Additive Ideale und unabhängige Mengen

Von ATTILA MÁTÉ in Szeged

Für eine beliebige Menge E bezeichnen wir mit $\mathbf{Pt}(E)$ die Menge aller Teilmengen von E (die Potenzmenge von E).

$A \subset B$ bedeutet, daß A in B enthalten und nicht gleich B ist; $A \subseteqq B$ bedeutet, daß A in B enthalten ist, aber auch gleich B sein kann. $A \setminus B$ bedeutet die Menge derjenigen Elemente von A, die keine Elemente von B sind. Ist E ein metrischer Raum, $x \in E$ und $\varepsilon > 0$, so bezeichnet $U(x; \varepsilon)$ die Menge derjenigen Punkte von E, die von x in einer Entfernung $< \varepsilon$ liegen.

Eine Menge $\mathbf{I}$ von Teilmengen einer Menge E heißt ein $\aleph_\alpha$-additives Ideal, wenn eine beliebige Teilmenge eines beliebigen Elementes von $\mathbf{I}$, sowie die Vereinigungsmenge beliebiger, doch weniger als $\aleph_\alpha$ Elemente von $\mathbf{I}$ ebenfalls zu $\mathbf{I}$ gehören. Das Ideal $\mathbf{I}$ ist ein echtes Ideal, falls $\emptyset \neq \mathbf{I} \neq \mathbf{Pt}(E)$ ist. Ein Erzeugendensystem eines $\aleph_\alpha$-additiven Ideals $\mathbf{I}$ ist eine Menge $\mathbf{G} \subseteqq \mathbf{I}$, für die kein $\aleph_\alpha$-additives Ideal $\mathbf{J}$ existiert, für welches $\mathbf{G} \subseteqq \mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ ist. Es ist leicht einzusehen, daß der Durchschnitt beliebig vieler $\aleph_\alpha$-additiver Ideale ebenfalls ein $\aleph_\alpha$-additives Ideal ist. Daraus folgt, daß jede Menge $\mathbf{G} \subseteqq \mathbf{Pt}(E)$ ein und nur ein $\aleph_\alpha$-additives Ideal erzeugt.

Ist $\aleph_\alpha$ singulär, so stimmt das durch die Menge $\mathbf{G}$ erzeugte $\aleph_\alpha$-additive Ideal mit dem durch $\mathbf{G}$ erzeugten $\aleph_{\alpha+1}$-additiven Ideal überein. Ist $\aleph_\alpha$ regulär, so ist jedes Element des durch $\mathbf{G}$ erzeugten $\aleph_\alpha$-additiven Ideals als Teilmenge einer Vereinigungsmenge von weniger als $\aleph_\alpha$ Elemente von $\mathbf{G}$ darstellbar.

Ein Ideal $\mathbf{I}$ hat den Erzeugungsgrad $\mathfrak{m}$, wenn es ein Erzeugendensystem von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, aber kein Erzeugendensystem von der Mächtigkeit $< \mathfrak{m}$ besitzt.

Zu jedem Element x der Menge E ordnen wir eine (eventuell leere) Menge $S(x)$ in E derart zu, daß $x \notin S(x)$ ist. Es sei $S^{-1}(x) = \{y : x \in S(y), y \in E\}$. Ist $M \subseteqq E$, so sei $S(M) = \bigcup_{x \in M} S(x)$, und $S^{-1}(M) = \bigcup_{x \in M} S^{-1}(x)$. Eine Menge $M \subseteqq E$ wird *unabhängig* genannt, wenn $M \cap S(M) = \emptyset$ ist.

Wir sagen, daß die Elemente eines Mengensystems $\mathbf{B} \subseteqq \mathbf{Pt}(E)$ *gegenseitig unabhängig* sind, wenn es für beliebige zwei verschiedene Mengen $P, Q \in \mathbf{B}$ gilt: $P \cap S(Q) = \emptyset$ und $S(P) \cap Q = \emptyset$.

*

Diese Arbeit beschäftigt sich mit gewissen Zusammenhängen zwischen Idealen und unabhängigen Mengen.

In § 1 wird die Frage untersucht, unter welchen weiteren Bedingungen kann man behaupten, daß, falls sowohl $S(x)$ als auch $S^{-1}(x)$ für jedes $x \in E$ in einem Ideal $\mathbf{I}$ enthalten sind, eine unabhängige Menge existiert, die kein Element des Ideals $\mathbf{I}$ ist. S. MARCUS hat einige solche Ideale gefunden: Sei E die Menge der reellen Zahlen; angenommen, daß die Kontinuumshypothese gilt, sind das Ideal der Mengen erster Kategorie in E, bzw. der Mengen vom Lebesgueschen Maß Null in E solche Ideale.

§ 2 gibt ebenfalls eine Verallgemeinerung eines Satzes von S. MARCUS. Im Fall, daß E die Menge der reellen Zahlen ist, fand S. MARCUS eine solche Abbildung $x \to S(x)$, daß $\overline{\overline{S(x)}} \leqq 1$, ferner hat er gezeigt, daß keine unabhängige Residualmenge in einem beliebigen Intervall existiert. (Eine Menge H ist in einem Intervall I *residual*, wenn $I \setminus H$ erster Kategorie ist.) In der Definition der residualen Mengen kann das Ideal der Mengen erster Kategorie durch andere Ideale ersetzt werden. Wir werden solche Ideale angeben, für welche, wenn wir die residualen Mengen für diese Ideale definieren, sich der Satz von S. MARCUS verallgemeinern läßt.

§ 3 enthält eine Verallgemeinerung von zwei Sätzen. Der erste stammt von P. ERDŐS [5]: Ist E ein separabler metrischer Raum, und $S(x)$ nirgends dicht, so existiert eine abzählbar unendliche unabhängige Menge; der andere stammt von S. MARCUS. Ist E ein separabler metrischer Raum, und $S(x)$ nirgends dicht, so existieren beliebig, doch endlich viele, gegenseitig unabhängige, paarweise disjunkte Mengen zweiter Kategorie. Wir werden beweisen, daß es unter denselben Bedingungen sogar abzählbar unendlich viele, paarweise disjunkte, gegenseitig unabhängige Mengen zweiter Kategorie gibt. (Unser Satz ist noch etwas allgemeiner.)

§ 1

Satz 1. *Es sei $\aleph_\alpha$ eine reguläre Kardinalzahl. Hat das $\aleph_\alpha$-additive, echte Ideal* **I** *von E den Erzeugungsgrad $\aleph_\alpha$, so existiert eine solche Menge $H \subseteqq E$ von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, daß jede Teilmenge von H mit der Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ ein Element von* **I** *ist, dagegen jede Teilmenge von H mit der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ kein Element von* **I** *ist.*

Beweis. Sei

$$G_0, G_1, G_2, \ldots, G_\xi, \ldots \qquad (\xi < \omega_\alpha)$$

ein wohlgeordnetes Erzeugendensystem der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ des Ideals **I** und sei

$$H_\xi = G_\xi \setminus \bigcup_{\beta < \xi} G_\beta .$$

Es können für ein gewisses $\xi < \omega_\alpha$ nicht alle H_β $(\beta \geqq \xi)$ leer sein, weil dann auch die Menge $\{G_\gamma\}_{\gamma < \xi}$ das Ideal erzeugen würde, was dem Erzeugungsgrad $\aleph_\alpha$ des Ideals widerspricht.

Deshalb ist die Menge derjenigen ξ, für welche H_ξ nicht leer ist, konfinal mit der Menge $W(\omega_\alpha)$ (der Ordinalzahlen $\gamma < \omega_\alpha$), also ist die Menge der nicht leeren H_ξ von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$. Ist $\xi < \lambda < \omega_\alpha$, so gilt $H_\xi \cap H_\lambda = \emptyset$. Wir wählen nun aus jedem, nicht leeren H_ξ ein Element h_ξ, und setzen $H = \{h_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha}$.

Diese Menge H hat offenbar die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$; alle ihre Teilmengen der Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ sind Elemente des Ideals **I**, da jedes Element von H Element eines G_ξ $(\xi < \omega_\alpha)$ ist; dagegen gehört keine Teilmengen von H von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ zum Ideal, da $\overline{\overline{H \cap G_\xi}} < \aleph_\alpha$ für beliebiges $\xi < \omega_\alpha$ ist; damit haben wir den Satz 1 bewiesen.

Korollar 1. 1. *Die Menge erster Kategorie und die Mengen vom Lebesgueschen Maß Null bilden im Raume der reellen Zahlen je ein $\aleph_1$-additives Ideal. Beide Ideale* *haben ein Erzeugendensystem von der Mächtigkeit des Kontinuums. (Das Erzeugendensystem des Ideals der Mengen erster Kategorie bilden die nirgends dichten abgeschlossenen Mengen, dasjenige des Ideals der Mengen vom Lebesgueschen Maß Null bilden die Borelschen Mengen vom Lebesgueschen Maß Null.) Keines der Ideale wird von weniger als* $\aleph_1$ *seiner Elemente erzeugt.*

Gäbe es nämlich ein Ideal mit $\aleph_0$ Erzeugenden, so würde die Vereinigungsmenge M der Elemente dieser Erzeugenden ebenfalls zum Ideal gehören. Dann wäre aber das Ideal gleich $\mathbf{Pt}(E)$, da jede Menge mit nur *einem* Element von der ersten Kategorie, bzw. vom Lebesgueschen Maß Null ist. Dies ist aber offenbar unmöglich. (Ob diese Ideale ein Erzeugendensystem der Mächtigkeit $<2^{\aleph_0}$ besitzen, oder nicht, ist mir unbekannt.)

So erhalten wir, wenn $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, und $\alpha=1$ gesetzt wird, aus dem Satz 1 den Lusinschen Satz über Mengen erster Kategorie und den Sierpinskischen Satz über Mengen vom Lebesgueschen Maß Null.

Satz 2. *Sei* $\aleph_\alpha$ *eine beliebige Kardinalzahl, und* $\mathbf{I}$ *ein* $\aleph_\alpha$*-additives echtes Ideal der Menge* E *mit einem Erzeugungsgrad* $\leqq\aleph_\alpha$. *Wenn die Abbildung* $x\to S(x)$ *derartig ist, daß mit Ausnahme der Elemente einer Menge* $K\in\mathbf{I}$ *(d. h. für alle* $x\in E\setminus K$*)* $S(x)\in\mathbf{I}$ *und* $S^{-1}(x)\in\mathbf{I}$ *sind, so existiert eine unabhängige eine Menge, welche nicht zum Ideal* $\mathbf{I}$ *gehört.*

Beweis.

α) Ist $\aleph_\alpha$ singulär, so stimmt das durch die Menge $\mathbf{I}$ erzeugte $\aleph_{\alpha+1}$-Ideal mit $\mathbf{I}$ überein. Somit folgt aus der Behauptung für reguläre Mächtigkeiten auch der auf singuläre Mächtigkeiten bezügliche Satz. Würde man von $\mathbf{I}$ $\aleph_{\alpha+1}$-Additivität statt $\aleph_\alpha$-Additivität fordern, so wäre die Behauptung ein Spezialfall der auf reguläre Mächtigkeiten bezüglichen Behauptung des Satzes (bekanntlich ist $\aleph_{\alpha+1}$ stets regulär).

β) Sei $\aleph_\alpha$ regulär. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Ist der Erzeugungsgrad des Ideals $<\aleph_\alpha$, so wählen wir eines seiner Erzeugendensysteme von der Mächtigkeit $<\aleph_\alpha$. Es ist klar, daß dann auch die Vereinigungsmenge M der Elemente des Erzeugendensystems ein Element des Ideals $\mathbf{I}$ ist. Da $\mathbf{I}$ echt ist, so ist $M\subset E$; andererseits ist $\mathbf{I}=\mathbf{Pt}(M)$; daraus folgt, daß die (nicht leere) Menge $E\setminus M$ unabhängig und kein Element des Ideals $\mathbf{I}$ ist.

b) Ist das Ideal vom Erzeugungsgrade $\aleph_\alpha$, $\aleph_\alpha$-additiv und echt, so kann Satz 1 angewendet werden:

Die im Satz 1 konstruierte Menge H sei wohlgeordnet: $t_0, t_1, \ldots, t_\xi, \ldots$ $(\xi<\omega_\alpha)$. Die gewünschte unabhängige Menge wird durch transfinite Induktion konstruiert.

Sei x_1 das erste t_γ, für welches $t_\gamma\notin K$. Ein solches x_1 existiert unbedingt, da H von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ und andererseits $K\in\mathbf{I}$ ist; also ist die Mächtigkeit des Durchschnitts $K\cap H$ kleiner als $\aleph_\alpha$.

Wir nehmen an, daß x_γ für alle $\gamma<\xi$ $(\xi<\omega_\alpha)$ definiert ist, und zwar so, daß $x_\gamma\notin K, x_\gamma\in H$, und $\{x_\gamma\}_{\gamma<\xi}$ unabhängig ist. Es sei $x_\xi\in H$ das erste Element, für welches die Menge $\{x_\gamma\}_{\gamma\leqq\xi}$ unabhängig ist, und $x_\xi\notin K$, d. h.

$$x_\xi\in H\setminus K\setminus\bigcup_{\gamma<\xi}S(x_\gamma)\setminus\bigcup_{\gamma<\xi}S^{-1}(x_\gamma).$$

Da x_γ $(\gamma<\xi)$ kein Element von K ist, sind die Mengen $H\cap\big(\bigcup_{\gamma<\xi}S(x_\gamma)\big)$,

$H \cap (\bigcup_{\gamma<\xi} S^{-1}(x_\gamma))$ und $H \cap K$ Elemente von **I**, und, da sie Teilmengen von H sind, ist ihre Mächtigkeit kleiner als $\aleph_\alpha$. Daraus folgt, daß die Menge

$$H \setminus K \setminus \bigcup_{\gamma<\xi} S(x_\gamma) \setminus \bigcup_{\gamma<\xi} S^{-1}(x_\gamma)$$

nicht leer ist; somit existiert ein die Bedingungen erfüllendes x_ξ. Damit ist x_ξ für jede Ordinalzahl $\xi < \omega_\alpha$ definiert. Die Menge $\{x_\xi\}_{\xi<\omega_\alpha}$ ist offenbar unabhängig. Da sie die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ hat und eine Teilmenge von H ist, so ist sie kein Element des Ideals **I**, was zu beweisen war.

Gilt $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, so erhält man im Falle $\alpha = 1$ als Korollar zwei Sätze von S. Marcus [1]. In diesen Sätzen ist E die Menge der reellen Zahlen und **I** das Ideal der Mengen erster Kategorie, bzw. der Mengen vom Lebesgueschen Maße Null; s. Korollar 1. 1.

In Satz 2 ist die Bedingung über den Erzeugungsgrad des Ideals sehr streng. Es erhebt sich die Frage, inwieweit diese Bedingung wichtig ist. Eine Antwort dazu gibt der folgende

Satz 3. *Es sei $\aleph_\alpha$ eine reguläre Kardinalzahl, und E eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_\beta \geqq \aleph_\alpha$. Dann existiert eine Abbildung $x \to S(x)$, und dazu ein $\aleph_\alpha$-additives echtes Ideal **I** mit dem Erzeugungsgrad $> \aleph_\alpha$ derart, daß $S(x) \in$ **I** und $S^{-1}(x) \in$ **I** für jedes $x \in E$, und jede unabhängige Menge ein Element des Ideals ist.*

Wir stellen die Menge E in der Form $W(\omega_\beta) \times W(\omega_\beta)$ dar. Ist ein beliebiges $x = (\lambda, \xi) \in E (\lambda, \xi < \omega_\beta)$ gegeben, so sei das Abbild des Elements x die Menge

$$S(x) = ((W(\omega_\beta) \times \xi) \cup (\lambda \times W(\omega_\beta))) \setminus \{x\},$$

d. h. die Menge der Elemente der Form $(\gamma; \xi)$ und $(\lambda; \delta)$, mit den Bedingungen $\gamma \neq \lambda, \delta \neq \xi$ und $\gamma < \omega_\beta, \delta < \omega_\beta$.

Sehen wir die Menge E als eine Matrix mit ω_β Zeilen und ω_β Spalten an, so kann behauptet werden, daß $S(x)$ die Menge derjenigen Elemente von E — mit Ausnahme von x selbst — ist, welche in derselben Zeile oder derselben Spalte wie x enthalten sind.

Ferner ist es klar, daß in dieser Konstruktion $S(x) = S^{-1}(x)$ $(x \in E)$ gilt.

Eine Menge $M \subseteqq E$ ist dann und nur dann unabhängig, wenn sein Durchschnitt mit einer beliebigen Zeile oder Spalte der Matrix höchstens ein Element hat.

Es sei nun **I** das durch die sämtlichen $S(x) = S^{-1}(x)$ $(x \in E)$ und die sämtlichen unabhängigen Mengen erzeugte $\aleph_\alpha$-additive Ideal.

Dann sind $S(x)$, $S^{-1}(x)$ und alle unabhängigen Mengen Elemente von **I**. Es ist nachzuweisen, daß das Ideal **I** echt ist. Der Beweis ist der folgende:

Da $\aleph_\alpha$ regulär ist, kann jedes Element von **I** als Teilmenge der Vereinigungsmenge von weniger als $\aleph_\alpha$ Mengen $S(x) (= S^{-1}(x))$ $(x \in E)$ und weniger als $\aleph_\alpha$ unabhängigen Teilmengen von E dargestellt werden. Es ist zu beweisen, daß keine solche Vereinigungsmenge mit E identisch sein kann.

Wir nehmen eine Menge M der Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ $(M \subset E)$, und untersuchen die Vereinigungsmenge $\bigcup_{x \in M} S(x) = S(M)$.

Die Anzahl derjenigen Zeilen, die ein Element der Mengen M enthalten, ist offenbar kleiner als $\aleph_\alpha$; so existiert mindestens eine Zeile H, die kein Element von

M enthält. Daraus folgt, daß der Durchschnitt $S(M) \cap H$ genau aus denjenigen Elementen von M besteht, welche die Durchschnitte von H mit denjenigen Spalten sind, die ein Element von M enthalten. Da die Anzahl solcher Spalten kleiner als $\aleph_\alpha$ ist, und der Durchschnitt einer Zeile und einer Spalte nur ein Element enthält, so ist die Menge $S(M) \cap H$ von kleinerer Mächtigkeit als $\aleph_\alpha$.

Es sei nun die Menge $\mathbf{F}$, deren Elemente unabhängige Teilmengen von E sind, von der Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$, und wir untersuchen den Durchschnitt $\bigcup_{T \in \mathbf{F}} (T \cap H)$. Da eine Menge $T \in \mathbf{F}$ unabhängig, und H eine Zeile der Matrix ist, hat die Menge $T \cap H$ höchstens ein Element. Daraus folgt, daß die Mächtigkeit der Menge $\bigcup_{T \in \mathbf{F}} (T \cap H)$ kleiner als $\aleph_\alpha$ ist. Es wurde bereits bewiesen, daß die Mächtigkeit der Menge $S(M) \cap H$ kleiner als $\aleph_\alpha$ ist. Daraus folgt, daß die Menge

$$(S(M) \cap H) \cup \Big(\bigcup_{T \in \mathbf{F}} (T \cap H)\Big) = H \cap \Big(\bigcup_{T \in \mathbf{F}} T \cup S(M)\Big)$$

eine Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ besitzt. Es folgt weiterhin, daß die Menge $H \setminus \big(\bigcup_{T \in \mathbf{F}} T \cup S(M)\big)$ nicht leer (sogar von der Mächtigkeit $\aleph_\beta$) ist (da $\overline{\overline{H}} = \aleph_\beta \geqq \aleph_\alpha$); also ist die Menge $E \setminus \big(\bigcup_{T \in \mathbf{F}} T \cup S(M)\big)$ auch nicht leer. Da ein beliebiges Element von $\mathbf{I}$ als Teilmenge einer Menge in der Form $\bigcup_{T \in \mathbf{F}} T \cup S(M)$ darstellbar ist, wo $M \subseteqq E$, $\overline{\overline{M}} < \aleph_\alpha$, $\mathbf{F} \subseteqq \mathbf{Pt}(E)$, $\overline{\overline{\mathbf{F}}} < \aleph_\alpha$, und die Elemente von $\mathbf{F}$ unabhängig sind; und da es in den vorausgehenden bewiesen wurde, daß die Menge $E \setminus \big(\bigcup_{T \in \mathbf{F}} T \cup S(M)\big)$ nicht leer (d. h. $\bigcup_{T \in \mathbf{F}} T \cup S(M) \subset E$) ist, so ist $E \notin \mathbf{I}$, d. h. das Ideal $\mathbf{I}$ ist echt, was zu beweisen war.

Bemerkung 3. 1. Diese Konstruktion kann auch so durchgeführt werden, daß $S(x) \cap S^{-1}(x) = \emptyset$ für jedes $x \in E$, und dabei noch die Bedingung $\overline{\overline{S(x)}} < \aleph_\beta (= \overline{\overline{E}})$ erfüllt sei.

Es sei nämlich $x = (\lambda; \xi)$, und dabei

$$S(x) = (W(\lambda) \times \xi) \cup (\lambda \times W(\xi)),$$

dann ist offenbar

$$S^{-1}(x) = (\{\gamma\}_{\lambda < \gamma < \omega_\beta} \times \xi) \cup (\lambda \times \{\delta\}_{\xi < \delta < \omega_\beta}).$$

Da
$$S(x) \cup S^{-1}(x) = (W(\omega_\beta) \times \xi) \cup (\lambda \times W(\omega_\beta)) \setminus \{x\}$$

identisch mit dem $S(x)$ der vorherigen Konstruktion ist, sind die unabhängigen Mengen dieselben, wie in der vorherigen Konstruktion, deshalb stimmt das durch sämtliche $S(x)$, $S^{-1}(x)$ und sämtliche unabhängige Mengen erzeugte $\aleph_\alpha$-additive Ideal mit dem Ideal der vorherigen Konstruktion überein. Andererseits ist es klar, daß $\overline{\overline{S(x)}} < \aleph_\beta$, und $S(x) \cap S^{-1}(x) = \emptyset$ für jedes Element $x \in E$ gilt.

Korollar 3. 1. *Ist E eine Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\beta$ und $\aleph_\alpha \leqq \aleph_\beta$, wobei $\aleph_\alpha$ eine reguläre Kardinalzahl bedeutet, so existiert ein $\aleph_\alpha$-additives echtes Ideal von E derart, daß eine beliebige Menge $H \subseteqq E$ von der Mächtigkeit $\geqq \aleph_\alpha$ eine Teilmenge von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ besitzt, welche ein Element von $\mathbf{I}$ ist.* (D. h., in Satz 1 ist die Bedingung, daß der Erzeugungsgrad des $\aleph_\alpha$ additiven Ideals $\aleph_\alpha$ sei, unerläßlich.)

Im Beweise des Satzes 2 wurde nämlich die Bedingung, daß **I** den Erzeugungsgrad $\aleph_\alpha$ besitzt, nur in der Weise benützt, daß Satz 1 zum Beweise von Satz 2 verwendet wurde.

Falls Satz 1 für alle echte Ideale **I** wahr wäre, so wäre Satz 2 für alle echte Ideale wahr, was aber dem Satz 3 widerspricht.

Übrigens ist es auch unmittelbar einzusehen, daß die Behauptung des Satzes 1 für das Ideal von Satz 3 nicht zutrifft.

§ 2

Definition 1. Sei E eine beliebige Menge, M eine ihrer Teilmengen, und $\mathbf{I}$ ein echtes Ideal von E. Eine Menge $H \subseteq E$ wird *in M residual über* $\mathbf{I}$ genannt, wenn $M \setminus H \in \mathbf{I}$ ist. Ist E die Menge der reellen Zahlen, $\mathbf{I}$ die Menge der Mengen erster Kategorie (welche ein $\aleph_1$-additives echtes Ideal ist), so wird H einfach *residual in M* genannt.

Definition 2. Sei R^α $(\alpha \leqq \omega)$ der α-dimensionale Euklidische Vektorraum für $\alpha < \omega$, und der Hilbertsche Raum für $\alpha = \omega$.

Die Summe $M+N$ von zwei Mengen M und N von Vektoren in R^α wird als die Menge aller Vektoren von der Form $m+n$ definiert, wobei $m \in M$, $n \in N$. $-M$ ist die Menge aller Vektoren der Form $-m$, wo $m \in M$. Die Differenz $M-N$ wird durch die Identität $M-N = M+(-N)$ definiert. Der Nullvektor des Raumes wird mit o bezeichnet.

Definition 3. Man sagt, das Ideal $\mathbf{I}$ in R^α sei *um die Elemente einer Menge $M \subseteq R^\alpha$ verschiebbar*, wenn aus $K \in \mathbf{I}$ folgt: $K+\{m\} \in \mathbf{I}$ für alle $m \in M$. Ist $M = R^\alpha$, wird $\mathbf{I}$ einfach *im Raume R verschiebbar* genannt.

Sei A^α eine Menge von Vektoren im Raume R^α, die den Vektor t dann und nur dann enthält, wenn sämtliche Koordinaten von t algebraische Zahlen sind, und nur endlich viele Koordinaten von Null verschieden sind. Sei P^α die Menge derjenigen Vektoren von A^α, deren sämtliche Koordinaten rationale Zahlen sind.

Offenbar sind A^α und P^α abzählbar unendliche Mengen, und beide Mengen sind im Raume R^α dicht.

Satz 4. *Ist $E = R^\alpha$ $(\alpha \leqq \omega)$, so existiert eine Abbildung $x \to S(x)$ mit $\overline{\overline{S(x)}} = 1$ und mit der weiteren Eigenschaft: wenn* $\mathbf{I}$ *ein beliebiges, um die Elemente von A^α verschiebbares, $\aleph_1$ additives, echtes Ideal von E ist, dann ist keine Menge $M \subseteq E$, die in einer offenen Teilmenge von E über* $\mathbf{I}$ *residual ist, eine unabhängige Menge.*

Beweis. Es sei $m \in E, n \in E$. Die Relation $m-n \in A^\alpha$ ist eine Äquivalenzrelation; der Raum E zerfällt also in disjunkte Äquivalenzklassen.

Wir wählen aus jeder Klasse ein Element aus: die Menge der ausgewählten Elemente sei A_0. Ist $a \in A^\alpha$, so sei $A_0 + \{a\} = A_a$.

a) Ist $o \neq a \in A^\alpha$, so ist $A_0 \cap A_a = \emptyset$. A_0 enthält nur je ein Element jeder Klasse, also keine zwei Elemente, deren Differenz zu A^α gehört; folglich kann kein Element von A_a zu A_0 gehören.

Daraus folgt trivialerweise, daß es für zwei beliebige verschiedene Elemente a, b von A^α gilt: $A_a \cap A_b = \emptyset$.

b) $E = \bigcup_{a \in A^\alpha} A_a$. Denn ist e ein beliebiges Element von E, so hat die Äquivalenzklasse von e ein repräsentantes Element h in A_0 und so ist: $e = h + e - h \in A_0 + \{e-h\} = A_{e-h}$ $(e - h \in A^\alpha)$.

Die Relation $a - b \in P^\alpha$ $(a, b \in A^\alpha)$ ist auch eine Äquivalenzrelation; deshalb zerfällt die Menge A^α in disjunkte Klassen inbezug auf diese Äquivalenzrelation.

Es ist bekannt, daß der Index der additiven Gruppe der algebraischen Zahlen über der additiven Gruppe der rationalen Zahlen unendlich ist. Daraus folgt, daß die Anzahl der Äquivalenzklassen in A^1 unendlich ist. Für $a \in R^\alpha = E$ $(\alpha > 1)$ bezeichne $\sigma(a)$ die erste Koordinate von a. Falls $a \in A^\alpha$, so ist offenbar $\sigma(a) \in A^1$, und falls $a \in P^\alpha$, dann $\sigma(a) \in P^1$. Da $\sigma(a) - \sigma(b) = \sigma(a-b)$, so folgt aus $a - b \in P^\alpha$, daß $\sigma(a) - \sigma(b) \in P^1$. Folglich können a und b nur dann zu derselben Klasse der Menge A^α gehören, wenn $\sigma(a)$ und $\sigma(b)$ zu derselben Klasse der Menge A^1 gehören. Deshalb zerfällt A^α auch für $\alpha > 1$ in unendlich viele Klassen. Da A^α abzählbar ist, so ist die Anzahl der Klassen in A^α auch abzählbar, also abzählbar unendlich.

Wir bezeichnen die Klassen in A^α durch:

$$D_0, D_1, \ldots, D_n, \ldots \qquad (n < \omega).$$

Nach der Definition ist keine dieser Klassen leer, und dabei noch $D_m \cap D_n = \emptyset$, wenn $m < n < \omega$, und $\bigcup_{n<\omega} D_n = A^\alpha$.

Es sei nun $E_n = \bigcup_{x \in D_n} A_x$. Die Mengen E_n sind disjunkt. Würden nämlich etwa E_m und E_n $(m < n < \omega)$ nicht disjunkt sein, so gäbe es Elemente $x \in D_m$, $y \in D_n$ derart, daß $A_x \cap A_y$ nicht leer ist. Da aber $D_m \cap D_n = \emptyset$ ist, muß $A_x \cap A_y = \emptyset$ sein. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung.

Die Vereinigung aller E_n ist gleich E:

$$\bigcup_{n<\omega} E_n = \bigcup_{n<\omega} \bigcup_{x \in D_n} A_x = \bigcup_{x \in \bigcup_{n<\omega} D_n} A_x = \bigcup_{x \in A^\alpha} A_x = E.$$

Andererseits ist, da im Falle $t \in P^\alpha$ $D_n + \{t\} = D_n$ gilt,

$$\{t\} + E_n = \{t\} + \bigcup_{x \in D_n} A_x = \bigcup_{x \in D_n} (A_x + \{t\}) = \bigcup_{x \in D_n} A_{x+t} =$$

$$= \bigcup_{x \in D_n + \{t\}} A_x = \bigcup_{x \in D_n} A_x = E_n,$$

d. h. $\{t\} + E_n = E_n$, falls $t \in P^\alpha$, und deshalb $E_n + P^\alpha = E_n$.

Wir betrachten die folgende Abbildung $x \to S(x)$ von E in $\mathbf{Pt}(E)$:

Ist $x \in E_n$, so sei $S(x)$ gleich der Menge mit dem einzigen Element $x + t_n$, wo $t_n \in A^\alpha$, $t_n \neq o$ und $t_n \in U(o; 1/n)$. Es sei $G \subseteqq E$ eine offene Menge und $\mathbf{I}$ ein beliebiges, $\aleph_1$ additives, um die Elemente der Menge A^α verschiebbares echtes Ideal. Wir behaupten, daß $E_n \cap G$ in $\mathbf{I}$ nicht enthalten ist.

Es sei nämlich e_n ein beliebiges Element von E_n. Da $\{e_n\} - G$ eine offene Menge, und P^α in E dicht ist, so existiert ein $t \in P^\alpha$ derart, daß $t \in \{e_n\} - G$, d. h. $e_n - t \in G$ ist. Da $t \in P^\alpha$, so ist auch $-t \in P^\alpha$, also $e_n - t \in E_n$ (weil $E_n + P^\alpha = E_n$), d. h. $e_n - t \in E_n \cap G$, und so $e_n \in E_n \cap G + \{t\}$. Folglich gibt es zu jedem $e_n \in E_n$ ein $t \in P^\alpha$ mit $e_n \in E_n \cap G + \{t\}$. Es gilt also $E_n \subseteqq E_n \cap G + P^\alpha$, und da $E_n \cap G + P^\alpha \subseteqq E_n + P^\alpha = E_n$, ist $E_n \cap G + P^\alpha = E_n$. Wir nehmen nun an, daß $E_n \cap G \in \mathbf{I}$. Da $\mathbf{I}$ um die Elemente von A^α verschiebbar und $\aleph_1$ additiv ist, A^α aber abzählbar ist und $P^\alpha \subset A^\alpha$ gilt, so ist

$$E_n = E_n \cap G + P^\alpha = \bigcup_{t \in P^\alpha} (E_n \cap G + \{t\})$$

auch ein Element von $\mathbf{I}$ und das gleiche gilt dann auch für $E = \bigcup_{a \in A^\alpha} (E_n + \{a\})$, was aber der Bedingung widerspricht, daß $\mathbf{I}$ ein echtes Ideal ist. Folglich kann $E_n \cap G$ wirklich nicht zu $\mathbf{I}$ gehören.

Es sei jetzt M in der offenen Menge G über $\mathbf{I}$ residual. Es sei $x \in G$. Da G offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $U(x; \varepsilon) \subseteqq G$. Da $U(x; \varepsilon/2)$ offen ist, gehört $U(x; \varepsilon/2) \cap E_n$ für kein $n < \omega$ zu $\mathbf{I}$. Andererseits ist M in G residual über $\mathbf{I}$, d. h. $G \setminus M \in \mathbf{I}$. Dies zeigt, daß $(U(x; \varepsilon/2) \cap E_n) \setminus M$, eine von Teilmengen der Menge $G \setminus M$, auch zu $\mathbf{I}$ gehört. Da $U(x; \varepsilon/2) \cap E_n \notin \mathbf{I}$ ist, es folgt weiter, daß $U(x; \varepsilon/2) \cap \cap E_n \cap M$ nicht zu $\mathbf{I}$ gehört. Verschiebt man die Menge $U(x; \varepsilon/2) \cap E_n \cap M$ um den Vektor $t_n \in A^\alpha$, so erhält man die Menge $S(U(x; \varepsilon/2) \cap E_n \cap M)$, welche auch kein Element von $\mathbf{I}$ ist, weil $\mathbf{I}$ um die Elemente von A^α verschiebbar ist. Andererseits ist, wenn $1/n < \varepsilon/2$, $S(U(x; \varepsilon/2) \cap E_n \cap M) \subseteqq U(x; \varepsilon/2) + \{t_n\} \subseteqq U(x; \varepsilon/2) + + U(o; 1/n) \subseteqq U(x; \varepsilon) \subseteqq G$; da $G \setminus M \in \mathbf{I}$, so ist $S(U(x; \varepsilon/2) \cap M \cap E_n) \cap M \neq \emptyset$. Wegen $S(U(x; \varepsilon/2) \cap M \cap E_n) \subseteqq S(M)$ hat man also auch $S(M) \cap M \neq \emptyset$, folglich ist M nicht unabhängig, was zu beweisen war.

Korollar 4. 1. *Ist $\mathbf{I}$ das Ideal der Mengen erster Kategorie des Raumes $E = R^\alpha$ ($\alpha \leqq \omega$), so ist die im Beweis des Satzes* 4 *definierte Abbildung $x \to S(x)$ derart, daß es keine unabhängige Menge gibt, die in irgendeiner offenen Teilmenge von E (über $\mathbf{I}$) residual ist.* (Ist $E = R^1$, so ergibt sich hieraus der Satz von S. Marcus [1].)

Ist in $E = R^1$ $\mathbf{I}$ das Ideal der Mengen vom Lebesgueschen Maße Null, so genügt $\mathbf{I}$ ebenfalls den Bedingungen unseres Satzes 4 ($\mathbf{I}$ ist verschiebbar, $\aleph_1$-additiv, echt), also ist der Satz auch für dieses Ideal gültig.

§ 3

Um je einen Satz von P. Erdős bzw. S. Marcus zu verallgemeinern, lassen wir den folgenden Satz vorausgehen:

Satz 5. *Sei E ein separabler mertischer Raum von der zweiten Kategorie in sich, und sei $\mathbf{I}$ ein $\aleph_1$-additives echtes Ideal in E. Dann sind die folgenden zwei Behauptungen äquivalent:*

1. *Für jede Menge $M \notin \mathbf{I}$ existiert eine nicht leere offene Menge $G \subseteqq E$ derart, daß $H \cap M$ für keine nicht leere offene Teilmenge H von G zu $\mathbf{I}$ gehört.*

2. $\mathbf{I}$ *enthält sämtliche nirgends dichte Teilmengen von E, und somit alle Teilmengen erster Kategorie.*

Beweis. a) Für eine beliebige, nirgends dichte Menge K in E und eine beliebige nicht leere offene Menge G in E gibt es eine nicht leere offene Teilmenge H von G mit $H \cap K = \emptyset$, also mit $H \cap K \in \mathbf{I}$. Wenn also Beh. 2 nicht gilt, d. h. eine nirgends dichte Menge K existiert, die nicht zu $\mathbf{I}$ gehört, dann gilt Beh. 1 auch nicht (man setze $M = K$).

b) Sei $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ $(n<\omega)$ eine abzählbare Basis in E (wobei keine Menge B_n leer ist). Wir nehmen an, daß Beh. 2 gilt, Beh. 1 aber nicht. Dann gibt es eine Menge $M \notin \mathbf{I}$ derart, daß eine beliebige nicht leere offene Menge $Q \subseteqq E$ eine nicht leere offene Teilmenge H enthält, für die $H \cap M \in \mathbf{I}$ gilt. Da H ein Element der Basis enthält, gibt es ein n derart, daß $B_n \subseteqq Q$ und $B_n \cap M \in \mathbf{I}$; das erste Element der Basis mit diesen beiden Eigenschaften bezeichnen wir mit $B(Q)$.

Sei nun $\mathbf{N}$ die Menge aller nicht leeren offenen Menge des Raumes E. Die Menge $E \setminus \bigcup\limits_{Q \in \mathbf{N}} B(Q)$ ist offenbar nirgends dicht, sie gehört also zu $\mathbf{I}$. Da es unter den Mengen $B(Q)$ $(Q \in \mathbf{N})$ nur abzählbar viele verschiedene gibt, gehört $\bigcup\limits_{Q \in \mathbf{N}} (B(Q) \cap M)$ ebenfalls zu $\mathbf{I}$, und das gleiche gilt auch für

$$\bigcup_{Q \in \mathbf{N}} (B(Q) \cap M) \cup (E \setminus \bigcup_{Q \in \mathbf{N}} B(Q)).$$

M ist aber offenbar eine Teilmenge dieser Vereinigungsmenge, somit ist $M \in \mathbf{I}$, was unserer Ausnahme $M \notin \mathbf{I}$ widerspricht. Aus diesem Widerspruch folgt, daß wenn Beh. 2 gilt, dann auch Beh. 1 gelten muß. Damit ist unser Satz bewiesen.

Satz 6. *Sei E ein separabler metrischer Raum zweiter Kategorie und es sei in E eine Abbildung $x \to S(x)$ derart gegeben, daß $S(x)$ für jedes $x \in E$ eine in E nirgends dichte Menge ist. Ferner sei $\mathbf{I}$ ein $\aleph_1$-additives echtes Ideal, das keine residuale Mengen, dagegen alle Mengen mit nur einem Element als Elemente enthält. Dann existieren abzählbar unendlich viele, inbezug auf die Abbildung $x \to S(x)$ gegenseitig unabhängige Teilmengen von E, die keine Elemente des Ideals $\mathbf{I}$ sind.*

Bemerkung. Die Bedingung, daß alle Mengen mit nur einem Element zu $\mathbf{I}$ gehören, ist dann von Bedeutung, wenn der Raum E einen isolierten Punkt besitzt (sonst kann diese Bedingung weggelassen werden). Ist $e \in E$ ein isolierter Punkt, so genügt $\mathbf{I} = \mathbf{Pt}(E \setminus e)$ den Bedingungen des Satzes (mit Ausnahme der letzten); es gibt aber keine zwei disjunkte Mengen, von denen keine zu $\mathbf{I}$ gehört.

Den Beweis von Satz 6 werden wir mit einer Reihe von Lemmas vorbereiten.

Lemma 6. 1. *Sei K eine Teilmenge des metrischen Raumes H und sei G eine Teilmenge von K, die offen in K (d. h. inbezug auf die relative Topologie von K) ist. Dann existiert eine Teilmenge $G(H)$ von H derart, daß $G(H)$ offen ist und $G(H) \cap K = G$ gilt.*

Beweis. Da G offen in K ist, besitzt jeder Punkt $x \in G$ eine Umgebung $U(x; \varepsilon(x))$, für die $U(x; \varepsilon(x)) \cap K \subseteqq G$ gilt. Man braucht dann offenbar nur $G(H) = \bigcup\limits_{x \in G} U(x; \varepsilon(x))$ zu setzen.

Hieraus folgt trivial:

Lemma 6. 2. *Sei H ein metrischer Raum und sei $L \subseteqq K \subseteqq H$.*

a) *Ist L nirgends dicht in K, so ist auch L nirgends dicht in H.*

b) *Ist L nirgends dicht in H und ist K dicht in einer offenen Teilmenge G von H, so ist L in $G \cap K$ ebenfalls nirgends dicht.*

Zum Beweis von b) ist bloß zu beachten, daß für jede in H offene Menge D, die eine Teilmenge von G ist, $D \cap (G \cap K)$ nicht leer ist.

Definition. Unter dem Produkt $\mathbf{IJ}=\mathbf{K}$ von zwei $\aleph_\alpha$-additiven Idealen $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ verstehen wir das durch die Menge $\mathbf{I}\cup\mathbf{J}$ erzeugte $\aleph_\alpha$-additive Ideal.

Wir wählen insbesondere für $\mathbf{I}$ das im Satz 6 definierte Ideal in E und für $\mathbf{J}$ die Menge aller Mengen erster Kategorie in E, die beide $\aleph_1$-additive Ideale sind. Dann ist das Ideal $\mathbf{K}=\mathbf{IJ}$ *echt*, da die residualen Mengen offenbar nicht zu $\mathbf{K}$ gehören.

Ist $H\subseteqq E$ und $H\notin\mathbf{K}$, so ist die Menge $\mathbf{K}\cap\mathbf{Pt}(H)$ ein echtes $\aleph_1$-additives Ideal von H. Wir bezeichnen das Ideal $\mathbf{K}\cap\mathbf{Pt}(H)$ durch $\mathbf{K}\wedge H$. Es ist klar, daß, falls $L\subseteqq H$, die Behauptung $L\in\mathbf{K}$ dann und nur dann wahr ist, wenn $L\in\mathbf{K}\wedge H$.

Lemma 6.3. *Sei $H\subseteqq E$, $H\notin\mathbf{K}$, ferner die Abbildung sei $x\to S(x)$ derart, daß $S(x)$ für alle x nirgends dicht in E ist. Dann existieren zwei disjunkte, gegenseitig unabhängige Teilmengen von H, von denen keine zu $\mathbf{K}$ gehört.*

Beweis. Da $\mathbf{K}$ das Ideal $\mathbf{J}$ (die Menge der Mengen erster Kategorie von E) enthält, existiert eine solche nicht leere, in E offene Menge G, daß $Q\cap H\notin\mathbf{K}$ für alle offenen Mengen $Q\subseteqq G$ ist (s. Satz 5).

a) Daraus folgt einerseits, daß H in G dicht, und so $S(x)$ $(x\in E)$ im Raume $H\cap G$ nirgends dicht ist (Lemma 6.2).

b) Andererseits ist keine offene Menge des Raumes $H\cap G$ ein Element des Ideals $\mathbf{K}$ (Lemma 6.1). Der Raum $H\cap G(\subseteqq E)$ ist offenbar separabel. Sei $\mathbf{B}$ eine abzählbare Basis dieses Raumes.

Da $S(x)$ im Raume $H\cap G$ nirgends dicht ist, existiert zu jedem $x\in H\cap G$ ein $B\in\mathbf{B}$ mit $B\cap S(x)=\emptyset$, d. h. $x\notin S^{-1}(B)$, folglich ist

$$(*)\qquad H\cap G=\bigcup_{B\in\mathbf{B}}(H\cap G\setminus S^{-1}(B))\notin\mathbf{K};$$

da $\overline{\overline{\mathbf{B}}}=\aleph_0$, so folgt aus $(*)$ die Existenz eines $B_1\in\mathbf{B}$ mit $H\cap G\setminus S^{-1}(B_1)\notin\mathbf{K}$, d. h. mit

$$H\cap G\setminus S^{-1}(B_1)\notin\mathbf{K}\wedge(H\cap G).$$

Andererseits, es folgt wegen $\mathbf{J}\subseteqq\mathbf{K}$ aus Lemma 6.2, daß das Ideal $\mathbf{K}\wedge(H\cap G)$ sämtliche Mengen erster Kategorie des Raumes $H\cap G$ enthält. Es folgt also aus Satz 5, daß im Raume $H\cap G$ eine solche offene Menge Q existiert, daß für eine beliebige, im Raume $H\cap G$ offene Menge $P\subseteqq Q$ gilt:

$$P\cap(H\cap G\setminus S^{-1}(B_1)=P\setminus S^{-1}(B_1)\notin\mathbf{K}\wedge(H\cap G),$$

d. h.

$$P\setminus S^{-1}(B_1)\notin\mathbf{K}.$$

(Die beiden Behauptungen sind äquivalent, da $P\setminus S^{-1}(B_1)\subseteqq H\cap G$.)

1. Ist $Q\cap B_1\neq\emptyset$, so existieren zwei disjunkte, im Raume $H\cap G$ nicht leere, offene Mengen U, V derart, daß $U\subset Q\cap B_1$, $V\subset Q\cap B_1$. ($Q\cap B_1$ ist nämlich offen in $H\cap G$, also gehört nicht zu $\mathbf{K}$. Deshalb besitzt $Q\cap B_1$ mindestens zwei Punkte; diese Punkte haben disjunkte Umgebungen in $Q\cap B_1$, und diese Umgebungen genügen den Bedingungen für U und V.)

Dann sind $U\setminus S^{-1}(B_1)$ und $V\setminus S^{-1}(B_1)$ disjunkte, gegenseitig unabhängige Teilmengen von H, welche keine Elemente von $\mathbf{K}$ sind; daher ist die Behauptung des Lemmas wahr.

2. Wir betrachten nun den Fall $Q \cap B_1 = \emptyset$.

Sei $\mathbf{P}$ eine abzählbare Basis des Raumes Q. Da Q in $H \cap G$ offen, deshalb ist, wie wir sahen, für ein beliebiges $P \in \mathbf{P}$

$$P \setminus S^{-1}(B_1) \notin \mathbf{K}.$$

Andererseits existiert, da $S(x)$ in $H \cap G$ nirgends dicht ist, zu einem beliebigen $x \in B_1$ ein solches $P \in \mathbf{P}$, daß $P \cap S(x) = \emptyset$, d. h.

$$B_1 = \bigcup_{P \in \mathbf{P}} (B_1 \setminus S^{-1}(P)) \notin \mathbf{K}$$

ist (B_1 ist in $H \cap G$ offen, also $B_1 \notin \mathbf{K}$). Da $\mathbf{P}$ abzählbar ist, existiert ein $P_1 \in \mathbf{P}$ mit $B_1 \setminus S^{-1}(P_1) \notin \mathbf{K}$; die Mengen $B_1 \setminus S^{-1}(P_1)$, $P_1 \setminus S^{-1}(B_1)$ sind Teilmengen von H, disjunkt (da $P_1 \subseteqq Q$, $Q \cap B_1 = \emptyset$), keine Elemente von $\mathbf{K}$, und gegenseitig unabhängig. Damit ist Lemma 6. 3 bewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen kann Satz 6 wie folgt bewiesen werden.

Da $S(x)$ in E nirgends dicht ist, existieren in E zwei gegenseitig unabhängige disjunkte Mengen A_0, B_0, die keine Elemente von $\mathbf{K}$ sind (Lemma 6. 3).

Wir nehmen an, daß wir für ein $n < \omega$ die Mengen A_k, B_k $(k < n)$ erhalten haben, worin A_k und B_k zwei disjunkte, gegenseitig unabhängige Mengen sind, ferner $A_k, B_k \notin \mathbf{K}$ $(A_k, B_k \subset E)$, und $A_k \subset B_l$, $B_k \subset B_l$, falls $k > l$.

Nach Lemma 6. 3 existieren solche Mengen $A_n \subset B_{n-1}$ und $B_n \subset B_{n-1}$, daß $A_n \cap B_n = \emptyset$, $A_n, B_n \notin \mathbf{K}$ gilt und A_n, B_n gegenseitig unabhängig sind.

Auf diese Weise können wir die Mengen $\{A_n\}_{n<\omega}$ und $\{B_n\}_{n<\omega}$ konstruieren, u. zw. derart, daß A_n und B_n gegenseitig unabhängig, und, falls $m < n < \omega$, $A_n, B_n \subset B_m$ sind, ferner $A_n \notin \mathbf{K}$ gilt. Es bleibt noch zu beweisen, daß für $n \neq m$ die Mengen A_n und A_m gegenseitig unabhängig und disjunkt sind.

Das ist aber klar. Es sei nämlich z. B. $n > m$. Dann ist $A_n \subset B_m$, $A_m \cap B_m = \emptyset$, also wirklich $A_m \cap A_n = \emptyset$; andererseits sind A_m und B_m gegenseitig unabhängig, und so sind auch A_m und A_n gegenseitig unabhängig, da $A_n \subset B_m$.

Damit ist unser Satz 6 bewiesen.

Literatur

[1] S. Marcus, Sur les ensembles indépendants dans la théorie des relations, *Monatshefte d. Math.*, **63** (1959), 245–255.
[2] P. Erdős and G. Fodor, Some remarks on set theory. VI, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 243–260.
[3] N. Lusin, Sur un problème de M. Baire, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **158** (1914), 1258–1261.
[4] W. Sierpinski, Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), *Fund. Math.*, **5** (1927), 177–187.
[5] P. Erdős, Some remarks on set theory. III, *Michigan Math. J.*, **2** (1953), 51–57.
[6] H. Hahn, *Punktfunktionen.* Erster Teil (Leipzig, 1932).

(Eingegangen am 8. Januar 1963)