Acta Sci. Math., 38 (1976), 383—398

Sur la connexion naturelle à torsion nulle

J. SZENTHE

L'étude systématique des espaces homogènes réductifs et de leurs connexions invariantes a été lancée par K. NOMIZU dans son travail fondamental [7]. Parmi les possibles connexions affines invariantes d'un espace homogène réductif, la connexion naturelle à torsion nulle est d'importance particulière pour ses propriétés favorables. Soit en effet $M=G/H$ un espace homogène, $\pi: G\to M$ la projection canonique et $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$ une structure réductive de M. Une connexion affine invariante à torsion nulle de M est dite naturelle, si toutes les trajectoires d'origine $o=\pi(H)$ des sous-groupes à 1 paramètre qui sont définis par éléments de $\mathfrak{m}$ sont des géodésiques de la connexion ([5], II. p. 197—200). En général, cette définition n'est pas simplifiable. En effet, il y a des espaces homogènes qui n'admettent pas des structures réductives, mais qui ont des connexions affines invariantes à torsion nulle dont toutes les géodésiques sont des trajectoires ([8] et [4], p. 102—115). Le but de ce travail est de montrer qu'une simplification de la définition est pourtant possible dans un cas important. En effet, le théorème suivant sera prouvé en supposant quelque condition de differentiabilité: *Soit G un groupe de Lie connexe, $H\subset G$ un sous-groupe compact connexe et $M=G/H$ l'espace homogène correspondant. Soit donnée une connexion affine invariante à torsion nulle de M telle que toutes ses géodésiques sont des trajectoires. Il y a alors une structure réductive de M telle que la connexion donnée est sa connexion naturelle.* Pour démontrer ce théorème quelques préparations semblent être convenables. Donc une classification des trajectoires d'un espace homogène sera donnée d'abord et quelques observations générales seront faites ensuite sur les connexions affines invariantes dont toutes les géodésiques sont des trajectoires. Le théorème ci-dessus sera une conséquence directe des résultats ainsi obtenus.

Reçu le 28. janvier 1975, revu le 13. février 1976.

1. Classification des trajectoires

Soient G un groupe de Lie connexe, H. $H \subset G$ un sous-groupe fermé connexe et $M = G/H$ l'espace quotient correspondant formé par les classes à gauche de H dans G. Soit $\pi\colon G \to M$ la projection canonique et $\alpha\colon G \times M \to M$ l'action naturelle de G sur M. On considère M muni de la structure unique de variété analytique pour que π et α sont des applications analytiques. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G sera identifiée avec l'espace tangent $T_e G$ de G en l'élément neutre $e \in G$ et par conséquent l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H sera identifiée avec le sous-espace correspondant de $T_e G$.

Si $\varphi\colon R \to G$ est un sous-groupe à 1 paramètre et si $m \in M$, on appelle l'application $\tau \mapsto \alpha(\varphi(\tau), m)$, $\tau \in \mathbf{R}$ la *trajectoire d'origine m de φ*. En particulier, si $o = \pi(e)$, on a évidemment $\alpha(\varphi(\tau), o) = \pi \circ \varphi(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$. Une trajectoire est banale, si $m = \alpha(\varphi(\tau), m)$ pour tout $\tau \in \mathbf{R}$.

Étant donnée une trajectoire non-banale $\pi \circ \varphi$ d'origine o, il existe évidemment un $\varepsilon > 0$ tel que $\pi \circ \varphi$ est injective sur $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$ et par suite $\pi \circ \varphi([-\varepsilon, \varepsilon]) = C \subset C' = \pi \circ \varphi([-2\varepsilon, 2\varepsilon])$ sont des arcs de M. Soit $L(\varphi; \varepsilon)$ l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que si $\psi\colon \mathbf{R} \to G$ est un sous-groupe à 1 paramètre avec $g = \psi(\tau_0)$ les éléments $\psi(\tau) \in G$ pour $|\tau| \leqq |\tau_0|$ transforment C en un arc qui est contenu dans l'intérieur de C'. Soit ensuite $\mathfrak{B}$ le filtre des voisinages de e dans G et $\mathfrak{B}'$ le système des ensembles $V \cap L(\varphi; \varepsilon)$ où $V \in \mathfrak{B}$.

Proposition 1. *L'ensemble P des éléments de G, qui sont engendrés par éléments de $L(\varphi; \varepsilon)$ est un sous-groupe de G. Il existe exactement une topologie sur P qui rend P un groupe topologique et $\mathfrak{B}'$ une base de filtre des voisinages de e dans P.*

Démonstration. Il résulte de la définition de $L(\varphi; \varepsilon)$ que $L(\varphi; \varepsilon)^{-1} = L(\varphi; \varepsilon)$. Alors, l'ensemble P des éléments de G qui sont engendrés par éléments de $L(\varphi; \varepsilon)$ est un sous-groupe de G.

La deuxième assertion de la proposition sera prouvée en montrant que les conditions pour une base de filtre ([3], p. 4—5) sont satisfaites par $\mathfrak{B}'$.

1. Quel que soit $U' \in \mathfrak{B}'$, il existe $V' \in \mathfrak{B}'$ tel que $V' \cdot V' \subset U'$. En effet $U' = U \cap L(\varphi; \varepsilon)$ où $U \in \mathfrak{B}$ et par conséquent il y a un $\tilde{V} \in \mathfrak{B}$ tel que $\tilde{V} \cdot \tilde{V} \subset U$. En vertu de sa définition $L(\varphi; \varepsilon)$ est l'union de sours-arcs de sous-groupes à 1 paramètre et par suite il a y un voisinage W de e dans G formé également par sous-arcs de sous-groupes à 1 paramètre et tel que $L(\varphi; \varepsilon) = W \cap L(\varphi; \varepsilon)$. On voit facilement que W peut être tellement choisi que $L(\varphi; \varepsilon) = W \cap P$ soit aussi valable. Soit $\tilde{W}$ un voisinage de e dans G tel que $\tilde{W} \cdot \tilde{W} \subset W$. Alors on a $(\tilde{W} \cap L(\varphi; \varepsilon)) \cdot (\tilde{W} \cap L(\varphi; \varepsilon)) \subset W \cap P = L(\varphi; \varepsilon)$. Il en résulte que pour $V = \tilde{V} \cap \tilde{W}$ et pour $V' = V \cap L(\varphi; \varepsilon)$ on a $V' \cdot V' \subset U \cap L(\varphi; \varepsilon) = U'$.

2. Quel que soit $U' \in \mathfrak{B}'$, il existe $V' \in \mathfrak{B}'$ tel que $V'^{-1} \subset U'$. En effet, $U' = U \cap L(\varphi; \varepsilon)$ où $U \in \mathfrak{B}$ et par suite il y a un voisinage symétrique V de e dans G tel que $V \subset U$. Alors, pour $V' = V \cap L(\varphi; \varepsilon)$ on a $V'^{-1} = V' \subset U'$.

3. L'élément neutre e appartient évidemment à tout ensemble de $\mathfrak{B}'$.

4. Quels que soient $a \in P$ et $U' \in \mathfrak{B}'$, il existe $V' \in \mathfrak{B}'$ tel que $V' \subset aUa'^{-1}$. Parce que $U' = U \cap L(\varphi; \varepsilon)$ où $U \in \mathfrak{B}$, il y a un $\tilde{V} \in \mathfrak{B}$ tel que $\tilde{V} \subset aUa^{-1}$. Si $\psi: \mathbf{R} \to G$ est un sous-groupe à 1 paramètre qui a un sous-arc appartenant à $L(\varphi; \varepsilon)$, il existe évidemment un $\tau_0 > 0$ tel que $a^{-1}\psi(\tau)a \in L(\varphi; \varepsilon)$ et $\psi(\tau) \in L(\varphi; \varepsilon)$ pour $|\tau| \leqq |\tau_0|$. Soit L' l'union des tels éléments $\psi(\tau)$ pour tous les sous-groupes ψ. On a alors $L' \subset aL(\varphi; \varepsilon)a^{-1}$. D'autre part, on voit facilement que il y a un voisinage $\tilde{W}$ de e dans G tel que $\tilde{W} \cap L(\varphi; \varepsilon) = L'$. Soit $V = \tilde{V} \cap \tilde{W}$ et $V' = V \cap L(\varphi; \varepsilon)$. Par conséquent, on a $V' = \tilde{V} \cap \tilde{W} \cap L(\varphi; \varepsilon) \subset \tilde{V} \cap L' \subset aUa^{-1} \cap aL(\varphi; \varepsilon)a^{-1} = aU'a^{-1}$.

Proposition 2. *P est un sous-groupe de Lie connexe de G.*

Démonstration. Étant évidemment un groupe localement compact connexe qui n'a pas de sous-groupes petits, P est un groupe de Lie. Comme les sous-groupes à 1 paramètre de P sont aussi eaux de G, on voit que P est un sous-groupe de Lie de G.

Les deux propositions précédentes nous conduisent à une notion fondamentale. En effet, étant donnée une trajectoire non-banale on appelle *P le sous-groupe correspondant à la trajectoire $\pi \circ \varphi$ dans G*. Si le sous-groupe à 1 paramètre $\varphi: \mathbf{R} \to G$ est défini par $X \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$, l'algèbre de Lie de P qui est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ sera notée par $\mathfrak{p}_X$. On peut étendre la définition ci-dessus au cas général. En effet, soit $H_m \subset G$ le sous-groupe d'isotropie en $\pi(g) = m \in M$ et soit $\pi_m: G \to G/H_m$ la projection canonique correspondante. En identifiant G/H_m avec M on a $\alpha(\varphi(\tau), m) = \alpha(\varphi(\tau), \pi(g)) = \pi(\varphi(\tau)g) = \pi(\varphi(\tau)gH) = \pi_m(\varphi(\tau)gHg^{-1}) = \pi_m \circ \varphi(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$. Le sous-groupe correspondant à $\pi_m \circ \varphi$ sera appelé *le sous-groupe correspondant à la trajectoire*

$$\tau \mapsto \alpha(\varphi(\tau), m),\ \tau \in \mathbf{R} \text{ dans } G.$$

Lemme 1. *Si $P \subset G$ est le sous-groupe correspondant à la trajectoire $\pi \circ \varphi$, on a $\pi(P) = \{\pi \circ \varphi(\tau) | \tau \in \mathbf{R}\}$.*

Démonstration. Il est évident que φ est un sous-groupe à 1 paramètre de P et en conséquence on a $\{\pi \circ \varphi(\tau) | \tau \in \mathbf{R}\} \subset \pi(P)$. Par contre, si $g \in P$, il existe un sous-groupe à 1 paramètre de P et en conséquence on a $\{\pi \circ \varphi(\tau) | \tau \in \mathbf{R}\} \subset \pi(P)$. Par contre, si $g \in P$, il existe un sous-groupe à 1 paramètre $\psi: \mathbf{R} \to P$ tel que $g = \psi(\xi_0)$ pour un $\xi_0 \in \mathbf{R}$. En vertu d'assertions ci-dessus il y a un $\delta > 0$ tel que $\psi(\xi) \in L(\varphi; \varepsilon)$ pour $|\xi| \leqq \delta$. Par suite, $\pi \cdot \psi(\xi) = \alpha(\psi(\xi), 0) \in C' \subset \{\pi \circ \varphi(\tau) | \tau \in \mathbf{R}\}$ pour $|\xi| \leqq \delta$. Alors, $\pi(g) \in \{\pi \circ \psi(\xi) | \xi \in \mathbf{R}\} \subset \{\pi \circ \varphi(\tau) | \tau \in \mathbf{R}\}$ en vertu de l'analycité de $\pi \circ \varphi$ et de $\pi \circ \psi$.

Soit $T_e\pi\colon \mathfrak{g}\to T_0M$ l'application linéaire tangente à π en e et $L\subset T_0M$ un sous-espace de dimension 1, alors $\mathfrak{k}_L=\{Y|T_e\pi Y\in L,\ Y\in\mathfrak{g}\}$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}$. Si $X\in\mathfrak{g}-\mathfrak{h}$ et $T_e\pi X\in L$, on a $\mathfrak{p}_X\subset\mathfrak{k}_L$ en vertu du lemme précédent.

Lemme 2. *Soit $X\in\mathfrak{k}_L-\mathfrak{h}$ et soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ telle que $X\in\mathfrak{a}\subset\mathfrak{k}_L$. On a $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}_X$.*

Démonstration. Soit $A\subset G$ le sous-groupe connexe défini par $\mathfrak{a}$ et soit fixé un système de coordonnées canoniques de la deuxième espèce ([9], p. 302—307) sur un voisinage V de e dans A de facon que $g=\varphi(\tau_0)\zeta_1(\tau_1)\ldots\zeta_k(\tau_k)$ pour $g\in V$, où $(\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_k)$ sont les coordonnées de g et $\zeta_1,\ldots,\zeta_k\colon\mathbf{R}\to A\cap H$ sont des sous-groupes à 1 paramètre qui définissent le système de coordonnées. Si $\varphi(\tau)$, $g\in V$ sont tels que $\zeta_1(\tau_1)\ldots\zeta_k(\tau_k)\varphi(\tau)\in V$, on a $\zeta_1(\tau_1)\ldots\zeta_k(\tau_k)\varphi(\tau)=\varphi(\tau')\zeta_1(\tau_1')\ldots\zeta_k(\tau_k')$ et par conséquent $\alpha(g,\pi\circ\varphi(\tau))=\pi(\varphi(\tau_0)\zeta_1(\tau_1)\ldots\zeta_k(\tau_k)\varphi(\tau))=\pi(\varphi(\tau_0)\varphi(\tau')\zeta_1(\tau_1')\ldots\zeta_k(\tau_k'))=$ $=\pi\circ\varphi(\tau_0+\tau')$. Cela montre qu'il y a un voisinage $V'\subset V$ de e dans A tel que $V'\subset$ $\subset L(\varphi;\varepsilon)$. Alors, $A\subset P$ et par conséquent $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}_X$.

Corollaire. *Soient $\mathfrak{a}',\mathfrak{a}''\subset\mathfrak{k}_L$ sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ qui sont maximales dans $\mathfrak{k}_L$ mais ne sont pas des sous-algèbres de $\mathfrak{h}$. Alors on a ou bien $\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}''$ ou bien $\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{a}''\subset\mathfrak{h}$.*

Démonstration. Il suffit évidemment de considérer le cas où $\mathfrak{a}'\neq\mathfrak{a}''$. Pour un raisonnement indirect supposons qu'il y a un $Y\in\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{a}''$ tel que $Y\notin\mathfrak{h}$. Alors, en vertu du lemme précédent on a $\mathfrak{a}',\ \mathfrak{a}''\subset\mathfrak{p}_Y\subset\mathfrak{k}_L$. Mais $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ éntant des sous-algèbres maximales dans $\mathfrak{k}_L$, cela entraîne $\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}''=\mathfrak{p}_Y$ ce qui contredit la supposition. Par suite $\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{a}''\subset\mathfrak{h}$.

Soit le sous-groupe à 1 paramètre $\varphi\colon\mathbf{R}\to G$ défini par $X\in\mathfrak{g}-\mathfrak{h}$ et soit $P\subset G$ le sous-groupe correspondant à la trajectoire $\pi\cdot\varphi$. Soient $\mathfrak{g}_X$ l'algèbre de Lie du sous-groupe $Q=H\cap P$ et $[X]$ le sous-espace de dimension 1 engendré par X. Alors, en conséquence du Lemme 1 on a la décomposition en somme directe de sous-espaces vectoriels $\mathfrak{p}_X=[X]\oplus\mathfrak{q}_X$ qui sera appelée *la décomposition d'isotropie de* $\mathfrak{p}_X$ *en* o. Il en résulte que pour $Z\in\mathfrak{q}_X$ on a $[Z,X]=\varkappa X+Z'$ où $\varkappa\in\mathbf{R}$ et $Z'\in\mathfrak{q}_X$. L'inverse de cette assertion, exprimé par le lemme suivant, se montrera utile dans la suite.

Lemme 3. *Soit $X\in\mathfrak{g}-\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{k}$ une sous-algèbre qui est maximale par rapport à la propriété que pour $Z\in\mathfrak{q}$ on a $[Z,X]=\varkappa X+Z'$ où $\varkappa\in\mathbf{R}$ et $Z'\in\mathfrak{q}$. On a alors $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_X$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}=[X]\oplus\mathfrak{q}$ qui est évidemment une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et soit $L=T_e\pi([X])$. Donc $X\in\mathfrak{p}\subset\mathfrak{k}_L$ et par conséquent on a

$$[X]\oplus\mathfrak{q}=\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}_X=[X]\oplus\mathfrak{q}_X,$$

en vertu du Lemme 2. On en conclut $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{q}_X$ et la maximalité de $\mathfrak{q}$ entraîne $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_X$.

Pour $g \in G$, on définit par $\tau \mapsto \alpha(g, \pi_0 \varphi(\tau))$, $\tau \in R$ *la transformée de la trajectoire* $\pi \circ \varphi$ *par* g.

Lemme 4. *La transformée de la trajectoire* $\pi \circ \varphi$ *par* $g \in G$ *est la trajectoire d'origine* $\pi(g)$ *du sous-groupe à 1 paramètre* $\psi = \mathrm{ad}(g)\varphi\colon \mathbf{R} \to G$. *Le sous-groupe qui correspond à cette trajectoire dans G est* $\mathrm{ad}\,(g)P$.

Démonstration. Puisque $\psi(\tau) = g\varphi(\tau)g^{-1}$, on a $g\varphi(\tau) = \psi(\tau)g$ et par conséquent $\alpha(g, \pi \circ \varphi(\tau)) = \pi(g\varphi(\tau)) = \pi(\psi(\tau)g) = \alpha(\psi(\tau), \pi(g))$, $\tau \in R$, ce qui prouve la première assertion. Le sous-groupe qui correspond à cette dernière trajectoire est par définition celui qui correspond à $\pi_m \circ \psi$ où $m = \pi(g)$. Si φ est défini par $X \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$, on a la décomposition $\mathfrak{p}_X = [X] \oplus \mathfrak{q}_X$. Soit $\mathrm{T}_e \mathrm{ad}(g)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ la restriction à $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_e G$ de l'application tangente linéaire à l'automorphisme $\mathrm{ad}\,(g)\colon G \to G$. Alors, on a $\mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(g)\mathfrak{p}_X = \mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(g)[X] \oplus \mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(g)\mathfrak{q}_X$. Mais ψ est défini par $\mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(g)X$ et $\mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(g)\mathfrak{q}_X \subset \mathfrak{h}_m$ où $\mathfrak{h}_m$ dest l'algèbre de Lie de H_m. On en conclut en vertu du Lemme 3 que $\mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(g)\mathfrak{p}_X$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe P_m correspondant à $\pi_m \circ \psi$. Puisque le sous-groupe correspondant à une trajectoire est connexe selon la Proposition 2, cela entraîne $P_m = \mathrm{ad}\,(g)P$.

Corollaire. *Si* $g = \varphi(\xi)$ *et* $m = \pi(g)$, *le sous-groupe correspondant à* $\pi_m \circ \varphi$ *est P même, mais la décomposition d'isotropie de* $\mathfrak{p}$ *en* m *est* $\mathfrak{p} = [X] \oplus \mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(g)\mathfrak{q}$.

Démonstration. Parce que $\pi_m \circ \varphi(\tau) = \pi(\varphi(\tau)g) = \pi(g\varphi(\tau)) = \alpha(g, \pi \circ \varphi(\tau))$, $\tau \in \mathbf{R}$ et $g \in P$, le sous-groupe correspondant à $\pi_m \circ \varphi$ est P en vertu du Lemme. En conséquence de $X = \mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(g)X$, la décomposition d'isotropie de ${}_X$ en m est ${}_X = [X] \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}_m)$, mais $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}_m = \mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(g)(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) = \mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(g)\mathfrak{q}$.

Proposition 3. *Si* $g \in P$, *on a* $\alpha(g, \pi \circ \varphi(\tau)) = \pi \circ \varphi(\varkappa(\tau))$, $\tau \in \mathbf{R}$ *où* $\varkappa\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *est une bijection analytique.*

Démonstration. Si $g \in P$, on a $\alpha(g, \pi \circ \varphi(\tau)) = \pi(g\varphi(\tau)) \in \pi(P) \subset \{\pi \circ \varphi(\xi) | \xi \in \mathbf{R}\}$ pour $\tau \in \mathbf{R}$ selon le Lemme 1. La trajectoire $\pi \circ \varphi$ étant non-triviale, soit ξ_0 le moins grand nombre positif tel que $\pi \circ \varphi(\xi_0) = \pi \circ \varphi(0)$, s'il y a des tels nombres; autrement soit $\xi_0 = \infty$. Si $\xi_0 = \infty$, il y a exactement un $\xi \in \mathbf{R}$ à un $\tau \in \mathbf{R}$ tel que $\pi \circ \varphi(\xi) = \alpha(g, \pi \circ \varphi(\tau))$; dans ce cas soit $\varkappa(\tau) = \xi$, $\tau \in \mathbf{R}$. L'application $\varkappa\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ainsi définie est évidemment un homoémorphisme. Si $\xi_0 < \infty$, soit d'abord g dans le voisinage $L(\varphi; \varepsilon)$ de e dans P. Alors il y a une suite strictement croissante $\{\tau_i | i \in \mathbf{Z}\}$ telle que $\alpha(g, \pi \circ \varphi(\tau_i)) = o$ pour tout τ_i, $i \in \mathbf{Z}$ et que l'application $\sigma \mapsto \alpha(g, \pi_0 \varphi(\tau_i + \sigma))$, $\tau_i \leqq \tau_i + \sigma < \tau_{i+1}$ est injective pour $i \in \mathbf{Z}$. Par conséquent, pour tout σ tel que $\tau_i \leqq \tau_i + \sigma < \tau_{i+1}$, il existe exactement un $0 \leqq \xi < \xi_0$ tel que $\pi \circ \varphi(\xi) = \alpha(g, \pi \circ \varphi(\tau_i + \sigma))$; dans ce cas soit $\varkappa(\tau_i + \sigma) = i\xi_0 + \xi$ pour $\tau_i \leqq \tau_i + \sigma < \tau_{i+1}$ et $i \in \mathbf{Z}$. L'application $\varkappa\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ainsi définie est évidement un homéomorphisme. Si $\xi_0 < \infty$ et $g \in P$ est arbitraire, il existe, en vertu de la Proposition 2, un $g_0 \in L(\varphi; \varepsilon)$ et un entier non-négatif l tels que

$g=g_0^l$. On peut évidement montrer dans ce cas l'existence d'un homéomorphisme $\varkappa: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ en utilisant le résultat précédent. On voit facilement que $\varkappa$ est analitique dans tous les cas considérés en vertu du théorème des fonctions implicites.

A compte de la proposition précédente, les éléments de P seront appelés *automorphismes de la trajectoire* $\pi\circ\varphi$. Si pour un $g\in P$ on a en particulier $\alpha(g, \pi\circ\varphi(\tau))=$ $=\pi\circ\varphi(\lambda\tau+\mu)$, $\tau\in\mathbf{R}$ où $\lambda, \mu\in\mathbf{R}$, l'élément g sera appelé un *automorphisme linéaire de la trajectoire* $\pi\circ\varphi$. Dans le cas particulier où $\lambda=1$ l'élément g sera appelé *un automorphisme affin de la trajectoire* $\pi\circ\varphi$, et dans le cas où $\lambda=1$ *et* $\mu=0$ l'élément g sera appelé un *automorphisme identique de la trajectoire* $\pi\circ\varphi$. Si tous les éléments de P sont des automorphismes linéaires de $\pi\circ\varphi$, on dit que $\pi\circ\varphi$ est une *trajectoire linéaire* de l'espace homogène M. Si tous les éléments de P sont des automorphismes affines de $\pi\circ\varphi$, on dit que $\pi\circ\varphi$ est une *trajectoire affine* de M. Si $H\cap P=Q=\{e\}$, la trajectoire $\pi\circ\varphi$ est dite *simple.*

Lemme 5. *La trajectoire $\pi\circ\varphi$ est linéaire, si le sous-groupe $F=\{\varphi(\tau)|\tau\in\mathbf{R}\}$ de G est laissé invariant par tout automorphisme* ad (q): $G\to G$, $q\in Q$.

Démonstration. En effet ad $(q)\varphi: \mathbf{R}\to G$ est un sous-groupe à 1 paramètre de G. En vertu de l'hypothèse du Lemme on a donc ad $(q)\varphi(\tau)=\varphi(\lambda\tau)$, $\tau\in\mathbf{R}$, où λ ne dépend que de $q\in Q$. Si $g\in P$, on a évidemment $g=\varphi(\mu)q$ où $\mu\in\mathbf{R}$ et $q\in Q$. Alors, $g\varphi(\tau)=\varphi(\mu)q\varphi(\tau)=\varphi(\mu)(\mathrm{ad}(q)\varphi(\tau))q=\varphi(\mu)\varphi(\lambda\tau)q$ et par conséquent on a $\alpha(g, \pi\circ\varphi(\tau))=\pi\circ\varphi(\lambda\tau+\mu)$, $\tau\in\mathbf{R}$. Donc, $\pi\circ\varphi$ est une trajectoire linéaire de M.

Corollaire. *Si l'espace homogène $M=G/H$ admet une structure réductive $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$ et le sous-groupe à 1 paramètre $\varphi: \mathbf{R}\to G$ est défini par $X\in\mathfrak{m}-\{0\}$, la trajectoire $\pi\circ\varphi$ est linéaire.*

Démonstration. Si $q\in Q$, on a T_e ad $(q)X\in\mathfrak{m}$ parce que $Q\subset H$. D'autre part, on a T_e ad $(q)X\in\mathfrak{p}_X$ parce que $Q\subset P$. Il en résulte que T_e ad $(q)X\in\mathfrak{m}\cap\mathfrak{p}_X=[X]$. Par conséquent, T_e ad $(q)X=\lambda X$ où $\lambda\in\mathbf{R}$. On en conclut que la hypothèse du lemme précédent est satisfaite.

Proposition 4. *Étant donné $X\in\mathfrak{g}-\mathfrak{h}$, soit $\mathfrak{q}_X^0=\mathfrak{h}$ et soit $\mathfrak{q}_X^i$ défini successivement pour tout i naturel par*

$$\mathfrak{q}_X^i=\{Z|Z\in\mathfrak{q}_X^{i-1} \text{ et } [Z, X]=\lambda X+Z^* \text{ où } \lambda\in\mathbf{R} \text{ et } Z^*\in\mathfrak{q}_X^{i-1}\}.$$

Alors, $\mathfrak{h}=\mathfrak{q}_X^0\supset\mathfrak{q}_X^1\supset\ldots\supset\mathfrak{q}_X^i\supset\ldots$ est une suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$. Si j est le plus petit nombre tel que $\mathfrak{q}_X^j=\mathfrak{q}_X^{j+1}$, on a $\mathfrak{q}_X^j=\mathfrak{q}_X$ où $\mathfrak{q}_X=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}_X$.

Démonstration. En supposant que $\mathfrak{q}_X^{i-1}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, soient $Z', Z''\in\mathfrak{q}_X^i$ et $[Z', X]=\lambda' X+Z^*$, $[Z'', X]=\lambda'' X+Z^{**}$ où $\lambda', \lambda''\in\mathbf{R}$ et $Z^*, Z^{**}\in\mathfrak{q}_X^{i-1}$. Par conséquent pour $\xi, \eta\in\mathbf{R}$ on a $[\xi Z'+\eta Z'', X]=(\xi\lambda'+\eta\lambda'')X+\xi Z^*+\eta Z^{**}$, ce qui montre que $\xi Z'+\eta Z''\in\mathfrak{q}_X^i$. De plus $[[Z'Z''], X]=[Z', [Z''X]]-[Z'', [Z', X]]=$

$=\lambda'' Z^* - \lambda' Z^{**} + [Z', Z^{**}] - [Z'', Z^*]$ entraîne que $[Z', Z''] \in \mathfrak{q}_X^i$. Alors, $\mathfrak{q}_X^i$ est également une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Soit $L = T_e\pi([X])$, alors l'hypothèse $\mathfrak{q}_X^j = \mathfrak{q}_X^{j+1}$ entraîne que $[X] \oplus \mathfrak{q}_X^j$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{q}$ telle que $X \in [X] \oplus \mathfrak{q}_X^j \subset \mathfrak{k}_L$. Donc, $[X] \oplus \mathfrak{q}_X^j \subset \mathfrak{p}_X$ en vertu du Lemme 2 et par conséquent $\mathfrak{q}_X^j \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}_X = \mathfrak{q}_X$. D'autre part, la définition de $\mathfrak{q}_X^i$ entraîne que $\mathfrak{q}_X \subset \mathfrak{q}_X^i$ pour tout entier non-négatif i. Alors, en particulier $\mathfrak{q}_X \subset \mathfrak{q}_X^j$.

A compte de la proposition précédente $\pi \circ \varphi$ sera appelée *une trajectoire principale* de l'espace homogène M, si $\mathfrak{q}_X = \mathfrak{q}_X^1$. On voit facilement que $\pi \circ \varphi$ est une trajectoire principale si et seulement si tous les éléments $g \in G$ qui laissent fixés le point o et le sous-espace de dimension 1 $[T_e\pi X] \subset T_o M$, sont des automorphismes de $\pi \circ \varphi$.

Lemme 6. *Si l'espace homogène $M = G/H$ admet une structure réductive $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ et le sous-groupe à 1 paramètre φ est défini par $X \in \mathfrak{m} - \{0\}$, la trajectoire $\pi \circ \varphi$ est principale.*

Démonstration. Si $Z \in \mathfrak{g}_X^1$, on a $[Z, X] = \lambda X + Z^*$ où $\lambda \in \mathbf{R}$ et $Z^* \in \mathfrak{h}$. Mais $[Z, X] \in \mathfrak{m}$, parce que $\mathfrak{q}_X^1 \subset \mathfrak{h}$. Il en résulte que $Z^* = 0$ et par conséquent on a $\mathfrak{q}_X^2 = \mathfrak{q}_X^1$.

Lemme 7. *Soient φ, ψ: $\mathbf{R} \to G$ sous-groupes à 1 paramètre qui sont définis respectivement par $X, Y \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ où $Z = Y - X \in \mathfrak{h}$ et soit $\pi \circ \varphi$ une trajectoire affine principale. Alors, $\pi \circ \psi$ est une trajectoire principale si et seulement si Z est un élément du normalisateur de $\mathfrak{q}_X$ dans $\mathfrak{h}$.*

Démonstration. Parce que $Y - X = Z \in \mathfrak{h}$, on a évidemment $\mathfrak{q}_X^1 = \mathfrak{q}_Y^1$. Mais $\pi \circ \varphi$ étant principale, on a $\mathfrak{q}_X^1 = \mathfrak{q}_X$. Par conséquent $\mathfrak{q}_X \supset \mathfrak{q}_Y$. Donc, il suffit de montrer que $\mathfrak{q}_X \subset \mathfrak{q}_Y$, si et seulement si Z est un élément du normalisateur de $\mathfrak{q}_X$ dans $\mathfrak{h}$. Soit $U \in \mathfrak{q}_X$, alors $[U, Y] = [U, X + Z] = Z^* + [U, Z]$ où $Z^* \in \mathfrak{q}_X$. Donc, $\pi \circ \psi$ est une trajectoire principale si et seulement si $[U, Z] \in \mathfrak{q}_X$ pour tout $U \in \mathfrak{q}_X$.

2. Géodésiques de connexions affines inveriantes

Soit $L(M)$ la variété analytique formée par les repères linéaires de l'espace homogène $M = G/H$ et ϱ: $L(M) \to M$ la projection canonique. Soit

$$\beta: G \times L(M) \to -L(M)$$

l'action de G sur $L(M)$, qui est induite par l'action naturelle α: $G \times M \to M$. Si $X \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs de Killing dans le sens plus general correspondant par l'action α sur M à X sera noté par X' et le champ de vecteurs de Killing correspondant par l'action β sur $L(M)$ à X sera noté par X''. Si $r \in L(M)$ et $m = \varrho(r)$, soit $\varkappa_r$: $T_m M \to \mathbf{R}^n$ l'application qui rend à un vecteur $v \in T_m M$ ses coordonnées par rapport à r où $n = \dim M$. Soit ϑ: $TL(M) \to \mathbf{R}^n$ la 1-formenon caique du fibré

$\varrho: L(M)\to M$. Alors on a $\vartheta(w)=\varkappa_r\circ T_r\varrho(w)$ pour $w\in T_rL(M)$ où $T_r\varrho$ est l'application linéaire tangente à ϱ en r. Si $g\in G$, soit $\alpha_g: M\to M$ transformation définie par $m\mapsto\alpha(g, m)$, $m\in M$ et soit $T\alpha_g$: $TM\to TM$ l'application linéaire tangente à α_g. Soit $r_0\in L(M)$ fixé de façon que $\varrho(r_0)=o$ et soit $\iota: H\to GL(n;\mathbf{R})$ l'homomorphisme de groupes de Lie défini par $h\mapsto\varkappa_0\circ T_0\alpha_h\circ\varkappa_0^{-1}$ pour $h\in H$, où $\varkappa_0=\varkappa_{r_0}$ et $T_0\alpha_h$ est la restriction de $T\alpha_h$ à T_0M. Soit $T_e\iota$: $\mathfrak{h}\to\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ l'homomorphisme d'algèbres de Lie qui est l'application linéaire tangente à ι en e. Comme $\alpha_h\circ\pi=\pi\circ\operatorname{ad}(h)$, on en conclut que $\iota(h)\circ\varkappa_0\circ T_e\pi=\varkappa_0\circ T_e\pi\circ T_e\operatorname{ad}(h)$ pour $h\in H$. Mais il en résulte que $T_e\iota(U)\vartheta(V_0'')=\varkappa_0([U, V]_0')$ pour $U\in\mathfrak{h}$ et $V\in\mathfrak{g}$ où V_0'' est la valeur du champ V'' en r_0 et $[U, V]_0'$ est la valeur du champ $[U, V]'$ en o.

Soit ω la 1-forme canonique d'une connexion affine invariante de M et soit $\Lambda:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ l'application linéaire correspondante qui est définie par $X\mapsto\omega(X_0'')=\Lambda(X)$ pour $X\in\mathfrak{g}$ où X_0'' est la valeur du champ X'' en r_0. On sait que Λ satisfait aux conditions suivantes:

1° $\Lambda(Z)=T_e\iota Z$ pour $Z\in\mathfrak{h}$,

2° $\Lambda([Z, X])=[\Lambda(Z), \Lambda(X)]$ pour $Z\in\mathfrak{h}$ et pour $X\in\mathfrak{g}$.

De plus, on sait que à toute application linéaire $\Lambda:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ qui satisfait aux deux conditions précédentes il y a exectement une connexion affine invariante de M qui la définit comme ci-dessus ([5], II, p. 186—190).

S'il y a une connexion affine invariante sur l'espace homogène $M=G/H$ la transformation $\alpha_g: M\to M$ est affine pour tout $g\in G$ et par conséquent la transformée d'une géodésique est également une géodésique. Il en résulte édviemment le

Lemme 8. *Pour qu'une trajectoire de l'espace homogène $M=G/H$ soit une géodésique d'une connexion affine invariante de M, il est nécessaire que cette trajectoire soit linéaire et principale.*

Le lemme suivant reproduit une observation utile de R. Vosylius et A. Dreimanas [9]. La démonstration que nous en allons donner est plus détaillée, mais essentiellement la même que l'originelle.

Lemme 9. *Soit $M=G/H$ un espace homogène qui admet une structure réductive $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$ et soit donnée une connexion affine invariante à torsion nulle de M telle que toutes ses géodésiques sont des trajectoires. De plus, soit $\xi:\mathfrak{m}\to\mathfrak{h}$ une application homogène telle que la trajectoire d'origine o définie par $X+\xi(X)$ est une géodésique pour tout $X\in\mathfrak{m}-\{0\}$. Alors, on a*

$$\Lambda(X)\vartheta(Y_0'')=\frac{1}{2}\varkappa_0\circ T_e\pi([X, Y]+[X+Y, \xi(X+Y)]-[X, \xi(X)]-[Y, \xi(Y)])$$

pour $X, Y\in\mathfrak{m}$ où $\Lambda:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ est l'application linéaire correspondante à la connexion donnée.

Démonstration. Soient $\varphi, \psi, \chi\colon \mathbf{R}\to G$ les sous-groupes à 1 paramètre qui sont définis respectivement par $X+\xi(X)$, $Y+\xi(Y)$, $X+Y+\xi(X+Y)$ où $X, Y\in\mathfrak{m}-\{0\}$. Alors, les trajectoires $\pi\circ\varphi, \pi\circ\psi$ sont des géodésiques et $\pi\circ\chi$ est ou une géodésique ou une application banale. Ensuite, les trajectoires d'origine $r_0\in L(M)$ de φ, ψ, χ sont des « lifts » de $\pi\circ\varphi, \pi\circ\psi, \pi\circ\chi$. Donc, en vertu d'un théorème fondamental ([1], p, 104—105) on a

$$(X''+\xi(X)''+\omega(X''+\xi(X)''))\vartheta(X'')=0,$$
$$(Y''+\xi(Y)''+\omega(Y''+\xi(Y)''))\vartheta(Y'')=0,$$
$$(X''+Y''+\xi(X+Y)''+\omega(X''+Y''+\xi(X+Y)''))\vartheta(X''+Y'')=0$$

le long des trajectoires correspondantes dans $L(M)$ pour la 1-forme ω de la connexion donnée. Il en résulte qu'au point $r_0\in L(M)$ on a

$$(X''+\omega(X''))\vartheta(Y'')+(Y''+\omega(Y''))\vartheta(X'')-$$
$$-(\xi(X)''+\omega(\xi(X)''))\vartheta(X'')-(\xi(Y)''+\omega(\xi(Y)''))\vartheta(Y'')+$$
$$+(\xi(X+Y)''+\omega(\xi(X+Y)''))\vartheta(X''+Y'')=0.$$

Puisque la connexion envisagée est à torsion nulle on a $(X''+\omega(X''))\vartheta(Y'')-$ $-(Y''+\omega(Y''))\vartheta(X'')-(\vartheta[X'', Y''])=0$ partout sur la variété $L(M)$, en vertu de la première équation de structure. Par conséquent, au point $r_0\in L(M)$ on a

$$2(X''+\omega(X''))\vartheta(Y'')-(\xi(X)''+\omega(\xi(X)''))\vartheta(X'')-(\xi(Y)''+\omega(\xi(Y)''))\vartheta(Y'')+$$
$$+(\xi(X+Y)''+\omega(\xi(X+Y)''))\vartheta(X''+Y'')-\vartheta([X'', Y''])=0.$$

Mais en vertvertu de faits fondamentaux ([5],I,p. 225—236) on a $U''\vartheta(U'')=L_{U''}\vartheta(U'')=$ $=(L_{U''}\vartheta)(U'')+\vartheta(L_{U''}U'')=0$ partout sur $L(M)$ pour tout $U\in\mathfrak{g}$. On en conclut que $2\omega(X'')\vartheta(Y'')=Y''\vartheta(X'')-X''\vartheta(Y'')-\omega(\xi(X+Y)'')\vartheta(X''+Y'')+\vartheta([X'', Y''])+$ $+\omega(\xi(X)'')\vartheta(X'')+\omega(\xi(Y)'')\vartheta(Y'')$ subsiste au point $r_0\in L(M)$. Mais $Y''\vartheta(X'')=$ $-L_{Y''}\vartheta(X'')=(L_{Y''}\vartheta)(X'')+\vartheta(L_{Y''}X'')=\vartheta([Y'', X''])$, et de même, $X''\vartheta(Y'')=$ $=\vartheta([X'', Y''])$. De plus, on utilise le fait déjà cité ci-dessus que $\omega(U_0'')\vartheta(V_0'')=$ $=T_e\imath(U)\vartheta(V_0'')=\varkappa_0([U, V_0'])$ pour $U\in\mathfrak{h}$ et pour $V\in\mathfrak{g}$. Par conséquent, on a

$$2\omega(X_0'')\vartheta(Y_0'')=\varkappa_0([X, Y]_0'+[X+Y, \xi(X+Y)]_0'-[X, \xi(X)]_0'-[Y, \xi(Y)]_0'),$$

en vertu du fait que $[U'', V'']=[V, U]''$ pour $U, V\in\mathfrak{g}$ ([5], II. p. 189); mais l'égalité ainsi obtenue équivaut évidemment à l'assertion du lemme.

Corollaire 1. *Si l'espace homogène $M=G/H$ admet une structure réductive $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$ et le sous-groupe à 1 paramètre φ est défini par $X\in\mathfrak{m}-\{0\}$, la trajectoire $\pi\circ\varphi$ est affine.*

Démonstration. En effet, soit ν la 1-forme de la connexion naturelle à torsion nulle correspondant à la structure réductive $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$. Si $Z\in\mathfrak{q}_X$ est fixé, il y a une application homogène $\xi\colon \mathfrak{m}\to\mathfrak{h}$ qui satisfait à l'hypothèse du lemme précédent pour $\omega=\nu$ et qui est telle que $\xi(X)=Z$. On a alors $\nu(X_0'')\vartheta(X_0'')=\varkappa_0\circ \mathrm{T}_e\pi([X,\xi(X)])$, selon le lemme. D'autre part, on a $\nu(X_0'')\vartheta(X_0'')=0$ d'après la définition de la connexion naturelle à torsion nulle. Il en résulte que $[Z,X]=[\xi(X),X]=0$; mais $Z\in\mathfrak{q}_X$ étant arbitrairement fixé, cela montre que la trajectoire $\pi\circ\varphi$ est affine.

Corollaire 2. *Soit $M=G/H$ un espace homogène qui admet une structure réductive $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$ et soit donnée une connexion affine invariante à torsion nulle de M telle que toutes ses géodésiques sont des trajectoires. La connexion donnée est la connexion naturelle à torsion nulle d'une structure réductive de M si les conditions suivantes sont satisfaites:*

1. *Il y a une application linéaire $\xi\colon\mathfrak{m}\to\mathfrak{h}$ telle que la trajectoire d'origine o du sous-groupe à 1 paramètre défini par $X+\xi(X)$ est une géodésique pour tout $X\in\mathfrak{m}-\{0\}$.*
2. *On a $\mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(h)\xi(X)=\xi(\mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(h)X)$ pour $h\in H$ et $X\in\mathfrak{m}$.*

Démonstration. $\mathfrak{m}'=\{X+\xi(X)|X\in\mathfrak{m}\}$ est alors un sous-espace complémentaire à dans $\mathfrak{g}$ et la décomposition

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{m}'\oplus\mathfrak{h}$$

est évidemment une structure réductive de M. On démontrera que la connexion donnée est la connexion naturelle à torsion nulle correspondant à la structure réductive $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}'\oplus\mathfrak{h}$. Soient $U,V\in\mathfrak{m}'$, alors, il y a $X,Y\in\mathfrak{m}$ tels que $U=X+\xi(X)$ et $V=Y+\xi(Y)$. D'après le lemme précédent et par la linéarité de ξ, on a

$$\Lambda(U-\xi(X))\vartheta((V-\xi(Y))_0'')=\Lambda(U)\vartheta(V_0'')-\Lambda(\xi(X))\vartheta(V_0'')=$$
$$=\frac{1}{2}\varkappa_0\circ T_e\pi([U-\xi(X),V-\xi(Y)]+[U-\xi(X),\xi(Y)]+[V-\xi(Y),\xi(X)])=$$
$$=\frac{1}{2}\varkappa_0\circ T_e\pi([U,V]-2[\xi(X),V]).$$

Il en résulte évidemment que $\Lambda(U)\vartheta(V_0'')=1/2\varkappa_0\circ\mathrm{T}_e\pi([U,V])$ pour $U,V\in\mathfrak{m}'$. Alors, la connexion donnée est la connexion naturelle à torsion nulle de la structure réductive $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}'\oplus\mathfrak{h}$ par un résultat fondamental ([4], II. p. 190—200).

Lemme 10. *Soient G un groupe de Lie connexe, $H\subset G$ un sous-groupe compact connexe et $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$ une structure réductive de l'espace homogène $M=G/H$. De plus, soit donnée une connexion affine invariante de M telle que toutes ses géodésiques sont des trajectoires de sous-groupes à 1 paramètre de G. Alors, il y a une application $\xi\colon\mathfrak{m}\to\mathfrak{h}$ telle que les conditions suivantes sont satisfaites:*

1. *la trajectoire d'origine o du sous-groupe à 1 paramètre défini par $X+\xi(X)$ est une géodésique de la connexion donnée pour tout $X\in\mathfrak{m}-\{0\}$;*
2. *on a $\mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(h)\xi(X)=\xi(\mathrm{T}_e\,\mathrm{ad}\,(h)X)$ pour tout $h\in H$ et $X\in\mathfrak{m}$.*

De plus, l'application ξ est linèaire si elle est differentiable en $0\in\mathfrak{m}$.

Démonstration. Soit $K: \mathfrak{h}\times\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ la forme de Killing de l'algèbre de Lie compacte $\mathfrak{h}$ et soit $\mathfrak{h}$ munie du produit intérieur défini par $-K$. Il y a alors un complément orthogonal $\mathfrak{n}_X$ dans $\mathfrak{h}$ de la sous-algèbre $\mathfrak{q}_X$ correspondant à un $X\in\mathfrak{m}-\{0\}$. En plus, soit $\mathfrak{c}'_X$ le centralisateur de $\mathfrak{q}_X$ dans $\mathfrak{h}$ et soit ϑ_X le complément orthogonal de $\mathfrak{c}_X=\mathfrak{c}'_X\cap\mathfrak{n}_X$ dans $\mathfrak{n}_X$. Donc, on a les décompositions suivantes de $\mathfrak{h}$ en sommes directes de sous-espaces vectoriels:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_X\oplus\mathfrak{q}_X = \mathfrak{c}_X\oplus\vartheta_X\oplus\mathfrak{q}_X.$$

Le fait que le normalisateur de $\mathfrak{q}_X$ dans $\mathfrak{h}$ est $\mathfrak{c}_X\oplus\mathfrak{q}_X$ ([5], p. 66—70) se montrera très substantiel dans ce qui suit. La trajectoire d'origine o du sous-groupe à 1 paramètre défini par $X\in\mathfrak{M}-\{0\}$ est principale et affine selon le Lemme 6 et le Corollaire 1 du Lemme 9. Donc, pour que la trajectoire d'origine o du sous-group à 1 paramètre dèfini par $X+Z$ soit principale il faut et il suffit qu'on ait $Z\in\mathfrak{c}_X\oplus\mathfrak{q}_X$, en vertu du Lemme 7. D'autre part on sait par la Proposition 4 que $Z', Z''\in\mathfrak{c}_X\oplus\mathfrak{q}_X$ definissent la même trajectoire principale si et seulement si Z' et Z'' sont élements de la même classe $C+\mathfrak{q}_X$ pour un $C\in\mathfrak{c}_X$. De plus, les géodésiques de la connexion donnée sont trajectoires principales en conséquence du Lemme 8. On en conclut qu'il y a exactement un $C_X\in\mathfrak{c}_X$ tel que la trajectoire d'origine o du sous-groupe à 1 paramètre est la géodésique de la connexion donnée qui a o pour son origine et $T_e\pi X$ pour vecteur tangent en ce point. Soit $\xi(X)=C_X$ si $X\in\mathfrak{m}-\{0\}$ et soit $\xi(0)=0$. On montrera dans ce qui suit que l'application $\xi:\mathfrak{m}\to\mathfrak{h}$ ainsi définie satisfait à chacun des deux conditions posées ci-dessus.

D'abord, on obtiendra des représentations de trajectoires dans des systèmes de coordonnées convenablement choisis. Alors, il existe un voisinage W' de 0 dans $\mathfrak{m}$ tel que la restriction ϱ de $\pi\circ\exp$ à W' est un diffeomorphisme. Donc, l'application ϱ définit un système de coordonnées de l'espace M. De plus, soient $X\in\mathfrak{m}-\{0\}$ et $Z\in\mathfrak{h}$ fixés; dans ce cas, il y a des fonctions analytiques $U(\tau)\in\mathfrak{m}$, $V(\tau)\in\mathfrak{h}$ définies dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ telles qu'on a

$$\exp\big(\tau(X+Z)\big) = \exp\big(U(\tau)\big)\exp\big(V(\tau)\big)$$

si τ est dans ce voisinage. Donc, la trajectoire $\pi\circ\exp\big(\tau(X+Z)\big)$, $\tau\in\mathbf{R}$ est représentée par la fonction $U(\tau)$ dans le système de coordonnées défini par ϱ. On va étudier la dépendance de la fonction $U(\tau)$ du choix de Z dans $\mathfrak{h}$ pour un $X\in\mathfrak{m}-\{0\}$ fixé. On a évidemment, par la formule de Taylor,

$$U(\tau) = D^1U(0)\tau+\frac{1}{2}D^2U(0)\tau^2+\tilde{U}(\tau), \quad \text{où} \quad \tilde{U}(\tau) = o(\tau^2),$$

$$V(\tau) = D^1V(0)\tau+\frac{1}{2}D^2V(0)\tau^2+\tilde{V}(\tau), \quad \text{où} \quad \tilde{V}(\tau) = o(\tau^2)$$

pour un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$. D'autre part, soit l'application

$$\Pi : G \times G \to G$$

définie par la multiplication dans le groupe G. Par suite, on définit une application analytique Φ d'un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ par

$$(A, B) \to \Phi(A, B) = \exp^{-1} \Pi(\exp A, \exp B).$$

En utilisant la formule de Taylor, on obtient ([9], p. 380—387) que dans un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ on a

$$\Phi(A, B) = A + B + Q(A, B) + \tilde{\Phi}(A, B)$$

où $Q\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une application bilinéaire et l'application $\tilde{\Phi}$ est petite de troisième ordre. Il en résulte en vertu des observations précédentes que pour un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ on a

$$\tau(X+Z) = U(\tau) + V(\tau) + Q\big(U(\tau), V(\tau)\big) + \tilde{\Phi}\big(U(\tau), V(\tau)\big) =$$

$$= \big(D^1 U(0) + D^1 V(0)\big)\tau + \left(\frac{1}{2} D^2 U(0) + \frac{1}{2} D^2 V(0) + Q\big(D^1 U(0), D^1 V(0)\big)\right)\tau^2 + R(\tau)$$

où $R(\tau) = o(\tau^2)$. En introduisant la décomposition $Q = Q' + Q''$ de Q par rapport à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$, on en conclut en vertu de l'analyticité des fonctions considérées que

$$X = D^1 U(0), \quad Z = D^1 V(0),$$

$$0 = \frac{1}{2} D^2 U(0) + Q'\big(D^1 U(0), D^1 V(0)\big), \quad 0 = \frac{1}{2} D^2 V(0) + Q''\big(D^1 U(0), D^1 V(0)\big),$$

$$0 = R(\tau).$$

Par conséquent, on obtient que l'équation suivante est valable:

$$\frac{1}{2} D^2 U(0) + Q'(X, Z) = 0.$$

Mais cette équation exprime une dépendence de la fonction $U(\tau)$ du choix de Z dans $\mathfrak{h}$ pour un $X \in \mathfrak{m} - \{0\}$ fixé.

En utilisant les observations précedentes, on peut indiquer l'ensemble des $Z \in \mathfrak{h}$ tels que la trajectoire $\pi \circ \exp\big(\tau(X+Z)\big)$, $\tau \in \mathbf{R}$ soit représentée par la fonction

$$U(\tau) = X\tau$$

dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$. En effet, la trajectoire considerée est principale en vertu du Lemme 6 et par conséquent, l'ensemble envisagé est $\mathfrak{q}_X$. D'autre part, on a $D^2 U(0) = 0$ et par conséquent les éléments Z de l'ensemble envisagé satifont à l'équation

$$Q'(X, Z) = 0$$

en vertu des observations précédentes. Par contre, tous les $Z \in \mathfrak{h}$ qui satisfont à cette équation sont éléments de l'ensemble envisagé. En effet, $D^2U(0)=0$ entraîne que la dérivée covariante $\nabla_{D^1U(0)}D^1U(0)$ est zéro quand on la calcule par la connexion naturelle à torsion nulle de la structure réductive $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$ parce que le système de coordonnées défini par ϱ est normal pour cette connexion. Par conséquent, $\nabla_{D^1U(\tau)}D^1U(\tau)=0$ pour tout τ considéré parce que $U(\tau)$ représente une trajectoire. Donc, $U(\tau)$ représente une géodésique de la connexion naturelle à torsion nulle de la structure réductive $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$. Alors, $U(\tau)=X\tau$ dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$. Par suite,

$$\mathfrak{q}_X = \{Z|Q'(X,Z) = 0, Z\in\mathfrak{h}\}$$

est valable.

Soit maintenant $U(\tau)$ une fonction qui représente une trajectoire principale quelconque pour un $X\in\mathfrak{m}-\{0\}$ fixé. En ce cas, l'ensemble des $Z\in\mathfrak{h}$ qui conduisent à la même fonction $U(\tau)$ est identique à l'ensemble des solutions de l'équation

$$\frac{1}{2}D^2U(0)+Q'(X,Z) = 0.$$

En effet, l'ensemble des $Z\in\mathfrak{h}$ qui conduisent à la fonction donnée $U(\tau)$ est $C+\mathfrak{q}_X$ où $C\in\mathfrak{c}_X$ est uniquement défini en conséquence du Lemme 7. De plus, l'ensemble des solutions de l'équation envisagée est $C+\mathfrak{q}_X$ puisque l'application Q' est bilinéaire. En particulier, soit $U(\tau)$ la fonction qui représente la trajectoire qui est une géodésique de la connexion donnée. En ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation

$$\frac{1}{2}D^2U(0)+Q'(X,Z) = 0$$

est l'ensemble $\xi(X)+\mathfrak{q}_X$ en vertu de la définition de l'application ξ.

Pour obtenir d'autres conséquences des observations précédentes, on considère l'appliation $\varepsilon'\colon \mathrm{T}_0M\to M$ qui est la restriction du l'application exponentielle de la connexion donnée à l'espace tangent T_0M. Il y a évidemment un voisinage W de 0 dans T_0M tel que la restriction de $\varrho^{-1}\circ\varepsilon'$ à W est un difféomorphisme

$$\varepsilon\colon W\to W'$$

où W' est le voisinage de 0 dans $\mathfrak{m}$ considéré déjà en ce qui précède. En vertu du fait que la fonction $U(\tau)$ correspondant à $Z=\xi(X)$ représente une géodésique de la connexion donnée il existe un vecteur tangent $v\in\mathrm{T}_0M$ tel qu'on a

$$U(\tau) = \varepsilon(\tau v)$$

pour tout τ dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$. Donc, par la règle de dérivation des fonctions composées on a

$$X = D^1U(0) = D^1\varepsilon(0)v, \quad D^2U(0) = D^2\varepsilon(0)(v,v).$$

Par conséquent, il y a une application bilinéaire symétrique

$$A : \mathfrak{m}\times\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$$

telle qu'on a $D^2U(0)=2A(X, X)$ pour la fonction $U(\tau)$ qui représente la géodésique de la connexion donnée qui a o pour origine et $T_e\pi X$ pour vecteur tangent en o. Alors, l'ensemble des solutions Z de l'équation

$$A(X, X)+Q'(X, Z) = 0$$

pour $X\in\mathfrak{m}-\{0\}$ fixé, est $\xi(X)+\mathfrak{q}_X$. Donc, on a obtenu la suivante conséquence importante des observations précédentes: La fonction

$$Z\mapsto -K(Z, Z), \quad Z\in\mathfrak{h}$$

restreinte à l'ensemble des solutions de l'équation $A(X, X)+Q'(X, Z)=0$ a exactement une valeur minimale qui est atteinte pour $Z=\xi(X)$.

On choisit une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ compatible avec la décomposition $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$ et telle que sa partie dans $\mathfrak{h}$ soit orthonormée pour le produit intérieur défini par $-K$. Soient $m=\dim G$ et $n=\dim M$. Pour les coordonnées correspondantes à la base choisie on a alors

$$X = (X_1, \dots, X_n, 0, \dots, 0), \quad Z = (0, \dots, 0, Z_{n+1}, \dots, Z_m),$$

$$\xi(X) = \big(0, \dots, 0, \xi_{n+1}(X_1, \dots, X_n), \dots, \xi_m(X_1, \dots, X_n)\big),$$

$$-K(Z, Z) = \sum_{k=n+1}^{m} Z_k^2,$$

$$Q'(X, Z) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{m} q_{ik}^1 X_i Z_k, \dots, \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{m} q_{ik}^n X_i Z_k\right),$$

$$A(X, X) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^1 X_i X_j, \dots, \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^n X_i X_j\right).$$

En remaniant la proposition précédente on obtient donc la suivante: La fonction $\sum_{k=1}^{m} Z_k^2$ assujettie aux conditions

$$F_l(Z_{n+1}, \dots, Z_m) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^l X_i X_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{m} q_{ik}^l X_i Z_k = 0, \qquad l = 1, \dots, n,$$

où $(X_1, \dots, X_n)\neq(0, \dots, 0)$ est fixé, admet exactement une valeur minimale qui est atteinte pour $Z_k=\xi_k(X_1, \dots, X_n)$, $k=n+1, \dots, m$. On considère la fonction

$$\Phi(Z_{n+1}, \dots, Z_m) = \sum_{k=n+1}^{m} Z_k^2 + \sum_{\iota=1}^{n} \lambda_\iota F_\iota(Z_{n+1}, \dots, Z_m)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les multiplicateurs de Lagrange uniquement définis. On sait par la théorie des valeurs extrêmes relatives que le système d'équations

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z_k} = 2Z_k + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum_{i=1}^{n} q_{ik}^l X_i = 0 \quad (k = n+1, \dots, m),$$

$$F_l(Z_{n+1}, \dots, Z_m) = 0 \quad (l = 1, \dots, n)$$

admet exactement une solution, donnée par $Z_k = \xi_k(X_1, \dots, X_n)$, $k = n+1, \dots, m$.

Par une substitution évidente on obtient le système d'équations

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^r X_i X_j - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{m} q_{ik}^r q_{jk}^l X_i X_j \right) \lambda_l = 0 \quad (r = 1, \dots, n).$$

Ce système définit uniquement les λ_l et on voit facilement que si l'on les considère comme fonctions de $(X_1, \dots, X_n)$, ces fonctions $\lambda_l(X_1, \dots, X_n)$, $l = 1, \dots, n$, sont analytiques dans $\mathfrak{m} - \{0\}$. Par conséquent, les fonctions $\xi_k(X_1, \dots, X_n)$, $k = n+1, \dots, m$ sont aussi analytiques dans le domaine $\mathfrak{m} - \{0\}$. Mais, substitution dans le système d'équations

$$2Z_k + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum_{k=1}^{n} q_{ik}^l X_i = 0 \quad (k = n+1, \dots, m)$$

montre que les fonctions $\xi_k(X_1, \dots, X_n)$, $k = n+1, \dots, m$ sont linéaires. Par suite, l'application $\xi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{h}$ est linéaire.

Il reste encore à montrer que l'application ξ satisfait à la seconde conditon posée. En effet, l'application

$$\mathrm{T}_e \,\mathrm{ad}\,(h) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

est un automorphisme d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ pour tout $h \in H$. Par conséquent, on a

$$\mathfrak{c}_{\mathrm{T}_e \mathrm{ad}\,(h) X} = \mathrm{T}_e \,\mathrm{ad}\,(h)(\mathfrak{c}_X)$$

pour $X \in \mathfrak{m} - \{0\}$ et $h \in H$. Il en résulte en particulier que

$$\mathrm{T}_e \,\mathrm{ad}\,(h) \xi(X) \in \mathfrak{c}_{\mathrm{T}_e \mathrm{ad}\,(h) X}.$$

D'autre part, la transformation $\alpha_h : M \to M$ applique les géodésiques en des géodésiques et par suite la trajectoire

$$\alpha_h \circ \pi \circ \exp\left(\tau(X + \xi(X))\right) = \pi \circ \mathrm{ad}\,(h) \circ \exp\left(\tau(X + \xi(X))\right) =$$
$$= \pi \circ \exp\left(\tau(\mathrm{T}_e \,\mathrm{ad}\,(h)(X + \xi(X)))\right),$$

est une géodésique. Cela entraîne en vertu des observations précédentes, que

$$\mathrm{T}_e \,\mathrm{ad}\,(h) \xi(X) \in \xi\left(\mathrm{T}_e \,\mathrm{ad}\,(h) X\right) + \mathfrak{q}_{\mathrm{T}_e \mathrm{ad}\,(h) X}.$$

Par conséquent, on a

$$\mathrm{T}_e \operatorname{ad}(h)\xi(X) = \xi(\mathrm{T}_e \operatorname{ad}(h)X)$$

pour tout $X \in \mathfrak{m} - \{0\}$ et $h \in H$. Donc, la seconde condition est aussi vérifiée.

Les raisonnements ci-dessus ont été faits en vue d'obtenir le suivant

Theorème. *Soient G un groupe de Lie connexe, H un sous-groupe compact connexe de G et soit donnée une connexion affine invariante à torsion nulle de l'espace homogène $M = G/H$ telle que toutes ses géodésiques sont des trajectoires et que ξ est differentiable en $0 \in \mathfrak{m}$. Alors, il y a une structure réductive de M telle que sa connexion naturelle à torsion nulle est la connexion donnée.*

Démonstration. Puisque le sous-groupe H est compact, l'espace homogène M admet une structure réductive $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. Donc, en conséquence du Lemme 10 il y a une application $\xi: \mathfrak{m} \to \mathfrak{h}$ qui satisfait à chacune des deux conditions posées dans le Corollaire 2 du Lemme 9. Selon ce corollaire il y a donc une structure réductive $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{h}$ de M dont la connexion naturelle à torsion nulle est la connexion donnée.

Bibliographie

[1] R. L. Bishop—R. J. Crittenden, *Geometry of manifolds* (New York, 1964).

[2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chapitre III. *Groupes topologiques* (Paris, 1951).

[3] F. W. Kamber—P. Tondeur, *Invariant differential operators and the cohomology of Lie algebra sheaves*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 113 (Providence, 1971).

[4] S. Kobayashi—K. Nomizu, *Foundations of differential geometry* (New York, 1963—69).

[5] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations* (Paris, 1958).

[6] K. Nomizu, Invariant affine connection on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 33—65.

[7] K. Nomizu, On infinitesimal holonomy and isotropy groups, *Nagoya Math. J.*, **11** (1957), 111—114.

[8] Р. Василюс—А. Дреиманас, О геометрии однородных пространств, *Литовский мат. сб.*, **11** (1971), 773—781.

[9] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы* (Москва, 1973).

UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE
1521 BUDAPEST, HONGRIE