Über die Einbettung von Ringen in Oberringe mit Einselement

Von HANNS JOACHIM WEINERT in Potsdam (Deutschland)

Herrn Prof. Dr. Ladislaus Rédei verehrungsvoll gewidmet

Einleitung

Bekanntlich läßt sich mit Hilfe des Ringes Γ der ganzen Zahlen zu jedem Ring $\mathfrak{R}$ ein Oberring $\mathfrak{R}^* = \langle \Gamma, \mathfrak{R} \rangle$ mit Einselement konstruieren, indem man in der Produktmenge $\Gamma \times \mathfrak{R}$ die Rechenoperationen

$$(\gamma, r) + (\delta, s) = (\gamma + \delta, r + s),$$

$$(\gamma, r) \cdot (\delta, s) = (\gamma \cdot \delta, \gamma s + \delta r + r \cdot s)$$

definiert und jeweils $r \in \mathfrak{R}$ mit $(0, r)$ sowie $\gamma \in \Gamma$ mit (γ, o) identifiziert. Hat der Ring $\mathfrak{R}$ die Charakteristik $\nu \neq 0$, so kann man dabei Γ durch den Restklassenring $\Gamma/(\nu)$ ersetzen und erhält einen Oberring $\mathfrak{R}_\nu^* = \langle \Gamma/(\nu), \mathfrak{R} \rangle$ der gleichen Charakteristik ν (vgl. etwa [1], S. 22). Allerdings ist damit für das eigentliche Ziel solcher Einbettungen, nämlich Untersuchungen über Ringe ohne Einselement auf solche mit Einselement zurückzuführen, meist nicht sehr viel gewonnen. So lehrt schon die Betrachtung einfacher Beispiele, daß ein solcher Oberring von $\mathfrak{R}$ im allgemeinen ganz andere Eigenschaften hat und (abgesehen von der Existenz eines Einselementes) viel unbequemer ist als $\mathfrak{R}$ selbst, und daß es andererseits zu $\mathfrak{R}$ Oberringe mit Einselement geben kann, deren Struktur der von $\mathfrak{R}$ weit mehr entspricht. Damit ergeben sich im wesentlichen die drei folgenden, natürlich weitgehend zusammenhängenden Aufgabenstellungen:

I) Einen Überblick über alle möglichen Oberringe von $\mathfrak{R}$ zu gewinnen, die ein Einselement enthalten.

Zweckmäßiger Weise konzentriert man sich dabei auf solche Ringe, die von ihrem Einselement e und den Elementen aus $\mathfrak{R}$ erzeugt werden, deren Elemente also in der Form

$$\gamma e + r \quad \text{mit} \quad \gamma \in \Gamma, \; r \in \mathfrak{R}$$

geschrieben werden können. Der Kürze halber wollen wir sie *Einselement-oberringe* von $\mathfrak{R}$ nennen. Insbesondere ist jeder minimale Oberring mit Einselement (also ein Ring, der $\mathfrak{R}$ und ein Einselement, aber keinen echten Unterring dieser Art enthält) ein solcher Einselementoberring, aber nicht umgekehrt.

II) Bestimmte Einselementoberringe von $\mathfrak{R}$ zu betrachten, deren Struktur der des Ausgangsringes so weit als möglich angepaßt ist, und diese Ringe unter allen anderen bzw. durch besondere Eigenschaften auszuzeichnen.

III) Zu untersuchen, welche Eigenschaften sich jeweils von den unter I) oder II) behandelten Ringen auf $\mathfrak{R}$ bzw. umgekehrt übertragen.

Die Lösung der ersten Fragestellung wurde von B. BROWN und N. MCCOY in [3] gegeben, die „vollständige Mengen von Erweiterungen von $\mathfrak{R}$" betrachten und gewisse Eigenschaften dieser Systeme untersuchen. Eine solche Menge $\mathfrak{S}$ besteht dabei aus Oberringen von $\mathfrak{R}$ mit Einselement, derart daß jeder andere Ring dieser Art einen Unterring enthält, der zu einem Ring aus $\mathfrak{S}$ (relativ bezüglich $\mathfrak{R}$) isomorph ist. Mit Hilfe der für die vorliegende Arbeit benötigten Begriffsbildungen können wir ihrem grundlegenden Resultat ([3], Theorem 2) die folgende Wendung geben: Jeder Einselementoberring $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{R}$ ist Bild von $\mathfrak{R}^*$ bei einem bezüglich $\mathfrak{R}$ relativen Homomorphismus[1]), dessen Kern aus allen ganzzahligen Vielfachen eines Elementes $\alpha - a \in \mathfrak{R}^*$ besteht, wobei $a \cdot r = r \cdot a = \alpha r$ für alle $r \in \mathfrak{R}$ erfüllt ist, und umgekehrt. Einen entsprechenden Beweis, der sich für den so formulierten Satz ohne weitere Vorbereitungen leicht führen läßt, geben wir zusammen mit einigen Erläuterungen in § 1.

Die zweite Fragestellung wurde bisher nur für nullteilerfreie Ringe von J. SZENDREI ([7], vgl. auch [5], § 85) bzw. für Boolesche Ringe von M. H. STONE [6] gelöst. Diese Autoren zeigen, daß es zu jedem nullteilerfreien bzw. Booleschen Ring $\mathfrak{R}$ einen ebensolchen minimalen Oberring $\mathfrak{R}'$ mit Einselement gibt, und daß $\mathfrak{R}'$ jeweils durch diese drei Forderungen bis auf Isomorphie (relativ bezüglich $\mathfrak{R}$) eindeutig bestimmt ist. Nun kann man sich leicht überlegen, daß in beiden Fällen dieser Oberring $\mathfrak{R}'$ unter allen Einselementoberringen von $\mathfrak{R}$ auch dadurch ausgezeichnet werden kann, daß er sich nicht mehr echt homomorph relativ bezüglich $\mathfrak{R}$ auf einen anderen Einselementoberring von $\mathfrak{R}$ abbilden läßt[2]). Diese Forderung ist aber von speziellen Eigenschaften von $\mathfrak{R}$ unabhängig, und in der Tat werden sich ganz allgemein die ihr genügenden Einselementoberringe von $\mathfrak{R}$ — wir wollen sie kurz *strenge Einselementoberringe* von $\mathfrak{R}$ nennen — als die im Sinne von II) strukturell einfachsten Oberringe von $\mathfrak{R}$ mit Einselement herausstellen. Dabei kann insbesondere die sicher

---

[1]) Ein bezüglich $\mathfrak{R}$ relativer Homomorphismus eines Oberringes von $\mathfrak{R}$ auf einen ebensolchen Ring soll für die Teilmenge $\mathfrak{R}$ die identische Abbildung induzieren.

[2]) Bei uns wird sich dies, wie auch die Aussagen von SZENDREI und STONE selbst, aus allgemeineren Überlegungen ergeben.

naheliegende Forderung der Minimalität entfallen, da wir zeigen werden (§2, (6)), daß ein strenger Einselementoberring von $\mathfrak{R}$ stets minimal ist.

Weiterhin erhalten wir in §2 nach einigen vorbereitenden Überlegungen (erwähnt sei nur ein idealtheoretisches Durchschnittskriterium (3) für strenge Einselementoberringe), daß es in den wichtigsten Fällen zu einem Ring $\mathfrak{R}$ bis auf relative Isomorphie bezüglich $\mathfrak{R}$ nur einen strengen Einselementoberring $\mathfrak{R}'$ gibt, nämlich dann, wenn der Annullator $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{R}$ nur aus dem Nullelement besteht. Für $\mathfrak{N} \neq (o)$ existieren dagegen (von einem trivialen Fall abgesehen) stets mehrere strenge Einselementoberringe von $\mathfrak{R}$, die nicht relativ bezüglich $\mathfrak{R}$ isomorph sind, sodaß sich im allgemeinen kein bestimmter Ring im Sinne von II) mehr auszeichnen läßt.

Für den Fall $\mathfrak{N} = (o)$, den wir in §3 im Hinblick auf die dritte Fragestellung näher untersuchen, können weitere Kriterien (u. a. die Nullteilerfreiheit) dafür angegeben werden, daß ein Einselementoberring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ bereits die Struktur des strengen Einselementoberringes $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ hat. Ferner ist mit $\mathfrak{R}$ auch $\mathfrak{R}'$ nullteilerfrei und damit also der einzige Einselementoberring von $\mathfrak{R}$ mit dieser Eigenschaft, womit der Satz von SZENDREI in unsere Untersuchungen einbezogen ist. Allgemeiner stellt sich heraus, daß jedes links- bzw. rechtsreguläre Element von $\mathfrak{R}$ diese Eigenschaft beim Übergang zu $\mathfrak{R}'$ behält, wenn nur der Links- bzw. Rechtsannullator von $\mathfrak{R}$ nur aus dem Nullelement besteht. Damit können die Zusammenhänge von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ bei der Quotientenbildung untersucht werden, und man erhält: Jeder Links- bzw. Rechtsquotientenring $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R}, \mathfrak{T})$[3] von $\mathfrak{R}$ stimmt mit einem ebensolchen Quotientenring $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R}', \mathfrak{T}')$ von $\mathfrak{R}'$ überein; weiterhin ist $\mathfrak{R}'$ in jedem Quotientenring von $\mathfrak{R}$ und zwar stets echt enthalten. Wir bemerken noch, daß bei derartigen Überlegungen $\mathfrak{N} = (o)$ ohnehin erfüllt sein muß, also keine echte Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Die Untersuchung idealtheoretischer Zusammenhänge in §4 wird dagegen ohne die Voraussetzung $\mathfrak{N} = (o)$ durchgeführt, und zwar zunächst sogar für $\mathfrak{R}$ und einen beliebigen Einselementoberring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$, wobei sich u. a. die gleichzeitige Gültigkeit des Oberkettensatzes für $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ ergibt. Für die Übertragung des eingeschränkten Unterkettensatzes muß man für $\mathfrak{S}$ aber wieder einen strengen Einselementoberring $\mathfrak{R}'$ wählen; von gewissen Ausnahmen (vgl. (14)) abgesehen, gilt dann auch dieser Satz für $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ gleichzeitig. Das hat zur Folge, daß entsprechende Sätze der Idealtheorie nur für Ringe mit Einselement bewiesen zu werden brauchen und damit von selbst auch für Ringe ohne Einselement gelten. Als Beispiel hierzu sei der Satz von H. GRELL [4] genannt, nach dem sich der eingeschränkte Unterkettensatz von

[3]) Vgl. Fußnote 14 (§ 3).

einem kommutativen, nullteilerfreien Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement auf alle Oberringe dieser Art überträgt, deren Quotientenkörper endlich algebraisch über dem von $\mathfrak{R}$ sind.

§ 1

Jeder Einselementoberring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ ist vermöge der Zuordnung

$$\gamma + r \to \gamma e + r$$

homomorphes Bild des Ringes $\mathfrak{R}^*$. Der Kern dieses bezüglich $\mathfrak{R}$ relativen Homomorphismus ist damit ein Ideal $\mathfrak{a}^*$ von $\mathfrak{R}^*$, welches $\mathfrak{a}^* \cap \mathfrak{R} = (o)$ erfüllt, und umgekehrt ist jeder Restklassenring von $\mathfrak{R}^*$ nach einem solchen Ideal $\mathfrak{a}^*$ (nach Identifizierung der Restklassen $r + \mathfrak{a}^*$ mit den Elementen $r \in \mathfrak{R}$) ein Einselementoberring von $\mathfrak{R}$. Weiterhin ist jedes Ideal $\mathfrak{a}^*$ von $\mathfrak{R}^*$ mit $\mathfrak{a}^* \cap \mathfrak{R} = (o)$ ein Hauptideal, welches aus allen ganzzahligen Vielfachen eines Elementes

$$\alpha + a' = \alpha - a \in \mathfrak{R}^*$$

besteht. In den Elementen $\gamma + r$ von $\mathfrak{a}^*$ kann nämlich jede ganze Zahl γ höchstens einmal auftreten, und alle ganzen Zahlen dieser Art bilden ein Ideal (α) von Γ. Für $\mathfrak{a}^* \neq (o)$ kann also α stets positiv gewählt werden, während $\alpha = 0$ natürlich $a = o$ impliziert. Wegen

$$\left.\begin{aligned} (\alpha - a)\cdot r &= \alpha r - a \cdot r \\ r \cdot (\alpha - a) &= \alpha r - r \cdot a \end{aligned}\right\} \in \mathfrak{a}^* \cap \mathfrak{R} = (o)$$

erfüllt dabei das Element $a \in \mathfrak{R}$

$$(*) \qquad a \cdot r = r \cdot a = \alpha r \quad \text{für alle } r \in \mathfrak{R},$$

d. h., die Multiplikation mit a wirkt auf alle Ringelemente wie die Vielfachenbildung mit der ganzen Zahl α. Gilt umgekehrt $(*)$ für ein Element $a \in \mathfrak{R}$ und eine ganze Zahl α, so erfüllt das von $\alpha - a$ erzeugte Ideal $\mathfrak{a}^* = (\alpha - a)$ von $\mathfrak{R}^*$ obige Durchschnittsbedingung, wenn nur wieder der Fall $\alpha = 0$, $a \neq o$ ausgeschlossen wird. Nennen wir noch ein solches Element a von $\mathfrak{R}$, zu dem eine ganze Zahl α gemäß $(*)$ korrespondiert, ein *α-Element von $\mathfrak{R}$* (in [3] „α-fier"), so haben wir bereits die mit Theorem 2 von [3] gleichwertige Aussage:

(1) *Die Einselementoberringe von $\mathfrak{R}$ sind (bis auf relative Isomorphie bezüglich $\mathfrak{R}$) gerade die wie oben als Oberringe von $\mathfrak{R}$ aufzufassenden Restklassenringe $\mathfrak{R}^*/(\alpha - a)$, wobei a und $\alpha \geqq 0$ auf alle möglichen Arten so zu wählen sind, daß a α-Element von $\mathfrak{R}$ ist unter Ausschluß der Fälle $\alpha = 0, a \neq o$.*

Ist e das Einselement von $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}^*/(\alpha - a)$, so läuft die Restklassenbildung modulo $(\alpha - a)$ gerade darauf hinaus, in $\mathfrak{S}$ alle ganzzahligen Vielfachen $\tau\alpha e$ von αe mit den Elementen $\tau a \in \mathfrak{R}$ zu identifizieren. Wegen

$\tau a e = \tau a$ für alle $\tau \in \Gamma$ ist die Charakteristik μ von $\mathfrak{S}$ das α-fache der additiven Ordnung η_a von a, also $\mu = \alpha \eta_a$[4]), wobei natürlich $\eta_a = 0$ für ein Element unendlicher Ordnung zu setzen ist — letzteres einfach im Einklang damit, daß man auch „Charakteristik 0" statt „Charakteristik ∞" sagt.

Weiterhin können wir jedes Element von $\mathfrak{S}$ nun sogar eindeutig als Summe der Form

$$\gamma e + r$$

schreiben, wenn wir r alle Elemente von $\mathfrak{R}$, und γ

für $\alpha = 0$ (also $a = o$ und $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}^*$) alle ganzen Zahlen,

für $\alpha \geqq 2$ die Zahlen $0, 1, \ldots, \alpha - 1$

durchlaufen lassen[5]).

Alle Rechnungen können dann (unter Beachtung der Charakteristik) völlig formal vorgenommen werden, wenn man nur für $\alpha \geqq 2$ jeweils αe durch das α-Element a von $\mathfrak{R}$ ersetzt. Selbstverständlich ist mit $\mathfrak{R}$ auch $\mathfrak{S}$ kommutativ.

Für einen gewissen Überblick über die damit existierenden Einselementoberringe von $\mathfrak{R}$ übernehmen wir aus [3] noch folgende leicht ersichtliche Aussagen über die α-Elemente von $\mathfrak{R}$, die wir zusammenfassend auch *Operatorelemente* von $\mathfrak{R}$ nennen wollen:

Alle α-Elemente von $\mathfrak{R}$ bilden einen Unterring $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{R}$, die korrespondierenden ganzen Zahlen[6]) ein Ideal $(\varkappa)$ von Γ, wobei $\varkappa \geqq 0$ eine Invariante von $\mathfrak{R}$ ist (in [3] „mode" genannt).

Die Gesamtheit der 0-Elemente von $\mathfrak{R}$ ist der Annullator $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{R}$, und die ihnen zugeordneten ganzen Zahlen sind gerade das von der Charakteristik ν von $\mathfrak{R}$ erzeugte Ideal (ν) von Γ[7]). Wegen $(\varkappa) \supseteq (\nu)$ gilt $\varkappa | \nu$.

Genau für $\mathfrak{N} = (o)$ ist das Nullelement o von $\mathfrak{R}$ das einzige 0-Element von $\mathfrak{R}$ im oben festgelegten Sinne. Entsprechend gilt: Die Gesamtheit aller α-Elemente mit festem α ist eine Restklasse der additiven Zerlegung von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{N}$, d. h., man erhält alle diese Elemente aus einem α-Element a in der Form

$$a' = a + n \quad \text{mit} \quad n \in \mathfrak{N}\text{[8])}.$$

---

[4]) Daraus folgt auch sofort die in [3] als Hilfssatz über die α-Elemente bewiesene Aussage $\nu | \alpha \eta_a$ für die Charakteristik ν von $\mathfrak{R}$.

[5]) Für $\alpha = 1$ wäre das zugehörige a als „1-Element" von $\mathfrak{R}$ Einselement im üblichen Sinne und $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$.

[6]) Man beachte, daß bei Charakteristik ν jedes α-Element a von $\mathfrak{R}$ zugleich $(\alpha + \tau\nu)$-Element für jedes $\tau \in \Gamma$ ist.

[7]) Wir werden diese Begriffsbildungen mitunter auch „einseitig" benötigen, also von α-Linkselementen, dem Linksannulator $\mathfrak{N}_L$ von $\mathfrak{R}$ usf. sprechen.

[8]) Dabei kann a insbesondere als das $\frac{\alpha}{\varkappa}$-fache eines $\varkappa$-Elements k von $\mathfrak{R}$ geschrieben werden.

Damit ist $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ isomorph zu dem von $\varkappa$ bzw. $[\varkappa]_\nu$ erzeugten Unterring von Γ bzw. $\Gamma/(\nu)$.

Aus

$$\varkappa(k+n)=k\cdot(k+n)=k\cdot k=\varkappa k,$$

also $\varkappa n=o$ für ein beliebiges $\varkappa$-Element k und jedes 0-Element n von $\mathfrak{R}$ folgt noch $\eta_n|\varkappa$ für die Ordnungen η_n der Elemente des Annullators $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{R}$.

§ 2

Aus unserer Kennzeichnung der Einselementoberringe von $\mathfrak{R}$ als relativ homomorphe Bilder von $\mathfrak{R}^*$ ergibt sich zunächst unmittelbar:

(2) *Zwischen zwei Einselementoberringen von $\mathfrak{R}$ besteht genau dann ein bezüglich $\mathfrak{R}$ relativer Homomorphismus*

$$\mathfrak{R}^*/\mathfrak{a}^* \simeq \mathfrak{R}^*/\mathfrak{b}^*,$$

wenn für die zugehörigen Ideale $\mathfrak{b}^*=(\beta-b)\supseteq\mathfrak{a}^*=(\alpha-a)$ gilt, es also eine ganze Zahl τ mit $\alpha=\tau\beta$, $a=\tau b$ gibt.

Die Existenz eines echten relativen Homomorphismus entspricht also der Möglichkeit, in $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{a}^*$ weitere Identifizierungen von Operatorelementen von $\mathfrak{R}$ mit Vielfachen des Einselementes von $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{a}^*$ vorzunehmen. Wir wenden unsere Aufmerksamkeit daher solchen Einselementoberringen $\mathfrak{R}'=\mathfrak{R}^*/\mathfrak{a}^*$ zu, die nicht mehr echt homomorph relativ bezüglich $\mathfrak{R}$ abgebildet werden können und die wir bereits in der Einleitung *strenge* Einselementoberringe von $\mathfrak{R}$ genannt haben. Sie sind nach (1) und (2) dadurch ausgezeichnet, daß das Ideal $\mathfrak{a}^*$ von $\mathfrak{R}^*$ in bezug auf die Eigenschaft $\mathfrak{a}^*\cap\mathfrak{R}=(o)$ maximal ist. Daraus ergibt sich:

(3) *Ein Einselementoberring $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann streng, wenn für jedes zweiseitige Ideal $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{R}'$ gilt:*

$$\textit{Aus}\quad \mathfrak{a}'\cap\mathfrak{R}=(o)\quad \textit{folgt}\quad \mathfrak{a}'=(o).$$

Ist nämlich $\mathfrak{a}^*$ ein solches Ideal von $\mathfrak{R}^*$, so enthält jedes Ideal $\mathfrak{b}^*\supset\mathfrak{a}^*$ von $\mathfrak{R}^*$ ein Element $r\neq o$ aus $\mathfrak{R}$, so daß das gleiche für sein Bild $\mathfrak{b}'$ von $\mathfrak{R}'$ und damit für alle Ideale $\mathfrak{a}'\neq(o)$ von $\mathfrak{R}'$ gilt. Die Umkehrung ist klar. Insbesondere ist damit auch gezeigt, daß die Nichtexistenz eines echten Homomorphismus von $\mathfrak{R}'$, der für $\mathfrak{R}$ eine beliebige isomorphe Abbildung induziert, gleichwertig ist mit der Nichtexistenz eines echten Homomorphismus von $\mathfrak{R}'$, der für $\mathfrak{R}$ die identische Abbildung induziert.

(4) *Es gibt wenigstens einen strengen Einselementoberring $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$, der die gleiche Charakteristik ν wie $\mathfrak{R}$ hat.*

Das ergibt sich sofort daraus, daß der in der Einleitung erwähnte Einselementoberring $\mathfrak{R}_\nu^*=\mathfrak{R}^*/(\nu-o)$ von $\mathfrak{R}$ entweder selbst schon streng ist, oder auf einen strengen Einselementoberring $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ relativ homomorph abgebildet werden kann, wobei jedoch die Charakteristik ν erhalten bleiben muß. Allgemeiner läßt sich natürlich jeder Einselementoberring der Charakteristik ν auch als relativ homomorphes Bild von $\mathfrak{R}_\nu^*$ gewinnen, und man kann für diese Ringe alle Betrachtungen entsprechend unter Ersetzung von $\mathfrak{R}^*$ durch $\mathfrak{R}_\nu$ durchführen.

Da nach den Ausführungen in § 1 für $\mathfrak{N} = (o)$ alle Operatorelemente von $\mathfrak{R}$ gerade die ganzzahligen Vielfachen des dann eindeutig bestimmten $\varkappa$-Elementes k von $\mathfrak{R}$ sind, ist das Ideal $(\varkappa - k)$ von $\mathfrak{R}^*$ eindeutig bestimmtes Oberideal aller Ideale $\mathfrak{a}^* = (\alpha - a)$ von $\mathfrak{R}^*$ mit $\mathfrak{a}^* \cap \mathfrak{R} = (o)$, und wir erhalten aus (2):

(5) *Besteht der Annullator eines Ringes $\mathfrak{R}$ nur aus dem Nullelement, so gibt es einen bis auf relative Isomorphie bezüglich $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmten strengen Einselementoberring von $\mathfrak{R}$:*

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^*/(\varkappa - k).$$

Er ist relativ homomorphes Bild jedes Einselementoberringes von $\mathfrak{R}$, kann aber eben selbst nicht mehr echt homomorph relativ bezüglich $\mathfrak{R}$ abgebildet werden. Weiterhin hat $\mathfrak{R}'$ die gleiche Charakteristik wie $\mathfrak{R}$ und ist als Oberring von $\mathfrak{R}$ mit Einselement minimal.

Die beiden letzten Behauptungen ergeben sich sofort aus (4) und dem nachfolgenden Satz (6). Wir bemerken noch, daß für einen Booleschen Ring $\mathfrak{R}$ stets $\mathfrak{N} = (o)$ und $\varkappa = 2$ gilt, und der Ring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^*/(2 - o)$ Boolescher Oberring von $\mathfrak{R}$ mit Einselement ist, während alle anderen Einselementoberringe $\mathfrak{R}^*/(\alpha - o)$ mit $\alpha = 0, 4, 6, 8, \ldots$ eine von 2 verschiedene Charakteristik haben.

Abgesehen von dem trivialen Fall $\varkappa = 0$, für den $\mathfrak{R}^*$ stets der einzige Einselementoberring von $\mathfrak{R}$ ist, ist die Bedingung $\mathfrak{N} = (o)$ für Satz (5) auch notwendig[9]): Für $\mathfrak{N} = \{o, n, n', \ldots\} \neq (o)$ liefern dann nämlich schon die mit einem festen $\varkappa$-Element k gebildeten Ideale von $\mathfrak{R}^*$

$$(\varkappa - k),\ (\varkappa - (k + n)),\ (\varkappa - (k + n')),\ \ldots$$

strenge Einselementoberringe von $\mathfrak{R}$, von denen ersichtlich keine zwei relativ bezüglich $\mathfrak{R}$ isomorph sind[10]). Weitere Ideale

$$(\tau\varkappa - (\tau k + n))$$

[9]) Im Falle $\varkappa = 1$ hat $\mathfrak{R}$ selbst ein Einselement, und es gilt a fortiori $\mathfrak{N} = (o)$.

[10]) Es gibt sogar Beispiele dafür, daß zwei solche strengen Einselementoberringe $\mathfrak{R}_1'$ und $\mathfrak{R}_2'$ eines geeigneten Ringes $\mathfrak{R}$ überhaupt nicht isomorph aufeinander abgebildet werden können.

dieser Art entstehen, wenn man ein $\tau\varkappa$-Element $\tau k+n$ verwendet, welches nicht das τ'-fache eines $\frac{\tau}{\tau'}\varkappa$-Elementes ist; man kann zeigen, daß dafür (unabhängig von der Wahl des $\varkappa$-Elementes k) notwendig und hinreichend ist, daß es kein $\tau' \in \Gamma$ und kein $n' \in \mathfrak{N}$ mit $\tau'|\tau$ und $n=\tau'n'$ gibt. Auch ist die Existenz solcher Ideale stets gewährleistet: Wegen $\varkappa n'=o$ für alle $n' \in \mathfrak{N}$ ist das $\varkappa^2$-Element $\varkappa k+n$ mit $n \neq o$ aus $\mathfrak{N}$ nicht $\varkappa$-faches irgendeines $\varkappa$-Elementes $k+n'$. Damit kann der Ring

$$\mathfrak{N}^*/(\varkappa^2-(\varkappa k+n))$$

gemäß (2) auf keinen der Ringe

$$\mathfrak{N}^*/(\varkappa-(k+n')),\quad n' \text{ durchläuft } \mathfrak{N}$$

relativ homomorph abgebildet werden, sodaß diese Ringe nicht alle strengen Einselementoberringe von $\mathfrak{N}$ ausmachen können.

Bevor wir die sich aus (5) ergebenden Verhältnisse näher untersuchen, wobei sich der Ring $\mathfrak{N}'$ auch als Verallgemeinerung des SZENDREIschen Ringes im nullteilerfreien Falle herausstellen wird, beweisen wir allgemein den Satz:

(6) *Jeder strenge Einselementoberring $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}$ ist minimaler Oberring von $\mathfrak{N}$ mit Einselement*[11]).

Es sei $\mathfrak{S}=\mathfrak{N}^*/(\alpha-a)$ ein Einselementoberring von $\mathfrak{N}$ mit dem Einselement e, und $\mathfrak{S}$ enthalte einen echten Unterring $\mathfrak{S}'\supset\mathfrak{N}$ mit dem Einselement e'[12]). Wir werden zeigen, daß dann $\mathfrak{S}$ ein Ideal $(\beta e-b)\neq(o)$ mit $(\beta e-b)\cap\mathfrak{N}=(o)$ besitzt, also nicht streng ist. Als Element von $\mathfrak{S}$ läßt sich e' eindeutig in der Form $e'=\delta e+r_0$ mit $1<\delta<\alpha$ schreiben, wobei $-r_0=\delta e-e'$ ein $(\delta-1)$-Element von $\mathfrak{N}$ ist. Wir betrachten alle ganzen Zahlen γ mit $\gamma e' \in \mathfrak{N}$. Diese bilden ein Ideal (β) von Γ, welches ersichtlich α, wegen $e' \notin \mathfrak{N}$ aber nicht 1 enthält. Dann gilt $\beta|\alpha$, und

$$\beta e'=\beta\delta e+\beta r_0 \in \mathfrak{N}$$

ist ein β-Element b von $\mathfrak{N}$; aus $\beta\delta e \in \mathfrak{N}$ folgt außerdem noch $\beta\delta=\tau\alpha$ und $\beta\delta e=\tau a$. Das Ideal $(\beta e-b)$ von $\mathfrak{S}$ enthält also nur ganzzahlige Vielfache

---

11) Einfache Gegenbeispiele (für nicht strenge Einselementoberringe) lassen sich leicht bilden: Ist etwa $\mathfrak{N}$ ein Ring mit der Charakteristik 4 und mit $\varkappa=0$ oder $\varkappa=2$, so enthält der Einselementoberring $\mathfrak{N}^*/(12-o)=\{\gamma e+r\}$ echt den von $e'=9e$ und $\mathfrak{N}$ erzeugten Einselementoberring von $\mathfrak{N}$ mit dem Einselement e', der natürlich zu $\mathfrak{N}^*/(4-o)$ relativ isomorph ist.

12) Den Fall, daß $\mathfrak{N}$ schon ein Einselement enthält und damit selbst der einzige strenge Einselementoberring von $\mathfrak{N}$ ist, dürfen wir von vorn herein ausschliessen.

von $\beta e - b$, und $\gamma(\beta e - b) \in \mathfrak{N}$ kann nur für solche $\gamma \in \Gamma$ eintreten, die $\gamma\beta = \sigma\alpha$ erfüllen. Wir zeigen, daß dann stets

$$\gamma(\beta e - b) = \gamma(\beta e - \beta e') = \sigma\alpha e - \sigma\alpha e' = o$$

gilt, indem wir $\alpha e' = a = \alpha e$ beweisen. Dazu schreiben wir das $(\delta - 1)$-Element $-r_0$ von $\mathfrak{R}$ mit Hilfe eines $\varkappa$-Elementes k von $\mathfrak{R}$ in der Form

$$-r_0 = \frac{\delta - 1}{\varkappa} k + n_0 \quad \text{mit} \quad n_0 \in \mathfrak{N},$$

und das α-Element a von $\mathfrak{R}$ entsprechend

$$a = \frac{\alpha}{\varkappa} k + n_1 \quad \text{mit} \quad n_1 \in \mathfrak{N}.$$

Da die Ordnung jedes Elementes aus $\mathfrak{N}$ ein Teiler von $\varkappa$ ist, gilt $\beta n_0 = o$ wegen $\varkappa | \beta$ und $(\delta - 1) n_1 = o$ wegen $\varkappa | \delta - 1$, sodaß unter weiterer Beachtung von $\beta\delta = \tau\alpha$ folgt:

$$\alpha e' = \frac{\alpha}{\beta}(\beta e') = \frac{\alpha}{\beta}(\beta\delta e + \beta r_0) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\tau \frac{\alpha}{\varkappa} k + \tau n_1 - \beta \frac{\delta - 1}{\varkappa} k - \beta n_0\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{\varkappa} k + \tau n_1\right) = \frac{\alpha}{\varkappa} k + \delta n_1 = \frac{\alpha}{\varkappa} k + n_1 = a.$$

§ 3

In diesem Paragraphen betrachten wir den wichtigen Fall, daß der Annullator $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{R}$ nur aus dem Nullelement besteht. Dann gestattet es die Begriffsbildung des relativen Homomorphismus, gemäß (5) genau einen Einselementoberring $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ (natürlich bis auf relative Isomorphie bezüglich $\mathfrak{R}$) als strengen Einselementoberring auszuzeichnen. $\mathfrak{R}'$ ist dann der einzige Einselementoberring von $\mathfrak{R}$, in dem jedes γ-Element c von $\mathfrak{R}$ mit allen entsprechenden Vielfachen $(\gamma + \tau\nu)e$ des Einselementes von $\mathfrak{R}'$ identifiziert ist. Da andernfalls ein γ_0-Element c_0 mit $\gamma_0 e - c_0 \neq o$ existieren würde, welches alle Elemente $r \in \mathfrak{R}$ annulliert, erhalten wir:

(7) *Hinreichend dafür, daß ein Einselementoberring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ (bis auf relative Isomorphie bezüglich $\mathfrak{R}$) mit dem strengen Einselementoberring $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ überstimmt, ist die Existenz eines Elementes $r_0 \neq o$ aus $\mathfrak{R}$, welches von keinem Element aus $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{R}$ annulliert wird — erst recht also die Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{S}$.*

Beispiel. In dem Ring $\mathfrak{N}=\begin{pmatrix}\mathrm{P}0\\ \mathrm{P}0\end{pmatrix}$ aller Matrizen $\begin{pmatrix}r_1 & 0\\ r_2 & 0\end{pmatrix}$ mit Elementen r_i aus dem Körper P der rationalen Zahlen ist das Nullelement $o=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ das einzige (zweiseitige!) Operatorelement. Es gilt also $\mathfrak{N}=(o)$ und $\varkappa=0$, und der strenge Einselementoberring $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}$ hat die Struktur $\mathfrak{N}'=\mathfrak{N}^*=\left\langle \Gamma, \begin{pmatrix}\mathrm{P}0\\ \mathrm{P}0\end{pmatrix}\right\rangle$. Andererseits ist $\mathfrak{S}=\begin{pmatrix}\mathrm{P}\,0\\ \mathrm{P}\,\Gamma\end{pmatrix}\subset\mathfrak{M}_2(\mathrm{P})$ Einselementoberring von $\mathfrak{N}$, und das Element $r_0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ wird von keinem Element aus $\mathfrak{S}\setminus\mathfrak{N}$ annulliert. Es müssen also $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{S}$ relativ isomorph bezüglich $\mathfrak{N}$ sein, und in der Tat vermittelt die Zuordnung

$$(\gamma, r)=\left(\gamma, \begin{pmatrix}r_1 & 0\\ r_2 & 0\end{pmatrix}\right)\to\begin{pmatrix}r_1+\gamma & 0\\ r_2 & \gamma\end{pmatrix}$$

den (einzig möglichen) Isomorphismus dieser Art.

Die letzte Bemerkung in (7) ist bereits die Eindeutigkeitsaussage des Satzes von SZENDREI. Die Existenzaussage entspricht dem folgenden Satz:

(8) *Mit $\mathfrak{N}$ ist auch $\mathfrak{N}'$ nullteilerfrei.*

Aus $(\gamma e+r)(\delta e+s)=o$ folgt nämlich mit beliebigen x und y aus $\mathfrak{N}$

$$x(\gamma e+r)(\delta e+s)y=(\gamma x+xr)(\delta y+sy)=o$$

das Verschwinden eines Produktes von Elementen aus $\mathfrak{N}$. Ist nun etwa $\delta y_0+sy_0\neq o$ für ein festes $y_0\in\mathfrak{N}$, so gilt

$$\gamma x+xr=o, \quad \text{d.h.} \quad x(-r)=\gamma x \quad \text{für alle} \quad x\in\mathfrak{N}.$$

Also ist $-r$ γ-Rechtselement von $\mathfrak{N}$. Wegen der Nullteilerfreiheit[13]) von $\mathfrak{N}$ ist $-r$ dann auch γ-Linkselement von $\mathfrak{N}$, woraus sich nach der eben hervorgehobenen Eigenschaft von $\mathfrak{N}'$ $\gamma e=-r$, also $\gamma e+r=o$ ergibt. Entsprechend schließt man, wenn $\delta y+sy=o$ für alle $y\in\mathfrak{N}$ gilt.

Ein ähnlicher Schluß lehrt:

(9) *Ein Element $s\in\mathfrak{N}$, welches in $\mathfrak{N}$ nicht rechter (linker) Nullteiler ist, hat jedenfalls dann die gleiche Eigenschaft in $\mathfrak{N}'$, wenn der Rechtsannullator $\mathfrak{N}_R$ (Linksannullator $\mathfrak{N}_L$) von $\mathfrak{N}$ gleich (o) ist.*

13) Es gilt nämlich sogar bereits: Ist der Rechtsannullator $\mathfrak{N}_R$ von $\mathfrak{N}$ gleich (o), so ist jedes γ-Rechtselement c von $\mathfrak{N}$ auch γ-Linkselement (und entsprechend für γ-Linkselemente mit $\mathfrak{N}_L=(o)$). Aus $xc=\gamma x$ für alle $x\in\mathfrak{N}$ folgt nämlich für alle $z\in\mathfrak{N}$

$$z(cx-\gamma z)=\gamma zx-\gamma zx=o, \quad \text{also} \quad cx-\gamma x=o.$$

Wir gehen wieder von $(\gamma e+r)s=o$ zu

$$x(\gamma e+r)s=(\gamma x+xr)s=o \quad \text{für alle} \quad x\in\mathfrak{R}$$

über und erhalten auf Grund unserer Voraussetzung über $\mathfrak{R}_R$ wie eben $\gamma e+r=o$.

Insbesondere behalten also Elemente, die in $\mathfrak{R}$ regulär (d. h. weder linke noch rechte Nullteiler) sind, diese Eigenschaft beim Übergang zu $\mathfrak{R}'$, da ja die Existenz eines solchen Elementes bereits $\mathfrak{R}_L=\mathfrak{R}_R=\mathfrak{R}=(o)$ nach sich zieht. Darauf aufbauend können wir die Zusammenhänge zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ und den aus ihnen durch Quotientenbildung entstehenden Ringen klären, wobei wir alle Aussagen für Linksquotientenringe[14]) formulieren.

Vorbereitend dazu stellen wir fest: Ist $\mathfrak{T}$ eine geeignete Halbgruppe von $\mathfrak{R}$, d. h. existieren zu $\varrho\in\mathfrak{T}$, $r\in\mathfrak{R}$ stets $\sigma\in\mathfrak{T}$, $s\in\mathfrak{R}$ mit $s\varrho=\sigma r$[15]), so ist $\mathfrak{T}$ auch geeignete Halbgruppe von $\mathfrak{R}'$; sind nämlich $\varrho\in\mathfrak{T}$, $r'\in\mathfrak{R}'$ vorgegeben, so ist $\varrho^2\in\mathfrak{T}$, $\varrho r'\in\mathfrak{R}$, und es gilt

$$s(\varrho^2)=\sigma(\varrho r'), \quad \text{also} \quad (s\varrho)\varrho=(\sigma\varrho)r' \quad \text{mit} \quad \sigma\varrho\in\mathfrak{T},\ s\varrho\in\mathfrak{R}.$$

Ist umgekehrt $\mathfrak{T}'$ eine geeignete Halbgruppe von $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{T}'\cap\mathfrak{R}$ nicht leer, so ist $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}'\cap\mathfrak{R}$ geeignete Halbgruppe von $\mathfrak{R}$; denn zu $\varrho\in\mathfrak{T}$, $r\in\mathfrak{R}$ existieren dann $\sigma'\in\mathfrak{T}'$, $s'\in\mathfrak{R}'$ mit

$$s'\varrho=\sigma' r, \quad \text{woraus} \quad (\varrho s')\varrho=(\varrho\sigma')r$$

mit $\varrho s'\in\mathfrak{R}$ und $\varrho\sigma'\in\mathfrak{T}'\cap\mathfrak{R}=\mathfrak{T}$ folgt.

(10) *Jeder Linksquotientenring* $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R},\mathfrak{T})$ *von* $\mathfrak{R}$ *stimmt mit dem Linksquotientenring* $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R}',\mathfrak{T})$ *von* $\mathfrak{R}'$ *und darüber hinaus mit allen Linksquotientenringen* $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R}',\mathfrak{T}')$, $\mathfrak{T}'\cap\mathfrak{R}=\mathfrak{T}$ *überein, und es gilt*

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{R},\mathfrak{T})=\mathfrak{Q}(\mathfrak{R}',\mathfrak{T}')\supset\mathfrak{R}'.$$

Insbesondere kann also $\mathfrak{R}'$ *nicht als Quotientenring von* $\mathfrak{R}$ *gewonnen werden.*

Offensichtlich gilt nämlich $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R}',\mathfrak{T}')\supseteq\mathfrak{Q}(\mathfrak{R},\mathfrak{T})$; es kann aber auch umgekehrt jedes Element $\varrho'^{-1}r'\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{R}',\mathfrak{T}')$ als Element von $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R},\mathfrak{T})$ geschrieben werden. Ist nämlich $\varrho\in\mathfrak{T}$, so erst recht $\varrho\in\mathfrak{T}'$, und es gilt

$$\varrho'^{-1}r'=\varrho'^{-1}(\varrho^{-1}\varrho)r'=(\varrho\varrho')^{-1}(\varrho r')$$

[14]) Ist $\mathfrak{o}$ ein beliebiger Ring, $\mathfrak{m}$ eine Halbgruppe regulärer Elemente aus $\mathfrak{o}$, so bezeichne $\mathfrak{Q}(\mathfrak{o},\mathfrak{m})$ einen Oberring von $\mathfrak{o}$ mit Einselement, in dem jedes $\alpha\in\mathfrak{m}$ invertierbar ist und dessen Elemente in der Form $\alpha^{-1}a$ mit $\alpha\in\mathfrak{m}$, $a\in\mathfrak{o}$ geschrieben werden können. Nach [2] existiert ein solcher Linksquotientenring $\mathfrak{Q}(\mathfrak{o},\mathfrak{m})$ genau dann, wenn zu je zwei Elementen $\alpha\in\mathfrak{m}$, $a\in\mathfrak{o}$ zwei Elemente $\sigma\in\mathfrak{m}$, $s\in\mathfrak{o}$ existieren, die $sa=\sigma a$ erfüllen (im folgenden werden wir solche Halbgruppen $\mathfrak{m}$ kurz „geeignet" nennen); $\mathfrak{Q}(\mathfrak{o},\mathfrak{m})$ ist dann bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

[15]) Für den Rest das Paragraphen bezeichnen $\varrho, \varrho', \sigma, \sigma'$ ausnahmsweise keine ganzen Zahlen, sondern Elemente aus geeigneten Halbgruppen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{R}'$.

mit $\varrho\varrho' \in \mathfrak{T}' \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{T}$, $\varrho r' \in \mathfrak{R}$. Der Rest der Behauptung ergibt sich einfach daraus, daß kein reguläres Element ϱ von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}'$ invertierbar ist, denn aus $(\gamma e + r)\varrho = e$ folgte ja $\gamma\varrho + r\varrho = e \in \mathfrak{R}$.

Bildet insbesondere die Gesamtheit aller regulären Elemente von $\mathfrak{R}$ eine geeignete Halbgruppe, so lehren unsere Überlegungen die Übereinstimmung der maximalen Linksquotientenringe von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, im nullteilerfreien Falle also der Linksquotientenkörper.

§ 4

Wir wenden uns nunmehr einigen Aussagen über die Ideale in einem Ring $\mathfrak{R}$ ohne Einselement zu, wobei wir insbesondere auf Zusammenhänge mit Eigenschaften der Ideale in einem (festen, aber zunächst beliebigen) Einselementoberring $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}^*/(\alpha - a)$ von $\mathfrak{R}$ abzielen. Dabei gelten die hier für Linksideale formulierten Überlegungen ebenso für zweiseitige Ideale.

Zunächst bestimmt jedes Linksideal $\mathfrak{L} \neq (o)$ von $\mathfrak{S}$ ein Verengungsideal $\mathfrak{l} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{R}$, während umgekehrt für jedes Linksideal $\mathfrak{l}$ von $\mathfrak{R}$ stets $\mathfrak{S}\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$ gilt. Insbesondere ist eine Basis von $\mathfrak{l}$ als Ideal von $\mathfrak{R}$ zugleich eine Basis von $\mathfrak{l}$ als Ideal von $\mathfrak{S}$ und umgekehrt[16]).

Als nächstes untersuchen wir alle Linksideale von $\mathfrak{S}$ mit dem gleichen Verengungsideal $\mathfrak{l}$. Ist $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{l}$ ein solches Ideal und λ die kleinste positive ganze Zahl, die in den Elementen $\gamma e + r \in \mathfrak{L}$, etwa in $\lambda e + r_0 \in \mathfrak{L}$, auftritt, so gilt:

$$(*) \qquad \mathfrak{L} = \Gamma(\lambda e + r_0) + \mathfrak{l}.$$

Für jedes $\gamma e + r \in \mathfrak{L}$ ist nämlich die Zahl γ ersichtlich ein Vielfaches $\tau\lambda$ von λ (für $\alpha \geqq 2$ beachte man $\lambda | \alpha$), und unsere Behauptung folgt aus

$$(\gamma e + r) - \tau(\lambda e + r_0) = r - \tau r_0 \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{l}.$$

Jedes Oberideal $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{l}$ mit $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{l}$ ist also durch die nichtnegative ganze Zahl λ[17]) und die durch r_0 bestimmte Restklasse von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{l}$ gekennzeichnet. Die Gesamtheit seiner Elemente kann in der Form

$$\{\tau\lambda e + x_\tau\} \quad \text{mit} \quad \begin{Bmatrix} \tau \in \Gamma & \text{für} \quad \alpha = 0 \\ 0 \leqq \tau < \dfrac{\alpha}{\lambda} & \text{für} \quad \alpha \geqq 2 \end{Bmatrix}, \quad x_\tau \in \tau r_0 + \mathfrak{l}$$

angegeben werden, wobei x_τ jeweils alle Elemente der von τr_0 bestimmten Restklasse modulo $\mathfrak{l}$ durchläuft. Diese Überlegungen führen uns zu dem Hilfssatz:

---

16) Allgemein kann man die Ideale von $\mathfrak{R}$ als $\mathfrak{S}$-Moduln bzw. einheitlich als $\mathfrak{R}^*$-Moduln auffassen.

17) Offenbar ist $\lambda = 0$ gleichwertig mit $\mathfrak{L} = \mathfrak{l}$.

(11) *Sind* $\mathfrak{L}_1$ *und* $\mathfrak{L}_2$ *zwei Linksideale von* $\mathfrak{S}$ *mit den Verengungsidealen* $\mathfrak{l}_1$ *und* $\mathfrak{l}_2$ *und den zugehörigen ganzen Zahlen* λ_1 *und* λ_2, *so folgt aus* $\mathfrak{L}_1 \supseteqq \mathfrak{L}_2$ *stets*

$$\mathfrak{l}_1 \supseteqq \mathfrak{l}_2 \quad \textit{und} \quad \lambda_1 | \lambda_2,$$

wobei genau für $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}_2$ *und* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ *sogar* $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2$ *gilt.*

Es ist alles unmittelbar ersichtlich bis auf die letzte Behauptung. Zu ihrem Beweis verwenden wir die eben angegebenen Darstellungen

$$\mathfrak{L}_1 = \{\tau\lambda e + x_\tau\} \supseteqq \{\sigma\lambda e + y_\sigma\} = \mathfrak{L}_2$$

mit $x_\tau \in \tau r_0 + \mathfrak{l}$ und entsprechend $y_\sigma \in \sigma s_0 + \mathfrak{l}$. Nun muß für jedes σ das Element $\sigma\lambda e + \sigma s_0$ gleich einem der Elemente $\tau\lambda e + x_\tau$ sein, was unter Beachtung der eindeutigen Schreibweise der Elemente von $\mathfrak{S}$ nur für $\tau = \sigma$ möglich ist, woraus $\sigma s_0 \in \sigma r_0 + \mathfrak{l}$ folgt. Dann gilt aber $\sigma r_0 + \mathfrak{l} = \sigma s_0 + \mathfrak{l}$ für jedes σ, folglich auch $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2$.

Die Aussage (11) bzw. die ihr zu Grunde liegende Beziehung (*) für die Ideale von $\mathfrak{S}$ ergeben nun eine verhältnismäßig weitgehende Entsprechung zwischen den idealtheoretischen Gesetzmäßigkeiten in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$. Insbesondere erhält man sofort:

(12) *Gilt in* $\mathfrak{R}$ *der Oberkettensatz für Linksideale, so auch in* $\mathfrak{S}$, *und umgekehrt.*

Auch der eingeschränkte Unterkettensatz gilt natürlich in $\mathfrak{R}$, wenn er in $\mathfrak{S}$ erfüllt ist; dagegen ist seine Übertragung von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{S}$ überhaupt nur diskutierbar, wenn wir $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^*/(\alpha - a)$ nun wirklich als strengen Einselementoberring von $\mathfrak{R}$ voraussetzen. Ist nämlich

$$\mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{L}_2 \supset \cdots \supseteqq \mathfrak{A} \neq (o)$$

eine Unterkette, die in $\mathfrak{S}$ auf das zweiseitige Ideal $\mathfrak{A}$ zuläuft[18]), so entspricht ihr die Kette der Verengungsideale

$$\mathfrak{l}_1 \supseteqq \mathfrak{l}_2 \supseteqq \cdots \supseteqq \mathfrak{a} \neq (o)$$

in $\mathfrak{R}$, und es ist eben $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a} \neq (o)$ nach (3) nur dann allgemein gewährleistet, wenn $\mathfrak{S}$ strenger Einselementoberring von $\mathfrak{R}$ ist. Es bleibt die Frage, ob unendlich viele $\mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{L}_2 \supset \cdots$ zum gleichen Verengungsideal $\mathfrak{l}$ gehören können. Nach (11) ist das ausgeschlossen, wenn die zugehörigen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von vornherein beschränkt sind, also für $\alpha \geqq 2$. Für $\alpha = 0$, d. h. für $\mathfrak{R}^*/(0 - o) = \mathfrak{R}^* = \langle \Gamma, \mathfrak{R} \rangle$ existieren dagegen stets nichtabbrechende eingeschränkte Unterketten von (sogar zweiseitigen) Idealen, etwa

$$\mathfrak{R}^* 2 + \mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}^* 4 + \mathfrak{R} \supset \cdots \supseteqq \mathfrak{R} \neq (o).$$

18) Der Einheitlichkeit halber bezeichnen wir jetzt auch die zweiseitigen Ideale eines Einselementoberringes mit großen Buchstaben.

Trotzdem läßt sich ein Erhaltungssatz der eingeschränkten Unterkettenbedingung für strenge Einselementoberringe verhältnismäßig allgemein aussprechen. Ist nämlich $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}^*/(0-o)$ strenger Einselementoberring von $\mathfrak{R}$, so ist $\varkappa = 0$, d. h. $\mathfrak{R}$ ein Ring der Charakteristik $\nu = 0$, der nur Annullatoren als Operatorelemente enthält. Die wichtigsten Ringe dieser Art erfüllen aber den eingeschränkten Unterkettensatz selbst nicht:

(13) *Existiert in einem kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ mit $\varkappa = 0$ ein reguläres Element r, so bilden die Ideale*

$$(r^2, 2r) \supset (r^2, 4r) \supset \cdots \supseteqq (r^2) \neq (o)$$

eine nicht abbrechende eingeschränkte Unterkette[19]).

Es genügt offensichtlich zu zeigen, daß $(r^2, 2\tau r)$ stets $(r^2, 4\tau r)$ echt enthält. Aus der Annahme der Gleichheit folgte aber

$$2\tau r = x_1 r^2 + \gamma_1 r^2 + 4\tau x_2 r + 4\tau \gamma_2 r$$

mit $x_i \in \mathfrak{R}$, $\gamma_i \in \Gamma$, also

$$2\tau(1-2\gamma_2) r = (x_1 r + \gamma_1 r + 4\tau x_2) r.$$

Da r als reguläres Element bei Charakteristik 0 von unendlicher Ordnung ist, besagt dies, daß ein (von o verschiedenes) ganzzahliges Vielfaches von r gleich dem Produkt von r mit einem Ringelement s ist:

$$\gamma r = s r.$$

Dann wäre aber r wegen $(\gamma - s) r = o$ und $\gamma \neq s$ Nullteiler in $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^*$, was nach den Betrachtungen in § 3 ausgeschlossen ist.

Dagegen kann in einem nichtkommutativen Ring $\mathfrak{R}$ mit $\varkappa = 0$ der eingeschränkte Unterkettensatz durchaus gelten. So hat z. B. der bereits betrachtete Ring

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ P & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nur} \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P & 0 \end{pmatrix}$$

als nichttriviales zweiseitiges Ideal, und es existiert kein Linksideal, welches $\mathfrak{a}$ umfaßt. Wir können also zusammenfassend formulieren:

(14) *Der eingeschränkte Unterkettensatz gilt für $\mathfrak{R}$ und einen strengen Einselementoberring $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ gleichzeitig, abgesehen von den Fällen:*

1. $\varkappa = 0$, $\mathfrak{R}$ *nichtkommutativ;*

2. $\varkappa = 0$, $\mathfrak{R}$ *kommutativ, aber jedes Element von $\mathfrak{R}$ ist Nullteiler.*

In diesen Fällen gilt der eingeschränkte Unterkettensatz (wie stets bei $\varkappa = 0$) für $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^*$ nicht, obwohl er für $\mathfrak{R}$ erfüllt sein kann.

---

[19]) Positiv gewendet bedeutet dies z. B.: Jeder Unterring eines algebraischen Zahlkörpers enthält (von 0 verschiedene) ganze rationale Zahlen.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ergibt sich hieraus und aus den Überlegungen in § 3 sofort, daß der GRELLsche Übertragungssatz der eingeschränkten Unterkettenbedingung auf Oberringe von $\mathfrak{R}$, deren Quotientenkörper endlich algebraisch über dem von $\mathfrak{R}$ sind, auch ohne die Voraussetzung der Existenz von Einselementen ausgesprochen werden kann.

Wir wollen diese Überlegungen noch mit einigen Bemerkungen über Restklassenringe $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{R}$ abrunden. Zunächst ist klar, daß für jeden Einselementoberring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ der Restklassenring $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$ Einselementoberring von $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ ist. Doch brauchen sich dabei keine Eigenschaften von $\mathfrak{S}$ bezüglich $\mathfrak{R}$ wie „minimal" oder „streng" auf $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$ bezüglich $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ zu übertragen. Nun folgt aber aus (11), daß es unter allen Idealen $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}$, die $\mathfrak{a}$ als Verengungsideal haben, stets ein maximales gibt, etwa $\tilde{\mathfrak{A}}$. Man kann also von $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{S}/\tilde{\mathfrak{A}}$ übergehen, und erhält so in der Tat einen strengen und damit minimalen Einselementoberring von $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$.

Übrigens ist das Bild $\bar{a}$ eines α-Elementes a von $\mathfrak{R}$ auch wieder α-Element von $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$, doch brauchen nicht alle Operatorelemente von $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ Bilder von Operatorelementen von $\mathfrak{R}$ zu sein.

Literaturverzeichnis

[1] A. A. ALBERT, *Modern higher algebra*, 5. Aufl. (Chicago, 1947).

[2] K. ASANO, Über die Quotientenbildung von Schiefringen, *J. Math. Soc. Japan*, **1** (1949), 73—78.

[3] B. BROWN—N. H. MCCOY, Rings with unit element which contain a given ring, *Duke Math. J.*, **13** (1946), 9—20.

[4] H. GRELL, Über die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie, *Ber. Math.-Tagung Tübingen 1946* (1947), S. 67.

[5] L. RÉDEI, *Algebra* I (Leipzig, 1959).

[6] M. H. STONE, The theory of representations for Boolean algebras, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 37—111.

[7] J. SZENDREI, On the extension of rings without divisors of zero, *Acta Sci. Math.*, **13** (1949—50), 231—234.

(Eingegangen am 30. November 1959, in veränderter Form am 31. Oktober 1960)