Über Potenzen von linearen Operatoren in Banachschen Räumen

Von VOLKER NOLLAU in Dresden (DDR)

1. Es sei A ein abgeschlossener linearer Operator im Banachraum X, dessen Definitionsbereich $\mathfrak{D}(A)$ in X dicht liegt. Wir sagen, A sei vom Typ (M), wenn die negative reelle Achse (ausschließlich des Nullpunktes) zur Resolventenmenge $\varrho(A)$ gehört, und eine positive Konstante M existiert, so daß die Resolvente $R(-\lambda; A) = (A+\lambda I)^{-1}$ für alle $\lambda > 0$ der Beziehung $\| R(-\lambda; A)\| \leqq M\lambda^{-1}$ genügt. Durch das Integral

$$(1) \qquad \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \eta^{\alpha-1} R(-\eta; A) A x \, d\eta \qquad (0<\alpha<1; \quad x \in \mathfrak{D}(A))$$

ist dann auf $\mathfrak{D}(A)$ ein linearer abschließbarer (siehe [1]) Operator definiert, dessen Abschließung wir die α-te Potenz A^α nennen.[1])

Das Ziel dieser Mitteilung soll es sein, zu zeigen, daß die so definierten Potenzen den üblichen Potenzgesetzen genügen, d. h., für einen Operator A vom Typ (M) und $0 \leqq \alpha, \beta \leqq 1$ gelten die Beziehungen

$$(2) \qquad A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta} \qquad (0 \leqq \alpha+\beta \leqq 1),$$

$$(3) \qquad (A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}.$$

Darüber hinaus werden wir beweisen, daß zu einem Operator A vom Typ (M) und einer beliebigen natürlichen Zahl n genau ein abgeschlossener Operator B mit den Eigenschaften

$$(4) \qquad B^n = A \quad \text{und} \quad \sigma(B) = \left\{ z : |\arg z| \leqq \frac{\pi}{n} \right\}$$

existiert; dieser Operator B ist die $1/n$-te Potenz $A^{1/n}$ von A und selbst vom Typ (M) (Satz 4).

Sind X ein Hilbertraum und der betrachtete Operator maximal accretiv, so wurden die Eigenschaften (2), (3) der Potenzen mit Hilfe des Funktionalkalküls

[1]) Unter A^0 wollen wir die identische Abbildung und unter A^1 den Operator selbst verstehen.

für Kontraktionen im Hilbertraum von B. Sz.-Nagy und C. Foiaş [11] nachgewiesen.[2]) Unter der Voraussetzung, daß der offene Sektor

$$\sum = \left\{ z = re^{i\varphi}: 0 < r < \infty,\ |\varphi| < \Theta,\ 0 < \Theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

das Spektrum $\sigma(A)$ enthält und der Operator A der Bedingung $\|zR(z; A)\| \leqq \text{const.}$ für alle $z \notin \sum$ genügt [3]), geben T. Kato und H. Tanabe [6] (2) an, während M. A. Krasnoselskij und P. E. Sobolewskij [7] die genannten Potenzgesetze (2) und (3) für stetig invertierbare Operatoren vom Typ (M) zeigen. A. V. Balakrishnan beweist für $0 < \alpha + \beta < 1$ und $0 < \alpha$, $\beta < 1$ die Beziehung $A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta} x$ $(x \in \mathfrak{D}(A^2))$ für einen Operator A vom Typ (M). Die Eigenschaft (3) erhält J. Watanabe (vgl. [12] [4])) für sogenannte Operatoren vom Typ (M, ω) (vgl. T. Kato [4]) als einfache Folgerung einer Integraldarstellung der Resolvente $R(-\eta; A^\alpha)$ $(\eta > 0)$.

Wir zeigen, daß diese Integraldarstellung auch für die Potenzen von Operatoren vom Typ (M) richtig bleibt (Satz 2).

Mit der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Operatorengleichung $B^n = A$ für einen vorgegebenen Operator A und eine natürliche Zahl n hat sich im Spezialfall eines Hilbertraumes eine Reihe von Autoren beschäftigt. Für positive, selbstadjungierte Operatoren folgt die Existenz einer positiven Quadratwurzel aus dem Spektralsatz; eine direkte, einfache Konstruktion stammt von C. Visser. B. Sz.-Nagy (vgl. [10]) hat gezeigt, daß diese Quadratwurzel durch die Bedingung der Positivität eindeutig bestimmt ist. W. I. Mazajeff und J. A. Palant beweisen in [9], daß es zu einem beschränkten dissipativen Operator T in einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$ und einer beliebigen natürlichen Zahl n genau einen beschränkten Operator S gibt, der eine Lösung der Gleichung $S^n = T$ ist und dessen quadratische Form (Sx, x) $(x \in \mathfrak{H})$ Werte im Sektor $0 \leqq \arg z \leqq \frac{\pi}{n}$ annimmt. H. Langer zeigt in [8], daß diese Behauptung auch für einen abgeschlossenen maximal dissipativen Operator T richtig bleibt, wenn man verlangt, daß S ein abgeschlossener maximal dissipativer Operator ist.

Wir bemerken, daß die genannten Aussagen sich als Spezialfall des von uns in Satz 4 angegebenen allgemeinen Sachverhaltes erweisen.

Herrn Prof. Dr. H. Langer danke ich für seine freundliche Unterstützung und zahlreichen Hinweise.

2. Einige Eigenschaften der Potenzen A^α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$, die wir später benötigen, werden in den folgenden Lemmata bewiesen.

Lemma 1. *Es sei A ein Operator vom Typ (M). Für $x \in \mathfrak{D}(A)$ ist $A^\beta x$ stetig bzgl. β im Intervall $0 < \beta \leqq 1$; d. h.*

$$\lim_{\alpha \to \beta} A^\alpha x = A^\beta x.$$

---

[2]) Die Beziehung $(A^{1/n})^n = A$ wurde in [4] gezeigt.

[3]) Diese Voraussetzung hat notwendigerweise die Stetigkeit des Operators A^{-1} zur Folge.

[4]) Die Originalarbeit in *Proc. Japan Acad.*, 37 (1961), 273—275, wurde mir erst nach Abschluß dieser Arbeit vom Verfasser freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

Beweis. Sei $0<\beta<1$. Ist $x\in\mathfrak{D}(A)$ und $0<\beta-\beta'\leqq\alpha\leqq\beta+\beta'<1$ ($\beta'>0$), so existieren zu einem beliebigen $\varepsilon>0$ ein $0<\delta=\delta(\varepsilon)$ und ein $R=R(\varepsilon)<\infty$, so daß

$$\left\|\left(\int_0^\delta+\int_R^\infty\right)C(\gamma)\,\eta^{\gamma-1}R(-\eta;A)Ax\,d\eta\right\|\leqq\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{für}\quad C(\gamma)=\frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\quad(\gamma=\alpha,\beta)$$

gilt. Weiterhin ergibt sich

$$\left\|\int_\delta^R\{C(\alpha)\eta^{\alpha-1}-C(\beta)\eta^{\beta-1}\}R(-\eta;A)Ax\,d\eta\right\|\leqq$$

$$\leqq(1+M)(R-\delta)\|x\|\sup_{\delta\leqq\eta\leqq R}|C(\alpha)\eta^{\alpha-1}-C(\beta)\eta^{\beta-1}|\leqq\frac{\varepsilon}{3}$$

für $|\alpha-\beta|<\sigma(\varepsilon)$ $(0<\sigma(\varepsilon)\leqq\beta')$. [5]) Folglich existiert zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\sigma(\varepsilon)>0$, so daß $\|(A^\alpha-A^\beta)x\|<\varepsilon$ für $|\alpha-\beta|<\sigma(\varepsilon)$ ist.

Die linksseitige Stetigkeit im Punkte $\beta=1$ wurde schon von A. V. BALAKRISHNAN [1] bewiesen.

Lemma 2. *Für $0<\alpha<1$ und $\eta>0$ ist der Operator $A^\alpha R(-\eta;A)$ beschränkt, und zwar gilt*

$$\|A^\alpha R(-\eta;A)\|\leqq K(\alpha)\eta^{\alpha-1}\quad\left(K(\alpha)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha(1-\alpha)}M(1+M)\right).\tag{5}$$

Beweis. Wegen $R(-\eta;A)X\subset\mathfrak{D}(A)$ ist für $x\in X$

$$A^\alpha R(-\eta;A)x=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{\alpha-1}R(-\lambda;A)AR(-\eta;A)x\,d\lambda.$$

Mit Hilfe der Substitution $\lambda=\xi\eta$ ergibt sich

$$\|A^\alpha R(-\eta;A)\|\leqq\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\eta^{\alpha-1}\left\{\left\|\int_0^1\xi^{\alpha-1}AR(-\xi\eta;A)\eta R(-\eta;A)x\,d\xi\right\|+\right.$$

$$\left.+\left\|\int_1^\infty\xi^{\alpha-1}\eta R(-\xi\eta;A)AR(-\eta;A)x\,d\xi\right\|\right\}.$$

Wendet man die Abschätzungen $\|R(-\lambda;A)\|\leqq M\lambda^{-1}$ und $\|AR(-\lambda;A)\|\leqq1+M$ für $\lambda>0$ auf die rechte Seite der vorangehenden Ungleichung an, so erhält man

$$\|A^\alpha R(-\eta;A)x\|\leqq\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}(1+M)M\eta^{\alpha-1}\left\{\int_0^1\xi^{\alpha-1}\,d\xi+\int_1^\infty\xi^{\alpha-2}\,d\xi\right\}\|x\|.$$

Lemma 3. *Der Definitionsbereich des Operators A^2 ist ein Kern (vgl. [5]) von $A^\alpha(0\leqq\alpha\leqq1)$, d. h., zu jedem $x\in\mathfrak{D}(A^\alpha)$ existiert eine Folge $\{x_n\}\subset\mathfrak{D}(A^2)$, so daß $x_n\to x$ und $A^\alpha x_n\to A^\alpha x$ $(n\to\infty)$ gilt.*

---

[5]) Wir verwenden hier die Abschätzung $(\eta>0)$
$\|AR(-\eta;A)\|=\|I-\eta(A+\eta I)^{-1}\|\leqq1+\eta\|R(-\eta;A)\|\leqq1+M.$

Beweis. Wir setzen $T_n = n(nI + A)^{-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Man überlegt sich leicht, daß die Folge der gleichmäßig beschränkten Operatoren in der starken Operatorentopologie gegen I konvergiert. Für $y \in \mathfrak{D}(A)$ ist $T_n A^\alpha y = A^\alpha T_n y$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Auf Grund der Definition von A^α existiert zu jedem $y \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$ eine Folge $\{y_m\} \subset \mathfrak{D}(A)$ mit $\lim y_m = y$ und $\lim A^\alpha y_m = A^\alpha y$ $(m \to \infty)$. Da der Operator $A^\alpha T_n$ für jedes $n = 1, 2, \ldots$ beschränkt ist, konvergiert die rechte Seite in der Ungleichung

$$\|A^\alpha T_n y - T_n A^\alpha y\| \leqq \|A^\alpha T_n y - A^\alpha T_n y_m\| + \|T_n A^\alpha y_m - T_n A^\alpha y\|$$

für $m \to \infty$ gegen Null; und somit ist $A^\alpha T_n y = T_n A^\alpha y$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ und alle $y \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$.

Es sei nun $x \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$ und $x_n = T_n^2 x$. Mit Hilfe der vorangegangenen Überlegung erhält man die Aussagen $x_n \in \mathfrak{D}(A^2)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} A^\alpha x_n = \lim\limits_{n\to\infty} A^\alpha T_n^2 x = \lim\limits_{n\to\infty} T_n^2 A^\alpha x = A^\alpha x$, was zu zeigen war.

Für $x \in \mathfrak{D}(A^2)$ und $0 < \alpha + \beta < 1$ gilt $A^\beta x \in \mathfrak{D}(A)$ und $A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta} x$ [1]. Ist $\alpha_n = 1 - \beta - \dfrac{1}{n}$ $(\beta > 0;\ \alpha_n > 0)$ und $x \in \mathfrak{D}(A^2)$, so erhält man $A^{\alpha_n} A^\beta x = A^{1-\frac{1}{n}} x$. Auf Grund der Stetigkeit von $A^\alpha x$ $(x \in \mathfrak{D}(A))$ bzgl. α ergibt sich dann $A^{1-\beta} A^\beta x = Ax$ $(x \in \mathfrak{D}(A^2))$.

Lemma 4. *Für* $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1$ *besteht die Beziehung* $\mathfrak{D}(A^\alpha) \supset \mathfrak{D}(A^\beta) \supset \mathfrak{D}(A)$; *insbesondere konvergiert für jede Folge* $\{y_n\} \subset \mathfrak{D}(A)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *mit den Eigenschaften* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} A^\beta y_n = A^\beta y$ *auch* $A^\alpha y_n$ *gegen* $A^\alpha y$.

Beweis. Eine Folge $\{y_n\} \subset \mathfrak{D}(A)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ genüge den genannten Voraussetzungen, also ist $AR(-\eta; A)(y_n - y_m) = A^{1-\beta} A^\beta R(-\eta; A)(y_n - y_m)$ für $\eta > 0$, und man erhält für alle $0 < \alpha < \beta \leqq 1$ die Abschätzung

$$\|A^\alpha (y_n - y_m)\| \leqq \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left\{ (1 + M) \int_0^1 \eta^{\alpha-1}\, d\eta\, \|y_n - y_m\| + \right.$$
$$\left. + \int_1^\infty \eta^{\alpha-1} \|A^{1-\beta} R(-\eta; A)\|\, d\eta\, \|A^\beta (y_n - y_m)\| \right\}.$$

Für $m, n \to \infty$ konvergiert die rechte Seite der Ungleichung gegen Null, da auch das zweite Integral auf Grund von (5) einen endlichen Wert besitzt. Wegen der Vollständigkeit des Raumes existiert somit ein $z \in X$ derart, daß für die Folge $\{y_n\} \subset \mathfrak{D}(A)$ die Beziehungen $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ und $\lim\limits_{n\to\infty} A^\alpha y_n = z$ gelten, woraus sich auf Grund der Abgeschlossenheit von A^α sofort $y \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$ und $z = A^\alpha y$ ergibt.

Wir bemerken, daß damit auch die Inklusion $X = \mathfrak{D}(A^0) \supset \mathfrak{D}(A^\alpha) \supset \mathfrak{D}(A^\beta) \supset \mathfrak{D}(A)$ für $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1$ bewiesen ist.

3. Satz 1. *Es sei* A *ein Operator vom Typ* (M). *Dann gilt die Beziehung*

$$A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta} \quad \textit{für} \quad 0 \leqq \alpha + \beta \leqq 1 \quad \textit{und} \quad 0 \leqq \alpha, \beta.$$

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+\beta})$. Wie wir in Lemma 3 bewiesen haben, existiert eine Folge $\{x_n\} \subset \mathfrak{D}(A^2)$ mit $\lim x_n = x$ und $\lim A^{\alpha+\beta} x_n = A^{\alpha+\beta} x$ $(n \to \infty)$. Auf $\mathfrak{D}(A^2)$ gilt $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$, folglich besteht für $x_n \in \mathfrak{D}(A^2)$ die Gleichung $A^\alpha A^\beta x_n =$

$=A^{\alpha+\beta}x_n$. Mit Hilfe des vorangehenden Lemmas folgt nun aber, daß $x\in\mathfrak{D}(A^\beta)$ und $\lim A^\beta x_n=A^\beta x$ $(n\to\infty)$ ist. Aus der Beziehung $\lim A^\alpha A^\beta x_n=\lim A^{\alpha+\beta}x_n= =A^{\alpha+\beta}x$ $(n\to\infty)$ und der Abgeschlossenheit von A^α ergibt sich dann $A^\beta x\in\mathfrak{D}(A^\alpha)$ und $A^\alpha A^\beta x=A^{\alpha+\beta}x$, d. h. $A^\alpha A^\beta\supset A^{\alpha+\beta}$.

Für $x\in\mathfrak{D}(A^\alpha A^\beta)$ ist $x_n=n(A+nI)^{-1}x=T_nx\in\mathfrak{D}(A)$ $(\mathfrak{D}(A)\subset\mathfrak{D}(A^{\alpha+\beta}))$, d. h., es gilt $A^\alpha A^\beta x_n=A^{\alpha+\beta}x_n$. Wegen der Vertauschbarkeit der Operatoren T_n und A^α für $n=1,2,\ldots$ und $0\leqq\alpha\leqq 1$ auf $\mathfrak{D}(A^\alpha)$ erhalten wir $A^{\alpha+\beta}x_n=A^\alpha A^\beta T_nx=A^\alpha T_nA^\beta x$. Nach Voraussetzung ist $x\in\mathfrak{D}(A^\alpha A^\beta)$, also $A^\beta x\in\mathfrak{D}(A^\alpha)$, so daß sich für $n\to\infty$ die Gleichungen $\lim A^{\alpha+\beta}x_n=\lim A^\alpha T_nA^\beta x=\lim T_nA^\alpha A^\beta x=A^\alpha A^\beta x$ ergeben. Da andererseits x_n gegen x konvergiert, folgt aus der Abgeschlossenheit von $A^{\alpha+\beta}$, daß $x\in\mathfrak{D}(A^{\alpha+\beta})$ und $A^{\alpha+\beta}x=A^\alpha A^\beta x$ gilt, d. h. $A^\alpha A^\beta\subset A^{\alpha+\beta}$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung 1. *Die Wertebereiche der Operatoren A^α genügen für $0\leqq\alpha\leqq\beta\leqq 1$ der Beziehung $\mathfrak{R}(A^\alpha)\supset\mathfrak{R}(A^\beta)\supset\mathfrak{R}(A)$.*

4. Satz 2. *Es sei A ein Operator vom Typ (M). Dann gestattet die Resolvente $R(-\eta;A^\alpha)$ für $\eta>0$ und $0<\alpha<1$ die Darstellung*

$$(A^\alpha+\eta I)^{-1}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty\frac{r^\alpha(A+rI)^{-1}\,dr}{r^{2\alpha}+2\eta r^\alpha\cos\pi\alpha+\eta^2}. \tag{6}$$ [6])

Insbesondere ist A^α ein Operator vom Typ (M), und es gilt $\sigma(A^\alpha)\subset\{z:\ |\arg z|\leqq\pi\alpha\}$.

Beweis. I. Zunächst setzen wir voraus, daß A sowie seine Inverse A^{-1} beide stetig sind. Dann ist der Operator A^α bekanntlich durch das Riesz—Dunford-Integral $A^\alpha=-\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^\alpha R(z;A)\,dz$ [7]) darstellbar (vgl. [3]), und die Resolvente $(A^\alpha+\eta I)^{-1}$ besitzt für $\eta>0$ die Form

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_C(z^\alpha+\eta)^{-1}R(z;A)\,dz;$$

dabei ist C eine geschlossene Kontur, die aus den Kurven $z=Re^{i\varphi}$ $(-\pi\leqq\varphi\leqq\pi)$, $z=-\eta$ $(R\geqq\eta\geqq\varepsilon)$, $z=\varepsilon e^{i\varphi}(\pi\geqq\varphi\geqq-\pi)$ und $z=-\eta$ $(\varepsilon\leqq\eta\leqq R)$ besteht. R und ε sind so zu wählen, daß C in $\varrho(A)$ verläuft und das Spektrum von A enthält. Durch den Grenzübergang $R\to\infty$ und $\varepsilon\to 0$ erhält man

$$(A^\alpha+\eta I)^{-1}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty\frac{r^\alpha(A+rI)^{-1}\,dr}{r^{2\alpha}+2\eta r^\alpha\cos\pi\alpha+\eta^2},$$

was zu zeigen war.

---

[6]) T. Kato definiert in [4] A^α $(0<\alpha<1)$ für A vom Typ (M,ω), indem er zeigt, daß das Integral (6) die Resolvente eines abgeschlossenen Operators ist, den er als A^α bezeichnet.

[7]) Die komplexe Ebene sei längs der negativen reellen Achse aufgeschnitten, und z^α sei so definiert, daß $z^\alpha>0$ für $z>0$ ist.

Für einen beliebigen Operator A vom Typ (M) und $0<\alpha<1$ sei

(7) $$S_\alpha(\eta; A)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{r^\alpha(A+rI)^{-1}\,dr}{r^{2\alpha}+2\eta r^\alpha\cos\pi\alpha+\eta^2}\qquad(\eta>0).$$

Der Operator $S_\alpha(\eta; A)$ ist beschränkt, insbesondere gilt mit $r^\alpha=\eta\mu^\alpha$

(8) $$\|S_\alpha(\eta; A)\|\leqq\frac{M}{\eta}\int_0^\infty\frac{\sin\pi\alpha\,\mu^{\alpha-1}\,d\mu}{\pi(\mu^{2\alpha}+2\mu^\alpha\cos\pi\alpha+1)}=\frac{M}{\eta}.$$

II. Es sei jetzt A ein beschränkter Operator vom Typ (M). Wir zeigen, daß $S_\alpha(\eta; A)$ die Resolvente von A^α ist. Der Operator $A_\varepsilon=A+\varepsilon I$ $(\varepsilon>0)$ ist beschränkt invertierbar, und daher ergibt sich nach I: $(A_\varepsilon^\alpha+\eta I)^{-1}=S_\alpha\,(\eta; A_\varepsilon)$. Folglich gilt für $\delta>0$

(9) $$\begin{aligned}\|I-S_\alpha(\eta; A)(A^\alpha+\eta I)\|&\leqq\|(A_\varepsilon^\alpha+\eta I)^{-1}(A_\varepsilon^\alpha+\eta I)-(A_\varepsilon^\alpha+\eta I)^{-1}(A^\alpha+\eta I)\|+\\&+\|S_\alpha(\eta; A_\varepsilon)(A^\alpha+\eta I)-S_\alpha(\eta; A)(A^\alpha+\eta I)\|\leqq\\&\leqq\frac{M}{\eta}\|A_\varepsilon^\alpha-A^\alpha\|+\|A^\alpha+\eta I\|\int_0^\delta\frac{2Mr^{\alpha-1}\,dr}{r^{2\alpha}+2\eta r^\alpha\cos\pi\alpha+\eta^2}+\\&+\varepsilon\|A^\alpha+\eta I\|\int_\delta^\infty\frac{M^2r^{\alpha-2}\,dr}{r^{2\alpha}+2\eta r^\alpha\cos\pi\alpha+\eta^2}.\end{aligned}$$

Die Operatoren A_ε^α konvergieren für $\varepsilon\searrow 0$ in der gleichmäßigen Operatorentopologie gegen A^α, denn es ist

$$\|A_\varepsilon^\alpha-A^\alpha\|\leqq\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left\{\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\right\}M^2\varepsilon^\alpha\qquad(\varepsilon>0,\ 0<\alpha<1)\quad\text{(vgl. [9])}.$$

Wählt man in (9) $\delta>0$ hinreichend klein und läßt anschließend $\varepsilon\searrow 0$ streben, so erhält man $S_\alpha(\eta; A)(A^\alpha+\eta I)=I$. In entsprechender Weise ergibt sich $(A^\alpha+\eta I)\cdot$ $\cdot\,S_\alpha(\eta; A)=I$, d. h.

(10) $$(A^\alpha+\eta I)^{-1}=S_\alpha(\eta; A).$$

III. Nun seien A ein beliebiger Operator vom Typ (M) und $A_n=nA(A+nI)^{-1}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Wir stellen zunächst einige Eigenschaften der Operatoren A_n zusammen:

a) A_n ist beschränkt.

b) A_n ist vom Typ (M') $(M'=2M+1)$. Das zeigt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}&\|(A_n+\eta I)^{-1}\|=\|(A+nI)\bigl(A(n+\eta)+\eta nI\bigr)^{-1}\|=\\&=\frac{1}{n+\eta}\left\|(A+nI)\left(A+\frac{\eta n}{n+\eta}I\right)^{-1}\right\|\leqq\frac{1+M}{n+\eta}+\frac{M}{\eta}\leqq\frac{1+2M}{\eta}\qquad(\eta>0).\end{aligned}$$

c) Für $x \in \mathfrak{D}(A)$ gilt $A_n x \to Ax$ $(n \to \infty)$.

d) Die Folge $\{(A_n+\eta I)^{-1}\}$ konvergiert in der starken Operatorentopologie gegen $(A+\eta I)^{-1}$. Für $x \in \mathfrak{D}(A)$ erhält man nämlich

$$\|(A_n+\eta I)^{-1}x-(A+\eta I)^{-1}x\| \leqq \frac{M(2M+1)}{\eta^2}\|(A-A_n)x\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Zu jedem $y \in X$ existiert nach Voraussetzung eine Folge $\{y_m\} \subset \mathfrak{D}(A)$ $(m=1, 2, \ldots)$ derart, daß $y_m \to y$ für $m \to \infty$ gilt. Es ist folglich für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\|(A_n+\eta I)^{-1}y-(A+\eta I)^{-1}y\| \leqq \|(A_n+\eta I)^{-1}y-(A_n+\eta I)^{-1}y_m\|+ \\ &+\|(A_n+\eta I)^{-1}y_m-(A+\eta I)^{-1}y_m\|+\|(A+\eta I)^{-1}y_m-(A+\eta I)^{-1}y\| \leqq \\ &\leqq \frac{2M+1}{\eta}\|y-y_m\|+\frac{(2M+1)M}{\eta^2}\|(A-A_n)y_m\|+\frac{M}{\eta}\|y-y_m\| \leqq \varepsilon, \end{aligned} \tag{11}$$

falls man ein m so wählt, daß $(3M+1)\eta^{-1}\|y-y_m\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ und $n \geqq n_0(\varepsilon)$ ist.

e) Für $y \in X$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} S_\alpha(\eta;\, A_n)y=S_\alpha(\eta;\, A)y$. Es sei $\delta > 0$ beliebig. Für ein $\varepsilon > 0$ ergibt sich dann

$$\left\| \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu^\alpha\{(A_n+\mu I)^{-1}-(A+\mu I)^{-1}\}y}{\mu^{2\alpha}+2\eta\mu^\alpha\cos\pi\alpha+\eta^2}\,d\mu \right\| \leqq$$

$$\leqq \frac{3M+1}{\pi}\sin\pi\alpha \int_0^\varepsilon \frac{\mu^{\alpha-1}\,d\mu}{\mu^{2\alpha}+2\eta\mu^\alpha\cos\pi\alpha+\eta^2}\|y\|+$$

$$+\frac{3M+1}{\pi}\sin\pi\alpha \int_\varepsilon^\infty \frac{\mu^{\alpha-1}\,d\mu}{\mu^{2\alpha}+2\eta\mu^\alpha\cos\pi\alpha+\eta^2}\|y-y_m\|+$$

$$+\frac{(2M+1)M}{\pi}\sin\pi\alpha \int_\varepsilon^\infty \frac{\mu^{\alpha-2}\,d\mu}{\mu^{2\alpha}+2\eta\mu^\alpha\cos\pi\alpha+\eta^2}\|(A-A_n)y_m\|,$$

wobei (11) benutzt wurde. Wir wählen nun ein $\varepsilon > 0$, so daß der erste Summand der rechten Seite kleiner als $\delta/3$ wird, weiter existiert ein m derart, daß der zweite Summand kleiner als $\delta/3$ ist. Für alle $n \geqq n_0(\delta)$ gilt dann die Beziehung

$$\|S_\alpha(\eta;\, A_n)y-S_\alpha(\eta;\, A)y\| < \delta.$$

Mit diesen Vorbetrachtungen beweisen wir nun, daß $S_\alpha(A;\eta)=(A^\alpha+\eta I)^{-1}$ ist. Wie in II gezeigt wurde, besteht für die A_n die Gleichung $S_\alpha(\eta;\, A_n)(A_n^\alpha+\eta I)= =(A_n^\alpha+\eta I)S_\alpha(\eta;\, A_n)=I$. Es sei $x \in \mathfrak{D}(A)$. Dann ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned} &\|x-S_\alpha(\eta;\, A)(A^\alpha+\eta I)x\| \leqq \\ &\leqq \|(A_n^\alpha+\eta I)^{-1}(A_n^\alpha+\eta I)x-(A_n^\alpha+\eta I)^{-1}(A^\alpha+\eta I)x\|+ \\ &+\|S_\alpha(\eta;\, A_n)(A^\alpha+\eta I)x-S_\alpha(\eta;\, A)(A^\alpha+\eta I)x\|. \end{aligned}$$

Beide Summanden der rechten Seite dieser Ungleichung werden aber für hinreichend großes n beliebig klein. Für den zweiten Summanden folgt das unmittelbar aus der Aussage e), für den ersten Summanden aus den Abschätzungen

$$\|(A_n^\alpha+\eta I)^{-1}\| \leqq \frac{2M+1}{\eta}\,\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mu^{\alpha-1}\,d\mu}{\mu^{2\alpha}+2\mu^\alpha\cos\pi\alpha+1} = \frac{2M+1}{\eta}$$

$$(n = 1, 2, \ldots), \quad \text{und}$$

$$\|(A_n^\alpha - A^\alpha)x\| \leqq \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left\|\int_0^\infty \eta^{\alpha-1}\{A_n R(-\eta; A_n) - AR(-\eta; A)\}x\,d\eta\right\| \leqq$$

$$\leqq \sin\pi\alpha(M+1)\int_0^\delta \eta^{\alpha-1}\,d\eta\,\|x\| + \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}(2M+1)M\int_\delta^\infty \eta^{\alpha-2}\,d\eta\,\|(A-A_n)x\|$$

$$(x\in\mathfrak{D}(A);\ \delta>0).$$

Damit haben wir die Beziehung $S_\alpha(\eta;\ A)(A^\alpha+\eta I)x=x$ $(x\in\mathfrak{D}(A))$ bewiesen. Es sei $y\in\mathfrak{D}(A^\alpha)$. Wir betrachten die Folge $\{y_m\}\subset\mathfrak{D}(A)$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} y_m=y$, $\lim\limits_{m\to\infty} A^\alpha y_m=A^\alpha y$. Dann ergibt sich $\lim\limits_{m\to\infty} S_\alpha(\eta;\ A)(A^\alpha+\eta I)y_m=\lim\limits_{m\to\infty} y_m=y$, d. h., es ist

$$S_\alpha(\eta;\ A)(A^\alpha+\eta I)y=y.$$

Bleibt zu zeigen, daß der Operator $S_\alpha(\eta;\ A)$ auch Rechtsinverse von $(A^\alpha+\eta I)$ ist.

Der Operator $S_\alpha(\eta;\ A)$ stellt sich nach Definition als der Limes in der gleichmäßigen Operatorentopologie einer Folge von Operatoren

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k R(-\eta_k;\ A)$$

mit reellen α_k und positiven η_k dar. Wie man leicht sieht, ist $S_n\mathfrak{D}(A)\subset\mathfrak{D}(A)$ und $A^\alpha S_n x=S_n A^\alpha x$ $(x\in\mathfrak{D}(A))$. Für $n\to\infty$ erhält man $S_n x\to S_\alpha(\eta;\ A)x$ und $A^\alpha S_n x= S_n A^\alpha x\to S_\alpha(\eta;\ A)A^\alpha x$, also ist auf Grund der Abgeschlossenheit von A^α

$$S_\alpha(\eta;\ A)x\in\mathfrak{D}(A),\quad A^\alpha S_\alpha(\eta;\ A)x=S_\alpha(\eta;\ A)A^\alpha x,$$

d. h., auf $\mathfrak{D}(A)$ gilt $(A^\alpha+\eta I)S_\alpha(\eta;\ A)x=x$. Es sei nun $y\in X$ und $\{y_m\}\subset\mathfrak{D}(A)$ eine Folge, die gegen y strebt. Dann ergibt sich $(A^\alpha+\eta I)S_\alpha(\eta;\ A)y_m=y_m\to y$ $(m\to\infty)$. Aus der Abgeschlossenheit von A^α erhalten wir somit die Beziehung $(A^\alpha+\eta I)S_\alpha(\eta;\ A)=I$, d. h., es ist $S_\alpha(\eta;\ A)=(A^\alpha+\eta I)^{-1}$, was zu zeigen war.

Die Aussage $\sigma(A^\alpha)\subset\{z\colon |\arg z|\leqq\pi\alpha\}$ ergibt sich dann unmittelbar aus der Integraldarstellung (6) (vgl. [4]).

Aus der Integralform (6) der Resolvente von A^α folgt nun wie in [12] der

Satz 3. *Es sei A ein Operator vom Typ (M). Dann ist*

$$(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta} \quad \text{für} \quad 0\leqq\alpha,\ \beta\leqq 1.$$

Folgerung 2. *Es seien* A^α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ *die Potenzen eines Operators* A *vom Typ* (M). *Dann gilt für alle* $x \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$

$$\lim_{\beta \nearrow \alpha} A^\beta x = A^\alpha x.$$

Beweis. Aus Lemma 1 erhält man für einen Operator B vom Typ (M) die Aussage $\lim\limits_{\gamma \nearrow 1} B^\gamma x = Bx$ für alle $x \in \mathfrak{D}(B)$. Auf Grund von Satz 2 (vgl. (8)) ist A^α vom Typ (M), d. h., es gilt $\lim\limits_{\gamma \nearrow 1} (A^\alpha)^\gamma x = A^\alpha x$ $\left(x \in \mathfrak{D}(A^\alpha)\right)$. Entsprechend Satz 3 ist $(A^\alpha)^\gamma = A^{\alpha\gamma}$, woraus für $\beta = \alpha\gamma$ die Behauptung folgt.

5. Der Aussage über die Eindeutigkeit der $\frac{1}{n}$-ten Potenzen eines Operators vom Typ (M) stellen wir drei Lemmata voran.

Lemma 5. a) *Es sei* A *ein Operator vom Typ* (M). *Dann gehört der Sektor* $\left\{z\colon |\arg z| > \pi - \gamma;\ \tan\gamma = \frac{1}{M}\right\}$ [8]) *zur Resolventenmenge* $\varrho(A)$.

b) *Es sei* A *ein abgeschlossener Operator, dessen Spektrum* $\sigma(A)$ *zum Sektor* $\sum\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left\{z\colon |\arg z| \leqq \frac{\pi}{n}\right\}$ *gehört, wobei* n *eine natürliche Zahl ist. Ist dann* A^n *ein Operator vom Typ* (M), *so liegt* $\sigma(A)$ *sogar im Sektor*

$$\sum\left(\frac{\pi-\gamma}{n}\right) = \left\{z : |\arg z| \leqq \frac{\pi-\gamma}{n}\right\} \qquad \left(\tan\gamma = \frac{1}{M}\right).$$

Beweis. a) Nach Voraussetzung gehört die offene negative reelle Halbachse zur Resolventmenge $\varrho(A)$, und es existiert eine von $\eta > 0$ unabhängige Konstante $M > 0$, so daß die Beziehung $\|(A+\eta I)^{-1}\| \leqq \frac{M}{\eta}$ besteht. Für ein $z' = -\eta + i\frac{\eta\delta}{M}$ $(-1 < \delta < 1;\ 0 < \eta < \infty)$ erhält man folglich die Ungleichung $|z'+\eta|\,\|(A+\eta I)^{-1}\| \leqq$ $\leqq \frac{\eta|\delta|}{M} \cdot \frac{M}{\eta} = |\delta| < 1.$

Bekanntlich [12] gilt für alle z mit der Eigenschaft $|z+\eta| < \left(\|(A+\eta I)^{-1}\|\right)^{-1}$, daß $z \in \varrho(A)$ ist. Die Menge aller $z' = -\eta + i\frac{\delta\eta}{M}$ $(-1 < \delta < 1;\ 0 < \eta < \infty)$ gehört also zu $\varrho(A)$ und bildet ihrerseits den Sektor $\left\{z\colon |\arg z| > \pi - \gamma;\ \tan\gamma = \frac{1}{M}\right\}$.

b) Entsprechend dem Spektralabbildungssatz für Polynome abgeschlossener Operatoren, s. [3] S. 604, gilt einerseits $\{\sigma(A)\}^n = \sigma(A^n)$. Andererseits ergibt sich auf Grund der Aussage a): $\sigma(A^n) \subset \{z\colon |\arg z| \leqq \pi - \gamma\}$ $\left(\gamma = \operatorname{Arc}\tan\frac{1}{M}\right)$. Es ist also $\{\sigma(A)\}^n \subset \{z\colon |\arg z| \leqq \pi - \gamma\}$, woraus wegen der Voraussetzung $\sigma(A) \subset \sum\left(\frac{\pi}{n}\right)$ unmittelbar die Behauptung folgt.

[8]) Das Argument $\arg z$ einer komplexen Zahl z sei stets so definiert, daß $-\pi < \arg z \leqq \pi$ ist, und es gelte $\arg 0 = 0$.

Lemma 6. *Es seien A_m $(m=1,2,\ldots)$ beschränkte Operatoren vom gleichen Typ (M). Konvergiert die Folge $\{A_m\}$ für $m\to\infty$ in der starken Operatorentopologie gegen I, so gilt auch* $\lim (A_m)^\alpha x = x$ $(x\in X;\ 0\leqq\alpha\leqq 1)$.

Beweis. Es sei $0<\alpha<1$. Wegen

$$\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \eta^{\alpha-1}(1+\eta)^{-1}\,d\eta = 1$$

erhält man dann für $x\in X$

$$\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \eta^{\alpha-1} R(-\eta;A_m)A_m x\,d\eta - x =$$

$$=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \eta^{\alpha-1}\{R(-\eta;A_m)A_m-(1+\eta)^{-1}I\}x\,d\eta.$$

Auf Grund der Voraussetzung $\|R(-\eta;\,A_m)\|\leqq\dfrac{M}{\eta}$ $(\eta>0)$ für alle $m=1,2,\ldots$ ergibt sich dann

$$\|(A_m)^\alpha x - x\| = \left\|\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\eta^\alpha}{1+\eta}R(-\eta;A_m)(A_m-I)x\,d\eta\right\| \leqq$$

$$\leqq M\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\eta^{\alpha-1}}{1+\eta}\,d\eta\,\|(A_m-I)x\|\to 0 \qquad (m\to\infty),$$

was zu zeigen war.

Im folgenden Lemma stellen wir einige Eigenschaften der Funktionen $f_m(z)=$ $=\left(\dfrac{m}{m+z^n}\right)^{1/n}$ (n — eine feste natürliche Zahl; $m=1,2,\ldots$) mit dem Ziel zusammen, einem abgeschlossenen Operator A, dessen Spektrum im Sektor $\sum\left(\dfrac{\omega}{n}\right)$ $(0<\omega<\pi)$ liegt, entsprechend dem Riesz—Dunford—Taylorschen Funktionalkalkül beschränkte Operatoren $f_m(A)$ $(m=1,2,\ldots)$ zuzuordnen. Die Spektraleigenschaften von $f_m(A)$ und die Beziehung $\lim f_m(A)x=x$ $(x\in X)$ werden im Beweis zur eingangs genannten Eindeutigkeitsaussage eine wesentliche Rolle spielen.

Lemma 7. *Es seien n eine natürliche Zahl, $n>1$, und* $f_m(z)=\left(\dfrac{m}{m+z^n}\right)^{1/n}$ $(m=1,2,\ldots)$; *dabei denkt man die komplexe Ebene längs der n Verbindungsstrecken von* $-\dfrac{1}{2}\sqrt[n]{m}$ $(\sqrt[n]{m}>0)$ *zu den n Punkten* $\sqrt[n]{m}\,e^{i\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi}$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ *aufgeschnitten, und es wird derjenige Zweig der Funktionen genommen, für den gilt:* $f_m(z)>0$ *für* $z>0$. *Dann gilt:*

a) *Die Funktionen* $f_m(z)$ $(m=1, 2, \dots)$ *sind auf jedem Sektor* $\sum\left(\frac{\omega}{n}\right) = \left\{z : |\arg z| \leqq \frac{\omega}{n}\right\}$ $(0<\omega<\pi)$ *analytisch.*

b) *Die Funktionen* $f_m(z)$ $(m=1, 2, \dots)$ *sind im Unendlichen analytisch und haben dort eine Nullstelle erster Ordnung.*

c) *Die Funktionen* $f_m(z)$ *und* $g_m(z) = z f_m(z)$ *bilden jeden Sektor* $\sum\left(\frac{\omega}{n}\right)$ $(0<\omega<\pi)$ *in sich ab.*

Beweis. a) ist klar.

b) folgt aus der Reihenentwicklung um den Punkt $z=\infty$:

$$f_m(z) = m^{\frac{1}{n}} \frac{1}{z}\left(1 - \frac{m}{nz^n} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)}{2!}\frac{m^2}{z^{2n}} - + \dots\right) \qquad \text{(vgl. [2]).}$$

c) Es sei $0<\arg z \leqq \frac{\omega}{n}$ $(0<\omega<\pi)$. Dann erhält man für die Funktionen $f_m(z)$ $(m=1, 2, \dots)$ die Beziehung

$$\arg f_m(z) = \frac{1}{n}\arg\left(\frac{m}{m+z^n}\right) = -\frac{1}{n}\arg(m+z^n) \geqq -\frac{1}{n}\arg z^n \geqq -\frac{\omega}{n}.$$

Außerdem ist wegen $\arg z \geqq 0$

$$\arg f_m(z) = -\frac{1}{n}\arg(m+z^n) \leqq -\frac{1}{n}\arg m = 0,$$

woraus sich die Aussage

$$0 \geqq \arg f_m(z) \geqq -\frac{\omega}{n} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \arg z \leqq \frac{\omega}{n}$$

ergibt. In analoger Weise zeigt man ohne Schwierigkeiten die Beziehungen

$$0 \leqq \arg f_m(z) \leqq \frac{\omega}{n} \quad \text{für} \quad 0 \geqq \arg z \geqq -\frac{\omega}{n}$$

und

$$-\frac{\omega}{n} \leqq \arg g_m(z) \leqq \frac{\omega}{n} \quad \text{für} \quad -\frac{\omega}{n} \leqq \arg z \leqq \frac{\omega}{n}.$$

6. Satz 4. *Es seien A ein Operator vom Typ* (M) *und* n $(n \geqq 2)$ *eine beliebige natürliche Zahl. Dann existiert genau ein abgeschlossener Operator B mit den Eigenschaften*

(1) $$B^n = A$$

und

(2) $$\sigma(B) \subset \sum\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left\{z : |\arg z| \leqq \frac{\pi}{n}\right\},$$

also ist notwendigerweise $B = A^{\frac{1}{n}}$.

Beweis. Die Existenz eines solchen Operators B, nämlich $B = A^{\frac{1}{n}}$, erhält man unmittelbar aus den Sätzen 1 und 2. Der Satz ist folglich bewiesen, wenn wir zeigen, daß für jeden abgeschlossenen Operator B, mit den Eigenschaften:

(1') der Operator B^n ist vom Typ (M)

(2) $\sigma(B) \subset \sum\left(\frac{n}{\pi}\right) = \left\{z\colon |\arg z| \leqq \frac{\pi}{n}\right\}$,

gilt:
$$(B^n)^{\frac{1}{n}} = B.$$

Der Beweis für diese Beziehung erfolgt in drei Schritten.

I. Der Operator B erfülle neben den Voraussetzungen (1') und (2) folgende zusätzliche Bedingungen:

(3) B sei beschränkt und

(4) $0 \in \varrho(B)$.

Nach Lemma 5a) erhält man $\sigma(B^n) \subset \{z\colon |\arg z| \leqq \pi - \gamma\}$ $\left(\gamma = \operatorname{Arc} \tan \frac{1}{M}\right)$. Wegen $0 \in \varrho(B)$ gilt $0 \in \varrho(B^n)$; die Funktion $f(z) = z^{1/n}$ ist folglich auf $\sigma(B^n)$ analytisch. Mit Hilfe des Riesz—Dunfordschen Funktionalkalküls kann man deshalb der Funktion $f(z) = z^{1/n}$ einen Operator $f(B^n) = (B^n)^{1/n}$ [9]) zuordnen. Da der Operator B die Voraussetzung von Lemma 5b) erfüllt, gilt $\sigma(B) \subset \sum\left(\frac{\pi - \gamma}{n}\right)$ $\left(\gamma = \operatorname{Arc} \tan \frac{1}{M}\right)$. Wegen der Voraussetzung (4) läßt sich eine Umgebung U des Spektrums $\sigma(B)$ finden, die den Nullpunkt nicht enthält. Auf U ist $(z^n)^{1/n} = z$. Unter den zusätzlichen Voraussetzungen (3) und (4) gilt also $B = (B^n)^{1/n}$.

II. Der Operator B erfülle neben den Bedingungen (1') und (2) die Voraussetzung (3). Dann genügt $B_\varepsilon = B + \varepsilon I$ $(\varepsilon > 0)$ den Bedingungen (1'), (2) (3) und (4). Zuerst ist es klar, daß $\sigma(B_\varepsilon) = \sigma(B) + \varepsilon$, also $\sigma(B_\varepsilon) \subset \sum\left(\frac{\gamma}{n}\right) + \varepsilon \subset \sum\left(\frac{\gamma}{n}\right)$. Außerdem ist $\sigma\{(B_\varepsilon)^n\} = \{\sigma(B_\varepsilon)\}^n$ und folglich ist $(B_\varepsilon)^n$ ein Operator vom Typ (M') mit $M' = 1 + \|(B_\varepsilon)^n\| \sup\limits_{0 \leqq \eta < \infty} \|R(-\eta; (B_\varepsilon)^n)\|$. Entsprechend dem Teil I erhält man also $[(B_\varepsilon)^n]^{1/n} = B_\varepsilon$.

Nach Voraussetzung (1') ist B^n vom Typ (M). Folglich existiert der Operator $(B^n)^{1/n}$, und es folgt auf Grund der Ungleichung (vgl. [9])

$$\|[(B_\varepsilon)^n]^{\frac{1}{n}} - (B^n)^{\frac{1}{n}}\| \leqq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \frac{2^{1-\frac{1}{n}}}{1 - \frac{1}{n}} \tilde{M}^{1+\alpha} \|(B_\varepsilon)^n - B^n\|^{\frac{1}{n}} \leqq$$

$$\leqq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \frac{2^{1-\frac{1}{n}}}{1 - \frac{1}{n}} \tilde{M}^{1+\alpha} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k \|B\|^{n-k}$$

(wobei $(\tilde{M} = \max(M, M'))$, die Beziehung $[B^n]^{1/n} = B$.

---

[9]) Die Identität von $f(B^n)$ und der $\frac{1}{n}$-ten Potenz von B^n ergibt sich mit Hilfe einer einfachen Umformung des Integrals $-\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C z^{1/n} R(z; B^n)\, dz$ bei geeigneter Wahl des Integrationsweges C (vgl. [9]).

III. Der Operator B genüge den Bedingungen (1′) und (2). Nach Lemma 5b) ergibt sich dann $\sigma(B)\subset\sum\left(\frac{\pi-\gamma}{n}\right)$ $\left(\gamma=\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{M}\right)$. Die in Lemma 7 eingeführten Funktionen $f_m(z)$ und $g_m(z)=zf_m(z)$ $(m=1,2,\ldots)$ sind folglich auf $\sigma(B)$ und einer Umgebung von $z=\infty$ analytisch. Entsprechend dem Riesz—Dunford—Taylorschen Funktionalkalkül für einen abgeschlossenen Operator B mit nicht leerer Resolventenmenge $\varrho(B)$ existieren den Funktionen $f_m(z)$ und $g_m(z)$ $(m=1,2,\ldots)$ zugeordnete Operatoren $f_m(B)$ und $g_m(B)=Bf_m(B)$ mit folgenden Eigenschaften (vgl. [3]):

a) $[f_m(B)]^n=[f_m]^n(B)=m(mI+B^n)^{-1}$ $\quad(m=1,2,\ldots)$,

b) $\sigma(f_m(B))=f_m(\sigma(B)\cup\{z=\infty\})$,

c₁) $g_m(B)x=Bf_m(B)x=f_m(B)Bx$ $\quad(x\in\mathfrak{D}(B);\ m=1,2,\ldots)$,

c₂) $\sigma(g_m(B))=g_m(\sigma(B)\cup\{z=\infty\})$,

c₃) $[g_m(B)]^n=[g_m]^n(B)=B^nm(mI+B^n)^{-1}$.

Wir zeigen nun zunächst mit Hilfe der Aussagen c₂) und c₃), daß die beschränkten Operatoren $g_m(B)$ die Bedingungen (1′) und (2) erfüllen, um das Ergebnis des Teiles II auf diese Operatoren anwenden zu können. Auf Grund des Spektralabbildungssatzes c₂) und der Voraussetzungen (1′) und (2) für B ist entsprechend der Lemmata 5b) und 7c)

$$\sigma(g_m(B))=g_m(\sigma(B)\cup\{z=\infty\})\subset$$

$$\subset g_m\left(\sum\left(\frac{\gamma}{n}\right)\cup\{z=\infty\}\right)\subset\sum\left(\frac{\gamma}{n}\right)\subset\sum\left(\frac{\pi}{n}\right)\quad\left(0<\gamma=\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{M}\right).$$

Wegen der Bedingung (1′), die wir an den Operator B stellen, sind die Operatoren $[g_m(B)]^n=[g_m^n(B)]=B^nm(mI+B^n)^{-1}$ für alle $m=1,2,\ldots$ vom Typ $(2M+1)$ (vgl. Beweis zum Satz 2; Abschnitt 3b). Die Aussage des Teiles II ergibt dann angewandt auf die Operatoren $g_m(B)$ $(m=1,2,\ldots)$

$$\left([g_m(B)]^n\right)^{\frac{1}{n}}=g_m(B)\quad\text{oder}\quad[mB^n(mI+B^n)^{-1}]^{\frac{1}{n}}=Bf_m(B).$$

Da nach Voraussetzung (1′) für B der Operator B^n vom Typ (M) ist, gilt (vgl. Beweis zum Satz 2; Abschnitt 3)

$$\lim_{m\to\infty}[mB^n(mI+B^n)^{-1}]x=(B^n)^{\frac{1}{n}}x\quad(x\in\mathfrak{D}(B^n)).$$

Zum Beweis der Aussage $(B^n)^{1/n}=B$ bleibt zu zeigen, daß für jedes $x\in\mathfrak{D}(B^n)$ die Beziehung $\lim Bf_m(B)x=Bx$ $(m\to\infty)$ besteht. Die beschränkten Operatoren $f_m(B)$ $(m=1,2,\ldots)$ genügen aber den Bedingungen (1′), (2) und (3), denn es ist für alle $m=1,2,\ldots$

$$\|[(f_m(B))^n+\eta I]^{-1}\|=\|[m(mI+B^n)^{-1}+\eta I]^{-1}\|=$$

$$=\frac{1}{\eta}\left\|(mI+B^n)\left(\frac{m+m\eta}{\eta}I+B^n\right)^{-1}\right\|\le\frac{M}{1+\eta}+\frac{M+1}{\eta}\le\frac{2M+1}{\eta}\quad(\eta>0)$$

und wegen der Lemmata 5b) und 7c)

$$\sigma(f_m(B))\subset f_m(\sigma(B)\cup\{z=\infty\})\subset f_m\left(\Sigma\left(\frac{\pi-\gamma}{n}\right)\right)\subset\Sigma\left(\frac{\pi-\gamma}{n}\right)$$

$$\left(0<\gamma=\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{M}\right).$$

Man bekommt also entsprechend der Aussage von Teil II

$$[(f_m(B))^n]^{\frac{1}{n}}=f_m(B).$$

Die Operatoren $f_m(B)$ und B sind auf $\mathfrak{D}(B)$ vertauschbar (vgl. c_1), so daß sich nach Lemma 6 die Beziehung

$$\lim_{m\to\infty}Bf_m(B)x=\lim_{m\to\infty}f_m(B)Bx=\lim_{m\to\infty}[m(mI+B^n)^{-1}]^{\frac{1}{n}}x=Bx$$

für alle $x\in\mathfrak{D}(B)$ ergibt. Die abgeschlossenen Operatoren $(B^n)^{1/n}$ und B stimmen auf $\mathfrak{D}(B^n)$ überein, es gilt also entsprechend der Definition der $\frac{1}{n}$-ten Potenz von B^n

$$(B^n)^{\frac{1}{n}}=B,$$

was zu zeigen war.

Als einfache Folgerung des eben bewiesenen Sachverhaltes ergibt sich:

Satz 5. *Es seien A ein Operator vom Typ (M) und A_α $(0<\alpha\leqq 1)$ eine Schar von abgeschlossenen Operatoren mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *für $0\leqq\beta\leqq\alpha\leqq 1$ ist $\mathfrak{D}(A_\beta)\supset\mathfrak{D}(A_\alpha)$;*
2. *die Schar A_α ist linksseitig stetig auf $\mathfrak{D}(A_\alpha)$, d. h.*

$$\lim_{\beta\nearrow\alpha}A_\beta x=A_\alpha x\qquad(x\in\mathfrak{D}(A_\alpha));$$

3. *für alle $n=1,2,\ldots$ gilt $\sigma(A_{1/n})\subset\left\{z\colon|\arg z|\leqq\frac{\pi}{n}\right\}$;*
4. *für $p=1,2,\ldots,n$ ist $(A_{1/n})^p=A_{p/n}$ und $A_1=A$.*

Dann gilt für $0<\alpha\leqq 1$

$$A_\alpha=A^\alpha.$$

Beweis. Auf Grund der Eigenschaften 3 und 4 erhält man nach Satz 4

$$A_{\frac{1}{n}}=A^{\frac{1}{n}}.$$

Wegen der Gültigkeit des Potenzgesetzes (Satz 1) liefert die Voraussetzung 4 für $p=1,2,\ldots,n$

$$(A_{\frac{p}{n}})=(A_{\frac{1}{n}})^p=(A^{\frac{1}{n}})^p=A^{\frac{p}{n}},$$

d. h., für alle rationalen α $(0<\alpha\leqq 1)$ ist $A_\alpha = A^\alpha$. Mit Hilfe der linksseitigen Stetigkeit von A_α (Voraussetzung 2) und A^α (vgl. Folgerung 2) bzgl. α ergibt sich also

$$A_\alpha = A^\alpha,$$

was zu beweisen war.

Literaturverzeichnis

[1] A. V. Balakrishnan, Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them, *Pac. J. Math.*, **10** (1960), 419—437.
[2] H. Behnke und F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (Berlin, 1955).
[3] N. Dunford und J. T. Schwartz, *Linear operators.* Part I (New York, 1958).
[4] T. Kato, Note on fractional powers of linear operators, *Proc. Japan Acad.*, **36** (3) (1960), 94—96.
[5] T. Kato, Fractional powers of dissipative operators, *J. Math. Soc. Japan*, **13** (1961), 246—274.
[6] T. Kato und H. Tanabe, On the abstract evolution equation, *Osaka Math. J.*, **14** (1962), 107—133.
[7] M. A. Krasnoselskij, P. P. Sabreiko, E. I. Pustylnik und P. E. Sobolevskij, *Integraloperatoren in Räumen summierbarer Funktionen* (Moskau, 1966). (Russisch)
[8] H. Langer, Über die Wurzeln eines maximalen dissipativen Operators, *Acta Math. Hung.*, **13** (1962), 415—424.
[9] W. I. Mazajeff und J. A. Palant, Über die Potenzen eines beschränkten dissipativen Operators, *Ukr. Matem. Žurnal*, **14** (1962), 329—337. (Russisch)
[10] F. Riesz und B. Sz.-Nagy, *Vorlesungen über Funktionalanalysis* (Berlin, 1956).
[11] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI. Calcul fonctionnel, *Acta. Sci. Math.*, **23** (1962), 130—167.
[12] K. Yosida, *Functional Analysis* (Berlin, 1965).

(Eingegangen am 5. September 1966)