Acta Sci. Math., 39 (1977), 27—28

О тождестве Л. Б. Редеи для полиномов Лагерра

О. В. ВИСКОВ

Пусть $D = d/dx$ — оператор дифференцирования и

$$(1) \qquad L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} D^n (e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

— обобщенные полиномы Лагерра (см. [1], 10.12). В настоящей заметке устанавливается справедливость следующего представления для полиномов $L_n^{\alpha}(x)$:

$$(2) \qquad L_n^{\alpha}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^x (xD^2 + \alpha D + D)^n (e^{-x}).$$

Представление (2) в частном случае $\alpha = 0$ было доказано Л. Б. Редеи в недавней работе [2]. Приводимое ниже доказательство (2) существенно отличается от предложенного в [2] подхода, сохраняя в то же время его элементарность.

В заключение работы приводится ещё одно представление для обобщенных полиномов Лагерра. Именно, устанавливается, что

$$(3) \qquad L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} \{(1 + \alpha - x + xD)(1 - D)\}^n (1).$$

Доказательство (2) опирается на соотношение (1) и следующую лемму, представляющую независимый интерес.

Лемма. *Пусть* A *и* B — *линейные операторы такие, что*

$$(4) \qquad AB = (B+1)A.$$

Тогда

$$(5) \qquad (BA)^n = (B)_n A^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где обозначено $(B)_0 = 1$ *и* $(B)_n = B(B+1)\ldots(B+n-1)$ *при* $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство леммы проводится по индукции в два этапа. Во-первых, легко показывается, что

$$(6) \qquad A(B)_n = (B+1)_n A, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поступило 22. III. 1976 г.

В самом деле, равенство (6) при $n=0$ тривиально. Если же оно имеет место для $n=0, 1, \ldots, m$, то, принимая во внимание (4), получаем

$$A(B)_{m+1} = A(B)_m(B+m) = (B+1)_m A(B+m) = (B+1)_{m+1}A.$$

Таким образом, (6) доказано. В свою очередь, равенство (5) тривиально верно при $n=0$. Если же оно справедливо при $n=0, 1, \ldots, m$, то, в силу (6),

$$(BA)^{m+1} = BA(B)_m A^m = B(B+1)_m A^{m+1} = (B)_{m+1}A^{m+1}.$$

Лемма доказана.

Положим теперь $A=D$ и $B=1+\alpha+xD$. Легко проверяется, что условия леммы удовлетворяются, и потому, в силу (5),

$$(x^{-\alpha}Dx^{1+\alpha}D)^n = (xD^2+\alpha D+D)^n = (1+\alpha+xD)_n D^n = x^{-\alpha}D^n x^{n+\alpha}D^n. \tag{7}$$

Первое и последнее равенства в (7) являются следствием простого тождества

$$(\beta+xD)\big(f(x)\big) = x^{1-\beta}D\big(x^{\beta}f(x)\big).$$

Записав представление (1) в виде

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{(-1)^n}{n!}e^x x^{-\alpha}D^n x^{n+\alpha}D^n(e^{-x})$$

и воспользовавшись (7), получаем (2).

Доказательство (3) основывается на элементарном тождестве

$$-(xD^2+\alpha D+D)\big(e^{-x}f(x)\big) = e^{-x}\{1+\alpha-x+(2x-\alpha-1)D-xD^2\}\big(f(x)\big) \tag{8}$$

и повторном использовании представления (2). Действительно, согласно (2), имеем

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}e^x(xD^2+\alpha D+D)^{n+1}(e^{-x}) = -e^x(xD^2+\alpha D+D)\big(e^{-x}L_n^{\alpha}(x)\big),$$

откуда, в силу (8), приходим к рекуррентной формуле

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x) = (1+\alpha-x+xD)(1-D)\big(L_n^{\alpha}(x)\big). \tag{9}$$

Из (9) с учетом того, что $L_0^{\alpha}(x)=1$, следует (3).

Литература

[1] Bateman Manuscript Project, *Higher Transcendental Functions*, vol. 2, McGraw-Hill (New York, 1953).

[2] L. B. Rédei, An identity for Laguerre polynomials, *Acta Sci. Math.*, **37** (1975), 115—116.

МАТЕМ. ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА АН СССР
УЛ. ВАВИЛОВА 42
МОСКВА 117333, СССР