Über die Q-Funktion eines π-hermiteschen Operators im Raume $\Pi_\varkappa$

Von M. G. KREĬN in Odessa, und H. LANGER in Dresden

Herrn Professor Dr. Dr. h. c. Szőkefalvi-Nagy zum 60. Geburtstag am 29. VII. 1973 in Verehrung gewidmet

Der Begriff der Q-Funktion eines hermitischen Operators im Hilbertraum mit gleichen endlichen Defektzahlen n wurde von einem der Verfasser in den Arbeiten [1] ($n=1$) und [2] ($n<\infty$) eingeführt. Später verallgemeinerte Š. N. SAAKJAN [3] diese Definition auf den Fall beliebiger (endlicher oder unendlicher) gleicher Defektzahlen.

Für einen π-hermiteschen Operator im Pontrjaginschen Raume $\Pi_\varkappa$ haben wir die Q-Funktion bei beliebigen gleichen Defektzahlen in [4] eingeführt. Dabei erwies sie sich analog wie in den vorangegangenen Arbeiten als ein wichtiges Hilfsmittel zur Beschreibung aller verallgemeinerten Resolventen des gegebenen π-hermiteschen Operators.

In der vorliegenden Arbeit setzen wir die Untersuchung der Q-Funktion im Anschluß an [4] fort und zeigen insbesondere, daß sie sich durch verhältnismäßig einfache Eigenschaften vollständig charakterisieren läßt (Hauptsatz aus § 2. 4). Möglicherweise ist dieses Ergebnis auch im Falle des Hilbertraumes ($\varkappa=0$) neu.

Beim Beweis dieses Hauptsatzes spielen die Funktionen der Klassen $N_\varkappa^0(\mathfrak{G})$ und $N_\varkappa(\mathfrak{G})$ eine besondere Rolle. Einige Ergebnisse über solche Funktionen in den Paragraphen 3 und 4 kann man als Verallgemeinerungen bekannter Resultate zum sog. Nevanlinna—Pick-Problem [5], [6] und seinem operatortheoretischen Analogon [7] ansehen. Eventuell sind auch dabei gewisse Aussagen selbst für den positiv definiten Fall ($\varkappa=0$) neu, z. B. das Kriterium für die Selbstadjungiertheit des Operators A_Q^0 in § 4. 3.

In § 6 wird zwischen der Q-Funktion eines π-hermiteschen Operators und der charakteristischen Funktion seiner π-isometrischen Cayleytransformierten, die wir in [8] einführten, ein Zusammenhang hergestellt[1]). Daraus ergibt sich für den Hilbert-

[1]) Dieser war im Falle des Hilbertraumes den Verfassern von [1] und [9] klar, sobald diese Arbeiten erschienen; er wurde jedoch bis jetzt nirgends dargestellt.

raum sofort, daß ein einfacher hermitescher Operator durch seine Q-Funktion bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt ist. Das analoge Resultat für einfache π-hermitesche Operatoren beweisen wir in § 5 unmittelbar, ohne Benutzung der charakteristischen Funktion. Hierzu sei noch vermerkt (siehe § 1), daß die Abspaltung des einfachen Teiles eines π-hermiteschen Operators komplizierter ist als im definiten Fall; insbesondere läßt sich ein π-hermitescher Operator i.a. nicht als direkte Summe eines einfachen π-hermiteschen und eines π-selbstadjungierten Operators darstellen.

Beim Studium π-hermitescher Operatoren im Pontrjaginschen Raume treten spezifische Fragestellungen auf. Wir nennen hier insbesondere den wichtigen Begriff des rein hyperbolischen Operators[2]). Die Untersuchung der Q-Funktion gestattet es, Kriterien dafür aufzustellen, wann ein π-hermitescher Operator rein hyperbolisch ist (§ 7).

Die vorliegenden Untersuchungen stützen sich auf die Ergebnisse unserer Arbeiten [4], [8]. Im Unterschied zu diesen benutzen wir hier jedoch wesentlich die in [12] eingeführte Spektralzerlegung eines π-selbstadjungierten Operators im Pontrjaginschen Raum[3]).

§ 1. Der einfache Teil eines π-hermiteschen Operators

1. *Allgemeine Grundlagen.* Es sei A im folgenden stets ein π-hermitescher Operator[4]) im $\pi_\varkappa$-Raume $\Pi_\varkappa$, $0 \leqq \varkappa < \infty$, mit gleichen, endlichen oder unendlichen Defektzahlen: $\mathfrak{n}_+(A) = \mathfrak{n}_-(A) = \mathfrak{n}$. Wir setzen für einen beliebigen komplexen Punkt z:

$$\mathfrak{M}_z = (A - zI)\mathfrak{D}(A) \quad \text{und} \quad \mathfrak{N}_z = \mathfrak{M}_{\bar{z}}^{[\perp]}.$$

Dann ([4], § 2. 2) hat der Defektraum $\mathfrak{N}_z$ für alle Punkte z der offenen oberen Halbebene C_+ mit Ausnahme von höchstens $\varkappa$ Punkten die Dimension $\mathfrak{n}$; die erwähnten Ausnahmepunkte sind genau die in C_+ gelegenen Eigenwerte von A. Bezeichnen wir für einen solchen Eigenwert $z \in C_+ \cap \sigma_p(A)$ mit r_z seine algebraische Vielfachheit, so gilt $\dim \mathfrak{N}_z = \mathfrak{n} + r_z$ und $\sum r_z \leqq \varkappa$, wobei die Summation über alle $z \in \sigma_p(A) \cap C_+$

---

2) Die Existenz einer speziellen Klasse rein hyperbolischer π-hermitescher (π-isometrischer Operatoren wurde zuerst in [10] bemerkt. Bei ihr erweist sich das reelle Spektrum aller minimalen π-selbstadjungierten Erweiterungen als absolutstetig. In der vorliegenden Arbeit konstruieren wir jedoch rein hyperbolische π-hermitesche Operatoren, deren sämtliche kanonischen π-selbstadjungierten Erweiterungen diskretes Spektrum haben. Wir bemerken, daß rein hyperbolische Operatoren auch in der Streutheorie auftreten (vgl. [11]), worauf die Autoren von [10] an anderer Stelle eingehen werden.

3) Eine ausführliche Darstellung findet man z.B. in [13].

4) Wir benutzen die Bezeichnungen aus [4].

zu erstrecken ist. Entsprechende Aussagen gelten für die Punkte z der offenen unteren Halbebene C_-.

Wir bezeichnen im folgenden mit Δ_A die Menge derjenigen nichtreellen Punkte z, für die das π-Skalarprodukt auf $\mathfrak{N}_z$ entartet. Dann enthält Δ_A keine inneren Punkte ([4], Satz 3. 3), und das nichtreelle Spektrum jeder kanonischen[5]) π-selbstadjungierten Erweiterung von A liegt in Δ_A. Die Menge aller nichtreellen Punkte z, die nicht zu Δ_A gehören, bezeichnen wir mit Δ'_A:

$$\Delta'_A = (C_+ \cup C_-) \setminus \Delta_A.$$

Es sei weiter $\mathfrak{G}$ ein Hilbertraum der Dimension $\mathfrak{n}$. Wir wählen wie in [4] eine kanonische π-selbstadjungierte Erweiterung $\mathring{A}$ von A und konstruieren eine Operatorfunktion $\mathring{\Gamma}_z$, $z \in \varrho(\mathring{A})$, mit Werten in $[\mathfrak{G}, \Pi_\varkappa]$ und den folgenden Eigenschaften:

1) $\mathring{\Gamma}_z$ bildet $\mathfrak{G}$ eineindeutig und stetig auf $\mathfrak{N}_z$ ab;

2) für beliebige $z, \zeta \in \varrho(\mathring{A})$ gilt mit $\mathring{R}_z = (\mathring{A} - zI)^{-1}$:

$$\frac{\mathring{\Gamma}_z - \mathring{\Gamma}_\zeta}{z - \zeta} = \mathring{R}_z \mathring{\Gamma}_\zeta \quad (= \mathring{R}_\zeta \mathring{\Gamma}_z). \tag{1. 1}$$

Fixieren wir einen Punkt $z_0 \in \varrho(\mathring{A})$, so folgt aus (1. 1) leicht

$$\mathring{\Gamma}_z = (\mathring{A} - z_0 I)(\mathring{A} - zI)^{-1} \mathring{\Gamma}_{z_0} \qquad (z \in \varrho(\mathring{A})).$$

Dabei wählen wir der Einfachheit halber den Punkt z_0 so, daß der Defektraum $\mathfrak{N}_{z_0}$ positiv definit ist (vgl. [4], § 3. 1).

Die Operatorfunktion $\mathring{\Gamma}_z$ ist also durch (1. 1) eindeutig bestimmt bis auf eine Abbildung $\mathring{\Gamma}_z \to \mathring{\Gamma}_z L$, wobei L ein linearer Operator ist, der $\mathfrak{G}$ eineindeutig auf sich abbildet. Wir halten den Operator $\mathring{\Gamma}_{z_0}$ im folgenden stets fest. Aus (1. 1) folgt, daß $\mathring{\Gamma}_z$ eine holomorphe Operatorfunktion in $(C_+ \cup C_-) \setminus \sigma(\mathring{A})$ ist. Der zu $\mathring{\Gamma}_z$ adjungierte Operator $\mathring{\Gamma}_z^+ \in [\Pi_\varkappa, \mathfrak{G}]$ wird durch die Gleichung

$$[\mathring{\Gamma}_z \xi, f] = (\xi, \mathring{\Gamma}_z^+ f) \qquad (\xi \in \mathfrak{G},\ f \in \Pi_\varkappa)$$

definiert. Falls $\mathfrak{N}_z$ nicht entartet (d.h. $z \in \Delta'_A$), so bildet $\mathring{\Gamma}_z^+$ den Teilraum $\mathfrak{N}_z$ eineindeutig auf $\mathfrak{G}$ ab. Für solche Punkte z ist also der selbstadjungierte Operator $\mathring{\Gamma}_z^+ \mathring{\Gamma}_z$ in $\mathfrak{G}$ beschränkt invertierbar, und die Anzahl seiner negativen Eigenwerte stimmt — bei Berücksichtigung ihrer Vielfachheit — mit der Anzahl der negativen Quadrate von $\mathfrak{N}_z$ überein. Für die Punkte $z \in \Delta_A$ hat $\mathring{\Gamma}_z^+ \mathring{\Gamma}_z$ den isolierten, normal abspaltbaren Eigenwert $\lambda = 0$, und die Summe der Vielfachheiten aller seiner nichtpositiven Eigenwerte ist ebenfalls höchstens gleich $\varkappa$.

---

[5]) Eine Erweiterung von A heißt *kanonisch*, wenn sie im Ausgangsraum $\Pi_\varkappa$ wirkt.

2. *Der einfache Teil von A.* Wir nennen einen π-hermiteschen Operator A in $\Pi_\varkappa$ *einfach*, wenn die lineare Hülle seiner Defekträume $\mathfrak{N}_z$, $z\in\Delta'_A$, in $\Pi_\varkappa$ dicht liegt:

$$\Pi_\varkappa = \bigvee_{z\in\Delta'_A} \mathfrak{N}_z. \tag{1.2}$$

Es sei dem Leser überlassen, sich zu überlegen, daß für einen einfachen π-hermiteschen Operator A sogar $\Pi_\chi = \bigvee_{z\in\mathfrak{U}\setminus\Delta_A} \mathfrak{N}_z$ gilt, wenn $\mathfrak{U}$ eine beliebige offene Menge aus $C_+\cup C_-$ bezeichnet, deren Durchschnitt mit jeder Halbebene $C_\pm$ nicht leer ist. Die obige Definition der Einfachheit eines π-hermiteschen Operators unterscheidet sich von der in [4], § 2. 2 gegebenen. Wir zeigen jedoch am Ende dieses Abschnittes die Äquivalenz beider Definitionen.

Bekanntlich ist ein hermitescher Operator im Hilbertraum die direkte orthogonale Summe eines einfachen hermiteschen Operators und eines selbstadjungierten Operators [14]. Demgegenüber gilt in unserem Falle nur der

Satz 1. 1. *Es sei A ein π-hermitescher Operator in $\Pi_\varkappa$ mit gleichen Defektzahlen. Dann gestattet der Raum $\Pi_\varkappa$ eine Darstellung der Form*

$$\Pi_\varkappa = \mathfrak{N}_e[+](\mathfrak{N}^0\dot{+}\mathfrak{N}')[+]\mathfrak{M}';\text{[6]} \tag{1.3}$$

dabei sind $\mathfrak{N}^0$ und $\mathfrak{N}'$ neutrale, schiefverbundene Teilräume von $\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{N}_e$ und $\mathfrak{M}'$ sind Pontrjaginräume mit $\varkappa_e$ bzw. $\varkappa'$ negativen Quadraten ($\varkappa = \dim\mathfrak{N}^0+\varkappa_e+\varkappa'$). Der Operator A besitzt bezüglich (1. 3) *die Matrixdarstellung*

$$\begin{pmatrix} A_e & 0 & A_{21}^+ & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{22}^+ & 0 \\ 0 & 0 & A_{24}^+ & A' \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

dabei ist A_e ein einfacher π-hermitescher, A' ein π-selbstadjungierter Operator, die Operatoren A_{2j}, $j=1, 2, 3, 4$, sind endlichdimensional, $A_{23}=A_{23}^+$, und es gilt

$$\mathfrak{N}^0 = \bigvee_{z\in\Delta'_{A_e}\setminus\sigma(A_{22})} (A_{22}-zI_{\mathfrak{N}^0})^{-1} A_{21}\mathfrak{N}_z(A_e).\text{[7]}$$

Die Teilräume $\mathfrak{N}_e[+]\mathfrak{N}^0$ und $\mathfrak{N}^0[+]\mathfrak{M}'$ sind durch die angegebenen Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir setzen

$$\mathfrak{M} = \bigcap_{z\in\Delta'_A} \mathfrak{M}_z, \quad \mathfrak{N} = \bigvee_{z\in\Delta'_A} \mathfrak{N}_z;$$

[6] Dabei können gewisse Komponenten nur aus dem Nullelement bestehen.

[7] $\mathfrak{N}_z(A_e) = ((A_e - \bar{z}I_{\mathfrak{N}_e})\mathfrak{D}(A_e))^{[\perp]}\cap\mathfrak{N}_e$.

$\mathring{A}$ bezeichne wieder eine kanonische π-selbstadjungierte Erweiterung von A und $\mathring{\Gamma}_z$ die in Abschnitt 1 eingeführte Operatorfunktion mit Werten in $[\mathfrak{G}, \mathfrak{N}_z]$.

Ist $f \in \mathfrak{M}$, d.h. $f[\perp]\mathfrak{N}_z$, $z \in \Delta'_A$, so folgt aus $\mathring{\Gamma}_z - \mathring{\Gamma}_\zeta = (z-\zeta)\mathring{R}_z\mathring{\Gamma}_\zeta$ auch $\mathring{R}_z f[\perp]\mathfrak{N}_\zeta$ für alle $\zeta \in \Delta'_A$, d.h. $\mathring{R}_z f \in \mathfrak{M}$. Zu solchem f gibt es für beliebiges $z \in \Delta'_A$ ein $g \in \mathfrak{D}(A)$ mit $(A-zI)g = (\mathring{A}-zI)g = f$. Daraus folgt $\mathring{R}_z f = g$, also

$$\mathfrak{D}_1 := \mathring{R}_z \mathfrak{M} \subset \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{M}. \tag{1.5}$$

Ist andererseits $g \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{M}$, $f = (A-zI)g$ für ein $z \in \Delta'_A$, so gilt für $\zeta \in \Delta'_A$:

$$(A-\zeta I)^{-1} f = g + (\zeta - z)\mathring{R}_\zeta g \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{M},$$

also $f = (A-\zeta I)(A-\zeta I)^{-1} f \in \mathfrak{M}_\zeta$. Deshalb gehört auch Ag zu $\mathfrak{M}_\zeta$, und wir erhalten $A(\mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$. Außerdem ist $g = (A-zI)^{-1} f = \mathring{R}_z f \in \mathfrak{D}_1$, also

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad (A-zI)\,\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{M}.$$

Mit der Menge $\mathfrak{M}$ läßt A auch $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}^{[\perp]}$ invariant, genauer, es gilt $A(\mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}$.

Aus $\mathring{R}_z \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, $z \in \Delta'_A$, folgt weiter $\mathring{R}_z \mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}$, also bildet $\mathring{R}_z$ insbesondere den endlichdimensionalen Teilraum $\mathfrak{N}^0 = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ eineindeutig auf sich ab. Dieser gehört auf Grund von (1. 5) zu $\mathfrak{D}(A)$ und wird auch von $A - zI$, $z \in \Delta'_A$, auf sich abgebildet.

Wir wählen jetzt einen mit $\mathfrak{N}^0$ schiefverbundenen neutralen Teilraum $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{D}(A)$ und stellen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ in der Form

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^0 \dotplus \mathfrak{M}', \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}^0 \dotplus \mathfrak{N}_e$$

mit $\mathfrak{M}'[\perp]\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}_e[\perp]\mathfrak{N}'$ dar. Dann ergibt sich für $\Pi_\varkappa$ die Zerlegung (1. 3).

Aus der Invarianz der Teilräume $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ folgt für den π-hermiteschen Operator A leicht die Matrixdarstellung (1. 4) mit π-hermiteschen Operatoren A_e in $\mathfrak{N}_e$ und A' in $\mathfrak{M}'$. Offensichtlich ist $\mathfrak{D}'_1 = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{M}'$ ein dichter Teil von $\mathfrak{M}'$. Außerdem gilt für $z \in \Delta'_A$

$$(A' - zI)\,\mathfrak{D}'_1 = \mathfrak{M}',$$

also ist A' π-selbstadjungiert in $\mathfrak{M}'$.

Der Operator A_e ist offensichtlich auf einem dichten Teil von $\mathfrak{N}_e$ definiert, und man sieht leicht, daß f genau dann zum Defektraum $\mathfrak{N}_z$, $z \notin \sigma(A_{22}) \cup \sigma(A')$, gehört, wenn es die Gestalt

$$f = f_1 - (A_{22} - zI_{\mathfrak{N}^0})^{-1} A_{21} f_1 \quad \text{mit} \quad f_1 \in \mathfrak{N}_z(A_e) \tag{1.6}$$

hat. Deshalb stimmen die Defektzahlen von A und A_e überein, und es gilt $\Delta'_A \subset \Delta'_{A_e}$ sowie

$$\mathfrak{N}_e = \bigvee_{z \in \Delta'_A} \mathfrak{N}_z(A_e) = \bigvee_{z \in \Delta'_{A_e}} \mathfrak{N}_z(A_e),$$

$$(1.7) \quad \mathfrak{N} = \bigvee_{\substack{z \neq \bar{z} \\ z \notin \sigma(A_{22}) \cup \sigma(A')}} \mathfrak{N}_z; \quad \mathfrak{N}^0 = \bigvee_{z \in \Delta'_{A_e} \setminus \sigma(A_{22})} (A_{22} - zI_{\mathfrak{N}^0})^{-1} A_{21} \mathfrak{N}_z(A_e).$$

Also ist der Operator A_e einfach.

Um die letzte Aussage des Satzes zu beweisen, gehen wir von einer Zerlegung (1. 3) des Raumes $\Pi_\varkappa$ und einer Matrixdarstellung (1. 4) des Operators A mit den angegebenen Eigenschaften aus. Die Elemente f von $\mathfrak{N}_z$ $(z \in \Delta'_A)$ haben wieder die Gestalt (1. 6), also ist $\mathfrak{N} = \bigvee_{z \in \Delta'_A} \mathfrak{N}_z \subset \mathfrak{N}_e[+]\mathfrak{N}^0$. Wäre dabei $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{N}_e[+]\mathfrak{N}^0$, so gäbe es Elemente $y_1 \in \mathfrak{N}_e$, $y_3 \in \mathfrak{N}'$ — nicht beide gleich dem Nullelement —, so daß

$$(1.8) \qquad [\mathfrak{N}_z(A_e), y_1 + A_{21}^+ (A_{22}^+ - \bar{z} I_{\mathfrak{N}^0})^{-1} y_3] = \{0\}$$

für alle $z \in \Delta'_A$ gelten würde. Betrachten wir diese Beziehung für hinreichend großes $|z|$, so folgt aus der Einfachheit des Operators A_e leicht $y_1 = 0$, also erhält (1. 8) die Form

$$[(A_{22} - zI_{\mathfrak{N}^0})^{-1} A_{21} \mathfrak{N}_z(A_e), y_3] = \{0\} \quad \text{für alle} \quad z \in \Delta'_A.$$

Auf Grund der Voraussetzung $\mathfrak{N}^0 = \bigvee_{z \in \Delta'_{A_e} \setminus \sigma(A_{22})} (A_{22} - zI_{\mathfrak{N}^0})^{-1} A_{21} \mathfrak{N}_z(A_e)$ folgt daraus $y_3 = 0$. Somit gilt $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_e[+]\mathfrak{N}^0$, also ist $\mathfrak{N}_e[+]\mathfrak{N}^0$ eindeutig bestimmt als abgeschlossene lineare Hülle aller Defekträume $\mathfrak{N}_z$ von A, $z \in \Delta'_A$. Dann ist $\mathfrak{N}_0[+]\mathfrak{M}'$ eindeutig bestimmt als π-orthogonales Komplement von $\mathfrak{N}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir bemerken, daß Satz 1. 1 auch für einen π-hermiteschen Operator A mit ungleichen Defektzahlen richtig bleibt. Dabei stimmen stets die Defektzahlen von A mit denen von A_e überein.

Der Operator A_e aus Satz 1. 1 heißt der *einfache Teil* des Operators A. Er ist durch die angegebenen Eigenschaften bis auf π-unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt: Man kann ihn auffassen als den durch die Einschränkung $A|_{\mathfrak{N}}$ im Faktorraum $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_0$ in natürlicher Weise erzeugten Operator.

Aus Satz 1.1 folgt, daß der π-hermitesche Operator A genau dann einfach ist, wenn er mit seinem einfachen Teil zusammenfällt. Die π-selbstadjungierten Erweiterungen $\tilde{A}$ von A ergeben sich, wenn man in der Darstellung (1. 4) den Operator A_e durch eine π-selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{A}_e$ — evtl. mit Austritt in einen Oberraum $\tilde{\mathfrak{N}}_e$ von $\mathfrak{N}_e$ — ersetzt. Deshalb gehören die Punkte von $\sigma(A_{22}) \cup \cup \sigma(A_{22}^+) \cup \sigma(A')$ zum Spektrum jeder π-selbstadjungierten Erweiterung von A.

Schließlich enthält die folgende Aussage die Äquivalenz der hier und in [4], § 2. 2 gegebenen Definitionen der Einfachheit eines π-hermiteschen Operators.

Ein einfacher π-hermitescher Operator hat keinen Eigenwert; jeder π-hermitesche Operator A, der keinen nichtreellen Eigenwert hat und für den $\bigvee_{z \neq \bar{z}} \mathfrak{N}_z = \Pi_\varkappa$ gilt, ist einfach.

Für einen π-hermiteschen Operator A folgt nämlich aus $Af_0 - z_0 f_0 = 0$ leicht $[f_0, g]=0$, $g \in \mathfrak{N}_z$, $z \in \Delta'_A$, also unter der Voraussetzung (1. 2) $f_0=0$. Sind die Voraussetzungen des zweiten Teiles der Aussage erfüllt, so führen wir die zu A gehörige Zerlegung (1. 3) des Raumes $\Pi_\varkappa$ durch. Dann enthält $\sigma(A_{22}) \cup \sigma(A')$ keinen nichtreellen Punkt, also gilt auf Grund der Voraussetzung und der ersten Beziehung von (1. 7) $\mathfrak{N} = \Pi_\varkappa$, d.h., der Operator A stimmt mit seinem einfachen Teil überein.

3. *Zerlegung eines π-selbstadjungierten Operators.* Wir benutzen später mehrmals die folgende Aussage:

Ist A ein π-selbstadjungierter Operator in $\Pi_\varkappa$, so gibt es eine Zerlegung von $\Pi_\varkappa$ als direkte π-orthogonale Summe zweier für A invarianter Teilräume $\Pi'_\varkappa \subset \subset \mathfrak{D}(A)$ und Π_0, $\Pi_\varkappa = \Pi'_\varkappa [+] \Pi_0$, mit den folgenden Eigenschaften: Die Einschränkung $A|_{\Pi'_\varkappa}$ ist ein beschränkter π-selbstadjungierter Operator, Π_0 ist ein Hilbertraum bezüglich des Skalarproduktes $[\cdot, \cdot]$ und die Einschränkung $A_0 = = A|_{\Pi_0}$ ist ein selbstadjungierter Operator in diesem Hilbertraum.

Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir die Spektralfunktion E des Operators A ([12], [13]) und wählen ein offenes Intervall Δ, das alle kritischen Punkte von A enthält. Bezeichnet $\mathfrak{C}$ die lineare Hülle aller algebraischen Eigenräume von A zu nichtreellen Eigenwerten, so hat man nur $\Pi'_\varkappa = E(\Delta)\Pi_\varkappa [+] \mathfrak{C}$ und $\Pi_0 = (\Pi'_\varkappa)^{[\perp]}$ zu setzen.

4. *Spektralpunkte nichtpositiven Typs.* Für einen π-selbstadjungierten Operator A in $\Pi_\varkappa$ bezeichne $\sigma_0(A)$ die Menge derjenigen Eigenwerte von A, zu denen ein nichtpositives Eigenelement gehört. Die abgeschlossene lineare Hülle der algebraischen Eigenräume zu den in einem Gebiet $\mathfrak{A}$ der komplexen Ebene gelegenen Eigenwerten von $\sigma_0(A)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(A)$; ist sign $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(A) = (l_+, l_0, l_-)$, so nennen wir $l_- + l_0$ den *Index* von $\mathfrak{A}$ (bezüglich A); den Index der Menge $\mathfrak{A} = \{\lambda\}$, $\lambda \in \sigma_0(A)$, nennen wir auch den *Index* des Punktes λ. Für nichtreelles $\lambda \in \sigma(A)$ ist sein Index also gleich der algebraischen Vielfachheit, für reelles λ stimmt er mit dem in [13] eingeführten Begriff des Index überein.

Entsprechend definieren wir für einen π-unitären Operator U die Menge $\sigma_0(U)$ sowie den Index einer Menge $\mathfrak{A}$ oder einer Punktes $\lambda \in \sigma_0(U)$ bezüglich U.

Satz 1. 2. *Es sei (U_n) eine Folge π-unitärer Operatoren in $\Pi_\varkappa$ mit $\|U_n - U_0\| \to 0$ $(n \to \infty)$, $\lambda_0 \in \sigma_0(U_0)$ und r_{λ_0} der Index von λ_0. Dann gibt es zu jeder hinreichend kleinen*

Umgebung $\mathfrak{A}$ von λ_0 eine natürliche Zahl n_0, so daß für $n \geqq n_0$ der Index von $\mathfrak{A}$ bezüglich U_n gleich r_{λ_0} ist.

Beweis. Für Punkte λ_0, die nicht auf der Einheitskreislinie liegen, folgt die Behauptung aus einem bekannten Ergebnis der Störungstheorie ([15], Satz 4. 3).

Wir betrachten einen Punkt $\lambda_0 \in \sigma_0(U_0)$ mit $|\lambda_0|=1$ und eine Umgebung $\mathfrak{A}$ von λ_0, die von $\sigma_0(U_0)\setminus\{\lambda_0\}$ einen positiven Abstand hat. Angenommen, es gäbe eine Teilfolge (n_j) der Folge der natürlichen Zahlen, so daß der Index von $\mathfrak{A}$ bezüglich U_{n_j} kleiner als r_{λ_0} wäre. Den Raum $\Pi_\varkappa$ stellen wir in der Form

$$\Pi_\varkappa = \Pi_-[+]\Pi_+$$

mit einen $\varkappa$-dimensionalen negativen Teilraum Π_- dar; die zugehörige Zerlegung der Operatoren U_n sei

$$U_n = \begin{pmatrix} U_{11}^{(n)} & U_{12}^{(n)} \\ U_{21}^{(n)} & U_{22}^{(n)} \end{pmatrix}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Ist $K_n \in [\Pi_-, \Pi_+]$, $\|K_n\| \leqq 1$, ein Winkeloperator für einen Pontrjaginschen $\varkappa$-dimensionalen nichtpositiven invarianten Teilraum von U_n, so gilt

$$U_{21}^{(n)} + U_{22}^{(n)} K_n = K_n(U_{11}^{(n)} + U_{12}^{(n)} K_n), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.9}$$

Die Folge (K_{n_j}) enthält eine schwach konvergente Teilfolge, von der wir annehmen können, daß sie mit (K_{n_j}) zusammenfällt: $K_{n_j} \to K_0$ (schwach) für $j \to \infty$. Aus (1.9) folgt damit

$$U_{21}^{(0)} + U_{22}^{(0)} K_0 = K_0(U_{11}^{(0)} + U_{12}^{(0)} K_0),$$

Die charakteristische Gleichung der Einschränkung von U_n auf den zu K_n gehörigen invarianten Teilraum lautet

$$p_n(z) \equiv \det(U_{11}^{(n)} + U_{12}^{(n)} K_n - zI) = 0,$$

deshalb konvergieren die charakteristischen Polynome $p_{n_j}(z)$ gegen $p_0(z)$. Da andererseits jeder Punkt $\lambda_0 \in \sigma_0(U_0)$ vom Index r_{λ_0} auch Nullstelle von $p_0(z)$ der Ordnung r_{λ_0} ist, müssen für hinreichend großes j in $\mathfrak{A}$ genau r_{λ_0} Nullstellen von $p_{n_j}(z)$ liegen. Das widerspricht der obigen Annahme.

Mit Hilfe der Cayleytransformation ergibt sich aus Satz 1.2 ohne Schwierigkeit die

Folgerung 1. 1. *Es sei (A_n) eine Folge π-selbstadjungierter Operatoren in $\Pi_\varkappa$, die in dem Sinne gegen den π-selbstadjungierten Operator A_0 konvergiert, daß für ein nichtreelles $z \in \varrho(A_0)$ auch $z \in \varrho(A_n)$ und $\|(A_n - zI)^{-1} - (A_0 - zI)^{-1}\| \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, $\lambda_0 \in \sigma_0(A_0)$ und r_{λ_0} der Index von λ_0. Dann gibt es zu jeder hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{A}$ von λ_0 eine natürliche Zahl n_0, so daß für $n \geqq n_0$ der Index von $\mathfrak{A}$ bezüglich A_n gleich r_{λ_0} ist.*

§ 2. Die Q-Funktion eines π-hermiteschen Operators

1. *Definition der Q-Funktion.* Unter einer *Q-Funktion* $Q(z)=Q_A(z)$ des π-hermiteschen Operators A mit gleichen Defektzahlen verstehen wir eine Operatorfunktion mit Werten in $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, die der folgenden Gleichung genügt:

$$\frac{Q(z)-Q^*(\zeta)}{z-\bar{\zeta}} = \mathring{\Gamma}_\zeta^+ \mathring{\Gamma}_z \qquad (z, \zeta \in \varrho(\mathring{A})). \tag{2.1}$$

Die Funktion $Q(z)$ hängt offensichtlich ab von der speziellen gewählten Erweiterung $\mathring{A}$, wir sprechen deshalb mitunter auch von einer zur kanonischen Erweiterung $\mathring{A}$ gehörigen Q-Funktion.

Ist $z_0 \in \varrho(\mathring{A})$ und setzen wir in (2.1) $z=\zeta=z_0$, so ergibt sich $Q(z_0)=iy_0\mathring{\Gamma}_{z_0}^+\mathring{\Gamma}_{z_0}+C$ mit $y_0=\operatorname{Im} z_0$, $C=C^* \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. Aus (2.1) folgt dann für $\zeta=z_0$

$$\begin{aligned} Q(z) &= C-iy_0\mathring{\Gamma}_{z_0}^+\mathring{\Gamma}_{z_0}+(z-\bar{z}_0)\mathring{\Gamma}_{z_0}^+\mathring{\Gamma}_z = \\ &= C-iy_0\mathring{\Gamma}_{z_0}^+\mathring{\Gamma}_{z_0}+(z-\bar{z}_0)\mathring{\Gamma}_{z_0}^+(\mathring{A}-z_0I)(\mathring{A}-zI)^{-1}\mathring{\Gamma}_{z_0} \qquad (z \in \varrho(\mathring{A})). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ohne Schwierigkeit überzeugt man sich davon, daß diese Funktion wirklich der Gleichung (2.1) genügt. Die Funktion $Q(z)$ ist durch (2.1) also bis auf einen von z unabhängigen selbstadjungierten Operator $C \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ bestimmt.

Aus (2.2) ergibt sich für $z \in \varrho(\mathring{A})$ leicht

$$Q^*(\bar{z}) = Q(z)$$

und

$$\operatorname{Im} Q(z) = \operatorname{Im} z \cdot \mathring{\Gamma}_z^+ \mathring{\Gamma}_z. \tag{2.3}$$

Aus der letzten Gleichung folgt auf Grund der Bemerkungen am Ende von § 1. 1, daß $\lambda=0$ ein isolierter normal abspaltbarer Eigenwert endlicher Vielfachheit oder ein Punkt der Resolventenmenge von $Q(z)$ ist; letzteres trifft sicher dann zu, wenn der Teilraum $\mathfrak{N}_z$ positiv definit ist.

2. *Verallgemeinerte Resolventen.* Die Q-Funktion spielt eine wichtige Rolle bei der Beschreibung aller verallgemeinerten Resolventen des Operators A. Wir erinnern daran ([4]), daß eine *verallgemeinerte Resolvente* von A eine Operatorfunktion R_z mit Werten in $[\Pi_\varkappa, \Pi_\varkappa]$ der Gestalt

$$R_z = \tilde{P}(\tilde{A}-z\tilde{I})^{-1}|_{\Pi_\varkappa} \tag{2.4}$$

ist; dabei bezeichnet $\tilde{A}$ eine beliebige reguläre[8]) π-selbstadjungierte Erweiterung von A in einem Oberraum $\tilde{\Pi}_\varkappa \supset \Pi_\varkappa$ und $\tilde{P}$ den π-orthogonalen Projektor von $\tilde{\Pi}_\varkappa$ auf $\Pi_\varkappa$.

[8]) Eine π-selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{A}$ von A heißt *regulär*, wenn sie in einem Oberraum $\Pi_{\varkappa_1}$ mit derselben Anzahl negativer Quadrate wie der Ausgangsraum wirkt.

Die verallgemeinerte Resolvente R_z aus (2. 4) heißt eine *kanonische Resolvente* von A, wenn die Erweiterung $\tilde{A}$ kanonisch, d.h. in $\Pi_\varkappa$ gewählt werden kann.

Mit $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$ bezeichnen wir die Menge aller „Operatorfunktionen" T der Gestalt

$$T(z) = \hat{T}(z)\hat{P} + \infty(I-\hat{P}), \qquad z\in C_+ \cup C_-; \tag{2. 5}$$

dabei bezeichnet $\hat{P}$ einen orthogonalen Projektor in $\mathfrak{G}$ und $\hat{T}$ eine Operatorfunktion mit $\hat{T}(z)=\hat{T}^*(\bar{z})$, deren Werte $\hat{T}(z)$ für $z\in C_+$ dicht definierte maximal dissipative Operatoren in $\hat{\mathfrak{G}}=\hat{P}\mathfrak{G}$ sind und deren Cayleytransformierte $V_{\hat{T}}(z) = (\hat{T}(z)- - iI)(\hat{T}(z)+iI)^{-1}$ in C_+ holomorph von z abhängt. Gleichungen mit uneigentlichen Operatoren (2. 5) verstehen sich in dem Sinne, daß man in ihnen zunächst ∞ durch eine natürliche Zahl n ersetzt und anschließend $n\to\infty$ streben läßt. Für die Operatorfunktion (2. 5) gilt also z. B.

$$(T(z)+Q(z))^{-1} = \hat{P}(\hat{T}(z)+\hat{Q}(z))^{-1}\hat{P} \qquad (\hat{Q}(z)=\hat{P}Q(z)\hat{P}).$$

Ist $\hat{T}(z)$ aus (2. 5) ein von z unabhängiger selbstadjungierter Operator $\hat{T}$ in $\hat{\mathfrak{G}}$, so nennen wir

$$T = \hat{T}\hat{P} + \infty(I-\hat{P}) \tag{2. 6}$$

einen uneigentlichen selbstadjungierten Operator; die Menge aller uneigentlichen selbstadjungierten Operatoren bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}_0(\mathfrak{G})$.

Es sei jetzt $\mathring{A}$ eine kanonische π-selbstadjungierte Erweiterung von A. In [4], Satz 5. 1 wurde die folgende Aussage bewiesen:

Zwischen der Menge aller verallgemeinerten Resolventen (2. 4) *des Operators A und der Menge $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$ besteht eine eineindeutige Beziehung, vermittelt durch die Gleichung*

$$R_z = (\mathring{A}-zI)^{-1} - \Gamma_z(T(z)+Q(z))^{-1}\Gamma_z^+ \qquad (z\notin\sigma(\mathring{A})\cup\sigma(\tilde{A})); \tag{2. 7}$$

R_z ist genau dann kanonisch, wenn das zugehörige T zu $\mathfrak{T}_0(\mathfrak{G})$ gehört.

Eine π-selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{A}$ von A nennen wir eine *reine Austrittserweiterung*, wenn aus $g\in(\mathfrak{D}(\tilde{A})\cap\Pi_\varkappa)\setminus\mathfrak{D}(A)$ stets $\tilde{A}g\notin\Pi_\varkappa$ folgt. Wie man leicht sieht, ist das gleichbedeutend damit, daß für $f\in\Pi_\varkappa$ die Beziehungen $(\tilde{A}-z_0\tilde{I})^{-1}f\in\Pi_\varkappa$ und $f\in\mathfrak{M}_{z_0}$ äquivalent sind $(z_0\in\varrho(\tilde{A}))$.

Hat der Operator A einen endlichen Defekt, d.h., ist der Raum $\mathfrak{G}$ endlichdimensional, so braucht man zu den Überlegungen in [4], § 5. 2 wenig hinzuzufügen, um die folgende Aussage zu erhalten:

Lemma 2. 1. *Genau dann ist die π-selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{A}$ von A eine reine Austrittserweiterung, wenn für die Funktion $T\in\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$ aus der Darstellung* (2. 7) *der zugehörigen verallgemeinerten Resolvente R_z von A gilt:* $\dfrac{\operatorname{Im} T(z)}{\operatorname{Im} z} > 0$ *für ein (und damit für alle)* $z \in C_+ \cup C_-$.

Gemäß dem Beweis von Satz 5. 1 aus [4] besteht nämlich für $\tilde{f} = R_z f - (\tilde{A} - z_0 \tilde{I})^{-1} f$ die Beziehung

$$[\tilde{f}, \tilde{f}] = \frac{1}{z_0 - \bar{z}_0} \{(T(z_0)\xi, \xi) - (\xi, T(z_0)\xi)\},$$

wobei wir $\xi = P(z_0) \Gamma_{\bar{z}_0}^+ f$ gesetzt haben[9]. Daraus folgt leicht die Behauptung.

3. *Beschreibung der Gesamtheit aller Q-Funktionen von A.* Bei der Definition der Q-Funktion vermerkten wir, daß diese (bei festem $\mathring{\Gamma}_{z_0}$) von der Wahl der kanonischen Erweiterung $\mathring{A}$ abhängt. Der folgende Satz beschreibt die Gesamtheit aller Q-Funktionen von A, die sich ergibt, wenn $\mathring{A}$ die Gesamtheit aller kanonischen π-selbstadjungierten Erweiterungen von A durchläuft; dabei setzen wir voraus, daß eine spezielle Q-Funktion $Q_0(z)$ des Operators A bekannt ist.

Satz 2. 1. *Ist $Q_0(z)$ eine Q-Funktion des π-hermiteschen Operators A, so ergibt sich die Gesamtheit aller Q-Funktionen von A aus der Beziehung*

$$Q(z) = Q_0(z) - (Q_0(z) - Q_0^*(z_0))(T + Q_0(z))^{-1}(Q_0(z) - Q_0(z_0)) + C, \tag{2.8}$$

wenn T die Menge $\mathfrak{T}_0(\mathfrak{G})$ aller uneigentlichen selbstadjungierten und C die Menge aller beschränkten selbstadjungierten Operatoren in $\mathfrak{G}$ durchläuft.

Beweis. Die Q-Funktion $Q_0(z)$ gehöre zur kanonischen π-selbstadjungierten Erweiterung $\mathring{A}_0$ von A. Die Resolvente einer beliebigen kanonischen Erweiterung $\mathring{A}$ ergibt sich dann gemäß (2. 7) aus der Beziehung

$$(\mathring{A} - zI)^{-1} = (\mathring{A}_0 - zI)^{-1} - \Gamma_z (T + Q_0(z))^{-1} \Gamma_{\bar{z}}^+$$

mit einem uneigentlichen selbstadjungierten Operator T. Setzen wir diesen Ausdruck in (2. 2) ein und beachten (2. 1), so folgt die Behauptung.

Wir bemerken, daß die Beziehung (2. 8) für alle Punkte $z \in \varrho(\mathring{A}_0) \cap \varrho(\mathring{A})$ besteht. Ist T insbesondere ein beschränkter selbstadjungierter Operator in $\mathfrak{G}$ (d.h. $\hat{P} = I$ und $\hat{T} = \hat{T}^* \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ in (2. 6)) und setzen wir $C = -T - Q_0(z_0) - Q_0^*(z_0)$, so erhält (2. 8) die Form

$$Q(z) = -(T + Q_0^*(z_0))(T + Q_0(z))^{-1}(T + Q_0(z_0)).$$

Insbesondere ist also mit $Q_0(z)$ auch

$$Q(z) = -Q_0^*(z_0) Q_0^{-1}(z) Q_0(z_0)$$

und, falls speziell $\mathring{\Gamma}_{z_0}^+ \mathring{\Gamma}_{z_0} = I_{\mathfrak{G}}$ gilt, auch $-y_0^2 Q_0^{-1}(z)$ eine Q-Funktion des Operators A.

---

[9] $P(z) = (T(z) + Q(z))^{-1}$.

4. *Charakteristische Eigenschaften der Q-Funktion.* Auf Grund des folgenden Satzes können wir uns häufig auf die Betrachtung der Q-Funktionen einfacher π-hermitescher Operatoren beschränken.

Satz 2. 2. *Jede Q-Funktion des Operators A ist eine Q-Funktion seines einfachen Teiles A_e und umgekehrt.*

Beweis. Jede kanonische π-selbstadjungierte Erweiterung $\mathring{A}$ von A gestattet bezüglich einer Zerlegung (1. 3) von $\Pi_\varkappa$ eine Matrixdarstellung (1. 4), wobei man A_e durch eine π-selbstadjungierte Erweiterung $\mathring{A}_e$ in $\mathfrak{N}_e$ zu ersetzen hat, und umgekehrt definiert jede solche Matrix eine π-selbstadjungierte Erweiterung von A. Die Operatoren $\mathring{\Gamma}_z$ und $\mathring{\Gamma}_{\bar z}^+$ lassen sich bezüglich der Zerlegung (1. 3) folgendermaßen darstellen:

$$\mathring{\Gamma}_z = \begin{pmatrix} \mathring{\Gamma}_z^{(e)} \\ \mathring{\Gamma}_z^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathring{\Gamma}_{\bar z}^+ = \left((\mathring{\Gamma}_{\bar z}^{(e)})^+ \ 0 \ (\mathring{\Gamma}_{\bar z}^0)^+ \ 0\right).$$

Offensichtlich hat dabei $\mathring{\Gamma}_z^{(e)} = P_{\mathfrak{N}_e}\mathring{\Gamma}_z$ die Eigenschaften 1) und 2) aus § 1. 1 für A_e an Stelle von A (mit $\mathring{A}_e$ an Stelle von $\mathring{A}$), und es gilt $\mathring{\Gamma}_{z_0}^+\mathring{\Gamma}_{z_0} = (\mathring{\Gamma}_{z_0}^{(e)})^+\mathring{\Gamma}_{z_0}^{(e)}$ sowie

$$\mathring{\Gamma}_{z_0}^+(\mathring{A} - zI)^{-1}\mathring{\Gamma}_{z_0} = (\mathring{\Gamma}_{z_0}^{(e)})^+(\mathring{A}_e - zI_{\mathfrak{N}_0})^{-1}\mathring{\Gamma}_{z_0}^{(e)}.$$

Damit folgt die Behauptung leicht aus der Beziehung (2. 2).

Wir erinnern ([8], § 1), daß ein in einer Teilmenge $\mathscr{Z}$ der komplexen Ebene definierter Kern $K(z, \zeta)$ mit Werten in $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ ($\mathfrak{G}$-Hilbertraum) definitionsgemäß $\varkappa$ negative Quadrate (in $\mathscr{Z}$) hat, wenn folgendes gilt:

1) $K(z, \zeta) = K^*(\zeta, z)$ $(z, \zeta \in \mathscr{Z})$;
2) für eine beliebige natürliche Zahl n, beliebige $z_1, \dots, z_n \in \mathscr{Z}$ und $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathfrak{G}$ hat die Matrix
$$((K(z_i, z_j)\,\xi_i, \xi_j))_{i,j=1,2,\dots,n}$$
höchstens $\varkappa$ negative Eigenwerte und für mindestens eine solche Wahl von n; $z_1, \dots, z_n$; $\xi_1, \dots, \xi_n$ genau $\varkappa$ negative Eigenwerte.

Wir sagen, eine Funktion Q mit Werten in $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ habe die *Eigenschaft* $(N_\varkappa^0)$ (bzw. $(N_\varkappa)$), $\varkappa$-nichtnegative ganze Zahl, wenn sie in C_+ meromorph ist (bzw. in $C_+ \cup C_-$ stückweise meromorph ist und $Q(z) = Q^*(\bar z)$ gilt) und der Kern

$$K(z, \zeta) = \frac{Q(z) - Q^*(\zeta)}{z - \bar\zeta} \tag{2. 9}$$

in $\mathscr{Z}_Q^0$ (bzw. $\mathscr{Z}_Q$) $\varkappa$ negative Quadrate hat; dabei bezeichnet $\mathscr{Z}_Q^0$ (bzw. $\mathscr{Z}_Q$) die Menge derjenigen Punkte aus C_+ (bzw. $C_+ \cup C_-$), in denen Q regulär ist. Im Falle $z = \zeta$ hat man die rechte Seite in (2. 9) durch $Q'(z)$ zu ersetzen.

Offensichtlich hat die Funktion Q genau dann z. B. die Eigenschaft $(N_\varkappa^0)$, wenn für beliebiges n, beliebige $z_1, \ldots, z_n \in \mathscr{H}_Q^0$ und $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathfrak{G}$ die quadratische Form

$$(2.10) \qquad \sum_{j,k=1}^{n} \left(\frac{Q(z_j) - Q^*(z_k)}{z_j - \bar{z}_k} \xi_j, \xi_k\right) \alpha_j \bar{\alpha}_k, \quad \alpha_j \in C,$$

nicht mehr als $\varkappa$ negative Quadrate und für mindestens eine Wahl der Zahlen n, z_j und der Vektoren ξ_j genau $\varkappa$ negative Quadrate hat.

Eigentliches Anliegen dieser Arbeit ist der Beweis der folgenden Charakterisierung der Q-Funktionen.

Hauptsatz. *Eine Funktion $Q(z)$ mit Werten in $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ ist genau dann Q-Funktion eines einfachen π-hermiteschen Operators A in $\Pi_\varkappa$, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:*

(I) *$Q(z)$ hat die Eigenschaft $(N_\varkappa)$;*

(II) $\displaystyle w\text{-}\lim_{y \uparrow \infty} \frac{Q(iy)}{y} = O$,[10] d.h. $\displaystyle \lim_{y \uparrow \infty} \frac{(Q(iy)\xi, \xi)}{y} = 0$ *für alle* $\xi \in \mathfrak{G}$;

(III) $\displaystyle \lim_{y \uparrow \infty} y(\operatorname{Im} Q(iy)\xi, \xi) = \infty$ *für alle* $\xi \in \mathfrak{G}$, $\xi \neq 0$;

(IV) *für mindestens ein nichtreelles z ist* $\operatorname{Im} Q(z)$ *gleichmäßig positiv.*

Wir bemerken, daß im Falle eines endlichdimensionalen Raumes $\mathfrak{G}$ mit Bedingung (III) stets auch Bedingung (IV) erfüllt ist.

Die einzelnen Aussagen dieses Satzes werden — zumeist in schärferer Form — in den folgenden Paragraphen bewiesen. Die Notwendigkeit der Bedingungen (I) und (II) ergibt sich aus § 3. 3 und die Notwendigkeit der Bedingung (III) aus Satz 3. 2. Die Notwendigkeit von (IV) folgt aus (2. 3) und den Bemerkungen am Ende von § 1. 1. Schließlich folgt die Hinlänglichkeit der angegebenen Bedingungen aus Satz 5. 1.

§ 3. Die Funktionenklasse $N_\varkappa^0(\mathfrak{G})$

1. *Der Raum $\Pi_\varkappa^0(Q)$.* Es sei jetzt $\mathfrak{G}$ ein beliebiger Hilbertraum, Q eine in der offenen oberen Halbebene C_+ meromorphe Funktion mit Werten in $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. Hat diese Funktion Q überdies die Eigenschaft $(N_\varkappa^0)$, so erzeugt sie in natürlicher Weise einen $\pi_\varkappa$-Raum $\Pi_\varkappa^0(Q)$. Um das zu sehen, ordnen wir jedem Punkte z des Holomorphiegebietes $\mathscr{H}_Q^0$ von Q ein Symbol e_z zu und bilden die lineare Menge $\mathfrak{L}^0(Q)$ aller formalen Summen

$$(3.1) \qquad f = \Sigma e_z \xi_z, \quad \xi_z \in \mathfrak{G}, \quad z \in \mathscr{H}_Q^0,$$

[10] w-lim bezeichnet den Grenzwert im schwachen Sinne.

wobei nur endlich viele „Koeffizienten" ξ_z vom Nullelement verschieden sein sollen. Für zwei solche Elemente f und

$$g = \Sigma e_z \eta_z \in \mathfrak{L}^0(Q)$$

definieren wir ein (möglicherweise entartendes) Skalarprodukt $[f, g]$ durch die Gleichung

$$[f, g] = \sum_{z, \zeta \in \mathscr{X}_Q^0} \left(\frac{Q(z) - Q^*(\zeta)}{z - \bar{\zeta}} \xi_z, \eta_\zeta\right). \tag{3.2}$$

Auf Grund der Bedingung $(N_\varkappa^0)$ hat dieses Skalarprodukt genau $\varkappa$ negative Quadrate. Durch Faktorraumbildung $\mathfrak{L}^0(Q)/\mathfrak{J}$ nach der Menge $\mathfrak{J} = \{f\colon f \in \mathfrak{L}^0(Q), f[\perp]\mathfrak{L}^0(Q)\}$ aller isotropen Elemente von $\mathfrak{L}^0(Q)$ und Vervollständigung erhalten wir einen $\pi_\varkappa$-Raum $\Pi_\varkappa^0(Q)$, in den $\mathfrak{L}^0(Q)$ kanonisch eingebettet ist ([4], § 1. 2). Wir erinnern daran, daß bei dieser kanonischen Einbettung das Skalarprodukt $[f, g]$ zweier Elemente $f, g \in \mathfrak{L}^0(Q)$ sowie die Konvergenz einer Folge von Elementen aus $\mathfrak{L}^0(Q)$[11]) erhalten bleiben; dabei liegt das Bild von $\mathfrak{L}^0(Q)$ dicht in $\Pi_\varkappa^0(Q)$.

2. *Der Operator* A_Q^0. Für das Element $f = \sum e_z \xi_z \in \mathfrak{L}^0(Q)$ setzen wir

$$\chi(f) = \sum_{z \in \mathscr{X}_Q^0} \xi_z.$$

Dann ist χ ein linearer Operator von $\mathfrak{L}^0(Q)$ auf $\mathfrak{G}$. Wir führen die Menge

$$\hat{\mathfrak{D}} = \{f\colon f \in \mathfrak{L}^0(Q), \chi(f) = 0\}$$

ein und definieren auf $\hat{\mathfrak{D}}$ einen Operator $\hat{A}$ durch die Gleichung

$$\hat{A} f = \sum_{z \in \mathscr{X}_Q^0} z e_z \xi_z \quad \text{für} \quad f = \sum_{z \in \mathscr{X}_Q^0} e_z \xi_z \in \hat{\mathfrak{D}},$$

Man zeigt leicht, daß $\hat{A}$ π-hermitesch ist:

$$[\hat{A} f, g] = [f, \hat{A} g] \qquad (f, g \in \hat{\mathfrak{D}}).$$

Wesentlich mehr läßt sich über den Operator $\hat{A}$ aussagen, falls die Funktion Q außer $(N_\varkappa^0)$ noch die folgende Eigenschaft $(\mathfrak{D})$ hat:

$(\mathfrak{D})$ *Es gibt eine Punktfolge* $(z_n) \subset \mathscr{X}_Q^0$ *mit*

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Im} z_n = \infty \quad \text{und} \quad w\text{-}\lim_{n \to \infty} \frac{Q(z_n)}{\operatorname{Im} z_n} = 0. \tag{3.3}$$

Da für $\xi, \eta \in \mathfrak{G}$ und $z \in \mathscr{X}_Q^0$

$$[e_{z_n} \xi, e_{z_n} \xi] = \frac{\operatorname{Im}(Q(z_n) \xi, \xi)}{\operatorname{Im} z_n}, \quad [e_{z_n} \xi, e_z \eta] = \left(\frac{Q(z_n) - Q^*(z)}{z_n - \bar{z}} \xi, \eta\right)$$

[11]) Die Konvergenz $f_n \to g$ einer Folge $(f_n) \subset \mathfrak{L}^0(Q)$ gegen $g \in \mathfrak{L}^0(Q)$ wird dabei folgendermaßen erklärt (siehe [4], § 1.1): $[f_n, f_n] \to [g, g]$ und $[f_n, h] \to [g, h]$ für alle $h \in \mathfrak{L}^0(Q)$.

gilt, folgt aus (3. 3) für beliebiges $\xi \in \mathfrak{G}$

$$e_{z_n}\xi \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Daraus ergibt sich, daß $\hat{\mathfrak{D}}$ in $\mathfrak{L}^0(Q)$ dicht liegt: Für beliebiges $f \in \mathfrak{L}^0(Q)$ gilt nämlich $g_n = f - e_{z_n}\chi(f) \in \hat{\mathfrak{D}}$ und $g_n \to f$. Ist $h \in \mathfrak{J} \cap \hat{\mathfrak{D}}$, so gilt für alle $f \in \hat{\mathfrak{D}}$

$$[\hat{A}h, f] = [h, \hat{A}f] = 0,$$

also gehört auch $\hat{A}h$ zu $\mathfrak{J}$. Deshalb geht bei der kanonischen Einbettung von $\mathfrak{L}^0(Q)$ in $\Pi_\varkappa^0(Q)$ der Operator $\hat{A}$ in einen dicht definierten hermiteschen Operator in $\Pi_\varkappa^0(Q)$ über, dessen Abschließung wir mit A_Q^0 bezeichnen.

Wir überlegen uns, daß $\mathfrak{n}_+(A_Q^0)=0$ gilt. Zu diesem Zweck betrachten wir einen Punkt $z_0 \in \mathscr{Z}_Q^0$. Aus der Stetigkeit der Funktion Q im Punkte z_0 folgt durch Betrachtung der Ausdrücke

$$[e_z\xi - e_{z_0}\xi, e_z\xi - e_{z_0}\xi] \quad \text{und} \qquad [e_z\xi - e_{z_0}\xi, e_\zeta\eta] \ (z, \zeta \in \mathscr{Z}_Q^0; \xi, \eta \in \mathfrak{G})$$

unmittelbar, daß $z \to z_0$ für beliebiges $\xi \in \mathfrak{G}$ auch $e_z\xi \to e_{z_0}\xi$ nach sich zieht. Andererseits gilt für $\sum e_z\xi_z \in \mathfrak{L}^0(Q)$ mit $\xi_{z_0}=0$:

$$f = \sum \frac{e_z\xi_z - e_{z_0}\xi_z}{z - z_0} \in \hat{\mathfrak{D}}, \qquad (\hat{A} - z_0 I)f = \sum e_z\xi_z.$$

Die Menge $(\hat{A} - z_0 I)\hat{\mathfrak{D}}$ liegt somit dicht in $\mathfrak{L}^0(Q)$, also ist auch $(A_Q^0 - z_0 I)\mathfrak{D}(A_Q^0)$ dicht in $\Pi_\varkappa^0(Q)$ und fällt deshalb sogar mit $\Pi_\varkappa^0(Q)$ zusammen.

Wir wählen jetzt einen Punkt $z_0 \in \mathscr{Z}_Q^0 \setminus \sigma_p(A_Q^0)$ und definieren einen linearen Operator $\Gamma_{z_0}: \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}^0(Q)$ durch die Gleichung

$$\Gamma_{z_0}\xi = e_{z_0}\xi \qquad (\xi \in \mathfrak{G}).$$

Da für beliebige $\xi, \eta \in \mathfrak{G}$ und $z \in \mathscr{Z}_Q^0$

$$(3.4) \qquad [\Gamma_{z_0}\xi, \Gamma_{z_0}\xi] = \frac{\operatorname{Im}(Q(z_0)\xi, \xi)}{\operatorname{Im} z_0}, \quad [\Gamma_{z_0}\xi, e_z\eta] = \left(\frac{Q(z_0) - Q^*(z)}{z_0 - \bar{z}}\xi, \eta\right)$$

gilt, ist der Operator Γ_{z_0} stetig. Offensichtlich können wir ihn auch auffassen als Operator von $\mathfrak{G}$ in $\Pi_\varkappa^0(Q)$, d.h. als Element von $[\mathfrak{G}, \Pi_\varkappa^0(Q)]$. Dann hat er einen (stetigen) π-adjungierten Operator $\Gamma_{z_0}^+ \in [\Pi_\varkappa^0(Q), \mathfrak{G}]$, definiert durch die Gleichung

$$[f, \Gamma_{z_0}\xi] = (\Gamma_{z_0}^+ f, \xi) \qquad (f \in \Pi_\varkappa^0(Q), \xi \in \mathfrak{G}).$$

Aus den Beziehungen (3. 4) folgt insbesondere mit $y_0 = \operatorname{Im} z_0$

$$(3.5) \qquad y_0\Gamma_{z_0}^+\Gamma_{z_0} = \operatorname{Im} Q(z_0), \quad \Gamma_{z_0}^+(e_z\xi) = \frac{Q(z) - Q^*(z_0)}{z - \bar{z}_0}\xi.$$

Da für $z \in \mathscr{Z}_Q^0$, $z \neq z_0$ und $\xi \in \mathfrak{G}$

$$(3.6) \qquad (\hat{A} - zI)(e_z \xi - e_{z_0} \xi) = (z - z_0) e_{z_0} \xi$$

gilt, gehört $e_{z_0} \xi$ zu $\mathfrak{R}(\hat{A} - zI)$, also ist $\mathfrak{R}(\Gamma_{z_0}) \subset \mathfrak{R}(A_Q^0 - zI)$ und

$$(3.7) \quad e_z \xi = e_{z_0} \xi + (z - z_0)(A_Q^0 - zI)^{-1}(e_{z_0} \xi) = (A_Q^0 - z_0 I)(A_Q^0 - zI)^{-1}(e_{z_0} \xi).$$

Wenden wir auf diese Beziehung den Operator $\Gamma_{z_0}^+$ an und beachten die zweite Gleichung von (3. 5), so folgt

$$(3.8) \qquad Q(z) = Q^*(z_0) + (z - \bar{z}_0)\Gamma_{z_0}^+ (A_Q^0 - z_0 I)(A_Q^0 - zI)^{-1} \Gamma_{z_0},$$

und zwar zunächst nur für $z \neq z_0$; für $z = z_0$ ist diese Beziehung aber nichts anderes als die erste Gleichung von (3. 5).

3. *Die Klasse* $N_\varkappa^0(\mathfrak{G})$. Mit $N_\varkappa^0(\mathfrak{G})$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller in C_+ meromorphen Funktionen Q, deren Werte in $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ liegen und welche die Eigenschaften $(N_\varkappa^0)$ und $(\mathfrak{D})$ besitzen.

Wir nennen im folgenden einen π-selbstadjungierten (bzw. maximalen π-hermiteschen, $\mathfrak{n}_+(A) = 0$) Operator A in $\Pi_\varkappa$ *eng verbunden* (bzw. *eng o-verbunden*[12])) mit einem Operator $\Gamma \in [\mathfrak{G}, \Pi_\varkappa]$, wenn

$$\Pi_\varkappa = \bigvee_{z \in \varrho(A)} (A - zI)^{-1} \Gamma \mathfrak{G} \quad \Big(\text{bzw. } \Pi_\varkappa = \bigvee_{z \in \varrho(A) \cap C_+} (A - zI)^{-1} \Gamma \mathfrak{G}\Big)$$

gilt

Einen wichtigen Zusammenhang zwischen maximalen π-hermiteschen Operatoren und Funktionen der Klasse $N_\varkappa^0(\mathfrak{G})$ stellt der folgende Satz her.

Satz 3. 1. *Es sei A ein maximaler π-hermitescher Operator mit $\mathfrak{n}_+(A) = 0$ in einem $\pi_\varkappa$-Raum $\Pi_\varkappa$, $\mathfrak{G}$ ein Hilbertraum, $S = S^* \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, $\Gamma \in [\mathfrak{G}, \Pi_\varkappa]$ und $z_0 \in C_+ \setminus \sigma_p(A)$. Dann definiert die Gleichung*

$$(3.9) \qquad Q(z) = S - iy_0 \Gamma^+ \Gamma + (z - \bar{z}_0)\Gamma^+ (A - z_0 I)(A - zI)^{-1} \Gamma$$

eine Funktion der Klasse $N_{\varkappa'}^0(\mathfrak{G})$ für ein gewisses $\varkappa'$ mit $0 \leqq \varkappa' \leqq \varkappa$. Sind die Operatoren A und Γ eng o-verbunden, so ist $\varkappa' = \varkappa$. Umgekehrt gestattet jede Funktion $Q \in N_\varkappa^0(\mathfrak{G})$ die Darstellung (3. 9) *mit $\Pi_\varkappa = \Pi_\varkappa^0(Q)$, dem maximalen π-hermiteschen Operator $A = A_Q^0$ mit $\mathfrak{n}_+(A) = 0$, $S = \operatorname{Re} Q(z_0)$ und $\Gamma = \Gamma_{z_0}$; dabei sind die Operatoren A_Q^0 und Γ_{z_0} eng o-verbunden.*

Beweis. Zum Beweis der zweiten Aussage bleibt nach den Betrachtungen in den Abschnitten 1 und 2 nur noch zu zeigen, daß die Operatoren A_Q^0 und Γ eng o-verbunden sind, d.h., daß die abgeschlossene lineare Hülle $\mathfrak{E}$ aller Vektoren $(A_Q^0 - zI)^{-1}(e_{z_0} \xi)$ $\big(z \in C_+ \setminus \sigma_p(A_Q^0),\ \xi \in \mathfrak{G}\big)$ mit $\Pi_\varkappa^0(Q)$ zusammenfällt.

---

[12]) d.h. eng verbunden bezüglich der oberen Halbebene.

Erweitert man A_Q^0 gegebenenfalls zu einem π-selbstadjungierten Operator $\tilde{A}$ in einem Oberraum $\tilde{\Pi}_\varkappa \supset \Pi_\varkappa^0(Q)$ und zerlegt diesen gemäß § 1. 3, so überzeugt man sich leicht von der Beziehung

$$\lim_{y \uparrow \infty} iy(iyI - A_Q^0)^{-1} f = f \qquad (f \in \Pi_\varkappa).$$

Deshalb gilt $e_{z_0}\xi \in \mathfrak{E}$, $\xi \in \mathfrak{G}$, und damit auch

$$e_z \xi = \big(I + (z - z_0)(A_Q^0 - zI)^{-1}\big)(e_{z_0}\xi) \in \mathfrak{E} \qquad (z \in \mathscr{D}_Q^0,\ \xi \in \mathfrak{G}),$$

d.h., es ist $\mathfrak{E} = \Pi_\varkappa^0(Q)$.

Zum Beweis der ersten Aussage des Satzes setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraus, daß der Operator A in (3. 9) sogar π-selbstadjungiert ist; anderenfalls können wir ihn nämlich zu einem π-selbstadjungierten Operator $\tilde{A}$ in einem Oberraum $\tilde{\Pi}_\varkappa \supset \Pi_\varkappa$ erweitern, und die Gleichung (3. 9) besteht dann noch für $\tilde{A}$ an Stelle von A, wenn man nun auch Γ auffaßt als Abbildung von $\mathfrak{G}$ in $\tilde{\Pi}_\varkappa$ und Γ^+ als Abbildung von $\tilde{\Pi}_\varkappa$ in $\mathfrak{G}$: $\Gamma^+ f = 0$ für $f \in \tilde{\Pi}_\varkappa[-]\Pi_\varkappa$.

Wir extrapolieren die Funktion Q auf die Menge $C_- \setminus \sigma_p(A)$ durch die Festsetzung

$$Q(\bar{z}) = Q^*(z), \quad z \in C_+ \setminus \sigma_p(A).$$

Dann besteht die Gleichung (3. 9), wie man leicht verifiziert, für alle nichtreellen Punkte $z \notin \sigma_p(A)$. Für solche Punkte z schreiben wir sie in der Form

$$Q(z) = S + (z - x_0)\Gamma^+\Gamma + q(z)\Gamma^+ R_z \Gamma \qquad (z_0 = x_0 + iy_0)$$

mit $q(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0)$, $R_z = (A - zI)^{-1}$, woraus

$$\frac{Q(z) - Q^*(\zeta)}{z - \bar{\zeta}} = \Gamma^+ \left(I + \frac{q(z) R_z - q(\bar{\zeta}) R_{\bar{\zeta}}}{z - \bar{\zeta}}\right)\Gamma \qquad (z, \zeta \in (C_+ \cup C_-) \setminus \sigma_p(A),\ z \neq \bar{\zeta})$$

folgt. Mit Hilfe der Beziehung $R_z - R_{\bar{\zeta}} = (z - \bar{\zeta}) R_z R_{\bar{\zeta}}$ können wir den in den runden Klammern stehenden Ausdruck folgendermaßen umformen:

$$I + \frac{q(z) - q(\bar{\zeta})}{z - \bar{\zeta}} R_z + q(\bar{\zeta}) R_z R_{\bar{\zeta}} = U_{z_0 \zeta}^+ U_{z_0 z},$$

wobei $U_{z_0 z} = I + (z - z_0) R_z = (A - z_0 I)(A - zI)^{-1}$ gesetzt wurde. Damit ergibt sich

$$\text{(3.10)} \qquad \frac{Q(z) - Q^*(\zeta)}{z - \bar{\zeta}} = \Gamma^+ U_{z_0 \zeta}^+ U_{z_0 z} \Gamma \qquad (z, \zeta \in (C_+ \cup C_-) \setminus \sigma_p(A),\ z \neq \bar{\zeta}).$$

Man sieht leicht, daß diese Beziehung auch für $z = \bar{\zeta}$ richtig bleibt, wenn man nur die linke Seite als $Q'(z)$ interpretiert.

Aus der Beziehung (3. 10) folgt das Vorliegen der Eigenschaft $(N_{\varkappa'}^0)$ für ein gewisses $\varkappa'$, $0 \leqq \varkappa' \leqq \varkappa$. In der Tat, für $z_j \in C_+ \setminus \sigma_p(A)$, $\xi_j \in \mathfrak{G}$ ($j = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$)

fällt die Form (2. 10) der komplexen Variablen α_j auf Grund von (3. 10) zusammen mit der Form

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k\right] = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \bar{\alpha}_k [f_j, f_k], \qquad f_j = U_{z_0 z_j} \Gamma \xi_j, \tag{3.11}$$

die offensichtlich höchstens $\varkappa$ negative Quadrate hat.

Wir bemerken, daß sich in der gleichen Weise für die auf $(C_+ \cup C_-)\setminus\sigma_p(A)$ extrapolierte Funktion Q sogar die Eigenschaft $(N_{\varkappa'})$ für ein gewisses $\varkappa'$, $0 \leqq \varkappa' \leqq \varkappa$, ergibt.

Sind die Operatoren A und Γ eng o-verbunden, d.h., liegt die lineare Hülle der Vektoren $U_{z_0 z}\Gamma\xi$ $(\xi \in \mathfrak{G}, z \in C_+\setminus\sigma_p(A))$ dicht in $\Pi_\varkappa$, so gibt es offensichtlich stets solche $z_j \in C_+\setminus\sigma_p(A)$ und $\xi_j \in \mathfrak{G}$ $(j=1, 2, \dots, n)$, daß die Form (3. 11) genau $\varkappa$ negative Quadrate hat.

Wir haben noch zu zeigen, daß die Funktion Q auch die Eigenschaft $(\mathfrak{D})$ besitzt. Statt dessen beweisen wir die folgende schärfere Aussage; dabei bezeichne W_Θ für beliebiges Θ, $0<\Theta<\frac{\pi}{2}$, denjenigen Winkelraum von C_+, dessen Punkte z durch die Ungleichung $\left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| \leqq \Theta$ $(z \in C_+)$ charakterisiert sind.

Für beliebiges Θ, $0<\Theta<\frac{\pi}{2}$, genügt die durch (3. 9) *definierte Operatorfunktion $Q(z)$ der Bedingung*

$$w-\lim_{\operatorname{Im} z \uparrow \infty} \left.\frac{Q(z)}{\operatorname{Im} z}\right|_{z \in W_\Theta} = 0. \tag{3.12}$$

Gemäß (3. 9) ist die Beziehung (3. 12) äquivalent der folgenden:

$$w-\lim_{\operatorname{Im} z \uparrow \infty} \Gamma^+(A-z_0 I)(A-zI)^{-1}\Gamma|_{z \in W_\Theta} = 0.$$

Wir setzen wieder voraus, daß der Operator A sogar π-selbstadjungiert ist, und zerlegen $\Pi_\varkappa$ gemäß § 1. 3 in die direkte π-orthogonale Summe zweier für A invarianter Teilräume $\Pi'_\varkappa$ und Π_0. Dann folgt

$$\Gamma^+ U_{z_0 z}\Gamma = \Gamma^+(A'-z_0 I)(A'-zI)^{-1}P'\Gamma + \Gamma^+(A_0-z_0 I)(A_0-zI)^{-1}P_0\Gamma, \tag{3.13}$$

wobei P' und $P_0 = I-P'$ die π-orthogonalen Projektoren von $\Pi_\varkappa$ auf $\Pi'_\varkappa$ bzw. Π_0 und A' bzw. A_0 die Einschränkungen von A auf $\Pi'_\varkappa$ bzw. Π_0 bezeichnen. Da der Operator A' beschränkt ist, verhält sich der erste Summand der rechten Seite von (3. 13) für $|z|\to\infty$ wie $O\left(\frac{1}{z}\right)$. Deshalb bleibt das Verhalten der Funktion

$$F(z; \xi, \eta) = [(A_0-z_0 I)(A_0-zI)^{-1}P_0\xi, \Gamma\eta], \quad \xi, \eta \in \mathfrak{G},$$

im Winkelraum W_Θ zu betrachten.

Die Spektralzerlegung für die Resolvente von A_0:

(3.14) $$(A_0 - zI)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\lambda}{\lambda - z}$$

gestattet es, die Funktion $F(z; \xi, \eta)$ in der Form

$$F(z; \xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - z_0}{\lambda - z} \, d\sigma_{\xi,\eta}(\lambda)$$

darzustellen, wobei $\sigma_{\xi,\eta}(\lambda) = [E_\lambda P_0 \Gamma \xi, P_0 \Gamma \eta]$ eine Funktion von beschränkter Variation auf der reellen Achse ist.

Man sieht leicht, daß immer eine Konstante $\gamma_\Theta > 0$ existiert, so daß für $y = \operatorname{Im} z \geqq \gamma_\Theta$, $z \in W_\Theta$ gilt: $|(\lambda - z_0)(\lambda - z)^{-1}| < 1$. Andererseits ist für beliebiges $\gamma > 0$ offensichtlich

$$\lim_{\operatorname{Im} z \uparrow \infty} |(\lambda - z_0)(\lambda - z)^{-1}| \big|_{z \in W_\Theta, -\gamma \leqq \lambda \leqq \gamma} = 0.$$

Daraus folgt

$$\lim_{\operatorname{Im} z \uparrow \infty} F(z; \xi, \eta)|_{z \in W_\Theta} = 0,$$

womit die obige Aussage bewiesen ist.

Folgerung 3.1. *Jede Operatorfunktion* $Q \in N_\varkappa^0(\mathfrak{G})$ *hat die Eigenschaft* (3.12) *in einem beliebigen Winkelraum* W_Θ $\left(0 < \Theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

Aus der Daratellung (3.9) der Funktion $Q \in N_\varkappa^0(\mathfrak{G})$ ergibt sich unmittelbar, daß diese höchstens $\varkappa$ Pole in der oberen Halbebene C_+ hat. Eine Untersuchung der zugehörigen Hauptteile erfolgt in § 4.3.

Satz 3.2. *In der Darstellung* (3.9) *der Operatorfunktion* $Q \in N_\varkappa^0(\mathfrak{G})$ *besteht die Beziehung*

$$\mathfrak{D}(A) \cap \Gamma \mathfrak{G} = \{0\}$$

genau dann, wenn für beliebiges $\xi \in \mathfrak{G}$, $\xi \neq 0$, *gilt:*

(3.15) $$\lim_{y \uparrow \infty} y \operatorname{Im} (Q(iy) \xi, \xi) = \infty.$$

Beweis. Wir setzen wieder A als π-selbstadjungiert voraus und benutzen die Zerlegung aus § 1.3: $\Pi_\varkappa = \Pi'_\varkappa [+] \Pi_0$, $A' = A|_{\Pi'_\varkappa}$, $A_0 = A|_{\Pi_0}$. Dann gilt für beliebiges $\xi \in \mathfrak{G}$, $\xi \neq 0$ und $z \in C_+ \setminus \sigma_p(A)$

(3.16) $$[U_{z_0 z} \Gamma \xi, U_{z_0 z} \Gamma \xi] = [U_{z_0 z}^{(0)} P_0 \Gamma \xi, U_{z_0 z}^{(0)} P_0 \Gamma \xi] + [U'_{z_0 z} P' \Gamma \xi, U'_{z_0 z} P' \Gamma \xi],$$

wobei $U_{z_0 z}^{(0)} = (A_0 - z_0 I)(A_0 - zI)^{-1}$, $U'_{z_0 z} = (A' - z_0 I)(A' - zI)^{-1}$ gesetzt wurde. Da der Operator A' beschränkt ist, verhält sich der zweite Summand auf der rechten Seite von (3.16) für $|z| \to \infty$ wie $O\left(\frac{1}{z}\right)$.

Bei Beachtung der Beziehung (3. 10) für $z=\zeta=iy$ und der Spektralzerlegung (3. 14) ergibt sich leicht

$$\operatorname{Im}(Q(iy)\xi,\xi)=y\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\lambda-z_0|^2}{\lambda^2+y^2}\,d\sigma_\xi(\lambda)+O\left(\frac{1}{y}\right)\qquad(y\uparrow\infty)$$

mit der nichtabnehmenden beschränkten Funktion $\sigma_\xi(\lambda)=[E_\lambda P_0\Gamma\xi, P_0\Gamma\xi]$. Deshalb ist die Gleichung (3. 15) für festes $\xi\in\mathfrak{G}$ äquivalent der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\,d\sigma_\xi(\lambda)=\infty. \tag{3.17}$$

Letztere besagt aber $P_0\Gamma\xi\notin\mathfrak{D}(A_0)$, und da $\mathfrak{D}(A')=\Pi'_\varkappa$, also $P'\Gamma\xi\in\mathfrak{D}(A')$ gilt, ist die Bedingung (3. 17) äquivalent mit $\Gamma\xi\notin\mathfrak{D}(A)$.

Bemerkung. Man sieht leicht, daß Satz 3. 2 richtig bleibt, wenn man darin die Bedingung (3. 15) durch die Bedingung

$$\lim_{\operatorname{Im}z\uparrow\infty}\operatorname{Im}z\cdot\operatorname{Im}(Q(z)\xi,\xi)\big|_{z\in W_\Theta}=\infty$$

mit einem gewissen festen Θ, $0<\Theta<\frac{\pi}{2}$, ersetzt.

4. *Eindeutigkeit der Darstellung* (3. 9). Zwei Operatoren A und A', die in $\pi_\varkappa$-Räumen $\Pi_\varkappa$ bzw. $\Pi'_\varkappa$ wirken, heißen *π-unitär äquivalent*, wenn eine Abbildung T existiert, die $\Pi_\varkappa$ π-unitär (d.h. unter Erhaltung des π-Skalarproduktes) auf $\Pi'_\varkappa$ abbildet[12]), so daß $T\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(A')$ und $A'Tf=TAf$ $(f\in\mathfrak{D}(A))$ gilt.

Wir haben nur wenige Bemerkungen hinzuzufügen, um die folgende wesentliche Ergänzung zu Satz 3. 1 zu erhalten.

Satz 3. 3. *In der Darstellung* (3. 9) *der Operatorfunktion $Q\in N^0_\varkappa(\mathfrak{G})^r$ mit eng o-verbundenen Operatoren A und Γ ist der maximale π-hermitesche Operator A bis auf π-unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt.*

Beweis. Ist Q in der Form (3. 9) mit eng o-verbundenen Operatoren A und Γ dargestellt, dann ist $Q(z)$ in $z=z_0$ regulär und es besteht auch die Darstellung (3. 8). Für beliebiges $z\in C_+\setminus\sigma_p(A)$, $\xi\in\mathfrak{G}$, setzen wir

$$T_0(A-z_0I)(A-zI)^{-1}\Gamma\xi=(A^0_Q-z_0I)(A^0_Q-zI)^{-1}\Gamma_{z_0}\xi\ (=e_z\xi).$$

[13]) Ein solcher Operator T bildet $\Pi_\varkappa$ sogar linear, stetig und eineindeutig auf $\Pi'_\varkappa$ ab. Man sieht auch leicht, daß jeder Operator T_0, der eine Menge $\mathfrak{E}\,(\subset\Pi_\varkappa)$ π-isometrisch (d.h. unter Erhaltung des π-Skalarproduktes) auf eine Menge $\mathfrak{E}'\,(\subset\Pi'_\varkappa)$ abbildet, sich zu einem linearen stetigen Operator T, der $\Pi_\varkappa$ π-unitär auf $\Pi'_\varkappa$ abbildet, fortsetzen läßt, wenn nur die linearen Hüllen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ dicht in $\Pi_\varkappa$ bzw. $\Pi'_\varkappa$ liegen.

Auf Grund der Beziehungen (3. 2) und (3. 10) bildet T_0 die Elemente $U_{z_0 z}\xi$ π-isometrisch auf $e_z\xi$ ab, $z\in C_+\setminus\sigma_p(A)$, $\xi\in\mathfrak{G}$. Da die linearen Hüllen dieser Elemente in $\Pi_\varkappa$ bzw. $\Pi_\varkappa^0(Q)$ dicht liegen, läßt sich T_0 zu einem Operator T fortsetzen, der $\Pi_\varkappa$ π-unitär auf $\Pi_\varkappa^0(Q)$ abbildet. Dabei gilt

$$T(A-z_0I)(A-zI)^{-1} = (A_Q^0-z_0I)(A_Q^0-zI)^{-1}T \qquad (z\in C_+\setminus\sigma_p(A)),$$

woraus leicht $T\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(A_Q^0)$ und $TAf=A_Q^0Tf\,(f\in\mathfrak{D}(A))$ folgt.

5. *Die Extrapolationsaufgabe.* Es sei jetzt auf einer unendlichen Punktmenge $C_Q\subset C_+$ eine Funktion Q mit Werten in $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ definiert mit den folgenden Eigenschaften:

1) Der Kern $K(z,\zeta)=\dfrac{Q(z)-Q^*(\bar\zeta)}{z-\xi}$ hat $\varkappa$ negative Quadrate in C_Q.

2) Es gibt eine Punktfolge $(z_n)\subset C_Q$ mit der Eigenschaft (3. 3).

Dann kann man in der gleichen Weise wie in den Abschnitten 1 und 2 dieses Paragraphen den Raum $\Pi_\varkappa^0(Q)$ und den Operator A_Q^0 einführen. Obwohl letzterer i.a. nicht maximal π-hermitesch ist, erhält man für eine beliebige maximale π-hermitesche Erweiterung A von A_Q^0 mit $\mathfrak{n}_+(A)=0$ eine Darstellung (3. 8) der Funktion Q mit A an Stelle von A_Q^0. Daraus ergibt sich ohne Schwierigkeit der folgende

Satz 3. 4. *Zu jeder auf einer unendlichen Punktmenge $C_Q\subset C_+$ definierten Funktion Q mit Werten in $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ und den Eigenschaften* 1) *und* 2) *gibt es eine Funktion $Q\in N_\varkappa^0(\mathfrak{G})$, die — mit Ausnahme von höchstens $\varkappa$ Punkten aus C_Q — mit Q übereinstimmt.*

Die erwähnten Ausnahmepunkte gehören zum Punktspektrum des Operators A.

Ist speziell C_Q eine offene Menge und die Funktion Q mit den Eigenschaften 1) und 2) auf C_Q stetig, so läßt sich Q zu einer Funktion $\tilde Q\in N_\varkappa^0(\mathfrak{G})$ extrapolieren. Insbesondere ist dann also $\tilde Q$ meromorph in C_+ und damit auch Q holomorph in C_Q.

§ 4. Die Funktionenklasse $N_\varkappa(\mathfrak{G})$

1. *Der Raum $\Pi_\varkappa(Q)$ und der Operator A_Q.* Es sei Q wieder eine Funktion der Klasse $N_\varkappa^0(\mathfrak{G})$. Wir erweitern den maximalen π-hermiteschen Operator A_Q^0 in der Darstellung (3. 8) — falls er nicht bereits π-selbstadjungiert ist — zu einem π-selbstadjungierten Operator $\tilde A$ in einem Oberraum $\tilde\Pi_\varkappa\supset\Pi_\varkappa^0(Q)$. Dann besteht für Q die Darstellung (3. 8) mit $\tilde A$ an Stelle von A_Q^0:

$$(4.\ 1) \qquad Q(z) = Q^*(z_0)+(z-\bar z_0)\Gamma_{z_0}^+(\tilde A-z_0\tilde I)(\tilde A-z\tilde I)^{-1}\Gamma_{z_0},$$

wobei wir Γ_{z_0} wieder als Operator von $\mathfrak{G}$ in $\tilde\Pi_\varkappa$ auffassen. Extrapolieren wir Q auf das Spiegelbild $\bar{\mathscr{Z}}_Q^0$ von $\mathscr{Z}_Q^0$ bezüglich der reellen Achse durch die Festsetzung $Q(z)=$

$=Q^*(\bar{z})$, $z\in\bar{\mathscr{Z}}_Q^0$, dann gilt die Beziehung (4. 1) sogar für alle $z\in(\mathscr{Z}_Q^0\cup\bar{\mathscr{Z}}_Q^0)\setminus\sigma_p(\tilde{A})$. Aus der Bemerkung im Anschluß an Formel (3. 11) ergibt sich, daß die auf diese Weise extrapolierte Funktion Q sogar die Eigenschaft $(N_\varkappa)$ hat.

Wir überlegen uns jetzt, daß es andererseits die Eigenschaft $(N_\varkappa)$ — zusammen mit der Eigenschaft $(\mathfrak{D})$ — gestattet, eine natürliche π-selbstadjungierte Erweiterung A_Q des Operators A_Q^0 zu erhalten.

Zu diesem Zweck betrachten wir eine Funktion Q mit den Eigenschaften $(N_\varkappa)$ und (D), ordnen jedem $z\in\mathscr{Z}_Q$ ein Symbol e_z zu, bilden wieder die lineare Menge $\mathfrak{L}(Q)$ aller formalen Summen (3. 1) mit $\mathscr{Z}_Q^0$ ersetzt durch $\mathscr{Z}_Q$ und definieren für $f, g\in\mathfrak{L}(Q)$ das π-Skalarprodukt $[f, g]$ durch (3. 2). Auf der Menge

$$\check{\mathfrak{D}}=\{f: f\in\mathfrak{L}(Q), \chi(f)=0\},\ \chi(f)=\sum_{z\in\mathscr{Z}_Q}\xi_z \quad \text{für} \quad f=\sum_{z\in\mathscr{Z}_Q}e_z\xi_z,$$

definieren wir einen Operator $\check{A}$ durch die Gleichung $\check{A}f=\sum ze_z\xi_z$. Offensichtlich gilt dann $\mathfrak{L}^0(Q)\subset\mathfrak{L}(Q)$ und $\hat{A}\subset\check{A}$. Die kanonische Einbettung von $\mathfrak{L}^0(Q)$ in $\Pi_\varkappa^0(Q)$ kann man erweitern zu einer kanonischen Einbettung von $\mathfrak{L}(Q)$ in einen $\pi_\varkappa$-Raum $\Pi_\varkappa(Q)$. Dabei erzeugt $\check{A}$ einen Operator A_Q in $\Pi_\varkappa(Q)$, der sogar π-selbstadjungiert ist. Letzteres überlegt man sich ebenso, wie in § 3. 2 die Maximalität des π-hermiteschen Operators A_Q^0 gezeigt wurde. Schließlich bleiben auch die Beziehungen (3. 6) und (3. 7) von § 3. 2 für $\check{A}$ und A_Q an Stelle von $\hat{A}$ und A_Q^0 für beliebige $z\in\mathscr{Z}_Q$ erhalten, und man überzeugt sich leicht davon, daß A_Q und Γ_{z_0} eng verbunden sind (vgl. den Anfang des Beweises von Satz 3. 1).

Mit $N_\varkappa(\mathfrak{G})$ bezeichnen wir die Klasse aller Funktionen Q mit Werten in $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ und den Eigenschaften $(N_\varkappa)$ und $(\mathfrak{D})$. Die obigen Überlegungen lassen sich dann zusammenfassen in der folgenden Ergänzung von Satz 3. 1.

Satz 4. 1. *Es sei A ein π-selbstadjungierter Operator in einem $\pi_\varkappa$-Raum $\Pi_\varkappa$, $\mathfrak{G}$ ein Hilbertraum, $S=S^*\in[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, $\Gamma\in[\mathfrak{G}, \Pi_\varkappa]$ und $z_0\in C_+\setminus\sigma_p(A)$. Dann definiert die Gleichung*

$$Q(z)=S-iy_0\Gamma^+\Gamma+(z-\bar{z}_0)\Gamma^+(A-z_0I)(A-zI)^{-1}\Gamma \tag{4.2}$$

eine Funktion der Klasse $N_{\varkappa'}(\mathfrak{G})$ für ein gewisses $\varkappa'$ mit $0\leqq\varkappa'\leqq\varkappa$. Sind die Operatoren A und Γ eng verbunden, so ist $\varkappa=\varkappa'$. Umgekehrt gestattet jede Funktion $Q\in N_\varkappa(\mathfrak{G})$ die Darstellung (4. 2) mit $\Pi_\varkappa=\Pi_\varkappa(Q)$, dem π-selbstadjungierten Operator $A=A_Q$, $S=\operatorname{Re}Q(z_0)$ und $\Gamma=\Gamma_{z_0}$; dabei sind die Operatoren A_Q und Γ_{z_0} eng verbunden.

Analog zu Satz 3. 3. gilt die folgende Aussage.

Satz 4. 2. *Gestattet die Funktion $Q\in N_\varkappa(\mathfrak{G})$ die Darstellung (4. 2) mit einem π-selbstadjungierten Operator A in $\Pi_\varkappa$, $S=S^*\in[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, $\Gamma\in[\mathfrak{G}, \Pi_\varkappa]$ und sind A und Γ eng verbunden, so ist A bis auf π-unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt, genauer, A ist dem Operator A_Q π-unitär äquivalent.*

2. *Spektralzerlegung der Funktion* $Q \in N_\varkappa(\mathfrak{G})$. Wir gehen jetzt aus von einer Darstellung (4. 2) der Funktion Q:

$$(4.3) \qquad Q(z) = \operatorname{Re} Q(z_0) - iy_0 \Gamma\Gamma^+ + (z-\bar{z}_0)\Gamma^+(A-z_0 I)(A-zI)^{-1}\Gamma =$$
$$= C + z\Gamma^+\Gamma + (z-\bar{z}_0)(z-z_0)\Gamma^+(A-zI)^{-1}\Gamma$$

$\left(C = C^* = \operatorname{Re} Q(z_0) - x_0\Gamma^+\Gamma\right)$ mit einem π-selbstadjungierten Operator A in $\Pi_\varkappa$, der mit Γ eng verbunden ist. Für einen nichtreellen Eigenwert $\alpha \in \sigma_p(A)$ bezeichne E_α den Rieszschen Projektor auf den zugehörigen algebraischen Eigenraum; dann gilt bekanntlich $E_\alpha = E_{\bar{\alpha}}^+$ ([16]). Es sei im folgenden $\sigma_+(A) = \sigma(A) \cap C_+$. Wir setzen für $\alpha \in \sigma_+(A)$:

$$F_\alpha = E_\alpha + E_\alpha^+, \quad E_0 = I - \sum_{\alpha \in \sigma_+(A)} F_\alpha, \quad \Pi^{(\alpha)} = F_\alpha \Pi_\varkappa, \quad \Pi^{(0)} = E_0 \Pi_\varkappa,$$
$$A_0 = A|_{\Pi^{(0)}}, \quad A_\alpha = A|_{\Pi^{(\alpha)}}.$$

Dann ist das Spektrum von A_0 reell, das von A_α besteht genau aus den Punkten α und $\bar{\alpha}$.

Die Räume $\Pi^{(\alpha)}$ sind $\pi_{\varkappa_\alpha}$-Räume der Dimension $2\varkappa_\alpha$ mit $\varkappa_\alpha = \dim \mathfrak{N}(E_\alpha)$, $\Pi^{(0)}$ ist ein $\pi_{\varkappa_0}$-Raum, $\varkappa_0 = \varkappa - \sum_{\alpha \in \sigma_+(A)} \varkappa_\alpha$, und es gilt

$$\Pi_\varkappa = \Pi^{(0)} [+] \sum_{\alpha \in \sigma_+(A)}^{[+]} \Pi^{(\alpha)}.$$

Die Resolvente $(A-zI)^{-1}$ gestattet bekanntlich die Darstellung

$$(4.4) \qquad (A-zI)^{-1} = (A_0 - zI_0)^{-1} E_0 + \sum_{\alpha \in \sigma_+(A)} H_\alpha(z) F_\alpha;$$

dabei ist $H_\alpha(z)$ die Summe der zu α und $\bar{\alpha}$ gehörigen Hauptteile von $(A-zI)^{-1}$. Setzen wir (4. 4) in (4. 3) ein, so folgt

$$(4.5) \qquad Q(z) = C + Q_0(z) + \sum_{\alpha \in \sigma_+(A)} Q_\alpha(z),$$

mit

$$(4.6) \qquad Q_0(z) = z\mathring{\Gamma}^+\mathring{\Gamma} + (z-\bar{z}_0)(z-z_0)\mathring{\Gamma}^+(A_0 - zI_0)^{-1}\mathring{\Gamma},$$

$$(4.7) \qquad Q_\alpha(z) = z\overset{\alpha}{\Gamma}{}^+\overset{\alpha}{\Gamma} + (z-\bar{z}_0)(z-z_0)\overset{\alpha}{\Gamma}{}^+(A_\alpha - zI_\alpha)^{-1}\overset{\alpha}{\Gamma}$$

$(\mathring{\Gamma} = E_0\Gamma \in [\mathfrak{G}, \Pi^{(0)}]$, $\overset{\alpha}{\Gamma} = F_\alpha\Gamma \in [\mathfrak{G}, \Pi^{(\alpha)}])$. Man sieht leicht, daß der Operator A_α (bzw. A_0) mit $\overset{\alpha}{\Gamma}$ (bzw. $\mathring{\Gamma}$) wieder eng verbunden ist. Deshalb gilt gemäß dem ersten Teil von Satz 4. 1 $Q_\alpha \in N_{\varkappa_\alpha}(\mathfrak{G})$, $Q_0 \in N_{\varkappa_0}(\mathfrak{G})$.

Die Funktion Q_α, $\alpha \in \sigma_+(A)$, hat als einzige Singularitäten in der abgeschlossenen komplexen Ebene je einen Pol bei $z = \alpha$ und $z = \bar{\alpha}$, die Funktion Q_0 ist in $C_+ \cup C_-$ stückweise holomorph. Deshalb stimmt Q_α bis auf einen konstanten selbstadjungierten Summanden mit der Summe der Hauptteile der Funktion Q zu den Polen $z=\alpha$ und $z=\bar{\alpha}$ überein. Ist $H_\alpha(z)=\sum_{\nu=1}^{m_\alpha}\frac{E_{\alpha,\nu}}{(\alpha-z)^\nu}+\sum_{\nu=1}^{m_\alpha}\frac{E^+_{\alpha,\nu}}{(\bar{\alpha}-z)^\nu}$, so ergibt sich für Q_α aus (4. 7)

$$Q_\alpha(z)=zQ_{\alpha,0}+(z-\bar{z}_0)(z-z_0)\left\{\sum_{\nu=1}^{m_\alpha}\frac{Q_{\alpha,\nu}}{(\alpha-z)^\nu}+\sum_{\nu=1}^{m_\alpha}\frac{Q^*_{\alpha,\nu}}{(\bar{\alpha}-z)^\nu}\right\} \tag{4. 8}$$

mit $Q_{\alpha,\nu}=\overset{\alpha}{\Gamma}{}^+E_{\alpha,\nu}\overset{\alpha}{\Gamma}$, $\nu=1,2,\dots,m_\alpha$, $Q_{\alpha,0}=Q_{\alpha,1}+Q^*_{\alpha,1}=\overset{\alpha}{\Gamma}{}^+\overset{\alpha}{\Gamma}$.

Die Resolvente $(A_0-zI_0)^{-1}$ gestattet gemäß den Ergebnissen von [12], [13] die Darstellung

$$(A_0-zI_0)^{-1}=\frac{1}{\varphi(z)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dF(s)}{s-z}+P(A_0;z)\right\}; \tag{4. 9}$$

dabei ist $\varphi(z)=\frac{p^2(z)}{(z-z_0)^m(z-\bar{z}_0)^m}$, wenn $p(z)$ das Minimalpolynom der Einschränkung von A auf einen $\varkappa$-dimensionalen invarianten nichtpositiven Teilraum bezeichnet ($m=$Grad von p; bekanntlich (vgl. [17]) ist das Polynom p bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt), $P(\zeta;z)$ ist die in der abgeschlossenen komplexen Ebene mit Ausnahme der Punkte z_0 und $\bar{z}_0$ in z und ζ holomorphe Funktion

$$P(\zeta;z)=\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta-z}$$

und $F(s)$ eine auf der reellen Achse definierte Funktion mit Werten in $[\Pi^{(0)},\Pi^{(0)}]$ und den Eigenschaften:

1) $F(0)=0,\quad F(s)=\frac{F(s+0)+F(s-0)}{2}$;[14]

2) $[(F(s)-F(s'))g,g]\geqq 0$ für alle $g\in\Pi^{(0)}$, $s'\leqq s$;

3) $\int_{-\infty}^{\infty}d[F(s)g,g]<\infty$ für alle $g\in\Pi^{(0)}$.

Setzen wir (4. 9) in (4. 6) ein, so ergibt sich

$$Q_0(z)=zQ_{00}+\frac{(z-\bar{z}_0)(z-z_0)}{\varphi(z)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Phi(s)}{s-z}+R(z)\right\} \tag{4. 10}$$

mit $Q_{00}(=Q^*_{00})=\Gamma^+\overset{\circ}{\Gamma}\in[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$, $\Phi(s)=\overset{\circ}{\Gamma}{}^+\overset{\circ}{F}(s)\overset{\circ}{\Gamma}\in[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$, $\Omega(s')\leqq\Phi(s)$ für $s'\leqq s$ und $R(z)=\overset{\circ}{\Gamma}{}^+P(A_0;z)\overset{\circ}{\Gamma}\in[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ ist eine auf der abgeschosse komplexen Ebene mit Ausnahme der Punkte z_0 und $\bar{z}_0$ holomorphe Operatorfunktion.

---

[14] Die Grenzwerte verstehen sich in der schwachen Operatorentopologie.

Bezeichnen β_j, $j=1, 2, \ldots, l$ die (notwendig reellen) Nullstellen des Polynoms p, $\beta_j \neq \beta_k$ für $j \neq k$, und setzen wir $\Phi_j = \Phi(\beta_j+0)-\Phi(\beta_j-0)$, so kann man (4. 10) in der äquivalenten Form

$$Q_0(z) = zQ_{00} + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{t-z} + \frac{P(t;z)(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}{\varphi(z)|t-z_0|^2} + \frac{z_0+\bar{z}_0-(t+z)}{|t-z_0|^2} \right\} d\Psi(t)$$

$$\text{(4. 11)} \qquad + \frac{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}{\varphi(z)} \left(R(z) + \sum_{j=1}^{l} \frac{\Phi_j}{\beta_j - z} \right)$$

schreiben; dabei haben wir $d\Psi(t) = \dfrac{|t-z_0|^2}{\varphi(t)} d\Phi(t)$ gesetzt. Das Integral in (4. 11) existiert als uneigentliches Integral bezüglich der eventuellen Singularitäten des Maßes $d\Psi(t)$ in den Punkten $\beta_1, \ldots, \beta_l$ und ∞ in der starken Operatorentopologie.

Unter dem *Spektrum* $\sigma(Q)$ der Funktion $Q \in N_\varkappa(\mathfrak{G})$ verstehen wir die Menge aller Pole von Q sowie die Menge derjenigen reellen Punkte x, in die sich Q nicht so analytisch fortsetzen läßt, daß $Q(x)$ selbstadjungiert ist; außerdem sei $\sigma_+(Q) = \sigma(Q) \cap C_+$.

Satz 4. 3. *Jede Funktion $Q \in N_\varkappa(\mathfrak{G})$ gestattet eine Zerlegung*

$$\text{(4.12)} \qquad Q(z) = C + Q_0(z) + \sum_{\alpha \in \sigma_+(Q)} Q_\alpha(z)$$

mit einem konstanten selbstadjungierten Operator C, $Q_\alpha \in N_{\varkappa_\alpha}(\mathfrak{G})$ $(\alpha \in \sigma_+(Q))$, $Q_0 \in N_{\varkappa_0}(\mathfrak{G})$; dabei gilt $\varkappa = \varkappa_0 + \sum_{\alpha \in \sigma_+(Q)} \varkappa_\alpha$. Die Operatorfunktion Q_α hat die Gestalt (4. 8) *und ist bis auf einen konstanten selbstadjungierten Summanden die Summe der zu α und $\bar{\alpha}$ gehörigen Hauptteile von Q; die Operatorfunktion Q_0 ist in C_+ und C_- stückweise holomorph und gestattet die Darstellungen* (4. 10) *und* (4. 11).

Die Gültigkeit dieses Satzes ergibt sich aus den vorangegangenen Überlegungen, wenn man nur beachtet, daß $\sigma_+(Q) = \sigma_+(A_Q)$ ist. Letzteres ist eine unmittelbare Konsequenz des folgenden Satzes.

Satz 4. 4. *Es gilt $\sigma(Q) = \sigma(A_Q)$, und diese Menge besteht genau aus den nichtreellen Polen von Q, den Nullstellen der Funktion φ sowie den Wachstumspunkten der Funktionen Φ oder Ψ aus den Darstellungen* (4. 10) *oder* (4. 11). *Jeder isolierte Punkt λ_0 von $\sigma(Q)$ ist ein Pol; seine Ordnung stimmt mit der Ordnung von λ_0 als Pol der Resolvente von A_Q überein.*

Beweis. Gemäß dem zweiten Teil von Satz 4. 1 gilt

$$\text{(4. 13)} \qquad Q(z) = Q^*(z_0) + (z-\bar{z}_0)\Gamma_{z_0}^+(A_Q - \bar{z}_0 I)(A_Q - zI)^{-1}\Gamma_{z_0},$$

also ist Q in allen Punkten $z \notin \sigma(A_Q)$ regulär und nimmt in reellen Punkten $z = x \notin \sigma(A_Q)$ selbstadjungierte Werte an, d.h., es gilt $\sigma(Q) \subset \sigma(A_Q)$.

Um die inverse Inklusion zu beweisen, beachten wir zunächst die für beliebige $\zeta, \zeta' \notin \sigma(A_Q)$ aus (4. 13) folgende Beziehung

(4. 14)
$$\Gamma_{z_0}^{+}(A_Q - \bar{\zeta}I)^{-1}(A_Q - zI)^{-1}(A_Q - \zeta' I)^{-1}\Gamma_{z_0} = \frac{Q(z)}{(z-\zeta')(z-\bar{\zeta})(z-z_0)(z-\bar{z}_0)} + \cdots,$$

wobei die nicht aufgeschriebenen Summanden in allen Punkten $z \neq \bar{\zeta}, \zeta', z_0, \bar{z}_0$, holomorph von z abhängen. Ist λ_0 ein isolierter Punkt von $\sigma(A_Q)$ und gilt in einer Umgebung von λ_0

$$(A_Q - zI)^{-1} = \frac{A_{-n}}{(\lambda_0 - z)^n} + \cdots + \frac{A_{-1}}{\lambda_0 - z} + A_Q(z)(I - E_{\lambda_0}), \quad A_{-n} \neq 0, \; z \neq \lambda_0,$$

so hat auch Q im Punkte λ_0 einen Pol der Ordnung n, da anderenfalls aus (4. 14)

$$[A_{-n}(A_Q - \zeta' I)^{-1}\Gamma_{z_0}\xi, (A_Q - \zeta I)^{-1}\Gamma_{z_0}\eta] = 0$$

für alle $\xi, \eta \in \mathfrak{G}$, $\zeta, \zeta' \notin \sigma(A_Q)$ und wegen der engen Verbundenheit von A_Q und Γ_{z_0} daraus $A_{-n} = 0$ folgen würde. Entsprechend ergibt sich aus (4. 14) mit Hilfe der Umkehrformel, daß die Spektralfunktion von A_Q in einem reellen Punkt $x \notin \sigma(Q)$ konstant ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir bemerken schließlich, daß die oben eingeführten Operatoren A_Q^0 und A_Q zusammenfallen können. Man sieht leicht, daß dies genau dann der Fall ist, wenn A_Q^0 bereits π-selbstadjungiert ist oder wenn die Elemente $e_z\xi$ für $\xi \in \mathfrak{G}$, $\operatorname{Im} z > 0$ den ganzen Raum $\Pi_\varkappa(Q)$ aufspannen. Ist $\mathfrak{G}$ insbesondere ein eindimensionaler Raum, so läßt sich aus einem Ergebnis [18] (siehe auch [19]) eines der Verfasser folgern, daß dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \Phi'(t)}{1+t^2}\, dt = -\infty$$

gilt; dabei bezeichnet $\Phi'(t)$ die Ableitung des absolutstetigen Anteiles der Funktion Φ aus der Darstellung (4. 10) von Q_0.

3. *Die Funktionen Q_α.* Es sei jetzt α eine komplexe Zahl, $\mathfrak{A}$ eine Umgebung des Punktes α in der komplexen Ebenen und $S(z)$ eine in allen Punkten $z \in \mathfrak{A}$, $z \neq \alpha$, erklärte und holomorphe Funktion mit Werten in $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, die bei $z = \alpha$ einen Pol hat. Gemäß [20] definiert man die Polvielfachheit von α folgendermaßen.

Eine im Punkte α holomorphe Funktion $\chi(z)$ mit Werten aus $\mathfrak{G}$ und $\chi(\alpha) \neq 0$ heißt *Polfunktion* von $S(z)$ im Punkte α, wenn $\chi(z)$ die Darstellung $\chi(z) = S(z)\psi(z)$ mit einer in α holomorphen Funktion $\psi(z)$ gestattet, deren Werte ebenfalls in $\mathfrak{G}$

liegen und für die $\psi(\alpha)=0$ ist. Die Ordnung der Nullstelle α von $\psi(z)$ heißt die *Ordnung* der Polfunktion $\chi(z)$ und $\chi(\alpha)$ ein Polvektor von $S(z)$ zum Pol α. Die Polvektoren von $S(z)$ zum Pol α bilden zusammen mit dem Nullelement eine lineare Menge; deren Abschließung heißt der *Polkern* von $S(z)$ im Punkte α und wird mit Pol $S(\alpha)$ bezeichnet.

Unter dem *Rang* eines Polvektors $\chi_0 \in \operatorname{Pol} S(\alpha)$ versteht man das Maximum der Ordnungen aller Polfunktionen $\chi(z)$ mit $\chi(\alpha)=\chi_0$ zum Pole α; er werde mit rang χ_0 bezeichnet.

Es sei jetzt $\beta = \dim \operatorname{Pol} S(\alpha) < \infty$. Unter einem *kanonischen System* von Polvektoren von $S(z)$ im Punkte α versteht man eine Basis $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\beta$ des Raumes Pol $S(\alpha)$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{rang} \chi_j = \max_{\chi \in L_j} \operatorname{rang} \chi, \qquad j = 1, 2, \ldots, \beta,$$

wobei L_j die lineare Hülle von $\chi_j, \chi_{j+1}, \ldots, \chi_\beta$ bezeichnet. Setzt man für ein kanonisches System von Polvektoren $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\beta$ noch $p_j = \operatorname{rang} \chi_j$, $j=1, 2, \ldots, \beta$, so sind die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\beta$ durch die Funktion $S(z)$ eindeutig bestimmt; ihre Summe heißt die *Polvielfachheit* des Poles α der Funktion $S(z)$.

Ist $S(z)$ insbesondere die Resolvente eines abgeschlossenen linearen Operators B in $\mathfrak{G}$, für den $z=\alpha$ ein normaler[15]) Eigenwert ist, so stimmt dessen algebraische Vielfachheit mit der Polvielfachheit des Poles α von $S(z) = (B - zI)^{-1}$ überein.

Lemma 4. 1. *Gestattet die Funktion $S(z)$ bei $z=\alpha$ die Darstellung*

$$S(z) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{S_{m-\nu+1}}{(\alpha - z)^{\nu+1}} + S_0(z), \quad z \neq \alpha, \quad S_1 \neq O,$$

mit $0 < m < \infty$ und einer bei $z=\alpha$ holomorphen Funktion $S_0(z)$, so stimmt die Polvielfachheit des Poles α von $S(z)$ überein mit der Dimension des Wertebereiches des Operators

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ S_2 & S_1 & 0 & \ldots & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_m & S_{m-1} & S_{m-2} & \ldots & S_1 \end{pmatrix}$$

im Raume $\mathfrak{G}^m = \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_m$ mit $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2 = \cdots = \mathfrak{G}_m = \mathfrak{G}$.

15) D.h., α ist ein isolierter Punkt des Spektrums von B, dessen zugehöriger Rieszscher Projektor endlichdimensional ist (vgl. [21]).

Beweis. Aus der Definition des Polvektors folgt leicht, daß χ_0 genau dann ein Polvektor von $S(z)$ zum Pol α ist, wenn Elemente $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ existieren, so daß

$$\mathfrak{S}\vec{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \chi_0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{m-1} \\ \psi_m \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

gilt; hat dabei χ_0 den Rang $p_0 > 0$, so kann $\psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_{p_0 - 1} = 0$ gewählt werden.

Mit $\mathfrak{T}$ bezeichnen wir den folgenden Verschiebungsoperator im Raum $\mathfrak{G}^m$:

$$\mathfrak{T}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{m-1} \\ \psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\beta$ ein kanonisches System von Polvektoren von $S(z)$ im Punkte α. Wir ordnen χ_j einen Vektor

$$\vec{\psi}_j = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{m-1} \\ \psi_m \end{pmatrix}$$

zu, so daß (4. 16) mit $\vec{\psi} = \vec{\psi}_j$, $\chi_0 = \chi_j$ besteht und dabei die ersten $p_j - 1$ Komponenten von $\vec{\psi}_j$ verschwinden, wenn p_j wieder den Rang von χ_j bezeichnet ($j = 1, 2, \ldots, \beta$). Man sieht leicht, daß $p_1 = m$ gilt und die Vektoren

$$\begin{gathered} \mathfrak{S}\vec{\psi}_1, \mathfrak{S}\mathfrak{T}\vec{\psi}_1, \ldots, \mathfrak{S}\mathfrak{T}^{m-1}\vec{\psi}_1, \\ \mathfrak{S}\vec{\psi}_2, \mathfrak{S}\mathfrak{T}\vec{\psi}_2, \ldots, \mathfrak{S}\mathfrak{T}^{p_2-1}\vec{\psi}_2, \\ \vdots \\ \mathfrak{S}\vec{\psi}_\beta, \mathfrak{S}\mathfrak{T}\vec{\psi}_\beta, \ldots, \mathfrak{S}\mathfrak{T}^{p_\beta-1}\vec{\psi}_\beta \end{gathered} \tag{4.17}$$

linear unabhängig sind. Also ist die Polvielfachheit des Poles α von $S(z)$ mindestens gleich der Dimension des Wertebereiches von $\mathfrak{T}$.

Wir müssen noch zeigen, daß umgekehrt auch jedes Element $\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$ des Wertebereiches von $\mathfrak{S}$ als Linearkombination von Elementen aus (4. 17) darstellbar ist. Zunächst gibt es ein $\vec{\psi}_1$ mit $\mathfrak{S}\mathfrak{T}^{m-1}\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\end{pmatrix}$, also können wir annehmen, daß die erste Komponente φ_1 von $\vec{\varphi}$ gleich Null ist. Dann gibt es Elemente $\psi_1, \psi_2, \ldots$ $\ldots, \psi_m \in \mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{S}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \varphi_2\\ \vdots\\ \varphi_m\end{pmatrix}, \text{ also gilt auch } \mathfrak{S}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ \psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \varphi_2\end{pmatrix},$$

d.h., φ_2 ist eine Linearkombination von Polvektoren vom Rang größer oder gleich $m-1$. Wir finden somit eine Linearkombination von Elementen aus (4. 17), deren erste Komponente verschwindet und deren zweite Komponente gleich φ_2 ist. Also können wir annehmen, daß die ersten beiden Komponenten von $\vec{\varphi}$ verschwinden. Wiederholung dieser Überlegungen liefert schließlich die Behauptung.

Der Raum $\mathfrak{G}$ sei jetzt endlichdimensional, die (Matrix-) Funktion $S(z)$ in einem Gebiet $\mathfrak{B}$ der komplexen Ebene meromorph, in mindestens einem Punkte von $\mathfrak{B}$ invertierbar und habe dort nur endlich viele charakteristische Zahlen (siehe z. B. [20]) und Pole. Die Summe der Nullvielfachheiten ([20], [22]) bzw. Polvielfachheiten aller in $\mathfrak{B}$ gelegenen charakteristischen Zahlen bzw. Pole von $S(z)$ nennen wir die *Nullvielfachheit* bzw. *Polvielfachheit* von $\mathfrak{B}$ bezüglich $S(z)$ und bezeichnen sie mit n bzw. p. Dann gilt ([20], [22])

$$\text{(4. 18)} \qquad n-p = \frac{1}{2\pi i}\, sp \int\limits_{\mathscr{C}} S'(z) S^{-1}(z)\, dz \left(= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathscr{C}} d \log \det S(z)\right);$$

dabei ist $\mathscr{C}$ eine ganz in $\mathfrak{B}$ gelegene Kontur, die jeden Pol und jede charakteristische Zahl von $S(z)$ in $\mathfrak{B}$ genau einmal in positivem Sinne umschließt.

Die Funktion $Q_\alpha \in N_{\varkappa_\alpha}(\mathfrak{G})$ aus der Zerlegung (4. 5) oder (4. 12) läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\text{(4. 19)} \qquad (Q_\alpha(z)=)\; S(z) = S_0 + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{S_{m-\nu+1}}{(\alpha-z)^\nu} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{S^*_{m-\nu+1}}{(\bar{\alpha}-z)^\nu};$$

dabei ist $\alpha \neq \bar{\alpha}$, $m = m_\alpha$, $S_0 = S_0^* \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, $S_1 \neq 0$ und die Operatoren $S_\nu \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, sind endlichdimensional.

Wir zeigen jetzt, daß umgekehrt für beliebige Operatoren S_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, mit diesen Eigenschaften die Funktion (4. 19) zu einer Klasse $N_\varkappa(\mathfrak{G})$ gehört. Genauer, es gilt der

Satz 4. 5. *Ist $\alpha \neq \bar{\alpha}$, $S_0 = S_0^* \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ und sind die Operatoren $S_1, S_2, \ldots, S_m \in$ $\in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ endlichdimensional, $S_1 \neq 0$, dann gehört die Funktion $S(z)$ aus* (4. 19) *zur*

Klasse $N_\varkappa(\mathfrak{G})$, wenn $\varkappa$ die Polvielfachheit des Poles $z=\alpha$ (oder $z=\bar{\alpha}$) von $S(z)$ bezeichnet. Der Raum $\Pi_\varkappa(S)$ hat die Dimension $2\varkappa$.

Beweis. Die Bedingung ($\mathfrak{D}$) ist für $S(z)$ offensichtlich erfüllt. Zum Nachweis der Bedingung ($\mathfrak{N}_\varkappa$) gehen wir aus von der Beziehung

$$\frac{S(z)-S^*(\zeta)}{z-\bar{\zeta}} = \sum_{\nu=1}^{m}\left(S_\nu \sum_{\sigma=0}^{\nu-1} \frac{1}{(\alpha-z)^{\sigma+1}} \frac{1}{(\alpha-\bar{\zeta})^{\nu-\sigma}} + \right.$$

$$\left. + S_\nu^* \sum_{\sigma=0}^{\nu-1} \frac{1}{(\bar{\alpha}-z)^{\sigma+1}} \frac{1}{(\bar{\alpha}-\bar{\zeta})^{\nu-\sigma}}\right).$$

Für beliebige n; $\alpha_j \in C$, $z_j \in (C_+ \cup C_-) \setminus \{\alpha, \bar{\alpha}\}$, $z_j \neq \bar{z}_k$ und $\xi_j \in \mathfrak{G}$, $j, k = 1, 2, \dots, n$, folgt daraus mit $\varphi_\sigma = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j \xi_j}{(\alpha-z_j)^\sigma}$, $\bar{\varphi}_\sigma = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j \xi_j}{(\bar{\alpha}-z_j)^\sigma}$ $(\sigma = 1, 2, \dots, m)$:

$$\sum_{j,k=1}^{m} \left(\frac{S(z_j)-S^*(z_k)}{z_j-\bar{z}_k} \xi_j, \xi_k\right) \alpha_j \bar{\alpha}_k = \left(\begin{pmatrix} O & \mathfrak{S}^* \\ \mathfrak{S} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\bar{\varphi}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\bar{\varphi}} \end{pmatrix}\right); \tag{4.20}$$

dabei hat $\mathfrak{S}$ wieder die Gestalt (4. 15) und wir haben

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}, \quad \vec{\bar{\varphi}} = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_m \end{pmatrix}$$

gesetzt. Die Anzahl der negativen (positiven) Quadrate der Form in (4. 20) stimmt folglich überein mit der Anzahl der negativen (positiven) Eigenwerte von $\begin{pmatrix} O & \mathfrak{S}^* \\ \mathfrak{S} & O \end{pmatrix}$, die ihrerseits gleich der Dimension des Wertebereiches von $\mathfrak{S}$ ist. Mit Lemma 4. 1 folgt daraus die Behauptung.

Eine Ergänzung zu Satz 4. 4 bildet die

Folgerung 4. 1. *Für einen nichtreellen Pol α von Q stimmt seine Polvielfachheit mit dem Index $\varkappa_\alpha$ des Punktes α bezüglich A_Q überein, m.a.W., α ist ein Pol von Q_α der Polvielfachheit $\varkappa_\alpha$.*

§ 5. Der Operator $\hat{A}_Q$

Wir zeigen in diesem Paragraphen, daß jede Operatorfunktion Q mit Werten in $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ und den Eigenschaften (I)—(IV) des Hauptsatzes die Q-Funktion eines einfachen π-hermiteschen Operators ist.

Es sei zunächst $Q \in N_\varkappa(\mathfrak{G})$. Dann hat für beliebiges $z \neq \bar{z}$ der Operator $\frac{\operatorname{Im} Q(z)}{\operatorname{Im} z}$ höchstens $\varkappa$ negative Eigenwerte. Genügt Q der Bedingung (III) des Hauptsatzes, so entartet der Imaginärteil von Q nicht in dem Sinne, daß kein Element $\xi \in \mathfrak{G}$ mit $(\operatorname{Im} Q(z))\xi = 0$ für alle $z \in \mathscr{Z}_Q$ existiert. Hat Q überdies die Eigenschaft (IV) des Hauptsatzes und ist z. B. für $z_0 \neq \bar{z}_0$: $\operatorname{Im} Q(z_0) \geqq \gamma I$, $\gamma > 0$, so ist der in § 3.2 eingeführte Operator Γ_{z_0} beschränkt invertierbar, denn dann gilt für beliebiges $\xi \in \mathfrak{G}$:

$$\|\Gamma_{z_0}\xi\|^2 \geqq [\Gamma_{z_0}\xi, \Gamma_{z_0}\xi] \geqq \gamma \|\xi\|^2.$$

Der Teilraum $\Gamma_{z_0}\mathfrak{G}$ ist also insbesondere abgeschlossen in $\Pi_\varkappa(Q)$.

Für beliebiges $z \in \mathscr{Z}_Q$ betrachten wir den Operator Γ_z:

$$\Gamma_z \xi = e_z \xi \qquad (\xi \in \mathfrak{G}).$$

Dann gilt gemäß (3. 7) $\Gamma_z = (A_Q - z_0 I)(A_Q - zI)^{-1}\Gamma_{z_0}$, also ist auch jeder Teilraum $\Gamma_z \mathfrak{G}$ $(z \in Z_Q)$ abgeschlossen.

Für die Funktion $Q \in N_\varkappa(\mathfrak{G})$ mit den Eigenschaften (III) und (IV) bezeichne $\mathfrak{D}$ die Menge aller $f \in \mathfrak{D}(A_Q)$, für die

$$[(A_Q - z_0 I)f, e_{\bar{z}_0}\eta] = 0 \quad \text{für alle} \quad \eta \in \mathfrak{G}$$

gilt. Die Menge $\mathfrak{D}$ ist unabhängig von der Wahl des Punktes z_0 $(z_0 \neq \bar{z}_0,\ z_0 \in \mathscr{Z}_Q)$. Für einen beliebigen Punkt $z \neq \bar{z}$, $z \notin \sigma_p(A_Q)$ und $f \in \mathfrak{D}$ gilt nämlich auch

$$[(A_Q - zI)f, e_{\bar{z}}\eta] = \left[(A_Q - z_0 I)f + (z_0 - z)f, (A_Q - \bar{z}_0 I)\frac{e_{\bar{z}_0}\eta - e_{\bar{z}}\eta}{\bar{z}_0 - \bar{z}}\right] =$$

$$= \left[(A_Q - z_0 I)f, (A_Q - \bar{z}_0 I)\frac{e_{\bar{z}_0}\eta - e_{\bar{z}}\eta}{\bar{z}_0 - \bar{z}}\right] - [(A_Q - z_0 I)f, e_{\bar{z}}\eta] = 0.$$

Die Menge $\mathfrak{D}$ liegt dicht in $\Pi_\varkappa(Q)$. Um das zu sehen, betrachten wir ein $f_0 \in \Pi_\varkappa(Q)$ mit $f_0[\perp]\mathfrak{D}$. Für $g_0 = (A_Q - z_0 I)^{-1} f_0$ gilt dann $g_0[\perp](A_Q - \bar{z}_0 I)\mathfrak{D}$, d.h. $g_0 \in \Gamma_{z_0}\mathfrak{G} \cap$ $\cap \mathfrak{D}(A_Q)$, was der Aussage von Satz 3. 2 widerspricht.

Wir schränken jetzt den Operator A_Q ein auf die Menge $\mathfrak{D}$: $\hat{A}_Q = A_Q|_{\mathfrak{D}}$. Es sei vermerkt, daß genau diejenigen Elemente $f = \sum e_z \xi_z \in \mathfrak{L}(Q)$[16]) zum Definitionsbereich von $\hat{A}_Q$ gehören, für die $\chi(f) = \sum_{z \in \mathscr{Z}_Q} \xi_z = 0$ und $\sum_{z \in \mathscr{Z}_Q} Q(z)\xi_z = 0$ ist. In der Tat, unter der Voraussetzung $\chi(f) = 0$ sind die Beziehungen

$$[(A_Q - zI)f, e_{\bar{z}_0}\eta] = 0 \text{ für alle } \eta \in \mathfrak{G}$$

[16]) Genauer, die Bilder dieser Elemente bei der kanonischen Einbettung von $\mathfrak{L}(Q)$ in $\Pi_\varkappa(Q)$.

und $\sum_{z \in \mathscr{Z}_Q} Q(z)\xi_z = 0$ gleichbedeutend, denn es gilt

$$[(A_Q - z_0 I) \sum e_z \xi_z, e_{\bar{z}_0} \eta] = \sum (z - z_0) [e_z \xi_z, e_{\bar{z}_0} \eta] =$$

$$= \sum (z - z_0) \left(\frac{Q(z) - Q(z_0)}{z - z_0} \xi_z, \eta \right) = \left(\sum Q(z) \xi_z, \eta \right).$$

Im Falle eines endlichdimensionalen Raumes $\mathfrak{G}$ ist der Operator $\hat{A}_Q$ die Abschließung der Einschränkung von $\check{A}$ (siehe § 4. 1) auf die Menge

$$\mathscr{L}_0 = \{ f = \sum e_z \xi_z \in \mathscr{L}(Q) : \sum \xi_z = 0, \sum Q(z) \xi_z = 0 \}.$$

Das folgt leicht aus einem Vergleich der Dimensionen des Faktorraumes $\mathfrak{L}(Q)/\mathfrak{L}_0$ und des Defektraumes $\Gamma_{z_0}\mathfrak{G}$.

Satz 5. 1. *Die Funktion $Q \in N_\varkappa(\mathfrak{G})$ genüge den Voraussetzungen* (III) *und* (IV) *des Hauptsatzes. Dann ist $\hat{A}_Q$ ein einfacher π-hermitescher Operator, seine Defektzahlen sind gleich, sie stimmen mit der Dimension von $\mathfrak{G}$ überein, und es ist Q eine Q-Funktion von $\hat{A}_Q$.*

Beweis. Die Einfachheit des offensichtlich π-hermiteschen Operators $\hat{A}_Q$ ergibt sich aus der Tatsache, daß der Defektraum $\mathfrak{N}_z$ von $\hat{A}_Q$ genau aus den Elementen $e_z \xi$, $\xi \in \mathfrak{G}$, besteht ($z \in \mathscr{Z}_Q$); die Gleichung $\mathfrak{n}_+(\hat{A}_Q) = \mathfrak{n}_-(\hat{A}_Q) = \dim (\Gamma_{z_0}\mathfrak{G})$ folgt unmittelbar aus der Definition von $\hat{A}_Q$. Der Operator A_Q ist eine kanonische π-selbstadjungierte Erweiterung von $\hat{A}_Q$. Deshalb ist Q auf Grund des zweiten Teiles von Satz 4. 1 eine Q-Funktion des Operators $\hat{A}_Q$, wenn man nur Γ_{z_0} gemäß § 3. 2 festlegt.

Bemerkung. Ist der Raum $\mathfrak{G}$ insbesondere endlichdimensional und die Funktion Q meromorph, dann gehört die komplexe Ebene zur Menge $\tilde{\varrho}(\hat{A}_Q)$ der Punkte regulären Typs von $\hat{A}_Q$ (d.h., für jede komplexe Zahl z ist $(\hat{A}_Q - zI)\mathfrak{D}(\hat{A}_Q)$ abgeschlossen und $z \notin \sigma_p(\hat{A}_Q)$).

Um das zu sehen, beachten wir, daß der Operator $\hat{A}_Q$ gemäß Satz 5. 1 keine Eigenwerte hat. Für seine π-selbstadjungierte Erweiterung A_Q ist der Wertebereich $(A_Q - zI)\mathfrak{D}(A_Q)$ bei beliebigem komplexem z abgeschlossen, da die Resolvente von A_Q nach Satz 4. 4 keine anderen Singularitäten als Pole hat. Die Wertebereiche $(A_Q - zI)\mathfrak{D}(A_Q)$ und $(\hat{A}_Q - zI)\mathfrak{D}(\hat{A}_Q)$ unterscheiden sich aber nur durch einen endlichdimensionalen Teilraum.

Satz 5. 2. *Ein einfacher π-hermitescher Operator A in $\Pi_\varkappa$ ist durch seine Q-Funktion bis auf π-unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt, genauer, A ist dem Operator $\hat{A}_Q$ π-unitär äquivalent.*

Beweis. Es sei $\tilde{A}$ die kanonische π-selbstadjungierte Erweiterung aus (2. 2). Dann sind die Operatoren A_Q und $\tilde{A}$ gemäß Satz 4. 2 π-unitär äquivalent. Wie im

Beweis von Satz 3. 3 bezeichnen wir mit T die zugehörige π-isometrische Abbildung von $\Pi_\varkappa$ auf $\Pi_\varkappa(Q)$:

$$T\mathring{\Gamma}_z\xi = e_z\xi \quad \left(z\in(C_+\cup C_-)\setminus\sigma_p(\mathring{A}),\ \xi\in\mathfrak{G}\right).$$

Aus der für beliebige $\xi\in\mathfrak{G}$ und $f\in\mathfrak{D}(\mathring{A})$ bestehenden Beziehung

$$[(\mathring{A}-z_0I)f, \mathring{\Gamma}_{\bar{z}_0}\xi] = [(A_Q-z_0I)Tf, e_{\bar{z}_0}\xi]$$

folgt damit leicht $T\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(\hat{A}_Q)$ und $TAf=\hat{A}_QTf$ $(f\in\mathfrak{D}(A))$.

Folgerung 5. 1. *Die Q-Funktion eines π-hermiteschen Operators A bestimmt dessen einfachen Teil A_e bis auf π-unitäre Äquivalenz eindeutig.*

§ 6. Zusammenhang zwischen Q-Funktion und charakteristischer Funktion

Die Q-Funktion eines π-hermiteschen Operators A hängt eng mit der charakteristischen Funktion seiner π-isometrischen Cayleytransformierten V zusammen. Um diesen Zusammenhang darzustellen, beginnen wir mit den notwendigen Definitionen.

Es sei V ein π-isometrischer Operator, dessen Definitionsbereich $\mathfrak{D}(V)$ und Wertebereich $\mathfrak{R}(V)$ nichtentartete Teilräume von $\Pi_\varkappa$ sind. Die Defektzahlen von V sollen übereinstimmen, d.h., es gelte $\dim\mathfrak{D}(V)^{[\perp]}=\dim\mathfrak{R}(V)^{[\perp]}=\mathfrak{n}$. Wir wählen einen Hilbertraum $\mathfrak{G}$ der Dimension $\mathfrak{n}$ und eine eineindeutige stetige Abbildung Γ von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{R}(V)^{[\perp]}$. Weiter definieren wir einen Operator $T\in[\Pi_\varkappa, \Pi_\varkappa]$ durch die Festsetzung

$$Tf=\begin{cases} Vf & f\in\mathfrak{D}(V),\\ 0 & f\in\mathfrak{D}(V)^{[\perp]}.\end{cases}$$

Es sei $\mathring{U}$ eine π-unitäre Erweiterung von V in $\Pi_\varkappa$. Unter der (zu $\{\mathring{U}, \Gamma, \mathfrak{G}\}$ gehörigen) *charakteristischen Funktion* des Operators V verstehen wir die für $|\lambda|<1$, $\lambda^{-1}\notin\sigma(T^+)$ definierte Funktion

$$X(\lambda) = \lambda\Gamma^+(I-\lambda T^+)^{-1}\mathring{U}^+\Gamma. \tag{6. 1}$$

Wählen wir speziell $\mathfrak{G}=\mathfrak{D}(V)^{[\perp]}$ und $\Gamma=\mathring{U}|_{\mathfrak{D}(V)^{[\perp]}}$, so geht die hier gegebene Definition der charakteristischen Funktion in die von [8], § 3 über. Wir überlassen es dem Leser, aus den dort erhaltenen Ergebnissen die wesentlichen Eigenschaften der charakteristischen Funktion (6. 1) abzuleiten, und vermerken nur, daß sie im Inneren des Einheitskreises meromorph ist.

Es sei jetzt V insbesondere die Cayleytransformierte des π-hermiteschen Operators A mit gleichen Defektzahlen:

$$V = (A-\bar{z}_0I)(A-z_0I)^{-1},\ z_0\,\bar{\in}\,\Delta_A,\ z_0\neq\bar{z}_0.$$

Wählen wir $\mathring{U} = (\mathring{A}-\bar{z}_0 I)(\mathring{A}-z_0 I)^{-1}$, $\Gamma=\mathring{\Gamma}_{z_0}$ mit dem in § 1. 1 eingeführten Operator $\mathring{\Gamma}_{z_0}$ und setzen noch

$$\lambda = \frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0},$$

so besteht zwischen der Q-Funktion Q von A:

$$Q(z) = (z-x_0)\mathring{\Gamma}_{z_0}^{+}\mathring{\Gamma}_{z_0}+(z-z_0)(z-\bar{z}_0)\mathring{\Gamma}_{z_0}^{+}(\mathring{A}-zI)^{-1}\mathring{\Gamma}_{z_0}$$

und der charakteristischen Funktion X von V der Zusammenhang

$$Q(z) = -iy_0\big(\Gamma^+\Gamma+X(\lambda)\big)\big(\Gamma^+\Gamma-X(\lambda)\big)^{-1}\Gamma^+\Gamma. \tag{6. 2}$$

Bildet Γ also den Raum $\mathfrak{G}$ insbesondere π-isometrisch auf $\mathfrak{N}(V)^{[\perp]}$ ab, d.h., gilt

$$[\Gamma\xi,\Gamma\eta] = (\xi,\eta),$$

so folgt

$$Q(z) = -iy_0\big(I+X(\lambda)\big)\big(I-X(\lambda)\big)^{-1}.$$

Zum Beweis der Beziehung (6. 2) gehen wir aus von der Gleichung

$$(I-\lambda T^+)^{-1}-(I-\lambda\mathring{U}^+)^{-1} = -(I-\lambda\mathring{U}^+)^{-1}\lambda\mathring{U}^+P(I-\lambda T^+)^{-1};$$

dabei bezeichnet P den π-orthogonalen Projektor auf $\mathfrak{N}(V)^{[\perp]}$. Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit Γ^+ und von rechts mit $\lambda\mathring{U}^+\Gamma$, so folgt

$$X(\lambda)-\lambda\Gamma^+(I-\lambda\mathring{U}^+)^{-1}\mathring{U}^+\Gamma = -\lambda\Gamma^+(I-\lambda\mathring{U}^+)^{-1}\mathring{U}^+\overset{(-1)}{\Gamma}{}^+X(\lambda),$$

also

$$X(\lambda) = \Gamma^+(I-\lambda\mathring{U}^+)^{-1}\lambda\mathring{U}^+\Gamma\big(I-\overset{(-1)}{\Gamma}\,\overset{(-1)}{\Gamma}{}^+X(\lambda)\big),$$

$$\big(\Gamma^+\Gamma+X(\lambda)\big)\big(\Gamma^+\Gamma-X(\lambda)\big)^{-1}\Gamma^+\Gamma = \Gamma^+(\mathring{U}+\lambda I)(\mathring{U}-\lambda I)^{-1}\Gamma. \tag{6. 3}$$

Andererseits bestätigt man durch eine einfache Rechnung die Beziehung

$$-iy_0(\mathring{U}+\lambda I)(\mathring{U}-\lambda I)^{-1} = (z-x_0)I+(z-z_0)(z-\bar{z}_0)(\mathring{A}-zI)^{-1}. \tag{6. 4}$$

Aus (6. 3) und (6. 4) ergibt sich die Behauptung.

Wir bemerken, daß es dieser Zusammenhang zwischen der Q-Funktion und der charakteristischen Funktion gestattet, aus der Formel zur Beschreibung aller verallgemeinerten Resolventen eines π-isometrischen Operators in [8] die Formel (2. 7) zur Beschreibung aller verallgemeinerten Resolventen eines π-hermiteschen Operators herzuleiten.

§ 7. Rein hyperbolische Operatoren

1. *Die Menge* $\mathfrak{J}_A$. Wir betrachten in diesem Paragraphen einen π-hermiteschen Operator A mit gleichen und endlichen Defektzahlen, d.h. der Raum $\mathfrak{G}$ sei endlichdimensional. Mit $\mathfrak{J}_A$ bezeichnen wir die Menge derjenigen Punkte z aus $C_+ \cup C_-$, die Eigenwerte einer regulären π-selbstadjungierten Erweiterung von A sein können. Gemäß [4], Folgerung 3. 1, sind das genau diejenigen Punkte $z \neq \bar{z}$, für die $l_-(z)+ + l_0(z) > 0$ gilt, wenn sign $\mathfrak{N}_z = (l_+(z), l_0(z), l_-(z))$ die Signatur des Defektraumes $\mathfrak{N}_z$ bezeichnet. Die Beziehung (2. 3) besagt, daß für einen einfachen π-hermiteschen Operator A der Punkt z genau dann zu $\mathfrak{J}_A$ gehört, wenn für eine Q-Funktion Q von A (und damit für alle Q-Funktionen von A) $\dfrac{\operatorname{Im} Q(z)}{\operatorname{Im} z}$ nicht positiv ist.

Die Menge $\mathfrak{J}_A$ liegt im Streifen $|\operatorname{Im} z| \leqq h_A$ für eine geeignete positive Konstante h_A ([4], Satz 3. 2), sie enthält alle ihre nichtreellen Randpunkte, und diese gehören zu Δ_A.

Wir überlegen uns, daß die Menge $\mathfrak{J}_A$ beschränkt ist. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine Folge (λ_n) nichtreeller Randpunkte von $\mathfrak{J}_A$ mit $|\lambda_n| \to \infty$. Zu jedem λ_n existiert gemäß [4], Satz 3. 1 eine kanonische π-selbstadjungierte Erweiterung A_n von A mit $\lambda_n \in \sigma_0(A_n)$. Zu der π-selbstadjungierten Erweiterung A_n gehöre in der Resolventenformel (2. 7) der Operator $T_n \in \mathfrak{T}_0(\mathfrak{G})$. Definieren wir zwischen zwei Operatoren $T, T' \in \mathfrak{T}_0(\mathfrak{G})$ einen Abstand $d(T, T')$ durch die Beziehung

$$d(T, T') = \|V(T) - V(T')\|, \tag{7. 1}$$

wenn $V(T)$ die Cayleytransformierte $(T-iI)(T+iI)^{-1}$ von T bezeichnet, so sieht man leicht, daß $\mathfrak{T}_0(\mathfrak{G})$ eine kompakte Menge ist. Die Folge (T_n) enthält somit eine konvergente Teilfolge (T_{n_j}): $d(T_{n_j}, T_0) \to 0$ für $j \to \infty$ und ein $T_0 \in \mathfrak{T}_0(\mathfrak{G})$. Dann gilt aber für $z \in \varrho(A_0)$ auch $\|(A_{n_j} - zI)^{-1} - (A_0 - zI)^{-1}\| \to 0$ $(j \to \infty)$,[17]) wenn A_0 die zu T_0 gehörige kanonische π-selbstadjungierte Erweiterung von A bezeichnet. Aus Folgerung 1. 1 und der Tatsache, daß der Index der Menge $\sigma_0(A_0)$ gleich $\varkappa$ ist, ergibt sich jetzt leicht ein Widerspruch.

Wir führen weiter die Menge $\tilde{\mathfrak{J}}_A$ aller (reellen oder komplexen) Punkte z ein, die für eine reguläre π-selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{A}$ von A zu $\sigma_0(\tilde{A})$ gehören. Offensichtlich gilt $\mathfrak{J}_A = \tilde{\mathfrak{J}}_A \cap (C_+ \cup C_-)$. Ist der Durchschnitt einer Komponente von $\tilde{\mathfrak{J}}_A$ mit C_+ nicht leer, so nennen wir diesen eine *Komponente* von $\mathfrak{J}_A$ in C_+. Durch Betrachtung der nichtreellen Randpunkte von $\mathfrak{J}_A$ ergibt sich aus Folgerung 1. 1 leicht der

[17]) Davon überzeugt man sich leicht z.B. mit Hilfe der in [8], § 4, gegebenen Darstellung der verallgemeinerten Resolventen.

Satz 7. 1. *Die Menge $\mathfrak{J}_A$ hat in C_+ höchstens $\varkappa$ Komponenten.*

Die Menge $\mathfrak{J}_A$ läßt sich genauer beschreiben, wenn mann den Begriff des definisierenden Polynoms (vgl. [12], [13]) heranzieht. Wir führen das im Falle $\varkappa=1$ aus.

Ein reelles Polynom $p(z) = (z-\alpha)(z-\bar{\alpha})$ zweiten Grades nennen wir *definisierend* für den π-hermiteschen Operator A in Π_1, wenn

$$[(A-\alpha I)f, (A-\alpha I)f] \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathfrak{D}(A) \tag{7.2}$$

gilt. Die Menge aller definisierenden Polynome von A werde mit $\mathfrak{P}(A)$ bezeichnet. Offensichtlich ist $\mathfrak{P}(A)$ konvex, d.h., aus $p_1, p_2 \in \mathfrak{P}(A)$ folgt auch $\gamma p_1+(1-\gamma)p_2 \in \mathfrak{P}(A)$ für $0 \leqq \gamma \leqq 1$.

Wir überlegen uns, daß die Zahl α genau dann zu $\tilde{\mathfrak{J}}_A$ gehört, wenn sie Nullstelle eines Polynoms $p \in \mathfrak{P}(A)$ ist. In der Tat, aus $\alpha \in \tilde{\mathfrak{J}}_A$ folgt, daß das Polynom $p(z) = (z-\alpha)(z-\bar{\alpha})$ definisierend für die Erweiterung $\tilde{A}$ von A mit $\alpha \in \sigma_0(\tilde{A})$ ist. Dann ist es aber auch definisierend für A. Besteht umgekehrt die Beziehung (7. 2), so enthält $\mathfrak{N}_{\bar{\alpha}}$ ein nichtpositives Element $f_0 \neq 0$. Im Falle $\alpha \neq \bar{\alpha}$ folgt damit aus [4], Folgerung 3. 1, daß eine reguläre π-selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{A}$ von A mit $\alpha \in \sigma_0(\tilde{A})$ existiert. Ist $\alpha=\bar{\alpha}$, so ergibt sich durch die Festsetzung $\tilde{A}f=Af$ für $f \in \mathfrak{D}(A)$ und $\tilde{A}f_0=\alpha f_0$ — sofern f_0 nicht bereits zu $\mathfrak{D}(A)$ gehört — sowie anschließende Fortsetzung des erhaltenen Operators zu einem π-selbstadjungierten Operator ebenfalls eine π-selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{A}$ von A, für die $\alpha \in \sigma_0(\tilde{A})$ gilt.

Wir setzen jetzt $\tilde{C}_+ = C_+ \cup R$ und führen in C_+ die Abbildung $z \to \varphi(z) = = 2\,\mathrm{Re}\, z+i|z|^2$ ein. Aus der Konvexität der Menge $\mathfrak{P}(A)$ und der obigen Überlegung ergibt sich dann der

Satz 7. 2. *Für einen π-hermiteschen Operator A mit gleichen Defektzahlen im Raume Π_1 ist das Bild $\varphi(\tilde{\mathfrak{J}}_A \cap \tilde{C}_+)$ konvex.*

2. *Rein hyperbolische Operatoren.* Wir nennen einen π-selbstadjungierten Operator A in $\Pi_\varkappa$ *rein hyperbolisch*, wenn sein Spektrum in C_+ aus genau $\varkappa$ Eigenwerten — jeder entsprechend seiner Vielfachheit oft gezählt — besteht. In diesem Falle enthält $\sigma_0(A)$ keine reellen Punkte, und der Pontrjaginsche $\varkappa$-dimensionale nichtpositive Teilraum $\mathfrak{L}$ ist z. B. durch die Bedingung $\mathrm{Im}\,\sigma(A|\mathfrak{L})>0$ eindeutig bestimmt: Er wird von denjenigen algebraischen Eigenräumen von A aufgespannt, die zu den Eigenwerten von A in der oberen Halbebene gehören.

Ein π-hermitescher Operator A in $\Pi_\varkappa$ heiße *rein hyperbolisch*, wenn alle seine regulären π-selbstadjungierten Erweiterungen rein hyperbolisch sind.

Hauptergebnis dieses Paragraphen ist der folgende

Satz 7. 3. *Der π-hermitesche Operator A in $\Pi_\varkappa$ mit gleichen endlichen Defektzahlen ist genau dann rein hyperbolisch, wenn mindestens eine kanonische π-selbst-*

adjungierte Erweiterung rein hyperbolisch ist und die Menge $\mathfrak{J}_A$ einen positiven Abstand von der reellen Achse hat.

Zum Beweis der Notwendigkeit hat man nur zu zeigen, daß die Menge der Randpunkte von $\mathfrak{J}_A$ von der reellen Achse einen positiven Abstand hat. Das ergibt sich leicht aus der Folgerung 1. 1.

Die Hinlänglichkeit zeigen wir in mehreren Schritten; dabei seien für A stets die im Satz genannten Voraussetzungen erfüllt, und $\mathring{A}$ bezeichne eine rein hyperbolische kanonische π-selbstadjungierte Erweiterung von A.

1) *Jede kanonische π-selbstadjungierte Erweiterung von A ist rein hyperbolisch.* Um das zu sehen, wählen wir eine Kontur $\mathscr{C}$, die ganz in C_+ liegt und $\mathfrak{J}_A \cap C_+$ genau einmal im positiven Sinne umläuft. Ist R_z eine kanonische Resolvente von A und T der gemäß (2. 7) zugehörige Operator aus $\mathfrak{T}_0(\mathfrak{G})$, so wird durch die Formel

$$\varkappa(T) = \dim\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} R_z\,dz\right)\Pi_\varkappa$$

eine stetige Funktion auf dem zusammenhängenden kompakten Raum $\mathfrak{T}_0(\mathfrak{G})$, versehen mit der Metrik (7. 1), definiert. Deshalb ist $\varkappa(T)$ konstant. Da andererseits nach Voraussetzung $\varkappa(T_0) \doteq \varkappa$ für $T_0 = \infty \cdot I$ gilt, folgt $\varkappa(T) = \varkappa$ für alle $T \in \mathfrak{T}_0(\mathfrak{G})$, woraus sich leicht die Behauptung ergibt.

2) *Jede reine Austrittserweiterung von A ist rein hyperbolisch.* Um das zu zeigen, stellen wir A zunächst in der Form (1. 4) mit seinem einfachen Teil A_e dar. Dann gilt $\mathfrak{J}_{A_e} \subset \mathfrak{J}_A$, und man sieht leicht, daß genau dann alle reinen Austrittserweiterungen von A rein hyperbolisch sind, wenn alle reinen Austrittserweiterungen von A_e rein hyperbolisch sind. Deshalb brauchen wir die Aussage 2) nur für einen einfachen Operator A zu beweisen. Wir betrachten eine kanonische π-selbstadjungierte Erweiterung $\mathring{A}$ von A und die zugehörige Q-Funktion (2. 2); dabei sei $\mathfrak{G}$ der Defektraum $\mathfrak{N}_{z_0}$, $\operatorname{Im} z_0 > h_A$, versehen mit dem π-Skalarprodukt von $\Pi_\varkappa$, und Γ_{z_0} die identische Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{N}_{z_0}$. Da $\mathring{A}$ und damit auch A_Q rein hyperbolisch sind, ist die Polvielfachheit von $\mathfrak{J}_A \cap C_+$ bezüglich $Q(z)$ gemäß Folgerung 4. 1 gleich $\varkappa$.

Nach der Bemerkung am Ende von § 2. 3 ist mit $Q(z)$ auch $-y_0^2 Q^{-1}(z)$ eine Q-Funktion des Operators A. Für diese hat $\mathfrak{J}_A \cap C_+$ ebenfalls die Polvielfachheit $\varkappa$, also ist auch die Nullvielfachheit von $\mathfrak{J}_A \cap C_+$ bezüglich $Q(z)$ gleich $\varkappa$.

Es sei jetzt $\tilde{A}$ eine reine Austrittserweiterung von A. Dann ist das zugehörige $T \in \mathfrak{T}(\mathfrak{G})$ aus der Resolventenformel (2. 7) eine eigentliche Funktion (siehe § 2. 2), d.h., in der Darstellung (2. 6) gilt $\hat{P} = I$. Wir betrachten den Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{sp}\int_{\mathscr{C}} \big(Q'(z) + \varepsilon T'(z)\big)\big(Q(z) + \varepsilon T(z)\big)^{-1}\,dz, \qquad 0 \leqq \varepsilon \leqq 1,$$

wenn $\mathscr{C}$ dieselbe Bedeutung wie im ersten Teil des Beweises hat. Er hängt in dem angegebenen Bereich stetig von ε ab, und sein Wert ist eine ganze Zahl. Da er für $\varepsilon=0$ auf Grund von (4. 18) und dem oben Gesagten den Wert Null hat, gilt dasselbe für $\varepsilon=1$, d.h., für $Q(z)+T(z)$ stimmt die Nullvielfachheit von $\mathfrak{J}_A \cap C_+$ mit der Polvielfachheit von $\mathfrak{J}_A \cap C_+$ überein. Letztere ist aber gleich $\varkappa$, da dies für $Q(z)$ gilt und $T(z)$ in $\mathfrak{J}_A \cap C_+$ holomorph ist. Also ist auch die Nullvielfachheit von $\mathfrak{J}_A \cap C_+$ bezüglich $Q(z)+T(z)$ gleich $\varkappa$.

Schreiben wir die Formel (2. 7) jetzt in der Form

$$R_z = (\mathring{A}-z_0 I)(\mathring{A}-zI)^{-1}[(\mathring{A}-z_0 I)^{-1} - \Gamma_{z_0}(Q(z)+T(z))^{-1}\Gamma_{\bar{z}}^+],$$

so sieht man (vgl. [20]), daß die Polvielfachheit von $\mathfrak{J}_A \cap C_+$ bezüglich R_z mindestens gleich $\varkappa$ ist. Da sie andererseits mit der Summe der algebraischen Vielfachheiten aller in $\mathfrak{J}_A \cap C_+$ gelegenen Eigenwerte von $\tilde{A}$ übereinstimmt, ist $\tilde{A}$ rein hyperbolisch.

3) Es sei jetzt $\tilde{A}$ eine beliebige reguläre π-selbstadjungierte Erweiterung von A. Dann gibt es eine echte oder unechte π-hermitesche Erweiterung $\hat{A}$ von A in $\Pi_\varkappa$, so daß $\tilde{A}$ eine reine Austrittserweiterung von $\hat{A}$ ist. Offensichtlich gilt $\mathfrak{J}_{\hat{A}} \subset \mathfrak{J}_A$, also hat $\mathfrak{J}_{\hat{A}}$ einen positiven Abstand von der reellen Achse. Da jede kanonische Erweiterung von $\hat{A}$ eine kanonische Erweiterung von A ist, hat $\hat{A}$ eine rein hyperbolische kanonische π-selbstadjungierte Erweiterung. Auf Grund des zweiten Teiles des Beweises ist somit $\tilde{A}$ rein hyperbolisch. Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung 7. 2. *Ein π-hermitescher Operator A mit gleichen endlichen Defektzahlen ist genau dann rein hyperbolisch, wenn alle seine kanonischen Erweiterungen rein hyperbolisch sind.*

Wir bemerken, daß sich der Beweis von Satz 7. 3 im Falle $\mathfrak{n}_\pm(A)=1$ wesentlich vereinfacht. Gehört unter dieser Voraussetzung die komplexe Ebene sogar zur Menge $\tilde{\varrho}(A)$ der Punkte regulären Typs von A, so ist A genau dann rein hyperbolisch, wenn die Menge $\mathfrak{J}_A$ einen positiven Abstand von der reellen Achse hat.

Um das zu zeigen nehmen wir an, es gäbe unter dieser Voraussetzung an $\mathfrak{J}_A$ eine kanonische Erweiterung A_0 von A mit einem reellen Eigenwert $\lambda \in \sigma_0(A_0)$. Das zugehörige Eigenelement sei z. B. negativ, d.h., λ sei von negativem Typ ([4], § 6. 2). Entspricht der Erweiterung A_0 in der Resolventenformel (2. 7) die Konstante $\tau_0: T(z)\equiv\tau_0$, $A_0=A^{(\tau_0)}$, so hat gemäß [4], § 6. 2 für hinreichend nahe bei τ_0 gelegene $\tau>\tau_0$ der Operator $A^{(\tau)}$ einen Eigenwert $\lambda(\tau)$ negativen Typs, der sich mit wachsendem τ nach rechts bewegt. Da sich andererseits die Eigenwerte positiven Typs mit wachsendem τ nach links bewegen, gibt es einen Wert τ_1, so daß $\lambda(\tau_1)=\lim\limits_{\tau\uparrow\tau_1}\lambda(\tau)$ ein kritischer Eigenwert von $A^{(\tau_1)}$ ist. Für hinreichend nahe bei τ_1 gelegene $\tau>\tau_1$ hat dann der Operator $A^{(\tau)}$ gemäß [4], § 6. 2 nichtreelle Eigenwerte mit beliebig kleinem Imaginärteil, was der Voraussetzung über die Menge $\mathfrak{J}_A$ widerspricht.

Diese Bemerkung gibt die Möglichkeit, rein hyperbolische π-hermitesche Operatoren zu konstruieren. Man braucht nur eine komplexe Funktion $Q(z)$ mit den Eigenschaften (I)—(III) des Hauptsatzes aus § 2. 4 (für den eindimensionalen Raum $\mathfrak{G}$ der komplexen Zahlen) zu wählen, deren Singularitäten nur isolierte Pole sind und deren Menge $\mathfrak{J}_Q$ aller Punkte $z \in C_+ \cup C_-$ mit $\frac{\operatorname{Im} Q(z)}{\operatorname{Im} z} \leqq 0$ einen positiven Abstand von der reellen Achse hat. Dann ist der Operator $\hat{A}_Q$ rein hyperbolisch, denn auf Grund der Bemerkung im Anschluß an Satz 5. 3 gilt $\tilde{\varrho}(\tilde{A}_Q) = C$.

Im Falle $\varkappa = 1$ hat z. B. die Funktion

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \varrho_j \left\{ \frac{1}{\lambda_j - z} - \frac{1}{\lambda_j} \right\} + \frac{\varepsilon}{\alpha - z} + \frac{\varepsilon}{\bar{\alpha} - z}$$

mit $\varrho_j > 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} \varrho_j = \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varrho_j}{\lambda_j^2} < \infty$, $\lambda_j = \bar{\lambda}_j$, $\lambda_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots$, $\alpha \neq \bar{\alpha}$, für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ alle verlangten Eigenschaften.

Wie jeder π-hermitesche Operator A mit endlichen Defektzahlen und $\tilde{\varrho}(A) = C$ hat der Operator $\hat{A}_Q$ Erweiterungen mit Austritt aus Π_1, deren reelles Spektrum absolutstetig ist. Solche ergeben sich z. B., wenn man in der Formel (2. 7) $T(z) \equiv i$ $(z \in C_+)$ setzt.

Literatur

[1] М. Г. Крейн, Об эрмитовых операторах с дефектиными индексами, равными единице, *ДАН СССР*, **43** (8) (1944), 339—342.

[2] М. Г. Крейн, О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m), *ДАН СССР*, **52** (8) (1946), 657—660.

[3] Ш. Н. Саакян, К теории резольвент симметрического оператора с бесконечными дефектными числами, *ДАН Арм. ССР*, **41** (4) (1965), 193—198.

[4] М. Г. Крейн — Г. К. Лангер, О дефектных подпространствах и обобщённых резольвентах эрмитова оператора в пространстве $\Pi_\varkappa$, *Функциональный анализ*, **5** (2) (1971), 61—73; **5** (3) (1971), 54—69.

[5] G. Pick, Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden, *Math. Annalen*, **77** (1916), 7—23.

[6] R. Nevanlinna,, Über beschränkte analytische Funktionen, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A*, *XXXII*, **7** (1929), 1—75.

[7] B. Sz.-Nagy — A. Korányi, Operatortheoretische Behandlung und Verallgemeinerug eines Problemkreises in der komplexen Funktionentheorie, *Acta Math.*, **100** (1958), 171—202.

[8] M. G. Kreĭn — H. Langer, Über die verallgemeinerten Resolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators im Raume $\Pi_\varkappa$, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai. 5. Hilbert Space Operators*, Tihany (Hungary), 1970, 353—399.

[9] М. С. Лившиц, Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, **19** (61) (1946), 239—260.

[10] В. М. Адамян — Д. З. Аров — М. Г. Крейн, Аналитические свойства пар Шмидта — Ганкелева оператора и обобщённая задача Шура—Такаги, *Матем. сб.*, **86 (128)**, 1 (9) (1971), 34—75.

[11] P. D. Lax — R. S. Phillips, *Scattering Theory*, Academic Press (New York—London, 1967).

[12] М. Г. Крейн — Г. К. Лангер, О спектральной функции самосопряжённого оператора в пространстве с индефинитной метрикой, *ДАН СССР*, **152** (1) (1963), 39—42.

[13] H. Langer, *Spektraltheorie linearer Operatoren in J-Räumen und einige Anwendungen auf die Schar* $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$, Habilitationsschrift, Technische Universität Dresden, 1965.

[14] М. Г. Крейн, Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m), *Укр. матем. ж.*, **1**, **2** (1949), 3—66.

[15] И. Ц. Гохберг — М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, *Успехи матем. наук*, **12**, **2** (1957), 43—118.

[16] H. Langer, Zur Spektraltheorie J-selbstadjungierter Operatoren, *Math. Annalen*, **146** (1962), 60—85.

[17] И. С. Иохвидов — М. Г. Крейн, Спектральная теория линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. II, *Труды Моск. матем. общества*, **8** (1959), 413—496.

[18] М. Г. Крейн, Об одной экстраполяционной проблеме А. Н. Колмогорова, *ДАН СССР*, **46**, **8** (1945), 339—342.

[19] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука (Москва, 1965).

[20] И. Ц. Гохберг, О некоторых вопросах спектральной теории конечномероморфных оператор-функций, *Известия Акад. Наук Арм. ССР*, **6** (1971), 160—181; см. также „Письмо в редакцию“, *там же*, **7** (1972).

[21] И. Ц. Гохберг — М. Г. Крейн, *Введение в теорию несамосопряжённых операторов*, Наука (Москва, 1965).

[22] И. Ц. Гохберг — Е. И. Сигал, Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычёте и теоремы Руше, *Матем. сб.*, **84 (126)** (1971), 607—630.

(Eingegangen am 22. Juni 1972)