Sur une propriété d'interpolation remarquable dans la théorie des ensembles partiellement ordonnés

Par MIHAÏL BENADO à Bucarest (Roumanie)

A Monsieur le Professeur László Rédei, à l'occasion de son 60-ième anniversaire

§ 1. Introduction

On doit à FRÉDÉRIC RIESZ la découverte d'une propriété d'interpolation des ensembles partiellement ordonnés (dans la suite, propriété (IR); cf. par exemple [7] Chap. IV, § 3), dont il a montré l'importance pour la théorie des groupes partiellement ordonnés, la théorie des opérations linéaires etc. (Cf. [7] Chap. XIV et XV.)

Dans le § 2 de mon rapport [1] j'ai attiré l'attention au fait que la propriété (IR) préfigure la notion de *structure géométrique rieszienne* d'une configuration quelconque (cf. aussi [2], 2.2, Exemple 3). Effectivement, pour qu'une configuration[1]) satisfasse à la propriété (IR) *il faut* (et au cas où elle est filtrante, *il suffit*) que sa structure géométrique rieszienne coïncide (au sens de [1] 3.4.1) avec sa structure géométrique discrète ([2] 2.5.1). J'ai indiqué également les relations de la structure géométrique rieszienne aux structures géométriques *dédékindienne* et *hausdorffienne* ([1] 3.2 et [2] 2.2 et 2.3).

Les treillis ([7] Chap. II, § 1) satisfont toujours, comme on sait, à la propriété (IR). Par contre, les multitreillis [3], [4] ne la vérifient pas toujours; mais tout multitreillis *filtrant*, satisfaisant à la propriété (IR), est un treillis. (Cf. [3] 1.4.1.)

Il y a cependant des multitreillis, tels les multitreillis distributifs ([3] § 6 et [4], § 3), qui vérifient une propriété d'interpolation remarquable, d'ailleurs plus faible que la propriété (IR), notamment la *propriété d'interpolation cartésienne* (dans la suite, propriété (IC)), que j'ai découverte à l'occasion de mes recherches sur la fonction de Möbius (cf. [5] § 3 et [6]).

---

[1]) Quant aux notations et aux définitions, je renvoie le lecteur à ma note [2] dont je présuppose la connaissance. Voir aussi [1] § 3 et le § 2 du présent travail.

Mon but dans le présent travail est de faire valoir la propriété (IC) pour les structures géométriques $\mathcal{G}$-distributives d'une configuration quelconque, attendu que certaines suppositions „d'incidence" ([1] § 4) soient vérifiées.

Je vais notamment prouver la proposition suivante:

Théorème. *Toute structure géométrique analytique, fermée et $\mathcal{G}$-distributive d'une configuration, est à interpolation cartésienne.*

Le théorème 3.3 de [5] est un cas particulier du théorème ci-dessus dont la démonstration est, du reste, calquée sur celle que j'ai donnée du théorème cité, bien que, dans les détails, elle en diffère sensiblement sur quelques points.

§ 2. Quelques définitions

2.1. Par *configuration* et par *ensemble partiellement ordonné* ([7] Chap. I, § 1), j'entends la même chose. Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{S}$ désigne une configuration quelconque par rapport à l'ordre partiel $\geqq$ ou $\leqq$.

2.2. Soient Υ une *relation de divisibilité* et Σ une *relation de multiplicabilité* ([2] 2.1) définies dans $\mathfrak{S}$.[2] Je dirai que $\mathfrak{S}$ *est munie d'une* (Υ, Σ)-*structure géométrique,* lorsqu'il existe au moins un quadruple d'éléments (non nécessairement distincts deux à deux) $a, b, d, m \in \mathfrak{S}$ tels que

$$(1) \qquad d\Upsilon\{a, b\}, \quad m\Sigma\{a, b\}.$$

Cette définition est un peu plus large que celle que j'ai donnée dans ma note [2], 2.5, axiome $SD1$. Dans tout ce qui suit, je suppose que $\mathfrak{S}$ est munie de quelque (Υ, Σ)-structure géométrique (= structure géométrique, tout court).

2.2.1. Lorsque pour $a, b, d, m \in \mathfrak{S}$ on a (1), je dirai que $(d, m; a, b)$ est un (Υ, Σ)-*quadrilatère.* (Cf. [1] 3.3.)

2.3. Je dirai qu'une structure géométrique est:

A) *analytique,* lorsque, pour tous les $a, b, d, m, x \in \mathfrak{S}$ satisfaisant à (1) et à $d \geqq x \geqq m$, il existe des éléments $a_1, a' \in \mathfrak{S}$ tels que $d \geqq a_1\Upsilon\{a, x\}$ et $m \leqq a'\Sigma\{a, x\}$ (cf. [2] 2.5, axiomes $SD2_1$ et $SD2'$);

B) *fermée,* lorsque, pour tous les $a, a_1, a', b, d, m \in \mathfrak{S}$ satisfaisant à (1) et à $d \geqq a_1 \geqq a \geqq a' \geqq m$, on a les relations $d\Upsilon\{a_1, b\}$ et $m\Sigma\{a', b\}$ (cf. [1] 4.2);

C) $\mathcal{G}$-*distributive,* lorsque, pour tous les $a, b, b', d, m \in \mathfrak{S}$ satisfaisant à (1) et à $d\Upsilon\{a, b'\}$ et $m\Sigma\{a, b'\}$, on a $b = b'$ (cf. [1] 6.3);

[2]) Et non nécessairement *duales l'une de l'autre* au sens de ma note [2] 2.4.

D) *à interpolation cartésienne*, lorsque, pour tous les a, a_1, a', b, b_1, b', $d, m \in \mathfrak{S}$ satisfaisant à (1), à

$$d \geqq a_1 \geqq a \geqq a' \geqq m, \quad d \geqq b_1 \geqq b \geqq b' \geqq m \tag{2}$$

et à

$$\begin{cases} a_1 \Upsilon\{a, b'\}, & a' \Sigma\{a, b_1\}, \\ b_1 \Upsilon\{a', b\}, & b' \Sigma\{a_1, b\}, \end{cases} \tag{3}$$

on a[3])

$$(a_1/b') \cap (b_1/a') \neq \emptyset \tag{4}$$

où $\emptyset$ est l'ensemble vide.

C'est cette propriété que j'appelle ici *propriété* (IC) des structures géométriques; cf. [1] 4.4.

§ 3. Démonstration du théorème

3.1. Lemme. *Toute structure géométrique analytique, fermée et $\mathfrak{G}$-distributive est $\mathfrak{O}$-modulaire. Cela veut dire que pour tous les a, a_1, b, b' $d, m \in \mathfrak{S}$ satisfaisant à* (1) *et à* $d \geqq a_1 \geqq a$, $b \geqq b' \geqq m$, *la relation* $a_1 \Upsilon\{a, b'\}$ *équivaut à la relation* $b' \Sigma\{a_1, b\}$.

Démonstration. Je démontre seulement que $a_1 \Upsilon\{a, b'\}$ entraîne $b' \Sigma\{a_1, b\}$; quant à la réciproque, il suffit de remarquer que la dualité au sens de [7] (Chap. I, § 3) transforme toute relation de divisibilité Υ (de multiplicabilité Σ) en une relation de multiplicabilité $\Sigma = \check{\Upsilon}$ (de divisibilité $\Upsilon = \check{\Sigma}$), qui lui est duale au sens de [2] 2.4.

Or, d'après la relation $a_1 \Upsilon\{a, b'\}$ et d'après la fermeture (2.3, B), appliquée au (Υ, Σ)-quadrilatère $(d, m; a, b)$ (2.2.1), il est clair que $(a_1, m; a, b')$ est un (Υ, Σ)-quadrilatère. D'autre part, l'analyticité (2.3, A), appliquée également à $(d, m; a, b)$, entraîne l'existence d'un $b'' \in \mathfrak{S}$ tel que

$$m \leqq b'' \Sigma\{a_1, b\}. \tag{5}$$

Il s'ensuit que $a_1 \geqq b'' \geqq m$ et, par conséquent, on peut, en appliquant l'analyticité au (Υ, Σ)-quadrilatère $(a_1, m; a, b')$, trouver un $a_2 \in \mathfrak{S}$ tel que

$$a_1 \geqq a_2 \Upsilon\{a, b''\}. \tag{6}$$

Je dis maintenant qu'on a

$$\begin{matrix} d\Upsilon\{b, a_1\}, & d\Upsilon\{b, a_2\}, \\ b''\Sigma\{b, a_1\}, & b''\Sigma\{b, a_2\}. \end{matrix} \tag{7}$$

---

[3]) Pour $u, v \in \mathfrak{S}$ tels que $u \geqq v$, j'entends par u/v le *quotient* de u par v, cela veut dire ([7] Chap. I, § 1) l'ensemble de tous les $x \in \mathfrak{S}$ tels que $u \geqq x \geqq v$.

Or, les relations (7), première ligne, résultent de la fermeture appliquée au (Υ, Σ)-quadrilatère $(d, m; a, b)$ et de ce que, d'après les suppositions du lemme et d'après (6), on a $a_1 \in d/a$ et $a_2 \in d/a$.

Quant aux relations (7), deuxième ligne, la première de celles-ci résulte immédiatement de (5). Pour ce qui est de la deuxième, elle résulte de ce que, *toujours d'après* (5) *et d'après la première relation de* (7)[4]), le quadrilatère $(d, b''; a_1, b)$ est également un (Υ, Σ)-quadrilatère, auquel il ne reste plus qu'à appliquer la fermeture, compte tenu de ce que, d'après (6), on a $a_2 \in a_1/b''$.

Maintenant, on tire des (7) et de la $\mathfrak{G}$-distributivité, l'égalité $a_1 = a_2$ laquelle, d'après (6), entraîne la relation

$$a_1 \Upsilon \{a, b''\}. \tag{6'}$$

Or, d'après la fermeture appliquée au (Υ, Σ)-quadrilatère $(d, m; a, b)$ on a encore

$$m \Sigma \{a, b'\}, \quad m \Sigma \{a, b''\}. \tag{8}$$

Les relations (6'), (8) et la supposition $a_1 \Upsilon \{a, b'\}$ prouvent, d'après la $\mathfrak{G}$-distributivité, qu'on a $b' = b''$ ce qui, d'après (5), entraîne $b' \Sigma \{a_1, b\}$. Ceci achève la démonstration du lemme.

3.2. Je démontre maintenant le théorème. Il s'agit de prouver que les relations (1), (2), (3) entraînent la relation (4). (Je remarque en passant que, d'après le lemme 3.1, les relations (3) ne sont pas toutes indépendantes les unes des autres; ainsi, par exemple, les deux dernières sont toujours une conséquence des deux premières, etc.)

Or, d'après les suppositions (1)—(3) et d'après la fermeture, les quadrilatères $(d, a'; a, b_1)$ et $(a_1, m; a, b')$ sont des (Υ, Σ)-quadrilatères; il s'ensuit d'après l'analyticité appliquée à ces (Υ, Σ)-quadrilatères respectivement, les relations

$$a' \leqq x_1 \Sigma \{a_1, b_1\}, \quad a_1 \geqq x' \Upsilon \{a', b'\}, \quad (x_1, x' \in \mathfrak{S}), \tag{9}$$

ce qui, d'après le lemme 3.1, appliqué aux mêmes $(d, a'; a, b_1)$ et $(a_1, m; a, b')$ respectivement, entraîne

$$a_1 \Upsilon \{a, x_1\}, \quad a' \Sigma \{a, x'\}. \tag{10}$$

D'autre part, on a, compte tenu des (9) et de la fermeture appliquée toujours aux (Υ, Σ)-quadrilatères $(d, a'; a, b_1)$ et $(a_1, m; a, b')$,

$$a' \Sigma \{a, x_1\}, \quad a_1 \Upsilon \{a, x'\}. \tag{10'}$$

---

[4]) Argument de M. GÁBOR SZÁSZ (lettre à l'auteur, le 15 juillet 1960). Mon argument originel faisait inutilement intervenir ici la propriété de fermeture (appliquée à $(d, m; a, b)$).

Maintenant, on tire de (10), (10′) et de la $\mathcal{G}$-distributivité, l'égalité $x_1 = x'(=x)$ ce qui, d'après (9), prouve que $x \in (a_1/b') \cap (b_1/a')$. Ceci achève la démonstration du théorème.

3.3. Remarque. On peut montrer, en s'appuyant toujours sur la $\mathcal{G}$-distributivité, que l'ensemble (non vide) $(a_1/b') \cap (b_1/a')$ n'a qu'un seul élément.

Le développement complet de ces questions forme l'objet de la troisième partie de mon travail *in extenso* sur la théorie des structures géométriques des configurations, où je traite de la classification et des propriétés des structures géométriques distributives.

Remarque (ajoutée le 13 févriar 1961). M. Gábor Szász m'a fait signaler que la propriété de $(d, b''; a_1, b)$ d'être un (Υ, Σ)-quadrilatère découle directement de (5) et de la première assertion de (7).

Références

[1] M. Benado, Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés. (Rapport destiné au Colloque international de Théorie des ensembles ordonnés, Oberwolfach, 26—30 Octobre 1959.) *Publ. Sci. Univ. Alger,* 7 (1960).

[2] —— Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **247** (1958), 2265—2268.

[3] —— Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier. II (Théorie des multistructures), *Czechoslov. Math. Journal,* **5** **(80)** (1955), 308—344.

[4] —— La théorie des multitreillis et son rôle en Algèbre et en Géométrie. (Rapport destiné au Colloque international de Théorie des ensembles ordonnés, Oberwolfach, 26—30 Octobre 1959.) *Publ. Sci. Univ. Alger,* 7 (1960).

[5] —— Bemerkungen zur Theorie der Vielverbände. IV (Über die Möbius'sche Funktion), *Proceedings Cambridge Phil. Soc.,* **56** (1960), 291—317.

[6] —— Sur la fonction de Möbius, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **246** (1958), 863—865. Voir aussi *ibid.,* 2553—2555.

[7] G. Birkhoff, *Lattice Theory,* revised edition (New York, 1948).

(Reçu le 4 juillet 1960)