Über den Logarithmus abgeschlossener Operatoren in Banachschen Räumen

Von VOLKER NOLLAU in Dresden (DDR)

Es sei A ein abgeschlossener linearer Operator im Banachraum X, dessen Definitionsbereich $\mathfrak{D}(A)$ in X dicht liegt. Wir sagen, A sei vom Typ (M), wenn die negative reelle Achse (ausschließlich des Nullpunktes) zur Resolventenmenge $\varrho(A)$ gehört, und eine positive Konstante M existiert, so daß die Resolvente $R(-\lambda; A) = (A+\lambda I)^{-1}$ für alle $\lambda > 0$ der Bedingung $\|R(-\lambda; A)\| \leqq M\lambda^{-1}$ genügt.

Wie man leicht sieht, gilt für den Logarithmus $\log(A)$ eines beschränkten und beschränkt invertierbaren Operators A vom Typ (M)

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha}(A^\alpha - I) = \log(A) \quad {}^{1})$$

(Lemma 1). Das Anliegen dieser Mitteilung besteht darin, eine Verallgemeinerung dieser Beziehung für einen Operator A vom Typ (M), dessen Wertebereich $\mathfrak{R}(A)$ dicht in X liegt, anzugeben. Wir zeigen, daß $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha}(A^\alpha x - x)$ auf einer dichten Teilmenge existiert und leiten daraus eine Definition des Logarithmus $\log(A)$ eines Operators vom Typ (M) her. (Abschnitt 2.)

Ausgehend von einer Integraldarstellung des Logarithmus geben wir anschließend einige Zusammenhänge zwischen den Operatoren A^α $(0 \leqq \alpha < \infty)$ und $\log(A)$ an, wie sie aus der Theorie der starkstetigen Halbgruppen beschränkter Operatoren bekannt sind (vgl. z. B. [5]) (Satz 4). Außerdem beweisen wir im Abschnitt 3 einige Analogien zu den als Logarithmengesetze bezeichneten Eigenschaften der Funktion $f(z) = \log z$. Im vierten Abschnitt wird eine Integraldarstellung der Resolvente $(\log(A) - zI)^{-1}$ für $|\mathrm{Im}\, z| > \pi$ angegeben. Schließlich beschäftigen wir uns im Abschnitt 5 mit dem Logarithmus abgeschlossener maximal accretiver Operatoren im Hilbertraum (diese Operatoren sind vom Typ (M) $(M=1)$) und zeigen, daß die

[1]) A^α und $\log(A)$ seien dabei durch den Riesz-Dunfordschen Funktionalkalkül [5] definiert (vgl. z. B. auch [6]).

von uns angegebene Definition sich als Spezialfall des Funktionalkalküls von SZ.-NAGY und FOIAŞ [14] für Kontraktionen erweist.

1. Als Potenz A^α $(0<\alpha<1)$ eines Operators A vom Typ (M) definieren wir wie BALAKRISHNAN in seiner grundlegenden Arbeit [2] die Abschließung des durch das Integral $\frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \eta^{\alpha-1}R(-\eta;A)Ax\,d\eta$ $(x\in\mathfrak{D}(A))$ gegebenen linearen Operators; A^0 sei die identische Abbildung I, $A^1=A$ und $A^\alpha=A^{[\alpha]}A^{\alpha-[\alpha]}$ für $\alpha>1$.[2]) Einige Eigenschaften der Operatoren A^α $(0\leqq\alpha<\infty)$, die in [10] bewiesen werden und im Weiteren benötigt werden, geben wir im Folgenden ohne Beweis an.

Es sei A ein Operator vom Typ (M), dann gilt:

(1.1) $$A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta} \qquad (\alpha,\beta\geqq 0);$$

(1.2) für $0\leqq\alpha\leqq 1$ ist A^α wiederum vom Typ (M) und $(A^\alpha)^\beta=A^{\alpha\beta}$ $(\beta\geqq 0)$;

(1.3) $$\mathfrak{D}(A^\alpha)\supset\mathfrak{D}(A^\beta) \text{ und } \mathfrak{R}(A^\alpha)\supset\mathfrak{R}(A^\beta) \qquad (\alpha\leqq\beta);$$

(1.4) $$A^\alpha x=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \eta^{\alpha-1}AR(-\eta;A)x\,d\eta \qquad (x\in\mathfrak{D}(A^{\alpha'});\ 0<\alpha<\alpha'\leqq 1);$$

(1.5) $$\|A^\alpha R(-\eta;A)\|\leqq K(\alpha)\eta^{\alpha-1}$$
$$\left(K(\alpha)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha(1-\alpha)}M(1+M);\ \eta>0;\ 0<\alpha<1\right);$$

(1.6) $$A^\alpha R(-\eta;A)\supset R(-\eta;A)A^\alpha \qquad (\eta>0;\ \alpha\geqq 0);$$

(1.7) $$\text{für } x\in\bigcup_{\alpha>0}\mathfrak{D}(A^\alpha) \text{ ist } \lim_{\alpha\downarrow 0}A^\alpha x = x;$$

(1.8) $$0\notin\sigma_p(A^\alpha) \qquad (0\leqq\alpha\leqq 1).$$

2. Lemma 1. *Ist A ein beschränkter und beschränkt invertierbarer Operator vom Typ (M), so gilt*

(2.1) $$\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{1}{\alpha}(A^\alpha-I)=\log(A)=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \log z\,R(z;A)\,dz\ ^{3})$$

und

(2.2) $$\log(A)=\int\limits_0^\infty(1+\eta)^{-1}(A-I)(A+\eta I)^{-1}\,d\eta.$$

---

[2]) Unter $[\alpha]$ verstehen wir die größte ganze Zahl, die kleiner als α ist.

[3]) Dabei denkt man die komplexe Ebene längs der negativen reellen Halbachse aufgeschnitten und es wird $\log z=\log|z|+i\arg z$ $(-\pi\leqq\arg z<\pi)$ definiert. C ist eine geschlossene Kontur (vgl. [5]), die das Spektrum $\sigma(A)$ genau einmal umschließt und in $\varrho(A)$ verläuft.

Beweis. Die Gleichung (2. 1) ergibt sich auf Grund der Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration (vgl. [3])

$$\frac{d}{d\alpha}\oint\limits_C z^\alpha R(z;A)\,dz = \oint\limits_C \frac{d}{d\alpha} z^\alpha R(z;A)\,dz = \oint\limits_C z^\alpha \log z\; R(z;A)\,dz,$$

d. h., es gilt

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{1}{\alpha}(A^\alpha - I) = \log(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \log z\; R(z;A)\,dz.$$

Wir wählen nun in (2. 1) als Integrationsweg die Kontur C, die aus den Kurven $Re^{i\varphi}$ $(-\pi<\varphi<\pi)$, $-\eta$ $(R\geqq\eta\geqq\varepsilon)$, $\varepsilon e^{i\varphi}$ $(\pi>\varphi>-\pi)$ und $-\eta(\varepsilon\leqq\eta\leqq R)$ besteht. Dabei seien $\varepsilon>0$ und $R>0$ so gewählt, daß $\sigma(A)$ innerhalb C liegt und C in $\varrho(A)$ verläuft. Wir bemerken ferner, daß auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C (z-1)^{-1}\log z\,dz = \log 1 = 0$$

ist. Es gilt folglich

$$\log(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \log z\big(R(z;A) + (z-1)^{-1} I\big)\,dz.$$

Die Darstellung (2. 2) von $\log(A)$ ergibt sich aus diesem Integral, wenn man den Integrationsweg in der Weise deformiert, daß $\varepsilon\to 0$ und $R\to\infty$ geht.

Definition 1. Es seien A ein Operator vom Typ (M), $\mathfrak{D}(\alpha) = \bigcup_{\alpha'>\alpha}\mathfrak{D}(A^{\alpha'})$ $\mathfrak{R}(\beta) = \bigcup_{\beta'>\beta}\mathfrak{R}(A^{\beta'})$, $\mathfrak{M}(\alpha,\beta) = \mathfrak{D}(\alpha)\cap\mathfrak{R}(\beta)$, $\mathfrak{B}$ die Menge aller $x\in X$, für die $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\frac{1}{\alpha}(A^\alpha x - x)$ existiert und $[\log(A)]x = \lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\frac{1}{\alpha}(A^\alpha x - x)$ $(x\in\mathfrak{B})$.

Satz 1. *Es sei A ein Operator vom Typ (M), dann gilt*

$$\mathfrak{M}(0;0)\subseqq\mathfrak{B} \tag{2. 3}$$

und

$$[\log(A)]x = \int\limits_0^\infty (1+\eta)^{-1}(A-I)(A+\eta I)^{-1}x\,d\eta \qquad (x\in\mathfrak{M}(0;0)). \tag{2. 4}$$

Beweis. Es wird zunächst gezeigt, daß das Integral (2. 2) für alle $x\in\mathfrak{M}(0;0)$ konvergiert, um anschließend zu beweisen, daß $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\frac{1}{\alpha}(A^\alpha x - x)$ auf $\mathfrak{M}(0;0)$ existiert und mit (2. 4) übereinstimmt.

Es sei $x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha'}) \cap \mathfrak{R}(A^{\beta'})$ $(0 < \alpha', \beta' \leqq 1)$. Für das Integral (2. 2) erhält man die folgende Abschätzung

$$\left\| \int_0^\infty (1+\eta)^{-1} (A-I)(A+\eta I)^{-1} x \, d\eta \right\| \leqq (1+2M) \ln 2 \cdot \|x\| +$$

$$+ \int_0^1 \|(A+\eta I)^{-1} x\| \frac{d\eta}{1+\eta} + \int_1^\infty \|A(A+\eta I)^{-1} x\| \frac{d\eta}{1+\eta}.$$

Da $x \in \mathfrak{R}(A^{\beta'})$ ist, existiert ein $y \in \mathfrak{D}(A^{\beta'})$ mit $x = A^{\beta'} y$. Daraus folgt auf Grund von (1. 5) die Ungleichung

$$\|(A+\eta I)^{-1} x\| = \|(A+\eta I)^{-1} A^{\beta'} y\| \leqq K(\beta') \eta^{\beta'-1} \|y\|$$

und somit

$$\int_0^1 (1+\eta)^{-1} \|(A+\eta I)^{-1} x\| \, d\eta \leqq K(\beta') \|y\| \int_0^1 \frac{\eta^{\beta'-1}}{1+\eta} d\eta.$$

Die Konvergenz des Integrales $\int_1^\infty (1+\eta)^{-1} \|A(A+\eta I)^{-1} x\| d\eta$ erhält man mittels (1. 5) aus der Ungleichung

$$\|A(A+\eta I)^{-1} x\| = \|A^{1-\alpha'} (A+\eta I)^{-1} A^{\alpha'} x\| \leqq K(1-\alpha') \eta^{-\alpha'} \|A^{\alpha'} x\|.$$

Für $x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha'}) \cap \mathfrak{R}(A^{\beta'})$ ergibt sich auf Grund von (1. 4) und

$$\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \eta^{\alpha-1} (1+\eta)^{-1} d\eta = 1 \qquad (0 < \alpha < 1)$$

die Beziehung

$$\frac{1}{\alpha}(A^\alpha x - x) - \int_0^\infty \frac{(A-I)}{1+\eta} (A+\eta I)^{-1} x \, d\eta =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\eta^\alpha \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} - 1}{1+\eta} (A-I)(A+\eta I)^{-1} x \, d\eta \qquad (0 < \alpha < \alpha').$$

Wegen $x = A^{\beta'} y \, (y \in \mathfrak{D}(A^{\beta'}))$ und $x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha'})$ erhält man mittels (1. 5) für $0 < \delta \leqq 1$ die Abschätzung

$$\left\| \int_0^\delta \frac{\eta^\alpha \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} - 1}{1+\eta} (A+\eta I)^{-1} A^{\beta'} y \, d\eta \right\| \leqq 2K(\beta') \|y\| \int_0^\delta \eta^{\beta'-1} d\eta$$

und für $1 < R < \infty$

$$\left\| \int_R^\infty \frac{\eta^\alpha \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} - 1}{1+\eta} A(A+\eta I)^{-1} x \, d\eta \right\| \leqq$$

$$\leqq \|A^{\alpha'} x\| \cdot K(1-\alpha') \left\{ \int_R^\infty \eta^{\alpha-\alpha'-1} \, d\eta + \int_R^\infty \eta^{-\alpha'-1} \, d\eta \right\}.$$

Zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ existieren folglich ein $\delta_0 > 0$ und ein $R_0 < \infty$, so daß

$$\text{(2. 5)} \qquad \left\| \left(\int_0^{\delta_0} + \int_{R_0}^\infty \right) \frac{\eta^\alpha \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} - 1}{1+\eta} (A-I)(A+\eta I)^{-1} x \, d\eta \right\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Auf Grund von

$$\left\| \int_{\delta_0}^{R_0} \frac{\eta^\alpha \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} - 1}{1+\eta} (A-I)(A+\eta I)^{-1} x \, d\eta \right\| \leqq$$

$$\leqq \sup_{\delta_0 \leqq \eta \leqq R_0} \left| \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \eta^\alpha - 1 \right| \cdot \int_{\delta_0}^{R_0} \|(A-I)(A+\eta I)^{-1} x\| \frac{d\eta}{1+\eta} \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

für $0 < \alpha \leqq \alpha_0(\varepsilon) < \alpha'$ und (2. 5) ergibt sich die Aussage des Satzes.

Lemma 2. *Die Operatoren* $Z_n = A^{1/n} n(nI+A)^{-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ *sind gleichmäßig durch* $3M(M+1)$ *beschränkt, und es gilt* $\lim\limits_{n \to \infty} Z_n x = x$. *Die Operatoren* Z_n *und* $[\log (A)]$ *sind auf* $\mathfrak{B}$ *vertauschbar.*

Beweis. Für ein Element $x \in X$ gilt $n(A+nI)^{-1} x \in \mathfrak{D}(A)$, so daß sich nach Definition

$$Z_n x = A^{1/n} n(A+nI)^{-1} x = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \int_0^\infty \eta^{\frac{1}{n}-1} R(-\eta; A) A R(-n; A) x \, d\eta$$

und somit

$$\|A^{1/n} n(A+nI)^{-1} x\| \leqq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} M(1+M) \left\{ \int_0^1 \frac{\eta^{\frac{1}{n}-1}}{n} \, d\eta + \int_1^\infty \eta^{\frac{1}{n}-2} \, d\eta \right\} \|x\| \leqq$$

$$\leqq 3M(1+M) \|x\|$$

ergibt.

Es sei nun $x \in \mathfrak{D}(A)$, dann gilt auf Grund der Vertauschbarkeit von $A^{1/n}$ und $n(A+nI)^{-1}$ (vgl. (1. 6)) die Ungleichung

$$\|Z_n x - x\| \leqq \|n(A+nI)^{-1}A^{1/n}x - n(A+nI)^{-1}x\| + \|n(A+nI)^{-1}x - x\| \leqq$$
$$\leqq M\|A^{1/n}x - x\| + \|n(A+nI)^{-1}x - x\|.$$

Wegen der Beziehungen $\lim\limits_{n\to\infty} A^{1/n}x = x$ $(x \in \mathfrak{D}(0))$ (vgl. (1. 7)) und $\lim\limits_{n\to\infty} n(A+nI)^{-1}x = x\,(x \in X)$ erhält man $\lim\limits_{n\to\infty} A^{1/n}n(A+nI)^{-1}x = x$ für $x \in \mathfrak{D}(A)$. Die Behauptung folgt nun aus $\overline{\mathfrak{D}(A)} = X$ und der gleichmäßigen Beschränktheit der Folge (Z_n).

Es sei $x \in \mathfrak{B}$. Entsprechend (1. 6) gilt für hinreichend kleines $h > 0$

$$\|[\log(A)]Z_m x - Z_m[\log(A)]x\| \leqq \left\|[\log(A)]Z_m x - \frac{1}{h}(A^h - I)Z_m x\right\| +$$
$$+ \|Z_m\| \left\|\frac{1}{h}(A^h - I)x - [\log(A)]x\right\|$$

und folglich wegen $Z_m x \in \mathfrak{B}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ die Behauptung.

Satz 2. *Der Operator* $[\log(A)]$ *ist abschließbar.*

Beweis. Die Abschließbarkeit von $[\log(A)]$ ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß aus $\{x_n\} \subset \mathfrak{B}$, $\lim x_n = 0$ und $\lim [\log(A)]x_n = y$ die Aussage $y = 0$ folgt (vgl. [1]). Für eine Folge $\{x_n\}$ mit den genannten Eigenschaften gilt dann einerseits wegen $\|A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}\| \leqq K(\frac{1}{2})$ (vgl. (1. 5))

$$\lim A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}[\log(A)]x_n = A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}y.$$

Andererseits erhält man wegen

$$A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}[\log(A)]x_n = [\log(A)]A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}x_n$$

die Beziehung

$$\|A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}[\log(A)]x_n\| \leqq$$
$$\leqq (1+M)K(\tfrac{1}{2})\left\{\int_0^\infty \frac{d\eta}{(1+\eta)\sqrt{\eta}} + \int_0^1 \frac{d\eta}{1+\eta} + \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta(1+\eta)}\right\}\|x_n\| \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Folglich ist $A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}y = 0$. Wegen (1. 8) ergibt sich $y = 0$, was zu zeigen war.

Definition 2. Die Abschließung von $[\log(A)]$ heißt der Logarithmus des Operators A und wird mit $\log(A)$ bezeichnet.

Satz 3. *Der Logarithmus* $\log(A)$ *ist auf einer in* X *dichten Teilmenge* $\mathfrak{D}(\log(A))$ *definiert. Die Menge* $\mathfrak{M}(0; 0)$ *ist ein Kern von* $\log(A)$, *d.h., zu jedem* $x \in \mathfrak{D}(\log(A))$ *existiert eine Folge* $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}(0; 0)$ *mit* $\lim x_n = x$ *und* $\lim \log(A)x_n = \log(A)x$.

Beweis. Die Beziehung $\overline{\mathfrak{D}(\log(A))} = X$ folgt unmittelbar aus $\mathfrak{M}(0;0) \subseteqq \mathfrak{B} \subseteqq \mathfrak{D}(\log(A))$ und Lemma 2.

Um zu beweisen, daß $\mathfrak{M}(0\,;0)$ ein Kern von $\log(A)$ ist, zeigen wir zunächst $Z_n \log(A)x = \log(A)Z_n x$ für $x \in \mathfrak{D}(\log(A))$ und $n = 1, 2, \ldots$, wobei $Z_n = A^{1/n} n(nI + A)^{-1}$.

Auf $\mathfrak{B}$ sind entsprechend Lemma 2 die Operatoren $\log(A)$ und Z_n vertauschbar. Es sei $y \in \mathfrak{D}(\log(A))$; nach Definition existiert eine Folge $\{y_m\} \subset \mathfrak{B}$ mit $\lim y_m = y$ und $\lim \log(A) y_m = \log(A) y$. Daraus folgt

$$\lim \log(A) Z_n y_m = \lim Z_n \log(A) y_m = Z_n \log(A) y.$$

Aus der Abgeschlossenheit von $\log(A)$ ergibt sich dann $Z_n y \in \mathfrak{D}(\log(A))$ und $Z_n \log(A) y = \log(A) Z_n y$.

Es seien nun $x \in \mathfrak{D}(\log(A))$ und $x_n = Z_n x$ $(Z_n x \in \mathfrak{M}(0;0)$ für alle $n = 1, 2, \ldots)$. Dann gilt $\lim x_n = x$ (vgl. Lemma 2) und $\lim \log(A) x_n = \lim Z_n \log(A) x = \log(A) x$.

3. Lemma 3. *Es sei* $A_s = (A + sI)(sA + I)^{-1}$ $(s > 0)$. *Dann gilt:*

a) *die Operatoren* A_s *sind beschränkte und beschränkt invertierbare Operatoren vom Typ* (M') *mit* $M' = 1 + 2M$,

b) $\lim\limits_{s \downarrow 0} (A_s)^\alpha x = A^\alpha x$ $(x \in \mathfrak{D}(\alpha);\ \alpha \geqq 0)$,

c) $\lim\limits_{s \downarrow 0} \log(A_s) x = \log(A) x$ $(x \in \mathfrak{M}(0;0))$.

Beweis. a) Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Definition von A_s und der Beziehung

$$\|(A_s + \eta I)^{-1}\| = \frac{1}{1 + \eta s} \left\| (sA + I) \left(A + \frac{s + \eta}{1 + \eta s} \right)^{-1} \right\| \leqq$$

$$\leqq (M + 1) \frac{s}{1 + \eta s} + \frac{M}{s + \eta} \leqq \frac{2M + 1}{\eta} \qquad (\eta > 0).$$

b) Es sei $x \in \mathfrak{D}(\alpha)$ $(0 \leqq \alpha < 1)$. Dann gilt für $x \in \mathfrak{D}(\alpha')$ $\quad (\alpha' > \alpha)$

$$\|(A_s)^\alpha x - A^\alpha x\| = \left\| \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int\limits_0^\infty \left(A_s (A_s + \eta I)^{-1} - A(A + \eta I)^{-1}\right) \eta^{\alpha - 1} x \, d\eta \right\| \leqq$$

$$\leqq M^2 s^\alpha \|x\| + (1 + M)^2 \ln(1 + s) \|x\| + (1 + M) s^{\alpha' - \alpha} \frac{K(1 - \alpha')}{\sin \pi(\alpha' - \alpha)} \|A^{\alpha'} x\| \to 0 \qquad (s \to 0)$$

(vgl. (1, 5)).

Für $\alpha = 1$ ergibt sich die Behauptung aus der Ungleichung

$$\|A_s x - Ax\| = \left\| (I - A^2) \left(A + \frac{1}{s} I \right)^{-1} x \right\| \leqq \tag{3.1}$$

$$\leqq Ms \|x\| + K(1 - \varepsilon) s^\varepsilon \|A^{1+\varepsilon} x\| \qquad (x \in \mathfrak{D}(A^{1+\varepsilon}),\ \varepsilon > 0).$$

Auf Grund der Beziehung

$$\lim_{s\downarrow 0}(A_s)^{n+\alpha}x = \lim_{s\downarrow 0}(A_s)^n(A_s)^\alpha x = A^{n+\alpha}x \qquad (x\in\mathfrak{D}(n+\alpha))$$

$(0\leqq\alpha\leqq 1;\ n=1,2,\dots)$, die sich unmittelbar aus (3. 1) ergibt, fogt dann die Aussage für $\alpha>1$.

c) Es sei $x\in\mathfrak{D}(A^\alpha)\cap\mathfrak{R}(A^\beta)$ $(0<\alpha,\ \beta\leqq 1)$. Nach Voraussetzung existiert also ein $y\in\mathfrak{D}(A^\beta)$ mit $x=A^\beta y$. Mit Hilfe von (1. 5) und (2. 4) ergibt sich

$$\|\log(A_s)x-\log(A)x\| = s\left\|\int_0^\infty \frac{A^2-I}{1+\eta s}\left(A+\frac{s+\eta}{1+\eta s}\right)^{-1}(A+\eta I)^{-1}x\,d\eta\right\| \leqq$$

$$\leqq \frac{(M+1)\pi K(1-\alpha)}{\sin\pi\alpha}\|A^\alpha x\|s^\alpha+\frac{M\pi K(\beta)}{\sin\pi\beta}\|A^\beta y\|s^\beta\to 0 \qquad (s\to 0).$$

Satz 4. *Es sei A ein Operator vom Typ (M). Dann gilt*

a) $\displaystyle\lim_{\beta\downarrow\alpha}\frac{1}{\beta-\alpha}(A^\beta-A^\alpha)x = \log(A)A^\alpha x \qquad (x\in\mathfrak{D}(\alpha);\ \alpha\geqq 0),$

b) $\log(A)A^\alpha x = A^\alpha\log(A)x \qquad (x\in\mathfrak{M}(\alpha;0);\ \alpha\geqq 0),$

c) $\displaystyle\lim_{s\downarrow 0}e^{\alpha\log(A_s)}x = A^\alpha x \qquad (x\in\mathfrak{D}(\alpha);\ \alpha\geqq 0).$

Beweis. a) Es sei $x\in\mathfrak{D}(A^{\alpha'})$ $(\alpha'>\alpha)$. Auf Grund des Potenzgesetzes (1. 1) ist

$$\lim_{\beta\downarrow\alpha}\frac{1}{\beta-\alpha}(A^\beta x-A^\alpha x) = \lim_{\beta\downarrow\alpha}\frac{1}{\beta-\alpha}(A^{\beta-\alpha}-I)A^\alpha x = \log(A)A^\alpha x.$$

b) Es sei $x\in\mathfrak{M}(\alpha;0)$ für $0\leqq\alpha\leqq 1$. Dann gilt

$$A^\alpha\frac{1}{h}(A^h-I)x = \frac{1}{h}(A^h-I)A^\alpha x\to\log(A)A^\alpha x \qquad (h\to 0).$$

Aus der Abgeschlossenheit von A^α ergibt sich dann $\log(A)x\in\mathfrak{D}(A^\alpha)$ und $A^\alpha\log(A)x=$ $=\log(A)A^\alpha x$.

Für $\alpha>1$ erhält man die Aussage unmittelbar auf Grund der Definition von A^α und der vorangegangenen Überlegung.

c) Die Behauptung ergibt sich aus der Multiplikativität des Riesz—Dunfordschen Funktionalkalküls (vgl. [5] und Lemma 3b).

Satz 5. *Es sei* $\log(A)$ *der Logarithmus eines Operators A vom Typ (M). Dann gilt:*

a) $\log(cA)=\log(A)+(\log c)I$ $(c>0)$,[4]) *und* b) $\log(A^\sigma)=\sigma\log(A)$ $(0\leqq\sigma\leqq 1)$.

---

[4]) Eine vollständige Analogie zu der Beziehung $\log ab = \log a+\log b$ ist für zwei Operatoren A und B vom Typ (M) nicht zu erwarten, da der Operator AB i.a. — selbst unter der Voraussetzung der Vertauschbarkeit von A und B — nicht vom Typ (M) ist.

Beweis a) Der Operator cA ist für $c>0$ vom Typ (M) und es gilt $c^\alpha A^\alpha=(cA)^\alpha$. Für $x\in\mathfrak{M}(0;0)$ ist

$$\log(cA)x = \lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{(cA)^\alpha-I}{\alpha}x = \lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{c^\alpha-1}{\alpha}A^\alpha x+\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{A^\alpha-I}{\alpha}x =$$
$$= (\log c)x+\log(A)x.$$

Folglich gilt auf Grund der Abgeschlossenheit von $\log(cA)$ und $\overline{\mathfrak{M}(0;0)}=X$ die Beziehung $\log(cA)x=(\log c)x+\log(A)x$ $\big(x\in\mathfrak{D}(\log(A))\big)$.
Ebenso ergibt sich $\log(cA)x=(\log c)x+\log(A)x$ für $x\in\mathfrak{D}\big(\log(cA)\big)$.

b) Für $x\in\mathfrak{M}(0;0)$ ist wegen $(A^\alpha)^\beta=A^{\alpha\beta}$ $(0\leqq\alpha\leqq1;\ \beta\geqq0)$ (vgl. (1.2))

$$\log(A^\sigma)x = \sigma\lim_{\sigma\alpha\downarrow 0}\frac{(A^{\sigma\alpha}x-x)}{\sigma\alpha} = \sigma\log(A)x.$$

Wegen der Abgeschlossenheit von $\log(A^\sigma)$ und $\overline{\mathfrak{M}(0;0)}=X$ — denn A^σ ist ebenfalls vom Typ (M) — ergibt sich dann $\log(A^\sigma)x=\sigma\log(A)x$ für $x\in\mathfrak{D}\big(\log(A)\big)$. Aus einer entsprechenden Überlegung für $x\in\mathfrak{D}\big(\log(A^\alpha)\big)$ folgt dann insgesamt die Behauptung.

Satz 6. *Für $\xi>0$ und $x\in\mathfrak{D}(0)$ ist* $\dfrac{d}{d\xi}\log(A+\xi I)x = R(-\xi;A)x.$

Beweis. Mit Hilfe der Abschätzung

$$\|(A+\xi I)^\alpha-A^\alpha x\| \leqq \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left\{\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\right\}M^2\xi^\alpha\|x\| \qquad \big(x\in\mathfrak{D}(A);\ 0<\alpha<1\big)$$

(vgl. [9]) ergibt sich unmittelbar die Beziehung $\mathfrak{D}(A^\alpha)=\mathfrak{D}\big((A+\xi I)^\alpha\big)$ und somit $\mathfrak{D}(0)=\bigcup_{\alpha>0}\mathfrak{D}\big((A+\xi I)^\alpha\big)$ für alle $\xi>0$. Wegen $\mathfrak{R}(A+\xi I)=X$ ist $\mathfrak{R}(0)=X$, und es gilt

$$\log(A+\xi I)x = \int_0^\infty \frac{A+(\xi-1)I}{1+\eta}\big(A+(\xi+\eta)I\big)^{-1}x\,d\eta$$

für $x\in\mathfrak{D}(0)$. Durch Differentiation erhält man dann die Behauptung.

4. Lemma 4. *Es sei A ein beschränkter und beschränkt invertierbarer Operator vom Typ (M). Dann gilt*

a) $\sigma\big(\log(A)\big)\subset\{z:|\mathrm{Im}\,z|\leqq\pi\}$,

b) $$\big(\log(A)-zI\big)^{-1} = \int_0^\infty\frac{R(-\eta;A)}{(\log\eta-z)^2+\pi^2}\,d\eta \qquad (|\mathrm{Im}\,z|>\pi).$$

Beweis. Die Aussage a) ergibt sich aus dem Spektralabbildungssatz [5], da $\log z$ (vgl. [3]) holomorph auf $\sigma(A)$ ist.

b) Entsprechend dem Riesz—Dunfordschen Funktionalkalkül ist

$$(\log(A)-zI)^{-1}=-\frac{1}{2\pi i}\oint_C(\log\zeta-z)^{-1}R(\zeta;A)\,d\zeta.$$

Wählt man den Integrationsweg wie im Beweis zum Lemma 1, so erhält man

$$(\log(A)-zI)^{-1}=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty(\log\eta+i\pi-z)^{-1}R(-\eta:A)\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty(\log\eta-i\pi-z)^{-1}R(-\eta;A)\,d\eta=\int_0^\infty\frac{R(-\eta;A)}{(\log\eta-z)^2+\pi^2}\,d\eta.$$

Satz 7. *Es sei A ein Operator vom Typ* (M); *dann gilt*

(4.1) a) $\sigma(\log(A))\subset\{z:|\operatorname{Im}z|\leqq\pi\}$,

(4.2) b) $(\log(A)-zI)^{-1}=\int_0^\infty\frac{R(-\eta;A)}{(\log\eta-z)^2+\pi^2}\,d\eta\qquad(|\operatorname{Im}z|>\pi)$.

Beweis. I. Wir überlegen uns zunächst, daß der lineare Operator

$$S(z)=\int_0^\infty\frac{R(-\eta;A)}{(\log\eta-z)^2+\pi^2}\,d\eta\qquad(|\operatorname{Im}z|>\pi)$$

beschränkt ist.

Es sei $z=\alpha+i\beta$ $(|\beta|>\pi)$; dann gilt

$$(4.3)\quad\left(\int_0^\varepsilon+\int_R^\infty\right)\left(\frac{\|R(-\eta;A)\|}{|(\log\eta-z)^2+\pi^2|}\,d\eta\right)\leqq\left(\int_0^\varepsilon+\int_R^\infty\right)\frac{M\,d\eta}{\eta\{(\log\eta-\alpha)^2-\beta^2+\pi^2\}}\to0$$

$(\varepsilon\to0,\ R\to\infty)$, womit die Aussage bewiesen ist.

II. Es sei $A_s=(A+sI)(sA+I)^{-1}$ $(s>0)$. Wir zeigen, daß $R(z;\log(A_s))$ für $s\to0$ in der gleichmäßigen Operatorentopologie gegen $S(z)$ konvergiert.

Diese Aussage ergibt sich wie folgt. Es ist

$$\|S(z)-R(z;\log(A_s))\| =$$

$$= \left\|\int_0^\infty \frac{s}{\{(\log\eta-z)^2+\pi^2\}(\eta s+1)}(I-A^2)(A+\eta I)^{-1}\left(A+\frac{\eta+s}{\eta s+1}I\right)^{-1}d\eta\right\|.$$

Für beliebige Werte ε, R mit $0<\varepsilon<R<\infty$ gilt

$$\int_\varepsilon^R \left\|\frac{s(I-A^2)(A+\eta I)^{-1}\left(A+\frac{\eta+s}{\eta s+1}I\right)^{-1}}{\{(\log\eta-z)^2+\pi^2\}(\eta s+1)}d\eta\right\| \leqq$$

$$\leqq \int_\varepsilon^R \frac{s}{|(\log\eta-z)^2+\pi^2|}\left(\frac{M^2}{\eta^2}+(M+1)^2\right)d\eta \to 0 \qquad (s\to 0).$$

Zusammen mit (4. 3) erhält man damit die Behauptung.

III. Wir beweisen nun, daß $S(z)$ die Linksinverse von $(\log(A)-zI)$ ist.

Für $x\in\mathfrak{M}(0;0)$ gilt

$$\|S(z)(\log(A)-zI)x-x\| \leqq \|S(z)\|\,\|\log(A)x-\log(A_s)x\| +$$

$$+\|S(z)-R(z;\log(A_s))\|\,\|\log(A_s)x-zx\| \to 0$$

für $s\to 0$ auf Grund von Lemma 3c) und der in II bewiesenen Aussage. Aus der Stetigkeit von $S(z)$ und der Tatsache, daß $\mathfrak{M}(0;0)$ ein Kern von $\log(A)$ ist, folgt dann

$$S(z)(\log(A)-zI)x = x \quad (x\in\mathfrak{D}(\log(A))).$$

IV. Es bleibt zu zeigen, daß der Operator $S(z)$ auch die Rechtsinverse von $(\log(A)-zI)$ ist.

Der Operator $S(z)$ stellt sich nach Definition als der gleichmäßige Limes von Operatoren der Form $S_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k R(-\eta_k; A)$ (α_k — komplexe Zahlen; $\eta_k>0$; $k=1, 2, \ldots, n$) dar. Wegen $S_n\mathfrak{M}(0;0)\subset\mathfrak{M}(0;0)$ gilt $\log(A)S_n x=S_n\log(A)x$ für $x\in\mathfrak{M}(0;0)$. Die Folge $\log(A)S_n x$ $(x\in\mathfrak{M}(0;0))$ konvergiert für $n\to\infty$ also gegen $S(z)\log(A)x$. Auf Grund der Abgeschlossenheit von $\log(A)$ folgt dann $S(z)x\in\mathfrak{D}(\log(A))$ und $\log(A)S(z)x=S(z)\log(A)x$, d.h., auf $\mathfrak{M}(0;0)$ gilt entsprechend III:

$$(\log(A)-zI)S(z) = S(z)(\log(A)-zI) = I.$$

Aus der Abgeschlossenheit von $\log(A)$ und $\overline{\mathfrak{M}(0;0)}=X$ folgt dann $(\log(A)-zI)\cdot S(z)=I$, es ist also $S(z) = (\log(A)-zI)^{-1}$, was zu zeigen war.

5. Ein linearer abgeschlossener Operator A in einem Hilbertraum X heißt maximal accretiv, wenn $\operatorname{Re}(Ax, x) \geqq 0$ $(x \in \mathfrak{D}(A))$ und $(A+I)\mathfrak{D}(A) = X$ gilt (vgl. [14]). Die abgeschlossenen maximal accretiven Operatoren sind folglich genau die Operatoren vom Typ (M) mit $M=1$.

Bekanntlich (vgl. [4], [8]) besitzt die Resolvente $R(z; A)$ $(\operatorname{Re} z < 0)$ eines abgeschlossenen maximal accretiven Operators eine verallgemeinerte Spektraldarstellung der Form

$$R(z; A)x = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{F(dt)x}{t-z} \qquad (\operatorname{Re} z < 0;\ x \in X), \tag{5.1}$$

wobei $F(i\tau)$ $(-\infty < \tau < \infty)$ eine verallgemeinerte Spektralschar ist, d.h. eine linksstetige, nichtabnehmende Schar von selbstadjungierten Operatoren, mit $F(i\tau) \to O$ für $\tau \to -\infty$ und $F(i\tau) \to I$ für $\tau \to +\infty$. Mit Hilfe von (5. 1), (2. 4) und (4. 2) erhält man den

Satz 8. *Es sei A ein abgeschlossener maximal accretiver Operator mit* $0 \notin \sigma_p(A)$. *Dann gilt*

$$\log(A)x = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \log t F(dt)x \qquad (x \in \mathfrak{M}(0; 0))$$

und

$$(\log(A) - zI)^{-1}x = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{F(dt)x}{\log t - z} \qquad (x \in X;\ |\operatorname{Im} z| > \pi).$$ [5])

Abschließend wollen wir zeigen, daß für einen maximal accretiven Operator A in einem Hilbertraum X mit $0 \notin \sigma_p(A)$, d.h., $\overline{\mathfrak{R}(A)} = X$ [7], der Logarithmus von A als ein Spezialfall des von Sz.-Nagy und Foiaş [13] entwickelten Funktionalkalküls für Kontraktionen definiert werden kann und mit dem oben definierten Operator $\log(A)$ überstimmt. Wir beziehen uns dabei weitgehend auf die Bezeichnungsweise von Sz.-Nagy und Foiaş [13] sowie auf die dort formulierten Aussagen.

Bekanntlich besteht zwischen einer Kontraktion T mit $\overline{\mathfrak{R}(T-I)} = X$ und einem abgeschlossenen maximal accretiven Operator A mittels der Cayleytransformation

$$T = (A-I)(A+I)^{-1} \quad \text{und} \quad A = (I+T)(I+T)^{-1} \tag{5.2}$$

ein eineindeutiger Zusammenhang. Um für A mit Hilfe eines Funktionalkalküls für Kontraktionen einen Logarithmus definieren zu können, geht man in der Weise vor, daß man versucht, der Kontraktion T einen Operator $\zeta(T)$ zuzuordnen, wobei $\zeta(z) = \log \varphi(z)$ mit $\varphi(z) = (1+z)(1-z)^{-1}$ ist.

[5]) Zur Definition von $\log t$ vgl. [3]).

Für einen abgeschlossenen maximal accretiven Operator mit der Eigenschaft $0 \notin \sigma_p(A)$ gilt auf Grund von (5. 2) $\{-1, 1\} \cap \sigma_p(T) = \emptyset$. Folglich gehören die Werte -1 und $+1$ nicht zum Punktspektrum der minimalen unitären Dilatation U_T von T [11], d.h., das Spektralmaß E_T (vgl. [12]) verschwindet auf $\{-1, 1\}$. Wir betrachten nun die Funktion $\zeta(z) = \log \frac{1+z}{1-z} = \frac{u(z)}{v(z)}$ mit $u(z) = (1+z)(1-z) \cdot \log \frac{1+z}{1-z}$ und $v(z) = (1+z)(1-z)$. Die Funktion $u(z)$ ist beschränkt und holomorph in $D = \{z;\ |z| < 1\}$ und wegen $E_T(\{-1, 1\}) = 0$ gehört $u(z)$ zur Klasse H_T im Sinne von Sz.-Nagy und Foiaş [13]. Die Funktion $v(z)$ gehört zu der an gleicher Stelle definierten Funktionenklasse E_T der in $D = \{z;\ |z| < 1\}$ beschränkten äußeren Funktionen, für die $E_T(v^{-1}(0)) = 0$ gilt. Die Verfasser beweisen in Theorem 6 [13], daß dann der Funktion $\zeta(z) = u(z)v(z)^{-1} = \log \frac{1+z}{1-z}$ ein linearer abgeschlossener Operator $\zeta(T)$ mit in X dichtem Definitionsbereich $\mathfrak{D}(\zeta(T))$ zugeordnet werden kann.

Satz 9. *Es sei A ein abgeschlossener maximal accretiver Operator mit $0 \notin \sigma_p(A)$. Dann gilt* $\log(A) = \zeta(T)$.

Beweis. Es sei $0 < r < 1$. Dann sind die Operatoren $A_r = (I + rT)(I - rT)^{-1}$ beschränkt und beschränkt invertierbar. Entsprechend (2. 1) gilt also

$$\log(A_r) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \log z R(z; A_r)\, dz.$$

Auf Grund von Theorem 6 (VII) [13] (vgl. auch [11]) ergibt sich, daß der Operator $\zeta_r(T)$, der der Funktion $\zeta_r(z) = \zeta(rz) = \log \frac{1+rz}{1-rz}$ entsprechend dem Funktionalkalkül von Sz.-Nagy und Foiaş zugeordnet ist, in der Form $\zeta_r(T) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \log z \cdot R(z; A_r)dz$ darstellbar ist. Daraus ergibt sich $\zeta_r(T) = \log(A_r)$ $(0 < r < 1)$.

In Theorem 8 der genannten Arbeit [13] beweisen die Verfasser, daß alle $x \in X$, die der Bedingung $\sup_{0<r<1} \|\zeta_r(T)x\| < \infty$ genügen, zum Definitionsbereich $\mathfrak{D}(\zeta(T))$ gehören. Für diese $x \in \mathfrak{D}(\zeta(T))$ und $y \in X$ ist ferner $\lim_{r \uparrow 1} (\log(A_r)x, y) = \lim_{r \uparrow 1} (\zeta_r(T)x, y) = (\zeta(T)x, y)$.

Mit Hilfe einer einfachen Rechnung erhält man für $s = \frac{1-r}{1+r}$ $(0 < r < 1)$ die Beziehung $A_r = (A + sI)(sA + I)^{-1}$ und auf Grund von Lemma 3c)

$$\lim_{r \uparrow 1} \log(A_r)x = \log(A)x \qquad (x \in \mathfrak{M}(0; 0)).$$

Folglich gilt für $x \in \mathfrak{M}(0;0)$

$$\sup_{0<r<1} \|\zeta_r(T)x\| = \sup_{0<r<1} \|\log(A_r)x\| < \infty.$$

Die Operatoren $\zeta(T)$ und $\log(A)$ sind also auf $\mathfrak{M}(0;0)$ identisch. Auf Grund der Abgeschlossenheit der Operatoren $\zeta(T)$ und $\log(A)$ ergibt sich, — da $\mathfrak{K}(0;0)$ ein Kern von $\log(A)$ ist — die Behauptung $\zeta(T) \supset \log(A)$. Aus der in Abschnitt 4 angegebenen Integraldarstellung für $(\log(A) - zI)^{-1}$ ($|\mathrm{Im}\, z| > \pi$) erhält man mit Theorem 6 [13] die Behauptung.

Literaturverzeichnis

[1] N. I. Achieser und I. M. Glasmann, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum* (Berlin, 1960).

[2] A. V. Balakrishnan, Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them, *Pac. J. Math.*, **10** (1960), 419—437.

[3] H. Behnke und F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (Berlin, 1955).

[4] C. L. Dolph, Positive real resolvents and linear positive Hilbert systems, *Ann. Acad. Sci. Fennicae* (ser. A.), **336/9** (1963), 3—39.

[5] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear operators*. I (New York, 1958).

[6] G. L. Krabbe, On the logarithm of a uniform bounded operator, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 155—166.

[7] H. Langer, Ein Zerspaltungssatz für Operatoren im Hilbertraum, *Acta Math. Hung.*, **12** (1961), 441—445.

[8] H. Langer und V. Nollau, Einige Bemerkungen über dissipative Operatoren im Hilbertraum, *Wiss. Zeitschr. TU Dresden*, **15** (1966), 669—673.

[9] W. I. Mazajeff und J. A. Palant, Über die Potenzen eines beschränkten dissipativen Operators, *Ukr. Matem. Žurnal*, **14** (1962), 329—337. (russ.)

[10] V. Nollau, Über Potenzen von linearen Operatoren in Banachschen Räumen, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 107—121.

[11] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 26—45.

[12] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 251—259.

[13] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI. Calcul fonctionnel, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 130—167

[14] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Budapest, 1967).

(Eingegangen am 14. Mai 1968)