Об одном двустороннем итерационном методе решения краевой задачи для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом заданного в неявном виде

Ю. И. КОВАЧ (Ужгород, СССР), J. HEGEDŰS (Szeged)

Эта статья является продолжением работы [1].

Мы будем рассматривать следующую задачу (1), (2), (3):

$$(1)\quad F[y] \equiv F\big(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x), y(g_0(x)), \dots, y^{(n-1)}(g_{n-1}(x))\big) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq 1,\ n \geqq 2),$$

$$(2)\quad y|_E = Q,$$

$$(3)\quad y(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = y^{(n-1)}(1) = 0,$$

где заданные функции F, Q, g_i и начальное множество E удовлетворяют следующим условиям:

А) $F(x, u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_{n-1})$ определена в одном из двух $(2n+2)$-мерных брусов:

$$\left.\begin{aligned} &D_K: 0 \leqq x \leqq 1,\ |u_j| \leqq K,\ |v_i| \leqq K \\ &D_\infty: 0 \leqq x \leqq 1,\ |u_j| < \infty,\ |v_i| < \infty \end{aligned}\right\}\quad (j = 0, \dots, n;\ i = 0, \dots, n-1),$$

F непрерывна по x, а по остальным переменным имеет непрерывные частные производные, причем

$$0 < q \leqq \frac{\partial F}{\partial u_n} < R \quad (q \text{ и } R \text{ постоянные}),$$

$$\left.\begin{aligned} &-N_i \leqq \left(\frac{\partial F}{\partial u_i}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u_n}\right)^{-1} \leqq N_i, \quad -N_i \leqq \left(\frac{\partial F}{\partial v_i}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u_n}\right)^{-1} \leqq N_i, \\ &0 \leqq N_i \leqq \tilde{N};\ \left|\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|, \left|\frac{\partial F}{\partial v_i}\right| \leqq N, \end{aligned}\right\}\quad (i = 0, \dots, n-1),$$

Б) $g_i \in C[0, 1]$, $\lambda \leqq g_i(x) \leqq x$ ($i = 0, \dots, n-1$; $\lambda < 0$ постоянная), $g_{n-1}(x)$ не меняет знака на $[0,1]$ (см. замечание 6.1 в [1]),

В) $E = [\lambda, 0]$,

Г) $Q\in C^{(n-1)}(E)$; $Q(0)=\ldots=Q^{(n-2)}(0)=0$, причем в случае если F определена только в D_K, то

$$|Q^{(i)}|\leqq K \quad (i=0,\ldots,n-1),$$

Д) выполняется условие сжатости (см. теорему 2.1 в [1]):

$$\tilde N\left[2-\frac{1}{n!}+\max_{i=0,\ldots,n-1}\int_{\mathscr{M}_i}\left(1+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\partial^k G(1,t)}{\partial x^k}\right)dt\right]<1,$$

где $\mathscr{M}_i=\{x: g_i(x)>0\}$, а $-G$ как и в [1] есть функция Грина задачи

$$y^{(n)}(x)=h(x)\quad(0\leqq x\leqq 1),\quad y(0)=\ldots=y^{(n-2)}(0)=y^{(n-1)}(1)=0.$$

Отметим, что $\dfrac{\partial^i G(x,t)}{\partial x^i}\geqq 0$ при всех $i=0,\ldots,n-1$.

При этих условиях функцию $y(x)$ мы будем называть решением задачи (1), (2), (3) если она принадлежит классу $C^{(n-2)}[\lambda,1]$ $\big(y^{(n-1)}(x)$ при $x=0$ может иметь разрыв первого рода$\big)$, а сужение ее на $[0,1]$ классу $C^{(n)}[0,1]$ и если она удовлетворяет уравнению (1) на $[0,1]$ и условиям (2), (3).

Для дальнейшего нам будет полезно множество M функций z, которое в случае бруса D_K определяется так:

$$M=\{z: z\in C^{n-2}[\lambda,1],\ z|_E=Q,\ z|_{[0,1]}\in C^n[0,1],\ z^{(n-1)}(1)=0,\ |z^{(s)}|\leqq K\},$$

где s меняется от нуля до n; а в случае бруса D_∞

$$M=\{z: z\in C^{n-2}[\lambda,1],\ z|_E=Q,\ z|_{[0,1]}\in C^n[0,1],\ z^{(n-1)}(1)=0\}.$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Задача* (1), (2), (3), *может иметь только одно решение.*

Доказательство. Пусть наоборот $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два решения задачи (1), (2), (3), тогда по формуле Лагранжа получаем для функции $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$:

$$F[y_1]-F[y_2]=\left.\frac{\partial F}{\partial u_n}\right|y^{(n)}(x)+\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left.\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|y^{(i)}(x)+\left.\frac{\partial F}{\partial v_i}\right|y^{(i)}(g_i(x))\right]=0,$$

где $\left.\dfrac{\partial F}{\partial u_n}\right|$, $\left.\dfrac{\partial F}{\partial u_i}\right|$, $\left.\dfrac{\partial F}{\partial v_i}\right|$ обозначают некоторые промежуточные по формуле Лагранжа значения этих производных в некоторой точке области D_K или D_∞, они являются функциями от x (это обозначение и впредь будем применять). Итак мы получили, что

$$y^{(n)}(x)=-\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(\left.\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|\right)\left(\left.\frac{\partial F}{\partial u_n}\right|\right)^{-1}y^{(i)}(x)+\left(\left.\frac{\partial F}{\partial v_i}\right|\right)\left(\left.\frac{\partial F}{\partial u_n}\right|\right)^{-1}y^{(i)}(g_i(x))\right],$$

$$y(x)|_E\equiv 0,\quad y^{(n-1)}(1)=0.$$

Отсюда в силу условия сжатости Д) получаем по теореме существования и единственности работы [1], что $y(x) \equiv 0$, а это противоречит предположению. Лемма доказана.

Предположим теперь, что существуют две функции $z_1, w_1 \in M$, для которых

$$F[z_1] - \Delta_1(x) \leqq 0, \quad F[w_1] + \Delta_1(x) \geqq 0,$$

где

$$\Delta_1(x) = N \sum_{i=0}^{n-1} \left[z_1^{(i)}(x) - w_1^{(i)}(x) + z_1^{(i)}(g_i(x)) - w_1^{(i)}(g_i(x))\right].$$

О практическом построении этих функций см. ниже лемму 2.

Последовательности приближений $\{z_p(x)\}$, $\{w_p(x)\}$ мы построим исходя из $z_1(x)$, $w_1(x)$ по закону

$$z_{p+1}(x) = z_p(x) - \eta_p(x), \quad w_{p+1}(x) = w_p(x) - \vartheta_p(x) \quad (\lambda \leqq x \leqq 1),$$

$$(4)\ \eta_p(x) = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ -\int\limits_0^1 G(x, t)\alpha_p(t)\,dt, & x \in [0, 1], \end{cases} \qquad \vartheta_p(x) = \begin{cases} 0, & x \in E \\ -\int\limits_0^1 G(x, t)\beta_p(t)\,dt, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

$$\alpha_p(x) = \mu F[z_p] - \mu\Delta_p(x), \quad \beta_p(x) = \mu F[w_p] + \mu\Delta_p(x) \quad \left(\mu \geqq \frac{1}{q} \text{ постоянная}\right),$$

$$\Delta_p(x) = N \sum_{i=0}^{n-1} \left[z_p^{(i)}(x) - w_p^{(i)}(x) + z_p^{(i)}(g_i(x)) - w_p^{(i)}(g_i(x))\right].$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если выполнены условия*

(i) z_2, w_2 *не выходят из* M,*)

(ii) $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) \leqq 0, \quad \beta_1(x) + \beta_2(x) \geqq 0,$

(iii)

$$\mu \frac{\partial F}{\partial u_n} - 1 \leqq N^*, \quad \mu\left(2N - \frac{\partial F}{\partial u_i}\right) \leqq N^*, \quad \mu\left(2N - \frac{\partial F}{\partial v_i}\right) \leqq N^* (i = 0, \dots, n-1),$$

$$\Theta = (2n+1)N^* < 1,$$

то решение задачи задачи (1), (2), (3) *существует и единственно, кроме того при* $l \geqq 1$ *натуральном и* $i = 0, \dots, n-1$; $0 \leqq x \leqq 1$ *справедливо:*

$$z_{2l}^{(i)}(x) \nearrow\!\!\nearrow y^{(i)}(x) \swarrow\!\!\swarrow z_{2l-1}^{(i)}(x), \quad w_{2l-1}^{(i)}(x) \nearrow\!\!\nearrow y^{(i)}(x) \swarrow\!\!\swarrow w_{2l}^{(i)}(x),$$

$$z_{2l-1}^{(n)}(x) \nearrow\!\!\nearrow y^{(n)}(x) \swarrow\!\!\swarrow z_{2l}^{(n)}(x), \quad w_{2l}^{(n)}(x) \nearrow\!\!\nearrow y^{(n)}(x) \swarrow\!\!\swarrow w_{2l-1}^{(n)}(x).$$

* В случае бруса D_∞ это автоматически выполняется.

Доказательство. Доказательство разбиваем на пять частей: а), б), в), г), д).

а) Предположим, что все z_p, w_p принадлежат M и найдем связь между $\alpha_{p+1}, \beta_{p+1}$ и α_p, β_p, а отсюда связь z_{p+1}, w_{p+1} и z_p, w_p.

По закону (4) имеем при всех p натуральных

$$\alpha_{p+1}(x) = \mu F[z_p - \eta_p] - \mu N \sum_{i=0}^{n-1} [z_p^{(i)}(x) - \eta_p^{(i)}(x) - w_p^{(i)}(x) + \vartheta_p^{(i)}(x)] -$$

$$- \mu N \sum_{i=0}^{n-1} \left[z_p^{(i)}(g_i(x)) - \eta_p^{(i)}(g_i(x)) - w_p^{(i)}(g_i(x)) + \vartheta_p^{(i)}(g_i(x))\right].$$

Подставим сюда вместо $F[z_p - \eta_p]$ его значение из формулы Лагранжа:

$$F[z_p] - F[z_p - \eta_p] = \frac{\partial F}{\partial u_n}\bigg|\, \eta_p^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\partial F}{\partial u_i}\bigg|\, \eta_p^{(i)}(x) + \frac{\partial F}{\partial v_i}\bigg|\, \eta_p^{(i)}(g_i(x)) \right).$$

Мы получим следующее

$$\alpha_{p+1}(x) = \alpha_p(x) \left[1 - \mu \frac{\partial F}{\partial u_n}\bigg|\,\right] - \mu N \sum_{i=0}^{n-1} \left(\vartheta_p^{(i)}(x) + \vartheta_p^{(i)}(g_i(x))\right) +$$

$$+ \mu \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \eta_p^{(i)}(x) \left[N - \frac{\partial F}{\partial u_i}\bigg|\,\right] + \eta_p^{(i)}(g_i(x)) \left[N - \frac{\partial F}{\partial v_i}\right] \right\}.$$

Так же доказывается, что

$$\beta_{p+1}(x) = \beta_p(x) \left[1 - \mu \frac{\partial F}{\partial u_n}\bigg|\,\right] - \mu N \sum_{i=0}^{n-1} \left(\eta_p^{(i)}(x) + \eta_p^{(i)}(g_i(x))\right) +$$

$$+ \mu \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \vartheta_p^{(i)}(x) \left[N - \frac{\partial F}{\partial u_i}\bigg|\,\right] + \vartheta_p^{(i)}(g_i(x)) \left[N - \frac{\partial F}{\partial v_i}\bigg|\,\right] \right\}.$$

Поскольку по предположению $\alpha_1(x) \leqq 0$, $\beta_1(x) \geqq 0$ то по методу математической индукции легко показать, что $\alpha_p(x) \leqq 0$, $\beta_p(x) \geqq 0$ при p нечетном и $\alpha_p(x) \geqq 0$, $\beta_p(x) \leqq 0$ при p четном. Отсюда сразу вытекает, что при $0 \leqq x \leqq 1$, $i = 0, \ldots, n-1$ и p нечетном

(5) $z_{p+1}^{(i)}(x) \leqq z_p^{(i)}(x), \quad w_p^{(i)}(x) \leqq w_{p+1}^{(i)}(x); \quad z_p^{(n)}(x) \leqq z_{p+1}^{(n)}(x), \quad w_{p+1}^{(n)}(x) \leqq w_p^{(n)}(x),$

а при p четном

(6) $z_p^{(i)}(x) \leqq z_{p+1}^{(i)}(x), \quad w_{p+1}^{(i)}(x) \leqq w_p^{(i)}(x); \quad z_{p+1}^{(n)}(x) \leqq z_p^{(n)}(x), \quad w_p^{(n)}(x) \leqq w_{p+1}^{(n)}(x).$

б) Докажем, что $z_3, w_3 \in M$.

Очевидно, что z_3, w_3 образованные из z_2, w_2 по закону (4) обладают свойством гладкости элементов M и удовлетворяют начальным и краевым условиям, а так как $z_1, z_2, w_1, w_2 \in M$ получаем из результатов части а) доказательства теоремы следующие неравенства при $i=0, \dots, n-1$; $0 \leqq x \leqq 1$

$$
(7)\quad \begin{aligned}
&z_2^{(i)}(x) \leqq z_1^{(i)}(x), \quad w_1^{(i)}(x) \leqq w_2^{(i)}(x); \quad z_1^{(n)}(x) \leqq z_2^{(n)}(x), \quad w_2^{(n)}(x) \leqq w_1^{(n)}(x),\\
&z_2^{(i)}(x) \leqq z_3^{(i)}(x), \quad w_3^{(i)}(x) \leqq w_2^{(i)}(x); \quad z_3^{(n)}(x) \leqq z_2^{(n)}(x), \quad w_2^{(n)}(x) \leqq w_3^{(n)}(x).
\end{aligned}
$$

Заметим, что при $s=0, \dots, n$; $0 \leqq x \leqq 1$

$$
(8)\quad \begin{aligned}
z_1^{(s)}(x) - z_3^{(s)}(x) &= -\frac{d^s}{dx^s} \int_0^1 G(x, t)[\alpha_1(t) + \alpha_2(t)]\,dt,\\
w_1^{(s)}(x) - w_3^{(s)}(x) &= -\frac{d^s}{dx^s} \int_0^1 G(x, t)[\beta_1(t) + \beta_2(t)]\,dt,
\end{aligned}
$$

а отсюда в силу неотрицательности производных G и условия (ii) теоремы получаем при $i=0, \dots, n-1$; $0 \leqq x \leqq 1$

$$
(9)\quad z_3^{(i)}(x) \leqq z_1^{(i)}(x), \quad w_1^{(i)}(x) \leqq w_3^{(i)}(x); \quad z_1^{(n)}(x) \leqq z_3^{(n)}(x), \quad w_3^{(n)}(x) \leqq w_1^{(n)}(x).
$$

Поскольку по предположению z_1, z_2, w_1, w_2 принадлежат M, (7) и (9) вместе обеспечивают, что $z_3, w_3 \in M$.

В силу результатов части а) доказательства можно утверждать, что при $i=0, \dots, n-1$; $0 \leqq x \leqq 1$

$$
(10)\quad z_4^{(i)}(x) \leqq z_3^{(i)}(x), \quad w_3^{(i)}(x) \leqq w_4^{(i)}(x); \quad z_3^{(n)}(x) \leqq z_4^{(n)}(x), \quad w_4^{(n)}(x) \leqq w_3^{(n)}(x).
$$

в) Предположим теперь, что $z_1, \dots, z_l, w_1, \dots, w_l$ принадлежат M. Докажем, что тогда z_{l+1}, w_{l+1} тоже принадлежат M.

Заметим для этого, что при $p=2, \dots, l-1$

$$
\alpha_p(x) + \alpha_{p+1}(x) = \alpha_p(x) + \alpha_{p-1}(x) + \mu F[z_{p+1}] - \mu \Delta_{p+1}(x) - \mu F[z_{p-1}] + \mu \Delta_{p-1}(x).
$$

Подставим сюда вместо разности $F[z_{p+1}] - F[z_{p-1}]$ ее выражение по формуле Лагранжа, в вместо $z_{p+1}^{(n)}(x) - z_{p-1}^{(n)}(x)$, $w_{p+1}^{(n)}(x) - w_{p-1}^{(n)}(x)$ ставим соответственно выражения $-[\alpha_{p-1}(x) + \alpha_p(x)]$, $-[\beta_{p-1}(x) + \beta_p(x)]$. Таким образом получаем, что

$$
\alpha_p(x) + \alpha_{p+1}(x) = [\alpha_{p-1}(x) + \alpha_p(x)] \left(1 - \mu \left|\frac{\partial F}{\partial u_n}\right|\right) +
$$

$$
+ \mu \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ [z_{p+1}^{(i)}(x) - z_{p-1}^{(i)}(x)] \left(\left|\frac{\partial F}{\partial u_i}\right| - N \right) + [z_{p+1}^{(i)}(g_i(x)) - z_{p-1}^{(i)}(g_i(x))] \left(\left|\frac{\partial F}{\partial v_i}\right| - N \right) \right\} +
$$

$$
+ \mu N \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ w_{p+1}^{(i)}(x) - w_{p-1}^{(i)}(x) + w_{p+1}^{(i)}(g_i(x)) - w_{p-1}^{(i)}(g_i(x)) \right\}.
$$

Заметим, что при $i=0,\dots, n-1$; $p=2, \dots, l$; $0\leqq x\leqq 1$

(11)
$$z_{p+1}^{(i)}(x)-z_{p-1}^{(i)}(x) = \frac{d^i}{dx^i}\int_0^1 G(x,t)[\alpha_{p-1}(t)+\alpha_p(t)]\,dt,$$
$$w_{p+1}^{(i)}(x)-w_{p-1}^{(i)}(x) = \frac{d^i}{dx^i}\int_0^1 G(x,t)[\beta_{p-1}(t)+\beta_p(t)]\,dt,$$

поэтому все слагаемые в выражении для $\alpha_p(x)+\alpha_{p+1}(x)$ имеют знак обратный знаку $\alpha_{p-1}(x)+\alpha_p(x)$. Совершенно так же можно показать, что знак $\beta_p(x)+\beta_{p+1}(x)$ при всех $p=2, \dots, l-1$ противоположный знаку $\beta_{p-1}(x)+\beta_p(x)$. Поэтому в силу условия (ii) теоремы получаем при p нечетном

$$\alpha_p(x)+\alpha_{p+1}(x)\leqq 0,\quad \beta_p(x)+\beta_{p+1}(x)\geqq 0,$$

а при p четном

$$\alpha_p(x)+\alpha_{p+1}(x)\geqq 0,\quad \beta_p(x)+\beta_{p+1}(x)\leqq 0.$$

Отсюда в силу (11) получаем при $i=0, \dots, n-1$; $0\leqq x\leqq 1$ и $p\leqq l$ четном

(12)
$$z_{p+1}^{(i)}(x)\leqq z_{p-1}^{(i)}(x),\ w_{p-1}^{(i)}(x)\leqq w_{p+1}^{(i)}(x);\ z_{p-1}^{(n)}(x)\leqq z_{p+1}^{(n)}(x),\ w_{p+1}^{(n)}(x)\leqq w_{p-1}^{(n)}(x),$$

а при $p\leqq l$ нечетном

(13)
$$z_{p-1}^{(i)}(x)\leqq z_{p+1}^{(i)}(x),\ w_{p+1}^{(i)}(x)\leqq w_{p-1}^{(i)}(x);\ z_{p+1}^{(n)}(x)\leqq z_{p-1}^{(n)}(x),\ w_{p-1}^{(n)}(x)\leqq w_{p+1}^{(n)}(x).$$

Из этих неравенств и из (5), (6) учитывая формулы (4) получаем, что z_{l+1}, $w_{l+1}\in M$. По индукции значит можно показать, что все z_p, w_p принадлежат M.

г) Докажем, что $z_p^{(s)}(x)-w_p^{(s)}(x)\rightrightarrows 0$ при $p\to\infty$ ($s=0, \dots, n$; $0\leqq x\leqq 1$).

Образуем для этого разность следующих выражений:

$$z_{p+1}^{(n)}(x)=z_p^{(n)}(x)-\big(\mu F[z_p]-\mu\Delta_p(x)\big),\quad w_{p+1}^{(n)}(x)=w_p^{(n)}(x)-\big(\mu F[w_p]+\mu\Delta_p(x)\big).$$

Применяя к разности $F[z_p]-F[w_p]$ формулу Лагранжа получаем

(14)
$$z_{p+1}(x)-w_{p+1}(x)=-\int_0^1 G(x,t)\tau_p(t)\,dt\quad (0\leqq x\leqq 1),$$

где

$$\tau_p(t)=[z_p^{(n)}(t)-w_p^{(n)}(t)]\left(1-\mu\frac{\partial F}{\partial u_n}\right)+$$
$$+\mu\sum_{i=0}^{n-1}\left\{[z_p^{(i)}(t)-w_p^{(i)}(t)]\left(2N-\frac{\partial F}{\partial u_i}\right)+[z_p^{(i)}(g_i(t))-w_p^{(i)}(g_i(t))]\left(2N-\frac{\partial F}{\partial v_i}\right)\right\}.$$

Обозначим через H_1 максимум $|z_1^{(s)}(x)-w_1^{(s)}(x)|$ по всем x и s ($0\leqq x\leqq 1$,

$s=0, \ldots, n$), тогда из (14) и условия (iii) теоремы получим при всех p натуральных:

$$|z_p^{(s)}(x)-w_p^{(s)}(x)| \leqq \Theta^{p-1}H_1 \quad (0\leqq x \leqq 1;\ s=0, \ldots, n;\ 0<\Theta<1),$$

поэтому

$$z_p^{(s)}(x)-w_p^{(s)}(x) \rightrightarrows 0 \quad (p\to\infty;\ 0\leqq x\leqq 1;\ s=0, \ldots, n).$$

д) Докажем, что задача (1), (2), (3) имеет решение и что последовательности $\{z_p^{(s)}(x)\}$, $\{w_p^{(s)}(x)\}$ при $s=0, \ldots, n$ сходятся равномерно к производным решения, причем их подпоследовательности по нечетным и четным индексам монотонны.

Последнее утверждение сразу вытекает из неравенств (5), (6) и (12), (13), а равномерную сходимость $\{z_p^{(s)}(x)\}$, $\{w_p^{(s)}(x)\}$ к s-ым производным некоторой функции $y(x)$ поэтому легко показать используя неравенства

$$|z_{p+2}^{(s)}(x)-z_p^{(s)}(x)| \leqq |z_p^{(s)}(x)-w_p^{(s)}(x)| \leqq \Theta^{p-1}H_1,$$
$$|w_{p+2}^{(s)}(x)-w_p^{(s)}(x)| \leqq |z_p^{(s)}(x)-w_p^{(s)}(x)| \leqq \Theta^{p-1}H_1.$$

Покажем, что $y(x)$ является решением нашей задачи. Из формул

$$z_{p+1}^{(n)}(x) = z_p^{(n)}(x)-\alpha_p(x), \quad w_{p+1}^{(n)}(x) = w_p^{(n)}(x)-\beta_p(x) \quad (0\leqq x\leqq 1)$$

предельным переходом при $p\to\infty$ получаем, что $\alpha_p(x)$, $\beta_p(x)\rightrightarrows 0$ $(0\leqq x\leqq 1)$, а поскольку $z_p^{(s)}(x)-w_p^{(s)}(x)\rightrightarrows 0$ при $p\to\infty$; $0\leqq x\leqq 1$, $s=0, \ldots, n$ получаем, что $\Delta_p(x)\rightrightarrows 0$. Перейдем теперь к пределу при $p\to\infty$ в формулах

$$\mu F[z_p]-\mu\Delta_p(x) = \alpha_p(x), \quad \mu F[w_p]+\mu\Delta_p(x) = \beta_p(x). \tag{15}$$

Мы получим, что $F[y]=0$, а поскольку в силу конструкции (см. формулы (4)) $y\in M$, получаем, что y является решением задачи (1), (2), (3), притом единственным в силу леммы 1. Теорема доказана.

Попробуем теперь найти функции $z_1(x)$, $w_1(x)\in M$ с неположительной, соотв. неотрицательной невязкой.

Возьмем какие нибудь две функции $z(x)$, $w(x)$ из M и вычислим для них невязки $\alpha(x)$, $\beta(x)$

$$\alpha(x) = \mu F[z]-\mu\Delta(x), \quad \beta(x) = \mu F[w]+\mu\Delta(x),$$

где

$$\Delta(x) = N\sum_{i=0}^{n-1}\left[z^{(i)}(x)-w^{(i)}(x)+z^{(i)}(g_i(x))-w^{(i)}(g_i(x))\right].$$

Возьмем две функции $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$ из $C[0,1]$ и пусть $\tilde\alpha$, $\tilde\alpha+\alpha\leqq 0$; $\tilde\beta$, $\tilde\beta+\beta\geqq 0$;

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x\in E,\\ -\int\limits_0^1 G(x,t)\tilde\alpha(t)\,dt, & x\in[0,1], \end{cases} \qquad \vartheta(x) = \begin{cases} 0, & x\in E,\\ -\int\limits_0^1 G(x,t)\tilde\beta(t)\,dt, & x\in[0,1]. \end{cases}$$

Функции $z_1(x)=z(x)+\eta(x)$, $w_1(x)=w(x)+\vartheta(x)$ $(x\in[\lambda,1])$ обладают всеми свойствами элементов M, кроме может быть свойства $|z_1^{(s)}|\leqq K$, $|w_1^{(s)}|\leqq K$ в случае бруса D_K и справедлива для них следующая

Лемма 2. *Если* z_1, $w_1\in M$, *то для них* $\alpha_1(x)\leqq 0$, $\beta_1(x)\geqq 0$.

В справедливости леммы легко убедиться.

Перейдем теперь к другому итерационному методу, которое будет относиться к случаю, когда у нас имеются две функции z_1, $w_1\in M$, для которых

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1(x) &= \mu F[z_1]+\mu\Delta_1(x)\leqq 0\\ \beta_1(x) &= \mu F[w_1]-\mu\Delta_1(x)\geqq 0\end{aligned}\right\}\quad\left(0<\mu\leqq\frac{1}{R};\ \mu\ \text{постоянная}\right),$$

а $\Delta_1(x)$ то же самое, что и выше.

Последовательности приближений $\{z_p(x)\}$, $\{w_p(x)\}$ образуем исходя из z_1, w_1 по закону

$$z_{p+1}(x)=z_p(x)-\eta_p(x),\quad w_{p+1}(x)=w_p(x)-\vartheta_p(x),$$

$$\eta_p(x)=\begin{cases}0, & x\in E,\\ -\int\limits_0^1 G(x,t)\alpha_p(t)\,dt, & x\in[0,1],\end{cases}\qquad \vartheta_p(x)=\begin{cases}0, & x\in E,\\ -\int\limits_0^1 G(x,t)\beta_p(t)\,dt, & x\in[0,1],\end{cases}$$

$$\alpha_p(x)=\mu F[z_p]+\mu\Delta_p(x),\quad \beta_p(x)=\mu F[w_p]-\mu\Delta_p(x),\tag{16}$$

$$\Delta_p(x)=N\sum_{i=0}^{n-1}\left[z_p^{(i)}(x)-w_p^{(i)}(x)+z_p^{(i)}(g_i(x))-w_p^{(i)}(g_i(x))\right].$$

Очевидно, что в случае D_∞ все z_p, w_p принадлежат M, но в случае D_K неизвестно, что производные z_p и w_p превосходят-ли по модулю числа K. Докажем поэтому сначала, что при некоторых условиях все z_p, w_p принадлежат M.

Найдем сначала условие того, чтобы z_2, w_2 принадлежали M и покажем, что тогда $\alpha_2(x)\leqq 0$, $\beta_2(x)\geqq 0$. Поскольку

$$0\geqq\alpha_1(x)-\beta_1(x)=\mu F[z_1]-\mu F[w_1]+2\mu\Delta_1(x),$$

то по формуле Ларганжа получаем

$$z_1^{(n)}(x)-w_1^{(n)}(x)=\left(\mu\left|\frac{\partial F}{\partial u_n}\right|\right)^{-1}(\alpha_1(x)-\beta_1(x))-\left(\left|\frac{\partial F}{\partial u_n}\right|\right)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left|\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|+\right.$$

$$\left.+2N\right][z_1^{(i)}(x)-w_1^{(i)}(x)]-\left(\left|\frac{\partial F}{\partial u_n}\right|\right)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left|\frac{\partial F}{\partial v_i}\right|+2N\right]\left[z_1^{(i)}(g_i(x))-w_1^{(i)}(g_i(x))\right].$$

Правую часть этого выражения обозначим так:

$$\left(\mu\left|\frac{\partial F}{\partial u_n}\right|\right)^{-1}(\alpha_1(x)-\beta_1(x))+L_1(z_1-w_1),$$

где L_1 будем принимать за линейный дифференциальный оператор, действующий на элементах специального множества M (см. выше определение M) для случая бруса D_∞ с начальной функцией $Q(x)\equiv 0$. Обозначим это множество через M°. Введем оператор A_1 действующий в M° по формуле:

$$A_1 y=\begin{cases}0, \; x\in E,\\ -\int\limits_0^1 G(x,t)\left[L_1(y(t))+\left(\mu\left|\frac{\partial F}{\partial u_n}\right|\right)^{-1}(\alpha_1(t)-\beta_1(t))\right]dt, \quad x\in[0,1].\end{cases}$$

Мы имеем, что $z_1-w_1=A_1(z_1-w_1)$. Предположим, что A_1 есть сжатие (см. [1]), тогда из-за неположительности $\alpha_1-\beta_1$ в силу следствия 3.1 работы [1] получаем:

$$w_1^{(i)}(x)\leqq z_1^{(i)}(x),\quad z_1^{(n)}(x)\leqq w_1^{(n)}(x)\quad (i=0,\dots,n-1;\; 0\leqq x\leqq 1),$$

а поскольку $\alpha_1(x)\leqq 0$, $\beta_1(x)\geqq 0$ следует, что при $i=0,\dots,n-1$; $0\leqq x\leqq 1$

$$(17)\qquad z_2^{(i)}(x)\leqq z_1^{(i)}(x),\quad w_1^{(i)}(x)\leqq w_2^{(i)}(x);\quad z_1^{(n)}(x)\leqq z_2^{(n)}(x),\quad w_2^{(n)}(x)\leqq w_1^{(n)}(x).$$

Теперь для того, чтобы z_2, w_2 принадлежали M, достаточно было бы обеспечить то, чтобы выполнялись неравенства

$$(18)\qquad w_2^{(i)}(x)\leqq z_2^{(i)}(x),\quad z_2^{(n)}(x)\leqq w_2^{(n)}(x)\quad (i=0,\dots,n-1;\; 0\leqq x\leqq 1).$$

Заметим, что по закону (16), применяя формулу Лагранжа к разности $F[z_1]-F[w_1]$ получаем равенство

$$(19)\qquad \begin{aligned} z_2^{(n)}(x)-w_2^{(n)}(x)&=h_1(x)=[z_1^{(n)}(x)-w_1^{(n)}(x)]\left(1-\mu\left|\frac{\partial F}{\partial u_n}\right|\right)-\\ &-\mu\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\left(\left|\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|+2N\right)[z_1^{(i)}(x)-w_1^{(i)}(x)]+\left(\left|\frac{\partial F}{\partial v_i}\right|+2N\right)\left[z_1^{(i)}(g_i(x))-w_1^{(i)}(g_i(x))\right]\right\},\end{aligned}$$

а поскольку z_2, w_2 удовлетворяют начальным и граничным условиям (2), (3) получаем при $i=0,\dots,n-1$; $0\leqq x\leqq 1$

$$z_2^{(i)}(x)-w_2^{(i)}(x)=\begin{cases}0, \; x\in E,\\ -\frac{d^i}{dx^i}\int\limits_0^1 G(x,t)h_1(t)\,dt, \; x\in[0,1],\end{cases}$$

а поскольку все слагаемые h_1 неположительны, получаем в силу неотрицательности производных G неравенства (18). Поэтому $z_2, w_2\in M$.

Теперь мы можем вычислить невязки $\alpha_2(x)$, $\beta_2(x)$ и доказать, что

$$\alpha_2(x) = \alpha_1(x)\left(1-\mu\left|\frac{\partial F}{\partial u_n}\right|\right)+\mu N\sum_{i=0}^{n-1}{}' \left[\vartheta_1^{(i)}(x)+\vartheta_1^{(i)}(g_i(x))\right]-$$

$$-\mu\sum_{i=0}^{n-1}{}'\left[\left(\left|\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|+N\right)\eta_1^{(i)}(x)+\left(\left|\frac{\partial F}{\partial v_i}\right|+N\right)\eta_1^{(i)}(g_i(x))\right].$$

Здесь все слагаемые неположительны, поэтому $\alpha_2(x)\leqq 0$. Аналогичное равенство имеет место и для $\beta_2(x)$:

$$\beta_2(x) = \beta_1(x)\left(1-\mu\left|\frac{\partial F}{\partial u_n}\right|\right)+\mu N\sum_{i=0}^{n-1}{}' \left[\eta_1^{(i)}(x)+\eta_1^{(i)}(g_i(x))\right]-$$

$$-\mu\sum_{i=0}^{n-1}{}'\left[\left(\left|\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|+N\right)\vartheta_1^{(i)}(x)+\left(\left|\frac{\partial F}{\partial v_i}\right|+N\right)\vartheta_1^{(i)}(g_i(x))\right],$$

где все слагаемые неотрицательны, откуда $\beta_2(x)\geqq 0$. По закону (16) на основании неравенств $\alpha_2(x)\leqq 0$, $\beta_2(x)\geqq 0$ заключаем, что при $0\leqq x\leqq 1$, $i=0, \ldots, n-1$

$$z_3^{(i)}(x)\leqq z_2^{(i)}(x),\quad z_2^{(n)}(x)\leqq z_3^{(n)}(x);\quad w_2^{(i)}(x)\leqq w_3^{(i)}(x),\quad w_3^{(n)}(x)\leqq w_2^{(n)}(x),$$

а потом как и выше убеждаемся в том, что

$$z_3^{(i)}(x)-w_3^{(i)}(x)\geqq 0,\quad z_3^{(n)}(x)-w_3^{(n)}(x)\leqq 0\quad (i=0,\ldots,n-1;\ 0\leqq x\leqq 1),$$

и доказываем как и выше, что z_3, $w_3\in M$. Продолжая доказательство по индукции убеждаемся в том, что z_p, $w_p\in M$ при всех p натуральных и что имеют место неравенства

$$\left.\begin{matrix} z_{p+1}^{(i)}(x)\leqq z_p^{(i)}(x), & z_p^{(n)}(x)\leqq z_{p+1}^{(n)}(x)\\ w_p^{(i)}(x)\leqq w_{p+1}^{(i)}(x), & w_{p+1}^{(n)}(x)\leqq w_p^{(n)}(x)\end{matrix}\right\}\ (0\leqq x\leqq 1;\ i=0,\ldots,n-1;\ p=1,2,\ldots).$$

Для точного доказательства последних утверждений надо воспользоваться равенствами для $\alpha_{p+1}(x)$, $\beta_{p+1}(x)$ выраженными через p-ые данные, полученными из только что выписанных равенств для α_2, β_2 простой заменой в них индекса 1 на p, 2 на $p+1$, и использовать формулу полученную с помощью такой же замены из (19), или эквивалентную ей формулу

$$z_{p+1}(x)-w_{p+1}(x)=\begin{cases}0, & x\in E,\\ -\int\limits_0^1 G(x,t)h_p(t)\,dt, & x\in[0,1].\end{cases}\tag{20}$$

Найдем теперь условия при которых наша задача имеет решение $y(x)$ и при которых $\{z_p^{(s)}(x)\}$, $\{w_p^{(s)}(x)\}$ при $0\leqq x\leqq 1$, $p\to\infty$ сходятся к $y^{(s)}(x)$. Пусть

H_1 обозначает максисум на $[0,1]$ выражения $|h_1(x)|$ и предположим, что при $i=0, \dots, n-1$ выполняются следующие неравенства

$$(21)\quad \begin{gathered} 1-\frac{\partial F}{\partial u_n}\cdot\mu \leqq \hat{N}, \qquad \mu\left(2N+\frac{\partial F}{\partial u_i}\right) \leqq \hat{N}, \qquad \mu\left(2N+\frac{\partial F}{\partial v_i}\right) \leqq \hat{N}, \\ (2n+1)\hat{N} = \Theta < 1. \end{gathered}$$

Тогда по индукции легко доказать неравенства

$$(22)\quad |z_p^{(s)}(x)-w_p^{(s)}(x)| \leqq \Theta^{p-2}H_1 \quad (0 \leqq x \leqq 1;\quad s=0, \dots, n;\quad p=2, 3, \dots),$$

а это означает, что $z_p^{(s)}(x)-w_p^{(s)}(x) \rightrightarrows 0$ при $p\to\infty$ на $[0,1]$. Из (22) в силу монотонности последовательностей $\{z_p^{(s)}(x)\}$, $\{w_p^{(s)}(x)\}$ получаем, что для некоторой функции $y(x)$

$$z_p^{(s)}(x) \rightrightarrows y^{(s)}(x), \quad w_p^{(s)}(x) \rightrightarrows y^{(s)}(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1;\ s=0, \dots, n),$$

а отсюда с помощью предельного перехода в формулах

$$z_{p+1}^{(n)}(x) = z_p^{(n)}(x)-\alpha_p(x), \quad w_{p+1}^{(n)}(x) = w_p^{(n)}(x)-\beta_p(x)$$

получаем, что $\alpha_p(x)$, $\beta_p(x) \rightrightarrows 0$. Перейдем теперь к пределу при $p\to\infty$ в формулах $\alpha_p(x)=\mu F[z_p]-\mu\Delta_p(x)$. Мы получаем, что $F[z_p] \rightrightarrows 0$, а в силу непрерывности F учитывая закон (16) для функции

$$y(x) = \lim_{p\to\infty} z_p(x) = \lim_{p\to\infty} w_p(x) \quad (\lambda \leqq x \leqq 1)$$

получаем, что $F[y]=0$, $y\in M$, т. е. y является решением задачи (1), (2), (3). В силу условия Д) функция $y(x)$ есть единственное решение.

Таким образом мы доказали следующую теорему

Теорема 2. *Если оператор A_1 есть сжатие и условие* (21) *выполнено, то задача* (1), (2), (3) *имеет единственное решение $y(x)$ и*

$$\begin{gathered} w_p^{(i)}(x) \nearrow\!\!\nearrow y^{(i)}(x) \swarrow\!\!\swarrow z_p^{(i)}(x), \quad z_p^{(n)}(x) \nearrow\!\!\nearrow y^{(n)}(x) \swarrow\!\!\swarrow w_p^{(n)}(x) \\ (i=0, \dots, n-1;\ 0 \leqq x \leqq 1). \end{gathered}$$

Отметим наконец, что в случае если частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial u_j}$, $\dfrac{\partial F}{\partial v_i}$ $(j=0, \dots, n;\ i=0, \dots, n-1)$ не меняют знака, то можно получить более сильные и простые результаты, аналогичные результатам статьи [1].

Изложенный нами метод применим и в том случае, если метод шагов не применим, а также и в том случае, если $g_i(x)\equiv x$ $(i=0, \dots, n-1)$ т. е. для обыкновенного уравнения без запаздывания. Наш метод применялся для решения конкретных задач и скорость сходимости приближений оказалась достаточно быстрой. Отметим, что погрешность вычислений при этом методе удобно оценивается.

Этот метод распространяется и на другие краевые задачи, а также и на задачи с запаздыванием, указанные в списке литературы статьи [1] под номерами [7], ..., [20], даже в случае, когда соответствующие уравнения заданы в неявном виде и например на задачу типа (1), (2), (3) поставленную для системы уравнений заданных в неявном виде.

Литература

[1] Ю. И. Ковач, J. Hegedűs, Об одном двустронием итерационном методе решения кравой задачи с запаздыванием, *Acta Sci. Math.*, **36** (1974), 69—89.

(Поступило 1. XII 1972 г.)