# Ableitungen von trigonometrischen Approximationsprozessen

Von P. L. BUTZER und S. PAWELKE in Aachen (B. R. Deutschland)

## 1. Einleitung

Das Problem dieser Arbeit ist der Versuch einer Umkehrung eines Satzes von ZAMANSKY [15], S. 26. Es werden hier für spezielle trigonometrische Polynome Aussagen von der Art dieses Satzes und ihre Umkehrung bewiesen. Beide Fälle werden für Folgen von Operatoren untersucht, die den Raum $C_{2\pi}$ bzw. $L^p_{2\pi}$ $(1 \leqq p < \infty)$ in den Raum der trigonometrischen Polynome höchstens $n$-ter Ordnung abbilden.

Der Satz von ZAMANSKY [15] lautet: *Sei $g$ eine stetige, $2\pi$-periodische Funktion und $t_n$ ein trigonometrisches Polynom von der Ordnung $n$. Gilt*

$$(1.1) \qquad \sup_x |t_n(x) - g(x)| \equiv \|t_n - g\| = O\left(\frac{\lambda(n)}{n^{r-1}}\right) \quad (n \to \infty),$$

*wobei $\varphi(u)$ eine stetige, positive, nicht wachsende Funktion in $u$ ist, dann gilt für die $r$-te Ableitung $t_n^{(r)}$ von $t_n$ die Abschätzung*

$$(1.2) \qquad \|t_n^{(r)}\| \leqq A + B\,n\,\lambda(n) + C \int_1^n \lambda(u)\,du,$$

*worin $A$, $B$ und $C$ Konstanten sind.*

Ersetzt man die Bedingung (1. 1) durch

$$(1.3) \qquad \|t_n - g\| = O\left(\omega_r\left(\frac{1}{n}; g\right)\right) \quad (n \to \infty),$$

dann folgt daraus

$$(1.4) \qquad \|t_n^{(r)}\| = O\left(n^r\,\omega_r\left(\frac{1}{n}; g\right)\right) \quad (n \to \infty),$$

wie STEČKIN [10], S. 230, und im Falle $r = 1$ auch ZAMANSKY [15], S. 29, gezeigt haben. Der $r$-te Stetigkeitsmodul $\omega_r(\delta; g)$ ist definiert durch

$$\omega_r(\delta; g) = \max_{h \leqq \delta} \left\| \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x+kh) \right\|.$$

Setzt man speziell

$$(1.5)\qquad \omega_r\left(\frac{1}{n}; g\right) = O(n^{-\alpha}),^{1)}$$

dann folgt für $\alpha < r$ aus (1. 3) die Aussage $\|t_n^{(r)}\| = O(n^{r-\alpha})$ $(n \to \infty)$. Da sich (nach dem Satz von S. BERNSTEIN) aus der Voraussetzung (1. 3), d. h. $\|t_n - g\| = O(n^{-\alpha})$ schon (1. 5) für $0 < \alpha < r$ ergibt, ist dies keine zusätzliche Bedingung an die Funktion $g$.

Für holomorphe Halbgruppen von Operatoren der Klasse $(C_0)$ wurde ein Analogon dieses Satzes und auch die Umkehrung von BERENS [3] in seiner Dissertation bewiesen. Die Ableitung wird dort durch den infinitesimalen Erzeuger der Halbgruppe ersetzt.

Wir werden im nächsten Abschnitt der vorliegenden Arbeit zeigen, daß im allgemeinen die Aussage von ZAMANSKY nicht die bestmögliche ist, d. h. daß der Satz im allgemeinen nicht umkehrbar ist. Ist $\{t_n(x)\}$ eine Folge trigonometrischer Polynome, für die gilt $\|t_n^{(r)}\| = O(n^{r-\alpha})$ $(0 < \alpha \leqq r)$, dann stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen an $\{t_n(x)\}$ eine Funktion $g$ aus $C_{2\pi}$ existiert, für die gilt $\|t_n - g\| = O(n^{-\alpha})$. Dieses Problem wird hier u. a. für spezielle trigonometrische Polynome in den Räumen $C_{2\pi}$ und $L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$ und im Raume $L_{2\pi}^2$ auch für die Polynome bester Approximation gelöst. Die zusätzlichen Bedingungen an die Polynome werden allgemein formuliert (Satz 2, Abschnitt 2) und dann in speziellen Beispielen verifiziert. Es wird ein allgemeiner Satz bewiesen, der zwar von elementarem Charakter ist, jedoch interessante Anwendungen auf die Teilsummen der Fourierreihe, ihre Fejérschen Mittel und die typischen Mittel besitzt und neue Ergebnisse liefert. Von besonderem Interesse erscheint Satz 6.

Zunächst noch einige Bezeichnungen. Unter $C_{2\pi}$, $L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$, $L_{2\pi}^\infty$ bzw. $BV_{2\pi}$ verstehen wir die Menge der $2\pi$-periodischen Funktionen, die stetig, bzw. zur $p$-ten Potenz integrierbar, bzw. meßbar und wesentlich beschränkt, bzw. von beschränkter Variation sind, wobei die Norm $\|f\|$ einer Funktion $f$ in diesen Räumen in der üblichen Weise definiert ist. Mit $t_n^*(f; x) = (t_n^* f)(x)$ bezeichnen wir die Polynome bester Approximation der Funktion $f$ in einem der Räume $C_{2\pi}$ oder $L_{2\pi}^p$. Lip* $\alpha$ ist die Klasse der Funktionen $f$ aus $C_{2\pi}$, die die Bedingung $\max_x |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqq M|h|^\alpha$ $(0 < \alpha \leqq 2)$ erfüllen; Lip* $(\alpha, p)$ ist die Menge von Funktionen aus $L_{2\pi}^p$, für die

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|^p \, dx \right\}^{1/p} \leqq M|h|^\alpha$$

gilt.*)

1) CIVIN [7], S. 794, hat diese Spezialisierung der Behauptung für die Approximation in $L_{2\pi}^p$-Räumen für $1 < p < \infty$ und $r = 1$ bewiesen. Der Satz ist auch in der allgemeinen Formulierung (mit (1.1) und (1.2)) für die Räume $L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$ gültig. Der Beweis verläuft im wesentlichen wie im stetigen Fall.

*) Diese Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsvorhabens Bu 166/4 der DFG.

## 2. Allgemeiner Satz

Zunächst wollen wir zeigen, daß der Satz von ZAMANSKY im allgemeinen nicht die bestmögliche Abschätzung für die Ableitung liefert. Als Beispiel benutzen wir das singuläre Integral von DE LA VALLÉE POUSSIN, welches ein trigonometrisches Polynom von der Ordnung $n$ ist und die Gestalt

$$(V_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(n!)^2}{(n-|k|)!\,(n+|k|)!} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

besitzt, wobei $\hat{f}(k)$ die komplexen Fourierkoeffizienten von $f$ sind. Hier gilt die folgende Aussage.

Satz 1. *Ist $X$ einer der Räume $C_{2\pi}$ bzw. $L^p_{2\pi}$, dann sind für die trigonometrischen Polynome von de la Vallée Poussin die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) $\|V_n f - f\| = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty)$;

b) $\|V_n'' f\| = O(1) \qquad (n \to \infty)$. [2])

Der Beweis folgt mit Ergebnissen von BUTZER [4], S. 304. und 306, und dem Saturationssatz für $V_n f$; siehe [12], S. 81. Mit dem Satz von ZAMANSKY gewinnt man aus a) nur $\|V_n'' f\| = O(n)$. Wir haben aus Satz 1 außerdem noch die Umkehrung.

Ist $X$ ein Banachraum und $\{P_n\}$, $\{T_n\}$ und $\{U_n\}$ sind Folgen von Operatoren, die den Raum $X$ in den Raum der trigonometrischen Polynome höchstens $n$-ter Ordnung abbilden, dann bewiesen wir die folgende Aussage.

Satz 2. a) *Sei der Operator $U_n^{\langle r \rangle}$ definiert durch*

$$U_n^{\langle r \rangle} f = [\varphi(n)]^{-1} [P_n f - P_{n-1} f] \qquad (r > 0; f \in X), \tag{2.1}$$

*wobei $\{\varphi(n)\}$ eine Folge von Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} n^{r+1} |\varphi(n)| = C_1 > 0$ ist, dann folgt aus der Bedingung*

$$\|U_n^{\langle r \rangle} f\| = O(n^{r-\alpha}) \qquad (0 < \alpha \leqq r), \tag{2.2}$$

*daß ein Element $g \in X$ existiert, welches von $P_n f$ mit der Ordnung $O(n^{-\alpha})$ approximiert wird, d.h. es gilt*

$$\|P_n f - g\| = O(n^{-\alpha}) \qquad (n \to \infty). \tag{2.3}$$

---

[2]) Der Strich bedeutet die Ableitung nach $x$. Die Äquivalenz der Aussagen a) und b) von Satz 1 gilt auch in der allgemeineren Gestalt a′) und b′) für $0 < \alpha \leqq 1$:

a′) $\|V_n f - f\| = O(n^{-\alpha})$; b′) $\|V_n'' f\| = O(n^{1-\alpha}) \qquad (n \to \infty)$.

Der Fall $0 < \alpha < 1$ ist noch zu beweisen. Aus a′) folgt b′) ähnlich wie im Beweis des Satzes von ZAMANSKY [15], S.26/27, wenn man die dort benutzte Bernsteinsche Ungleichung durch die Abschätzung $\|V_n'' f\| \leqq n\|f\|$ für alle $f$ aus $X$ ersetzt. Man vergleiche dazu auch den Beweis von Satz 3.3 in [3], S.18/19. Aus b′) folgt a′) mit Satz 2a). Die Identität $V_n'' \doteq -n^2 [V_n f - V_{n-1}]$ (Beweis durch Koeffizientenvergleich) entspricht der Definition (2.1) mit $P_n = V_n$, $\varphi(n) = -n^{-2}$, $r = 1$ und $U_n^{\langle r \rangle} = V_n''$. Mit dem Zamanskyschen Satz folgt aus a′) nur $\|V_n'' f\| = O(n^{2-\alpha})$ $(n \to \infty)$.

b) *Ist der Operator* $T_n f$ *darstellbar in der Form*

(2. 4) $$T_n f = P_n f + [\psi(n)/\varphi(n)][P_n f - P_{n-1} f] \qquad (f \in X),$$

$\varphi(n)$ *ist wie in Teil* a) *definiert und die Zahlenfolge* $\{\psi(n)\}$ *genügt der Bedingung* $\lim_{n\to\infty} n^r|\psi(n)| = C_2 > 0$, *dann folgt aus* (2. 2) *daß das Element* $g \in X$ *durch die Folge* $T_n f$ *ebenfalls mit der Ordnung* $O(n^{-\alpha})$ *approximiert wird, d.h.*

(2. 5) $$\|T_n f - g\| = O(n^{-\alpha}) \qquad (n \to \infty).$$

c) *(Umkehrung zu* a) *und* b).*) Gelten für ein* $g \in X$ *die Aussagen* (2. 3) *und* (2. 5), *wobei zwischen den Folgen* $P_n f$ *und* $T_n f$ *die Beziehung* (2. 4) *besteht, dann folgt* (2. 2), *also* $\|U_n^{\langle r\rangle} f\| = O(n^{r-\alpha})$ $(0 < \alpha \leqq r)$.

Beweis. *Teil* a). Es gilt für $m > n$ wegen (2. 1)

$$P_m f - P_n f = \sum_{k=n+1}^{m} [P_k f - P_{k-1} f] = \sum_{k=n+1}^{m} \varphi(k)\, U_k^{\langle r\rangle} f,$$

also ist nach Voraussetzung, wenn $n$ groß genug gewählt ist,

$$\|P_m f - P_n f\| \leqq \sum_{k=n+1}^{m} |\varphi(k)|\, \|U_k^{\langle r\rangle} f\| \leqq M \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^{r+1}} k^{r-\alpha} = M \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^{1+\alpha}} \leqq$$
$$\leqq M \int_n^\infty \frac{du}{u^{1+\alpha}} = \frac{M}{\alpha} n^{-\alpha}$$

mit einer positiven Konstanten $M$, wobei der letzte Ausdruck kleiner als $\varepsilon$ für alle $m > n \geqq N_0(\varepsilon)$ ist. Daher existiert wegen der Vollständigkeit der Räume $X$ ein Element $g$ aus $X$, so daß $\lim_{n\to\infty} \|P_n f - g\| = 0$ ist. Da in der obigen Ungleichung die rechte Seite von $m$ unabhängig ist, folgt für $m \to \infty$ die Behauptung $\|P_n f - g\| = O(n^{-\alpha})$ $(n \to \infty)$.

*Teil* b). Es gilt $T_n f - g = P_n f - g + [\psi(n)/\varphi(n)][P_n f - P_{n-1} f]$ wegen (2. 4). Infolge der Voraussetzung (2. 2) gilt (2. 3) und damit

$$\|T_n f - g\| \leqq \|P_n f - g\| + |\psi(n)|\, \|U_n^{\langle r\rangle} f\| \leqq M_1 n^{-\alpha} + M_2 n^{-r} n^{r-\alpha} = O(n^{-\alpha}) \qquad (n \to \infty).$$

*Teil* c) folgt direkt aus (2. 4), denn es ist

$$U_n^{\langle r\rangle} f = [\varphi(n)]^{-1} [P_n f - P_{n-1} f] = [\psi(n)]^{-1} [T_n f - P_n f],$$

also

$$\|U_n^{\langle r\rangle} f\| \leqq |\psi(n)|^{-1} \{\|T_n f - g\| + \|P_n f - g\|\} \leqq M n^r \{N_1 n^{-\alpha} + N_2 n^{-\alpha}\} = O(n^{r-\alpha}),$$

womit der Satz bewiesen ist. Hier wurde benutzt, daß die Konstante $C_2$ im Teil b) des Satzes positiv ist, also $\lim_{n\to\infty} (n^r |\psi(n)|)^{-1} = 1/C_2$ folgt.

Bemerkung zu a). Da $P_n f$ ein trigonometrisches Polynom ist, gilt für das Polynom bester Approximation $(t_n^* g)(x)$ von $g$ die Beziehung $\|t_n^* g - g\| \leqq \|P_n f - g\|$. Ist nun $\|P_n f - g\| = O(n^{-\alpha})$, dann folgt daraus nach dem Satz von Bernstein für $X = C_{2\pi}$, daß $g^{(k)}(x) \in \mathrm{Lip}^* \beta$ ist mit $k + \beta = \alpha$ und $k$ ganz, $0 < \beta \leqq 1$. Für $X = L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$ folgt (siehe z.B. [14], S. 337), daß $g^{(k)}(x) \in \mathrm{Lip}^* (\beta, p)$ ist.

**Bemerkung zu a) und b).** Man kann diese Teile des Satzes auch folgendermaßen formulieren: *Ist $T_nf$ darstellbar in der Gestalt*

$$(2.6)\qquad T_nf = P_nf+\chi(n)[P_nf-P_{n-1}f] \qquad (f\in X),$$

*wobei $\{\chi(n)\}$ eine Zahlenfolge mit der Bedingung $\lim_{n\to\infty} n^{-1}|\chi(n)|=C_3>0$ ist, dann folgt aus der Voraussetzung*

$$(2.7)\qquad \|P_nf-P_{n-1}f\|=O(n^{-1-\alpha}) \qquad (\alpha>0),$$

*daß ein Element $g\in X$ existiert mit*

$$\|P_nf-g\|=O(n^{-\alpha}) \quad \text{und} \quad \|T_nf-g\|=O(n^{-\alpha}) \qquad (n\to\infty).$$

Diese Formulierung zeigt, daß die Beziehung (2.2), die hier durch (2.7) ersetzt wird, eigentlich eine Aussage über die Ordnung der Differenz zweier sukzessiver Operatoren $P_nf$ ist. Offenbar lassen sich auch die Operatoren $P_n$, $T_n$, $U_n$ aus Satz 2, die den Banachraum $X$ in den Raum der trigonometrischen Polynome von höchstens $n$-ter Ordnung abbilden, durch Operatoren ersetzen, die diese Räume $X$ in sich überführen.

**Folgerung 1.** *Ist der Operator $U_n^{\langle r\rangle}$ wie in (2.1) definiert, gilt (2.4), und folgt für zwei feste Elemente $f$ und $g$ in $X$ aus $\|T_nf-g\|=O(n^{-\alpha})$ die Relation $\|P_nf-g\|=O(n^{-\alpha})$, so ist die Bedingung*

$$\|T_nf-g\|=O(n^{-\alpha}) \qquad (n\to\infty)$$

*dann und nur dann erfüllt, wenn gilt*

$$\|U_n^{\langle r\rangle}f\|=O(n^{r-\alpha}) \qquad (n\to\infty;\ 0<\alpha\leqq r).$$

**Beweis.** Ist $\|U_n^{\langle r\rangle}f\|=O(n^{r-\alpha})$ vorausgesetzt, dann folgt aus den Teilen a) und b) des Satzes 2, da (2.4) erfüllt ist, die Aussage $\|T_nf-g\|=O(n^{-\alpha})$. Setzt man umgekehrt $\|T_nf-g\|=O(n^{-\alpha})$ voraus, und gilt auch $\|P_nf-g\|=O(n^{-\alpha})$, dann folgt nach Teil c) für $0<\alpha\leqq r$ $\|U_n^{\langle r\rangle}f\|=O(n^{r-\alpha})$ $(n\to\infty)$.

Die Folgerung 1 ist also eine Aussage vom Zamanskyschen Typ und ihre Umkehrung, wenn man den Operator $U_n^{\langle r\rangle}$, der eine Differenz von Operatoren darstellt, als Ableitung auffaßt. Eine ähnliche Aussage wie diese Folgerung im Falle $\alpha=r=1$, wo die Operatoren $P_n$, $T_n$ und $U_n^{\langle r\rangle}$ arithmetische Mittel einer Reihe von Elementen eines Banachraumes sind, haben ALEXITS [1] und FAVARD [8] bewiesen und diese dann zur Bestimmung der Saturationsklasse der Fejérmittel einer Fourierreihe herangezogen. Es wird nun gezeigt, daß Satz 1 und Folgerung 1 auf Teilsummen einer Fourierreihe, auf ihre Fejérschen und typischen Mittel und deren konjugierte Mittel anwendbar sind. Der Operator $U_n^{\langle r\rangle}$ ist in diesen Fällen eine Ableitung eines dieser Verfahren.

### 3. Anwendungen

Hier ist $X$ einer der Räume $C_{2\pi}$ bzw. $L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$. Mit $(S_n f)(x)$ bezeichnet man die $n$-te Teilsumme der Fourierreihe einer Funktion $f$ aus $X$, d. h.

$$(3.1)\qquad (S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} f^{\wedge}(k) e^{ikx}, \quad f^{\wedge}(k) = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$

Ihre typischen Mittel oder auch Rieszmittel sind definiert durch

$$(3.2)\qquad (R_{n,r} f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left[1 - \left(\frac{|k|}{n+1}\right)^r\right] f^{\wedge}(k) e^{ikx}$$

für alle $r = 1, 2, 3, \ldots$. Für $r = 1$ hat man die Fejérmittel $(\sigma_n f)(x) = (R_{n,1} f)(x)$. Mit $(R_{n,r,2} f)(x)$ bezeichnen wir die Mittel

$$(3.3)\qquad (R_{n,r,2} f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left[1 - \left(\frac{|k|}{n+1}\right)^r\right] \left[1 - \left(\frac{|k|}{n+2}\right)^r\right] f^{\wedge}(k) e^{ikx} = (R_{n+1,r}[R_{n,r} f])(x),$$

die für $r = 1$ die zweiten arithmetischen Mittel $(\sigma_{n,2} f)(x)$ sind.

$$(3.4)\qquad (\tilde{S}_n f)(x) = -i \sum_{k=-n}^{n} (\operatorname{sign} k) f^{\wedge}(k) e^{ikx} \qquad (\operatorname{sign} 0 = 0)$$

ist die $n$-te Teilsumme der konjugierten Fourierreihe von $f$. Die zu $f$ konjugierte Funktion $\tilde{f}$ ist definiert durch

$$(3.5)\qquad \tilde{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \operatorname{cotg} \frac{t}{2}\, dt.$$

Weiter benutzen wir die Bezeichnung

$$(3.6)\qquad f^{\{r\}}(x) = \begin{Bmatrix} f^{(r)}(x), & \text{wenn } r \text{ gerade ist,} \\ \tilde{f}^{(r)}(x), & \text{wenn } r \text{ ungerade ist} \end{Bmatrix}; \quad f^{\{0\}}(x) = f(x).$$

Bevor wir nun zu Anwendungen des allgemeinen Satzes kommen, wollen wir ein bekanntes Ergebnis für das singuläre Integral von Abel—Poisson zitieren, welches kein trigonometrisches Polynom ist, jedoch eine holomorphe Halbgruppe von Operatoren der Klasse $(C_0)$ bildet (siehe [3]). Dieses Integral ist für $f$ aus $C_{2\pi}$ definiert durch

$$(V(r) f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(x-u) + r^2}\, du \qquad (0 \leqq r < 1).$$

Als Anwendung des Satzes von Berens ([3], S. 23) erhält man für ein $f \in C_{2\pi}$ bei $0 < \alpha < 1$ folgende gleichwertige Aussagen ([3], S. 40):

a) $\|\tilde{V}'(r)f\| = O[(1-r)^{\alpha-1}]$ $(r \uparrow 1)$; [3])

b) $\|V''(r)f\| = O[(1-r)^{\alpha-2}]$ $(r \uparrow 1)$;

c) $\|V(r)f - f\| = O[(1-r)^{\alpha}]$ $(t \uparrow 1)$,

wobei der Strich die Ableitung nach der Variablen $x$ bedeutet. Wir gewinnen in dieser Arbeit entsprechende Aussagen für spezielle trigonometrische Polynome $t_n$, wenn man in der $O$-Bedingung den Ausdruck $(1-r)$ $(r \uparrow 1)$ durch $1/n$ $(n \to \infty)$ ersetzt.

Wir betrachten zunächst die Rieszmittel, wie sie in (3. 2) und (3. 3) definiert sind. Für sie gilt das folgende Lemma.

Lemma 1. *Für die Mittel $R_{n,r}f$ und $R_{n,r,2}f$ gelten folgende Identitäten:*

(3. 7) $$(R_{n,r}f)(x) = (R_{n,r,2}f)(x) + \frac{n^r}{(n+2)^r - n^r}[(R_{n,r,2}f)(x) - (R_{n-1,r,2}f)(x)];$$

(3. 8) $$(R_{n,r,2}f)(x) - (R_{n-1,r,2}f)(x) = (-1)^{[r/2]}\frac{(n+2)^r - n^r}{(n+2)^r n^r}(R_{n,r}^{\{r\}}f)(x),$$

*wobei $[r/2]$ die größte ganze Zahl $\leqq r/2$ ist.*

Der Beweis folgt durch Koeffizientenvergleich. Hiermit kommt man zu

Satz 3. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Approximation einer Funktion $f$ aus $X$ durch Rieszmittel mit der Ordnung $O(n^{-\alpha})$ $(n \to \infty)$, d.h.*

a) $\|R_{n,r}f - f\| = O(n^{-\alpha})$ $(0 < \alpha \leqq r)$

*ist die Bedingung*

b) $$\|R_{n,r}^{\{r\}}f\| = O(n^{r-\alpha}).$$ [4])

Beweis. Hierzu benutzen wir die Folgerung 1. Setzt man $P_n f = R_{n,r,2}f$, dann ist wegen (3. 8) $U_n^{\langle r\rangle}f = R_{n,r}^{\{r\}}f$ mit

$$\varphi(n) = (-1)^{[r/2]}\frac{(n+2)^r - n^r}{(n+2)^r n^r},$$

das die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} n^{r+1}|\varphi(n)| = 2r > 0$ erfüllt. Die Bedingung (2. 4) ist wegen (3. 7) gültig, wenn man noch $T_n f = R_{n,r}f$ und $\psi(n) = (-1)^{[r/2]}(n+2)^{-r}$ setzt. Wir müssen hier noch zeigen, daß aus $\|R_{n,r}f - f\| = O(n^{-\alpha})$ die Aussage $\|R_{n,r,2}f - f\| = O(n^{-\alpha})$ folgt. Es ist wegen (3. 3)

$$\begin{aligned}(R_{n,r,2}f)(x) - f(x) &= (R_{n,r,2}f)(x) - (R_{n+1,r}f)(x) + (R_{n+1,r}f)(x) - f(x) = \\ &= (R_{n+1,r}[R_{n,r}f - f])(x) + (R_{n+1,r}f)(x) - f(x),\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\|R_{n,r,2}f - f\| &\leqq \|R_{n+1,r}\|\,\|R_{n,r}f - f\| + \|R_{n+1,r}f - f\| \leqq \\ &\leqq M(r)M_1 n^{-\alpha} + M_2 n^{-\alpha} = O(n^{-\alpha}) \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

---

[3]) Das zu $V(r)f$ konjugierte Integral $\tilde{V}(r)f$ ist definiert durch

$$(\tilde{V}(r)f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{r\sin(x-u)}{1-2\cos(x-u)+r^2}\,du \quad (0 \leqq r < 1).$$

[4]) Siehe auch Fußnote 5) bei Satz 5.

wegen a) und der gleichmäßigen Beschränktheit der Normen der Rieszmittel, was in [11] und [6], S. 352, gezeigt wurde. Daß die Funktion $g$ aus Folgerung 1 hier gleich $f$ ist, folgt aus dem Identitätssatz für Fourierreihen. Alle Voraussetzungen der Folgerung 1 sind damit erfüllt, und es folgt die Behauptung.

Im Falle $r=1$ nehmen die Identitäten aus Lemma 1 die folgende Gestalt an.

Lemma 2. *Für die arithmetischen Mittel einer Fourierreihe gelten die Identitäten*

$$(\sigma_n f)(x) = (\sigma_{n,2} f)(x) + \frac{n}{2}[(\sigma_{n,2} f)(x) - (\sigma_{n-1,2} f)(x)]; \tag{3.9}$$

$$(\tilde{\sigma}_n' f)(x) = (n/2)(n+2)[(\sigma_{n,2} f)(x) - (\sigma_{n-1,2} f)(x)]. \tag{3.10}$$

Hier gilt entsprechend

Satz 4. *Für ein $f \in X$ und $0 < \alpha \leqq 1$ ist die Aussage*

$$\|\sigma_n f - f\| = O(n^{-\alpha})$$

*dann und nur dann erfüllt, wenn gilt*

$$\|\tilde{\sigma}_n' f\| = O(n^{1-\alpha}).$$

Lemma 2 und Satz 4 sind bekannt; im Falle $\alpha = 1$ siehe [16] für $X = C_{2\pi}$, [1] und [8] für allgemeine Banachräume, sowie für $0 < \alpha \leqq 1$ [19], Ch. VII, S. 269 und 296.

Kehren wir nun zu den Rieszmitteln zurück. Im Falle $\alpha = r$ tritt bei ihnen Saturation auf, und ihre Saturationsklasse $W_X^r$ ist definiert durch

$$W_C^r = \{f;\ f \in C_{2\pi};\ |k|^r \hat{f}(k) = \hat{g}(k);\ g \in L_{2\pi}^\infty\} \quad \text{für} \quad X = C_{2\pi},$$

$$W_1^r = \{f;\ f \in L_{2\pi}^1;\ |k|^r \hat{f}(k) = \check{g}(k);\ g \in BV_{2\pi}\} \quad \text{für} \quad X = L_{2\pi}^1,$$

wobei $\check{g}(k)$ die Fourier—Stieltjeskoeffizienten der Funktion $g$ sind;

$$W_p^r = \{f;\ f \in L_{2\pi}^p;\ |k|^r \hat{f}(k) = \hat{g}(k);\ g \in L_{2\pi}^p\} \quad \text{für} \quad X = L_{2\pi}^p \qquad (1 < p < \infty).$$

Äquivalente Charakterisierungen dieser Klassen findet man z. B. in einer Arbeit von Butzer und Görlich [5]. Mit Hilfe zweier Sätze, die z. B. in [6], S. 351, zitiert sind, kommt man zu folgendem Ergebnis.

Folgerung 3. *Für ein $f \in X$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $\|R_{n,r} f - f\| = O(n^{-r}) \qquad (n \to \infty)$;

b) $\|R_{n,r}^{(r)} f\| = O(1) \qquad (n \to \infty)$;

c) $\|\sigma_n^{(r)} f\| = O(1) \qquad (n \to \infty)$;

d) $f \in W_X^r$.

Die Äquivalenzen a), c) und d) finden sich in [6], S. 351. Die Saturationsklasse der Rieszmittel für $X = C_{2\pi}$ wurde auch von Zamansky [17], S. 170, bestimmt; siehe dazu auch [2], S. 683.

Ist $\alpha < r$, dann gelten nachstehende Äquivalenzen für die Approximation durch Rieszmittel.

Folgerung 4. *Für ein Element $f \in X$ und $\alpha < r$ sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

a) $\|R_{n,r}f - f\| = O(n^{-\alpha})$ $(n \to \infty)$;

b) $\|R_{r,n}^{(r)}f\| = O(n^{r-\alpha})$ $(n \to \infty)$;

c) *im Falle* $X = C_{2\pi}$ *ist* $f^{(k)} \in \mathrm{Lip}^* \beta$, $k + \beta = \alpha$, *k ganz*, $0 < \beta \leqq 1$;

*im Falle* $X = L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$ *ist* $f^{(k)} \in \mathrm{Lip}^* (\beta; p)$.

Die Äquivalenz von a) und b) sagt Satz 3 aus; aus a) folgt c) nach dem Satz von S. Bernstein, und aus c) die Bedingung a) nach Zygmund [18], Aljančić [2], S. 683, und Sz.-Nagy [13] für $X = C_{2\pi}$ und nach Sunouchi [12] für $X = L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$.

Wir kommen nun zu Anwendungen auf die $n$-te Teilsumme einer Fourierreihe.

Lemma 3. *Zwischen den Rieszmitteln $R_{n,r}f$ und den n-ten Teilsummen $S_n f$ einer Fourierreihe bestehen die folgenden Identitäten:*

$$(S_n f)(x) = (R_{n,r}f)(x) + \frac{n^r}{(n+1)^r - n^r}[(R_{n,r}f)(x) - (R_{n-1,r}f)(x)]; \tag{3.11}$$

$$(R_{n,r}f)(x) - (R_{n-1,r}f)(x) = (-1)^{[r/2]}\frac{(n+1)^r - n^r}{(n+1)^r n^r}(S_n^{\{r\}}f)(x). \tag{3.12}$$

Der Beweis folgt wieder durch Koeffizientenvergleich. Hiermit erhält man

Satz 5. *Ist f aus X, so sind die folgenden vier Aussagen für $0 < \alpha < r$ untereinander äquivalent:* [5][6]

a) $\|S_n f - f\| = O(n^{-\alpha})$ $(n \to \infty)$;

b) $\|\tilde{S}_n f - \tilde{f}\| = O(n^{-\alpha})$ $(n \to \infty)$;

c) $\|S_n^{(r)} f\| = O(n^{r-\alpha})$ $(n \to \infty)$;

d) $\|\tilde{S}_n^{(r)} f\| = O(n^{r-\alpha})$ $(n \to \infty)$. [6]

Beweis. Zunächst setzen wir $r$ als ungerade voraus. Mit $R_{n,r}f = P_n f$, $\tilde{S}_n^{(r)}f = U_n^{\langle r\rangle}f$ und $\varphi(n) = (-1)^{[r/2]}\dfrac{(n+1) - n^r}{(n+1)^r n^r}$ geht die Identität (3.12) in die Definition (2.1) von $U_n^{\langle r\rangle}f$ über. Setzt man noch $T_n f = S_n f$, dann ist die Bedingung (2.4) wegen (3.11) erfüllt; $\psi(n)$ hat die Gestalt $(-1)^{[r/2]}(n+1)^{-r}$. Alle Voraussetzungen der Teile a) und b) von Satz 2 sind damit gegeben, und damit folgt aus d) die Bedingung a). Aus a) folgt c) nach dem Satz von Zamansky für $0 < \alpha < r$. Nun ist

---

[5]) Ein äquivalenter Satz ist auch für die Rieszschen Mittel $R_{n,r}f$ bei $0 < \alpha < r$ gültig. Der Beweis verläuft analog.

[6]) Die Äquivalenz von a) und c) im Falle $r = 2$ und $0 < \alpha \leqq 1$ wurde unter der zusätzlichen Voraussetzung $\|t_n^* f - f\| = O(n^{-\alpha})$ von Zamansky [15], S. 81, im Raume $C_{2\pi}$ bewiesen. Daß aus a) Teil b) folgt, haben Salem und Zygmund [9] sowie Zamansky [15], S. 84, gezeigt.

zu zeigen, daß aus c) die Aussage b) folgt. Setzt man in (3. 12) auf beiden Seiten die Fourierkoeffizienten der konjugierten Reihe ein, dann erhält man für ungerade $r$, da dann $\tilde{S}_n^{(r)}f=\tilde{\tilde{S}}_n^{(r)}f = -S_n^{(r)}f$ ist, die Identität

$$(3.13)\qquad (\tilde{R}_{n,r}f)(x)-(\tilde{R}_{n-1,r}f)(x) = (-1)^{[r/2]+1}\,\frac{(n+1)^r-n^r}{(n+1)^r n^r}\,(S_n^{(r)}f)(x).$$

Hieraus und mit der Identität (3. 11) für $\tilde{S}_n f$ und $\tilde{R}_{n,r}f$ folgt wie oben, daß aus c) die Aussage b) folgt. Aus b) erhält man schließlich mit dem Satz von ZAMANSKY d), womit der Satz durch Ringschluß für ungerade $r$ bewiesen ist.

Nun sei $r$ gerade. Aus d) folgt nach der Bernsteinschen Ungleichung $\|\tilde{S}_n^{(r+1)}f\|=O(n^{r+1-\alpha})$ und hieraus nach Satz 2a) und b) wie oben Teil a) dieses Satzes, da $r+1$ ungerade ist. Daraus erhält man wieder c) mit dem Satz von ZAMANSKY und die Bernsteinsche Ungleichung ergibt dann $\|S_n^{(r+1)}f\|=O(n^{r+1-\alpha})$. Die Zahl $r+1$ ist ungerade, und daher folgt wie oben die Aussage b) dieses Satzes. Wenden wir noch einmal den Zamanskyschen Satz an, so folgt daraus d), und der Beweis ist vollständig.

Dieser Satz erscheint insofern interessant, als die Teilsummen der Fourierreihe im Gegensatz zu den Fejérschen und Rieszschen Mitteln keine Saturation aufweisen und außerdem im Raume $L^2_{2\pi}$ die Polynome bester Approximation bilden. Es ist also im Raume $L^2_{2\pi}$ die Umkehrung des Satzes von ZAMANSKY für die Polynome bester Approximation bewiesen, womit man zu den beiden äquivalenten Aussagen, die durch die Sätze von S. BERNSTEIN und D. JACKSON gegeben sind, eine dritte gefunden hat, d. h. es gilt

Satz 6. *Für die trigonometrischen Polynome bester Approximation $t_n^* f$ einer Funktion $f$ aus $L^2_{2\pi}$ sind für $\alpha<r$, $\alpha=k+\beta$, $k$ ganz und $0<\beta\leqq 1$ folgende Aussagen gleichwertig:*

a) $f^{(k)}\in \mathrm{Lip}^*(\beta;2)$;

b) $\|t_n^* f-f\|_{L^2}=O(n^{-\alpha})\quad (n\to\infty)$;

c) $\|t_n^{*(r)}f\|_{L^2}=O(n^{r-\alpha})\quad (n\to\infty)$.

Es ist zu vermuten, daß dieser Satz auch für den Raum $C_{2\pi}$ und alle Räume $L^p_{2\pi}$ $(1\leqq p<\infty)$ gilt, da der entsprechende Satz in diesen Räumen für die Rieszschen Mittel gültig ist (Folgerung 4), die für nichtsaturierte Approximation das gleiche Approximationsverhalten wie die Polynome bester Approximation besitzen.

## Literatur


[1] G. ALEXITS, Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér, *Acta Math. Hung.*, **3** (1952), 29—40.
[2] S. ALJANČIĆ, Approximation of continuous functions by typical means of their Fourier series, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 681—688.
[3] H. BERENS, Approximationssätze für Halbgruppen von Operatoren in intermediären Räumen, *Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster*, **32** (1964), 1—59.
[4] P. L. BUTZER, On the singular integral of de la Vallée Poussin, *Archiv der Math.*, **7** (1956), 295—309.
[5] P. L. BUTZER, und E. GÖRLICH, Zur Charakterisierung von Saturationsklassen in der Theorie der Fourierreihen, *Tôhoku Math. J.*, (2) **17** (1965), 29—54.
[6] P. L. BUTZER und E. GÖRLICH, Saturationsklassen und asymptotische Eigenschaften trigonometrischer singulärer Integrale, *Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen*, Bd. **33** *(Festschrift zur Gedenkfeier für Karl Weierstraß 1815—1965)* (Köln, 1966), 339—392.
[7] P. CIVIN, Approximation in Lip$(\alpha, p)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 794—796.
[8] J. FAVARD, Sur la saturation des procédés de sommation, *J. math. pures appl.*, **36** (1957), 359—372.
[9] R. SALEM and A. ZYGMUND, The approximation by partial sums of Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59** (1946), 14—22.
[10] S. B. STEČKIN, On the order of the best approximation of continuous functions, *Izv. Akad. Nauk. SSSR, ser. mat.*, **15** (1951), 219—242 (russisch).
[11] G. SUNOUCHI, On the Riesz summability of Fourier series, *Tôhoku Math. J.*, (2) **11** (1959), 321—326.
[12] G. SUNOUCHI, Saturation in the theory of best approximation, *On approximation theory (Proceedings of the conference held in the Math. Research Institute at Oberwolfach,* 1963) (Basel, 1964), 72—88.
[13] B. SZ.-NAGY, Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier, *Acta Math. Hung.*, **1** (1948), 14—52.
[14] A. F. TIMAN, *Theory of approximation of functions of a real variable* (Oxford, 1963).
[15] M. ZAMANSKY, Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d'approximation, *Ann. sci. Ecole Norm. Sup.*, **66** (1949), 19—93.
[16] M. ZAMANSKY, Sur la sommation des séries de Fourier derivées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **231** (1950), 1118—1120.
[17] M. ZAMANSKY, Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques, *Ann. sci. Ecole Norm. Sup.*, **67** (1950), 161—198.
[18] A. ZYGMUND, The approximation of functions by typical means of their Fourier series, *Duke Math. J.*, **12** (1945), 695—704.
[19] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*. I (Cambridge, 1959).


LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK (ANALYSIS)
TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

*(Eingegangen am 12. Oktober 1966)*