Об одном двустороннем итерационном методе решения краевой задачи с запаздыванием

Ю. И. КОВАЧ (Ужгород, СССР), J. HEGEDŰS (Szeged)

Краевые задачи типа Штурма—Лиувилля для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом представляют большой интерес (см. напр. [5], [6]).

Задачи такого рода рассматривались напр. в [1], [2], [3], а также и в [5], [6] (см. библиографию в этих книгах), где доказывались теоремы существования и единственности, теоремы о собственных значениях и собственных функциях. Для аналитического и численного решения этих задач и оценки решения и его производных удобным средством является метод двусторонних приближений, который применялся для разных задач с запаздыванием [7—10].

В этой работе изложен двусторонний итерационный метод решения краевой задачи для дифференциального уравнения n-го порядка ($n \geqq 2$) с запаздывающим аргументом такого типа, где первые $n-1$ граничных условий задаются в начальной точке, а последнее в правом конце рассматриваемого отрезка. Тем самым мы на эту задачу распространили результаты работы [9], где для краевой задачи иного типа построены двусторонние приближения в случае системы уравнений специального вида. Эта статья примыкает к работе [10], где строился итерационный метод решения начальной задачи для системы с запаздыванием.

Краевая задача, которую мы будем рассматривать, для обыкновенного уравнения n-го порядка рассматривалась в [4].

В конце работы мы коротко отметим, как переносятся основные результаты на системы уравнений n_i-го порядка ($n_i \geqq 2$, $i=1, 2, \ldots, r$).

1. Постановка задачи

В разделах 1—6 мы будем рассматривать следуюшую краевую задачу:

(1.1)

$$y^{(n)}(x) = f[y] \equiv f\big(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), y(g_0(x)), \ldots, y^{(n-1)}(g_{n-1}(x))\big) \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

(1.2) $$y(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = y^{(n-1)}(1) = 0 \quad (n \geqq 2),$$

(1.3) $$y|_E = Q(x),$$

где заданные функции f, g_i, Q и начальное множество E удовлетворяют следующим условиям:

а) $f(x, u_0, \ldots, u_{n-1}, v_0, \ldots, v_{n-1})$ определена в одном из двух $(2n+1)$-мерных брусов D_K и D_∞:

$$\left.\begin{array}{l} D_K: 0 \leqq x \leqq 1,\ |u_i| \leqq K,\ |v_i| \leqq K, \text{ где } K \text{ постоянная, } K > 0, \\ D_\infty: 0 \leqq x \leqq 1,\ |u_i| < \infty,\ |v_i| < \infty \end{array}\right\} \quad (i = 0, \ldots, n-1),$$

f непрерывна и удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x, \ldots, \tilde{v}_{n-1}) - f(x, \ldots, v_{n-1})| \leqq N \sum_{i=0}^{n-1} (|\tilde{u}_i - u_i| + |\tilde{v}_i - v_i|),$$

причем если f определена только в D_K то $|f| \leqq K$.

б) $g_i \in C[0, 1]$, $\lambda \leqq g_i(x) \leqq x \quad (i = 0, \ldots, n-1)$,

где λ отрицательная постоянная, g_{n-1} не меняет знак на $[0, 1]$ (см. Замечание 6.1),

в) $E = [\lambda, 0]$,

г) $Q(x)$ определена и $(n-1)$-раз непрерывно дифференцируема на E и

$$Q(0) = \ldots = Q^{(n-2)}(0) = 0,$$

причем в случае если f определена только в D_K, то

$$|Q^{(i)}| \leqq K \quad (i = 0, \ldots, n-1).$$

При этих условиях функцию $y(x)$ мы будем называть решением задачи (1.1), (1.2), (1.3) если она принадлежит классу $C^{n-2}[\lambda, 1]$ $\big(y^{(n-1)}(x)$ при $x=0$ может иметь разрыв первого рода$\big)$, а сужение ее на $[0, 1]$ классу $C^n[0, 1]$ и если она удовлетворяет уравнению (1.1) на $[+0, 1]$ и условиям (1.2), (1.3).

Отметим, что краевая задача рассматриваемая на произвольном отрезке $[a, b]$, заменой $t = \dfrac{x-a}{b-a}$ сводится к краевой задаче на отрезке $[0, 1]$, а условия

$$y(0) = y_0, \ldots, y^{(n-2)}(0) = y_{n-2}; \quad y^{(n-1)}(1) = y_{n-1}$$

подстановкой

$$z(x) = y(x) - \left[y_0 + y_1 x + \ldots + \frac{y_{n-2}\, x^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{y_{n-1}\, x^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

сводятся к нулевым условиям (1.2).

Последний раздел (разд. 7) посвящен краевой задаче для системы уравнений типа (1.1).

2. Существование и единственность решения задачи

Очевидно, что задача (1.1), (1.2), (1.3) эквивалентна задаче:

$$y(x) = \begin{cases} Q(x), & x \in E, \\ -\int\limits_0^1 G(x, t) f[y(t)]\, dt, & x \in [0, 1], \end{cases} \qquad y(x)|_{[0,1]} \in C^{n-1}[+0, 1], \tag{2.1}$$

где $G(x, t)$ есть функция Грина задачи

$$y^{(n)}(x) = h(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1), \quad y(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = y^{(n-1)}(1) = 0,$$

а именно

$$G(x, t) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & (x \leqq t), \\ \dfrac{x^{n-1} - (x-t)^{n-1}}{(n-1)!} & (t \leqq x). \end{cases}$$

Отметим некоторые свойства функции G:

$$0 \leqq \frac{\partial^j G(x, t)}{\partial x^j} \leqq \frac{\partial^j G(1, t)}{\partial x^j} = \frac{1-(1-t)^{n-1-j}}{(n-1-j)!} \quad (j = 0, \ldots, n-2),$$

$$0 \leqq \frac{\partial^{n-1} G(x, t)}{\partial x^{n-1}} \leqq 1,$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(-\int\limits_0^1 G(x, t) F(t)\, dt\right) = F(x) \quad (F \in C[0, 1]).$$

Введем обозначение

$$\mathcal{M}_i = \{x : g_i(x) > 0\} \quad (i = 0, \ldots, n-1).$$

Теорема 2.1. *Если выполнено условие*

$$N\left[2 - \frac{1}{n!} + \max_i \int\limits_{\mathcal{M}_i} \left(1 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\partial^k G(1, t)}{\partial x^k}\right) dt\right] < 1, \tag{2.2}$$

то решение задачи (1.1), (1.2), (1.3) *существует и единственно.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$M=\begin{cases}\{z: z\in C^{n-2}[\lambda, 1], \quad z|_E=Q, \quad z|_{[0,1]}\in C^{n-1}[0,1], \quad |z^{(i)}|\leqq K, \quad z^{(n-1)}(1)=0\} \\ \qquad (i=0,\dots,n-1), \\ \text{если } f \text{ определена только в } D_K, \\ \{z: z\in C^{n-2}[\lambda, 1], \quad z|_E=Q, \quad z_{[0,1]}\in C^{n-1}[0,1], \quad z^{(n-1)}(1)=0\}, \\ \text{если } f \text{ определена в } D_\infty.\end{cases}$$

Вводим норму в M по формуле

$$\|z\|=\sum_{i=0}^{n-1}\max_{x\in[0,1]}|z^{(i)}(x)|.$$

На M определим оператор A:

$$Az=\begin{cases}Q(x), & x\in E,\\ -\int\limits_0^1 G(x,t)f[z(t)]\,dt, & x\in[0,1].\end{cases}$$

Непосредственно можно убедиться в том, что оператор A множество M переводит в M, и что задача (1.1), (1.2), (1.3) эквивалентна уравнению

$$y=Ay.$$

Используя условие Липшица и свойства G, для любых $z, y\in M$ получаем

$$\begin{aligned}\|Ay-Az\|&\leqq N\int\limits_0^1\sum_{i=0}^{n-1}\left[|y^{(i)}(t)-z^{(i)}(t)|+\left|y^{(i)}(g_i(t))-z^{(i)}(g_i(t))\right|\right]dt+\\ &+N\sum_{k=0}^{n-2}\int\limits_0^1\frac{\partial^k G(1,t)}{\partial x^k}\sum_{i=0}^{n-1}\left[|y^{(i)}(t)-z^{(i)}(t)|+\left|y^{(i)}(g_i(t))-z^{(i)}(g_i(t))\right|\right]dt.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Вместо суммы $\sum_{i=0}^{n-1}|y^{(i)}(t)-z^{(i)}(t)|$ поставим число $\|y-z\|$, а вместо $\left|y^{(i)}(g_i(t))-z^{(i)}(g_i(t))\right|$ для тех $t\in[0,1]$, для которых $g_i(t)>0$ ставим число $\max\limits_{t\in[0,1]}|y^{(i)}(t)-z^{(i)}(t)|$, для остальных t это слагаемое обращается в нуль. Итак получим:

$$\|Ay-Az\|\leqq\|y-z\|N\left[2-\frac{1}{n!}+\max_i\int\limits_{M_i}\left(1+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\partial^k G(1,t)}{\partial x^k}\right)dt\right].$$

Значит при выполнении условия (2.2) A будет сжатием. В силу теоремы о сжатом отображении, решение уравнения $y=Ay$ существует, единственно и может быть найдено методом последовательных приближений.

Теорема доказана.

Если в (2.3) вместо всех производных G поставим единицу, то получаем более простое условие сжатости $2nN<1$.

В следующих разделах мы будем излагать итерационные методы. В разделах 3, 4, 5 фигурируют предположения о существовании некоторых функций $z_1(x)$, $w_1(x)$ с неположительной и неотрицательной невязкой соответственно. В случае бруса D_K, если $|f| \leqq K$, такие $z_1(x)$, $w_1(x)$ можно найти явно: именно можно взять функцию равную $Q(x)$ на E и некоторому многочлену на $[0, 1]$, а если условие (2.2) выполнено, то легко показать, что они существуют и для случая бруса D_∞. Аналогичное утверждение справедливо и для системы уравнений (разд. 7).

3. Нелинейное уравнение с неположительными частными производными

Поставленную задачу мы сейчас будем решать для следующего частного случая.

(i) Условия б), в), г) выполнены,

$$\text{(ii)} \quad \left.\begin{array}{l} f,\ \dfrac{\partial f}{\partial u_i},\ \dfrac{\partial f}{\partial v_i} \in C(D_K) \quad \text{или} \quad C(D_\infty) \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial u_i},\ \dfrac{\partial f}{\partial v_i} \leqq 0 \end{array}\right\} \quad (i = 0, \dots, n-1),$$

(iii) A сжато отображает M в M,

(iv) Существуют две функции $z_1(x)$, $w_1(x) \in M$, n-раз непрерывно дифференцируемые на $[0, 1]$, для которых

$$\alpha_1(x) = z_1^{(n)}(x) - f[z_1] \leqq 0, \quad \beta_1(x) = w_1^{(n)}(x) - f[w_1] \geqq 0.$$

Двусторонние приближения к решению $y(x)$ строятся по формулам

$$z_{p+1} = Az_p, \quad w_{p+1} = Aw_p \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Для них справедлива следующая

Теорема 3.1. *При $p \to \infty$ справедливо*

$$\left.\begin{array}{ll} w_p^{(i)}(x) \nearrow y^{(i)}(x) \swarrow z_p^{(i)}(x) & (i = 0, \dots, n-1) \\ z_p^{(n)}(x) \nearrow y^{(n)}(x) \swarrow w_p^{(n)}(x) & \end{array}\right\} \quad (0 \leqq x \leqq 1)\,^*).$$

Доказательство. Учитывая, что A сжатие получаем: все z_p, w_p принадлежат M и n-раз непрерывно дифференцируемы на $[0, 1]$, кроме того

$$\|z_p - y\|, \quad \|w_p - y\| \to 0 \quad (p \to \infty),$$

*) Запись $w_p^{(i)}(x) \nearrow y^{(i)}(x)$, $y^{(i)}(x) \swarrow z_p^{(i)}(x)$ означает, что последовательности $\{w_p^{(i)}(x)\}$, $\{z_p^{(i)}(x)\}$ монотонно не убывают, соотв. не возрастают и равномерно сходятся к $y^{(i)}(x)$.

а это означает, что при $p\to\infty$

$$z_p^{(i)}(x)-y^{(i)}(x),\quad w_p^{(i)}(x)-y^{(i)}(x)\rightrightarrows 0\quad (i=0,\dots,n-1;\quad 0\leqq x\leqq 1).$$

Отсюда в силу непрерывности f получаем, что при $p\to\infty$

$$z_p^{(n)}(x)-y^{(n)}(x),\quad w_p^{(n)}(x)-y^{(n)}(x)\rightrightarrows 0\quad (0\leqq x\leqq 1).$$

Нам осталось доказать монотонность последовательностей $\{z_p^{(s)}(x)\}$, $\{w_p^{(s)}(x)\}$ $(s=0,\dots,n)$. Для этого заметим, что при всех p натуральных справедливы следующие формулы

$$z_{p+1}(x)=z_p(x)-\eta_p(x),\quad w_{p+1}(x)=w_p(x)-\vartheta_p(x),\tag{3.1}$$

где

$$\eta_p(x)=\begin{cases}0, & x\in E,\\ -\int\limits_0^1 G(x,t)\alpha_p(t)\,dt, & x\in[0,1],\end{cases}$$

$$\vartheta_p(x)=\begin{cases}0, & x\in E,\\ -\int\limits_0^1 G(x,t)\beta_p(t)\,dt, & x\in[0,1],\end{cases}$$

а невязки $\alpha_p(x)$, $\beta_p(x)$ определяются по формулам

$$\alpha_p(x)=z_p^{(n)}(x)-f[z_p],\quad \beta_p(x)=w_p^{(n)}(x)-f[w_p].$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при всех p натуральных

$$\begin{aligned}\alpha_{p+1}(x)&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial u_i}\bigg|\,\eta_p^{(i)}(x)+\frac{\partial f}{\partial v_i}\bigg|\,\eta_p^{(i)}(g_i(x)),\\ \beta_{p+1}(x)&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial u_i}\bigg|\,\vartheta_p^{(i)}(x)+\frac{\partial f}{\partial v_i}\bigg|\,\vartheta_p^{(i)}(g_i(x)),\end{aligned}\tag{3.2}$$

где как и в дальнейшем через $\dfrac{\partial f}{\partial u_i}\bigg|$, $\dfrac{\partial f}{\partial v_i}\bigg|$ обозначаем промежуточное (по формуле Лагранжа) значения этих производных. Воспользуясь этой формулой, на основании (iv) получаем, что при всех p натуральных

$$\alpha_p(x)\leqq 0,\quad \beta_p(x)\geqq 0,$$

а отсюда по (3.1) получаем доказываемую монотонность.

Следствие 3.1. *Если $Q(x)\equiv 0$ и $f(x,0,\dots,0)\geqq 0$, то*

$$y^{(i)}(x)\leqq 0,\quad y^{(n)}(x)\geqq 0\quad (i=0,\dots,n-1;\quad 0\leqq x\leqq 1),$$

а если $Q(x) \equiv 0$ *и* $f(x, 0, \ldots, 0) \leqq 0$, *то*

$$y^{(i)}(x) \geqq 0, \quad y^{(n)}(x) \leqq 0 \quad (i = 0, \ldots, n-1; \quad 0 \leqq x \leqq 1).$$

Это сразу получается из теоремы 3.1, ведь в первом случае можно взять $z_1(x) \equiv 0$, а во втором $w_1(x) \equiv 0$.

Приведенные в этом разделе результаты справедливы в частности для линейных уравнений с неположительными коэффициентами.

4. Нелинейное уравнение с неотрицательными частными производными

Предположим, что все условия предыдущего раздела выполнены, кроме второй строки (ii), заменяющейся в этом разделе условием

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_i} \geqq 0 \quad (i = 0, \ldots, n-1).$$

При обозначениях предыдущего раздела для решения $y(x)$ поставленной задачи и последовательностей $\{z_p(x)\}$, $\{w_p(x)\}$, образованных как и прежде методом последовательных приближений, исходя из $z_1(x)$, $w_1(x)$, справедлива следующая

Теорема 4.1. *Если* $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) \leqq 0$, *то при* $l \to \infty$ $(l = 1, 2, \ldots)$

$$\left.\begin{aligned} &z_{2l}^{(i)}(x) \nearrow\!\!\nearrow y^{(i)}(x) \swarrow\!\!\swarrow z_{2l-1}^{(i)}(x) \quad (i = 0, \ldots, n-1) \\ &z_{2l-1}^{(n)}(x) \nearrow\!\!\nearrow y^{(n)}(x) \swarrow\!\!\swarrow z_{2l}^{(n)}(x) \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

аналогично из $\beta_1(x) + \beta_2(x) \geqq 0$ *следует, что при* $l \to \infty$ $(l = 1, 2, \ldots)$

$$\left.\begin{aligned} &w_{2l-1}^{(n)}(x) \nearrow\!\!\nearrow y^{(i)}(x) \swarrow\!\!\swarrow w_{2l}^{(i)}(x) \quad (i = 0, \ldots, n-1) \\ &w_{2l}^{(n)}(x) \nearrow\!\!\nearrow y^{(n)}(x) \swarrow\!\!\swarrow w_{2l-1}^{(n)}(x) \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.1 по теореме о сжатом отображении получаем, что все z_p, $w_p \in M$ $(p = 1, 2, \ldots)$ и что они n-раз непрерывно дифференцируемы на $[0, 1]$, кроме того при $p \to \infty$

$$z_p^{(s)}(x) \rightrightarrows y^{(s)}(x), \quad w_p^{(s)}(x) \rightrightarrows y^{(s)}(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1, \quad s = 0, \ldots, n).$$

Нам осталось доказать монотонность подпоследовательностей фигурирующих в теореме.

Применяя формулу Лагранжа, легко показать, что при всех $p = 1, 2, \ldots$

$$\alpha_{p+1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\partial f}{\partial u_i} \bigg| \eta_p^{(i)}(x) + \frac{\partial f}{\partial v_i} \bigg| \eta_p^{(i)}(g_i(x)) \right],$$

$$\beta_{p+1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\partial f}{\partial u_i} \bigg| \vartheta_p^{(i)}(x) + \frac{\partial f}{\partial v_i} \bigg| \vartheta_p^{(i)}(g_i(x)) \right],$$

а отсюда, поскольку $\alpha_1(x) \leqq 0$, $\beta_1(x) \geqq 0$ по формулам (3.1) получаем, учитывая неотрицательность частных производных у f, при $0 \leqq x \leqq 1$; $i=0, \ldots, n-1$; $l=1, 2, \ldots$

$$z_{2l-1}^{(i)}(x) \geqq z_{2l}^{(i)}(x), \quad z_{2l+1}^{(i)}(x) \geqq z_{2l}^{(i)}(x), \quad z_{2l}^{(n)}(x) \geqq z_{2l-1}^{(n)}(x), \quad z_{2l}^{(n)}(x) \geqq z_{2l+1}^{(n)}(x),$$

$$w_{2l}^{(i)}(x) \geqq w_{2l-1}^{(i)}(x), \quad w_{2l}^{(i)}(x) \geqq w_{2l+1}^{(i)}(x), \quad w_{2l-1}^{(n)}(x) \geqq w_{2l}^{(n)}(x), \quad w_{2l+1}^{(n)}(x) \geqq w_{2l}^{(n)}(x).$$

Из (3.1 легко получить, что

$$z_3(x)-z_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ \int\limits_0^1 G(x, t)\,[\alpha_1(t)+\alpha_2(t)]\,dt & x \in [0, 1], \end{cases}$$

$$\text{(4.1)} \qquad w_3(x)-w_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ \int\limits_0^1 G(x, t)\,[\beta_1(t)+\beta_2(t)]\,dt, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

откуда используя условие теоремы и свойства G получаем, что

$$\text{(4.2)} \qquad \left.\begin{array}{ll} z_3^{(i)}(x) \leqq z_1^{(i)}(x), & z_1^{(n)}(x) \leqq z_3^{(n)}(x) \\ w_1^{(i)}(x) \leqq w_3^{(i)}(x), & w_3^{(n)}(x) \leqq w_1^{(n)}(x) \end{array}\right\} \quad (0 \leqq x \leqq 1, \quad i = 0, \ldots, n-1).$$

Очевидно, что при всех $p \geqq 2$ натуральных

$$z_{p+2}-z_p = Az_{p+1}-Az_{p-1}, \quad w_{p+2}-w_p = Aw_{p+1}-Aw_p.$$

Расписав эти формулы по самому определению A, дифференцируя их s-раз ($s=0, \ldots, n$), применяя формулу Лагранжа и используя свойства G, (4.2) и неотрицательность частных производных f, по индукции можно убедиться в том, что последовательности фигурирующие в теореме не возрастают, соотв. не убывают. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Если* $Q(x) \equiv 0$ *и* $f(x, u_0, \ldots, v_{n-1}) \geqq 0$ *при всех* $u_i \leqq 0$, $v_i \leqq 0$ ($i=0, \ldots, n-1$), *то*

$$y^{(i)}(x) \leqq 0, \quad y^{(n)}(x) \geqq 0 \quad (0 \leqq x \leqq 1; \quad i = 0, \ldots, n-1),$$

аналогично из того, что $Q(x) \equiv 0$ *и* $f(x, u_0, \ldots, v_{n-1}) \leqq 0$ *при всех* $u_i \geqq 0$, $v_i \geqq 0$ ($i=0, \ldots, n-1$) *следует, что*

$$y^{(i)}(x) \geqq 0, \quad y^{(n)}(x) \leqq 0 \quad (0 \leqq x \leqq 1; \quad i = 0, \ldots, n-1).$$

Для доказательства достаточно заметить, что в первом случае можно взять $z_1(x) \equiv 0$, а во втором случае $w_1(x) \equiv 0$, и что при таком выборе

$$\alpha_1(x)+\alpha_2(x) = -f[-\eta_1], \quad \beta_1(x)+\beta_2(x) = -f[-\vartheta_1].$$

Очевидно, что вместо неотрицательности (соотв. неположительности) f достаточно потребовать выполнение следующих неравенств

$$f(x, 0, \ldots, 0) \geqq 0, \quad f[-\eta_1] \geqq 0; \quad f(x, 0, \ldots, 0) \leqq 0, \quad f[-\vartheta_1] \leqq 0,$$

где η_1, ϑ_1 образуем соответственно из $z_1(x) \equiv 0$ и $w_1(x) \equiv 0$. Прежние выводы останутся верными и в этом случае.

Укажем теперь на один метод, с помощью которого можно найти такие функции z_1, w_1 из M, которые дают неположительные (соотв. неотрицательные невязки). Возьмем две произвольные функции z, w из M, n-раз непрерывно дифференцируемые на $[0, 1]$. Вычислим для них невязки

$$\alpha(x) = z^{(n)}(x) - f[z], \quad \beta(x) = w^{(n)}(x) - f[w].$$

Возьмем теперь какие-нибудь две непрерывные на $[0, 1]$ функции $\tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{\beta}(t)$ для которых

$$\tilde{\alpha}(t) \leqq 0, \quad \tilde{\alpha}(t) + \alpha(t) \leqq 0; \quad \tilde{\beta}(t) \geqq 0, \quad \tilde{\beta}(t) + \beta(t) \geqq 0 \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

и пусть

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ -\int\limits_0^1 G(x, t)\tilde{\alpha}(t)\, dt, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ -\int\limits_0^1 G(x, t)\tilde{\beta}(t)\, dt, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

и

$$z_1(x) = z(x) + \eta(x), \quad w_1(x) = w(x) + \vartheta(x).$$

Очевидно, что $z_1(x)$ и $w_1(x)$ n-раз непрерывно дифференцируемы на $[0, 1]$ и что если их производные не превосходят числа K, то они принадлежат M в случае бруса D_K (в случае D_∞: $z_1, w_1 \in M$ безусловно). Справедливо поэтому для них

Лемма 4.1. *Если* $z_1, w_1 \in M$, *то* $\alpha_1(x) \leqq 0$, $\beta_1(x) \geqq 0$.

В справедливости леммы легко убедиться.

Отметим наконец, что приведенные в этом разделе результаты справедливы в частности для линейных уравнений с неотрицательными коэффициентами.

5. Нелинейное уравнение с непрерывными частными производными

Поставленную задачу в этом разделе мы будем рассматривать при следующих предположениях

(i) Условия б), в), г) выполнены,

$$\left.\begin{aligned}&\text{(ii)}\quad f,\ \frac{\partial f}{\partial u_i},\ \frac{\partial f}{\partial v_i}\in C(D_K)\quad\text{или}\quad C(D_\infty)\\ &\left|\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|\le N_i,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial v_i}\right|\le N_i\end{aligned}\right\}\quad (i=0,\dots,n-1),$$

(iii) A сжато отображает M в M и условие (2.2) выполнено.

(iv) Существуют две функции $z_1(x)$, $w_1(x)\in M$, n-раз непрерывно дифференцируемые на $[0, 1]$, для которых определенные ниже невязки α_1, β_1 неположительны, соотв. неотрицательны.

Итерационный процесс тут строится исходя из $z_1(x)$, $w_1(x)$ по формулам

$$\text{(5.1)}\qquad \left.\begin{aligned}z_{p+1}(x)&=\frac{1}{2}(Az_p+Aw_p)-\frac{1}{2}\Theta_p(x)\\ w_{p+1}(x)&=\frac{1}{2}(Az_p+Aw_p)+\frac{1}{2}\Theta_p(x)\end{aligned}\right\}\quad (p=1,2,\dots),$$

где

$$\Theta_p(x)=\begin{cases}\int\limits_0^1 G(x,t)\,\Delta_p(t)\,dt & \text{если}\quad 0\le x\le 1,\\ 0 & \text{если}\quad x\in E,\end{cases}$$

$$\Delta_p(t)=\sum_{i=0}^{n-1}N_i\big[z_p^{(i)}(t)+z_p^{(i)}(g_i(t))-w_p^{(i)}(t)-w_p^{(i)}(g_i(t))\big]\quad (0\le t\le 1).$$

Невязки $\alpha_p(x)$, $\beta_p(x)$ и функции $\eta_p(x)$, $\vartheta_p(x)$ определяются по формулам

$$\alpha_p(x)=z_p^{(n)}(x)-\frac{1}{2}f[z_p]-\frac{1}{2}f[w_p]-\frac{1}{2}\Delta_p(x),$$

$$\beta_p(x)=w_p^{(n)}(x)-\frac{1}{2}f[z_p]-\frac{1}{2}f[w_p]+\frac{1}{2}\Delta_p(x),$$

$$\eta_p(x)=\begin{cases}0, & x\in E,\\ -\int\limits_0^1 G(x,t)\,\alpha_p(t)\,dt, & x\in[0,1],\end{cases}$$

$$\vartheta_p(x)=\begin{cases}0, & x\in E,\\ -\int\limits_0^1 G(x,t)\,\beta_p(t)\,dt, & x\in[0,1].\end{cases}$$

Условие (iv) при сказанных в конце раздела 2 отпадает. Из практических соображенний покажем еще один способ построения этих функций $z_1(x)$, $w_1(x)$. Возьмем какие-нибудь две функции $z(x)$, $w(x)\in M$, n-раз непрерывно дифференцируемые на $[0, 1]$. Вычислим для них невязки $\alpha(x)$, $\beta(x)$, которые мы получаем таким образом, что в формулах для $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ вместо $z_1(x)$, $w_1(x)$ подставляем $z(x)$, $w(x)$. Возьмем теперь какие-нибудь две непрерывные на $[0, 1]$ функции $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ для которых

$$\tilde{\alpha}(t) \leqq 0, \quad \tilde{\alpha}(t)+\alpha(t) \leqq 0; \qquad \tilde{\beta}(t) \geqq 0, \quad \tilde{\beta}(t)+\beta(t) \geqq 0,$$

и пусть

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x\in E, \\ -\int\limits_0^1 G(x, t)\tilde{\alpha}(t)\,dt, & x\in[0, 1], \end{cases}$$

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0, & x\in E, \\ -\int\limits_0^1 G(x, t)\tilde{\beta}(t)\,dt, & x\in[0, 1], \end{cases}$$

и

$$z_1(x) = z(x)+\eta(x), \quad w_1(x) = w(x)+\vartheta(x).$$

Очевидно, что эти функции n-раз непрерыно дифференцируемы на $[0, 1]$ и что если их производные не превосходят числа K, то они принадлежат M в случае бруса D_K (в случае бруса D_∞: $z_1, w_1\in M$ безусловно). Справедлива поэтому для них

Лемма 5.1. *Если* $z_1, w_1\in M$, *то* $\alpha_1(x)\leqq 0$, $\beta_1(x)\geqq 0$.

В справедливости леммы легко убедиться.

Обозначим через $y(x)$ решение рассматриваемой задачи. Справедлива для него следующая

Теорема 5.1. *Если выполнены условия*

(i) z_2, w_2 *не выходят из* M*),

(ii) $\alpha_1(x)+\alpha_2(x) \leqq 0$, $\beta_1(x)+\beta_2(x) \geqq 0$,

то при $l\to\infty$ $(l = 1, 2, \ldots)$; $i = 0, \ldots, n-1$

$$\left.\begin{array}{ll} z_{2l}^{(i)}(x)\nearrow\nearrow y^{(i)}(x)\swarrow\swarrow z_{2l-1}^{(i)}(x), & w_{2l-1}^{(i)}(x)\nearrow\nearrow y^{(i)}(x)\swarrow\swarrow w_{2l}^{(i)}(x) \\ z_{2l-1}^{(n)}(x)\nearrow\nearrow y^{(n)}(x)\swarrow\swarrow z_{2l}^{(n)}(x), & w_{2l}^{(n)}(x)\nearrow\nearrow y^{(n)}(x)\swarrow\swarrow w_{2l-1}^{(n)}(x) \end{array}\right\} \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Доказательство. Доказательство разбиваем на три части: А), Б), В).

А) Предположим, что все z_p, $w_p\in M$ и найдем связь между $z_p^{(s)}(x)$ и $z_{p+1}^{(s)}(x)$, $w_p^{(s)}(x)$ и $w_{p+1}^{(s)}(x)$ при $p=1, 2, \ldots$; $s=0, \ldots, n$; $0\leqq x\leqq 1$.

---

*) В случае бруса D_∞ это автоматически выполняется.

Используя свойства G легко показать, что

$$z_{p+1}(x)=z_p(x)-\eta_p(x),\quad w_{p+1}(x)=w_p(x)-\vartheta_p(x)\quad (p=1,2,\ldots). \tag{5.2}$$

Применяя формулу Лагранжа к разностям $f[z_p]-f[z_p-\eta_p]$ и $f[w_p]-f[w_p-\vartheta_p]$ мы находим при всех $p=1,2,\ldots,$ что

$$\alpha_{p+1}(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\eta_p^{(i)}(x)\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\bigg|+N_i\right)+\eta_p^{(i)}(g_i(x))\left(\frac{\partial f}{\partial v_i}\bigg|+N_i\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\vartheta_p^{(i)}(x)\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\bigg|-N_i\right)+\vartheta_p^{(i)}(g_i(x))\left(\frac{\partial f}{\partial v_i}\bigg|-N_i\right)\right],$$

$$\beta_{p+1}(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\eta_p^{(i)}(x)\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\bigg|-N_i\right)+\eta_p^{(i)}(g_i(x))\left(\frac{\partial f}{\partial v_i}\bigg|-N_i\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\vartheta_p^{(i)}(x)\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\bigg|+N_i\right)+\vartheta_p^{(i)}(g_i(x))\left(\frac{\partial f}{\partial v_i}\bigg|+N_i\right)\right].$$

Учитывая теперь неположительность (соотв. неотрицательность) множителей в скобках и то, что $\alpha_1(x)\leqq 0$, $\beta_1(x)\geqq 0$ легко убедиться по индукции в том, что при p нечетном $\alpha_p(x)\leqq 0$, $\beta_p(x)\geqq 0$, а при p четном $\alpha_p(x)\geqq 0$, $\beta_p(x)\leqq 0$. Отсюда по (5.2) получаем, что при $l=1,2,\ldots;$ $i=0,\ldots,n-1;$ $0\leqq x\leqq 1$

$$\begin{gathered} z_{2l}^{(i)}(x)\leqq z_{2l-1}^{(i)}(x),\quad z_{2l}^{(i)}(x)\leqq z_{2l+1}^{(i)}(x);\quad w_{2l-1}^{(i)}(x)\leqq w_{2l}^{(i)}(x),\quad w_{2l+1}^{(i)}(x)\leqq w_{2l}^{(i)}(x),\\ z_{2l-1}^{(n)}(x)\leqq z_{2l}^{(n)}(x),\quad z_{2l+1}^{(n)}(x)\leqq z_{2l}^{(n)}(x);\quad w_{2l}^{(n)}(x)\leqq w_{2l-1}^{(n)}(x),\quad w_{2l}^{(n)}(x)\leqq w_{2l+1}^{(n)}(x). \end{gathered} \tag{5.3}$$

Из проведенных (пока формальных) рассуждений можно сделать следующие выводы. Если при некотором p натуральном $z_1,\ldots,z_p$; $w_1,\ldots,w_p$ принадлежат M, тогда z_{p+1}, w_{p+1} можно вычислить по закону (5.2) и будут справедливы неравенства (5.3) соответствующие четности p между $z_{p+1}^{(s)}(x)$ и $z_p^{(s)}(x)$, $w_{p+1}^{(s)}(x)$ и $w_p^{(s)}(x)$.

Б) Покажем теперь, что все z_p, w_p принадлежат M, за одно найдем связь между $z_{p+2}^{(s)}(x)$ и $z_p^{(s)}(x)$, $w_{p+2}^{(s)}(x)$ и $w_p^{(s)}(x)$ при $s=0,\ldots,n$; $0\leqq x\leqq 1$.

По условию (i) функции z_2, w_2 принадлежат M. Применим поэтому теперь последнее утверждение части А) доказательства в случае $p=2$. Как частный результат получаем формулы (5.2) для $p=1,2$. Складывая, а потом дифференцируя их получаем при $s=0,\ldots,n$; $0\leqq x\leqq 1$:

$$\begin{gathered} z_1^{(s)}(x)-z_3^{(s)}(x)=-\frac{d^s}{dx^s}\int_0^1 G(x,t)\,[\alpha_1(t)+\alpha_2(t)]\,dt,\\ w_1^{(s)}(x)-w_3^{(s)}(x)=-\frac{d^s}{dx^s}\int_0^1 G(x,t)\,[\beta_1(t)+\beta_2(t)]\,dt, \end{gathered} \tag{5.4}$$

а из этих формул в силу условия (ii) и свойств G, учитывая неравенства (5.3) для z_1, z_2; w_1, w_2; и их производных получаем при $i=0, \dots, n-1$

$$(5.5)\qquad \left.\begin{matrix} z_2^{(i)}(x) \leqq z_3^{(i)}(x) \leqq z_1^{(i)}(x), & w_1^{(i)}(x) \leqq w_3^{(i)}(x) \leqq w_2^{(i)}(x) \\ z_1^{(n)}(x) \leqq z_3^{(n)}(x) \leqq z_2^{(n)}(x), & w_2^{(n)}(x) \leqq w_3^{(n)}(x) \leqq w_1^{(n)}(x) \end{matrix}\right\} \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

По самому построению итераций $z_3|_E = w_3|_E = Q$, так что (5.5) обеспечено, что $z_3, w_3 \in M$. Отсюда в силу последнего утверждения части А) доказательства получаем при $0 \leqq x \leqq 1$, $i=0, \dots, n-1$ следующие неравенства

$$(5.6)\quad z_4^{(i)}(x) \leqq z_3^{(i)}(x), \quad z_3^{(n)}(x) \leqq z_4^{(n)}(x); \quad w_3^{(i)}(x) \leqq w_4^{(i)}(x), \quad w_4^{(n)}(x) \leqq w_3^{(n)}(x).$$

Из (5.1) получаем при $\lambda \leqq x \leqq 1$

$$(5.7)\qquad z_4(x) - z_2(x) = \frac{1}{2}(Az_3 + Aw_3 - Az_1 - Aw_1) + \frac{1}{2}(\Theta_1(x) - \Theta_3(x)).$$

Отсюда используя формулу Лагранжа получаем при $0 \leqq x \leqq 1$

$$(5.8)\qquad \begin{aligned} z_2(x) - z_4(x) &= \frac{1}{2}\int_0^1 G(x,t) \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left(z_3^{(i)}(t) - z_1^{(i)}(t)\right) \left[\left|\frac{\partial f}{\partial u_i}\right| + N_i \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(z_3^{(i)}(g_i(t)) - z_1^{(i)}(g_i(t))\right) \left[\left|\frac{\partial f}{\partial v_i}\right| + N_i \right] \right\} dt + \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 G(x,t) \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left(w_3^{(i)}(t) - w_1^{(i)}(t)\right) \left[\left|\frac{\partial f}{\partial u_i}\right| - N_i \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(w_3^{(i)}(g_i(t)) - w_1^{(i)}(g_i(t))\right) \left[\left|\frac{\partial f}{\partial v_i}\right| - N_i \right] \right\} dt. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно показать, что при $0 \leqq x \leqq 1$ имеет место следующая формула

$$(5.9)\qquad \begin{aligned} w_2(x) - w_4(x) &= \frac{1}{2}\int_0^1 G(x,t) \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left(z_3^{(i)}(t) - z_1^{(i)}(t)\right) \left[\left|\frac{\partial f}{\partial u_i}\right| - N_i \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(z_3^{(i)}(g_i(t)) - z_1^{(i)}(g_i(t))\right) \left[\left|\frac{\partial f}{\partial v_i}\right| - N_i \right] \right\} dt + \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 G(x,t) \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left(w_3^{(i)}(t) - w_1^{(i)}(t)\right) \left[\left|\frac{\partial f}{\partial u_i}\right| + N_i \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(w_3^{(i)}(g_i(t)) - w_1^{(i)}(g_i(t))\right) \left[\left|\frac{\partial f}{\partial v_i}\right| + N_i \right] \right\} dt. \end{aligned}$$

Учитывая теперь свойства G и неравенства (5.5) легко из (5.8) и (5.9) вывести неравенства справедливые при $0 \leqq x \leqq 1$, $i=0, \ldots, n-1$

$$(5.10) \quad z_2^{(i)}(x) \leqq z_4^{(i)}(x), \quad w_4^{(i)}(x) \leqq w_2^{(i)}(x); \quad z_4^{(n)}(x) \leqq z_2^{(n)}(x), \quad w_2^{(n)}(x) \leqq w_4^{(n)}(x),$$

которые вместе с (5.6) обеспечивают то, что $z_4, w_4 \in M$, ведь при $0 \leqq x \leqq 1$, $i=0, \ldots, n-1$

$$(5.11) \quad \begin{aligned} &z_2^{(i)}(x) \leqq z_4^{(i)}(x) \leqq z_3^{(i)}(x), \quad w_3^{(i)}(x) \leqq w_4^{(i)}(x) \leqq w_2^{(i)}(x), \\ &z_3^{(n)}(x) \leqq z_4^{(n)}(x) \leqq z_2^{(n)}(x), \quad w_2^{(n)}(x) \leqq w_4^{(n)}(x) \leqq w_3^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Для доказательства того, что $z_p, w_p \in M$ и при любом $p \geqq 4$ натуральном, надо по методу математической индукции провести аналогичные только что проведенным рассуждения. Именно, из того, что $z_1, \ldots, z_{p-1}$; $w_1, \ldots, w_{p-1}$ принадлежат M констатируем выполнение неравенств (5.3) соответственно четности p между $p-1$-ыми и p-ыми приближениями и их производными i-го порядка ($i=0, \ldots, n-1$). После этого выписываем неравенства типа (5.8), (5.9) полученные с заменой в них индексов $1, \ldots, 4$ на $p-3, \ldots, p$. По этим равенствам используя неравенства между $z_{p-1}^{(s)}(x)$, $w_{p-1}^{(s)}(x)$ и $z_{p-3}^{(s)}(x)$, $w_{p-3}^{(s)}(x)$ при $0 \leqq x \leqq 1$, $s=0, \ldots, n$ получаем неравенства типа (5.10), а это вместе с неравенствами для z_p, z_{p-1}; w_p, w_{p-1} дает неравенства типа (5.11). Итак получаем, что $z_p^{(i)}(x)$, $w_p^{(i)}(x)$ заключены между $z_{p-1}^{(i)}(x)$ и $z_{p-2}^{(i)}(x)$, $w_{p-1}^{(i)}(x)$ и $w_{p-2}^{(i)}(x)$ соответственно. Поскольку все первые $p-1$ приближений принадлежат M, потому и $z_p, w_p \in M$. Имеют при этом место следующие неравенства при $0 \leqq x \leqq 1$; $l=1, 2, \ldots$; $i=0, \ldots, n-1$

$$(5.12) \quad \begin{aligned} &z_{2l}^{(i)}(x) \leqq z_{2l+1}^{(i)}(x) \leqq z_{2l-1}^{(i)}(x), \quad w_{2l-1}^{(i)}(x) \leqq w_{2l+1}^{(i)}(x) \leqq w_{2l}^{(i)}(x), \\ &z_{2l-1}^{(n)}(x) \leqq z_{2l+1}^{(n)}(x) \leqq z_{2l}^{(n)}(x), \quad w_{2l}^{(n)}(x) \leqq w_{2l+1}^{(n)}(x) \leqq w_{2l-1}^{(n)}(x), \\ &z_{2l}^{(i)}(x) \leqq z_{2l+2}^{(i)}(x) \leqq z_{2l+1}^{(i)}(x), \quad w_{2l+1}^{(i)}(x) \leqq w_{2l+2}^{(i)}(x) \leqq w_{2l}^{(i)}(x), \\ &z_{2l+1}^{(n)}(x) \leqq z_{2l+2}^{(n)}(x) \leqq z_{2l}^{(n)}(x), \quad w_{2l}^{(n)}(x) \leqq w_{2l+2}^{(n)}(x) \leqq w_{2l+1}^{(n)}(x). \end{aligned}$$

В) Докажем, что $z_p^{(s)}(x) \rightrightarrows y^{(s)}(x)$, $w_p^{(s)}(x) \rightrightarrows y^{(s)}(x)$ на отрезке $[0, 1]$ при $p \to \infty$, $s=0, \ldots, n$.

Заметим для этого, что из (5.1) получаем

$$(5.13) \quad z_{p+1}(x) - w_{p+1}(x) = -\int_0^1 G(x, t) \Delta_p(t)\, dt \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Если теперь оценим правую часть по норме, аналогично тому, как это мы сделали при доказательстве теоремы 2.1, то в силу условия (2.2) получим

$$(5.14) \quad \|z_{p+1} - w_{p+1}\| \leqq \theta \|z_p - w_p\| \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

где θ постоянная, $0 < \theta < 1$.

Из этого неравенства и из формул (5.12) выражающих монотонность последовательностей итераций z_p, w_p и их производных следует, что при $0 \leqq x \leqq 1$, $i=0, \dots, n-1$, $p=1, 2, \dots$

$$|z_{p+2}^{(i)}(x)-z_p^{(i)}(x)| \leqq \theta^{p-1}\|z_1-w_1\|, \quad |w_{p+2}^{(i)}(x)-w_p^{(i)}(x)| \leqq \theta^{p-1}\|z_1-w_1\|.$$

Отсюда учитывая (5.14) и то, что при $x \in E$ $z_p(x)=w_p(x)=Q(x)$ при всех $p=1, 2, \dots$, сразу следует, что последовательности $\{z_p^{(i)}(x)\}$, $\{w_p^{(i)}(x)\}$ равномерно сходятся на $[\lambda, 1]$ при $p \to \infty$, $i=0, \dots, n-1$ к общему пределу $y_i(x)=y_0^{(i)}(x)$, т.е. эти последовательности сходятся в M по норме, а в силу полноты M, $y_0 \in M$.

Перейдем теперь к пределу при $p \to \infty$ в формулах (5.1). Мы получим в силу непрерывности A, что $y_0=Ay_0$, откуда следует, что $y_0=y$ (через y мы обозначили единственное решение нашей задачи). Утверждение теоремы для n-ых производных отсюда и из (5.12) легко вывести; надо продифференцировать n-раз формулы (5.1), перейти к пределу при $p \to \infty$, принять во внимание неравенства (5.12) и то, что $y^{(n)}(x)=f[y]$. Теорема доказана.

Отметим, что как подробные вычисления показывают, условия (ii) теоремы эквивалентны некоторым условиям для z_1, w_1 похожим на условие сжатости (2.2).

6. Монотонные приближения в случае уравнения с непрерывными производными

Рассмотрим поставленную задачу при условиях фигурирующих в начале предыдущего раздела, с той разницей, что здесь будут использованы не числа N_i мажорирующие по модулю частные производные f, а лишь какая-нибудь верхняя граница этих производных $\tilde{N}$:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} \leqq \tilde{N}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_i} \leqq \tilde{N} \quad (i = 0, \dots, n-1;\ \tilde{N} \geqq 0),$$

кроме того функции Δ_p, α_p, β_p определяются здесь по следующим формулам:

$$\Delta_p(x) = \tilde{N} \sum_{i=0}^{n-1} \left[z_p^{(i)}(x)+z_p^{(i)}(g_i(x))-w_p^{(i)}(x)-w_p^{(i)}(g_i(x))\right],$$

$$\alpha_p(x) = z_p^{(n)}(x)-f[z_p]+\Delta_p(x), \quad \beta_p(x) = w_p^{(n)}(x)-f[w_p]-\Delta_p(x).$$

Функции η_p, ϑ_p, определяются по α_p, β_p а z_{p+1}, w_{p+1} по z_p и w_p так же, как в формулах (3.1). Предпологаем естественно, что существуют функции z_1, w_1 для которых $\alpha_1(x) \leqq 0$, $\beta_1(x) \geqq 0$. Очевидно, что z_{p+1}, w_{p+1} в этом случае можно вычислить и по закону

$$z_{p+1}(x) = Az_p + \Theta_p(x), \quad w_{p+1}(x) = Aw_p - \Theta_p(x), \tag{6.1}$$

где $\Theta_p(x)$ определяется по Δ_p так же, как в (5.1).

Монотонность последовательностей $\{z_p^{(s)}(x)\}$, $\{w_p^{(s)}(x)\}$ здесь доказывается следующим образом. Учитывая формулы для $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ получаем

$$z_1(x) - w_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ -\int\limits_0^1 G(x, t)\,[L_1(z_1 - w_1) + \alpha_1(t) - \beta_1(t)]\,dt, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

где L_1 есть линейный дифференциальный оператор действующий на элементах специального множества M для случая бруса D_∞ и $Q(x) \equiv 0$ (см. разд. 2). Обозначим это множество через M_0. Оператор L_1 действует следующим образом:

$$L_1(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(\left| \frac{\partial f}{\partial u_i} \right| - 2\tilde{N} \right) z^{(i)}(t) + \left(\left| \frac{\partial f}{\partial v_i} \right| - 2\tilde{N} \right) z^{(i)}\big(g_i(t)\big) \right],$$

где $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u_i}\right|$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial v_i}\right|$ равны функциям $a_i(t)$, $b_i(t)$ фигурирующим в формуле Лагранжа

$$f[z_1] - f[w_1] = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ a_i(t)\,[z_1^{(i)}(t) - w_1^{(i)}(t)] + b_i(t)\,[z_1^{(i)}\big(g_i(t)\big) - w_1^{(i)}\big(g_i(t)\big)] \right\}.$$

Предположим, что оператор

$$A_1 z = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ -\int\limits_0^1 G(x, t)\,[L_1(z) + \alpha_1(t) - \beta_1(t)]\,dt, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

сжато отображает M_0 в M_0, тогда в силу результатов раздела 3 получаем

$$w_1^{(i)}(x) \leqq z_1^{(i)}(x), \quad z_1^{(n)}(x) \leqq w_1^{(n)}(x) \quad (i = 0, \ldots, n-1; \quad 0 \leqq x \leqq 1). \tag{6.2}$$

Оператор A_1 заведомо будет сжатием если $\left| \dfrac{\partial f}{\partial u_i} - 2\tilde{N} \right|$, $\left| \dfrac{\partial f}{\partial v_i} - 2\tilde{N} \right|$ при всех $i = 0, \ldots, n-1$ не превосходят числа N удовлетворяющего условию (2.2).

Доказательство монотонности продолжаем методом математической индукции. Предположим, что $z_1, \ldots, z_l$, $w_1, \ldots, w_l$ принадлежат M. Тогда справедливы согласно обозначениям предыдущих разделов при $p=1, \dots, l-1$ следующие формулы

(6.3)
$$\alpha_{p+1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\left\{\eta_p^{(i)}(x)\left[\left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right| - \tilde N\right] + \eta_p^{(i)}(g_i(x))\left[\left.\frac{\partial f}{\partial v_i}\right| - \tilde N\right]\right\} + $$
$$+\tilde N \sum_{i=0}^{n-1}[\vartheta_p^{(i)}(x) + \vartheta_p^{(i)}(g_i(x))],$$
$$\beta_{p+1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\left\{\vartheta_p^{(i)}(x)\left[\left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right| - \tilde N\right] + \vartheta_p^{(i)}(g_i(x))\left[\left.\frac{\partial f}{\partial v_i}\right| - \tilde N\right]\right\} + $$
$$+\tilde N \sum_{i=0}^{n-1}[\eta_p^{(i)}(x) + \eta_p^{(i)}(g_i(x))].$$

Отсюда видна знакопостоянность невязок, а поэтому справедливы в частности и неравенства при $p=1, \dots, l$; $i=0, \dots, n-1$; $0 \leqq x \leqq 1$

(6.4) $z_{p+1}^{(i)}(x) \leqq z_p^{(i)}(x), \quad w_p^{(i)}(x) \leqq w_{p+1}^{(i)}(x); \quad z_p^{(n)}(x) \leqq z_{p+1}^{(n)}(x), \; w_{p+1}^{(n)}(x) \leqq w_p^{(n)}(x).$

По формуле Лагранжа имеем при $2 \leqq p \leqq l$ натуральном

$$f[z_p]-f[w_p] = \sum_{i=0}^{n-1}\left\{a_{i,p}(t)\,[z_p^{(i)}(t)-w_p^{(i)}(t)] + b_{i,p}(t)\,[z_p^{(i)}(g_i(t)) - w_p^{(i)}(g_i(t))]\right\}.$$

По функциям $a_{i,p}$, $b_{i,p}$ определяем дифференциальные операторы L_p и операторы A_p действующие на элементах M_0.

$$L_p(z) = \sum_{i=0}^{n-1}[(a_{i,p}(t)-2\tilde N)z^{(i)}(x) + (b_{i,p}(t)-2\tilde N)z^{(i)}(g_i(t))],$$
$$A_p(z) = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ -\int_0^1 G(x,t)L_p(z)\,dt, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Поскольку при $2 \leqq p \leqq l$
$$z_{p+1}(x) - w_{p+1}(x) = A_p(z_p - w_p)$$
и коэффициенты L_p неположительны следует, что

(6.5)
$$z_{p+1}^{(i)}(x) - w_{p+1}^{(i)}(x) \geqq 0, \quad w_{p+1}^{(n)}(x) - z_{p+1}^{(n)}(x) \geqq 0 \quad (i=0, \dots, n-1; \; p \leqq l, \; 0 \leqq x \leqq 1),$$

а это вместе с неравенствами (6.4) обеспечивает, что $z_{l+1}, w_{l+1} \in M$. По индукции значит можно получить неравенства (6.4), (6.5) при всех p натуральных ($p \geqq 2$) и утверждать, что $z_p, w_p \in M$ при всех p.

Если дополнительно предположить, что семейство операторов A_p ($p=2, 3, \ldots$) обладает свойством равностепенной сжатости, т.е.

$$\|A_p z\| \leqq \theta \|z\| \quad (p = 2, 3, \ldots; 0<\theta<1), \tag{6.6}$$

то таким же путем, как в теореме 5.1 можно доказать на основании неравенств (6.4), (6.5) монотонность последовательностей $\{z_p^{(s)}(x)\}$, $\{w_p^{(s)}(x)\}$ и их сходимость к $y^{(s)}(x)$ т.е. к производным решения рассматриваемой краевой задачи при $0 \leqq x \leqq 1$. Итак мы доказали следующую теорему:

Теорема 6.1. *Если A_1 сжатие и семейство операторов A_p ($p \geqq 2$) обладает свойством равностепенной сжатости, тогда при $0 \leqq x \leqq 1$, $i=0, \ldots, n-1$*

$$w_p^{(i)}(x) \nearrow y^{(i)}(x) \swarrow z_p^{(i)}(x), \quad z_p^{(n)}(x) \nearrow y^{(n)}(x) \swarrow w_p^{(n)}(x).$$

Отметим, что (6.6) будет выполнено например, если коэффициенты всех L_p не превосходят по модулю числа N удовлетворяющего условию (2.2).

Замечание 6.1. *Условие $g_{n-1}(x)$ не меняет знак при $0 \leqq x \leqq 1$ в рассматриваемых уравнениях обеспечивает непрерывность $y^{(n)}(x)$ на всем отрезке* $[0, 1]$, *где $y(x)$ есть решение соответствующего интегрального уравнения* (2.1).

Пусть теперь имеется конечное число точек (их совокупность обозначим через S) в которых функция g_{n-1} меняет знак. Пусть $\overset{\frown}{[0, 1]}=[0, 1]\setminus S$. Соответствующее интегральное уравнение (2.1) и в этом случае разрешимо в M при выполнений условия (2.2). Решение обозначаем через $y(x)$. Его можно принять за решение поставленной задачи, несмотря на то, что уравнение (1.1) выполняется вообще говоря только на $\overset{\frown}{[0, 1]}$, поскольку в точках S функция $y^{(n)}(x)$ может иметь разрывы. Последовательности $\{z_p(x)\}$, $\{w_p(x)\}$ строятся так же, как и выше, но здесь $\alpha_p(x), \beta_p(x), \eta_p^{(n)}(x), \vartheta_p^{(n)}(x), z_p^{(n)}(x), w_p^{(n)}(x)$ непрерывны только на $\overset{\frown}{[0, 1]}$ и поэтому $z_p^{(n)}(x), w_p^{(n)}(x) \rightrightarrows y^{(n)}(x)$ только при $x \in \overset{\frown}{[0, 1]}$. Все неравенства для n-ых производных справедливы только на $\overset{\frown}{[0, 1]}$. Все утверждения приведенные выше, связанные с $\eta_p^{(i)}(x)$, $\vartheta_p^{(i)}(x)$, $z_p^{(i)}(x)$, $w_p^{(i)}(x)$, $y^{(i)}(x)$ остаются в силе при $i=0, \ldots, n-1$.

Что касается случая, когда g_{n-1} меняет знак в бесконечно много точках, отметим, что мы построили пример, где это множество имеет меру $1-\varepsilon$ (ε произвольное число между 0 и 1) и поэтому поставленная задача не имеет решения в том смысле, как это говорилось в разделе 1, поскольку n-я производная решения интегрального уравнения (2.1) в точках этого множества терпит разрыв.

7. О системе уравнений типа (1.1)

Результаты изложенные выше легко распространяются на задачу (7.1), (7.2), (7.3):

$$(7.1)\qquad y_i^{(n_i)}(x) = f_i[\vec{y}] = f_i\big(x, y_1(x), \dots, y_1^{(n_1-1)}(x), \dots, y_r(x), \dots, y_r^{(n_r-1)}(x);$$
$$y_1\big(\overset{(i)}{g}_{1,0}(x)\big), \dots, y_1^{(n_1-1)}\big(\overset{(i)}{g}_{1,n_1-1}(x)\big), \dots, y_r\big(\overset{(i)}{g}_{r,0}(x)\big), \dots, y_r^{(n_r-1)}\big(\overset{(i)}{g}_{r,n_r-1}(x)\big)\big)$$
$$(0 \leqq x \leqq 1),$$

$$(7.2)\qquad y_i(0) = \dots = y_i^{(n_i-2)}(0) = y_i^{(n_i-1)}(1) = 0 \quad (n_i \geqq 2, \; i = 1, \dots, r),$$

$$(7.3)\qquad y_i|_E = Q_i \quad (i = 1, \dots, r),$$

где заданные функции f_i, $\overset{(i)}{g}_{i,j}$, Q_i и начальное множество E удовлетворяют следующим условиям:

Область определения f_i есть или конечный брус: x меняется между 0 и 1, а остальные блоки переменных между числами $-K_i$ и K_i, или же все блоки меняются между $-\infty$ и $+\infty$, причем в первом случае множество значений f_i содержится в $[-K_i, K_i]$. Функции f_i непрерывны и удовлетворяют условию Липшица. Функции $\overset{(i)}{g}_{i,j}(x)$ принадлежат классу $C[0, 1]$, их значения содержатся при всех x между λ и x (λ постоянная, $\lambda < 0$), $\overset{(i)}{g}_{l,n_l-1}$ не меняют знака (см. замечание 6.1), а E есть отрезок $[\lambda, 0]$. Функции $Q_i(x)$ принадлежат классу $C^{(n_i-1)}(E)$ и все их производные до (n_i-2)-го в нуле равны нулю, а в случае конечных блоков их производные до (n_i-1)-го порядка включительно содержатся в $[-K_i, K_i]$. Вектор функцию $\vec{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_r(x))$ мы будем называть решением нашей задачи при условиях аналогичных сказанным в разделе 1, при этом задача (7.1), (7.2), (7.3) эквивалентна операторному уравнению

$$(7.4)\qquad y_i(x) = (A\vec{y})_i = \begin{Bmatrix} Q_i(x), & x \in E, \\ -\int\limits_0^1 G_i(x, t) f_i[\vec{y}]\, dt, & x \in [0, 1] \end{Bmatrix} \quad (i = 1, \dots, r),$$

где G_i получаем из G (см. разд. 2) с заменой n на n_i, а оператор A определен на множестве $M_1 \times \dots \times M_r$ где $M_i = M$ в случае бесконечных блоков, только n заменяем на n_i, а при конечных блоках M_i получаем из M (см. разд. 2) с заменой n, K на n_i, K_i. Задача (7.4) имеет единственное решение если

$$\sum_{i=1}^{r} N_i \left[2 - \frac{1}{n_i!} + \max_{s=1,\dots,r;\; l=0,\dots,n_s-1} \int\limits_{\overset{(i)}{M}_{s,l}} \left(1 + \sum_{j=0}^{n_i-2} \frac{\partial^j G_i(x, t)}{\partial x^j} \right) dt \right] < 1$$

(здесь $\overset{(i)}{M}_{s,l} = \{x \colon \overset{(i)}{g}_{s,l}(x) > 0\}$, а N_i есть постоянная в условии Липшица для f_i).

Здесь строим последовательности вектор функций $\{\vec{z}_p(x)\}$, $\{\vec{w}_p(x)\}$; сходимость их производных к $\vec{y}^{(s)}(x)$ и все неравенства приведенные выше остаются справедливыми если их понимать для вектор фунций покомпонентно. Невязки $\vec{\alpha}_p(x)=(\alpha_{p,1}(x), \dots, \alpha_{p,1}(x))$ определяются (соответственно разделам 3, 4; 5; 6) таким образом:

$$\alpha_{p,i}(x) = z_{p,i}^{(n_i)}(x)-f_i\big(x, z_{p,1}(x), \dots, z_{p,r}^{(n_r-1)}(\overset{(i)}{g}_{r,n_r-1}(x))\big),$$

$$\alpha_{p,i}(x) = z_{p,i}^{(n_i)}(x)-\frac{1}{2}f_i[\vec{z}_p]-\frac{1}{2}f_i[\vec{w}_p]-\frac{1}{2}\Delta_{p,i}(x),$$

$$\alpha_{p,i}(x) = z_{p,i}^{(n_i)}(x)-f_i[\vec{z}_p]+\tilde{\Delta}_{p,i}(x),$$

где

$$\Delta_{p,i}(x) = N_i\sum_{s=1}^{r}\sum_{l=0}^{n_s-1}\big[z_{p,s}^{(l)}(x)-w_{p,s}^{(l)}(x)+z_{p,s}^{(l)}(\overset{(i)}{g}_{s,l}(x))-w_{p,s}^{(l)}(\overset{(i)}{g}_{s,l}(x))\big],$$

а $\tilde{\Delta}_{p,i}(x)$ получается из $\Delta_{p,i}(x)$ заменой N_i на верхнюю границу производных f_i. Невязки $\vec{\beta}_p(x)=(\beta_{p,1}(x), \dots, \beta_{p,r}(x))$ определяются аналогично, только члены содержащие $\Delta_{p,i}$, $\tilde{\Delta}_{p,i}$ берутся с обратным знаком. После этого ясно, как остальные формулы, напр. для $\vec{\eta}_p(x)$, $\vec{\vartheta}_p(x)$, $\vec{z}_{p+1}$, $\vec{w}_{p+1}$ выписываются в этом случае по компонентам.

Вышеизложенный метод применялся для решения конкретных задач и сходимость приближений оказалась достаточно быстрой. Его можно применить и в том случае, когда метод шагов не применим, а также и в том случае, когда все $g_i(x)$, $\overset{(l)}{g}_{i,j}(x)\equiv x$ т.е. для краевых задач без запаздывания. Погрешность вычислений при этом методе удобно оценивается.

Изложенный выше метод распространяется и на другие краевые задачи, отличные от указанных выше, а также и на задачи с запаздыванием, рассмотренные в работах [11—20].

Литература *)

[1] Л. Э. Эльсгольц, О краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, *УМН*, **15**, 5 (93), (1960), 222—224.

[2] С. Б. Норкин, О краевой задаче типа Штурма—Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, *Изв. высш. учебн. завед., Математика*, **6** (7), (1958), 203—214.

[3] Г. А. Каменский, О единственности решения краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка нейтрального типа с отклоняющимся

*) *УМН = Успехи Математических Наук*
УМЖ = Украинский Математический Журнал
ДАН УРСР = Доповiдi Академiї Наук УРСР

аргументом, *Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов*, **4** (1967), 275—277.

[4] А. Я. Ляпин, А. Д. Мышкис, Существование решения одной нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка, *Дифференциальные уравнения*, **4**: № 7 (1968), 1171—1188.

[5] С. Б. Норкин, *Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом* Изд-во Наука (М., 1965).

[6] Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин, *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Изд-во Наука (М., 1971).

[7] Г. М. Жданов, О приближенном решении системы дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом, *УМН*, **16**: **1** (**97**) (1961), 143—148.

[8] Э. И. Клямко, Некоторые применения метода Чаплыгина к приближенному решению дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, *УМН*, **12**; **4** (**76**) (1957), 305—312.

[9] Ю. И. Ковач, Л. И. Савченко, О краевой задаче для нелинейной системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, *УМЖ*, **22**: **1** (1970), 12—21.

[10] Ю. И. Ковач, О приближенном решении нелинейной системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, *УМЖ*, **22**: **3** (1970), 380—388.

[11] Ю. И. Ковач, Применение теоремы о дифференциальных неравенствах к задаче Гурса для линейной системы дифференциальных уравнений с частными производными, *Дифференциальные уравнения*, **1**: **3** (1965), 411—420.

[12] Ю. И. Ковач, Приближенное интегрирование задачи Гурса для общей 2n-волновой системы дифференциальных уравнений методом двустороннего приближения, *УМЖ*, **17**: **4** (1965), 37—45.

[13] Ю. И. Ковач, Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши методом двустороннего приближения для $2n$-волновой системы, *Ж. вычислит. матем. и матем. физики*, **5**: **3** (1965), 551—557.

[14] Ю. И. Ковач, Теорема о „вилке" в задаче Коши для нелинейного уравнения с частными производными высших порядков, *УМЖ*, **18**: **5** (1966), 28—35.

[15] Ю. И. Ковач, Об оценке решения задачи Коши для уравнения в частных производных $2n$-го порядка, *Вопросы теории и истории дифференциальных уравнений*, АН УССР, К. (1968), 158—165.

[16] Ю. И. Ковач, В. В. Маринец, А. И. Моца, О двустороннем итеративном методе интегрирования задачи Дирихле для нелинейной эллиптической системы дифференциальных уравнений, *Математическая физика*, АН УССР, К., **6**, (1969), 101—107.

[17] Ю. И. Ковач, Об оценке решения нелинейной системы с запаздыванием содержащей оператор m_i-го порядка параболического или гиперболического вида, *Численный анализ*, **2**, ИК АН УССР, К. (1969), 20—37 (труды семинара).

[18] Ю. И. Ковач, Л. И. Савченко, Об оценке решения некоторых нелинейных интегро-дифференнциальных и операторных уравнений с запаздыванием, *Дифференциальные уравнения*, **6**: **8** (1970), 1496—1505.

[19] Ю. І. Ковач, В. В. Маринець, Про один метод наближеного інтегрування нелінійної системи диференціальних рівнянь із запізненням, *ДАН УРСР*, **11**, серія А (1970), 120—123.

[20] Ю. І. Ковач, І. В. Брич, Наближене інтегрування однієї крайової задачі для нелінійної системи диференціальних рівнянь з запізнюючим аргументом, *ДАН УРСР*, **11**, серія А (1970), 980—982.

(Поступило 1. XII 1972 г.)