Acta Sci. Math., 39 (1977), 103—108

Über die Struktur der Hauptidealhalbgruppen. II

L. MEGYESI und G. POLLÁK

Dem Andenken von Prof. A. Kertész gewidmet

In diesem Teil möchten wir einen kleinen Umweg machen und die kommutativen Hauptidealhalbgruppen beschreiben. Diese Beschreibung wird — bis auf Abelsche Gruppen und ihre Homomorphismen — vollständig sein. Die Bezeichnungen werden mit denjenigen von [1] übereinstimmen.

In [1] haben wir gezeigt, dass in einer Hauptidealhalbgruppe H die Greensche Relation $\mathcal{J}$ eine Kongruenz ist, und nach Satz 4 derselben Arbeit ist $H/\mathcal{J}$ einer Halbgruppe $H_{\mathfrak{F}}$ isomorph, d.h. einer Kette von zyklischen Halbgruppen Z_σ ($\sigma<\vartheta$, ϑ eine Ordnungszahl $\geqq 1$) von endlicher oder unendlicher Ordnung n_σ, wobei $\mathfrak{F}$ die Folge $(n_0, \ldots, n_\sigma, \ldots)_{\sigma<\vartheta}$ bedeutet, und im Falle $n_\sigma<\infty$ die maximale Untergruppe von Z_σ trivial ist. Ist z_σ das Erzeugende von Z_σ, so bezeichne $I_{\sigma l}$ $(1\leqq l\leqq n_\sigma)$ das Urbild von z_σ^l bei dem Isomorphismus $\nu: H/\mathcal{J}\to H_{\mathfrak{F}}$. $I_{\sigma l}$ ist eine $\mathcal{J}$-Klasse. Bezeichnet $\prec$ die lexikographische Ordnung der Paare (σ, l), so gilt $\mathbf{I}_{\varrho k}\supset \mathbf{I}_{\sigma l}\Leftrightarrow(\varrho, k)\prec(\sigma, l)$.

Wir wollen jetzt ein Repräsentantensystem $c_{\sigma l}$ der Klassen $I_{\sigma l}$ auswählen, um dann die Elemente von H in der Form $c_{\sigma l}g$ anzugeben, wo g ein Element der Schützenbergergruppe $\Gamma_{\sigma l}$ von $I_{\sigma l}$ ist; in dieser Form wird die Multiplikation ziemlich einfach. Zu diesem Zweck wähle man $c_{\sigma 1}=c_\sigma$ ganz beliebig, falls $n_\sigma>1$; für $n_\sigma=1$ soll $c_{\sigma 1}$ etwa das einzige Idempotent in $I_{\sigma 1}$ sein. Aus $I_{\sigma l}$ $(1<l\leqq n_\sigma)$ wähle man $c_{\sigma l}=c_\sigma^l$.

Ist $(\varrho, k)\prec(\sigma, l)$, so sei $\varphi_{\varrho k}^{\sigma l}:\Gamma_{\varrho k}\to\Gamma_{\sigma l}$ der kanonische Homomorphismus zwischen den Schützenbergergruppen, der also dadurch definiert ist, dass die (partiellen) Translationen $g\in\Gamma_{\varrho k}$ und $g\varphi_{\varrho k}^{\sigma l}\in\Gamma_{\sigma l}$ durch dasselbe Element von H induziert werden können. Dann bilden die Gruppen $\Gamma_{\sigma l}$ und die Homomorphismen $\varphi_{\varrho k}^{\sigma l}$ ein direktes System $\Delta=\{\Gamma_{\varrho k};\varphi_{\varrho k}^{\sigma l}\}$ (wie übrigens immer für kommutative Halbgruppen), d.h. $\varphi_{\varrho k}^{\sigma l}\varphi_{\sigma l}^{\tau m}=\varphi_{\varrho k}^{\tau m}$ und $\{(\varrho, k); \prec\}$ ist nach oben gerichtet (in unserem Fall sogar linear geordnet).

Eingegangen am 15. Dezember 1975.

Ist $g \in \Gamma_{\sigma l}, g' \in \Gamma_{\sigma' l'}$, $(\sigma, l) \leqq (\sigma', l')$, so gibt es ein Element $c(g) \in H$ derart, dass für $a \in I_{\sigma l}$ stets $ag = a \cdot c(g)$ gilt, also hat man für $a' \in I_{\sigma' l'}$

$$ag \cdot a'g' = a \cdot c(g) \cdot (a'g') = a \cdot [(a'g')(g\varphi_{\sigma l}^{\sigma' l'})] = a \cdot [a'(g\varphi_{\sigma l}^{\sigma' l'} \cdot g')].$$

Ist ferner $c' \in H$ so beschaffen, dass $x'(g\varphi_{\sigma l}^{\sigma' l'} \cdot g') = x' \cdot c'$ für jedes $x' \in I_{\sigma' l'}$ besteht, so gilt

$$ag \cdot a'g' = aa'c' = (aa')[(g\varphi_{\sigma l}^{\sigma' l'} \cdot g')\varphi_{\sigma' l'}^{\sigma' l''}] = (aa')(g\varphi_{\sigma l}^{\sigma' l''} \cdot g'\varphi_{\sigma' l'}^{\sigma' l''}),$$

wo l'' durch die Relation $I_{\sigma l} I_{\sigma' l'} \subseteqq I_{\sigma' l''}$ definiert ist, d.h.

$$l'' = \begin{cases} l', & \text{falls} \quad \sigma < \sigma', \\ \min(l + l', n_\sigma), & \text{falls} \quad \sigma = \sigma'. \end{cases}$$

Deshalb genügt es die Produkte $c_\varrho^k \cdot c_\sigma^l$, $n_\varrho > 1$ für $\varrho \leqq \sigma$ anzugeben, um die vollständige Multiplikationstafel zu erhalten. Anders gesagt, muss man einerseits für jedes Tripel ϱ, σ, l mit $\varrho < \sigma < \vartheta$, $l \leqq n_\sigma$ die durch c_ϱ induzierte partielle Translation $g_{\varrho\sigma l} \in \Gamma_{\sigma l}$, andererseits für jede ϱ mit $n_\varrho < \infty$ die ebenfalls durch c_ϱ induzierte $g_\varrho \in \Gamma_{\varrho n_\varrho}$ angeben. Man kann sich dabei auf den Fall $n_\varrho > 1$ beschränken, da für $n_\varrho = 1$ das Element c_ϱ idempotent und somit $g_\varrho, g_{\varrho\sigma l}$ identisch sind.

Man beachte, dass durch die Angabe dieser Translationen auch die Multiplikation in $\bigcup\limits_{k=1}^{n_\varrho} I_{\varrho k}$ bekannt wird. In der Tat, es gilt:

Satz 1. *Die Elemente der kommutativen Hauptidealhalbgruppe H sind eindeutig in der Form $c_\varrho^k g$ $(0 \leqq \varrho < \vartheta, 1 \leqq k \leqq n_\varrho, k < \infty, g \in \Gamma_{\varrho k})$ darstellbar. Die Multiplikation ist durch*

$$c_\varrho^k g \cdot c_\varrho^{k'} g' = \begin{cases} c_\varrho^{k+k'}(g\varphi_{\varrho k}^{\varrho, k+k} \cdot g'\varphi_{\varrho k'}^{\varrho, k+k'}) & \textit{für} \quad k + k' \leqq n_\varrho, \\ c_\varrho^{n_\varrho}(g\varphi_{\varrho k}^{\varrho n_\varrho} \cdot g'\varphi_{\varrho k'}^{\varrho n_\varrho} \cdot g_\varrho^{k+k'-n_\varrho}) = e_\varrho(g\varphi_{\varrho k}^{\varrho n_\varrho} \cdot g'\varphi_{\varrho k'}^{\varrho n_\varrho} \cdot g_\varrho^{k+k'}) & \textit{für} \quad k + k' > n_\varrho \end{cases}$$

$$c_\varrho^k g \cdot c_\sigma^l g'' = c_\sigma^l(g\varphi_{\varrho k}^{\sigma l} \cdot g_\varrho^k \varphi_{\varrho' m_\varrho}^{\sigma l} \cdot g'') \quad \textit{für} \quad \varrho < \sigma$$

gegeben, wobei $g' \in \Gamma_{\varrho k'}, g'' \in \Gamma_{\sigma l}, g_\varrho \in \Gamma_{\varrho' m_\varrho}$ ist ($\varrho' = \varrho, m_\varrho = n_\varrho$ falls $n_\varrho < \infty$ und $\varrho' = \varrho + 1$, $m_\varrho = 1$ sonst), e_ϱ das Idempotent von $I_{\varrho n_\varrho}$ bezeichnet und g_ϱ durch $ag_\varrho = a \cdot c_\varrho$ für $a \in I_{\varrho' m_\varrho}$ definiert ist.

Nach den obigen Erläuterungen ist der Beweis eine einfache Rechenaufgabe. Die Rolle von $g_{\varrho\sigma l}$ wird natürlich von $g_\varrho \varphi_{\varrho' m_\varrho}^{\sigma l}$ gespielt.

Bemerkung. Statt c_ϱ konnte man natürlich ein anderes Element c_ϱ' aus $I_{\varrho 1}$ als Repräsentant wählen, und dazu würde eine andere Translation g_ϱ' gehören. Ist $c_\varrho' = c_\varrho h, h \in \Gamma_{\varrho 1}$, so hat man für $a \in I_{\varrho' m_\varrho}$

$$ag_\varrho' = a \cdot c_\varrho' = (a \cdot c_\varrho)(h\varphi_{\varrho 1}^{\varrho' m_\varrho}) = a(g_\varrho \cdot h\varphi_{\varrho 1}^{\varrho' m_\varrho}),$$

also $g'_\varrho \in (\Gamma_{\varrho 1}\varphi_{\varrho 1}^{\varrho' m_\varrho})g_\varrho$. Dies bedeutet, dass g_ϱ mod der Untergruppe $\Gamma_{\varrho 1}\varphi_{\varrho 1}^{\varrho' m_\varrho}$ von $\Gamma_{\varrho' m_\varrho}$ eindeutig bestimmt ist, unabhängig von Wahl des c_ϱ.

Satz 1 zeigt, dass die Folge $\mathfrak{F}=(n_1, \ldots, n_\sigma, \ldots)_{\sigma<\vartheta}$, das direkte System $\Delta = \{\Gamma_{\varrho k}; \varphi_{\varrho k}^{\sigma l}\}_{\varrho,\sigma<\vartheta}$ und die Restklassen $\bar{g}_\varrho=(\Gamma_{\varrho 1}\varphi_{\varrho 1}^{\varrho' m_\varrho})\cdot g_\varrho \in \Gamma_{\varrho' m_\varrho}/\Gamma_{\varrho 1}\varphi_{\varrho 1}^{\varrho' m_\varrho}$ ein vollständiges System von Invarianten für die kommutativen Hauptidealhalbgruppen bilden. Dieses System ist aber noch nicht unabhängig. Die Homomorphismen $\varphi_{\varrho k}^{\sigma l}$ sind nämlich nicht ganz beliebig, und zwar gilt

Satz 2. a) *Γ_{01} ist die Einsgruppe, wenn $n_0>1$.* b) *Für $1<l<n_\sigma$ ist $\varphi_{\sigma,l-1}^{\sigma l}$ sürjektiv. Ist ferner $n_\sigma>1$ und* c) *$\sigma=\varrho+1, n_\varrho<\infty$, so ist $\varphi_{\varrho n_\varrho}^{\sigma 1}$ sürjektiv;* d) *$\sigma=\varrho+1$, $n_\varrho=\infty$, so ist $\Gamma_{\sigma 1}/\Gamma_{\varrho 1}\varphi_{\varrho 1}^{\sigma 1}$ eine endliche zyklische Gruppe für jede natürliche Zahl k;* e) *σ eine Limeszahl, so ist $\Gamma_{\sigma 1}$ ein homomorphes Bild des direkten Limits $\Lambda_\sigma = \varinjlim \{\Gamma_{\varrho k}; \varphi_{\varrho k}^{\varrho' k'}\}_{\varrho,\varrho'<\sigma}$, wobei $\varphi_\sigma : \Lambda_\sigma \to \Gamma_{\sigma 1}$ von den Homomorphismen $\varphi_{\varrho k}^{\sigma 1}$ induziert wird, d.h., für den kanonischen Homomorphismen $\psi_{\varrho k}$: $\Gamma_{\varrho k}\to\Lambda_\sigma$ gilt*

$$\psi_{\varrho k}\varphi_\sigma = \varphi_{\varrho k}^{\sigma 1}. \tag{1}$$

Beweis. a) ist trivial.

Es sei $I_{\sigma l}$ eine nichtidempotente $\mathcal{J}$-Klasse. Dann ist $I_{\sigma l}c_\sigma \subseteqq I_{\sigma l}I_{\sigma 1} \subseteqq I_{\sigma, l+1}$, also $I_{\sigma l}\mathbf{I}_{\sigma 1}\subseteqq \mathbf{I}_{\sigma,l+1}$, und jede Translation $g\in\Gamma_{\sigma l}$ muss durch ein Element $a(g)\in \in H\diagdown \mathbf{I}_{\sigma 1}$, d.h. $a(g)\in I_{\sigma' h}$ mit $\sigma'<\sigma$ induziert werden. Dann aber induziert $a(g)$ auch eine Translation $g'\in\Gamma_{\sigma 1}$ und somit gilt $g=g'\varphi_{\sigma 1}^{\sigma l}$, also ist $\varphi_{\sigma 1}^{\sigma l}$ eine Sürjektion. Ist hier $l>1$, so hat man $\varphi_{\sigma 1}^{\sigma l}=\varphi_{\sigma 1}^{\sigma, l-1}\cdot\varphi_{\sigma,l-1}^{\sigma l}$, und $\varphi_{\sigma,l-1}^{\sigma l}$ ist auch sürjektiv, womit b) bewiesen ist.

Für $l=1, \sigma=\varrho+1, n_\varrho<\infty$ haben wir $I_{\varrho n_\varrho}\cdot a(g)\subseteqq I_{\varrho n_\varrho}$, d.h. $x\mapsto x\cdot a(g)$ $(x\in I_{\varrho n_\varrho})$ ist eine Translation $g'\in\Gamma_{\varrho n_\varrho}$, für welche $g'\varphi_{\varrho n_\varrho}^{\sigma 1}=g$ gilt, also ist $\varphi_{\varrho n_\varrho}^{\sigma 1}$ sürjektiv. Damit ist auch c) bewiesen.

Jetzt sei $\sigma=\varrho+1, l=1, n_\varrho=\infty$ und $g\in\Gamma_{\varrho 1}$. Dann ist wieder $a(g)\in I_{\sigma' h}$ mit $\sigma'<\sigma$. Ist $\sigma'<\varrho$, so gilt $I_{\varrho 1}\cdot a(g)\subseteqq I_{\varrho 1}$, und man zeigt wie oben, dass $g=g'\varphi_{\sigma_1}^{\sigma 1}$ für eine $g'\in\Gamma_{\varrho 1}$. Ist andererseits $a(g)\in I_{\varrho l}$, so haben wir

$$a(g) = c_\varrho^l g'' \quad (g''\in\Gamma_{\varrho l}).$$

Bezeichne $g_\varrho\in\Gamma_{\sigma 1}$ die Transformation $x\mapsto xc_\varrho$ $(x\in I_{\sigma 1})$. Da es in $\Gamma_{\varrho 1}$ ein g' mit $g''=g'\varphi_{\varrho 1}^{\sigma l}$ gibt, und $g=g'\varphi_{\varrho 1}^{\sigma 1}\cdot g_\varrho^l$ gilt, erhielt man $g\in\Gamma_{\varrho 1}\varphi_{\varrho 1}^{\sigma 1}\cdot g_\varrho^l$. Nun gilt aber dies Enthaltensein, eventuell mit $l=0$, auch für $g=g_\varrho^{-1}$, also muss $\Gamma_{\sigma 1}/\Gamma_{\varrho 1}\varphi_{\varrho 1}^{\sigma 1}$ endlich sein.

Endlich sei σ eine Limeszahl, $g\in\Gamma_{\sigma 1}$ und, wie vorher, $a(g)\in I_{\sigma' h}$. Wegen $\sigma'<\sigma$ gibt es eine π mit $\sigma'<\pi<\sigma$ und $a(g)$ induziert eine Translation $g'\in\Gamma_{\pi k}$ $(k\leqq n_\pi$ beliebig), wobei also $g'\varphi_{\pi k}^{\sigma 1}=g$ gilt. Da aber Δ ein direktes System ist, gibt es einen Homomorphismus $\varphi_\sigma : \Lambda_\sigma\to\Gamma_{\sigma 1}$, so dass (1) gilt, und φ_σ sürjektiv ist (weil ja $\varphi_{\pi k}^{\sigma 1}$ es ist). Dies ergibt e), und vollendet den Beweis des Satzes.

Das so erhaltene Invariantensystem ist schon vollständig und unabhängig. Es gilt nämlich:

Satz 3. *Es seien eine Halbgruppe* $H_{\mathfrak{F}}$ *mit* $\mathfrak{F}=(n_0, \ldots, n_\sigma, \ldots)_{\sigma<\vartheta}$, *ein direktes System von Abelschen Gruppen* $D=\{G_{\varrho k}; f_{\varrho k}^{\sigma l} \mid \varrho, \sigma<\vartheta, 1 \leqq k \leqq n_\varrho, 1 \leqq l \leqq n_\sigma, (\varrho, k) \prec (\sigma, l)\}$, *und je ein Element* $a_\varrho \in G_{\varrho' m_\varrho}$ $((\varrho', m_\varrho)=(\varrho, n_\varrho)$ *falls* $n_\varrho<\infty$ *und* $(\varrho', m_\varrho)=(\varrho+1, 1)$ *sonst*$)$ *gegeben, wobei folgende Bedingungen erfüllt sind:*

a) G_{01} *ist die Einsgruppe falls* $n_0>1$;

b) $f_{\varrho k}^{\varrho, k+1}$ *für* $k+1<n_\varrho$ *und* $f_{\varrho n_\varrho}^{\varrho+1,1}$ *für* $n_\varrho<\infty, n_{\varrho+1} \neq 1$ *sind sürjektiv;*

c) *ist* $n_\varrho=\infty, n_{\varrho+1} \neq 1$, *so ist* $G_{\varrho+1,1}/G_{\varrho 1} f_{\varrho 1}^{\varrho+1,1}$ *eine endliche zyklische Gruppe, und zwar von* $(G_{\varrho 1} f_{\varrho 1}^{\varrho+1,1}) a_\varrho$ *erzeugt;*

d) *ist* σ *eine Limeszahl,* $n_\sigma \neq 1$, *so ist der von den Abbildungen* $f_{\varrho k}^{\sigma 1}$ $(\varrho<\sigma)$ *induzierte Homomorphismus* f_σ *von* $L_\sigma=\varinjlim \{G_{\varrho k}; f_{\varrho k}^{\pi l}\}_{\varrho, \pi<\sigma}$ *in* $G_{\sigma 1}$ *sürjektiv.*

Man definiere in $U_D=\bigcup_{\substack{\varrho<\vartheta \\ k \leqq n_\varrho}} G_{\varrho k}$ *eine Verknüpfung* $\circ$ *durch*

$$a \circ b=\begin{cases}(a f_{\varrho k}^{\varrho, k+k'})(b f_{\varrho k'}^{\varrho, k+k'}) & \text{für} \quad a \in G_{\varrho k}, \; b \in G_{\varrho k'}, \; k+k'<n_\varrho & (2_1)\\ (a f_{\varrho k}^{\varrho n_\varrho})(b f_{\varrho k'}^{\varrho n_\varrho}) & \text{für} \quad a \in G_{\varrho k}, \; b \in G_{\varrho k'}, \; k+k' \geqq n_\varrho & (2_2)\\ (a f_{\varrho k}^{\sigma l}) b(a_\varrho^k f_{\varrho' m_\varrho}^{\sigma l}) & \text{für} \quad a \in G_{\varrho k}, \; b \in G_{\sigma l}, \; \varrho<\sigma. & (2_3)\end{cases}$$

Dann ist $H=H(\mathfrak{F}, D, a_\varrho)=\{U_D, \circ\}$ *eine kommutative Hauptidealhalbgruppe und es gelten:* $H/\mathcal{J} \cong H_{\mathfrak{F}}$, $I_{\varrho k}$ *gleich der Trägermenge von* $G_{\varrho k}$ *und* $\Delta \cong D$ *im Sinne dass es Isomorphismen* $\gamma_{\varrho k}: \to \Gamma_{\varrho k}$ *gibt, für welche* $\gamma_{\varrho k} \varphi_{\varrho k}^{\sigma l}=f_{\varrho k}^{\sigma l} \gamma_{\sigma l}$ *gilt. Ferner besteht* $H \cong H'=H(\mathfrak{F}', D', a_\varrho')$ *dann und nur dann, wenn* $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}'$, $D \cong D'$ *im Sinne, dass es Isomorphismen* $\iota_{\varrho k}: G_{\varrho k} \to G_{\varrho k}'$ *derart geben, dass* $f_{\varrho k}^{\sigma l} \iota_{\sigma l}=\iota_{\varrho k} f_{\varrho k}^{\prime \sigma l}$, *endlich* $a_\varrho \iota \in (G_{\varrho 1}' f_{\varrho 1}^{\varrho' m_\varrho}) a_\varrho'$ *für den Isomorphismus* $\iota: H \to H'$ *gilt, falls* $\{G_{\varrho' m_\varrho}, \circ\}$ *eine Gruppe ist.*

Beweis. Die Kommutativität der Verknüpfung $\circ$ folgt aus (2) unmittelbar, die Assoziativität kann man prüfen. Ebenfalls ersieht man aus (2), dass aus $a \in G_{\varrho k}$, $a \circ b \in G_{\sigma l}$ immer $(\varrho, k) \preceq (\sigma, l)$ folgt. Wir zeigen, dass auch umgekehrt, aus $a \in G_{\varrho k}$, $c \in G_{\sigma l}$, $(\varrho, k) \preceq (\sigma, l)$ stets $c \in (a)$ folgt.

Ist nämlich $\sigma>\varrho$, so braucht man nur die Gleichung $c=(a f_{\varrho k}^{\sigma l})(a_\varrho^k f_{\varrho' m_\varrho}^{\sigma l}) x$ in $G_{\sigma l}$ zu lösen. Ist $\sigma=\varrho, l=n_\varrho$ so hat man ein $x \in G_{\varrho n_\varrho}$ mit $(a_{\varrho k} f_{\varrho k}^{\varrho n_\varrho}) a_\varrho^k \cdot x=c$ zu finden, was auch immer möglich ist, Für $\sigma=\varrho, n_\varrho>l>k$ gibt es wegen b) ein $x \in G_{\varrho, l-k}$ mit $a \circ x=(a f_{\varrho k}^{\varrho l})(x f_{\varrho, l-k}^{\varrho l})=c$. Es bleibt also der Fall $\sigma=\varrho, l=k<n_\varrho$. Wir unterscheiden mehrere Möglichkeiten.

1. $\varrho=0$. Nach a), b) gilt $G_{\varrho k}=G_{\sigma l} \cong E$ und somit besteht die Behauptung trivialerweise.

2. ϱ ist von erster Art und $n_{\varrho-1}<\infty$. Dann ist $f_{\varrho-1, n_{\varrho-1}}^{\varrho k}$ sürjektiv nach b), also lasst sich ein $x \in G_{\varrho-1, n_{\varrho-1}}$ mit

$$a \circ x=(x f_{\varrho-1, n_{\varrho-1}}^{\varrho k}) a(a_{\varrho-1}^{n_{\varrho-1}} f_{\varrho-1, n_{\varrho-1}}^{\varrho k})=c \tag{3}$$

finden.

3. ϱ ist von erster Art und $n_{\varrho-1}=\infty$, also $a_{\varrho-1}\in G_{\varrho 1}$. In $G_{\varrho k}$ gibt es ein y_1 mit $ay_1=c$ und y_1 hat kraft b) ein Urbild y in $G_{\varrho 1}: y_1=yf_{\varrho 1}^{\varrho k}$. Laut c) ist $y=x_1a_{\varrho-1}^s$ für ein $x_1\in G_{\varrho-1,1}f_{\varrho-1,1}^{\varrho 1}$ und eine natürliche Zahl s. Es sei $x_1=zf_{\varrho-1,1}^{\varrho 1}$ $(z\in G_{\varrho-1,1})$. Für $x=zf_{\varrho-1,1}^{\varrho-1,s}$ gilt dann

$$(3')\ a\circ x = (xf_{\varrho-1,s}^{\varrho k})a(a_{\varrho-1}^s f_{\varrho 1}^{\varrho k}) = a\cdot(zf_{\varrho-1,1}^{\varrho 1}\cdot a_{\varrho-1}^s)f_{\varrho 1}^{\varrho k} = a\cdot(x_1a_{\varrho-1}^s)f_{\varrho 1}^{\varrho k} = ay_1 = c.$$

4. ϱ ist von zweiter Art. y_1 und y seien wie im Falle 3. Kraft d) gilt $y=zf_\varrho$ für ein $z\in L_\varrho$, also $x_1f_{\pi t}^{\varrho 1}=x_1p_{\pi t}f_\varrho=zf_\varrho=y$ mit einem x_1 aus einem geeigneten $G_{\pi t}$, wobei $p_{\pi t}:G_{\pi t}\to L_\varrho$ die kanonische Abbildung ist. Da x_1 durch ein beliebiges $x_1f_{\pi t}^{\pi s}$ $(s>t)$ ersetzt werden kann, darf man annehmen, dass $t=n_\pi$ falls $n_\pi<\infty$ und $[G_{\pi+1,1}:G_{\pi 1}f_{\pi 1}^{\pi+1,1}]\,|\,t$ falls $n_\pi=\infty$. Im ersten Falle setzen wir $x_1=xa_\pi^{n_\pi}$ (in $G_{\pi n_\pi}$) und erhalten

$$(3'')\qquad a\circ x = (xf_{\pi n_\pi}^{\varrho k})a(a_\pi^{n_\pi}f_{\pi n_\pi}^{\varrho k}) = a(x_1f_{\pi n_\pi}^{\varrho k}) = ay_1 = c.$$

Im zweiten Fall sei $[G_{\pi+1,1}:G_{\pi 1}f_{\pi 1}^{\pi+1,1}]=r$, $t=rn$. In $G_{\pi+1,1}$ gibt es ein w für welches $x_1f_{\pi t}^{\pi+1,1}=wa_\pi^t$. Da hier $a_\pi^t=(a_\pi^r)^n\in G_{\pi 1}f_{\pi 1}^{\pi+1,1}$ laut c), liegt auch w in $G_{\pi 1}f_{\pi 1}^{\pi+1,1}=G_{\pi t}f_{\pi t}^{\pi+1,1}$ und hat deshalb ein Urbild x in $G_{\pi t}$ (siehe Fall 3). Dann haben wir

$$(3''')\qquad a\circ x = (xf_{\pi t}^{\varrho k})a(a_\pi^t f_{\pi+1,1}^{\varrho k}) = a[(wa_\pi^t)f_{\pi+1,1}^{\varrho k}] = a(x_1f_{\pi+1,1}^{\varrho k}) = ay_1 = c.$$

Somit ist $c\in(a)\Leftrightarrow(\varrho,k)\leqq(\sigma,l)$ in allen Fällen bewiesen. Hieraus folgt, dass $H= =H(\mathfrak{F}, D, a_\varrho)$ eine Hauptidealhalbgruppe ist (weil ja ihre Hauptideale bezüglich der Inklusion dual wohlgeordnet sind), dass die $\mathcal{J}$-Klassen von H mit den Trägermengen der Gruppen $G_{\varrho k}$ zusammenfallen, und dass $H/\mathcal{J}\cong H_{\mathfrak{F}}$ auch erfüllt ist.

Um $G_{\varrho k}\cong\Gamma_{\varrho k}$ zu beweisen, man bemerke zuerst, dass für $k=n_\varrho<\infty$ die durch $a\gamma_{\varrho n_\varrho}=\tau_x$ $(x=aa_\varrho^{-n_\varrho})$ definierte Abbildung $\gamma_{\varrho n_\varrho}:G_{\varrho n_\varrho}\to\Gamma_{\varrho n_\varrho}(\cong\{G_{\varrho n_\varrho},\circ\})$ ein Isomorphismus ist, weil aus (2_2) sich

$$aa_\varrho^{-n_\varrho}\circ ba_\varrho^{-n_\varrho} = aba_\varrho^{-n_\varrho} \quad \text{für} \quad a,b\in G_{\varrho n_\varrho}$$

ergibt. Ist nun $k<n_\varrho$, so nehmen wir wieder die obigen Fälle 1)–4) vor. Für $\varrho=0$ ist die Behauptung trivial. In den übrigen Fällen haben wir immer ein $x\in H$ gefunden, so dass $a\circ x=c$, wobei x nicht von a und c selber, sondern nur von $y_1=ca^{-1}$ abhing. Deshalb haben wir

$$a'\circ x = a'y_1 \quad \text{für jedes} \quad a'\in G_{\varrho k}.$$

Bezeichnet also $\tau_x\in\Gamma_{\varrho k}$ die durch x auf $I_{\varrho k}$ hervorgerufene partielle Translation, so ist $\gamma_{\varrho k}:y_1\mapsto\tau_x$ ein Isomorphismus zwischen $G_{\varrho k}$ und $\Gamma_{\varrho k}$.

Ist ausserdem $(\varrho,k)\prec(\sigma,l)$, $z\in G_{\sigma l}$, so gilt im Falle $k=n_\varrho$

$$z\circ aa_\varrho^{-n_\varrho} = (aa_\varrho^{-n_\varrho}f_{\varrho n_\varrho}^{\sigma l})z(a_\varrho^{n_\varrho}f_{\varrho n_\varrho}^{\sigma l}) = z(af_{\varrho n_\varrho}^{\sigma l}),$$

d.h. $a\gamma_{\varrho n_\varrho}\varphi^{\sigma l}_{\varrho n_\varrho}=af^{\sigma l}_{\varrho n_\varrho}\gamma_{\sigma l}$. Für $k<n_\varrho$ ist $y_1\gamma_{\varrho k}=\tau_x$ mit $x\in G_{\pi t}$, $\pi<\varrho$, d.h.

$$ay_1 = a\circ x = (xf^{\varrho k}_{\pi t})a(a^t_\pi f^{\varrho k}_{\pi n_\pi}) \quad \text{für} \quad a\in G_{\varrho k},$$

also $y_1=(xf^{\varrho k}_{\pi t})(a^t_\pi f^{\varrho k}_{\pi n_\pi})$ und dann

$$z\circ x = (xf^{\sigma l}_{\pi t})z(a^t_\pi f^{\sigma l}_{\pi n_\pi}) = z(y_1 f^{\sigma l}_{\varrho k}),$$

womit $\gamma_{\varrho k}\varphi^{\sigma l}_{\varrho k}=f^{\sigma l}_{\varrho k}\gamma_{\sigma l}$ gilt. Hiermit ist die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

Jetzt sei $H'=H(\mathfrak{F}', D', a'_\varrho)\cong H$. Aus den oben bewiesenen geht hervor, dass $H_{\mathfrak{F}}, D'$ mit Strukturinvarianten isomorph sind, also muss $\mathfrak{F}'=\mathfrak{F}, D'\cong D$ erfüllt sein. Ist dabei $\iota: H\to H'$ ein Isomorphismus, so induziert er natürlicherweise Isomorphismen $\nu_{\varrho k}:\Gamma_{\varrho k}\to\Gamma'_{\varrho k}$ $(\nu_{\varrho k}:\tau_x\mapsto\tau_{x\iota})$ zwischen den Schützenbergergruppen, und $\iota_{\varrho k}=\gamma_{\varrho k}\nu_{\varrho k}\gamma'^{-1}_{\varrho k}$ sind die erwünschten Isomorphismen, wo $\gamma'_{\varrho k}$ die zu den $\gamma_{\varrho k}$ analogen Isomorphismen zwischen $G'_{\varrho k}$ und $\Gamma'_{\varrho k}$ sind. Was die letzte Behauptung betrifft, haben wir $a^{-1}_\varrho\iota=a'^{-1}_\varrho$ im Falle, wo $\{G_{\varrho' m_\varrho}, \circ\}$ eine Gruppe ist, weil dann a^{-1}_ϱ und a'^{-1}_ϱ die Einselemente der Gruppen $\{G_{\varrho' m_\varrho}, \circ\}$ bzw. $\{G'_{\varrho' m_\varrho}, \circ\}$ sind. Das Einselement von $G_{\varrho k}$ bezeichnen wir durch $e_{\varrho k}$. Dann folgt wegen $e_{\varrho 1}\iota\in G'_{\varrho 1}$

$$e_{\varrho' m_\varrho}\iota = (e_{\varrho 1}\circ a^{-1}_\varrho)\iota = e_{\varrho 1}\iota\circ a^{-1}_\varrho\iota = (e_{\varrho 1}\iota f'^{\varrho' m_\varrho}_{\varrho 1})\cdot a^{-1}_\varrho\iota\cdot a'_\varrho = e_{\varrho 1}\iota f'^{\varrho' m_\varrho}_{\varrho 1}$$

und

$$a_\varrho\iota = (e_{\varrho 1}\circ e_{\varrho' m_\varrho})\iota = e_{\varrho 1}\iota\circ e_{\varrho' m_\varrho}\iota = (e_{\varrho 1}\iota f'^{\varrho' m_\varrho}_{\varrho 1})^2 a'_\varrho\in(G'_{\varrho 1}f'^{\varrho' m_\varrho}_{\varrho 1})\cdot a'_\varrho.$$

Die Umkehrung ist leicht zu kontrollieren.

Literatur

[1] L. Megyesi und G. Pollák, Über die Struktur der Hauptidealhalbgruppen. I, *Acta Sci. Math.* **29** (1968), 261—270.

BOLYAI INSTITUT
ARADI VÉRTANÚK TERE 1.
6720 SZEGED, UNGARN