоиде C *слабо ассоциативно*, если из того, что xy, yz, $(xy)z$, $x(yz)$ $(x, y, z\in C)$ в группоиде C определены, следует $(xy)z=x(yz)$.

Определение. Непустое подмножество K полугруппы A называется *разделяющейся единично идеальной* (сокращенно *р. е. и.*) *подполугруппой*, если

а) $K=L\cup M^l\cup M^r\cup T$, где $L=\langle x|\ x\in K$ и $bx=xb=b$ при $b\in A\setminus K\rangle$, $M^l=\langle x|\ x\in K$ и $xb=b$, $bx\in K$ при $b\in A\setminus K\rangle$, $M^r=\langle x|\ x\in K$ и $bx=b$, $xb\in K$ при $b\in A\setminus K\rangle$, $T=\langle x|\ x\in K$ и bx, $xb\in K$ при $b\in A\setminus K\rangle$.

б) подполугруппа K является связкой подполугрупп со следующей таблицей умножения:

(*)

	L	M^l	M^r	T
L	L	M^l	M^r	T
M^l	M^l	M^l	T	T
M^r	M^r	T	M^r	T
T	T	T	T	T

Эту связку будем называть *$*$-связкой*, и подполугруппы L, M^l, M^r, T — *L-, M^l-, M^r-, T-компонентамы* подполугруппы K в A.

Теорема 1. (Е. С. Ляпин [7]) *Пусть A есть слабо ассоциативная амальгама двух полугрупп A_α и A_β. Для того, чтобы существовала такая полугруппа B, которая содержит амальгаму A и в которой A_α и A_β являются независимыми подполугруппами, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

А) *$K_{\alpha\beta}=A_\alpha\cap A_\beta$ пусто, или является р. е. и. подполугруппой и для A_α и для A_β.*

Б) *Для всяких $y_\alpha\in F_{\alpha\beta}=A_\alpha\setminus K_{\alpha\beta}$, $y_\beta\in F_{\beta\alpha}=A_\beta\setminus K_{\alpha\beta}$, $x\in K_{\alpha\beta}$ из $y_\alpha x=y_\alpha$ следует $xy_\beta=y_\beta$, из $xy_\alpha=y_\alpha$ следует $y_\beta x=y_\beta$ и наоборот.*

Замечание. Из определения р. е. и. подполугрупп вытекает, что в предыдущей теореме можно заменить условие Б) следующим:

Б') L- и T-компоненты р. е. и. подполугруппы $K_{\alpha\beta}$ в A_α и в A_β совпадают, а M^l-компонента р. е. и. подполугруппы $K_{\alpha\beta}$ в A_α равняется M^r-компоненте в A_β и аналогично M^r-компонента в A_α равняется M^r-компоненте в A_β.

§ 2. Амальгама полугрупп, каждая пара которых удовлетворяет условиям теоремы Е. С. Ляпина

В этом параграфе рассматривается такая амальгама A полугрупп A_ξ ($\xi \in \mathscr{I}$) ($\mathscr{I}$ — некоторое множество индексов), что каждая пара A_α, A_β ($\alpha, \beta \in \mathscr{I}$) удовлетворяет условиям А), Б), (или А), Б')) теоремы Е. С. Ляпина. Отметим, что в этом параграфе не требуется слабой ассоциативности.

Обозначения. Пусть $C_\alpha = \bigcup_{\xi \in \mathscr{I} \setminus \langle\alpha\rangle} K_{\alpha\xi}$; $B_\alpha = A_\alpha \setminus C_\alpha$. По определению амальгамы $B_\alpha \neq \emptyset$, для каждого $\alpha \in \mathscr{I}$ Обозначим через $\bar{w}$ для каждого элемента $w \in A$ множество всех индексов полугрупп, которые содержат w. Пусть $H = \bigcup_{\xi \in \mathscr{I}} C_\xi$ т. е. множество всех элементов, которые содержатся не только в одной из A_ξ ($\xi \in \mathscr{I}$).

Определения. Назовем элемент $x \in H$ *L-элементом*, если для каждого $\alpha \in \bar{x}$ имеет место $xb = bx = b$ для всяких $b \in B_\alpha$. Элемент t называется *T-элементом*, если для каждых $\alpha, \beta \in \bar{t}$ имеет место tb, $bt \in K_{\alpha\beta}$ для всяких $b \in B_\beta \cup B_\beta$. Элемент u называется *M-элементом*, если $\bar{u}$ состоит только из двух индексов: α, β и либо

а) $ub_\alpha = b_\alpha$, $b_\alpha u \in K_{\alpha\beta}$, $b_\beta u = b_\beta$, $ub_\beta \in K_{\alpha\beta}$ для всякого $b_\alpha \in B_\alpha$, $b_\beta \in B_\beta$; либо
б) $b_\alpha u = b_\alpha$, $ub_\alpha \in K_{\alpha\beta}$, $ub_\beta = b_\beta$, $b_\beta u \in K_{\alpha\beta}$ для всякого $b_\alpha \in B_\alpha$, $b_\beta \in B_\beta$.

Для M-элемента u обозначим через $\hat{u}$ множество $\bar{u}$, упорядоченное следующим образом: $\hat{u} = (\alpha, \beta)$, если для u имеет место случай а) и $\hat{u} = (\beta, \alpha)$, если выполнено б).

Докажем несколько свойств, которые покажут как устроена амальгама A.

Свойство α. *Множество $H \subset A$ содержит только L-, M- и T-элементы.*

Доказательство. Достаточно доказать, что элемент $z \in K_{\alpha\beta}$ является или L-, или M-, или T-элементом. Возможны следующие случаи:

1. z — элемент L-компоненты р. е. и. подполугруппы $K_{\alpha\beta}$ в A_α. Тогда $zb = bz = b$ для каждого $b \in B_\alpha$. Пусть $\xi \in \bar{z}$. Из условия *Б)* следует, что $zb = bz = b$ для каждого $b \in B_\xi$. Значит z является L-элементом.

2. z — элемент T-компоненты р. е. и. подполугруппы $K_{\alpha\beta}$ в A_α. Тогда zb, $bz \in K_{\alpha\beta}$ для каждого $b \in B_\alpha$. Пусть $\xi \in \bar{z}$. Из условия *Б')* следует, что T-компоненты $K_{\alpha\xi}$ в A_α и в A_ξ совпадают. Очевидно, что z содержится в T-компоненте $K_{\alpha\xi}$ в A_α (как видели $zb \neq b$, $bz \neq b$ для всех $b \in B_\alpha$). Поэтому z содержится в T-компоненте $K_{\alpha\xi}$ и в A_ξ, т. е. zb, $bz \in K_{\alpha\xi}$ для всех $b \in B_\xi$. Значит z — T-элемент.

3. z — элемент M^l-компоненты р. е. и. подполугруппы $K_{\alpha\beta}$ в A_α. Для того, чтобы показать что z — M-элемент, достаточно доказать, что z содержится только в двух полугруппах из A_ξ ($\xi \in \mathscr{I}$), именно в A_α и в A_β. Предположим противное, пусть $z \in A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma \cap \ldots$. Так как z в A_α является элементом M^l-компоненты подполугруппы $K_{\alpha\beta}$, то имеет место $zb_\alpha = b_\alpha$, $b_\alpha z \in K_{\alpha\beta}$ для всех $b_\alpha \in B_\alpha$. Тогда по условию *Б') z* в A_β является элементом M^r-компоненты, т. е. $b_\beta z = b_\beta$, $zb_\beta \in K_{\alpha\beta}$ для всех $b_\beta \in B_\beta$. Отсюда и из условия Б') следует, что z — элемент M^r-компоненты полугруппы $K_{\alpha\gamma}$ в A_γ, т. е. $b_\gamma z = b_\gamma$, $zb_\gamma \in K_{\alpha\gamma}$ для всех $b_\gamma \in B_\gamma$ и одновременно z является элементом M^l-компоненты полугруппы $K_{\beta\gamma}$ в A_γ, т. е. $zb_\gamma = b_\gamma$, $b_\gamma z \in K_{\beta\gamma}$ для всех $b_\gamma \in B_\gamma$, что неверно. Аналочигно доказывается, что z является M-элементом, если он содержится в M^r-компоненте р. е. и. подполугруппы $K_{\alpha\beta}$ в A_α. На основе предыдущего рассуждения легко видеть:

Следствие. Каждый L-элемент является элементом L-компоненты во всех пересечениях $K_{\alpha\beta}$, которые содержат его, каждый T-элемент является элементом T-компоненты во всех пересечениях $K_{\alpha\beta}$, которые содержат его и каждый M-элемент является элементом M^l- или M^r-компоненты р. е. и. подполугруппы $K_{\alpha\beta}$, которая содержит его. В этом параграфе это утверждение многократно используется без дополнительных ссылок на него.

Свойство β. *Пусть x_1, x_2 L-элементы и $\bar{x}_1 \cap \bar{x}_2 \neq \emptyset$. Тогда или $\bar{x}_1 \subseteqq \bar{x}_2$ или $\bar{x}_2 \subseteqq \bar{x}_1$. Если $\bar{x}_1 \subset \bar{x}_2$ (но $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$), то $x_1 x_2 = x_2 x_1 = x_1$. Если $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, то $x_1 x_2$, $x_2 x_1$ L-элементы и $\overline{x_1 x_2} \supseteqq \bar{x}_1 = \bar{x}_2$; $\overline{x_2 x_1} \supseteqq \bar{x}_1 = \bar{x}_2$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \bar{x}_1 \cap \bar{x}_2$. Если бы существовали $\beta \in \bar{x}_1$, $\beta \bar{\in} \bar{x}_2$ и $\gamma \bar{\in} \bar{x}_1$, $\gamma \in \bar{x}_2$, то $x_1 \in K_{\alpha\beta}$, $x_2 \in F_{\alpha\beta}$ и поэтому $x_1 x_2 = x_2 x_1 = x_2$ и аналогично $x_2 \in K_{\alpha\gamma}$, $x_1 \in F_{\alpha\gamma}$, $x_1 x_2 = x_2 x_1 = x_1$, имеем $x_1 = x_2$. Получили противоречие. Пусть $\bar{x}_1 \subset \bar{x}_2$ (но $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$) и пусть $\gamma \bar{\in} \bar{x}_1$, $\gamma \in \bar{x}_2$. Тогда $x_2 \in K_{\alpha\gamma}$ и $x_1 \in F_{\alpha\gamma}$ поэтому $x_1 x_2 = x_2 x_1 = x_1$.

Пусть теперь $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Так как x_1 и x_2 — элементы L-компоненты полугруппы $K_{\alpha\beta}$ для любых двух $\alpha, \beta \in \bar{x}_1 = \bar{x}_2$, то согласно свойствам $*$-связки производения $x_1 x_2$, $x_2 x_1$ также являются элементами L-компоненты $K_{\alpha\beta}$ (для любых двух $\alpha, \beta \in \bar{x}_1 = \bar{x}_2$). Значит $x_1 x_2$, $x_2 x_1$ L-элементы и $\overline{x_1 x_2} \supseteqq \bar{x}_1 = \bar{x}_2$, $\overline{x_2 x_1} \supseteqq \bar{x}_1 = \bar{x}_2$.

Свойство γ. *Если u, v такие M-элементы, для которых $\bar{u} \cap \bar{v} \neq \emptyset$ но $\bar{u} \neq \bar{v}$, то у $\hat{u}$, $\hat{v}$ или первые или вторые члены совпадают.*

Доказательство. Пусть u, v $(u \neq v)$ M-элементы и пусть $\alpha \in \bar{u} \cap \bar{v}$ и $\bar{u} \neq \bar{v}$. Достаточно доказать, что случай $\hat{u}=(\alpha, \beta)$ $\hat{v}=(\gamma, \alpha)$ $(\beta \neq \gamma)$ не может иметь места. (Случай $\hat{u}=(\beta, \alpha)$ $\hat{v}=(\alpha, \gamma)$ доказывается аналогичным образом.) Действительно, если бы $\hat{u}=(\alpha, \beta)$, $\hat{v}=(\gamma, \alpha)$, то в полугруппе A_α элемент u является элементом M^l-компоненты полугруппы $K_{\alpha\beta}$ и $v \in F_{\alpha\beta}$ поэтому $uv=v$, аналогично в A_α v является элементом M^r-компоненты $K_{\alpha\gamma}$, $u \in F_{\alpha\gamma}$, поэтому $uv=u$. Следовательно $u=v$, что неверно.

Свойство δ. *Пусть u — M-элемент и x — L-элемент. Если $\bar{x} \cap \bar{u} \neq \emptyset$, то $\bar{u} \subseteqq \bar{x}$. Если $\bar{u} \subset \bar{x}$ (но $\bar{u} \neq \bar{x}$), то $xu=ux=u$. Если $\bar{u}=\bar{x}$, то ux, xu M-элементы и $\widehat{xu}=\widehat{ux}=\hat{u}$.*

Доказательство. Пусть u — M-элемент, x — L-элемент. Предположим противное первому утверждению. Пусть $\alpha \in \bar{x}$, $\beta \bar{\in} \bar{x}$. Так как u — элемент M^l-компоненты полугруппы $K_{\alpha\beta}$ в полугруппе A_α и $x \in F_{\alpha\beta}$ поэтому $ux=x$. $\bar{x}$ состоит по крайней мере из двух индексов, т. е. существует $\gamma \in \bar{x}$. Тогда $x \in K_{\alpha\gamma}$, $u \in F_{\alpha\gamma}$ (и следовательно $ux=u$). Отсюда $u=x$. Получили противоречие.

Пусть теперь $\bar{u} \subset \bar{x}$ (но $\bar{u} \neq \bar{x}$). Существует индекс γ такой, что $\gamma \in \bar{x}$, $\gamma \bar{\in} \bar{u}$. Пусть $\alpha \in \bar{u} \subset \bar{x}$. Элемент x содержится в L-компоненте полугруппы $K_{\alpha\beta}$ и $u \in F_{\alpha\gamma}$, поэтому $xu=ux=u$.

Пусть наконец, $\bar{u}=\bar{x}=\langle\alpha, \beta\rangle$. Тогда x, u являются элементами $K_{\alpha\beta}$. Из свойств $*$-связки следует, что произведения ux, xu являются M-элементами, и $\widehat{xu}=\widehat{ux}=\hat{u}$.

Свойство ε. *Пусть u, v — M-элементы. Если $\hat{u}=\hat{v}$, то uv, vu — M-элементы и $\widehat{uv}=\widehat{vu}=\hat{u}=\hat{v}$. Если $\bar{u}=\bar{v}$ (но $\hat{u} \neq \hat{v}$), то uv, vu T-элементы и $\overline{uv} \supseteqq \bar{u}=\bar{v}$, $\overline{vu} \supseteqq \bar{u}=\bar{v}$. Если $\bar{u} \cap \bar{v} \neq \emptyset$, $\bar{u} \neq \bar{v}$ и у $\hat{u}$, $\hat{v}$ первые члены совпадают, то $uv=v$, $vu=u$, если — вторые, то $uv=u$, $vu=v$.*

Доказательство. Если $\hat{u}=\hat{v}$, или если $\bar{u}=\bar{v}$ но $\hat{u} \neq \hat{v}$, то элементы u, v содержатся в одной и той же самой полугруппе $K_{\alpha\beta}$ и утверждение о том, что амальгама A обладает свойством ε непосредственно следует из свойств $*$-связки.

Пусть теперь u, v такие M-элементы, для которых $\hat{u}=(\alpha, \beta)$ $\hat{v}=(\alpha, \gamma)$ $(\beta \neq \gamma)$. Тогда u и v содержатся в M^l-компоненте для полугруппы $K_{\alpha\beta}$ и $K_{\alpha\gamma}$ соотвтственно, и так как $u \in F_{\alpha\gamma}$, $v \in F_{\alpha\beta}$ то $uv=v$, $vu=u$.

(Доказательство аналогично в случае $\hat{u}=(\beta, \alpha)$ $\hat{v}=(\gamma, \alpha)$ $(\beta \neq \gamma)$.)

Свойство ζ. *Пусть x — L-элемент и t — T-элемент. Если $\bar{x} \cap \bar{t} \neq \emptyset$ и $\bar{x} \nsubseteq \bar{t}$, то $xt=tx=t$. Если $\bar{x} \subseteqq \bar{t}$, то xt, tx — T-элементы и $\overline{xt} \supseteqq \bar{t}$, $\overline{tx} \supseteqq \bar{t}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \bar{x} \cap \bar{t}$ и $\beta \in \bar{x}$, $\beta \bar{\in} \bar{t}$. Тогда x содержится в L-компоненте полугруппы $K_{\alpha\beta}$ и $t \in F_{\alpha\beta}$ следовательно $xt=tx=t$. Пусть теперь

$\bar{x} \subseteqq \bar{t}$. В случае любых двух $\alpha, \beta \in \bar{x}$ имеем $x, t \in K_{\alpha\beta}$, и из свойств $*$-связки следует, что xt, tx являются T-элементами. Одновременно получается, что $\overline{xt}$, $\overline{tx} \supseteqq \bar{x}$. Если существует $\gamma \in \bar{t}$, $\gamma \bar{\in} \bar{x}$ то так как t содержится в T-компоненте $K_{\alpha\gamma}$ и $x \in F_{\alpha\gamma}$, имеем xt, $tx \in K_{\alpha\gamma}$, причем xt, tx содержатся в T-компоненте, так как они — T-элементы. Значит $\overline{xt} \supseteqq \bar{t}$, $\overline{tx} \supseteqq \bar{t}$.

Свойство η. *Пусть u — M-элемент и t — T-элемент. Пусть $\hat{u}=(\alpha, \beta)$. Если $\alpha \in \bar{t}$, $\beta \bar{\in} \bar{t}$, то $ut=t$ и tu является T-элементом, для которого $\overline{tu} \supseteqq \bar{t} \cup \bar{u}$. Аналогично: если $\alpha \bar{\in} \bar{t}$, $\beta \in \bar{t}$, то $tu=t$ и ut — T-элемент, для которого $\overline{ut} \supseteqq \bar{t} \cup \bar{u}$. Если $\bar{u} \subseteqq \bar{t}$, то tu, ut являются T-элементами, для которых $\overline{tu} \supseteqq \bar{t}$, $\overline{ut} \supseteqq \bar{t}$.*

Доказательство. Пусть $\hat{u}=(\alpha, \beta)$ и $\alpha \in \bar{t}$, $\beta \bar{\in} \bar{t}$. Тогда u содержится в M^l-компоненте полугруппы $K_{\alpha\beta}$ в A_α и $t \in F_{\alpha\beta}$. Таким образом $ut=t$ и $\overline{tu} \supseteqq \bar{u}$. Для каждого $\gamma \in \bar{t}$, $\gamma \bar{\in} \bar{u}$ имеет место, что $tu \in K_{\alpha\gamma}$. Следовательно $\overline{tu} \supseteqq \bar{t}$. Получается: $\overline{tu} \supseteqq \bar{t} \cup \bar{u}$. Отсюда следует, что tu содержится в не меньше чем трех полугруппах из A_ξ $(\xi \in \mathscr{I})$. Поэтому tu не является M-элементом. Очевидно, что tu может быть только T-элементом.

Второе утверждение доказывается аналогично. Пусть теперь $\bar{u} \subseteqq \bar{t}$, $\bar{u}=\langle\alpha, \beta\rangle$. Полугруппа $K_{\alpha\beta}$ — $*$-связка, $u, t \in K_{\alpha\beta}$. Из свойств $*$-связки следует, что ut, tu — T-элементы и $\overline{ut}$, $\overline{tu} \supseteqq \bar{t}$. Утверждение, что $\overline{ut}$, $\overline{tu} \supseteqq \bar{t}$ вытекает из того, что t содержится в T-компоненте всякой полугруппы $K_{\alpha\gamma}$, где $\gamma \in \bar{t}$, $\gamma \bar{\in} \bar{u}$.

Свойство ϑ. *Пусть t_1, t_2 — T-элементы. Если $\bar{t}_1 \cap \bar{t}_2 \neq \emptyset$, то $t_1 t_2$ и $t_2 t_1$ — T-элементы и $\bar{t}_1 \cup \bar{t}_2 \subseteqq \overline{t_1 t_2}$, $\bar{t}_1 \cup \bar{t}_2 \subseteqq \overline{t_2 t_1}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \bar{t}_1 \cap \bar{t}_2$. Если $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$, то утверждение следует из свойств $*$-связки. Пусть $\beta \in \bar{t}_1$, $\beta \bar{\in} \bar{t}_2$. Тогда $t_1 \in K_{\alpha\beta}$, $t_2 \in F_{\alpha\beta}$ и поэтому $t_1 t_2$, $t_2 t_1 \in K_{\alpha\beta}$. Продолжая этот процесс, получается $\overline{t_1 t_2} \supseteqq \bar{t}_1 \cup \bar{t}_2$, $\overline{t_2 t_1} \supseteqq \bar{t}_1 \cup \bar{t}_2$. Отсюда следует, что $t_1 t_2$ (аналогично $t_2 t_1$) только тогда содержится только в двух полугруппах из A_ξ $(\xi \in \mathscr{I})$, когда t_1 и t_2 содержатся только в этих полугруппах. В этом случае из свойств $*$-связки следует, что $t_1 t_2$ и $t_2 t_1$ являются T-элементами. Если $t_1 t_2$, аналогично $t_2 t_1$ содержится не меньше чем в трех полугруппах из A_ξ $(\xi \in \mathscr{I})$, то очевидно, что оно не является M-элементом, а может быть только T-элементом.

Теорема 2. *Пусть A — амальгама полугрупп A_ξ $(\xi \in \mathscr{I})$ ($\mathscr{I}$ — некоторое множество индексов). Амальгама A удовлетворяет условиям* А) *и* Б) *тогда и только тогда, когда она обладает свойствами $\alpha - \vartheta$.*

Доказательство. Выше уже было доказано, что если амальгама удовлетворяет условиям А) и Б) то свойства $\alpha - \vartheta$ выполнены.

Предположим теперь, что для A имеют место $\alpha - \vartheta$. Пусть $K_{\alpha\beta} = A_\alpha \cap A_\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathscr{I})$. Чтобы доказать А) достаточно показать, что $K_{\alpha\beta}$ — р. е. и. подполугруппа в A_α. Тот факт, что $K_{\alpha\beta}$ — полугруппа, следует из определения амальгамы (это также легко видеть из свойств $\alpha-\vartheta$).

Будем доказывать, что L-элементы, которые содержатся в $K_{\alpha\beta}$ образуют L-компоненту в $K_{\alpha\beta}$, M-элементы u, для которых $\hat{u}=(\alpha, \beta)$ M^l-компоненту, элементы u, для которых $\hat{u}=(\beta, \alpha)$ образуют M^r-компоненту и T-элементы, содержащиеся в $K_{\alpha\beta}$ T-компоненту полугруппу $K_{\alpha\beta}$. Из этих фактов следует $A)$.

1. Пусть x — L-элемент в $K_{\alpha\beta}$. Докажем, что

$$xy = yx = y \tag{1}$$

для каждого $y \in F_{\alpha\beta}$. Если $y \in L_\alpha$, то (1) следует из определения L-элемента. Пусть $y \in C_\alpha \setminus K_{\alpha\beta}$. Очевидно, что $\bar{x} \subsetneqq \bar{y}$. Если y — L-элемент, то из свойства β получается, что $\overline{xy} \subseteqq \bar{x}$, но очевидно $\bar{x} \neq \bar{y}$, таким образом из β следует и (1). Рассмотрим случай, когда y — M-элемент. Из δ следует, что $\bar{y} \subseteqq \bar{x}$, но $\bar{x} \neq \bar{y}$ и снова используя δ получаем, что выполняется (1). Пусть y — T-элемент. Так как $\bar{x} \subsetneqq \bar{y}$ из ζ вытекает (1).

2. Пусть u — M-элемент в $K_{\alpha\beta}$, для которого $\hat{u}=(\alpha, \beta)$. Будем доказывать что

$$uy = y \quad yu \in K_{\alpha\beta} \tag{2}$$

для каждого $y \in F_{\alpha\beta}$. Если $y \in B_\alpha$, то (2) следует из определения M-элемента. Пусть $y \in C_\alpha \setminus K_{\alpha\beta}$. Согласно свойству δ все L-элементы из C_α, если они существуют, содержатся в $K_{\alpha\beta}$. Далее $\bar{u} \neq \bar{y}$ и из δ следует (2).

Предположим, что y — M-элемент. Свойство γ показывает, что в упорядоченных парах $\hat{u}$ и $\hat{y}$ первые члены совпадают (они равняются α). Из ε следует $uy=y$, $yu=u$ т. е. выполняется (2). Пусть y — T-элемент. Свойство η показывает, что (2) имеет место.

Доказательство аналогично, если u такой M-элемент, для которого $\hat{u}=(\beta, \alpha)$.

3. Пусть t — T-элемент в $K_{\alpha\beta}$. Будем доказывать, что

$$ty, yt \in K_{\alpha\beta} \tag{3}$$

для всех $y \in F_{\alpha\beta}$. Если $y \in B_\alpha$, то это утверждение следует из определения T-элемента. Пусть $y \in C_\alpha \setminus K_{\alpha\beta}$. Если y — L-элемент, то согласно ζ или $\bar{x} \subsetneqq \bar{t}$ и $yt=ty=t$ или $\bar{x} \subseteqq \bar{t}$ и тогда $\overline{xt} \supseteqq \bar{t}$, $\overline{tx} \supseteqq \bar{t}$ откуда получаем (3). Рассмотрим случай, когда y — M-элемент, и $\hat{y}=(\alpha, \gamma)$ $(\gamma \neq \beta)$. Если $\gamma \bar{\in} \bar{t}$, то из свойства η следует, что $yt=t$ и ty — T-элемент, для которого $\overline{ty} \supseteqq \bar{t} \cup \bar{y}$, т. е. $ty \in K_{\alpha\beta}$. Если $\gamma \in \bar{t}$ то из η также вытекает выполнение (3), так как $\overline{ty} \supseteqq \bar{t}$, $\overline{yt} \supseteqq \bar{t}$. Аналогично рассматривается случай, когда y такой M-элемент, для которого $\hat{y}=(\gamma, \alpha)$ $(\gamma \neq \beta)$.

Пусть y — T-элемент в $C_\alpha \setminus K_{\alpha\beta}$. Из свойства ϑ следует, что $\overline{yt} \supseteqq \bar{t} \cup \bar{y}$, $\overline{ty} \supseteqq \bar{t} \cup \bar{y}$, т. е. ty, $yt \in K_{\alpha\beta}$.

Теперь докажем выполнение условия *Б)*.

Пусть $x \in K_{\alpha\beta}$, $y_\alpha \in F_{\alpha\beta}$, $y_\beta \in F_{\beta\alpha}$. Если $y_\alpha x = y_\alpha$, то x содержится в L-компоненте $K_{\alpha\beta}$ или в M^r-компоненте $K_{\alpha\beta}$ в A_α. В первом случае x — L-элемент, который по предыдущему доказательству находится в L-компоненте $K_{\alpha\beta}$ и в A_β, т. е. $xy_\beta = y_\beta$. Во втором случае x — M-элемент, для которого $\hat{x} = (\beta, \alpha)$ и по предыдущему доказательству он содержится в M^l-компоненте $K_{\alpha\beta}$ в A_β поэтому $xy_\beta = y_\beta$. Дальнейшие случаи *Б)* доказываются аналогично.

Теорема доказана.

Замечание. По теореме 2 имеем, что условия А), Б) и набор сложных свойств $\alpha - \vartheta$ эквивалентны. Заметим, что свойствами $\alpha - \vartheta$ бывает удобно пользоваться, что покажет доказательство теоремы следующего параграфа. Кроме того с помощью их можно сделать вывод о строении амальгамы.

§ 3. Обобщение теоремы Е. С. Ляпина

Теорема 3. *Пусть A — амальгама полугрупп $\{A_\xi\}_{\xi \in \mathscr{I}}$ ($\mathscr{I}$ — некоторое множество индексов). Амальгама A тогда и только тогда погружаема в надполугруппу B, так чтобы все полугруппы A_ξ ($\zeta \in \mathscr{I}$) являлись в B независимыми подполугруппами, когда каждая пара A_α, A_β ($\alpha, \beta \in \mathscr{I}$) может быть вложена в некоторую полугруппу таким образом, чтобы A_α, A_β в ней являлись независимыми подполугруппами.*

Эквивалентная форма теоремы 3. *Пусть A — слабо ассоциативная амальгама полугрупп $\{A_\xi\}_{\xi \in \mathscr{I}}$.*

Амальгама A тогда и только тогда погружаема в надполугруппу B так, чтобы все полугруппы A_ξ ($\xi \in \mathscr{I}$) являлись в B независимыми подполугруппами, когда A удовлетворяет условиям А), Б).

Замечание. Эквивалентность двух форм теоремы очевидна по упомянутой теореме Е. С. Ляпина.

Также очевидно, что выполнение слабой ассоциативности необходимо для того, чтобы амальгама была вложима в некоторую полугруппу.

1. Доказательство достаточности мы не приводим, ибо оно не отличается существенно от доказательства теоремы Е. С. Ляпина. Надо лишь провести некоторые очевидные изменения (например, такое: B состоит из последовательностей вида $u = (x_1, \ldots, x_n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) где каждый x_i является эле-

ментом хотя бы одной полугруппы из амальгамы, причем $\bar{x}_i \cap \bar{x}_{i+1} = \emptyset$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$).

2. Доказательство необходимости. Пусть дана полугруппа B, которая содержит систему подполугрупп $A' = \{A_\xi\}_{\xi \in \mathscr{I}}$, причем подполугруппы A_ξ являются в B независимыми. Используется теорема 2. Будем доказывать, что амальгама A полугрупп A_ξ $(\xi \in \mathscr{I})$ овладает свойствами $\alpha - \vartheta$. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $x, y, z \in A' \subseteqq B$. *Если* $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$, $\bar{y} \cap \bar{z} \neq \emptyset$, *то имеет место одно из следующих двух утверждений:*

$$\overline{xy} \cap \bar{z} = \emptyset, \quad \bar{x} \cap \overline{yz} = \emptyset \quad \text{и} \quad xy = x, \quad yz = z \tag{4}$$

$$\overline{xy} \cap \bar{z} \neq \emptyset, \quad \bar{x} \cap \overline{yz} \neq \emptyset. \tag{5}$$

Доказательство леммы. Если $\bar{x} \cap \bar{y} \cap \bar{z} \neq \emptyset$ то очевидно, что выполняется (5) так как x, y, z содержатся в одной полугруппе из A_ξ $(\xi \in \mathscr{I})$. Пусть $\bar{x} \cap \bar{y} \cap \bar{z} = \emptyset$. В полугруппе B имеет место следующее равенство $(xy)z = x(yz)$. По условию существуют $\alpha \in \bar{x} \cap \bar{y}$, $\beta \in \bar{y} \cap \bar{z}$, т. е. $x, y \in A_\alpha$, $y, z \in A_\beta$, таким образом $u = xy \in A_\alpha$; $v = yz \in A_\beta$. Если бы одно из слов uz, xv являлось приведенным относительно A' (определение понятия приведенного слова и соотношения в работе [7]) а другое нет, например, $\bar{u} \cap \bar{z} = \emptyset$ а $\gamma \in \bar{x} \cap \bar{v}$, т. е. $xv = s \in A_\gamma$, то приведенное соотношение $uz = s \in A_\gamma$ противоречило бы тому, что система подполугрупп A_ξ $(\xi \in \mathscr{I})$ в B независима. Получили, что или оба слова приведены относительно A' т. е. $\bar{u} \cap \bar{z} = \emptyset$, $\bar{x} \cap \bar{v} = \emptyset$ и приведенное соотношение $uz = xv$ тривиально $u = x$, $z = v$, значит имеет место (4), или ни одно из них не является приведенным, т. е. $\bar{u} \cap \bar{z} \neq \emptyset$, $\bar{x} \cap \bar{v} \neq \emptyset$ значит имеет место (5).

Перейдем к доказательству свойств $\alpha - \vartheta$. В этом доказательстве постоянно без дополнительных оговорок употребляются обозначения $b_\alpha \in B_\alpha$, $b_\beta \in B_\beta$, ... и т. д.

α) Пусть $y \in H$; $\alpha, \beta \in \bar{y}$ (т. е. $y \in K_{\alpha\beta}$). Воспользуемся леммой: первый случай $\overline{b_\alpha y} \cap \bar{b}_\beta = \emptyset$, $\bar{b}_\alpha \cap \overline{yb_\beta} = \emptyset$ и $b_\alpha y = b_\alpha$, $yb_\beta = b_\beta$. Тогда для каждого $\xi \in \bar{y}$ так как $\langle\alpha\rangle = \bar{b}_\alpha = \overline{b_\alpha y}$ и $\bar{b}_\xi = \langle\xi\rangle$ имеет место $\overline{b_\alpha y} \cap \bar{b}_\xi = \emptyset$ и по лемме $\bar{b}_\alpha \cap \overline{yb_\xi} = \emptyset$ $yb_\xi = b_\xi$. Аналогично доказывается, что из $yb_\alpha = b_\alpha$ следует, что $b_\xi y = b_\xi$, в случае всякого $\xi \in \bar{y}$.

Второй случай: $\overline{b_\alpha y} \cap \bar{b}_\beta \neq \emptyset$, $\bar{b}_\beta \cap \overline{yb_\beta} \neq \emptyset$, т. е. $yb_\beta \in K_{\alpha\beta}$. Тогда $\overline{b_\alpha y} \cap \bar{b}_\xi \neq \emptyset$ и $\bar{b}_\alpha \cap \overline{yb_\xi} \neq \emptyset$ (иначе имело бы место $b_\alpha y = b_\alpha$), т. е. $yb_\xi \in K_{\alpha\xi}$ для всех $\xi \in \bar{y}$, $b_\xi \in B_\xi$. Аналогично из $yb_\alpha \in K_{\alpha\beta}$ следует $b_\xi y \in K_{\alpha\xi}$ для всех $\xi \in \bar{y}$. Из этих рассуждений вытекают следующие:

1. Если $b_\alpha y = b_\alpha$, $yb_\alpha = b_\alpha$ то y является L-элементом.
2. Если $b_\alpha y \in K_{\alpha\beta}$, $yb_\alpha \in K_{\alpha\beta}$ то y является T-элементом.

3. Если $b_\alpha y \in K_{\alpha\beta}$, $yb_\alpha = b_\alpha$ и $\bar{y}$ состоит только из α, β то y является M-элементом, $\hat{y} = (\alpha, \beta)$.

4. Аналогично, если $b_\alpha y = b_\alpha$, $yb_\alpha \in K_{\alpha\beta}$, то y — M-элемент, $\hat{y} = (\beta, \alpha)$.

β) Пусть x_1, x_2 — L-элементы, $\alpha \in \bar{x}_1 \cap \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$. Если существовали бы $\beta \in \bar{x}_1$, $\beta \bar{\in} \bar{x}_2$, $\gamma \bar{\in} \bar{x}_1$, $\gamma \in \bar{x}_2$ то $b_\beta x_1 = b_\beta$, $\langle\beta\rangle = \bar{b}_\beta = \overline{b_\beta x_1}$, итак $\overline{b_\beta x_1} \cap \bar{x}_2 = \emptyset$, по лемме $\bar{b}_\beta \cap \overline{x_1 x_2} = \emptyset$ и $x_1 x_2 = x_2$. Аналогично, $x_2 b_\gamma = b_\gamma$, $\bar{x}_1 \cap \overline{x_2 b_\gamma} = \emptyset$, по лемме $x_1 x_2 = x_1$. Значит $x_1 = x_2$, что неверно. Показали, что или $\bar{x}_1 \subseteq \bar{x}_2$, или $\bar{x}_2 \subseteq \bar{x}_1$. Пусть $\bar{x}_1 \subset \bar{x}_2$ (но $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$) именно $\gamma \bar{\in} \bar{x}_1$, $\gamma \in \bar{x}_2$. Используя лемму для троек b_γ, x_2, x_1 и x_1, x_2, b_γ, получаем $x_1 x_2 = x_2 x_1 = x_1$. Пусть теперь $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Очевидно, что произведения $x_1 x_2$, $x_2 x_1$ являются L-элементами, и так как они содержатся во всех полугруппах, в которых содержатся и x_1, и x_2, то

$$\overline{x_1 x_2} \supseteq \bar{x}_1 = \bar{x}_2, \quad \overline{x_2 x_1} \supseteq \bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

γ) Пусть u, v $(u \neq v)$ — M-элементы. Предположим, что $\hat{u} = (\alpha, \beta)$, $\hat{v} = (\gamma, \alpha)$ $(\beta \neq \gamma)$. Используя лемму для элементов b_β, u, v получаем $uv = v$ и для элементов u, v, b_γ получаем $uv = u$. Следовательно $u = v$, что неверно.

δ) Пусть u — M-элемент, $\hat{u} = (\alpha, \beta)$ и x — L-элемент. Предположим, что $\alpha \in \bar{x}$, $\beta \bar{\in} \bar{x}$ и $\gamma \in \bar{x}$, $\gamma \neq \beta$. Используя лемму сначала для элементов b_β, u, x получаем $ux = x$, потом для u, x, b_γ получаем $ux = u$. Отсюда $u = x$, что неверно. Пусть теперь $\bar{u} \subset \bar{x}$ (но $\bar{u} \neq \bar{x}$), т. е. пусть $\gamma \in \bar{x}$, $\gamma \bar{\in} \bar{u}$. Из леммы для троек b_γ, x, u и u, x, b_γ следует $ux = xu = u$. Пусть наконец, $\bar{u} = \bar{x} = \langle\alpha, \beta\rangle$. Очевидно, что произведения xu, ux содержатся как в A_α, так и в A_β. Из определения M- и L-элементов следует, что xu, ux являются M-элементами и имеет место $\widehat{xu} = \widehat{ux} = \hat{u}$.

ε) Два первых утверждения свойства ε непосредственно следуют из определения M-элементов.

Рассмотрим третье. Пусть u, v — M-элементы, для которых $\hat{u} = (\alpha, \beta)$, $\hat{v} = (\alpha, \gamma)$ $\beta \neq \gamma$. Используем лемму для троек b_β, u, v и b_γ, v, u. Получается $uv = v$, $vu = u$. Доказательство аналогично в случае: $\hat{u} = (\beta, \alpha)$, $\hat{v} = (\gamma, \alpha)$ $(\beta \neq \gamma)$.

ζ) Пусть x — L-элемент, t — T-элемент. Предположим сначала, что $\alpha \in \bar{x} \cap \bar{t}$ и $\beta \in \bar{x}$, $\beta \bar{\in} \bar{t}$. Из леммы для троек b_β, x, t и t, x, b_β следует $xt = tx = t$. Пусть теперь $\bar{x} \subseteq \bar{t}$. Из определений L- и T-элементов следует, что произведения xt, tx являются T-элементами, и одновременно очевидно, что $\overline{xt}, \overline{tx} \supseteq \bar{x}$. Если существует $\gamma \in \bar{t}$, $\gamma \bar{\in} \bar{x}$, то используя лемму для троек b_γ, t, x и для x, t, b_γ получаем, что $\gamma \in \overline{xt}$, $\gamma \in \overline{tx}$, следовательно $\overline{xt} \supseteq \bar{t}$, $\overline{tx} \supseteq \bar{t}$.

η) Пусть u — M-элемент и t — T-элемент, и пусть $\hat{u} = (\alpha, \beta)$. Пусть сначала $\alpha \in \bar{t}$, $\beta \bar{\in} \bar{t}$. По лемме для элементов b_β, u, t имеем, что $ut = t$, а для элементов t, u, b_β, что $\overline{tu} \supseteq \bar{u}$. Применяя лемму для всех троек b_ξ, t, u где $\xi \in \bar{t}$, получаем $\overline{tu} \supseteq \bar{t}$. Значит $\overline{tu} \supseteq \bar{t} \cup \bar{u}$. tu содержится по крайней мере в трех полугруппах из A_ξ $(\xi \in \mathscr{I})$, очевидно, что он T-элемент.

Второе утверждение из $\eta)$ доказывается аналогично.

Пусть теперь $\bar{u} \subseteq \bar{t}$, $\bar{u} = \langle \alpha, \beta \rangle$

Из определения M- и T-элементов следует, что ut, tu — T-элементы. Очевидно, что $\overline{tu}, \overline{ut} \supseteq \bar{u}$. Если существует $\xi \in \bar{t}$, $\xi \bar{\in} \bar{u}$ то из леммы для троек b_ξ, t, u и u, t, b_ξ следует, что $\xi \in \overline{tu}, \overline{ut}$ следовательно $\bar{t} \subseteq \overline{tu}$, $\bar{t} \subseteq \overline{ut}$.

ϑ) Пусть t_1, t_2 — T-элементы $\alpha \in \bar{t}_1 \cap \bar{t}_2$. Очевидно, что $\overline{t_1 t_2} \supseteq \bar{t}_1 \cap \bar{t}_2$, $\overline{t_2 t_1} \supseteq \bar{t}_1 \cap \bar{t}_2$.

Пусть $\beta \in \bar{t}_1$, $\beta \bar{\in} \bar{t}_2$. Тогда применяя лемму для троек b_β, t_1, t_2 и t_2, t_1, b_β имеем $\beta \in \overline{t_1 t_2}$, $\beta \in \overline{t_2 t_1}$. Продолжая этот процесс получаем, что $\overline{t_1 t_2} \supseteq \bar{t}_1 \cup \bar{t}_2$, $\overline{t_2 t_1} \supseteq \bar{t}_1 \cup \bar{t}_2$. Если $\overline{t_1 t_2}$ или $\overline{t_1 t_2}$ состоит только из двух индексов α, β, т. е. $\langle \alpha, \beta \rangle = \bar{t}_1 = \bar{t}_2$, то из определения следует, что $t_1 t_2$, $t_2 t_1$ являются T-элементами. Если $t_1 t_2$ или $t_2 t_1$ содержатся по крайней мере в трех полугруппах из A_ξ $(\xi \in \mathscr{I})$, то, очевидно, что они — T-элементы.

Теорема доказана.

Замечание. 1. Из того, что система полугрупп $A' = \{A_\xi\}_{\xi \in \mathscr{I}}$ является в полугруппе B независимой не следует, что каждая пара A_α, A_β является независимой. Действительно, существуют слова, приведенные относительно $\langle A_\alpha, A_\beta \rangle$, но не являющиеся приведенными относительно A'. Например, слово xy, где $x \in F_{\alpha\beta}$, $y \in F_{\beta\alpha}$, приведено относительно $\langle A_\alpha, A_\beta \rangle$, но возможно, что оно неприведено относительно A', если есть такая A_γ $(\gamma \in \mathscr{I})$ которая содержит и x, и y.

2. Рассмотрим следующий частный случай. Пусть A слабо ассоциативная амальгама не меньше трех полугрупп A_ξ $(\xi \in \mathscr{I})$ удовлетворяющая А), Б), в которой пересечение каждой пары полугрупп одно и то же, т. е. $A_\alpha \cap A_\beta = K$ для всех $\alpha, \beta \in \mathscr{I}$, $\alpha \neq \beta$. Тогда K содержит только L- и T-элементы. Множество T-элементов в K и для всех A_ξ $(\xi \in \mathscr{I})$ образует идеал (см. [9] пункт I. 4).

Утвеждения, вытекающие из вышедоказанных теорем являются обобщениями результатов статьи А. Грилле, М. Петрича [1].

Литература

[1] P. A. Grillet, M. Petrich, Free products of semigroups amalgamating an ideal, *J. London Math. Soc.*, (2) **2** (1970), 389—392.

[2] J. M. Howie, Embedding theorems with amalgamation for semigroups, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **12** (1962), 511—534.

[3] J. M. Howie, Subsemigroups of amalgamated free products of semigroups, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **13** (1963), 672—686.

[4] J. M. Howie, Embedding theorem with amalgamation for cancellative semigroups, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **6** (1963), 19—26.

[5] Е. С. Ляпин, Независимость подполугрупп полугруппы, *ДАН СССР*, **185** (1969), 1229—1231.

[6] Е. С. Ляпин, Единично идеальные подполугруппы полугруппы, *Матем. записки Уральского ун-та*, **7** (1970), 119—128.

[7] Е. С. Ляпин, Пересечение независимых подполугрупп полугруппы, *Изв. ВУЗ-ов, Матем.*, **4** (1970), 67—73.

[8] Е. С. Ляпин, Независимые полугрупповые продолжения частичных группоидов, *Современная алгебра*, **2** (1974), 55—71.

[9] Л. Медеши, Расширение полугрупп при помощи разделяющейся единично идеальной подполугруппы, *Современная алгебра*, **2** (1974), 72—97.

BOLYAI INTÉZET
ARADI VÉRTANÚK TERE 1
H-6720 SZEGED