Über einseitige Approximation durch Polynome. II

Von G. FREUD und J. SZABADOS in Budapest

§ 1. Einführung

Vorliegende Arbeit setzt die Arbeit G. FREUD [1] fort und behandelt ebenfalls die einseitige L_1-Approximation bezüglich der reellen Zahlgeraden. In diesem Fall scheint die Funktion e^{-x^2} die natürliche Gewichtsfunktion zu sein.

Wir bezeichnen mit $V(r, s)$ (r, s natürliche Zahlen) die Klasse der Funktionen $F(x)$ in $(-\infty, +\infty)$, die die folgenden Bedingungen a), b) befriedigen:

a) $F(x)$ is $(r-1)$-mal stetig differenzierbar und $F^{(r-1)}(x)$ ist die Integralfunktion einer Funktion $F^{[r]}(x)$, die über jedes endliche Intervall eine beschränkte Schwankung hat und

$$M_r(F) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} |dF^{[r]}(x)| < +\infty \tag{1}$$

genügt.

b) Es gilt mit passenden (von F abhängenden) nichtnegativen Zahlen A, B, s

$$|F(x)| \leqq A + Bx^{2s} \qquad (-\infty < x < +\infty). \tag{2}$$

Satz. *Sei $F \in V(r, s)$. Zu jedem $n(=s, s+1, \ldots)$ gibt es Polynome höchtens $(2n-1)$-ten Grades $p_n(x)$ und $P_n(x)$, die die folgenden Bedingungen* (3), (4) *befriedigen:*

$$p_n(x) \leqq F(x) \leqq P_n(x) \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{3}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [P_n(x) - p_n(x)] e^{-x^2} dx = O\left(n^{-\frac{r+1}{2}}\right). \tag{4}$$

In § 2 beweisen wir den Satz für die speziellen Funktionen $\Gamma_\nu(x, \xi)$ und in § 3 betrachten wir einige Hilfssätze. Der Beweis für den allgemeinen Fall erfolgt in § 4.

§ 2. Einseitige Approximation von $\Gamma_\nu(x, \xi)$

Für jede ganze Zahl $\nu \geqq 0$ setzen wir

(5) $$\Gamma_\nu(x, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leqq \xi. \\ (x-\xi)^\nu & \text{für} \quad x > \xi; \end{cases}$$

als Funktion von x gehört $\Gamma_\nu(x, \xi)$ offenbar zu $V\left(\nu, \left[\frac{\nu}{2}\right]+1\right)$.

Hilfssatz. *Für jede feste natürliche Zahl ν, jede ganze Zahl $n > \nu+1$, und jede reelle Zahl $\xi \in \left[-\frac{1}{2}\sqrt{n}, \frac{1}{2}\sqrt{n}\right]$, gibt es Polynome von x höchtens $(2n-2)$-ten Grades $p_{n,\nu}(x, \xi)$ und $P_{n,\nu}(x, \xi)$ mit den Eigenschaften*

(6) $$p_{n,\nu}(x, \xi) \leqq \Gamma_\nu(x, \xi) \leqq P_{n,\nu}(x, \xi) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

und

(7) $$\int_{-\infty}^{+\infty} [P_{n,\nu}(x, \xi) - p_{n,\nu}(x, \xi)] e^{-x^2} dx \leqq c_\nu n^{-\frac{\nu+1}{2}} e^{-\xi^2}.$$

Dabei hängen die Zahlen c_ν weder von n noch von ξ ab, ferner sind $p_{n,\nu}(x, \xi)$ und $P_{n,\nu}(x, \xi)$ für festes x stückweise stetige beschränkte Funktionen des Parameters ξ.

Beweis. Da wir mit Hilfe der Wahl eines größeren $c_\nu > 0$ die ersten Glieder der Folge $\{P_{n,\nu}(x, \xi)\}$ durch $(x-\xi)^{2[\nu/2]+2}$ und die ersten Glieder der Folge $\{p_{n,\nu}(x, \xi)\}$ durch 0 ersetzen können, reicht es den Satz für hinreichend große Werte von n zu beweisen.

Wir bezeichnen mit

$$x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n}$$

die Nullstellen des Hermiteschen Orthogonalpolynoms $H_n(x)$. Wegen $|x_{1,n}| = x_{n,n} \approx \sqrt{2n+1}$ (vgl. G. SZEGŐ [2], S. 131) und $|\xi| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{n}$ gibt es ein $\mu = \mu(n, \xi)$ derart, daß

(8) $$x_{\mu,n} \leqq \xi < x_{\mu+1,n}.$$

Es sei jetzt

(9) $$\eta = \left[\frac{\nu+1}{2}\right],$$

und es sei n_0 so groß, daß für jedes $n \geqq n_0$ und $|\xi| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{n}$

(10) $$-\sqrt{n} < x_{\mu-\eta,n} < x_{\mu+\eta+1,n} < \sqrt{n}$$

gilt *), und im Weiteren sei $n \geqq n_0$.

---

*) Die Existenz eines solchen Wertes n_0 folgt z. B. aus (16).

Im Laufe der weiteren Konstruktion unterscheiden wir die Fälle von geraden und ungeraden Werten von ν.

Fall: ν eine gerade Zahl. Es seien $\varphi_n(x, \xi)$, bzw. $\Phi_n(x, \xi)$ die Polynome höchtens $2(n-\eta-1)$-ten Grades mit

$$\varphi_n(x_{1,n}, \xi) = \cdots = \varphi_n(x_{\mu+1,n}, \xi) = 0, \quad \varphi_n(x_{\mu+\eta+2,n}, \xi) = \cdots = \varphi_n(x_{n,n}, \xi) = 1,$$

$$\varphi_n'(x_{1,n}, \xi) = \cdots = \varphi_n'(x_{\mu,n}, \xi) = \varphi_n'(x_{\mu+\eta+2,n}, \xi) = \cdots = \varphi_n'(x_{n,n}, \xi) = 0;$$

bzw. mit

$$\Phi_n(x_{1,n}, \xi) = \cdots = \Phi_n(x_{\mu-\eta-1,n}, \xi) = 0, \quad \Phi_n(x_{\mu,n}, \xi) = \cdots = \Phi_n(x_{n,n}, \xi) = 1,$$

$$\Phi_n'(x_{1,n}, \xi) = \cdots = \Phi_n'(x_{\mu-\eta-1,n}, \xi) = \Phi_n'(x_{\mu+1,n}, \xi) = \cdots = \Phi_n'(x_{n,n}, \xi) = 0.$$

Aus der Diskussion des Verlaufes dieser Polynome ergibt sich (T. J. STIELTJES [3]; vgl. G. FREUD [4])

$$\varphi_n(x, \xi) \leqq \Gamma_0(x, \xi) \leqq \Phi_n(x, \xi) \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{11}$$

und

$$0 \leqq \varphi_n(x, \xi) \leqq 1 \qquad (x_{\mu+1,n} \leqq x \leqq x_{\mu+\eta+2,n}), \tag{12}$$

$$0 \leqq \Phi_n(x, \xi) \leqq 1 \qquad (x_{\mu-\eta-1,n} \leqq x \leqq x_{\mu,n}).$$

Wir setzen

$$p_{n,\nu}(x, \xi) = (x-\xi)^\nu \varphi_n(x, \xi) \quad \text{und} \quad P_{n,\nu}(x, \xi) = (x-\xi)^\nu \Phi_n(x, \xi);$$

diese Polynome sind wegen (9) höchstens vom Grade $2n-2$ und aus (11) folgt das Erfülltsein von (6). Für jedes Polynom höchtens $2n-1$-ten Grades $\Pi_{2n-1}(x)$ gilt die Gauß—Jacobische Quadraturformel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{2n-1}(x) e^{-x^2}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \Pi_{2n-1}(x_{k,n}) \lambda_{k,n}, \tag{13}$$

wobei die „Christoffelschen Zahlen" $\lambda_{k,n} \geqq 0$ die Ungleichung

$$\lambda_{k,n} \leqq a_1 n^{-1/2} e^{-x_{k,n}^2} \quad \left(|x_{k,n}| < \sqrt{n}\right) \tag{14}$$

mit einer absoluten Konstanten a_1 befriedigen (vgl. G. FREUD [5]).

Indem wir in (13) $\Pi_{2n-1}(x) = P_{n,\nu}(x, \xi) - p_{n,\nu}(x, \xi)$ setzen, erhalten wir unter Beachtung von (14)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [P_{n,\nu}(x, \xi) - p_{n,\nu}(x, \xi)] e^{-x^2}\, dx = \tag{15}$$

$$= \sum_{k=\mu-\eta}^{\mu+\eta+1} (x_{k,n}-\xi)^\nu [\Phi_n(x_{k,n}, \xi) - \varphi_n(x_{k,n}, \xi)] \lambda_{k,n} \leqq$$

$$\leqq (x_{\mu+\eta+1,n} - x_{\mu-\eta,n})^\nu a_1 n^{-1/2} \sum_{k=\mu-\eta}^{\mu+\eta+1} e^{-x_{k,n}^2}.$$

Wir bedienen uns endlich der Ungleichung

$$x_{k+1,n}-x_{k,n}<\frac{a}{\sqrt{n}}\qquad(-\sqrt{n}<x_{k,n}<x_{k+1,n}<\sqrt{n})\tag{16}$$

(vgl. etwa G. FREUD [5]). Für $\mu-\eta\leqq k\leqq\mu+\eta+1$ ist also unter Beachtung von $|\xi|\leqq\frac{1}{2}\sqrt{n}$

$$e^{-x_{k,n}^2}=e^{-(x_{k,n}-\xi)^2}e^{2\xi(\xi-x_{k,n})}e^{-\xi^2}<a_2(\eta)e^{\sqrt{n}\cdot a\frac{2\eta+2}{\sqrt{n}}}e^{-\xi^2}<a_3(\eta)e^{-\xi^2},\tag{17}$$

wo $a_2(\eta)$, $a_3(\eta)$, ... nur von η abhängen. Aus (15), (16) und (17) folgt wegen (9) die Gültigkeit von (7). Es ist aus der Konstruktion selbst klar, daß $P_{n,\nu}(x,\xi)$ und $p_{n,\nu}(x,\xi)$ in jedem offenen Intervall $(x_{k,n},x_{k+1,n})\subset\left[-\frac{1}{2}\sqrt{n},\frac{1}{2}\sqrt{n}\right]$ Polynome von ξ sind, da $\varphi_n(x,\xi)$ und $\Phi_n(x,\xi)$ in einem solchen Intervall von ξ unabhängig sind. Dies zeigt die Gültigkeit des Hilfssatzes für gerade ν.

Fall: ν eine ungerade Zahl. Unter $\bar\varphi_n(x,\xi)$ bzw. $\bar\Phi_n(x,\xi)$ verstehen wir die Polynome höchtens $(2(n-\eta)-1)$-ten Grades (vgl. (9)) mit

$$\bar\varphi_n(x_{1,n},\xi)=\dots=\bar\varphi_n(x_{\mu,n},\xi)=0,\quad\bar\varphi_n(x_{\mu+\eta+1,n},\xi)=\dots=\bar\varphi_n(x_{n,n},\xi)=1,$$

$$\bar\varphi_n'(x_{1,n},\xi)=\dots=\bar\varphi_n'(x_{\mu,n},\xi)=\bar\varphi_n'(x_{\mu+\eta+1,n},\xi)=\dots=\bar\varphi_n'(x_{n,n},\xi)=0;$$

bzw.

$$\bar\Phi_n(x_{1,n},\xi)=\dots=\bar\Phi_n(x_{\mu,n},\xi)=0,\quad\bar\Phi_n(x_{\mu+\eta,n},\xi)=\dots=\bar\Phi_n(x_{n,n},\xi)=1,$$

$$\bar\Phi_n'(x_{1,n},\xi)=\dots=\bar\Phi_n'(x_{\mu-1,n},\xi)=\bar\Phi_n'(x_{\mu+\eta+1,n},\xi)=\dots=\bar\Phi_n'(x_{n,n},\xi)=0,$$

und es sei ferner für ungerade ν

$$p_{n,\nu}(x,\xi)=(x-\xi)^\nu\bar\varphi_n(x,\xi),\quad P_{n,\nu}^*(x,\xi)=(x-\xi)^\nu\bar\Phi_n(x,\xi).$$

Es gilt für $x\in[x_{\mu,n},x_{\mu+\eta,n}]$

$$0\leqq\bar\varphi_n(x,\xi)\leqq1,\quad0\leqq\bar\Phi_n(x,\xi)\leqq1\tag{22}$$

(vgl. G. FREUD [4]) und weiter unter Beachtung von (16)

$$|p_{n,\nu}(x,\xi)|\leqq a_8(\eta)n^{-\nu/2},\quad|P_{n,\nu}^*(x,\xi)|\leqq a_9(\eta)n^{-\nu/2}\qquad(x_{\mu,n}\leqq x\leqq x_{\mu+\eta,n}).\tag{23}$$

Es gilt auch (vgl. G. FREUD [1])

$$\begin{aligned}&p_{n,\nu}(x,\xi)\leqq\Gamma_\nu(x,\xi)\quad(-\infty<x<+\infty),\\&\Gamma_\nu(x,\xi)\leqq P_{n,\nu}^*(x,\xi)\quad(x\notin[x_{\mu,n},x_{\mu+\eta,n}]).\end{aligned}\tag{24}$$

Es seien $l_{k,n}(x) = \dfrac{H_n(x)}{H_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})}$ die Grundpolynome der Lagrangeschen Interpolation über die Knotenpunkte $x_{k,n}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, und wir setzen

$$\Omega_n(x) = \sum_{k=\mu}^{\mu+\eta-1}{}' \, [l_{k,n}(x)+l_{k+1,n}(x)]^2 \geqq 0. \tag{25}$$

Der Grad von $\Omega_n(x)$ ist höchtens gleich $2n-2$ und aus einer Bemerkung von P. ERDŐS—P. TURÁN [6] folgt

$$\Omega_n(x) \geqq 1 \qquad (x_{\mu,n} \leqq x \leqq x_{\mu+\eta,n}). \tag{26}$$

Es sei

$$P_{n,\nu}(x, \xi) = P_n^*(x, \xi) + B_\eta \Omega_n(x) \tag{27}$$

mit

$$B_\eta = 2(x_{\mu+\eta,n} - x_{\mu,n})^\nu \leqq a_{10}(\eta) n^{-\nu/2} \tag{28}$$

(vgl. (16)). Dann ist infolge (5), (24), (23), (27) und (28)

$$\Gamma_\nu(x, \xi) \leqq P_{n,\nu}(x, \xi) \qquad (-\infty < x < +\infty). \tag{29}$$

Aus der Quadraturformel (13) erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [P_{n,\nu}(x, \xi) - p_{n,\nu}(x, \xi)] e^{-x^2} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [P_{n,\nu}^*(x, \xi) - p_{n,\nu}(x, \xi)] e^{-x^2} dx \quad + B_\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_n(x) e^{-x^2} dx \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=\mu+1}^{\mu+\eta}{}' \, [P_{n,\nu}^*(x_{k,n}, \xi) - p_{n,\nu}(x_{k,n}, \xi)] \lambda_{k,n} + 2B_\eta \cdot \sum_{k=\mu}^{\mu+\eta} \lambda_{k,n}$$

und unter Beachtung von (23), (28), (14) und (17) schließen wir auf die Gültigkeit von (7). Die beiden letzten Behauptungen von Hilfssatz 1 zeigt man genau so, wie im Falle von geraden ν.

§ 3. Weitere Hilfssätze

Hilfssatz 2. *Für $x>0$ und $k=0, 1, 2, \ldots$ gilt*

$$I_k(x) = \int_x^{+\infty} (\xi - x)^k e^{-\xi^2} d\xi \leqq \frac{k!}{(2x)^{k+1}} e^{-x^2}. \tag{30}$$

Beweis. Es ist

$$I_0(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi < \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \xi e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2x} e^{-x^2},$$

und für $k \geqq 1$

$$I_k(x) = k \int_x^{+\infty} (\xi - x)^{k-1} I_0(\xi)\, d\xi < k \int_x^{+\infty} (\xi - x)^{k-1} \frac{1}{2\xi} e^{-\xi^2} d\xi < \frac{k}{2x} I_{k-1}(x).$$

Hieraus erhalten wir durch Induktion die Beziehung (30).

Hilfssatz 3. *Aus den Bedingungen* b) *und* c) *für die Klasse* $V(r, s)$ *folgt, daß die Funktionen*

$$F^{(k)}(x) e^{-x^2} x^{r-k} \qquad (k = 0, 1, \dots, r-1) \tag{31}$$

und

$$F^{[r]}(x) e^{-x^2} \tag{32}$$

auf der ganzen reellen Achse beschränkt sind.

Beweis. Aus der Ungleichung

$$|e^{-x^2}[F^{[r]}(x) - F^{[r]}(0)]| \leqq$$

$$\leqq \left| \int_0^x e^{-\xi^2} |dF^{[r]}(\xi)| \right| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} |dF^{[r]}(\xi)| = M_r(F) < +\infty \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

folgt die Beschränktheit des Ausdrucks (32). Man zeigt leicht, daß die k-te Derivierte der Funktion $\alpha(x) = x^{-r} e^{x^2}$ gleich

$$\alpha^{(k)}(x) = x^{-r-k} e^{x^2} \beta_{2k}(x)$$

ist, wo $\beta_{2k}(x)$ ein Polynom genau $2k$-ten Grades mit positivem Leitkoeffizienten bedeutet. Falls wir also $x_0 > 0$ hinreichend groß wählen, gilt

$$0 < \alpha^{(k)}(x) < a_{11}(r) x^{-r+k} e^{x^2} \qquad (x \geqq x_0;\ k = 0, 1, \dots, r), \tag{33}$$

und sogar

$$a_{12}(r) \leqq \alpha^{(r)}(x) e^{-x^2} \leqq a_{11}(r) \quad \text{und} \quad |F^{[r]}(x)| \leqq a_{13}(r) \alpha^{(r)}(x) \quad (x \geqq x_0). \tag{34}$$

Durch $r-k$-maliges Integrieren zwischen den Grenzen x_0 und x folgt hieraus

$$|F^{(k)}(x)| \leqq a_{13}(r) \alpha^{(k)}(x) + \Pi_{r-k}(x) \qquad (x \geqq x_0),$$

wo $\Pi_{r-k}(x)$ ein Polynom höchstens $r-k$-ten Grades ist, und weiter unter Beachtung von (33) gilt:

$$|F^{(k)}(x)| \leqq a_{14}(r) x^{-r+k} e^{x^2} \qquad (x \geqq x_0;\ k = 0, 1, \dots, r-1). \tag{35}$$

Die gleiche Abschätzung für $F(-x)$ anstelle von $F(x)$ ergibt, zusammen mit (35),

$$|F^{(k)}(x)| \leqq a_{14}(r) |x|^{-r+k} e^{x^2} \qquad (|x| \geqq x_0;\ k = 0, 1, \dots, r-1). \tag{36}$$

Durch eine Vergrößerung des Wertes von $a_{14}(r)$ (falls nötig) bleiben diese Ungleichungen auch für $|x| < x_0$ gültig, w. z. b. w.

§ 4. Beweis des Satzes

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $2s>r$. Es reicht auch offenbar Funktionen $F(x)$ zu betrachten, welche für $x<0$ verschwinden, da man eine beliebige Funktion $F(x)\in V(r, s)$ in der Form

$$F(x)=\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{F^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^{\nu}+\frac{F^{[r]}(+0)+F^{[r]}(-0)}{2r!}x^{r}+F_1(x)+F_2(-x)$$

darstellen kann, mit für $x<0$ verschwindenden $F_1, F_2\in V(r,s)$. (Dabei sind in jedem Intervall, dessen Endpunkte von 0 verschieden sind die Schwankungen von $F_1^{[r]}(x)$ und $F_2^{[r]}(x)$ kleiner als die Schwankung von $F^{[r]}(x)$. Demzufolge gilt auch $M_r(F_1)\leqq M_r(F)$, $M_r(F_2)\leqq M_r(F)$.)

Es sei $\omega_n\in\left[\frac{1}{4}\sqrt{n},\ \frac{1}{2}\sqrt{n}\right]$ eine Stetigkeitsstelle von $F^{[r]}(x)$, und wir zerlegen $F(x)$ in

$$F(x)=\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{F^{(\nu)}(\omega_n)}{\nu!}(x-\omega_n)^{\nu}+\frac{F^{[r]}(\omega_n)}{r!}(x-\omega_n)^{r}+F^{*}(x)+F^{**}(x), \tag{37}$$

so daß F^* und F^{**} zu $V(r,s)$ gehören, $F^*(x)$ für $x\geqq\omega_n$ und $F^{**}(x)$ für $x<\omega_n$ verschwindet, und die Schwankungen von $F^{*[r]}(x)$ und $F^{**[r]}(x)$ in keinem Intervall größer als die Schwankung von $F^{[r]}(x)$ sind. Die Approximation von $F^*(x)$ und $F^{**}(x)$ behandeln wir einzeln.

a) *Einseitige Approximation von* $F^*(x)$.

Aus $F^{*(\nu)}(\omega_n)=0$ $(\nu=0, 1, \ldots, r-1)$ folgt

$$F^*(x)=\frac{1}{r!}\int_{\omega_n}^{x}(x-\xi)^r\,dF^{*[r]}(\xi)=\frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_0^{\omega_n}\Gamma_r(-x,-\xi)\,dF^{*[r]}(\xi)= \tag{38}$$

$$=\frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_0^{\omega_n}\Gamma_r(-x,-\xi)\,dF^{*[r]+}(\xi)+\frac{(-1)^{r}}{r!}\int_0^{\omega_n}\Gamma_r(-x,-\xi)\,dF^{*[r]-}(\xi),$$

wo $F^{*[r]+}(\xi)$ bzw. $F^{*[r]-}(\xi)$ die positive, bzw. die negative Schwankung von $F^{*[r]}(\xi)$ in $(0,\xi)$ bedeuten. Wir setzen

$$\Pi_{n,r}^{(1)}(x,\xi)=\begin{cases}P_{n,r}(x,\xi)\\ p_{n,r}(x,\xi)\end{cases},\quad \Pi_{n,r}^{(2)}(x,\xi)=\begin{cases}p_{n,r}(x,\xi) & \text{für gerade } r,\\ P_{n,r}(x,\xi) & \text{für ungerade } r;\end{cases} \tag{39}$$

und

$$p_n^*(x)=\frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_0^{\omega_n}\Pi_{n,r}^{(1)}(-x,-\xi)\,dF^{*[r]+}(\xi)+\frac{(-1)^{r}}{r!}\int_0^{\omega_n}\Pi_{n,r}^{(2)}(-x,-\xi)\,dF^{*[r]-}(\xi),$$

(40)

$$P_n^*(x)=\frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_0^{\omega_n}\Pi_{n,r}^{(2)}(-x,-\xi)\,dF^{*[r]+}(\xi)+\frac{(-1)^{r}}{r!}\int_0^{\omega_n}\Pi_{n,r}^{(1)}(-x,-\xi)\,dF^{*[r]-}(\xi).$$

Infolge des letzten Teiles von Hilfssatz 1 sind alle hier auftretenden Integrale sinnvoll und es sind $p_n^*(x)$ und $P_n^*(x)$ Polynome niedriger als $2n-1$-ten Grades. Aus (38) und (39) bzw. aus (38) und (40) schließen wir mit Hilfe von (6)

$$p_n^*(x) \leqq F^*(x) \leqq P_n^*(x) \qquad (-\infty < x < +\infty). \tag{41}$$

Aus (7), (39), (40) und (2) folgt weiter

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [P_n^*(x) - p_n^*(x)] e^{-x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{r!} \int_0^{\omega_n} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [P_{n,r}(x, -\xi) - p_{n,r}(x, -\xi)] e^{-x^2} dx \right\} [dF^{*[r]+}(\xi) + dF^{*[r]-}(\xi)].$$

Unter Beachtung von (7) und (2) folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [P_n^*(x) - p_n^*(x)] e^{-x^2} dx \leqq \tag{42}$$

$$\leqq \frac{1}{r!} c_r n^{-\frac{r+1}{2}} \int_0^{\omega_n} e^{-\xi^2} |dF^{*[r]}(\xi)| \leqq \frac{c_r}{r!} n^{-\frac{r+1}{2}} M_r(F).$$

(41) und (42) zeigen die Gültigkeit unseres Satzes für den Summanden $F^*(x)$ von $F(x)$.

b) *Einseitige Approximation von* $F^{**}(x)$.

Aus (37) und (1) erhalten wir für $x \geqq \omega_n$

$$|F^{**}(x)| \leqq A + 2^{2s-1} B \omega_n^{2s} + 2^{2s-1} B (x - \omega_n)^{2s} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{|F^{(\nu)}(\omega_n)|}{\nu!} (x - \omega_n)^\nu + \frac{|F^{[r]}(\omega_n)|}{r!} (x - \omega_n)^r.$$

Da $F^{**}(x)$ für $x \leqq \omega_n$ verschwindet, folgt weiter

$$|F^{**}(x)| \leqq \left(A + \frac{B}{2} n^s\right) \Gamma_0(x, \omega_n) + 2^{2s-1} B \cdot \Gamma_{2s}(x, \omega_n) + \tag{43}$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{|F^{(\nu)}(\omega_n)|}{\nu!} \Gamma_\nu(x, \omega_n) + \frac{|F^{[r]}(\omega_n)|}{r!} \Gamma_r(x, \omega_n) \overset{\text{def}}{=} T_r(x, \omega_n) \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

so daß für $n > 2s$ das Polynom höchtens $2n-1$-ten Grades

$$P_n^{**}(x) = \left(A + \frac{B}{2} n^s\right) P_{n,0}(x, \omega_n) + 2^{2s-1} B \cdot P_{n,2s}(x, \omega_n) + \tag{44}$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{|F^{(\nu)}(\omega_n)|}{\nu!} P_{n,\nu}(x, \omega_n) + \frac{|F^{[r]}(\omega_n)|}{r!} P_{n,r}(x, \omega_n)$$

die Beziehung

$$-P_n^{**}(x) \leqq F^{**}(x) \leqq P_n^{**}(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{45}$$

befriedigt. Es gilt dann wegen (43), (44), (6) und (7)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n^{**}(x)e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [P_n^{**}(x)-T_r(x,\omega_n)]e^{-x^2}\,dx + \int_{\omega_n}^{+\infty} T_r(x,\omega_n)e^{-x^2}\,dx \leqq$$

$$\leqq e^{-\omega_n^2}\left[\left(A+\frac{B}{2}n^s\right)n^{-1/2}+2^{2s-1}B\cdot n^{-s-1/2}+\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{|F^{(\nu)}(\omega_n)|}{\nu!}n^{-\frac{\nu+1}{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{|F^{[r]}(\omega_n)|}{r!}n^{-\frac{r+1}{2}}\right]+\left(A+\frac{B}{2}n^s\right)\int_{\omega_n}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx+2^{2s-1}B\cdot\int_{\omega_n}^{+\infty}(x-\omega_n)^{2s}e^{-x^2}\,dx+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{|F^{(\nu)}(\omega_n)|}{\nu!}\int_{\omega_n}^{+\infty}(x-\omega_n)^\nu e^{-x^2}\,dx+\frac{|F^{[r]}(\omega_n)|}{r!}\int_{\omega_n}^{+\infty}(x-\omega_n)^r e^{-x^2}\,dx.$$

Aus den Hilfssätzen 2 und 3 erhalten wir endlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n^{**}(x)e^{-x^2}\,dx = O\left(n^{-\frac{r+1}{2}}\right).$$

Dies zeigt die Gültigkeit des Satzes für den Teil $F^{**}(x)$ von $F(x)$, u. zw. mit der Wahl $p_n^{**}(x) = -P_n^{**}(x)$. Den Satz selbst erhalten wir endlich indem wir

$$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{F^{(\nu)}(\omega_n)}{\nu!}(x-\omega_n)^\nu+\frac{F^{[r]}(\omega_n)}{r!}(x-\omega_n)^r+p_n^*(x)+p_n^{**}(x)$$

und

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{F^{(\nu)}(\omega_n)}{\nu!}(x-\omega_n)^\nu+\frac{F^{[r]}(\omega_n)}{r!}(x-\omega_n)^r+P_n^*(x)+P_n^{**}(x)$$

setzen.

Literatur

[1] G. Freud, Über einseitige Approximation durch Polynome. I, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 12—28.

[2] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials* (New York, 1959).

[3] T. J. Stieltjes, Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques, *Annales de l'École Normale Sup.*, **1** (1884), 409—426.

[4] G. Freud, *Orthogonale Polynome* (Budapest, 1969).

[5] G. Freud, Lagrangesche Interpolation über die Nullstellen der Hermiteschen Orthogonalpolynomen, *Studia Sci. Math. Hung.*, **4** (1969).

[6] P. Erdős—P. Turán, On interpolation. III, *Ann. of Math.*, **41** (1940), 510—553.

(Eingegangen am 30. Januar 1969)