Zur Theorie der Algebren und monomialen Ringe

Von HANNS JOACHIM WEINERT in Potsdam (DDR)

Einleitung

Es sei R ein Ring, dessen Modul R^+ Linksvektorraum über einem Ring $\mathscr{R}$ ist, so daß also für beliebige a, b aus $\mathscr{R}$ und α, β aus R

(1) $$a(\alpha+\beta) = a\alpha+a\beta,\ (a+b)\alpha = a\alpha+b\alpha,\ (ab)\alpha = a(b\alpha)$$

gilt und eine (linear unabhängige) Basis $\{\omega_i\}$ beliebiger Mächtigkeit existiert; letzteres besagt, daß sich jedes Element $\alpha \in R$ eindeutig gemäß

$$\alpha = \sum_i a_i \omega_i, \quad \text{fast alle} \quad a_i = 0$$

linear kombinieren läßt. Üblicherweise nennt man R eine (linksseitige) Algebra über $\mathscr{R}$, wenn darüber hinaus stets

(2) $$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta = \alpha(a\beta)$$

erfüllt ist. Dies hat den Vorteil, daß dann bezüglich jeder Basis $\{\omega_i\}$ von R^+ die Multiplikation in R bereits durch die Produkte

(3) $$\omega_i\omega_j = \sum_k c_{ij}^{(k)} \omega_k$$

bzw. durch die Strukturkonstanten $c_{ij}^{(k)}$ bestimmt ist. Doch ergibt sich aus (2) im allgemeinen die Notwendigkeit, mit kommutativen Grundringen $\mathscr{R}$ zu arbeiten, wodurch wichtige Klassen algebraischer Strukturen nicht erfaßt werden. Aus diesem Grunde führte PICKERT in [4] den Begriff der *Algebra im weiteren Sinne* (i. w. S.) ein, wobei (2) durch eine schwächere Forderung ersetzt wird. Einen anderen Weg geht RÉDEI in [5], indem er R als Links- und Rechtsvektorraum über $\mathscr{R}$ betrachtet und den Begriff der *Doppelalgebra* einführt, ohne jedoch eine entsprechende Verallgemeinerung des Begriffes der (linksseitigen) Algebra vorzunehmen. Schließlich lassen sich aber auch auf diese Weise eine Reihe von Strukturen noch nicht erfassen, für die eine einheitliche Behandlung zusammen mit den bisher genannten Algebrenbegriffen wünschenswert wäre; als Beispiele hierzu nennen wir die „nichtkommutativen" Polynomringe von ORE (vgl. [3]) und die von RÉDEI in [5], § 65 bzw. von BÓDI in [2] eingeführten verschränkten Produkte, auf die wir auch im Text noch einmal zu sprechen kommen.

In der vorliegenden Arbeit stellen wir daher in § 1 zunächst einige allgemeine Aussagen über Ringe R zusammen, die Vektorräume über $\mathfrak{R}$ sind, welche die entsprechenden Aussagen für die oben genannten Algebrenbegriffe enthalten. Weiterhin werden wir durch diese Betrachtungen eigentlich zwangsläufig auf den PICKERTschen Begriff der Algebra i. w. S. geführt, der einen glücklichen Kompromiß zwischen Einfachheit und Allgemeinheit darstellt (vgl. § 2). Bei der Behandlung dieser Algebren können wir uns freilich im Hinblick auf [4] kurz fassen. In § 3 zeigen wir, daß der RÉDEIsche Begriff der Doppelalgebra mit dem der Algebra i. w. S. in folgendem Sinne gleichwertig ist: Jede Doppelalgebra ist stets auch Algebra i. w. S., während aus jeder Algebra i. w. S. durch geeignete Definition einer Rechtsoperatoranwendung der Elemente von $\mathfrak{R}$ eine Doppelalgebra entsteht, falls $\mathfrak{R}$ ein Einselement enthält.

Schließlich entwickeln wir in § 4 die Grundlagen einer allgemeinen Theorie der *monomialen Ringe*. Dabei stützen wir unsere Begriffsbildungen zunächst nur auf § 1, geben ein Assoziativitätskriterium und führen allgemeine Halbgruppenringe als spezielle monomiale Ringe ein. Es stellt sich aber heraus, daß jeder assoziative monomiale Ring entweder selbst ein allgemeiner Halbgruppenring ist oder in einfacher Weise als Restklassenring eines solchen Halbgruppenringes gewonnen werden kann. Diese Aussagen gelten (natürlich mit gewissen Vereinfachungen) erst recht, wenn die betrachteten monomialen Ringe sogar Algebren i. w. S. sind, womit wir im wesentlichen zu dem in [5], § 66 durchgeführten Fall gelangen.

In einer Fortsetzung dieser Arbeit werden wir auf das von RÉDEI a. a. O. gestellte und zum Teil behandelte Problem eingehen, einen Überblick über alle monomialen Ringe mit einem bestimmten Faktorensystem zu gewinnen.

§ 1. Vektorraumringe

Der Kürze halber wollen wir einen Ring R, der zugleich Linksvektorraum über einem Ring $\mathfrak{R}$ ist (vgl. Einleitung), einen Vektorraumring über $\mathfrak{R}$ nennen. Dabei sei der Grundring $\mathfrak{R}$ stets assoziativ, während wir für R auch nichtassoziative Ringe zulassen; weiterhin enthalte $\mathfrak{R}$ stets wenigstens ein Rechtseinselement e_r.[1]). Ist $\{\omega_i\}$ eine beliebige Basis von R über $\mathfrak{R}$, wobei i eine Indexmenge I durchläuft, so gilt für das Produkt zweier „Monome" $a\omega_i$ und $b\omega_j$ aus R

$$a\omega_i \cdot b\omega_j = \sum_{k \in I} F(a, b, i, j, k)\,\omega_k, \tag{4}$$

wobei die Koeffizienten $F(a, b, i, j, k) \in \mathfrak{R}$ von allen angegebenen Argumenten abhängen können und natürlich für feste Wahl von a, b, i und j nur jeweils endlich viele verschieden von 0 sind. Weiterhin kann dann das Produkt beliebiger Elemente aus R gemäß

$$\left(\sum a_i\omega_i\right)\left(\sum_j b_j\omega_j\right) = \sum_{i,j,k} F(a_i, b_j, i, j, k)\,\omega_k \tag{5}$$

---

[1]) Bekanntlich ist die Existenz eines Rechtseinselementes in $\mathfrak{R}$ notwendig und hinreichend für die Existenz von (Links-) Vektorräumen über $\mathfrak{R}$, vgl. etwa [4].

angegeben werden. Aus dem distributiven Gesetz folgen noch die Regeln

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad F(a+a', b, i, j, k) &= F(a, b, i, j, k) + F(a', b, i, j, k)\\
F(a, b+b', i, j, k) &= F(a, b, i, j, k) + F(a, b', i, j, k),
\end{aligned}
$$

woraus sich insbesondere ergibt:

$$(7)\qquad F(0, b, i, j, k) = F(a, 0, i, j, k) = 0.$$

Allgemein wollen wir eine Funktion $F(a, b, i, j, k)$, welche jedem Argumentsystem $a \in \mathfrak{R}$, $b \in \mathfrak{R}$, $i \in I$, $j \in I$, $k \in I$ eindeutig ein Element aus $\mathfrak{R}$ zuordnet, eine *Strukturfunktion* (bezüglich $\mathfrak{R}$ und I) nennen, wenn sie der im Anschluß an (4) formulierten Endlichkeitsbedingung und den Regeln (6) genügt.

Satz 1. *Ist R ein Vektorraumring über $\mathfrak{R}$ mit der Basis $\{\omega_\iota\}_{\iota \in I}$, so wird durch das Produkt der Monome gemäß* (4) *eine Strukturfunktion gegeben, welche die Multiplikation in R nach* (5) *festlegt. Der Vektorraumring R ist also durch $\mathfrak{R}$, die Mächtigkeit von I und seine Strukturfunktion $F(a, b, i, j, k)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Umgekehrt entsteht zu jedem Ring $\mathfrak{R}$, einer Indexmenge I und einer Strukturfunktion bezüglich $\mathfrak{R}$ und I ein Vektorraumring R mit dieser Strukturfunktion, indem man in einen $\mathfrak{R}$-Vektorraum R^+ mit einer Basis $\{\omega_\iota\}_{\iota \in I}$ eine Multiplikation durch* (5) *einführt.*

Nach dem Vorangegangenen ist nur noch die letzte Behauptung zu beweisen. Dabei ist klar, daß durch (5) je zwei Elementen von R^+ eindeutig ein Element aus R^+ als Produkt zugeordnet wird, und aus (5) auch (4) folgt. Die Gültigkeit des distributiven Gesetzes ergibt sich unmittelbar auf Grund der für die Strukturfunktion vorausgesetzten Regeln (6).

Satz 2. *Ein Vektorraumring R über $\mathfrak{R}$ ist genau dann assoziativ, wenn seine Strukturfunktion den Assoziativitätsbedingungen*

$$(8)\qquad \sum_t F\bigl(F(a, b, i, j, t), c, t, k, l\bigr) = \sum_t F\bigl(a, F(b, c, j, k, t), i, t, l\bigr)$$

für alle a, b und c aus $\mathfrak{R}$ und alle i, j, k und l aus I genügt.

Beweis. Unter Verwendung von (4) und (5) erhält man, daß

$$(a\omega_i b\omega_j) c\omega_k = a\omega_i (b\omega_j c\omega_k)$$

für alle a, b, c, i, j und k gerade mit der Bedingung (8) gleichwertig ist. Daraus folgt aber unter Verwendung des distributiven Gesetzes bzw. nach (6) bereits die Assoziativität der Multiplikation in R.

Als erstes Beispiel für diese allgemeinen Überlegungen betrachten wir Oresche Polynomringe (vgl. [3]). Dazu sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einselement[2]), η ein Endomorphismus von $\mathfrak{R}$ und δ eine zu diesem Endomorphismus korrespondierende Ableitung in $\mathfrak{R}$, d. h. eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich, die

$$(a+b)^\delta = a^\delta + b^\delta \quad \text{und} \quad (ab)^\delta = a^\eta b^\delta + a^\delta b$$

---

[2]) Ore betrachtet als Grundbereiche nur Körper, doch macht diese Verallgemeinerung unsere Überlegungen nicht schwieriger.

für alle a und b aus $\mathfrak{R}$ erfüllt. Ore betrachtet dann den Ring R aller Polynome $\Sigma\, a_i x^i$ mit $a_i \in \mathfrak{R}$, dessen Multiplikation sich von der üblichen im wesentlichen durch $xb = b^\eta x + b^\delta$ unterscheidet. Daraus folgt allgemeiner

$$ax^i bx^j = aS_{i,0}(b)\, x^{i+j} + aS_{i,1}(b)\, x^{i+j-1} + \dots + aS_{i,i}(b)\, x^j$$

mit

$$S_{i,t}(b) = \sum b^{\eta^{i-t}\delta^t},$$

wobei diese Summen über alle $\binom{i}{t}$ Permutationen (mit Wiederholung) der $i-t$ Exponenten η und der t Exponenten δ zu erstrecken ist. Allerdings wird in [3] die Frage, ob es solche Ringe überhaupt gibt, d. h. ob zu einem Ring $\mathfrak{R}$ mit einem Paar (η, δ) derartiger Abbildungen ein (assoziativer) Ring R mit der obigen Multiplikation existiert, gar nicht gestellt. Wir beantworten diese Frage positiv, indem wir für $\mathfrak{R}$ mit der Indexmenge $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ eine Strukturfunktion gemäß

$$F(a, b, i, j, k) = aS_{i,i+j-k}(b) \quad \text{mit} \quad S_{i,t}(b) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0 \text{ bzw. } t > i$$

einführen, welche die Endlichkeitsbedingung und (6) ersichtlich erfüllt. Nach Satz 1 gibt es dann einen entsprechenden Vektorraumring R über $\mathfrak{R}$ mit der Basis $\{\omega, \omega_1, \dots\}$, der bis auf die Bezeichnung ω_i für x^i gerade der Oresche Polynomring ist. Dieser Ring R ist nach Satz 2 stets assoziativ, denn es gilt für alle a, b, c aus $\mathfrak{R}$ und alle i, j, k, l aus I:

$$\sum_t F\big(F(a, b, i, j, t), c, t, k, l\big) = \sum_t aS_{i,i+j-t}(b)\, S_{t,t+k-l}(c) =$$

$$= \sum_s aS_{i,i+s-l}\big(bS_{j,j+k-s}(c)\big) = \sum_s F\big(a, F(b, c, j, k, s), i, s, l\big).$$

Wir bemerken hierzu lediglich, daß nur für $k \leqq l \leqq i+j+k$ von 0 verschiedene Summanden auftreten, und die Summationen aus dem gleichen Grunde auf

$$\max(j, l-k) \leqq t \leqq i+j$$
$$\max(k, l-i) \leqq s \leqq \min(l, j+k)$$

beschränkt werden können. Im übrigen erfordert der Nachweis dieser Gleichheit ein ausführliches Ausschreiben beider Seiten, worauf wir hier jedoch nicht eingehen wollen.

Erheblich einfacher werden diese Überlegungen für den Spezialfall der Oreschen Polynomringe[3]), wo für η ein nichttrivialer Endomorphismus von $\mathfrak{R}$, für δ jedoch der Nullendomorphismus genommen wird. Dann erhalten wir

$$F(a, b, i, j, k) = \begin{cases} ab^{\eta^i} & \text{für} \quad k = i+j \\ 0 & \text{für} \quad k \neq i+j \end{cases}$$

und damit

$$a\omega_i b\omega_j = ab^{\eta^i}\omega_{i+j}, \quad \text{also} \quad ax^i bx^j = ab^{\eta^i} x^{i+j},$$

[3]) Solche Ringe werden z. B. in [1] und [6] herangezogen. Übrigens ist auch der Fall, wo η die identische Abbildung und δ eine Ableitung im üblichen Sinne ist, entsprechend leicht zu behandeln.

und die obige Assoziativitätsbedingung reduziert sich auf

$$ab^{\eta^i}c^{\eta^{i+j}} = a(bc^{\eta^j})^{\eta^i}.$$

Als zweites Beispiel behandeln wir eine Klasse von Vektorraumringen, welche die verschränkten Produkte im Sinne von [2] bzw. [5] als Spezialfälle enthält. Hierzu sei $\mathfrak{R}$ ein Ring und $H=\{\alpha, \beta, \dots\}$ eine Halbgruppe. Jedem $\alpha \in H$ wird ein Endomorphismus von $\mathfrak{R}$ zugeordnet, wofür wir kurz $a \to \alpha a$ mit

$$\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b, \quad \alpha(ab) = \alpha a \; \alpha b$$

schreiben. Weiter sei ein „Faktorensystem" $c_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{R}$ gegeben, welches zusammen mit dem „Endomorphismensystem" αa den Relationen

$$c_{\alpha,\beta} \; c_{\alpha\beta,\gamma} = \alpha(c_{\beta,\gamma}) \; c_{\alpha,\beta\gamma}$$

$$c_{\alpha,\beta} \; (\alpha\beta) c = \alpha(\beta c) \; c_{\alpha,\beta}$$

für alle $c \in \mathfrak{R}$ und alle α, β und γ aus H genügt. Wir betrachten einen Vektorraum R^+ über $\mathfrak{R}$ mit einer Basis $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in H}$ und erhalten ersichtlich eine Strukturfunktion gemäß

$$F(a, b, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} a \; \alpha b \; c_{\alpha,\beta} & \text{für} \quad \alpha\beta = \gamma \\ 0 & \text{für} \quad \alpha\beta \neq \gamma, \end{cases}$$

die der Multiplikation der Monome

$$a\omega_\alpha b\omega_\beta = a \; \alpha b \; c_{\alpha,\beta} \; \omega_{\alpha\beta}$$

entspricht. Nach Satz 1 entsteht so ein Vektorraumring R über $\mathfrak{R}$, und wir wollen jeden Ring dieser Art ein *verschränktes Produkt des Ringes $\mathfrak{R}$ mit der Halbgruppe H* nennen. Diese Ringe sind assoziativ, da die Bedingung (8) von Satz 2 die Form

$$a \; \alpha b \; c_{\alpha,\beta}(\alpha\beta)c \; c_{\alpha\beta,\gamma} = a \; \alpha(b \; \beta c \; c_{\beta,\gamma}) \; c_{\alpha,\beta\gamma}$$

annimmt, wofür die oben geforderten Relationen ersichtlich hinreichend (aber im allgemeinen nicht notwendig) sind. Auf diese Weise erhält man verschränkte Produkte von $\mathfrak{R}$ mit H, wie sie Bódi in [2] definiert und untersucht, wenn man statt Endomorphismen nur Automorphismen von $\mathfrak{R}$ zuläßt und noch fordert, daß $\mathfrak{R}$ ein Einselement hat und die Elemente $c_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{R}$ Inverse besitzen. Wählt man insbesondere $\mathfrak{R}$ als Schiefkörper, H als Gruppe und die Funktionensysteme so, daß sie eine Schreiersche Gruppenerweiterung $\mathfrak{R}^* \circ H$ mit der multiplikativen Gruppe $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{R}$ als Normalteiler liefern, so entstehen die von Rédei in [5] eingeführten verschränkten Produkte.

Wir bemerken bereits hier, daß alle diese Beispiele von Vektorraumringen im allgemeinen keine Algebren i. w. S. sind; die speziellen Oreschen Polynomringe und die verschränkten Produkte stellen auch zugleich Beispiele für monomiale Ringe dar.

§ 2. Algebren im weiteren Sinne

Es sei R ein Vektorraumring über $\mathfrak{R}$ und $\{\omega_i\}$ eine Basis von R über $\mathfrak{R}$. Wir nehmen zunächst an, daß $\mathfrak{R}$ ein Einselement e besitzt; dann legen wegen[4]) $e\omega_i = \omega_i$

[4]) Das Einselement e von $\mathfrak{R}$ ist stets Einheitsoperator für alle Elemente aus R.

die Werte $F(e, e, i, j, k)$ der Strukturfunktion gerade die Multiplikation der Basiselemente fest. Von besonders einfacher Struktur werden dann diejenigen Vektorraumringe R sein, für die mit den Produkten der Elemente einer (geeigneten) Basis bereits die gesamte Multiplikation in R festgelegt ist, und zwar in einer Weise, die keinerlei weitere Kenntnisse über R und $\mathfrak{R}$ benötigt. Dafür liegt schon im Hinblick auf (6) der Ansatz

$$F(a, b, i, j, k) = a \cdot b \cdot F(e, e, i, j, k) \tag{9}$$

nahe. Gehen wir dann gemäß $F(e, e, i, j, k) = c_{ij}^{(k)}$ zur geläufigen Schreibweise mit Strukturkonstanten über, so erhalten wir an Stelle von (4) und (5)

$$a\omega_i b\omega_j = ab \sum_k c_{ij}^{(k)} \omega_k = (ab)(\omega_i \omega_j) \tag{10}$$

bzw.

$$\left(\sum a_i\omega_i\right)\left(\sum b_j\omega_j\right) = \sum_{i,j,k} a_i b_j c_{ij}^{(k)} \omega_k = \sum_{i,j} (a_i b_j)(\omega_i \omega_j). \tag{11}$$

Auf diese Weise gelangen wir (abgesehen von der hier nicht geforderten Assoziativität der Multiplikation) zu dem von Pickert in [4] eingeführten Begriff der *Algebra im weiteren Sinne* als einem Vektorraumring R über $\mathfrak{R}$, dessen Multiplikation mit einer geeigneten Basis $\{\omega_i\}$ durch (10) oder (11) festgelegt wird. Verwenden wir wie Pickert nur die linken Gleichungen von (10) bzw. (11), so wird die Existenz eines Einselementes von $\mathfrak{R}$ nicht benötigt, womit der Begriff der Algebra i. w. S. auch für Grundringe ohne Einselement erklärt ist. Wir können auch diesen Fall unseren Betrachtungen in § 1 unterordnen, wenn wir statt (9) mit einem beliebigen Rechtseinselement e_r von $\mathfrak{R}$

$$F(a, b, i, j, k) = a \cdot b \cdot F(e_r, e_r, i, j, k) = a \cdot b \cdot c_{ij}^{(k)} \tag{9'}$$

schreiben. Freilich legen dann die Strukturkonstanten $F(e_r, e_r, i, j, k) = c_{ij}^{(k)}$ nicht die Multiplikation der Basiselemente ω_i selbst, sondern die der Elemente $e_r\omega_i$ fest, und wir erhalten analog zu (10) und (11)

$$a\omega_i b\omega_j = ab \sum_k c_{ij}^{(k)} \omega_k = (ab)(e_r\omega_i e_r\omega_j) \tag{10'}$$

bzw.

$$\left(\sum a_i\omega_i\right)\left(\sum b_j\omega_j\right) = \sum_{i,j,k} a_i b_j c_{ij}^{(k)} \omega_k = \sum_{i,j} (a_i b_j)(e_r\omega_i e_r\omega_j). \tag{11'}$$

Jedoch empfiehlt es sich, auch dann mit den Relationen (10) und (11) weiterzuarbeiten, was stets möglich ist, wenn man von vornherein von der Basis $\{\omega_i\}$ zu der Basis $\{e_r\omega_i\}$ übergeht und diese wieder mit $\{\omega_i\}$ bezeichnet, womit man erreicht, daß das (willkürlich ausgewählte) Rechtseinselement e_r von $\mathfrak{R}$ auf die Basiselemente als Einheitsoperator wirkt. Wir wollen eine Basis $\{\omega_i\}$ einer Algebra i. w. S. über $\mathfrak{R}$, die diese Eigenschaft hat und für die (10) bzw. (11) gilt, eine *Algebrenbasis* von R über $\mathfrak{R}$ (i. w. S.) nennen.

Satz 3. *Ist R eine Algebra i. w. S. über $\mathfrak{R}$ mit der Algebrenbasis $\{\omega_i\}_{i\in I}$, so wird durch die Produkte der Basiselemente*

$$\omega_i \omega_j = \sum_k c_{ij}^{(k)} \omega_k$$

ein System von Strukturkonstanten $c_{ij}^{(k)}$ *gegeben, welches die Multiplikation in* R *gemäß* (11) *festlegt. Die Algebra* R *ist also durch* $\mathfrak{R}$, *die Mächtigkeit von* I, *die oben angegebene Auszeichnung eines Rechtseinselementes* e_r *von* $\mathfrak{R}$ *und die Strukturkonstanten* $c_{ij}^{(k)}$ *bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Umgekehrt entsteht zu jedem Ring* $\mathfrak{R}$, *einer Indexmenge* I, *einem willkürlich ausgezeichneten Rechtseinselement* e_r *von* $\mathfrak{R}$ *und willkürlich vorgegebenen Strukturkonstanten*[5] $c_{ij}^{(k)} \in \mathfrak{R}$ *eine Algebra* R *i. w. S. mit diesen Strukturkonstanten, indem man in einem* $\mathfrak{R}$-*Vektorraum* R^+ *mit einer Basis* $\{\omega_i\}_{i\in I}$ *eine Multiplikation durch* (11) *einführt.*

Der Beweis ergibt sich sofort, wenn man gemäß (9′) zu einer Strukturfunktion übergeht und Satz 1 anwendet. Weiterhin erhalten wir aus Satz 2 unmittelbar:

Satz 4. *Eine Algebra* R *i. w. S. über* $\mathfrak{R}$ *ist genau dann assoziativ, wenn ihre Strukturkonstanten den Assoziativitätsbedingungen*

$$\sum_t c_{ij}^{(t)} c c_{tk}^{(l)} = c \sum_t c_{jk}^{(t)} c_{it}^{(l)} \tag{12}$$

für alle $c \in \mathfrak{R}$ *und alle* i, j, k *und* l *aus* I *erfüllen. Dagegen ist für die Assoziativität der Multiplikation der Basiselemente bereits*

$$\sum_t c_{ij}^{(t)} c_{tk}^{(l)} = \sum_t c_{jk}^{(t)} c_{it}^{(l)} \tag{13}$$

für alle i, j, k *und* l *notwendig und hinreichend.*

Zur Unterstützung der damit vorgenommenen Auszeichnung der Algebren i. w. S. unter allen Vektorraumringen bemerken wir noch, daß zu jedem Vektorraumring R über einem Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement[6]) eine Algebra $\tilde{R}$ i. w. S. mit der gleichen Multiplikation der Basiselemente korrespondiert. Man braucht ja nur von der Strukturfunktion $F(a, b, i, j, k)$ von R gemäß

$$\tilde{F}(a, b, i, j, k) = a \cdot b \cdot F(e, e, i, j, k)$$

zu einer neuen Strukturfunktion und damit zu $\tilde{R}$ überzugehen. Allerdings überträgt sich dabei die Assoziativität von R auf $\tilde{R}$ im allgemeinen nur dann, wenn die als Strukturkonstante von $\tilde{R}$ verwendeten Werte $F(e, e, i, j, k)$ der Strukturfunktion von R im Zentrum von $\mathfrak{R}$ liegen, wie aus Satz 4 hervorgeht.

Aus dieser Überlegung ergibt sich auch, daß ein Orescher Polynomring R nur in dem trivialen Fall eine Algebra i. w. S. (natürlich bezüglich der gleichen Basis $\{x^i\}$) ist, wenn für η die identische Abbildung und für δ der Nullendomorphismus gewählt werden, also der übliche Polynomring $\mathfrak{R}[x]$ vorliegt. Wie man sich leicht überlegt korrespondiert nämlich sonst in dem eben beschriebenen Sinne zu R gerade $\tilde{R} = \mathfrak{R}[x]$ als Algebra i. w. S. mit gleicher Multiplikation der Basiselemente, aber nicht gleicher Multiplikation in R bzw. $\tilde{R}$, womit aus Satz 3 folgt, daß nur $\tilde{R}$ Algebra i. w. S. sein kann. Entsprechend stellt man fest, daß ein verschränktes Produkt

[5]) Es versteht sich, daß natürlich bei festem i und j nur endlich viele $c_{ij}^{(k)} \neq 0$ gewählt werden dürfen.

[6]) Auch hier könnte man sich wie oben leicht von dieser Einschränkung frei machen.

genau dann Algebra i. w. S. ist, wenn die zugehörigen Endomorphismensysteme trivial gewählt werden, also $\alpha b = b$ für alle α und b gilt.

Für eine nähere Untersuchung der Algebren i. w. S. verweisen wir auf [4]. Wir bemerken nur noch, daß auch für nicht notwendig assoziative Algebren R i. w. S. über $\mathfrak{R}$ die Existenz eines Linkseinselementes von R bereits die Existenz eines Einselementes von $\mathfrak{R}$ und die Möglichkeit der isomorphen Einbettung von $\mathfrak{R}$ in R nach sich zieht. Schließlich heben wir hinsichtlich des Zusammenhanges der Algebren i. w. S. mit den üblicher Weise betrachteten Algebren noch folgendes hervor:

Sehen wir von der Verwendung der Strukturkonstanten einmal ab, so haben wir diejenigen Vektorraumringe R über $\mathfrak{R}$ als Algebren i. w. S. ausgezeichnet, die bezüglich einer geeigneten Basis $\{\omega_i\}$ stets

$$(a\omega_i)(b\omega_j) = (ab)(\omega_i\omega_j) \tag{10}$$

oder, was auf das gleiche hinausläuft,

$$(\sum a_i\omega_i)(\sum b_j\omega_j) = \sum_{i,j} (a_ib_j)(\omega_i\omega_j) \tag{11}$$

erfüllen. Wie man leicht nachprüft, folgt daraus (unter Verwendung von $e_r\omega_i = \omega_i$)

$$a(\omega_i\omega_j) = (a\omega_i)\omega_j = \omega_i(a\omega_j) \tag{14}$$

und

$$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta \quad \text{für } \alpha \in R, \beta \in R, \tag{15}$$

während umgekehrt (14) und (15) wiederum (10) und damit (11) nach sich zieht[7]). Man kann aber leicht Beispiele dafür angeben, daß bei einem Wechsel der Basis die Eigenschaften (10), (11) und (14) nicht erhalten bleiben. So können wir nach den Sätzen 3 und 4 etwa eine (assoziative) Algebra R i. w. S. über dem Quaternionenkörper $\mathfrak{R}$ (mit den Quaternioneneinheiten i, j, k) durch die Strukturtafel der Basiselemente

	ω_1	ω_2
ω_1	ω_1	ω_2
ω_2	ω_2	ω_1

und (11) definieren. Gehen wir dann zu der Basis $\mu_1 = \omega_1$ und $\mu_2 = i\omega_2$ über, so gilt z. B. statt (10), (11) bzw. (14_2)

$$(j\mu_2)\mu_2 = (ji\omega_2)i\omega_2 = j\cdot i^2\omega_1 = -j\omega_1 \neq$$
$$\neq \mu_2(j\mu_2) = (i\omega_2)(ji\omega_2) = iji\omega_1 = j\omega_1 .$$

Dies zeigt, daß der Begriff der Algebra i. w. S. in der Tat wesentlich von der jeweils zu Grunde gelegten Basis abhängig ist. Dagegen gelten in den üblicher Weise durch

$$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta = \alpha(a\beta) \tag{2}$$

definierten Algebren, die wir mit [4] auch Algebren im engeren Sinne (i. e. S.) nennen

---

[7]) Die folgende Überlegung zeigt auch, daß man nicht etwa allein von (15) auf (10) bzw. (11) schließen kann.

wollen, die Regeln (10), (11) und (14) für jede Basis $\{\omega_i\}$ von R über $\mathfrak{R}$. Allerdings ist eben diese Forderung (2) sehr einschneidend. Bekanntlich ergibt sich aus ihr

$$(ab-ba)(\alpha\beta) = o$$

für alle a, b, α und β. Wäre dann $\mathfrak{R}$ nicht kommutativ, so dürfte das von allen $\alpha\beta$ erzeugte Ideal R^2 von R kein über $\mathfrak{R}$ linear unabhängiges Element enthalten; insbesondere müßte für jede Vektorraumbasis $\{\bar{\omega}_i\}$ von R^+ über $\mathfrak{R}$ stets $\{\omega_i\} \cap R^2 = \emptyset$ gelten. Schon die Existenz eines Rechts- oder Linkseinselementes in R (vgl. [4]) führt dann wegen $R^2 = R$ zur Kommutativität von $\mathfrak{R}$. Umgekehrt fallen natürlich über einem kommutativen Grundring $\mathfrak{R}$ die Begriffe der Algebra i. w. S. und i. e. S. zusammen.

§ 3. Doppelalgebren

Als nächstes wollen wir den von RÉDEI geprägten Begriff der Doppelalgebra (vgl. [5], § 64) in unsere allgemeinen Zusammenhänge einordnen. Während RÉDEI die Theorie der Algebren auf Algebren i. e. S. und damit im wesentlichen auf kommutative Grundringe beschränkt, führt er zur Erfassung entsprechender Strukturen über nichtkommutativen Grundringen den Begriff der Doppelalgebra ein. Dazu sei R ein $\mathfrak{R}$-Doppelmodul, d. h. sowohl ein $\mathfrak{R}$-Links- wie $\mathfrak{R}$-Rechtsmodul, der noch

$$(a\alpha)b = a(\alpha b) \tag{16}$$

für alle $a \in \mathfrak{R}$, $b \in \mathfrak{R}$ und $\alpha \in R$ erfüllt. Insbesondere heißt R ein $\mathfrak{R}$-Doppelvektorraum, wenn eine Basis $\{\omega_i\}$ von R über $\mathfrak{R}$ als Linksvektorraum existiert, für deren Elemente überdies

$$a\omega_i = \omega_i a \tag{17}$$

für alle $a \in \mathfrak{R}$ gilt[8]). Schließlich heißt ein assoziativer Ring R eine $\mathfrak{R}$-Doppelalgebra, wenn R ein Doppelvektorraum über R bezüglich der Basis $\{\omega_i\}$ ist und stets die Relationen

$$(\alpha a)\beta = \alpha(a\beta) \tag{18}$$

sowie

$$a(\omega_i\omega_j) = (a\omega_i)\omega_j = \omega_i(a\omega_j) \tag{14}$$

gelten. Natürlich ist auch diese Begriffsbildung von der Basis $\{\omega_i\}$ abhängig. Wir zeigen sogleich allgemein:

Satz 5. *Jede $\mathfrak{R}$-Doppelalgebra R ist bezüglich der gleichen Basis $\{\omega_i\}$ auch (linksseitige) Algebra i. w. S. über $\mathfrak{R}$. Umgekehrt kann jede Algebra R i. w. S. über einem Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement e bezüglich der gleichen Basis $\{\omega_i\}$ zur $\mathfrak{R}$-Doppelalgebra gemacht werden, wenn man die Rechtsoperatoranwendung von $a \in \mathfrak{R}$ auf $\alpha = \Sigma a_i\omega_i \in R$ wie folgt definiert:*

$$\alpha a = (\Sigma a_i\omega_i)a = \Sigma a_i a\omega_i. \tag{19}$$

[8]) Doppelvektorräume können also nur über Grundringen mit Einselement existieren.

Beweis. Unter Verwendung von (18), (16), (17), (1) und (14) erhalten wir

$$(a\omega_i)(b\omega_j) = \big((a\omega_i)b\big)\omega_j = \big(a(\omega_i b)\big)\omega_j = \big(a(b\omega_i)\big)\omega_j$$
$$= \big((ab)\omega_i\big)\omega_j = (ab)(\omega_i\omega_j),$$

womit jede $\mathfrak{R}$-Doppelalgebra auch (10) erfüllt und damit Algebra i. w. S. ist. Für die Umkehrung stellen wir zunächst fest, daß durch (19) eine eindeutig bestimmte Operatoranwendung erklärt wird (die natürlich auch von der zugrunde gelegten Basis abhängig ist). Wie man leicht nachrechnet, wird damit R auch zu einem $\mathfrak{R}$-Rechtsmodul, und es gilt (16) und (18), letzteres z. B. gemäß:

$$(\alpha a)\beta = \big(\Sigma(a_i a)\omega_i\big)(\Sigma b_j\omega_j) = \Sigma(a_i a)b_j(\omega_i\omega_j)$$
$$= \Sigma a_i(ab_j)(\omega_i\omega_j) = (\Sigma a_i\omega_i)(\Sigma ab_j\omega_j) = \alpha(a\beta).$$

Schließlich benötigt man zum Nachweis von (17) das Einselement e von $\mathfrak{R}$:

$$\omega_i a = (e\omega_i)a = (ea)\omega_i = a\omega_i.$$

Wir bemerken noch, daß sowohl die Begriffsbildung der $\mathfrak{R}$-Doppelalgebra R wie auch unser Satz nicht von der (in [5] vorausgesetzten) Assoziativität von R abhängen. Weiterhin lehrt unser Beweis, daß zur Festlegung des Begriffes der Doppelalgebra die Forderung (16) entbehrlich ist, da von ihr nur $(a\omega_i)b = a(\omega_i b)$ verwendet wurde, was aber bereits aus (17), (1) und den entsprechenden Linksmodulgesetzen folgt, und daß man sich bei (14) auf die erste Gleichung beschränken könnte. Doch läuft unseres Erachtens Satz 5 gerade darauf hinaus, die Heranziehung der Rechtsoperatoranwendung überhaupt als unnötig anzusehen und den Begriff der Doppelalgebra durch den strukturell einfacheren der Algebra i. w. S. zu ersetzen.

§ 4. Monomiale Ringe

Der von Rédei in [5], § 66 intendierte allgemeine Begriff des *monomialen Ringes R über einem Ring* $\mathfrak{R}$ läßt sich mit Hilfe der Überlegungen aus § 1 wie folgt fassen: R ist ein Vektorraumring über $\mathfrak{R}$, der eine solche Basis $\{\omega_i\}$ besitzt, daß die zugehörige Strukturfunktion $F(a, b, i, j, k)$ bei festen Argumenten a, b, i und j höchstens für ein k einen von 0 verschiedenen Wert annimmt. Wir werden dann auch diese Basis bzw. die zugehörige Strukturfunktion monomial nennen; es liegt auf der Hand, daß bei einem Basiswechsel eine monomiale Basis nicht wieder in eine solche übergehen muß. Beispiele von Vektorraumringen, die in dem eben definierten Sinne (assoziative) monomiale Ringe sind, haben wir bereits in § 1 gegeben.

In Anlehnung an Rédei bezeichnen wir die Elemente einer monomialen Basis von R über $\mathfrak{R}$ mit $\omega_A, \omega_B, \ldots$, wobei die Indices $A, B, \ldots$ eine Indexmenge H durchlaufen. Um über die Sätze von § 1 hinausgehende Aussagen machen zu können, setzen wir noch voraus, daß das Verschwinden der monomialen Strukturfunktion

$$F(a, b, A, B, C) \tag{20}$$

für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ nur von den Argumenten A, B und C abhängt. Dies trifft etwa für die eben zitierten Beispiele weitgehend zu. Auch ist diese Voraussetzung stets erfüllt, wenn die monomiale Basis zugleich Algebrenbasis i. w. S. ist[9]), wie aus

$$F(a, b, A, B, C) = abF(e_r, e_r, A, B, C)$$

folgt; doch wollen wir auf diesen Fall erst später zu sprechen kommen.

Im folgenden verstehen wir also unter einem monomialen Ring R über $\mathfrak{R}$ einen solchen, der eine monomiale Basis $\{\omega_A, \omega_B, \ldots\}$ besitzt, wo die zugehörige Strukturfunktion auch der bei (20) formulierten Bedingung genügt. Nur in diesem Sinne wollen wir von jetzt an auch die Bezeichnungen „monomiale Basis" und „monomiale Strukturfunktion" verwenden. Das bedeutet also, daß in einem monomialen Ring R das Produkt zweier Monome $a\omega_A \neq o$ und $b\omega_B \neq o$ bei festen ω_A und ω_B entweder stets verschwindet oder stets ein Monom $F(a, b, A, B, C)\omega_C \neq o$ mit festem ω_C ergibt. Falls es nun zu jedem Indexpaar A, B einen Index C mit $F(a, b, A, B, C) \neq 0$ gibt, so wird durch $AB = C$ in der Indexmenge H eine Multiplikation erklärt. Sonst erweitern wir die Indexmenge H durch ein nicht in H vorhandenes Element $\mathcal{O}$ zur Menge $H_0 = H \cup \{\mathcal{O}\}$ und erklären in H_0 eine Multiplikation wie folgt:

$$\begin{aligned}(21)\qquad & AB = C \quad \text{falls } F(a, b, A, B, C) \neq 0 \text{ für } a \neq 0 \text{ und } b \neq 0,\\ & AB = \mathcal{O} \quad \text{falls } F(a, b, A, B, X) = 0 \text{ für } a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ und alle } X \in H,\\ & A\mathcal{O} = \mathcal{O}A = \mathcal{O}.\end{aligned}$$

Entsprechend erweitern wir auch den Definitionsbereich der Strukturfunktion $F(a,b,A,B,C)$, indem wir $F(a,b,A,B,C) = 0$ setzen, falls für A oder B oder C das Element $\mathcal{O}$ eingesetzt wird. Deuten wir noch $\omega_{\mathcal{O}}$ in $0\omega_{\mathcal{O}}$ als ein beliebiges Basiselement, so gilt für die Multiplikation in R ganz allgemein

$$(22)\qquad a\omega_A b\omega_B = F(a, b, A, B, AB)\,\omega_{AB}.$$

Mit diesen Vorbereitungen gelangen wir zu folgendem Satz, wobei wir daran erinnern, daß nach Satz 1 aus jedem Vektorraum R^+ über $\mathfrak{R}$ mit einer Basis $\{\omega_A, \omega_B, \ldots\}$ durch eine monomiale Strukturfunktion $F(a, b, A, B, C)$ ein monomialer Ring R mit dieser Basis entsteht.

Satz 6. *Es sei R ein monomialer Ring über $\mathfrak{R}$ mit einer monomialen Basis $\{\omega_A, \omega_B, \ldots\}$ und der monomialen Strukturfunktion $F(a, b, A, B, C)$. Dann ist R genau dann assoziativ, wenn die Indexmenge H bzw. die erweiterte Indexmenge H_0 mit der eben erklärten Multiplikation eine Halbgruppe bildet und die (gegebenenfalls für Argumente aus H_0 erweiterte) Strukturfunktion die Bedingungen*

$$\begin{aligned}(23)\qquad & F(F(a, b, A, B, AB), c, AB, C, (AB)C) =\\ & \qquad = F(a, F(b, c, B, C, BC), A, BC, A(BC))\end{aligned}$$

für alle a, b und c aus $\mathfrak{R}$ und alle A, B und C aus H erfüllt.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung sogleich für den Fall, daß in R Monome $a\omega_A \neq o$ und $b\omega_B \neq o$ mit $a\omega_A b\omega_B = o$ auftreten und mit der erweiterten Indexmenge H_0 gearbeitet werden muß; der andere Fall ergibt sich (unter entsprechenden Vereinfachungen) auf die gleiche Weise.

---

[9]) Nur dieser Fall wird bei Rédei a. a. O. implizit betrachtet.

Ist R assoziativ, dann bildet die Menge $\mathfrak{H}$ aller Monome $x\omega_A$ mit beliebigen $x \neq 0$ aus $\mathfrak{R}$ und $A \in H$ sowie das Element $o = 0\omega_X$ für alle $X \in H$ mit der Multiplikation von R eine Halbgruppe. Durch

$$x\omega_A \to A \qquad \text{für alle } x \neq 0 \text{ aus } \mathfrak{R},$$

$$o = 0\omega_X \to \mathcal{O}$$

wird $\mathfrak{H}$ ersichtlich eindeutig und auch relationstreu auf H_0 abgebildet. Letzteres folgt aus

$$x\omega_A y\omega_B = F(x, y, A, B, C)\omega_C \text{ für } AB = C,$$

$$x\omega_A y\omega_B = o \qquad \text{für } AB = \mathcal{O},$$

sowie

$$0\omega_A y\omega_B = x\omega_A 0\omega_B = 0\omega_A 0\omega_B = 0\omega_X.$$

Als homomorphes Bild der Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ist H_0 eine Halbgruppe. Weiterhin ist für die Assoziativität von R gemäß Satz 2 notwendig und hinreichend, daß die Strukturfunktion (8), also

$$\sum_T F\big(F(a, b, A, B, T), c, T, C, L\big) = \sum_T F\big(a, F(b, c, B, C, T), A, T, L\big) \tag{24}$$

für alle a, b und c aus $\mathfrak{R}$ und alle A, B, C und L aus H erfüllt, wobei aber eben hier für diese Argumente wie auch für T nur Elemente aus H zugelassen sind. Nun ist in (24) die linke Summe gleich

$$F\big(F(a, b, A, B, AB), c, AB, C, (AB)C\big) \quad \text{falls } AB \in H \text{ und } (AB)C \in H,$$

während sonst sogar alle Summanden verschwinden. Entsprechendes gilt für die rechte Summe von (24) mit

$$F\big(a, F(b, c, B, C, BC), A, BC, A(BC)\big) \quad \text{falls } BC \in H \text{ und } A(BC) \in H.$$

Führen nun alle Produkte AB, $(AB)C$, BC, $A(BC)$ nicht aus H heraus, so reduziert sich (24) gerade auf (23). Andernfalls gilt aber stets $(AB)C = A(BC) = \mathcal{O}$, da wir nach dem bereits bewiesenen nur noch den Fall zu berücksichtigen brauchen, daß H_0 Halbgruppe ist. Dann verschwinden aber bei (24) wie bei (23) beide Seiten, das erstere nach der eben getroffenen Feststellung, das letztere gemäß unserer Vereinbarung über das (bei (23) zugelassene) Auftreten des Argumentes $\mathcal{O}$ in der Strukturfunktion.

Bisher haben wir in der Indexmenge H bzw. in H_0 eine Multiplikation eingeführt, die diesen Mengen durch R bzw. eine vorgegebene Strukturfunktion aufgeprägt wurden. Wir können aber auch von einer in $H = \{A, B, \ldots\}$ vorgegebenen Multiplikation ausgehen und solche monomialen Ringe R über $\mathfrak{R}$ mit einer Basis $\{\omega_A, \omega_B, \ldots\}$ betrachten, für welche die Multiplikation von R mit der Multiplikation von H im Einklang steht, d. h.

$$\begin{aligned} &\text{für } AB \neq C \text{ stets } F(a, b, A, B, C) = 0, \\ &\text{für } AB = C \text{ entweder stets } F(a, b, A, B, C) = 0 \\ &\qquad\qquad \text{oder } F(a, b, A, B, C) \neq 0 \text{ für alle } a \neq 0 \text{ und } b \neq 0 \end{aligned} \tag{25}$$

gilt. Ist insbesondere H eine Halbgruppe und der monomiale Ring R assoziativ, so nennen wir ihn einen *verallgemeinerten Halbgruppenring* von H über $\mathfrak{R}$ [10]).

Satz 7. *Ein monomialer Ring R über $\mathfrak{R}$ mit einer monomialen Basis $\{\omega_A, \omega_B, \ldots\}$, deren Indices eine Halbgruppe H durchlaufen, ist genau dann ein verallgemeinerter Halbgruppenring von H über $\mathfrak{R}$, wenn die zugehörige Strukturfunktion $F(a, b, A, B, C)$ gemäß* (25) *mit der Multiplikation von H im Einklang steht und der Assoziativitätsbedingung* (23) *von Satz* 6 *genügt.*

Der allein erforderliche Nachweis für die Assoziativität von R ergibt sich mit dem gleichen Gedankengang wie im Beweis zu Satz 6.

Wir betrachten nun einen assoziativen, monomialen Ring R über $\mathfrak{R}$, der den Voraussetzungen von Satz 6 genügt. Für den Fall, daß das Produkt zweier von o verschiedener Monome $a\omega_A$ und $b\omega_B$ von R stets $a\omega_A b\omega_B \neq o$ erfüllt, wird die Indexmenge H durch die bei (21) erklärte Multiplikation zur Halbgruppe, und R ist ersichtlich ein verallgemeinerter Halbgruppenring von H über $\mathfrak{R}$ [11]). Falls dagegen Produkte von o verschiedener Monome aus R verschwinden, bildet nur die erweiterte Indexmenge H_0 mit der Multiplikation (21) eine Halbgruppe, in der $\mathcal{O}$ Nullelement ist. Dann können wir aber einen verallgemeinerten Halbgruppenring R' von H_0 über $\mathfrak{R}$ bilden, indem wir $\{\omega_{\mathcal{O}}, \omega_A, \omega_B, \ldots\}$ als Basis von R' über $\mathfrak{R}$ nehmen und eine Multiplikation durch die vorn bereits auf den Definitionsbereich H_0 erweiterte Strukturfunktion $F(a, b, A, B, C)$ von R einführen [12]). In der Tat ist $F(a, b, A, B, C)$ dann auch bezüglich der Basis $\{\omega_{\mathcal{O}}, \omega_A, \omega_B, \ldots\}$ eine monomiale Strukturfunktion, während die Assoziativitätsbedingung (23) gerade in Satz 6 nachgewiesen wurde. Ersichtlich bilden dann die Monome $x\omega_{\mathcal{O}}$ für alle $x \in \mathfrak{R}$ als Annullatoren ein zulässiges Ideal $(e_r\omega_{\mathcal{O}})$ von R', und es gilt $R \cong R'/(e_r\omega_{\mathcal{O}})$. Dabei besteht die Restklassenbildung anschaulich gesprochen einfach darin, das Basiselement $\omega_{\mathcal{O}}$ mit dem Nullelement von R' zu identifizieren. Wir fassen zusammen:

Satz 8. *Ein assoziativer monomialer Ring R über $\mathfrak{R}$ mit der Basis $\{\omega_A\}_{A\in H}$ ist bezüglich der bei* (21) *erklärten Multiplikation in der Indexmenge H bzw. H_0 entweder ein verallgemeinerter Halbgruppenring von H über $\mathfrak{R}$ oder isomorph zum Restklassenring eines verallgemeinerten Halbgruppenringes R' von H_0 über $\mathfrak{R}$ nach dem Ideal $(e_r\omega_{\mathcal{O}})$ von R'.*

Wir wenden unsere Ergebnisse nun auf den Fall an, daß eine monomiale Basis $\{\omega_A, \omega_B, \ldots\}$ von R über $\mathfrak{R}$ existiert, die zugleich Algebrenbasis i. w. S. ist; wir nennen dann R eine monomiale Algebra i. w. S. über $\mathfrak{R}$. Die zugehörigen Strukturfunktionen sind durch

$$F(a, b, A, B, C) = a\cdot b\cdot F(e_l, e_r, A, B, C) = a\cdot b\cdot c_{A,B}^{(C)} \tag{26}$$

---

[10]) Mit $F(a, b, A, B, C)=0$ für $AB\neq C$ und $F(a, b, A, B, C)=ab$ für $AB=C$ entsteht so der Halbgruppenring von H über $\mathfrak{R}$ im üblichen Sinne.

[11]) Dieser Halbgruppenring hat die spezielle Eigenschaft, daß in (25) der erste Fall bei $AB=C$ nie eintritt.

[12]) Der Unterschied zu vorn besteht dann darin, daß wir $\omega_{\mathcal{O}}$ jetzt als ein weiteres Basiselement ansehen und nicht als eines der Basiselemente $\omega_A, \omega_B, \ldots$ deuten. Übrigens liegt auch hier ein Spezialfall von (25) vor, da wir für $AB=\mathcal{O}$ stets $F(a, b, A, B, \mathcal{O})=0$ haben.

und die Forderung gekennzeichnet, daß für jedes Paar A, B aus H höchstens ein $c_{A,B}^{(C)} \neq 0$ ist. Die Einführung einer Multiplikation in H bzw. H_0 erfolgt dann analog zu (21) gemäß

$$
\begin{aligned}
&AB = C \quad \text{falls} \quad c_{A,B}^{(C)} \neq 0,\\
(27)\qquad &AB = \mathcal{O} \quad \text{falls} \quad c_{A,B}^{(X)} = 0 \quad \text{für alle} \quad X \in H,\\
&A\mathcal{O} = \mathcal{O}A = \mathcal{O},
\end{aligned}
$$

und wir setzen auch hier $c_{A,B}^{(C)} = 0$, wenn für A oder B oder C das Element $\mathcal{O} \in H_0$ eingesetzt wird. Denkt man sich die Multiplikation von H bzw. H_0 bereits anderweitig fixiert, so können wir die Schreibweise durch

$$(28) \qquad c_{A,B} = c_{A,B}^{(AB)}$$

vereinfachen, da alle anderen Strukturkonstanten $c_{A,B}^{(C)}$ ohnehin verschwinden, während für die $c_{A,B}$

$$(29) \qquad c_{A,B} = 0 \text{ genau dann, wenn } AB = \mathcal{O}$$

gilt. An Stelle von (10) und (22) erhalten wir dann

$$(30) \qquad a\omega_A b\omega_B = ab\omega_A\omega_B = ab\, c_{A,B}\omega_{AB},$$

wobei natürlich wieder $\omega_{\mathcal{O}}$ in $0\omega_{\mathcal{O}}$ als ein beliebiges Basiselement zu deuten ist. Mit [5] nennen wir die $c_{A,B}$ in (28) das *Faktorensystem* von R über $\mathfrak{R}$ bezüglich $\{\omega_A\}_{A \in H}$, wobei wir nochmals betonen, daß dieser Begriffsbildung eine Festlegung der Multiplikation in H bzw. in H_0 vorauszugehen hat. Dann geht Satz 6 über in

Satz 9. *Es sei R eine monomiale Algebra i. w. S. über dem Ring $\mathfrak{R}$ mit einer monomialen Algebrenbasis $\{\omega_A, \omega_B, \ldots\}$ und dem Faktorensystem $\{c_{A,B}\}$. Dann ist R genau dann assoziativ, wenn die Indexmenge H bzw. die erweiterte Indexmenge H_0 mit der dem Faktorensystem $\{c_{A,B}\}$ zu Grunde gelegten Multiplikation eine Halbgruppe bildet und die Bedingung*

$$(31) \qquad c_{A,B}\, c\, c_{AB,C} = c\, c_{B,C}\, c_{A,BC}$$

für alle $c \in \mathfrak{R}$ und alls A, B und C aus H gilt. Falls dabei alle Faktoren $c_{A,B}$ im Zentrum von $\mathfrak{R}$ liegen, kann in (31) *das Element c auf beiden Seiten gestrichen werden* [13]).

Damit erhält man also unter Verwendung von Satz 3 sämtliche assoziativen monomialen Algebren R i. w. S. über $\mathfrak{R}$ mit einer Basis $\{\omega_A\}_{A\in H}$, indem man für H eine beliebige Halgbruppe oder die Menge der von $\mathcal{O}$ verschiedenen Elemente einer Halbgruppe H_0 mit Nullelement $\mathcal{O}$ nimmt und dazu alle Faktorensysteme $\{c_{A,B}\}$ bestimmt, welche die Bedingungen (29) und (31) erfüllen. Andererseits kann man natürlich auch zu einer beliebigen Halbgruppe H ein Faktorensystem $\{c_{A,B}\}$ betrachten, welches nur der Bedingung (31) genügt. Die Strukturfunktion

$$F(a, b, A, B, C) = \begin{cases} a \cdot b \cdot c_{A,B} & \text{für} \quad AB = C \\ 0 & \text{für} \quad AB \neq C \end{cases}$$

[13]) Vgl. auch [5], Satz 154. Die dort zu treffende Zusatzbedingung entfällt hier auf Grund unserer Erweiterung von H zu H_0.

erfüllt dann nämlich (25) und wegen (31) eben (23), so daß auf diese Weise nach Satz 7 ein verallgemeinerter Halbgruppenring R von H über $\mathfrak{R}$ mit der Basis $\{\omega_A\}_{A\in H}$ entsteht, die zugleich Algebrenbasis i. w. S. ist. Etwas allgemeiner als RÉDEI nennen wir dann R einen *Halbgruppenring mit Faktorensystem* über $\mathfrak{R}$ und fassen zusammen (vgl. [5], Satz 155):

Satz 10. *Ist H eine Halbgruppe, so ist der Halbgruppenring R über $\mathfrak{R}$ mit dem Faktorensystem $\{c_{A,B}\}$ genau dann definiert, wenn die Bedingung* (31) *für alle $c \in \mathfrak{R}$ und alle A, B und C aus H erfüllt ist.*

Analog übertragen wir Satz 8 und erhalten:

Satz 11. *Es sei R eine assoziative monomiale Algebra i. w. S. über $\mathfrak{R}$ mit der Basis $\{\omega_A\}_{A\in H}$ und dem Faktorensystem $\{c_{A,B}\}$. Dann ist R bezüglich der diesem Faktorensystem zu Grunde liegenden Multiplikation in H bzw. H_0 entweder der Halbgruppenring von H über $\mathfrak{R}$ mit diesem Faktorensystem $\{c_{A,B}\}$ oder isomorph zum Restklassenring des Halbgruppenringes R' von H_0 über $\mathfrak{R}$ mit diesem Faktorensystem*[14] *$\{c_{A,B}\}$ nach dem Ideal $(e, \omega_{\mathcal{O}})$ von R'.*

Da dieses Faktorensystem nach den Vorbetrachtungen zu Satz 9 der Bedingung (29) genügt, ist es mitunter vorteilhaft, beliebige Halbgruppenringe R über $\mathfrak{R}$ mit einem Faktorensystem $\{d_{A,B}\}$ (wobei die $d_{A,B}$ ja unabhängig von (29) gewählt werden können) als monomiale Algebren mit Hilfe von Satz 11 auf andere Halbgruppenringe zurückzuführen, für deren Faktorensystem dann (29) erfüllt sein muß.

Wir erläutern das letztere durch ein recht einfaches Beispiel: Für die Halbgruppe H wählen wir die zyklische Gruppe $H = \{X^0, X^1, X^2\}$ der Ordnung 3 und bestimmen etwa im Ring $\mathfrak{R}$ der ganzen Zahlen ein Faktorensystem gemäß

$$d_{X^i, X^j} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i+j \leqq 2 \\ 0 & \text{für} \quad i+j > 2. \end{cases}$$

Wie man sieht, ist (31) (nicht aber (29)) erfüllt, und es existiert nach Satz 10 der Halbgruppenring R von H über $\mathfrak{R}$ mit diesem Faktorensystem. Wir können aber H auch als Untermenge der von $\mathcal{O}$ verschiedenen Elemente einer Halbgruppe H_0 mit der Strukturtafel

	X^0	X^1	X^2	$\mathcal{O}$
X^0	X^0	X^1	X^2	$\mathcal{O}$
X^1	X^1	X^2	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$
X^2	X^2	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$

auffassen und ein Faktorensystem gemäß

$$c_{A,B} = \left\{\begin{matrix} 1 & \text{falls} & AB \neq \mathcal{O} \\ 0 & \text{falls} & AB = \mathcal{O} \end{matrix}\right\} \quad \text{für alle } A, B \text{ aus } H$$

[14]) Man beachte, daß wir bereits $c_{A,\mathcal{O}} = c_{\mathcal{O},A} = c_{\mathcal{O},\mathcal{O}} = 0$ definiert haben.

im Einklang mit (29) einführen. Dann ist R isomorph zum Restklassenring des Halbgruppenringes R' von H_0 über $\mathfrak{R}$ mit $\{c_{A,B}\}$ als Faktorensystem nach dem Ideal $(\omega_{\mathfrak{O}})$.

Schließlich ist für das Aufsuchen aller möglichen Faktorensysteme zu gewissen Halbgruppen H bzw. H_0 noch folgendes Korollar nützlich:

Korollar. *Ist* $\{c_{A,B}\}$ *ein Faktorensystem einer assoziativen monomialen Algebra oder eines Halbgruppenringes R über* $\mathfrak{R}$, *so gilt das gleiche für* $\{c'_{A,B}\}$ *mit* $c'_{A,B} = -c_{A,B}$.

Literaturverzeichnis

[1] K. Asano, Über die Quotientenbildung von Schiefringen, *J. Math. Soc. Japan*, 1 (1949), 73—78.
[2] А. А. Бовди, О скрещенных произведениях полугруппы и кольца, *Доклады Акад. Наук. СССР*, 137 (1961), 1267—1269.
[3] O. Ore, Theory of non-commutative polynomials, *Ann. of Math.*, 34 (1933), 480—508.
[4] G. Pickert, Bemerkungen zum Algebrenbegriff, *Math. Ann.*, 120 (1947—49), 158—164.
[5] L. Rédei, *Algebra*. I (Leipzig, 1959).
[6] D. Tamari, On a certain classification of rings and semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54 (1948), 153—158.

(Eingegangen am 15. Mai 1964)